Problemes proposats de conjunts

Problema 1 Digueu quins d'aquests conjunts són iguals:

$$A = \{x \mid \exists y \in \mathbb{Z} \,:\, 0 \leq y \leq 4 \text{ i } x = 2y+1\},\ B = \{1,3,1,5,1,7,3,9\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x-3)(x-5)(x-7) = 0\},\ D = \{2x-1 \mid x \in \{1,2,3,4,5\}\},$$
$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \text{ i x és primer i senar}\},\ F = \{7,5,3\}.$$

Problema 2 Donats els conjunts

$$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } |x-1| \leq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 < 4\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+1)^2\}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 7 = 0\}$$

determineu $A \cup B$, $A - B$, $C \cap D$, B^2 i $(A \times B) \cap (B \times A)$.

Problema 3 Trobeu el conjunt $\mathcal{P}(E)$, en els casos següents:

a) $E = \{1,2,3\}$.

b) $E = \emptyset$.

c) $E = \mathcal{P}(\emptyset)$.

Digueu, raonadament, el nombre d'elements de $\mathcal{P}(E)$ si $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Problema 4 Sigui E un conjunt i siguin A, B, C i D subconjunts de E. Demostreu les igualtats següents:

a) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$.

b) $A \cup (A \cap B) = A$ i $A \cap (A \cup B) = A$.

c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ i $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Problema 5 Siguin A, B i C conjunts.

a) Demostreu que $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

b) Deduïu una fórmula que expressi $A - (B \cap C)$ com a unió de dos conjunts.

c) Expresseu $A \cup B \cup C$ com a unió de conjunts disjunts.

Problema 6 Donats tres subconjunts A, B i C d'un conjunt E, simplifiqueu les següents expressions indicant les propietats que utilitzeu en cada pas.

a) $\overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{\overline{A} \cup B}$.

b) $[(\overline{A} \cap B) \cup A] \cup (B \cup C)$.

Problema 7 Si $A \triangle B$ simbolitza la diferència simètrica de A i de B, responeu les qüestions següents:

a) En cas que $A \triangle B = A \triangle C$, quina relació hi ha entre B i C?

b) Existeix un subconjunt X de E tal que $A \triangle X = A, \forall A \in \mathcal{P}(E)$?

Problema 8 Siguin A i B conjunts.

a) És possible que $A \subseteq B$ i $A \in B$?

b) És possible que $A - B = B - A$?

Problema 9 Sent A un subconjunt de E, demostreu les relacions següents:

a) $[\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad A \cup X = E] \quad \Longleftrightarrow \quad A = E$.

b) $[\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad A \cap X = \emptyset] \quad \Longleftrightarrow \quad A = \emptyset$.

Problema 10 Siguin A, B, C i D conjunts. Demostreu:

a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

b) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$. És certa la igualtat?

Problema 11 Donat un conjunt finit A, representem per $|A|$ el cardinal de A.

a) Si A i B són dos conjunts finits, expresseu el cardinal de $A \cup B$ en funció dels cardinals de A i B.

b) Utilitzant l'apartat a), trobeu una fórmula pel $|A \cup B \cup C|$, on A, B i C són conjunts finits.

c) Proveu que si A i B són conjunts finits, aleshores $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Problema 12 Entre els 200 estudiants que inicien els estudis d'informàtica a una escola universitària Z, hi ha un 70% que manifesten haver treballat, almenys, amb un dels llenguatges de programació següents: C, PASCAL o BASIC. Es donen també els següents percentatges relatius al total d'estudiants: el 35% ha treballat amb C, el 38% amb BASIC, el 25% amb PASCAL, el 5% amb tots tres, el 22% només amb BASIC i el 10% només amb PASCAL. Quants estudiants han treballat només amb C?

Solucions dels problemes de conjunts

Problema 1

$A = B = D$ i $C = E = F$.

Problema 2

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}, \quad A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}.$$

$$C \cap D = \{(2, 9), (-3, 4)\}, \quad B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 < x, y < 2\}.$$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x < 2 \text{ i } -1 \leq y < 2\}.$$

Problema 3

a) $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

b) $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$.

c) $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

El nombre d'elements de $\mathcal{P}(E)$, on $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, és 2^n.

Problema 5

b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

c) $A \cup B \cup C = [A \cup (B - A)] \cup [C - (A \cup B)]$.

Problema 6

a) $\overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{\overline{A} \cup B} = \emptyset$.

b) $[(\overline{A} \cap B) \cup A] \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.

Problema 7

a) $B = C$.

b) Sí, $X = \emptyset$.

Problema 8

a) Sí, per exemple, $A = \{a\}$ i $B = \{a, \{a\}\}$.

b) Si, i només si, $A = B$.

