

4.3 条件つき収束級数

正および負の項を含む級数

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (4.5)$$

があって、そのうち正の項を (4.5) に含まれている

順序にとって、 p_1, p_2, p_3, \dots とし、負の項を $-q_1, -q_2, -q_3, \dots$

とする。もしこれらの数列で作った二つの級数が

収束であるときには、それぞれ和を P および Q と

すれば、(4.5) は、絶対収束であって、その和は $P - Q$

である。 P の級数または Q の級数の一方が収束し、他

方が発散する級数ならば (4.5) は、発散級数である。(ii)

しかし、 P の級数および Q の級数が共に発散級数

であって、かつ $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$ ならば、

項の順序を変えて、(4.5) を任意の数値に等しくさせる

ことができる。これを条件つき収束という名のあ

理由である。(iii)

(証明 (iii))

いま $K (\geq 0)$ をこのような場合における (4.5) の和とし

しめようとする数とする。 P の級数は、発散するから、適当な

項までの和をとって、

$$P' = p_1 + p_2 + \dots + p_i$$

とし、 $P' \geq K$ あるいは $P' - K < p_i$ を満足するようにする = とか

できる。次に Q の級数の幾つかの項をとり、

$$Q' = q_1 + q_2 + \dots + q_j$$

とし、 $P' - Q' \leq K$, $K - (P' - Q') < q_j$ であるように

することができる。次に、

$$P'' = p_{i+1} + p_{i+2} + \dots + p_k$$

をくくると、 $P' - Q'$ に加えて、 $P' - Q' + P'' \geq K$, $P' - Q' + P'' - K < p_k$

であるようにすることができる。この手続を $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$ であることを使えば、上の定理が証明できる。

$K < 0$ のときは、 P の代わりに Q' から出発すればよい。

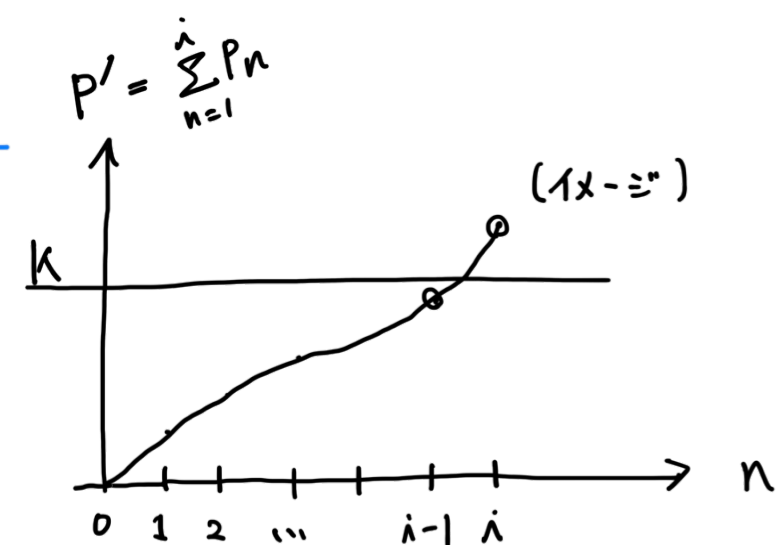
前提条件

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

の正の項の和 P , 負の項の和 $-Q$ が共に発散。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0.$$

証明したいこと
 $P - Q$ を任意の値にできる。



$$P' - Q' \leq K, \quad K - (P' - Q') < q_j$$



$$q_j > K - (P' - Q') \geq 0$$

$$-q_j < -\{K - (P' - Q')\} \leq 0$$

Q 無限級数の収束先って、
合計というより、手続を
くり返したときの極限(?)



条件収束級数は和の順序交換により任意の値に...
mathlandscape.com

0:15

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} > V$ のとき、
 $\varphi(n) = \min Q \setminus \{\varphi(k) \mid 1 \leq k \leq n-1\}$
ただし、 $\sum_{k=1}^0 = 0$ と解釈して $\varphi(1)$ を定める。

イメージ図を描くと以下ようになる。

条件収束の項の並び替えのイメージ(縦軸は1の値を表す)

証明すべきは以下の2つである。
1. φ が確かに全単射であること
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = V$ となること

順番に示そう。

“ 1. φ が確かに全単射であること ”

mathlandscape.com