＜Gaussの積分定理＞

区分的に滑らかな閉曲面Sによって包まれた空間Vがあって、関数$f(x,y,z)$および偏微分係数$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$が、その内および$S$の上で連続であるとき、$\iiint_V \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$ なる空間積分を考えてみる

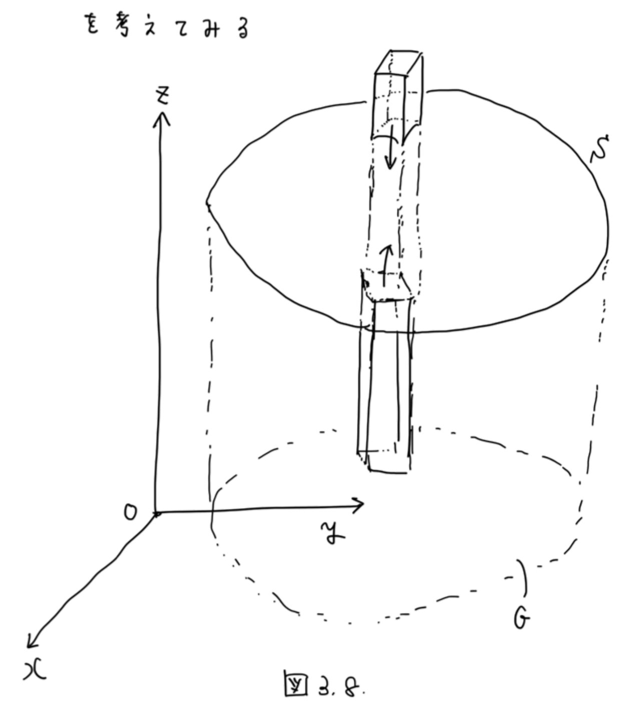


図3.8

図3.8に示したように、切口の面積が$dx\,dy$なるz軸に平行な多くの柱によってVを貫くときには、ただちに、

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint_G dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

であることがわかる。ここでz_1およびz_2は、小角柱が曲面Sを貫いた点の座標である。ゆえに、zに関する積分を行えば、

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint_G f(x,y,z_2)\,dx\,dy - \iint_G f(x,y,z_1)\,dx\,dy$$

小角柱がSから切りとる面積要素dS_1, dS_2は、Gに対して互いに反対の側を向いているから、γ_1, γ_2でそれぞれdS_1, dS_2における内向きの法線がz軸となす角を表わせば

$$\iint_G f(x,y,z_2)\,dx\,dy = -\iint f(x,y,z_2)\cos\gamma_2\,dS_2,$$

$$\iint_G f(x,y,z_1)\,dx\,dy = \iint f(x,y,z_1)\cos\gamma_1\,dS_1$$

ゆえに一般に面積要素dSにおける内向きの法線が座標軸となす角をα, β, γとすると、

$$\left.\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dx\,dy\,dz &= -\iint_S f(x,y,z)\cos\gamma\,dS \\ \iiint_V \frac{\partial f}{\partial x} dx\,dy\,dz &= -\iint_S f(x,y,z)\cos\alpha\,dS \\ \iiint_V \frac{\partial f}{\partial y} dx\,dy\,dz &= -\iint_S f(x,y,z)\cos\beta\,dS \end{aligned}\right\} \quad (3.46)$$

これをGaussの積分定理という。

＜ベクトルの発散＞

もし、三つの関数$X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$がその第一階偏微分係数と共に連続であれば、(3.46)の形の式を加えて、

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$$= -\iint_S (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,dS \quad \text{—— (3.47)}$$

もし、X, Y, Zが或るベクトル$\mathbf{V}$の直角成分であるときには、 $\mathbf{V} = (X, Y, Z)$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{div}\mathbf{V} \quad \text{—— (3.48)}$$

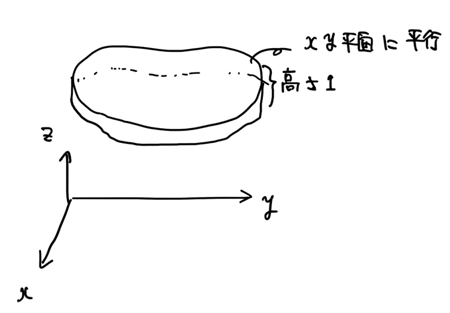
とおき、これをベクトル$\mathbf{V}$の発散という。(3.47)の式を使って、書けば、(3.44)によって、