Problema 10

b) No és certa la igualtat, com es pot observar en l'exemple següent:
Si $A = \{x\}$, $B = \{1\}$, $C = \{y\}$ i $D = \{2\}$, aleshores

$$(y, 1) \in (A \cup C) \times (B \cup D),$$

però en canvi $(y, 1) \notin A \times B$ i $(y, 1) \notin C \times D$.

Problema 11

a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

c) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Problema 12

El nombre d'estudiants que només han treballat amb C és 30.

Problemes proposats de relacions

Problema 13 Si $A = \{1, 2, 3\}$, doneu un exemple de relació binària R definida en A que sigui:

a) Reflexiva i transitiva, però no simètrica.

b) Reflexiva i simètrica, però no transitiva.

c) Simètrica, antisimètrica i transitiva.

d) Transitiva, però no simètrica ni antisimètrica.

Problema 14 Determineu quines de les següents relacions són d'equivalència:

a) $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on $a\ R\ b \iff$ suma xifres de $a =$ suma xifres de b.

b) En el conjunt G de totes les rectes del pla es defineix la relació:

$$r\ R\ s \iff r \text{ és perpendicular a } s.$$

c) En $\mathbb{N}$ es defineix la relació: $x\ R\ y \iff x \mid y$ (x divideix y).

d) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, on $a\ R\ b \iff a$ i b difereixen en un múltiple enter de 2π.

Problema 15 Definim en el conjunt $A = \{2, 3, 4, 6, 12, 15, 24, 120\}$ la relació binària següent:

$$a\ R\ b \iff \text{suma de xifres } a = \text{suma de xifres de } b.$$

Trobeu les classes d'equivalència de A per aquesta relació d'equivalència R i determineu el conjunt quocient.

Problema 16 Es defineix en $\mathbb{Z}$ la relació següent

$$a\ R\ b \iff a + 4b \text{ és un múltiple de } 5.$$

Proveu que és una relació d'equivalència i trobeu el conjunt quocient.

Problema 17 a) Considerem en el conjunt $\mathbb{Z}$ la relació següent:

$$a\ R\ b \iff a \cdot b > 0.$$

Proveu que és simètrica i transitiva però no reflexiva.

b) Analitzeu el següent fals teorema i la seva corresponent “demostració”:

Teorema. *Si R és una relació simètrica i transitiva, aleshores R és reflexiva.*

Demostració: Si $a\ R\ b$ llavors, per ser R simètrica, es té que $b\ R\ a$. Ara bé, del fet que $a\ R\ b$ i $b\ R\ a$, per ser R transitiva, se'n dedueix que $a\ R\ a$. Per tant, $\forall a,\ a\ R\ a$, és a dir, R és reflexiva.

Observeu que l'exemple de l'apartat a) ho contradiu i trobeu on és l'error en la demostració.

Problema 18 Definim en el conjunt $\mathbb{R}^2$ la relació següent:

$(a,b)\ R_k\ (c,d) \iff a^2 + k\cdot b^2 = c^2 + k\cdot d^2$ on k és un nombre real fixat.

a) Demostreu que $\forall k \in \mathbb{R}$, R_k és una relació d'equivalència.

b) Trobeu la classe d'equivalència per a R_1, ($k=1$), de l'element $(1,0)$ i interpreteu-la geomètricament.

c) Descriviu el conjunt quocient $\mathbb{R}^2/R_1$ i doneu una interpretació geomètrica de les classes d'equivalència.

d) Descriviu el conjunt quocient $\mathbb{R}^2/R_{\frac{1}{4}}$. Com s'interpreten ara les classes d'equivalència?

Problema 19 a) Sigui $A=\{a,b,c,d,e\}$. Definiu una relació d'equivalència R en el conjunt A de manera que $A/R = \{\{a\},\{b,c,d\},\{e\}\}$.

b) Sigui A un conjunt no buit i $\{A_i\}_{i\in I}$ una partició de A. Definiu una relació d'equivalència R en el conjunt A de forma que $A/R=\{A_i,\ i\in I\}$, és a dir, les classes d'equivalència de A per a R són precisament els conjunts A_i.

Problema 20 Considerem en el conjunt $A=\{2,3,4,6,12,15,24,120\}$ la relació binària següent:

$$a\ R\ b \iff a \mid b.$$

a) Proveu que R és una relació d'ordre. És d'ordre total?

b) Trobeu, en cas d'existir, màxim, mínim, elements maximals i minimals de (A,R).

Problema 21 Sigui E un conjunt. Definim en el conjunt $\mathcal{P}(E)$, la relació següent:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A\ R\ B \iff A \subseteq B.$$

a) Proveu que R és una relació d'ordre.

b) Trobeu el màxim i el mínim del conjunt ordenat $(\mathcal{P}(E), R)$.

c) Proveu que si E té més d'un element, aleshores $(\mathcal{P}(E), R)$ és un conjunt parcialment ordenat.

