Aplicacions

GEI, GEIADE i GTIDIC.

Nacho López

nacho.lopez@udl.cat

Cristina Dalfó

cristina.dalfo@udl.cat

Departament de Matemàtica
Cryptography & Graphs Research Group (C&G)
Universitat de Lleida

Campus Universitari Igualada - UdL

ESCOLA POLITÈCNICA SUPERIOR
UNIVERSITAT DE LLEIDA

Definició d'aplicació

- Donats dos conjunts A i B, una **aplicació** f de A en B, denotada

$$f : A \longrightarrow B,$$

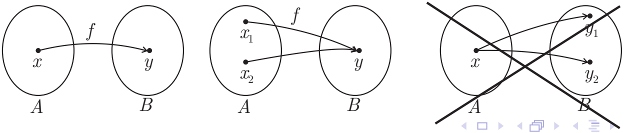
és una relació de A en B que satisfà que per a cada element x de A hi ha un únic element y de B tal que x està relacionat amb y.

Definició d'aplicació

- Donats dos conjunts A i B, una **aplicació** f de A en B, denotada

$$f : A \longrightarrow B,$$

  és una relació de A en B que satisfà que per a cada element x de A hi ha un únic element y de B tal que x està relacionat amb y.
- Si x està relacionat amb y per l'aplicació f, es diu que y és la **imatge** de x per f i es denota $f(x) = y$. Al conjunt A se l'anomena **conjunt de sortida** (o **inicial**) de l'aplicació f i a B se l'anomena **conjunt d'arribada** (o **final**).



- **Conjunt imatge:** Sigui $f : A \longrightarrow B$ una aplicació. Si X és un subconjunt de A, el **conjunt imatge** de X per f, que es denota $f(X)$, és el subconjunt de B format per totes les imatges dels elements de X, és a dir,

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in B \mid \exists x \in X \text{verificant} f(x) = y\}.$$

En particular, el conjunt $f(A)$ s'anomena **imatge** de l'aplicació f i es denota per $\text{Im}(f)$.

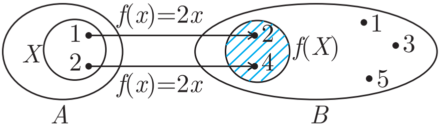
Conjunt imatge

- **Conjunt imatge:** Sigui $f : A \longrightarrow B$ una aplicació. Si X és un subconjunt de A, el **conjunt imatge** de X per f, que es denota $f(X)$, és el subconjunt de B format per totes les imatges dels elements de X, és a dir,

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in B \mid \exists x \in X \text{verificant}\, f(x) = y\}.$$

En particular, el conjunt $f(A)$ s'anomena **imatge** de l'aplicació f i es denota per $\mathrm{Im}(f)$.

- **Exemple:**



Conjunt antiimatge

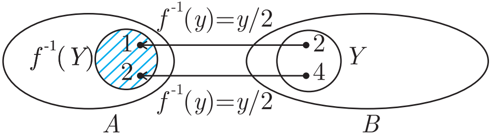
- **Conjunt antiimatge:** Sigui $f : A \longrightarrow B$ una aplicació. Si Y és un subconjunt de B, el **conjunt antiimatge** de Y per f, denotat $f^{-1}(Y)$, és el següent subconjunt de A:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}.$$

- **Conjunt antiimatge:** Sigui $f : A \longrightarrow B$ una aplicació. Si Y és un subconjunt de B, el **conjunt antiimatge** de Y per f, denotat $f^{-1}(Y)$, és el següent subconjunt de A:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}.$$

- **Exemple:**



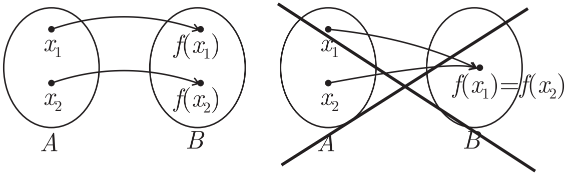
Sigui $f : A \longrightarrow B$ una aplicació.

- Una aplicació f és **injectiva** si satisfà:

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2],$$

o bé, equivalentment,

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)].$$



Exemple. (part del problema 13)
Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(*a*) Proveu que $f(x)$ és injectiva.

(*b*) Proveu que $g(x)$ no és injectiva.

