1. Conjunts

GEI, GEIADE, GTIDIC.

Cristina Dalfó

cristina.dalfo@udl.cat

Nacho López

nacho.lopez@udl.cat

Departament de Matemàtica
Cryptography & Graphs Research Group (C&G)
Universitat de Lleida

Campus Universitari Igualada-UdL

ESCOLA POLITÈCNICA SUPERIOR
UNIVERSITAT DE LLEIDA

Conjunts i elements

- En teoria de conjunts un **conjunt** és una col·lecció d'objectes, els quals s'anomenen **elements** d'aquest conjunt.

Conjunts i elements

- En teoria de conjunts un **conjunt** és una col·lecció d'objectes, els quals s'anomenen **elements** d'aquest conjunt.
- Si un objecte x és un element del conjunt C, s'escriu $x \in C$ i es llegeix x pertany a C". En cas contrari, si x no és un element de C s'escriu $x \notin C$.

Conjunts i elements

- En teoria de conjunts un **conjunt** és una col·lecció d'objectes, els quals s'anomenen **elements** d'aquest conjunt.
- Si un objecte x és un element del conjunt C, s'escriu $x \in C$ i es llegeix x pertany a C". En cas contrari, si x no és un element de C s'escriu $x \notin C$.
- Dos conjunts A i B són iguals, i ho denotem $A = B$, si estan formats pels mateixos elements, és a dir,

$$x \in A \iff x \in B.$$

Conjunts i elements

- En teoria de conjunts un **conjunt** és una col·lecció d'objectes, els quals s'anomenen **elements** d'aquest conjunt.
- Si un objecte x és un element del conjunt C, s'escriu $x \in C$ i es llegeix x pertany a C". En cas contrari, si x no és un element de C s'escriu $x \notin C$.
- Dos conjunts A i B són iguals, i ho denotem $A = B$, si estan formats pels mateixos elements, és a dir,

$$x \in A \iff x \in B.$$

- Un conjunt A és un **subconjunt** de B, i ho denotem $A \subseteq B$, si tot element de A és també de B, és a dir,

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

- Resulta que: $A = B \iff [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$.

Descripció d'un conjunt

Un conjunt es pot descriure:

- De forma explícita, donant la llista dels elements que l'integren.
  Exemple: $C = \{2, 3, 5, 7\}$.

Descripció d'un conjunt

Un conjunt es pot descriure:

- De forma explícita, donant la llista dels elements que l'integren.
  Exemple: $C = \{2, 3, 5, 7\}$.
- De forma implícita, indicant les propietats que caracteritzen els seus elements.
  Exemple: $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 10 \text{ i } n \text{ és primer}\}$.

Descripció d'un conjunt

Un conjunt es pot descriure:

- De forma explícita, donant la llista dels elements que l'integren.
  Exemple: $C = \{2, 3, 5, 7\}$.
- De forma implícita, indicant les propietats que caracteritzen els seus elements.
  Exemple: $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 10 \text{ i } n \text{ és primer}\}$.
- De forma recursiva.
  Exemple: Sigui S el conjunt definit de forma recursiva:
  1. $1 \in S$.
  2. Si $n \in S$, aleshores $n + 1 \in S$.

  En aquest cas, S és el conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$.

Conjunts especials

- **Conjunt buit.** El *conjunt buit*, que denotem $\emptyset$, és un conjunt que no té cap element.

- **Conjunt buit.** El *conjunt buit*, que denotem $\emptyset$, és un conjunt que no té cap element.
- **Subconjunt propi.** Un subconjunt B d'un conjunt A és un *subconjunt propi* de A si $B \neq A$ i $B \neq \emptyset$.

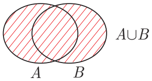
Conjunts especials

- **Conjunt buit.** El *conjunt buit*, que denotem $\emptyset$, és un conjunt que no té cap element.
- **Subconjunt propi.** Un subconjunt B d'un conjunt A és un *subconjunt propi* de A si $B \neq A$ i $B \neq \emptyset$.
- **Conjunt univers.** En cada problema suposarem que els conjunts que hi intervenen són subconjunts d'un conjunt que anomenarem *univers*, i que denotarem U.