Problema 22 Sigui $(A, \leq)$ un conjunt ordenat. Proveu o refuteu els enunciats següents:

a) Si $m \in A$ és el màxim (mínim) de A, aleshores m és l'únic element maximal (minimal) de A.

b) Si $(A, \leq)$ és un conjunt totalment ordenat, aleshores A té màxim o mínim.

c) Si A és un conjunt finit, aleshores A té almenys un element maximal (minimal).

d) Si (A, R) és un conjunt totalment ordenat i finit, aleshores A té màxim (mínim).

e) Si A té un únic element maximal (minimal), aleshores A té màxim (mínim).

f) Si $(A, \leq)$ és un conjunt totalment ordenat i A té un element maximal (minimal), aleshores A té màxim (mínim).

Problema 23 *Composició de relacions.*
Donades dues relacions binàries R_1 i R_2 definides en un conjunt A, es defineix la relació R_1 *composta amb* R_2, que se simbolitza per $R_1 \circ R_2$, de la manera següent:

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, b) \in A \times A \mid \exists c \in A \text{ verificant que } (a, c) \in R_1 \wedge (c, b) \in R_2\}.$$

a) Demostreu que si R_1, R_2 i R_3 són tres relacions binàries definides en un conjunt A, aleshores $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$.

Donada una relació binària R definida en un conjunt A, les *potències* de R es defineixen recursivament de la manera següent:

$$\begin{array}{rcl} R^1 & = & R \\ R^n & = & R \circ R^{n-1},\ n \in \mathbb{N} \text{ i } n \geq 2. \end{array}$$

Sigui $A = \{a, b, c, d, e\}$ i $R = \{(a, b), (b, c), (c, a), (d, e), (e, d)\}$.

b) Representeu gràficament el digraf $D = (A, R)$.

c) Trobeu R^2, R^3 i R^4.

d) Quin és el valor més petit de n tal que $R^n = R$?

Problema 24 Donat un conjunt finit A de n elements, determineu:

a) Quantes relacions binàries es poden definir en A?

b) Quantes d'aquestes relacions són reflexives?

c) Quin és el nombre màxim d'elements que pot tenir una relació definida en A que sigui antisimètrica?

Solucions dels problemes de relacions

Problema 13

a) $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$.

b) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$.

c) $R = \{(1,1)\}$.

d) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$.

Problema 14

Només les relacions definides en els apartats a) i d) són relacions d'equivalència.

Problema 15

Les classes d'equivalència són: $\overline{2} = \{2\}$, $\overline{3} = \{3,12,120\}$, $\overline{4} = \{4\}$, $\overline{6} = \{6,15,24\}$. El conjunt quocient és $A/R = \{\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{6}\}$.

Problema 16

El conjunt quocient és: $\mathbb{Z}/R = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$, on $\overline{a} = \{a+5k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Problema 18

b) La classe d'equivalència per a R_1 de l'element $(1,0)$ és

$$\overline{(1,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\},$$

i geomètricament s'interpreta com el conjunt de punts d'una circumferència centrada en l'origen $(0,0)$ i de radi 1.

c) $\mathbb{R}^2/R_1 = \{\overline{(r,0)},\ r \in \mathbb{R} \wedge r \geq 0\}$. La classe d'equivalència $\overline{(r,0)}$, on $r > 0$, s'interpreta com el conjunt de punts d'una circumferència centrada en l'origen $(0,0)$ i de radi r.

d) $\mathbb{R}^2/R_{\frac{1}{4}} = \{\overline{(r,0)}, r \in \mathbb{R} \wedge r \geq 0\}$, on

$$\overline{(r,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{4r} = 1\}, \text{ si } r > 0 \text{ i } \overline{(0,0)} = \{(0,0)\}.$$

Les classes d'equivalència s'interpreten geomètricament com a el·lipses.

Problema 19

a) $R = \{(a,a),(b,b),(b,c),(b,d),(c,b),(c,c),(c,d),(d,b),(d,c),(d,d),(e,e)\}$.

b) $a\,R\,b \iff \exists i \in I$ tal que $a \in A_i \wedge b \in A_i$.

Problema 20

b) El màxim és 120 i, per tant, aquest és l'únic element maximal; no té mínim, i els elements minimals són el 2 i el 3.

Problema 21

b) $\emptyset$ és el mínim i E és el màxim.

c) Si a i b són dos elements diferents del conjunt E, aleshores $\{a\}$ i $\{b\}$ són dos elements de $\mathcal{P}(E)$ que no són comparables, és a dir, $\{a\} \not\mathcal{R} \{b\}$ i $\{b\} \not\mathcal{R} \{a\}$.

