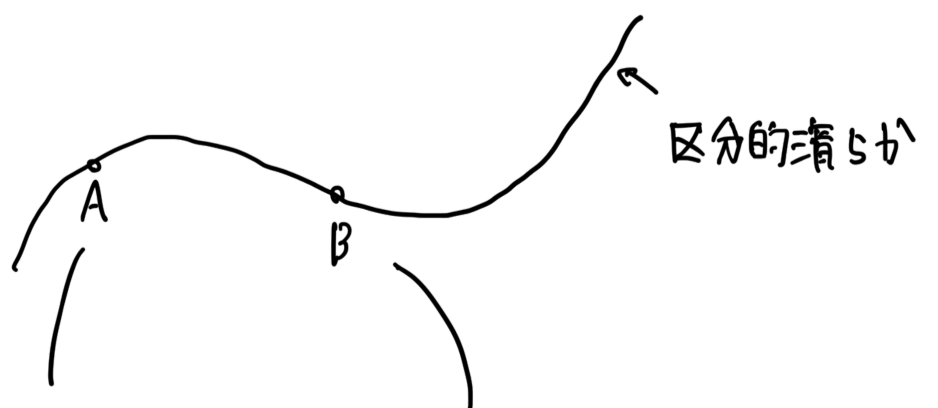
3.10 曲線積分

パラメータ u によって表わされた式

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u)$$

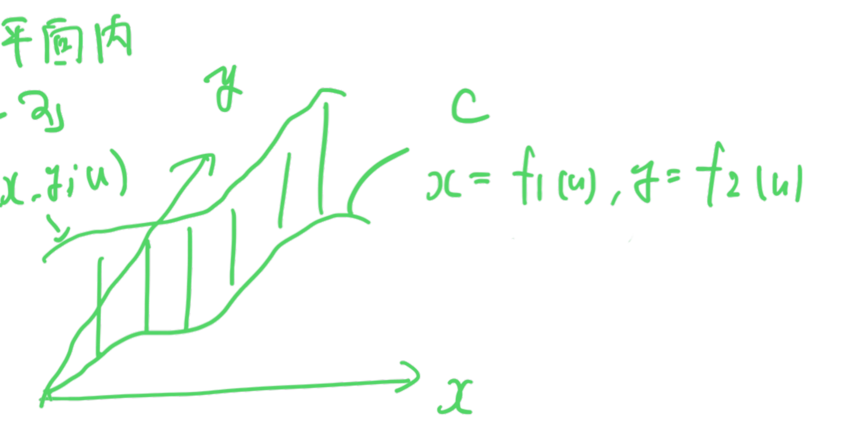
が区分的滑らかな曲線 C を表わすとし、この曲線上に2点 A, B が与えられているとする。



$(x_0, y_0, z_0; u_0)$　$(x', y', z'; u')$ とし、

別に関数 $f(x, y, z)$ があって、点 (x, y, z) が曲線 C に沿って変わるに従い、$f(x, y, z)$ の値も連続的に変わるとする

C が2次元平面内の曲線だとすると



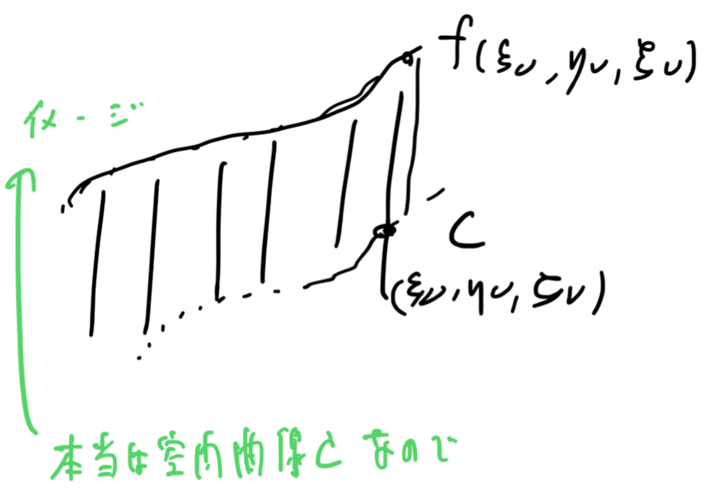
いま、A, B 間を多くの点 $P_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu; u_\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ で区分し、

$$x_{\nu-1} < \xi_\nu < x_\nu, \quad y_{\nu-1} < \eta_\nu < y_\nu, \quad z_{\nu-1} < \zeta_\nu < z_\nu, \quad \Delta x_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$$