Operacions de conjunts I

- **Unió.** El conjunt *unió* de A i de B, denotat $A \cup B$, és el conjunt format pels elements que pertanyen, almenys, a un dels dos conjunts,

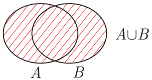
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$



Operacions de conjunts I

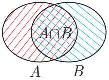
- **Unió.** El conjunt *unió* de A i de B, denotat $A \cup B$, és el conjunt format pels elements que pertanyen, almenys, a un dels dos conjunts,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$



- **Intersecció.** El conjunt *intersecció* de A i de B, denotat $A \cap B$, és el conjunt format pels elements comuns de A i de B,

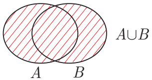
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$



Operacions de conjunts I

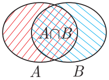
- **Unió.** El conjunt *unió* de A i de B, denotat $A \cup B$, és el conjunt format pels elements que pertanyen, almenys, a un dels dos conjunts,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$



- **Intersecció.** El conjunt *intersecció* de A i de B, denotat $A \cap B$, és el conjunt format pels elements comuns de A i de B,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$



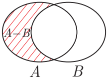
- Aquestes definicions es poden generalitzar en el cas de treballar amb una *família* $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjunts, indexada per un conjunt I, de manera que

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\} \quad \text{i} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$$

són la unió i la intersecció, respectivament, dels conjunts A_i.

- **Diferència.** El conjunt *diferència* de A i de B, denotat per $A - B$, és el conjunt format pels elements de A que no són de B,

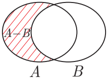
$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$



Si el conjunt B és un subconjunt de A, aleshores $A - B$ s'anomena conjunt complementari de B en A. En cas que A coincideixi amb el conjunt univers U, el conjunt $U - B$ s'anomena *conjunt complementari* de B i es representa per $\overline{B}$.

- **Diferència.** El conjunt *diferència* de A i de B, denotat per $A - B$, és el conjunt format pels elements de A que no són de B,

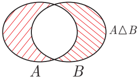
$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$



  Si el conjunt B és un subconjunt de A, aleshores $A - B$ s'anomena conjunt complementari de B en A. En cas que A coincideixi amb el conjunt univers U, el conjunt $U - B$ s'anomena *conjunt complementari* de B i es representa per $\overline{B}$.

- **Diferència simètrica.** La *diferència simètrica* de dos conjunts A i B, que denotarem per $A \triangle B$, es defineix com el conjunt format pels elements que pertanyen només a un dels dos conjunts:

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B).$$



Àlgebra de les parts d'un conjunt I

- **Conjunt de les parts.** El *conjunt de les parts* d'un conjunt E, que denotem $\mathcal{P}(E)$, és el conjunt que té per elements els subconjunts (parts) de E.
  Exemple: Si $E = \{a, b, c\}$, aleshores
  $\mathcal{P}(E) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Àlgebra de les parts d'un conjunt I

- **Conjunt de les parts.** El *conjunt de les parts* d'un conjunt E, que denotem $\mathcal{P}(E)$, és el conjunt que té per elements els subconjunts (parts) de E.
  Exemple: Si $E = \{a, b, c\}$, aleshores
  $\mathcal{P}(E) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
- **Propietats** dels subconjunts de E amb les operacions unió i intersecció:

Àlgebra de les parts d'un conjunt I

- **Conjunt de les parts.** El *conjunt de les parts* d'un conjunt E, que denotem $\mathcal{P}(E)$, és el conjunt que té per elements els subconjunts (parts) de E.
  Exemple: Si $E = \{a, b, c\}$, aleshores
  $\mathcal{P}(E) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
- **Propietats** dels subconjunts de E amb les operacions unió i intersecció:
  1. **Associatives**:
  $$\left.\begin{array}{rcl} A \cup (B \cup C) & = & (A \cup B) \cup C, \\ A \cap (B \cap C) & = & (A \cap B) \cap C, \end{array}\right. \forall A, B, C \in \mathcal{P}(E);$$

Àlgebra de les parts d'un conjunt I

- **Conjunt de les parts.** El *conjunt de les parts* d'un conjunt E, que denotem $\mathcal{P}(E)$, és el conjunt que té per elements els subconjunts (parts) de E.
  Exemple: Si $E = \{a, b, c\}$, aleshores
  $\mathcal{P}(E) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
- **Propietats** dels subconjunts de E amb les operacions unió i intersecció:
  1. **Associatives**:
  $$\left.\begin{array}{rcl} A \cup (B \cup C) & = & (A \cup B) \cup C, \\ A \cap (B \cap C) & = & (A \cap B) \cap C, \end{array}\right. \forall A, B, C \in \mathcal{P}(E);$$
  2. **Commutatives**: $\begin{array}{rcl} A \cup B & = & B \cup A, \\ A \cap B & = & B \cap A, \end{array} \forall A, B \in \mathcal{P}(E);$