Problema 22

Els enunciats a), c), d) i f) són certs.

L'enunciat b) és fals. Contraexemple: $(\mathbb{Z}, \leq)$ on $\leq$ representa l'ordenació usual de $\mathbb{Z}$. Es tracta d'un conjunt totalment ordenat que no té ni mínim ni màxim.

L'enunciat e) és fals. Contraexemple: Consideris en el conjunt de nombres naturals la relació usual $(2 \leq 3 \leq 4 \leq \ldots)$ llevat que a l'1 només se'l relaciona amb si mateix. D'aquesta manera, tenim un exemple de conjunt ordenat que té un únic element maximal, l'1, i en canvi no té màxim.

Problema 23

c) $R^2 = \{(a,c),(b,a),(c,b),(d,d),(e,e)\}$,
$R^3 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,e),(e,d)\}$,
$R^4 = \{(a,b),(b,c),(c,a),(d,d),(e,e)\}$.

d) $n = 7$.

Problema 24 a) 2^{n^2}; b) 2^{n^2-n}; c) $\dfrac{n^2+n}{2}$.

Problemes proposats d'aplicacions

Problema 25 Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per:

$$f(x) = 2x - 3 \quad \text{i} \quad g(x) = x^2 + 1.$$

Proveu que f és bijectiva i que g no ho és, i calculeu-ne les aplicacions $g \circ f$ i $f \circ g$.

Problema 26 Donats els conjunts $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b, c, d, e\}$, determineu:

a) El nombre d'aplicacions injectives de A en B tals que $f(1) = a$.

b) El nombre d'aplicacions bijectives de A en A.

c) El nombre d'aplicacions f de A en A tals que $f^2 = f$.

Problema 27 Per a cadascuna de les aplicacions i conjunts següents:

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ i $Y = [0, 4]$;

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ i $Y = (1/8, 1)$;

c) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n$ si n és senar i $f(n) = n/2$ si n és parell i $Y = \{1, 2, 3, 4\}$;

d) $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2 + x}$ i $Y = [1/4, 1/2]$;

Estudieu i determineu:

i) Si l'aplicació f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

ii) La imatge de l'aplicació.

iii) L'antiimatge del conjunt Y.

iv) L'aplicació inversa, en cas que existeixi.

Problema 28 Per a cada nombre natural n definim l'aplicació f_n

$$\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f_n(x) = x^n. \end{array}$$

Per a quins valors de n és f_n una aplicació bijectiva? Quina és, en cas que f_n sigui bijectiva, l'aplicació inversa?

Problema 29 Sigui f una aplicació de A en B; siguin C i D subconjunts de A i siguin E i F subconjunts de B. Demostreu que:

a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

b) $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$.

c) $f(f^{-1}(E)) \subseteq E$. És certa la igualtat? I si f és exhaustiva?

Problema 30 Siguin A i B dos conjunts i siguin

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{i} \quad g : B \longrightarrow A$$

dues aplicacions. Demostreu que:

a) Si $g \circ f$ és injectiva, aleshores f és injectiva.

b) Si $g \circ f$ és exhaustiva, aleshores g és exhaustiva.

c) Si f i g són bijectives, aleshores $g \circ f$ és bijectiva i $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Problema 31 Sigui $f : A \longrightarrow A$ una aplicació.

a) Demostreu que

$$f^2 = \mathrm{Id}_A \iff f \text{ és bijectiva i } f^{-1} = f \quad (f \text{ és una involució}).$$

b) Si $A = \mathbb{R}$ i $f(x) = ax + b$, on $a, b \in \mathbb{R}$, calculeu per a quins valors de a i b és f una involució.

Problema 32 Siguin A i B dos conjunts i $f : A \longrightarrow B$ una aplicació de A en B. Es defineix en A la relació R_f de la manera següent:

$$\forall x, y \in A,\ x\ R_f\ y \iff f(x) = f(y).$$

a) Demostreu que R_f és una relació d'equivalència.

b) Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ i $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = a$, $f(4) = b$, determineu el conjunt quocient A/R_f.

Problema 33 Sigui E un conjunt i A, B subconjunts de E. Demostreu que l'aplicació

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & X & \longrightarrow & f(X) = A \cup (B \cap X), \end{array}$$

satisfà que $f^2 = f$.

Problema 34 Sigui X un conjunt i A un subconjunt de X. La *funció característica* de A, denotada per χ_A, és per definició l' aplicació següent:

$$\begin{array}{rcll} \chi_A: & X & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longrightarrow & \chi_A(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in A \\ 0 & \text{si} & x \notin A. \end{array} \right. \end{array}$$

Si A i B són dos subconjunts de X, demostreu que:

a) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

b) $\chi_{A\cup B} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

c) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x) \cdot [1 - \chi_B(x)]$.

