2. Relacions

GEI, GEIADE, GTIDIC

Cristina Dalfó

cristina.dalfo@udl.cat

Nacho López

nacho.lopez@udl.cat

Departament de Matemàtica
Cryptography & Graphs Research Group (C&G)
www.cig.udl.cat
Universitat de Lleida

Relacions en un conjunt

- Donats dos conjunts A i B, una **relació** o **relació binària** R de A en B és un subconjunt del producte cartesià $A \times B$.

Relacions en un conjunt

- Donats dos conjunts A i B, una **relació** o **relació binària** R de A en B és un subconjunt del producte cartesià $A \times B$.
- Si $(a, b) \in R$ es diu que a **està relacionat amb** b i se simbolitza també per $a\ R\ b$. La negació de $a\ R\ b$ es representa per $a \not R\ b$.

Relacions en un conjunt

- Donats dos conjunts A i B, una **relació** o **relació binària** R de A en B és un subconjunt del producte cartesià $A \times B$.
- Si $(a, b) \in R$ es diu que ***a* està relacionat amb *b*** i se simbolitza també per $a\ R\ b$. La negació de $a\ R\ b$ es representa per $a \not R\ b$.
- **Relacions definides en un conjunt.** Una relació R definida en un conjunt A és un subconjunt del producte cartesià $A \times A$. Si R és una relació definida en A, es diu que R és:
  - **reflexiva:** si $\forall a \in A$, $a\ R\ a$;
  - **simètrica:** si $\forall a, b \in A$, $a\ R\ b \Rightarrow b\ R\ a$;
  - **antisimètrica:** si $\forall a, b \in A$, $[a\ R\ b \text{ i } b\ R\ a] \Rightarrow a = b$;
  - **transitiva:** si $\forall a, b, c \in A$, $[a\ R\ b \text{ i } b\ R\ c] \Rightarrow a\ R\ c$.

Relacions d'equivalència

- Sigui R una relació definida en un conjunt A. Aleshores es diu que R és una **relació d'equivalència** si és reflexiva, simètrica i transitiva.

Relacions d’equivalència

- Sigui R una relació definida en un conjunt A. Aleshores es diu que R és una **relació d’equivalència** si és reflexiva, simètrica i transitiva.
- La **classe d’equivalència** per R d’un element $a \in A$, que se simbolitza per $\overline{a}$, és el subconjunt de A següent:

$$\overline{a} = \{x \in A \mid x \, R \, a\}.$$

Relacions d'equivalència

- Sigui R una relació definida en un conjunt A. Aleshores es diu que R és una **relació d'equivalència** si és reflexiva, simètrica i transitiva.
- La **classe d'equivalència** per R d'un element $a \in A$, que se simbolitza per $\overline{a}$, és el subconjunt de A següent:

$$\overline{a} = \{x \in A \mid x \, R \, a\}.$$

- Als elements d'una classe d'equivalència $\overline{a}$ se'ls anomena **representants** d'aquesta classe. Les classes d'equivalència satisfan les propietats següents:
  - i) $\forall a, b \in A, a \, R \, b \iff \overline{a} = \overline{b}$;
  - ii) $\forall a, b \in A, a \not R \, b \iff \overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$;
  - iii) La família de parts de A formada per les diferents classes d'equivalència de A per R és una partició de A.

- Sigui R una relació definida en un conjunt A. Aleshores es diu que R és una **relació d'equivalència** si és reflexiva, simètrica i transitiva.
- La **classe d'equivalència** per R d'un element $a \in A$, que se simbolitza per $\overline{a}$, és el subconjunt de A següent:

$$\overline{a} = \{x \in A \mid x\, R\, a\}.$$

- Als elements d'una classe d'equivalència $\overline{a}$ se'ls anomena **representants** d'aquesta classe. Les classes d'equivalència satisfan les propietats següents:
  - i) $\forall a, b \in A,\ a\, R\, b \iff \overline{a} = \overline{b}$;
  - ii) $\forall a, b \in A,\ a \not R\, b \iff \overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$;
  - iii) La família de parts de A formada per les diferents classes d'equivalència de A per R és una partició de A.
- El **conjunt quocient** de A per R, denotat per A/R, és el conjunt format per totes les classes d'equivalència de A determinades per R:

$$A/R = \{\overline{a} \mid a \in A\}.$$

Relacions d'ordre

- Sigui R una relació definida en un conjunt A. Es diu que R és **d'ordre** si

$$R \text{ és reflexiva, antisimètrica i transitiva.}$$

- Sigui R una relació definida en un conjunt A. Es diu que R és **d'ordre** si

  R és reflexiva, antisimètrica i transitiva.

- **Conjunts ordenats.** Si R és una relació d'ordre en A aleshores es diu que (A, R) és un conjunt ordenat.