Exemple. (part del problema 13)
Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(a) Proveu que $f(x)$ és injectiva.

(b) Proveu que $g(x)$ no és injectiva.

Resolució.

(a) f injectiva: $\forall x_1, x_2 \in A,\ [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$.

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 3 \neq 2x_2 - 3 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2.$$

Aleshores, f és injectiva.

Exemple. (part del problema 13)
Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(a) Proveu que $f(x)$ és injectiva.

(b) Proveu que $g(x)$ no és injectiva.

Resolució.

(a) f injectiva: $\forall x_1, x_2 \in A,\ [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$.

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 3 \neq 2x_2 - 3 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2.$$

Aleshores, f és injectiva.

(b) g injectiva: $\forall x_1, x_2 \in A,\ [x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)]$.

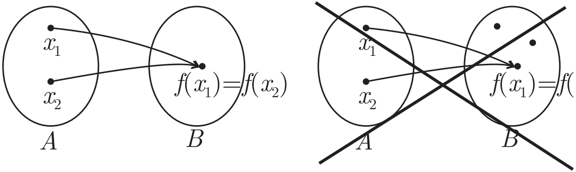
$$g(x_1) \neq g(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 1 \neq x_2^2 + 1 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2.$$

Això no implica que $x_1 \neq x_2$. Contraexemple: $1 \neq -1$, però $1^2 = (-1)^2$. Aleshores, g no és injectiva.

Aplicacions exhaustives

Sigui $f : A \longrightarrow B$ una aplicació.

- Una aplicació f és **exhaustiva** (o epijectiva o suprajectiva) si satisfà:
$$\forall y \in B\ \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y,$$
és a dir, $f(A) = B$.



Exemple. (part del problema 13)
Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(a) Proveu que $f(x)$ és exhaustiva.

(b) Proveu que $g(x)$ no és exhaustiva.

Exemple. (part del problema 13)
Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(a) Proveu que $f(x)$ és exhaustiva.

(b) Proveu que $g(x)$ no és exhaustiva.

Resolució.

(a) f exhaustiva: $\forall y \in B\ \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$.

$$\forall y \in \mathbb{Q}\ \exists x \in \mathbb{Q} \text{ tal que } 2x - 3 = y???$$

Sí, aleshores, f és exhaustiva.

Exemple. (part del problema 13)
Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(a) Proveu que $f(x)$ és exhaustiva.

(b) Proveu que $g(x)$ no és exhaustiva.

Resolució.

(a) f exhaustiva: $\forall y \in B\ \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$.

$$\forall y \in \mathbb{Q}\ \exists x \in \mathbb{Q} \text{ tal que } 2x - 3 = y???$$

Sí, aleshores, f és exhaustiva.

(b) g exhaustiva: $\forall y \in B\ \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$.

$$\forall y \in \mathbb{Q}\ \exists x \in \mathbb{Q} \text{ tal que } x^2 + 1 = y???$$

No. Contraexemple: $-1 \in \mathbb{Q}$, però no existeix cap nombre x tal que $x^2 + 1 = -1$. Aleshores, g no és exhaustiva.

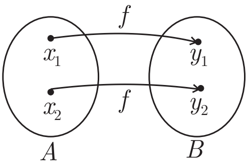
Aplicacions bijectives

Sigui $f : A \longrightarrow B$ una aplicació.

- Una aplicació f és **bijectiva** si satisfà:

$$\forall y \in B \ \exists \text{ un únic } x \in A \text{ tal que } f(x) = y,$$

és a dir, si f és injectiva i exhaustiva.



Exemple. (part del problema 13)
Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(a) Proveu que $f(x)$ és bijectiva.

(b) Proveu que $g(x)$ no és bijectiva.

Exemple. (part del problema 13)
Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(*a*) Proveu que $f(x)$ és bijectiva.

(*b*) Proveu que $g(x)$ no és bijectiva.

Resolució.

(*a*) Dels exemples anteriors:

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ injectiva} \\ f \text{ exhaustiva} \end{array}\right\} \Leftrightarrow f \text{ bijectiva.}$$

Exemple. (part del problema 13)
Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(a) Proveu que $f(x)$ és bijectiva.

(b) Proveu que $g(x)$ no és bijectiva.

Resolució.