Problema 35 Sigui f l'aplicació de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ definida recursivament de la manera següent:

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 2 \\ f(n+1) & = & \left\{ \begin{array}{lll} 4f(n) - 1 & \text{si} & f(n) \text{ no és múltiple de } 3 \\ \dfrac{f(n)}{3} & \text{si} & f(n) \text{ és múltiple de } 3. \end{array} \right. \end{array}$$

Demostreu que f no és injectiva ni exhaustiva.

Problema 36 Sigui E un conjunt finit de cardinal n. Demostreu que el conjunt $\mathcal{P}(E)$ és equipotent a $\{0,1\}^n$.

Problema 37 Siguin A i B dos conjunts finits de cardinal m i n, respectivament. Determineu quina relació ha d'haver-hi entre m i n per tal que:

a) hi hagi una aplicació injectiva de A en B;

b) hi hagi una aplicació exhaustiva de A en B;

a) hi hagi una aplicació bijectiva de A en B.

Solucions dels problemes d'aplicacions

Problema 25

L'aplicació g no és injectiva ja que, per exemple, $g(-1) = g(1)$.

$$(g \circ f)(x) = 4x^2 - 12x + 10 \text{ i } (f \circ g)(x) = 2x^2 - 1.$$

Problema 26

a) 12.

b) 6.

c) 9.

Problema 27

a) f no és ni injectiva ni exhaustiva, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ i $f^{-1}([0,4]) = [-4,4]$.

b) f és bijectiva, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$, $f^{-1}((1/8,1)) = (-3,0)$ i l'aplicació inversa $f^{-1}(x) = \log_2(x)$.

c) f és exhaustiva, $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ i $f^{-1}(\{1,2,3,4\}) = \{1,2,3,4,6,8\}$.

d) f és injectiva, $f([0,+\infty)) = (0, \frac{1}{2}]$ i $f^{-1}([\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]) = [0,2]$.

Problema 28

f_n és bijectiva per a n senar. L'aplicación inversa, per a n senar, és $f_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

Problema 31

b) Per al cas $a = 1$ i $b = 0$, és a dir $f(x) = x$, i pels casos on $a = -1$ i b és un nombre real qualsevol, és a dir $f(x) = -x + b$.

Problema 32

b) $A/R_f = \{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$.

Problema 37

a) Hi ha una aplicació injectiva si $m \leq n$.

b) Hi ha una aplicació exhaustiva si $m \geq n$.

c) Hi ha una aplicació bijectiva si $m = n$.

Problemes proposats d'inducció i numerabilitat

Problema 38 a) Demostreu que les següents igualtats se satisfan per a qualsevol nombre natural n:

a1) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

a2) Si r és un nombre real, aleshores

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \begin{cases} \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r} & \text{si} \quad r \neq 1 \\ n + 1 & \text{si} \quad r = 1. \end{cases}$$

b) Deduïu la fórmula de l'apartat a1) seguint els passos següents:

(1) Escriviu $S = 1 + 2 + \ldots + n$.

(2) Observeu que $S = n + (n - 1) + \ldots + 1$.

(3) Sumeu les dues igualtats anteriors i aïlleu S.

c) Deduïu la fórmula de l'apartat a2) posant $S = 1+r+\ldots+r^n$, multiplicant aquesta equació per r i aïllant S entre les dues equacions obtingudes.

Problema 39 Proveu que les següents afirmacions són certes per a qualsevol nombre natural n:

a) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ és múltiple de 9 .

b) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ és múltiple de 17.

Problema 40 Donat un nombre natural n es defineix el *factorial* de n, denotat per $n!$, de la manera següent:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ n(n-1)! & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}$$

Demostreu que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1.$$

Problema 41 Per a quins nombres naturals n són certes les desigualtats següents?

a) $n < 2^n$.

b) $n^2 < 2^n$.

c) $2^n \leq (n+1)!$.

d) $2^n < n!$.

Problema 42 Observeu que

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2} &= 2-\frac{1}{2} \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} &= 2-\frac{1}{4} \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} &= 2-\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Conjectureu la llei general i proveu-la per inducció.

Problema 43 Conjectureu una fórmula per a la suma dels n primers nombres naturals senars

$$1+3+5+\ldots+(2n-1),$$

i proveu la conjectura mitjançant el mètode d'inducció.

Problema 44 Trobeu la llei general que simplifica el producte

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})\ldots(1-\frac{1}{n^2})$$

i demostreu-la per inducció.

