Stokes の定理

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos\gamma \right\} dS$$

$$= \oint_C (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \qquad \text{———} \qquad (3.63)$$

$$\iint_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{V})_n\, dS = \oint_C (\mathbf{V}, d\mathbf{s})$$

この定理の応用例の一つとして、次の定理がある。

U は x, y, z の関数で Laplace の方程式を満たすとする。

$$U = U(x, y, z)$$

$$\nabla^2 U = 0$$

いま (3.63) において、

$$X = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Z = 0$$

とおくと、

$$\iint_S \left[\left\{ 0 - \left(-\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right) \right\} \cos\alpha + \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} - 0 \right\} \cos\beta + \left\{ -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\} \cos\gamma \right] dS = \oint_C \left(\frac{\partial U}{\partial y} dx - \frac{\partial U}{\partial x} dy \right)$$

$$\iint_S \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \cos\alpha + \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \cos\beta - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \cos\gamma \right\} dS = \oint_C \left(\frac{\partial U}{\partial y} dx - \frac{\partial U}{\partial x} dy \right) \qquad \text{———} \quad ※$$

$\nabla^2 U = 0$ より

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

これを※に代入すると (代入して共通の $\frac{\partial U}{\partial z}$ でくくる)

$$\iint_S \left(\cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial U}{\partial z}\, dS = \oint_C \left(\frac{\partial U}{\partial y} dx - \frac{\partial U}{\partial x} dy \right) \qquad \text{———} \qquad (3.64)$$

Q この定理は名前ある?
意味は?

という結果が得られる。