4.7 函数列および級数の一様収束

〈一様収束のテイギ〉

変域 (a, b) でテイギされた変数 x の函数列 $\{f_n(x)\}$:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \cdots,\ f_n(x),\ \cdots \qquad (4.12)$$

例. $f_1(x) = x$
$f_2(x) = x^2$
⋮
$f_n(x) = x^n$ など

があり、その変域内のすべての x に対し、$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が有限確定であるとする。すなわち、任意に与えられた正数 ε に対し、自然数 N を適当に選べば、$n \geqq N$ となるすべての n に対し、

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

が成立するとする。このとき ε に対する N の選び方は、一般には x の値により変わる。変域 $(a.b)$ 内のすべての x に対して共通の N を選ぶことができる場合は、(4.12) は変域 (a, b) において一様収束であるという。■

〈Cauchy の条件 ver. の一様収束の条件〉

任意の正数 ε を与えるとき、それに応じて十分大きな N を選べば、$n \geqq N$ なるすべての n に対し、変域内の x の値に無関係に、

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つとき、函数列 (4.12) は、その変域において、一様収束であり、またその逆も成り立つ。

未証明

〈一様収束先の関数の連続性〉

(4.12) の各々の函数が連続で、函数列が (a, b) で $f(x)$ に一様収束するときには、$f(x)$ は (a, b) で連続である。

(証明)

$\{f_n(x)\}$ が一様収束であるから、(a, b) 内の任意の $x, x+h$ に対し、$n \geqq N$ なる或る n をとれば、

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},\quad |f(x+h) - f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ。$f_n(x)$ は仮定より、連続であるから、h を適当に小さくとれば、

$$|f_n(x+h) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

とできる。ゆえに、

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &= |f(x+h) \overbrace{- f_n(x+h) + f_n(x+h)}^{+-0} \overbrace{- f_n(x) + f_n(x)}^{+-0} - f(x)| \\
&\leqq |f_n(x+h) - f(x+h)| + |f_n(x+h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

連続のテイギ.

よって $f(x)$ は (a, b) で連続である。■

〈一様収束な関数の積分に関する定理〉

上と同じ仮定のとき、

(4.12) の各々の函数が連続で、函数列が (a, b) で $f(x)$ に一様収束するとき

(4.12) が一様収束である変域内に x の二つの値 a および x をとれば

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx$$

が成り立つ。

意味: 一様収束なら、極限と積分の順序を入れ替えてもよい（一般に極限操作の順序は入れ替えられない）

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(x)\,dx \\
&= \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \\
&= \int_a^x f(x)\,dx
\end{aligned}$$

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ より

(証明)

それは ε に対し、変域内の x には無関係に N を十分大きくとれば、$n \geqq N$ に対して、

$$\left| \int_a^x f(x)\,dx - \int_a^x f_n(x)\,dx \right| < \int_a^x |f(x) - f_n(x)|\,dx < \varepsilon\,|x - a|$$

となるからである。■

※ $f_n(x) \to f(x)$ が一様収束でない場合には、上の定理が必ずしも成り立たないことは、次の例1でわかる。