Problema 45 Demostreu les igualtats següents:

a) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n} k, \quad n \geq 1.$

b) $\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k}) = \frac{1}{n}, \quad n \geq 2.$

Problema 46 Sigui a un nombre real fixat i sigui $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successió de nombres reals definida de la forma següent:

$$\begin{array}{lll} (1) & x_1 = & a \\ (2) & x_n = & ax_{n-1} + na^n \quad n \geq 2. \end{array}$$

Conjectureu una expressió per al terme general x_n i demostreu que, efectivament, l'expressió trobada satisfà les condicions (1) i (2).

Problema 47 Es defineix una aplicació $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la manera següent:

1. $f(1, a) = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$
2. $f(m, a) = f(m - 1, a) \cdot a, \quad \forall m \geq 2.$

a) Trobeu una expressió algebraica per a $f(m, a)$ i proveu-la per inducció.

b) Demostreu que $f(m, a) \cdot f(n, a) = f(m + n, a)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

Problema 48 a) Proveu que el conjunt de nombres senars és un conjunt numerable.

b) Proveu que la unió de dos conjunts numerables és un conjunt numerable.

c) Proveu que el producte cartesià de dos conjunts numerables és un conjunt numerable.

Solucions dels problemes d'inducció

Problema 41

a) Certa per a tots els nombres naturals.

b) Certa per a $n = 1$ i per a $n \geq 5$.

c) Certa per a tots els nombres naturals.

d) Certa per a $n \geq 4$.

Problema 42

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Problema 43

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Problema 44

La llei general és $\dfrac{n+1}{2n}$.

Problema 46

$$x_n = \frac{n^2+n}{2}a^n.$$

Problema 47

a) $f(m, a) = a^m$.

Problema 48

a) Sigui $S \subseteq \mathbb{N}$ el conjunt dels nombres senars. Aleshores, l'aplicació

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & S \\ & n & \longrightarrow & 2n-1 \end{array}$$

és una bijecció entre $\mathbb{N}$ i S.

Problemes proposats de grups, anells i cossos

Problema 49 Indiqueu, en cada apartat, si l'operació definida en el conjunt A és una llei de composició interna i determineu-ne les propietats.

a) $A = \mathbb{N}$, $a * b = a^2 \cdot b$.

b) $A = \mathbb{Z}$, $a \perp b = 3^{a+b}$.

c) $A = \mathbb{Q}$, $a \top b = \dfrac{a-b}{2}$.

d) $A = \mathbb{R}$, $a \circ b = \dfrac{a}{b^2}$.

Problema 50 Sigui E un conjunt. Definim en el conjunt $\mathcal{P}(E)$ l'operació interna següent:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A * B = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Determineu quines propietats satisfà aquesta operació.

Problema 51 En el conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals definim la llei de composició:

$$x \circ y = x + y + xy.$$

Determineu-ne les propietats.

Problema 52 Calculeu el valor de $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ que fan que el conjunt $\mathbb{Z}$ amb l'operació "$*$", definida de la manera següent:

$$x * y = \alpha x + \beta y + 3,$$

tingui estructura de grup abelià.

Problema 53 Siguin k i k' dos nombres reals. En el conjunt $\mathbb{R}$ dels nombres reals definim l'operació següent:

$$a * b = kab + k'(a + b).$$

Determineu k i k' per tal que $*$ sigui associativa. Per a quins valors de k i k', $(\mathbb{R}, *)$ és un grup?

Problema 54 Considerem el conjunt $G = \{(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid a \neq 0\}$. Es defineix sobre G l'operació següent:

$$(a, b) * (c, d) = (a \cdot c, b \cdot c + d).$$

Demostreu que $(G, *)$ és un grup.

Problema 55 Si $(G, *)$ és un grup i a, b, c són elements de G, resoleu les següents equacions, indicant les propietats que feu servir.

a) $x * a * b * x * c = b * x * a$. Suposeu que $(G, *)$ és abelià.

b) $a * x * b * c * x = a * b * x$. Suposeu que $(G, *)$ no és abelià.

Problema 56 a) Si $(G, *)$ és un grup, on $G = \{e, a, b, c\}$, i on e és l'element neutre respecte de l'operació "$*$", construïu la taula d'aquesta operació tenint en compte que $a^2 = b^2 = c^2 = e$.

b) Demostreu que si tots els elements x d'un grup $(G, *)$ compleixen que $x^2 = e$, aleshores G és un grup abelià.

Problema 57 Sigui $(G, *)$ un grup. Demostreu, fent servir el mètode d'inducció, que per a tot nombre natural n, sent $n \geq 2$, i per a tot $a_1, \ldots, a_n \in G$ es verifica que

$$(a_1 * \ldots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * \ldots * a_1^{-1}.$$

Problema 58 Si $(G, *)$ és un grup, demostreu que la relació R definida en G de la manera següent

$$a \, R \, b \iff \exists x \in G \text{ tal que } a = x^{-1} * b * x,$$

és una relació d'equivalència.