Àlgebra de les parts d'un conjunt I

- **Conjunt de les parts.** El *conjunt de les parts* d'un conjunt E, que denotem $\mathcal{P}(E)$, és el conjunt que té per elements els subconjunts (parts) de E.
  Exemple: Si $E = \{a, b, c\}$, aleshores
  $\mathcal{P}(E) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
- **Propietats** dels subconjunts de E amb les operacions unió i intersecció:
  1. **Associatives**:
  $$\left.\begin{array}{rcl} A \cup (B \cup C) & = & (A \cup B) \cup C, \\ A \cap (B \cap C) & = & (A \cap B) \cap C, \end{array}\right. \forall A, B, C \in \mathcal{P}(E);$$
  2. **Commutatives**: $\begin{array}{rcl} A \cup B & = & B \cup A, \\ A \cap B & = & B \cap A, \end{array} \forall A, B \in \mathcal{P}(E);$
  3. **Lleis de la identitat**: $\begin{array}{rcl} A \cup \emptyset & = & A, \\ A \cap E & = & A, \end{array} \forall A \in \mathcal{P}(E);$

Àlgebra de les parts d'un conjunt I

- **Conjunt de les parts.** El *conjunt de les parts* d'un conjunt E, que denotem $\mathcal{P}(E)$, és el conjunt que té per elements els subconjunts (parts) de E.
  Exemple: Si $E = \{a, b, c\}$, aleshores
  $\mathcal{P}(E) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
- **Propietats** dels subconjunts de E amb les operacions unió i intersecció:
  1. **Associatives**:
  $$\left.\begin{array}{rcl} A \cup (B \cup C) & = & (A \cup B) \cup C, \\ A \cap (B \cap C) & = & (A \cap B) \cap C, \end{array}\right. \forall A, B, C \in \mathcal{P}(E);$$
  2. **Commutatives**: $\begin{array}{rcl} A \cup B & = & B \cup A, \\ A \cap B & = & B \cap A, \end{array} \forall A, B \in \mathcal{P}(E);$
  3. **Lleis de la identitat**: $\begin{array}{rcl} A \cup \emptyset & = & A, \\ A \cap E & = & A, \end{array} \forall A \in \mathcal{P}(E);$
  4. **Lleis del complementari**: $\begin{array}{rcl} A \cup \overline{A} & = & E, \\ A \cap \overline{A} & = & \emptyset, \end{array} \forall A \in \mathcal{P}(E);$

Àlgebra de les parts d'un conjunt II

5. **Distributives**:
$$\left.\begin{array}{rcl} A\cup(B\cap C) &=& (A\cup B)\cap(A\cup C),\\ A\cap(B\cup C) &=& (A\cap B)\cup(A\cap C),\end{array}\right. \forall A,B,C\in\mathcal{P}(E);$$
6. **Lleis d'idempotència**: $\begin{array}{rcl} A\cup A &=& A,\\ A\cap A &=& A,\end{array} \forall A\in\mathcal{P}(E);$
7. $\begin{array}{rcl} A\cup E &=& E,\\ A\cap\emptyset &=& \emptyset,\end{array} \forall A\in\mathcal{P}(E);$
8. **Lleis d'absorció**: $\begin{array}{rcl} A\cup(A\cap B) &=& A,\\ A\cap(A\cup B) &=& A,\end{array} \forall A,B\in\mathcal{P}(E);$
9. $\overline{\overline{A}} = A, \quad \forall A\in\mathcal{P}(E);$
10. $\overline{E}=\emptyset, \quad \overline{\emptyset}=E;$
11. **Lleis de De Morgan**: $\begin{array}{rcl} \overline{A\cup B} &=& \overline{A}\cap\overline{B},\\ \overline{A\cap B} &=& \overline{A}\cup\overline{B},\end{array} \forall A,B\in\mathcal{P}(E).$

- **Conjunts disjunts.** Dos conjunts A i B es diu que són *disjunts* si $A \cap B = \emptyset$.

Particions d'un conjunt

- **Conjunts disjunts.** Dos conjunts A i B es diu que són *disjunts* si $A \cap B = \emptyset$.
- **Partició d'un conjunt.** Una família $\{A_i\}_{i \in I}$ de parts d'un conjunt A tal que $A_i \neq \emptyset, \forall i \in I$, és una *partició* de A si es verifica que:
  - Els conjunts A_i són disjunts dos a dos, és a dir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$;
  - La unió de tots els A_i és A, és a dir, $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

Producte cartesià

- El **producte cartesià** de dos conjunts A i B, que denotem $A \times B$, és el conjunt següent:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Producte cartesià

- El **producte cartesià** de dos conjunts A i B, que denotem $A \times B$, és el conjunt següent:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