- Sigui R una relació definida en un conjunt A. Es diu que R és **d'ordre** si

$$R \text{ és reflexiva, antisimètrica i transitiva.}$$

- **Conjunts ordenats.** Si R és una relació d'ordre en A aleshores es diu que (A, R) és un conjunt ordenat.
- **Ordres totals i parcials.** Una relació d'ordre R en A és una relació **d'ordre total** si

$$\forall a, b \in A, \ (a \, R \, b) \ \vee \ (b \, R \, a).$$

En aquest cas es diu també que (A, R) és un conjunt **totalment ordenat**. Un conjunt ordenat (A, R) s'anomena **parcialment ordenat** si R no és d'ordre total, és a dir,

$$\exists \, a, b \in A, \ (a \ \not R \, b) \ \wedge \ (b \ \not R \, a).$$

Elements característics d'un conjunt ordenat I

- Sigui $(A, \leq)$ un conjunt ordenat i $S \subseteq A$ (ara fem servir el símbol $\leq$ en comptes de R per a representar una relació d'ordre en A, amb la intenció de facilitar la comprensió de les definicions que es donen en aquest apartat).

Elements característics d'un conjunt ordenat I

- Sigui $(A, \leq)$ un conjunt ordenat i $S \subseteq A$ (ara fem servir el símbol $\leq$ en comptes de R per a representar una relació d'ordre en A, amb la intenció de facilitar la comprensió de les definicions que es donen en aquest apartat).
- **Fites inferiors i superiors.** Sigui c, d elements de A. Aleshores es diu que:
  - c és una **fita inferior** de $S \subseteq A$ si $\forall x \in S$ es verifica $c \leq x$;
  - d és una **fita superior** de $S \subseteq A$ si $\forall x \in S$ es verifica $x \leq d$.

Elements característics d'un conjunt ordenat I

- Sigui $(A, \leq)$ un conjunt ordenat i $S \subseteq A$ (ara fem servir el símbol $\leq$ en comptes de R per a representar una relació d'ordre en A, amb la intenció de facilitar la comprensió de les definicions que es donen en aquest apartat).
- **Fites inferiors i superiors.** Sigui c, d elements de A. Aleshores es diu que:
  - c és una **fita inferior** de $S \subseteq A$ si $\forall x \in S$ es verifica $c \leq x$;
  - d és una **fita superior** de $S \subseteq A$ si $\forall x \in S$ es verifica $x \leq d$.
- Si S té una fita inferior o superior es diu que S està fitat inferiorment o superiorment, respectivament. Es diu que S està fitat si ho està inferiorment i superiorment.

- **Ínfim i suprem.** Siguin r i s elements de A. Aleshores es diu que:
  - r és l'**ínfim** de $S \subseteq A$ si r és una fita inferior de S i tota altra fita inferior c de S verifica que $c \leq r$;
  - s és el **suprem** de $S \subseteq A$ si s és una fita superior de S i tota altra fita superior d de S verifica que $s \leq d$.

  És a dir, l'ínfim és la més gran de les fites inferiors i el suprem és la més petita de les fites superiors. Per tant, si l'ínfim o el suprem existeixen són únics.

Elements característics d'un conjunt ordenat II

- **Ínfim i suprem.** Siguin r i s elements de A. Aleshores es diu que:
  - r és l'**ínfim** de $S \subseteq A$ si r és una fita inferior de S i tota altra fita inferior c de S verifica que $c \leq r$;
  - s és el **suprem** de $S \subseteq A$ si s és una fita superior de S i tota altra fita superior d de S verifica que $s \leq d$.

  És a dir, l'ínfim és la més gran de les fites inferiors i el suprem és la més petita de les fites superiors. Per tant, si l'ínfim o el suprem existeixen són únics.
- **Mínim i màxim.** Siguin l i m elements de S. Aleshores es diu que:
  - l és el **mínim** de S si $\forall x \in S$ es verifica $l \leq x$, o equivalentment l és l'ínfim de S i $l \in S$;
  - m és el **màxim** de S si $\forall x \in S$ es verifica $x \leq m$, o equivalentment m és el suprem de S i $m \in S$.

- **Minimals i maximals.** Siguin α i β elements de S. Aleshores es diu que:
  - α és un element **minimal** de S si no existeix cap element x de S tal que $x \neq \alpha$ i $x \leq \alpha$.
  - β és un element **maximal** de S si no existeix cap element x de S tal que $x \neq \beta$ i $\beta \leq x$.

  Si S té mínim o màxim aleshores aquest és l'únic element minimal o maximal, respectivament, de S.