Problema 59 Proveu que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ amb les operacions internes següents

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (a \cdot c, a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d), \end{aligned}$$

és un anell unitari i commutatiu. Quins són els elements invertibles?

Problema 60 En el conjunt $\mathbb{Q}$ s'hi defineixen les operacions següents:

$$\begin{aligned} a * b &= a + b - 1, \\ a \circ b &= a \cdot b. \end{aligned}$$

És $(\mathbb{Q}, *, \circ)$ un anell?

Problema 61 Es considera el conjunt $A = \{a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$, amb les operacions suma i producte habituals en $\mathbb{R}$. Proveu que A és un anell unitari i commutatiu sense divisors de zero.

Problema 62 Considereu el conjunt $\mathbb{C}$ dels nombres complexos on hi ha definides les operacions internes següents:

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i, \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

a) Proveu que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ és un cos commutatiu.

b) Quina relació han de complir els nombres complexos $a + bi$, $c + di$ per tal que

$$(a + bi) + (c + di) \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad (a + bi) \cdot (c + di) \in \mathbb{R}?$$

Problema 63 Construïu la taula del producte del conjunt de nombres complexos $U = \{1, i, -1, -i\}$, i comproveu que es tracta d'un grup.

Solucions dels problemes de grups, anells i cossos

Problema 49

a) És una operació interna. No satisfà cap propietat.

b) No és una operació interna ja que, per exemple, $-1 \perp 0 = 3^{-1} \notin \mathbb{Z}$.

c) És una operació interna. No satisfà cap propietat.

d) No és una operació interna en $\mathbb{R}$, ja que $a \circ 0 \notin \mathbb{R}$.

Problema 50

Només és commutativa.

Problema 51

És associativa, commutativa i té element neutre, el 0. A més, tots els elements de $\mathbb{Q} - \{-1\}$ són invertibles.

Problema 52

$\alpha = \beta = 1$.

Problema 53

És una operació associativa per a $k' = 0$ i per a $k' = 1$. $(\mathbb{R}, *)$ és un grup si $k' = 1$ i $k = 0$.

Problema 55

a) $x = c^{-1}$.

b) $x = b * c^{-1} * b^{-1}$.

Problema 56

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Problema 59

Els elements invertibles de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ respecte de l'operació "$\cdot$"són els següents:

$$(1,0),\ (-1,0),\ (1,-2),\ (-1,2).$$

Problema 60

$(\mathbb{Q}, *, \circ)$ no és un anell ja que l'operació "$\circ$"no és distributiva respecte de l'operació "$*$".

Problema 62

b) $a+bi$ i $c+di$ han de ser nombres reals ($b=d=0$) o han de ser nombres complexos conjugats ($a=c$ i $b=-d$).

Problema 63

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Problemes proposats d'enters

Problema 64 Trobeu, en cada apartat, el m.c.d. dels nombres enters a i b fent-ho de dues formes diferents: utilitzant l'algorisme d'Euclides i mitjançant la descomposició en factors primers.

a) $a = 135$ i $b = 216$. Expresseu el m.c.d.(a, b) com a combinació lineal entera de a i de b.

b) $a = 10285$ i $b = 9009$.

Problema 65 Demostreu que la fracció

$$\frac{6n+7}{3n+4} \quad \text{és irreductible,} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Problema 66 Demostreu que si a i b són dos nombres enters primers entre ells, aleshores,

$$\text{m.c.d. } (a + 2b, a - b) = 1 \text{ o } 3.$$

Problema 67 Resoleu les equacions diofàntiques lineals següents:

a) $25x + 15y = 5$.

b) $365x - 72y = 18$.

c) $93x - 81y = 1$.

Problema 68 Demaneu a un company que multipliqui el dia del mes que va nèixer per 12, el número del mes per 31, i que us digui el resultat de sumar aquestes dues quantitats. Endevineu-li la data exacta del seu naixement.

Problema 69 Demostreu que si $a > 0$ i $n > 1$ són enters i $\sqrt[n]{a}$ és un nombre racional, aleshores $\sqrt[n]{a}$ és un enter. Proveu, com a aplicació, que $\sqrt{5}$ i $\sqrt[3]{20}$ són nombres irracionals.

Problema 70 Demostreu que tot enter $n > 1$ no primer té un divisor $d \neq 1$ més petit o igual que $\sqrt{n}$.