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{V}\,dx\,dy\,dz = -\iint_S \underbrace{V_n}_{(\mathbf{V},\,\mathbf{n})}\,dS \quad \text{—— (3.49)}$$

となり、或る空間内に$\mathbf{V}$の発散を総和すれば、その表面における$\mathbf{V}$の外向きの方向の成分の和に等しいことを示す。

＜　　　　　　　　　＞

次に特別の場合として、空間Vがxy平面に平行な底面をもつ高さ1なる柱形のものであるとする



また関数XおよびYはzを含まず、また$Z=0$であるとすれば、二つの底面に取った積分は0であるため、(3.47)は以下となる。

$Z=0$より $\frac{\partial Z}{\partial z}$も0

$$\iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$$= -\iint_S (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,dS \quad \text{—— (3.47)}$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\,dy = -\oint_C (X\cos\alpha + Y\cos\beta)\,ds$$

$Z=0$より

＜左辺の変形＞

$$\iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} dx\,dy\,dz$$

Xはzに依存しないため外にだせる。

$$= \underbrace{\int_0^1 dz}_{\text{高さ }0\sim1} \iint_S \frac{\partial X}{\partial x} dx\,dy$$

この部は1

$$= \iint_S \frac{\partial X}{\partial x} dx\,dy$$

※ $\frac{\partial Y}{\partial y}$も同様

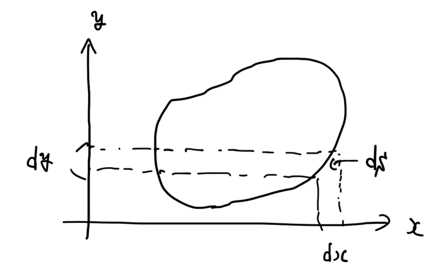


図3.9

この式に、

$$dx = \cos\beta\,ds, \quad dy = -\cos\alpha\,ds$$

を入れれば、

$$\iint_S \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\,dy = -\oint_C (Y\,dx - X\,dy)$$

$$= -\oint_C \left(Y\frac{dx}{ds} - X\frac{dy}{ds}\right) ds$$

???

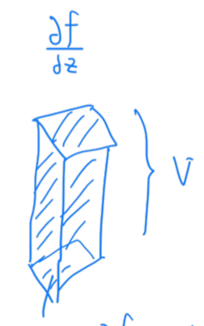
となる。この結果において、$X = V$, $Y = -U$とおくと

$$\iint_S \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dx\,dy = -\oint_C \left(U\frac{dx}{ds} + V\frac{dy}{ds}\right) ds \quad \text{—— (3.50)}$$

???

という式が得られる。

体積から表面積のギロンへ

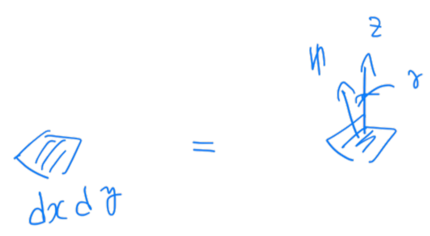


$$= \iint_G f(x,y,z_2)\,dx\,dy$$

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint_G f(x,y,z_2)\,dx\,dy - \iint_G f(x,y,z_1)\,dx\,dy$$

$$dx\,dy = -\cos\gamma_2\,dS_2$$

$$\iint_G f(x,y,z_2)\,dx\,dy = -\iint f(x,y,z_2)\cos\gamma_2\,dS_2$$



$$\iint_G f(x,y,z_1)\,dx\,dy = \iint f(x,y,z_1)\cos\gamma_1\,dS_1$$

$$\therefore \iint_G f(x,y,z_2)\,dx\,dy - \iint_G f(x,y,z_1)\,dx\,dy = -\left[\iint f(x,y,z_2)\cos\gamma_2\,dS_2 - \iint f(x,y,z_1)\cos\gamma_1\,dS_1\right]$$

座標に依存しない書き方へ.

$$= \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

(3.46)の形