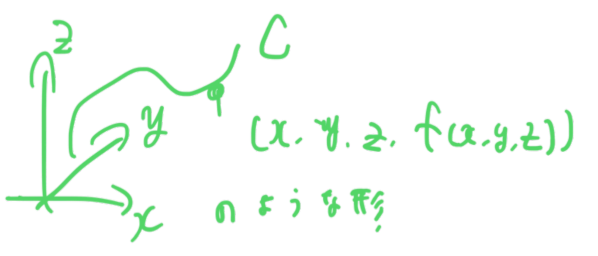
として、曲線に沿ってとった次の和;

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu)\, \underline{\underline{\Delta x_\nu}}$$

イメージ



本当は空間曲線 C なので



Q なぜ Δx_ν？
曲線 C の線素片のようなものを使う方が自然では？

A. 力学的仕事など計算するとき「x 成分に沿った寄与」など計算することがある。(テラカンでも P.96 で 線素片の考え方がでてくる。)

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (\underline{F_x\, dx} + F_y\, dy + F_z\, dz)$$

$$= \int_C F_x\, dx + \int_C F_y\, dy + \int_C F_z\, dz$$

今はこの1つずつをギロンしている。

もし、$n \to \infty$, $\Delta x_\nu \to 0$ なる極限においてこの和が一定に収束するとき、これを、関数 $f(x, y, z)$ の曲線 C に沿って、x に関してとった曲線積分といい、

$$\int_A^B f(x, y, z)\, dx, \quad \text{または、} \quad \int_C f(x, y, z)\, dx$$

で表す。

このような曲線積分はまた、

$$\int_C f(x, y, z)\, dx = \int_{u_0}^{u'} f(f_1(u), f_2(u), f_3(u)) \frac{dx}{du}\, du$$

とも書かれる。

もし、パラメータとして、曲線の長さを用いる場合は、この右辺の u を s で表すのが慣例である。

同様に、

$$\int_C f(x, y, z)\, dy, \quad \int_C f(x, y, z)\, dz$$

等が定義される。

もし曲線が二つの部分 C_1, C_2 からなるときは、

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

次に、もし曲線 C が閉曲線であるときは、これを一周してとった積分を次の記号

$$\oint f(x, y, z)\, dx$$

で表す。曲線積分を常に一定の向きに沿って行なうことにすれば、閉曲線 C に沿ってとった積分を、図3.4において、点線で示したような閉曲線 C_1, C_2 (またはそれより多くの閉曲線) に沿ってとった積分に分けることができる。

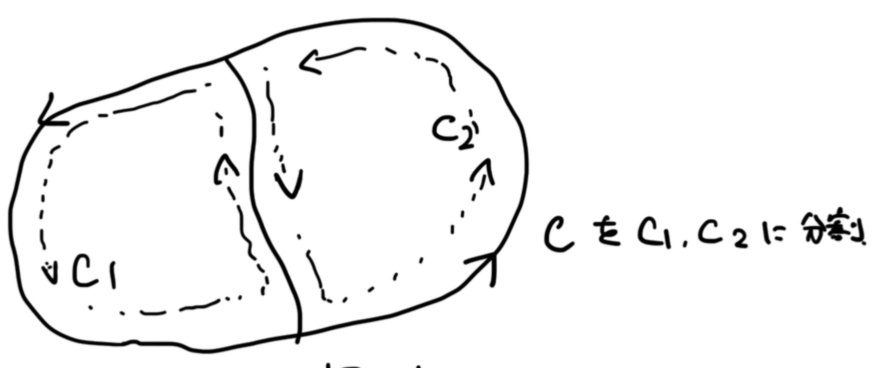


図3.4

すなわち、

$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$$

同じ曲線でも積分をとる向きを逆にするときは、それに沿ってとった積分に負号がつく。

※正負の向きは、パラメータ付けの向き（閉曲線の場合は反時計回りを正とする）