

3-7 定積分の例題

不定積分が求まらない場合の特殊な定積分の例.

[1] $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$,

$x = yz$
 $dx = z dy$

とだけば.
 $I = \int_0^\infty e^{-y^2 z^2} \cdot z dy$
 $= \int_0^\infty z e^{-y^2 z^2} dy$

また $I = \int_0^\infty e^{-z^2} dz$

ともかける (積分変数の文字をかきかえただけ)

$I^2 = \int_0^\infty e^{-z^2} dz \int_0^\infty z e^{-y^2 z^2} dy$
 $= \int_{z=0}^\infty \int_{y=0}^\infty z e^{-z^2(1+y^2)} dy dz$
 $= \int_{y=0}^\infty dy \int_{z=0}^\infty z e^{-z^2(1+y^2)} dz$
 $= \int_{y=0}^\infty \frac{1}{2(1+y^2)} dy$
 $= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}$
 $= \frac{\pi}{4}$
 $I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2$
 $= \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-z^2} dz$
 $= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+z^2)} dx dz$
 $x = yz$ として置換すると z が固定した状態で $dx = z dy$ となる

(別解)

$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$

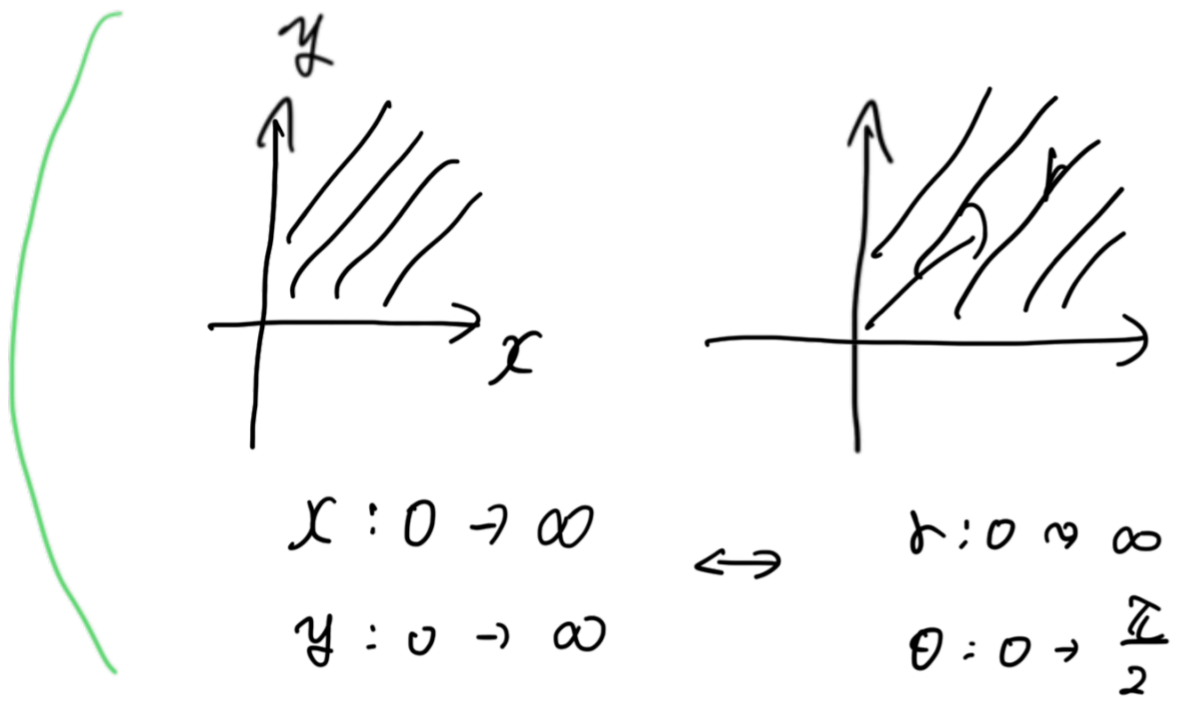
ゆえに

$I^2 = \int_{x=0}^\infty \int_{y=0}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dy dx$

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とおくと $dx dy = r dr d\theta$ ($\because \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} dr d\theta = r dr d\theta$)

$I^2 = \int_{r=0}^\infty \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} \cdot r dr d\theta$

$= \int_{r=0}^\infty \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r e^{-r^2} dr d\theta$



$= \int_{r=0}^\infty r e^{-r^2} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$

$= \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^\infty r e^{-r^2} dr$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^\infty$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{\pi}{4}$

$\therefore I > 0 \text{ より } I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

∵ ヤコビアン $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} =$

□ABCD の面積
 $= |\vec{AB} \times \vec{AD}|$
 $= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta, 0 \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial r} dr, \frac{\partial y}{\partial r} dr, 0 \right) \right|$
 $= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial r} \right) dr d\theta \right|$
 $= | -r \sin \theta \cdot \sin \theta - r \cos \theta \cdot \cos \theta | dr d\theta$
 $= | r (-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) | dr d\theta$
 $= r dr d\theta$

(応用)

$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (3.17)

に おいて $x = \sqrt{a} t$ ($a > 0$) とおくと $\frac{dx}{dt} = \sqrt{a}$
($x: 0 \rightarrow \infty$ に対応し, $t: 0 \rightarrow \infty$)

$\int_0^\infty e^{-ax^2} \frac{dx}{dt} dt$

$= \int_0^\infty \sqrt{a} e^{-at^2} dt$

$= \left[\frac{e^{-at^2}}{2\sqrt{a}} \right]_0^\infty$

$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ (3.18)

(3.18) を $a = 1$ とし, n 回微分して

$\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

という結果が得られる.

$\frac{d}{da} (a^{-\frac{1}{2}})$
 $= -\frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}}$
 $\frac{d}{da} (-\frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}})$
 $= +\frac{1 \cdot 3}{2^2} a^{-\frac{5}{2}}$
 $\frac{d}{da} (\frac{1 \cdot 3}{2^2} a^{-\frac{5}{2}})$
 $= (\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} a^{-\frac{7}{2}})$

//