3-7 定積分の例題【6】）

[6]

$$I = \int_0^\infty e^{-b^2(x^2 + a^2/x^2)}\,dx \qquad (a \geq 0) \text{ —— ※}$$

前項同様、a に関して微分する。

$$\frac{dI}{da} = -2ab^2 \int_0^\infty \frac{1}{x^2} e^{-b^2(x^2 + a^2/x^2)}\,dx$$

$$\frac{d}{da} e^{-b^2(x^2 + a^2/x^2)} = -b^2/x^2 \cdot (2a)$$

$x = a/t$ とおくと

$x : 0 \to \infty$

$t : \infty \to 0$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{t^2}$$

$$dx = -\frac{a}{t^2}\,dt$$

$$\frac{dI}{da} = -2ab^2 \int_\infty^0 \frac{t^2}{a^2} e^{-b^2\left(\left(\frac{a}{t}\right)^2 + t^2\right)} \cdot \left(-\frac{a}{t^2}\right) dt$$

$$= 2b^2 \int_\infty^0 e^{-b^2(a^2/t^2 + t^2)}\,dt$$

$$= -2b^2 \int_0^\infty e^{-b^2(a^2/t^2 + t^2)}\,dt$$

$$= -2b^2 I$$

$$\therefore \frac{dI}{da} = -2b^2 I$$

$$\frac{dI}{I} = -2b^2\,da$$

$$\int \frac{dI}{I} = \int (-2b^2)\,da$$

$$\log I = -2b^2 a + C$$

$$I = C' e^{-2b^2 a}$$

a ~~t~~ $= 0$ とすると

$$C' = I(0) = \int_0^\infty e^{-b^2x^2}\,dx \leftarrow (3,18)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2b} \qquad (b > 0)$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-b^2(x^2 + a^2/x^2)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2b} e^{-2ab^2} \qquad (a>0,\ b>0) \text{ —— ※'}$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2b} e^{-2ab^2} \qquad (a>0,\ b<0)$$

この結果から

$$\int_0^\infty e^{-c(x^2/a^2 + b^2/x^2)}\,dx = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c}}\, e^{-2cb/a} \qquad (a, b, c > 0)$$

(証明) $x = at$,

$$\frac{dx}{dt} = a$$

$$dx = a\,dt$$

$$\int_0^\infty e^{-c\left(t^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{1}{t^2}\right)} a\,dt$$

$$= a \int_0^\infty e^{-c\left(t^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{1}{t^2}\right)}\,dt$$

ここで ※' において $b = \sqrt{c}$, $a = \frac{b}{a}$ とみれば同じ形なので対応させると

$$a \int_0^\infty e^{-c\left(t^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{1}{t^2}\right)}\,dt = a \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{c}}\, e^{-2\frac{b}{a}\cdot c}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c}}\, e^{-2cb/a} \quad //$$

$$\int_0^\infty e^{-c(x/a - b/x)^2}\,dx = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

(証明)

$$\int_0^\infty e^{\underline{-c(x^2/a^2 + b^2/x^2) + 2c\frac{b}{a}}}\,dx$$

$$= e^{+2cb/a} \underbrace{\int_0^\infty e^{-c\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{x^2}\right)}\,dx}_{\text{前と同じ}}$$

$$\parallel$$

$$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c}}\, e^{-2cb/a}$$

$e^{○} \times e^{-○}$ で打ち消し合う

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

//