- El **diagrama de Hasse** d'un conjunt ordenat i finit $(A, \leq)$, s'obté seguint els passos següents:
  1) Disposar els elements de A en diferents nivells distribuïts de la manera següent:
     - En el nivell més inferior se situen els elements minimals de $(A, \leq)$.
     - En un nivell més superior es col·loquen els elements minimals del subconjunt $B \subseteq A$ ordenat respecte de la mateixa relació $\leq$ i format pels elements de A que no apareixen en cap dels nivells inferiors.
  2) Dibuixar els arcs —sense orientació— corresponents a parells de vèrtexs relacionats situats:
     - En nivells consecutius.
     - En nivells separats en k nivells intermitjos, començant des de $k = 1$ fins a la separació màxima, considerant que només es dibuixaran aquells arcs que uneixen un parell de vèrtexs per als quals no existeix cap altre vèrtex situat en un nivell intermig que estigui relacionat amb tots dos.

Problema

Definim en el conjunt $\mathbb{R}^2$ *la relació següent:*

$$(a,b)\ R\ (c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad a+d=b+c.$$

i) *Demostreu que és una relació d'equivalència.*

ii) *Trobeu la classe d'equivalència representada per* $(1,0)$.

Problema

Definim en el conjunt $\mathbb{R}^2$ *la relació següent:*

$$(a,b)\ R\ (c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad a+d=b+c.$$

i) *Demostreu que és una relació d'equivalència.*

ii) *Trobeu la classe d'equivalència representada per* $(1,0)$.

i) Demostrem que R és reflexiva, simètrica i transitiva.

- R és **reflexiva** si, i només si, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b)\ R\ (a,b)$. Aplicant la definició de R tenim que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b)\ R\ (a,b) \iff a+b=b+a.$$

I aquesta igualtat és certa ja que a i b són nombres reals i la suma de nombres reals és commutativa.

- R és **simètrica**. Demostrem que

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b)\ R\ (c,d) \Rightarrow (c,d)\ R\ (a,b).$$

Segons la definició de R podem escriure que

$$\begin{array}{lcll} (a,b)\ R\ (c,d) & \iff & a+d=b+c & (1) \\ (c,d)\ R\ (a,b) & \iff & c+b=d+a & (2). \end{array}$$

Com que les igualtats (1) i (2) són equivalents deduïm que $(a,b)\ R\ (c,d)$ si $(c,d)\ R\ (a,b)$.

- R és **simètrica**. Demostrem que

  $$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2,\ (a,b)\ R\ (c,d) \Rightarrow (c,d)\ R\ (a,b).$$

  Segons la definició de R podem escriure que

  $$\begin{array}{ccll} (a,b)\ R\ (c,d) & \Longleftrightarrow & a+d=b+c & (1) \\ (c,d)\ R\ (a,b) & \Longleftrightarrow & c+b=d+a & (2). \end{array}$$

  Com que les igualtats (1) i (2) són equivalents deduïm que $(a,b)\ R\ (c,d)$ si $(c,d)\ R\ (a,b)$.

- R és **transitiva**. Hem de provar que $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$,

  $$[(a,b)\ R\ (c,d)\ \wedge\ (c,d)\ R\ (e,f)] \Rightarrow (a,b)\ R\ (e,f).$$

Explicitem les hipòtesis i la tesi:

$$(a,b)\ R\ (c,d) \iff a+d=b+c \quad (1)$$

$$(c,d)\ R\ (e,f) \iff c+f=d+e \quad (2)$$

$$(a,b)\ R\ (e,f) \iff a+f=b+e \quad (3)$$

Explicitem les hipòtesis i la tesi:

$$\frac{\begin{array}{lcll} (a,b)\ R\ (c,d) & \Longleftrightarrow & a+d=b+c & (1) \\ (c,d)\ R\ (e,f) & \Longleftrightarrow & c+f=d+e & (2) \end{array}}{\begin{array}{lcll} (a,b)\ R\ (e,f) & \Longleftrightarrow & a+f=b+e & (3) \end{array}}$$

Com podem deduir (3) a partir de (1) i (2)?

De (1) tenim $a=b+c-d$ i de (2) tenim $f=d+e-c$. Per tant,

$$a+f=(b+c-d)+(d+e-c)=b+e,$$

tal com volíem demostrar.

ii)f La classe d'equivalència que té com a representant el parell ordenat $(1,0)$, és el conjunt següent

$$\begin{aligned}\overline{(1,0)} &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)\ R\ (1,0)\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = y+1\} \\ &= \{(y+1,y) \mid y\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Geomètricament $\overline{(1,0)}$ representa el conjunt de punts de la recta d'equació $y = x - 1$. Es tracta d'una recta que passa pel punt (1,0) i és paral·lela a la bisectriu del primer i tercer quadrants (recta d'equació $y = x$).