Inducció

GEI, GEIADE i GTIDIC

Nacho López

nacho.lopez@udl.cat

Cristina Dalfó

cristina.dalfo@udl.cat

Departament de Matemàtica
Cryptography & Graphs Research Group (C&G)
Universitat de Lleida

- **Principi d'inducció.** Sigui S un subconjunt de $\mathbb{N}$ que satisfà les propietats següents:
  - $1 \in S$;
  - Per a tot nombre natural n, si $n \in S$, aleshores $n+1 \in S$.

  Aleshores, $S = \mathbb{N}$.

Mètode d'inducció

- El **mètode d'inducció (matemàtica)** és un mètode de demostració fonamentat en el principi d'inducció, i que s'utilitza per establir la validesa d'enunciats que es presenten en termes de nombres naturals.
- Si es vol provar que tots els nombres naturals verifiquen una certa propietat, emprant el mètode d'inducció es procedeix a fer els passos següents:
  1. Provar que el número 1 verifica la propietat;
  2. **Hipòtesi d'inducció:** Suposar que un nombre natural qualsevol n verifica la propietat .
  3. Provar que donat un nombre natural qualsevol n, si n verifica la propietat, aleshores $n + 1$ també la verifica.

Numerabilitat

- Un conjunt A és **numerable** si A és finit o A és equipotent a $\mathbb{N}$, és a dir, hi ha una aplicació bijectiva del conjunt A a $\mathbb{N}$.

Numerabilitat

- Un conjunt A és **numerable** si A és finit o A és equipotent a $\mathbb{N}$, és a dir, hi ha una aplicació bijectiva del conjunt A a $\mathbb{N}$.
- Els conjunts infinits equipotents a $\mathbb{N}$ s'anomenen **conjunts infinits numerables** (o numerables).

Numerabilitat

- Un conjunt A és **numerable** si A és finit o A és equipotent a $\mathbb{N}$, és a dir, hi ha una aplicació bijectiva del conjunt A a $\mathbb{N}$.
- Els conjunts infinits equipotents a $\mathbb{N}$ s'anomenen **conjunts infinits numerables** (o numerables).
- Un conjunt numerable A té 'tants elements com nombres naturals hi ha', ja que si hi ha una aplicació bijectiva de A a $\mathbb{N}$, llavors podem 'relacionar' cada element del conjunt A amb un (i només un) element de $\mathbb{N}$.

Numerabilitat

- Un conjunt A és **numerable** si A és finit o A és equipotent a $\mathbb{N}$, és a dir, hi ha una aplicació bijectiva del conjunt A a $\mathbb{N}$.
- Els conjunts infinits equipotents a $\mathbb{N}$ s'anomenen **conjunts infinits numerables** (o numerables).
- Un conjunt numerable A té 'tants elements com nombres naturals hi ha', ja que si hi ha una aplicació bijectiva de A a $\mathbb{N}$, llavors podem 'relacionar' cada element del conjunt A amb un (i només un) element de $\mathbb{N}$.
- Se satisfan les propietats següents:
  - Tot subconjunt d'un conjunt numerable és numerable;
  - La unió d'una família de conjunts numerables indexada per un conjunt numerable és numerable.

Numerabilitat

- Un conjunt A és **numerable** si A és finit o A és equipotent a $\mathbb{N}$, és a dir, hi ha una aplicació bijectiva del conjunt A a $\mathbb{N}$.
- Els conjunts infinits equipotents a $\mathbb{N}$ s'anomenen **conjunts infinits numerables** (o numerables).
- Un conjunt numerable A té 'tants elements com nombres naturals hi ha', ja que si hi ha una aplicació bijectiva de A a $\mathbb{N}$, llavors podem 'relacionar' cada element del conjunt A amb un (i només un) element de $\mathbb{N}$.
- Se satisfan les propietats següents:
  - Tot subconjunt d'un conjunt numerable és numerable;
  - La unió d'una família de conjunts numerables indexada per un conjunt numerable és numerable.
- **Exemple:** El conjunt de nombres parells $\mathbb{P} = \{2, 4, 6, \dots\}$ és numerable ja que l'aplicació $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{P}$ definida per $f(n) = 2n$ és bijectiva.

