P. 128.

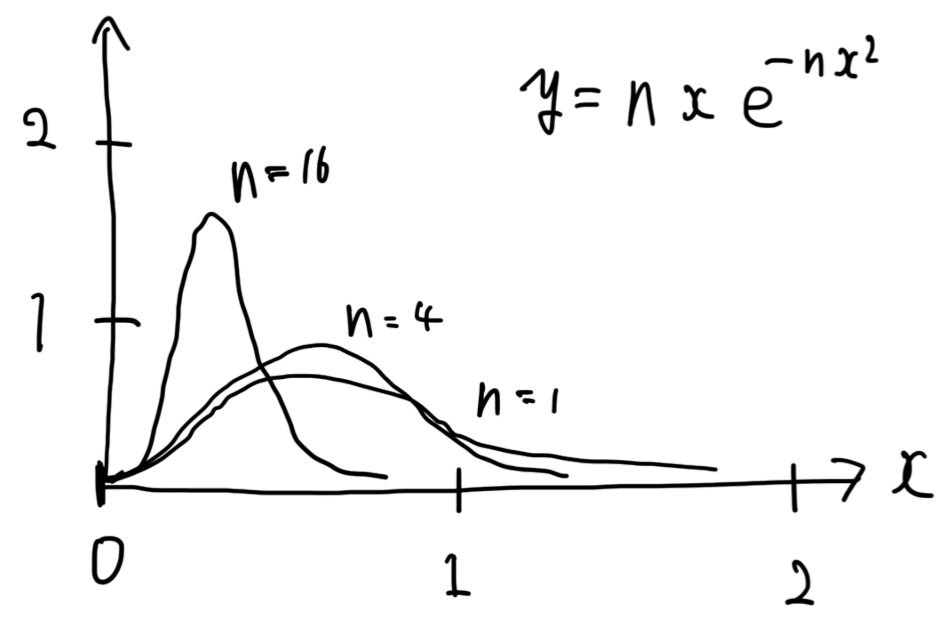
例1 〈一様収束な関数の積分に関する定理が成り立たない例. ※$f_n(x)$が一様収束でないとき〉

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

という関数列は、$x = 0$において、一様収束でないことがたやすく証明できる。第4.1図にnをしだいに増したときの$y = f_n(x)$が表す曲線を示している。山頂の座標は、$x = 1/\sqrt{2n}$，$y = \sqrt{n/2e}$。この曲線の有様を見ても$x = 0$で、一様収束でないことがわかる。

Q. 一様収束でないことの証明は?

A. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0 \ (x > 0)$ だが、$f_n(x)$に対し、nを大きくとっても、xを小さくとれば、$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ とならないxが常に存在する。($x=0$付近で一様収束でない) ※ちゃんとした証明ではないが。



第4.1図

さて、上の関数列$y = nxe^{-nx^2}$の極限($n \to \infty$)を$f(x)$とすれば、

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} = 0 \quad (x > 0)$$

また、

$$f_n(0) = 0 \quad (x \geqq 0)$$

ゆえに $a > 0$ とすれば

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a 0\,dx = 0$$

また、

$$\int_0^a f_n(x)\,dx = \int_0^a nxe^{-nx^2}\,dx$$

$nx^2 = t$ とおくと

x	$0 \to a$
t	$0 \to na^2$

$$2nx \cdot \frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2nx}$$

$$\therefore \int_0^{na^2} nx \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{2nx}\,dt$$

tの範囲　$\frac{dx}{dt}$

$$= \int_0^{na^2} \frac{1}{2} e^{-t}\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-t}\right]_0^{na^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-na^2}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \int_0^a f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{2}\left(1 - e^{-na^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}$$

すなわち、極限関数の積分と積分の極限が一致しない

$$\int_0^a f(x)\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^a f_n(x)\,dx$$