(a) Dels exemples anteriors:

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ injectiva} \\ f \text{ exhaustiva} \end{array}\right\} \Leftrightarrow f \text{ bijectiva.}$$

(b) Dels exemples anteriors:

$$g \text{ no injectiva } \Rightarrow g \text{ no bijectiva.}$$

O bé,

$$g \text{ no exhaustiva } \Rightarrow g \text{ no bijectiva.}$$

Composició d'aplicacions

Siguin $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ són dues aplicacions.

Siguin $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ són dues aplicacions.

- **Composició.** L'aplicació f **composta amb** g, que es denota $g \circ f$, com a l'aplicació de A en C tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \ \forall x \in A.$$

Exemple. (part del problema 13)
Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(*a*) Trobeu $g \circ f$.

(*b*) Trobeu $f \circ g$.

Exemple. (part del problema 13)
Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(*a*) Trobeu $g \circ f$.

(*b*) Trobeu $f \circ g$.

Resolució.

(*a*) $g \circ f = g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10.$

Exemple. (part del problema 13)
Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(*a*) Trobeu $g \circ f$.

(*b*) Trobeu $f \circ g$.

Resolució.

(*a*) $g \circ f = g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10.$

(*b*) $f \circ g = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) - 3 = 2x^2 - 1.$

En general, $g \circ f \neq f \circ g$.

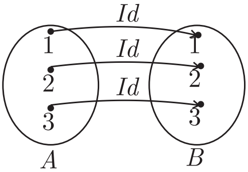
Aplicació identitat

Aplicació identitat

- L'**aplicació identitat** definida en A i denotada Id_A, és l'aplicació de A en A tal que $Id_A(x) = x, \ \forall x \in A$.

Aplicació identitat

- L'**aplicació identitat** definida en A i denotada Id_A, és l'aplicació de A en A tal que $Id_A(x) = x, \ \forall x \in A$.
- **Exemple.**



Aplicació inversa

Siguin $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ són dues aplicacions.

Siguin $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ són dues aplicacions.

- L'aplicació $g : B \longrightarrow A$ és l'**aplicació inversa** d'una aplicació $f : A \longrightarrow B$ si satisfà:

$$g \circ f = Id_A \qquad \text{i} \qquad f \circ g = Id_B.$$

L'aplicació g, en cas d'existir, és única i es representa per f^{-1}.

Aplicació inversa

Siguin $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ són dues aplicacions.

- L'aplicació $g : B \longrightarrow A$ és l'**aplicació inversa** d'una aplicació $f : A \longrightarrow B$ si satisfà:

$$g \circ f = Id_A \qquad \text{i} \qquad f \circ g = Id_B.$$

L'aplicació g, en cas d'existir, és única i es representa per f^{-1}. D'aquesta definició es dedueix que una aplicació $f : A \longrightarrow B$ té inversa si, i només si, f és bijectiva.

Exemple.

Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(*a*) Trobeu, si existeix, f^{-1}.

(*b*) Trobeu, si existeix, g^{-1}.

Exemple.

Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(a) Trobeu, si existeix, f^{-1}.

(b) Trobeu, si existeix, g^{-1}.

Resolució.

(a) Dels exemples anteriors, sabem que f és una aplicació bijectiva i, per tant, existeix la seva funció inversa f^{-1}:

$$y = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}.$$

Ho comprovem:

$f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x-3) = \frac{(2x-3)+3}{2} = x.$

$f \circ f^{-1} = f(f^{-1})) = f(\frac{x+3}{2}) = 2\frac{x+3}{2} - 3 = x.$

Exemple.

Siguin f i g dues aplicacions de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ definides per $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x^2 + 1$.

(a) Trobeu, si existeix, f^{-1}.

(b) Trobeu, si existeix, g^{-1}.

Resolució.

(a) Dels exemples anteriors, sabem que f és una aplicació bijectiva i, per tant, existeix la seva funció inversa f^{-1}:

$$y = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}.$$

Ho comprovem:
$f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x-3) = \frac{(2x-3)+3}{2} = x.$
$f \circ f^{-1} = f(f^{-1})) = f(\frac{x+3}{2}) = 2\frac{x+3}{2} - 3 = x.$

(b) Dels exemples anteriors, sabem que g no és una aplicació bijectiva i, per tant, no existeix la seva funció inversa g^{-1}.