Problema

Demostreu la igualtat següent utilizant el mètode d'inducció:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Problema

Demostreu la igualtat següent utilizant el mètode d'inducció:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Resolució

Per provar, aplicant inducció, que per a cada nombre natural n es verifica la igualtat anterior s'ha de verificar que:

Problema

Demostreu la igualtat següent utilizant el mètode d'inducció:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Resolució

Per provar, aplicant inducció, que per a cada nombre natural n es verifica la igualtat anterior s'ha de verificar que:

- Per a $n = 1$ la igualtat és certa.
  Substituint n per 1 en els dos costats de la igualtat obtenim que

  $$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6},$$

  i, per tant, es compleix la igualtat per a $n = 1$.

Resolució (continuació)

- Si per a n és certa, aleshores ho és també per a $n+1$. Suposem, doncs, que

  $$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{H.I. (hipòtesi d'inducció)}$$

  i provem que

  $$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

  En el costat esquerre de la igualtat hi apareix la suma dels quadrats dels n primers nombres naturals.

Resolució (continuació)

- Si per a n és certa, aleshores ho és també per a $n+1$. Suposem, doncs, que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{H.I. (hipòtesi d'inducció)}$$

i provem que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

En el costat esquerre de la igualtat hi apareix la suma dels quadrats dels n primers nombres naturals.
Utilitzant la hipòtesi d'inducció podem escriure

$$\begin{aligned} [1^2 + 2^2 + \cdots + n^2] + (n+1)^2 &\overset{\text{H.I.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} &= \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6}. \end{aligned}$$

Resolució (continuació)
Hem arribat a l'expressió

$$\frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}$$

i volem arribar a

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Resolució (continuació)
Hem arribat a l'expressió

$$\frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}$$

i volem arribar a

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Per fer-ho, només hem de veure que $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$.

Resolució (continuació)
Hem arribat a l'expressió

$$\frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}$$

i volem arribar a

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Per fer-ho, només hem de veure que $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$.
Així obtenim la igualtat desitjada,

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Problema

Estudieu per a quins nombres $n \in \mathbb{N}$ *és certa la desigualtat* $2^n < n!$, *on* $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$.

Resolució:

Per tal d'intuir a partir de quin valor de n serà certa la desigualat, podem construir una taula on es comparin les expressions 2^n i $n!$ per a diferents valors de n.

Problema

Estudieu per a quins nombres $n \in \mathbb{N}$ és certa la desigualtat $2^n < n!$, on $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$.

Resolució:

Per tal d'intuir a partir de quin valor de n serà certa la desigualat, podem construir una taula on es comparin les expressions 2^n i $n!$ per a diferents valors de n.

n	2^n	$n!$
1	2	1
2	4	2
3	8	6
4	16	24
5	32	120
6	64	720

Resolució: (continuació)
Demostrem, emprant el mètode d'inducció, que la desigualtat $2^n < n!$ és certa per a tot nombre natural $n \geq 4$.

Resolució: (continuació)
Demostrem, emprant el mètode d'inducció, que la desigualtat $2^n < n!$ és certa per a tot nombre natural $n \geq 4$.

- Per a $n = 4$: la desigualtat és certa.
  Substituint n per 4 obtenim, tal com ja hem vist a la taula, que $2^4 < 4!$

Resolució: (continuació)
Demostrem, emprant el mètode d'inducció, que la desigualtat $2^n < n!$ és certa per a tot nombre natural $n \geq 4$.

- Per a $n = 4$: la desigualtat és certa.
  Substituint n per 4 obtenim, tal com ja hem vist a la taula, que $2^4 < 4!$
- Si per a n és certa, amb $n \geq 4$, aleshores ho és també per a $n + 1$.

Resolució: (continuació)
Demostrem, emprant el mètode d'inducció, que la desigualtat $2^n < n!$ és certa per a tot nombre natural $n \geq 4$.