Problema 71 Proveu que si x i y són nombres senars, aleshores $x^2 + y^2$ no pot ser un quadrat perfecte. (Un nombre enter a és un quadrat perfecte si existeix un enter d tal que $a = d^2$).

Problema 72 Resoleu les congruències lineals següents:

a) $4x \equiv 8 \pmod{12}$.

b) $27x \equiv 4 \pmod{58}$.

c) $34x \equiv 12 \pmod{23}$. Quin és el nombre enter positiu més petit que satisfà aquesta congruència?

Problema 73 Si a és un nombre enter triat a l'atzar entre $\{1, 2, \ldots, 14\}$ i b és triat a l'atzar entre $\{1, 2, \ldots, 15\}$, calculeu la probabilitat que la congruència lineal $ax \equiv b \pmod{15}$ tingui una única solució mòdul 15.

Problema 74 Construïu la taula de la suma i de la multiplicació en $\mathbb{Z}_4$. Trobeu els elements invertibles i els divisors de zero.

Problema 75 Considereu l'anell unitari i commutatiu $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$. Resoleu en aquest anell, les equacions següents:

a) $3x + 2 = 1$.

b) $2x + 1 = 2$.

c) $2x + 2 = 2$.

Problema 76 Discutiu i resoleu en $\mathbb{Z}_8$ el sistemes d'equacions lineals següents:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -4x + 7y & = & 2 \\ 6x + 2y & = & 2 \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 7x + 5y & = & 2 \\ 5x + ay & = & 16, \end{array} \right.$$

en funció del paràmetre $a \in \mathbb{Z}_8$.

Problema 77 Resoleu les equacions següents:

a) $x^2 + 4 = 0$ en $\mathbb{Z}_6$.

b) $x^2 + x + 1 = 0$ en $\mathbb{Z}_{19}$.

Problema 78 Demostreu que per a tot enter n es compleix que

$$6 \mid 2n^3 + 3n^2 + n.$$

Problema 79 Demostreu que l'equació $5x^2 - 7y^2 = 9$ no té solucions enteres.

Problema 80 Trobeu l'enter positiu més petit que dóna de resta 3 i 5 en dividir-lo per 5 i 7, respectivament.

Problema 81 Resoleu el sistema de congruències lineals següent:

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & \equiv & 1 & \pmod{2} \\ x & \equiv & 2 & \pmod{5} \\ x & \equiv & 5 & \pmod{6} \\ x & \equiv & 5 & \pmod{12}, \end{array}\right.$$

(Yih-hing, 717 DC).

Problema 82 Calculeu la resta de dividir:

a) 2^{1994} entre 5.

b) 123^{101} entre 7.

c) $102^{235} - 5 \cdot 2^{1992}$ entre 11.

Problema 83 Demostreu que per a qualsevol nombre enter n, es compleix que

$$\frac{n^5}{5} - \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{19n}{30} \quad \text{és un nombre enter.}$$

Solucions dels problemes d'enters

Problema 64

a) m.c.d.$(135,\ 216) = 27 \quad \text{i} \quad 27 = 135 \cdot (-3) + 216 \cdot 2$.

b) m.c.d.$(10285,\ 9009) = 11$.

Problema 65

m.c.d.$(6n+7,\ 3n+4) =$ m.c.d.$(3n+4,\ 3n+3) = 1$.

Problema 67

a) $x = -1 + 3k$ i $y = 2 - 5k$, on $k \in \mathbb{Z}$.

b) $x = 522 + 72k$ i $y = 2646 + 365k$, on $k \in \mathbb{Z}$.

c) No té solució.

Problema 72

a) $x \equiv 2 \pmod{12}$, $x \equiv 5 \pmod{12}$, $x \equiv 8 \pmod{12}$ i $x \equiv 11 \pmod{12}$.

b) $x \equiv 56 \pmod{58}$.

c) 22.

Problema 73

La probabilitat demanada és $\dfrac{4}{7}$.

Problema 74

Els elements invertibles de $\mathbb{Z}_4$ són l'$\overline{1}$ i el $\overline{3}$.

L'únic divisor de zero de $\mathbb{Z}_4$ és el $\overline{2}$.

Problema 75

a) $x = \overline{1}$.

b) No té solució.

c) $x = \overline{0}$ i $x = \overline{2}$.

Problema 76

a) $x = 1$ i $y = 2$, $x = 5$ i $y = 2$.

b) El sistema té solució si $a \neq 3$ i $a \neq 7$, en $\mathbb{Z}_8$.

Problema 77

a) No té solució.

b) $x = 11$ i $x = 7$, en $\mathbb{Z}_{19}$.

Problema 80

L'enter demanat és 33.

Problema 81

$x \equiv 17 \pmod{60}$.

Problema 82

a) 4; b) 2; c) 3.