- **Parells ordenats.** Els elements (a, b) de $A \times B$ s'anomenen *parells ordenats*. Dos parells ordenats són iguals si tenen els mateixos components, és a dir,

$$(a, b) = (a', b') \iff [a = a' \wedge b = b'].$$

Producte cartesià

- El **producte cartesià** de dos conjunts A i B, que denotem $A \times B$, és el conjunt següent:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

- **Parells ordenats.** Els elements (a, b) de $A \times B$ s'anomenen *parells ordenats*. Dos parells ordenats són iguals si tenen els mateixos components, és a dir,

$$(a, b) = (a', b') \iff [a = a' \wedge b = b'].$$

- **Producte cartesià de n conjunts.** S'anomena producte cartesià dels conjunts de la família $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ al conjunt:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Si $A_i = A, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, denotarem A^n el seu producte cartesià.

Problema

Sigui E un conjunt i siguin A, B i C subconjunts de E. Demostreu les igualtats següents:

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Problema

Sigui E un conjunt i siguin A, B i C subconjunts de E. Demostreu les igualtats següents:

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Resolució

(a) Utilitzem la definició d'igualtat de dos conjunts, és a dir, provarem que

$$\forall x \in E, \quad x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad (*).$$

(a) (continuació)
Sigui x un element de E. Aplicant les definicions d'intersecció i unió de conjunts, tindrem que

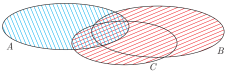
$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} x \in A \ \wedge \ x \in B \cup C \\
&\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} x \in A \ \wedge \ (x \in B \vee x \in C) \\
&\overset{(3)}{\Longleftrightarrow} (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ x \in C) \\
&\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} x \in A \cap B \ \vee \ x \in A \cap C \\
&\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}
$$

Resolució d’exercicis

(*a*) (continuació)

Sigui x un element de E. Aplicant les definicions d’intersecció i unió de conjunts, tindrem que

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} x \in A \ \wedge \ x \in B \cup C \\
&\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} x \in A \ \wedge \ (x \in B \vee x \in C) \\
&\overset{(3)}{\Longleftrightarrow} (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ x \in C) \\
&\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} x \in A \cap B \ \vee \ x \in A \cap C \\
&\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}$$



Les definicions i propietats emprades són les següents:

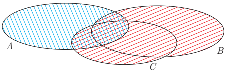
(1) definició d’intersecció de dos conjunts;

(2) definició d’unió de dos conjunts;

(3) llei distributiva de la connectiva $\wedge$ respecte de la connectiva $\vee$.

Resolució d'exercicis

(*a*) (continuació)
Sigui x un element de E. Aplicant les definicions d'intersecció i unió de conjunts, tindrem que



$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\overset{(1)}{\iff} x \in A \;\wedge\; x \in B \cup C \\
&\overset{(2)}{\iff} x \in A \;\wedge\; (x \in B \vee x \in C) \\
&\overset{(3)}{\iff} (x \in A \;\wedge\; x \in B) \;\vee\; (x \in A \;\wedge\; x \in C) \\
&\overset{(1)}{\iff} x \in A \cap B \;\vee\; x \in A \cap C \\
&\overset{(2)}{\iff} x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}$$

Les definicions i propietats emprades són les següents:

(1) definició d'intersecció de dos conjunts;
(2) definició d'unió de dos conjunts;
(3) llei distributiva de la connectiva $\wedge$ respecte de la connectiva $\vee$.

Com que x és un element qualsevol de E, l'anterior raonament és vàlid per a tot $x \in E$ i, per tant, queda demostrat (*a*).

(b) La demostració de la identitat

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

pot fer-se seguint els mateixos passos de la demostració anterior.

(b) La demostració de la identitat

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

pot fer-se seguint els mateixos passos de la demostració anterior. Un altra manera de fer-ho consisteix en utilitzar les lleis de De Morgan per transformar les interseccions amb unions i viceversa, i aplicar la propietat distributiva de $\cap$ respecte de $\cup$, provada anteriorment:

(b) La demostració de la identitat

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

pot fer-se seguint els mateixos passos de la demostració anterior. Un altra manera de fer-ho consisteix en utilitzar les lleis de De Morgan per transformar les interseccions amb unions i viceversa, i aplicar la propietat distributiva de $\cap$ respecte de $\cup$, provada anteriorment:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \overline{\overline{A \cup (B \cap C)}} &&= \overline{\overline{A} \cap \overline{B \cap C}} \\ &= \overline{\overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})} &&= \overline{(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C})} \\ &= \overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup C}} &&= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$