- Per a $n = 4$: la desigualtat és certa.
  Substituint n per 4 obtenim, tal com ja hem vist a la taula, que $2^4 < 4!$
- Si per a n és certa, amb $n \geq 4$, aleshores ho és també per a $n + 1$.
  Suposem, doncs, que

$$2^n < n! \quad \text{(hipòtesi d'inducció)}$$

  i provem que

$$2^{n+1} < (n+1)!$$

Resolució: (continuació)
Com que $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, aplicant-hi la hipòtesi d'inducció tenim que

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2n!$$

Volem arribar a $(n+1)!$ Com ho farem?

Resolució: (continuació)
Com que $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, aplicant-hi la hipòtesi d'inducció tenim que

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2n!$$

Volem arribar a $(n+1)!$ Com ho farem?
Com que $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, llavors només hem d'observar que $2 < n+1$ per $n \geq 4$ (clar!). Així podem acabar la demostració fent:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

Problema

Proveu que els conjunts següents són numerables:

i) *El conjunt de nombres senars $\mathbb{S}$ (positius).*

ii) *El conjunt de nombres enters $\mathbb{Z}$.*

Resolució:

i) Per demostrar que el conjunt de nombres senars positius $\mathbb{S}$ és numerable, hem d'establir una bijecció entre aquest conjunt i el conjunt de nombres naturals.

Problema

Proveu que els conjunts següents són numerables:

i) *El conjunt de nombres senars $\mathbb{S}$ (positius).*

ii) *El conjunt de nombres enters $\mathbb{Z}$.*

Resolució:

i) Per demostrar que el conjunt de nombres senars positius $\mathbb{S}$ és numerable, hem d'establir una bijecció entre aquest conjunt i el conjunt de nombres naturals.

Com que tot nombre senar positiu es pot escriure en la forma $2n-1$, amb $n \in \mathbb{N}$, podem definir l'aplicació següent:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{S} \\ n & \longrightarrow & f(n) = 2n-1. \end{array}$$

Aquesta aplicació és bijectiva i, per tant, $\mathbb{S}$ és un conjunt infinit numerable.

Resolució: (continuació)
ii) Podem provar que el conjunt dels enters $\mathbb{Z}$ és numerable de dues maneres diferents:

Resolució: (continuació)

ii) Podem provar que el conjunt dels enters $\mathbb{Z}$ és numerable de dues maneres diferents:

- **Mètode 1**: Veiem que és la unió de dos conjunts numerables. En efecte,

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) \cup \mathbb{Z}^-,$$

  on $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ és el conjunt dels enters no negatius, i $\mathbb{Z}^-$ el conjunt dels enters negatius.

Resolució: (continuació)
ii) Podem provar que el conjunt dels enters $\mathbb{Z}$ és numerable de dues maneres diferents:

- **Mètode 1**: Veiem que és la unió de dos conjunts numerables. En efecte,

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) \cup \mathbb{Z}^-,$$

  on $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ és el conjunt dels enters no negatius, i $\mathbb{Z}^-$ el conjunt dels enters negatius.
  Com que tots dos conjunts són numerables (penseu quines aplicacions bijectives $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ i $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}^-$ podeu construir), podem concloure que $\mathbb{Z}$ també ho és.

Resolució: (continuació)

- **Mètode 2:** Construïm una aplicació bijectiva entre $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$.

Resolució: (continuació)

- **Mètode 2:** Construïm una aplicació bijectiva entre $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$. Podem fer correspondre els nombres naturals parells amb els enters positius i els senars amb els enters negatius.

Resolució: (continuació)

- **Mètode 2:** Construïm una aplicació bijectiva entre $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$. Podem fer correspondre els nombres naturals parells amb els enters positius i els senars amb els enters negatius.
  Així, l'aplicació definida per

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longrightarrow & \begin{cases} \dfrac{n}{2} - 1, & \text{si } n \text{ és parell,} \\ -\dfrac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases} \end{array}$$

  és bijectiva (demostreu-ho!) i, per tant, el conjunt dels enters és numerable.