4.6 二重級数

二つの番号によって定まる無限に多くの数 $a_{m,n}$ を次の形、

$$
\begin{aligned}
& a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots + a_{1,n} + \cdots \\
+ & a_{2,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{2,n} + \cdots \\
+ & \cdots\cdots \\
+ & a_{m,1} + a_{m,2} + \cdots + a_{m,n} + \cdots \\
+ & \cdots\cdots
\end{aligned}
\qquad (4.10)
$$

に配列し、加えたものを、二重級数という。

この二重級数の初めの m 行および n 列からなる和を $s_{m,n}$ で表す。すなわち、

$$
\begin{aligned}
s_{m,n} = \; & a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots + a_{1,n} \\
+ \; & a_{2,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{2,n} \\
+ \; & \vdots \\
+ \; & a_{m,1} + a_{m,2} + \cdots + a_{m,n}
\end{aligned}
\qquad (4.11)
$$

これを、(4.10) の部分和という。もし、任意に小さく与えうる正の数 ε に対し、或る自然数 N があって、$m > N$ かつ $n > N$ なるすべての m, n について、

$$|s_{m,n} - s| < \varepsilon$$

が成立する場合には、(4.10) が収束するという。s をその和という。そうでないときは、発散するという。

二重級数 (4.10) が収束級数であるための条件は、$m > N$, $n > N$ であるときに、

$$|s_{m+k,n+l} - s_{m,n}| < \varepsilon \quad (k, l = 1, 2, 3 \cdots)$$

が成立するような自然数 N が存在することである。(Cauchy の条件)

(4.10) において各行を別々にとれば、各々一つの無限級数を得る。これらの無限級数がことごとく収束する場合に、それらの和をそれぞれ σ_1, σ_2, σ_3 $\cdots$ とする。すなわち、

$$
\begin{aligned}
\sigma_m &= a_{m,1} + a_{m,2} + \cdots + a_{m,n} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)
\end{aligned}
$$

いま σ_m を項とする無限級数

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m$$

がまた収束して、その和が σ であるときは、

$$\sigma = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right).$$

このときに、σ を二重級数 (4.10) の行和という。

同様に、(4.10) の各列を別々にとった無限級数がことごとく収束する場合に、その和

$$\tau_n = a_{1,n} + a_{2,n} + \cdots + a_{m,n} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を項とする無限級数

$$\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n$$

で収束して、τ という和をもつときには、

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \right)$$

を (4.10) の列和という。

もし、二重級数 (4.10) が収束し、かつそれが行和、列和をもつならば、これらの和は等しい。(Pringsheim の定理) すなわち、(4.10) の和を s とすると、以下

$$s = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \right)$$

しかしもし二重級数が収束しないときは、その行和、列和は必ずしも等しくない。また行和および列和が等しくても必ずしもその二重級数が収束するとは言えない。

証明スキップした。