# 3.9 Fourier 積分 例1

例 1.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1) \\ &= \frac{1}{2} \quad (x = 1) \\ &= 0 \quad (x > 1) \end{aligned}\right\} \text{本}$$

この関数を (3.38) を用いて表すと以下。

> (3.38) の復習
>
> $f(x)$ が偶関数 $\left( f(-x) = f(x) \right)$ のとき、
>
> $$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos ux\, du \int_0^\infty f(v) \cos uv\, dv \quad \text{———} \quad (3.38)$$
>
> ※ $x$ の正値でのみ $f(x)$ が定義された関数であれば、偶関数でなくても $x>0$ についてのみであれば、(3.38) は成り立つ。このとき、$f(-x) = f(x)$ として扱う。

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos ux\, du \int_0^\infty f(v) \cos uv\, dv$$

$x > 1$ では $f(x) = 0$ のため、2つ目の積分範囲は $0 \sim 1$ としても結果に影響しない。

ゆえに

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos ux\, du \int_0^1 f(v) \cos uv\, dv$$

また、$0 \leqq x < 1$ で $f(x) = 1$ より、2つ目の $f(v) = 1$ とできるので、

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos ux\, du \int_0^1 \cos uv\, dv$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u \cdot \cos ux}{u}\, du$$

$$\int_0^1 \cos uv\, dv = \left[ \frac{\sin uv}{u} \right]_0^1 = \frac{\sin u}{u}$$

本の定義より

$0 \leqq x < 1$ のとき

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u \cdot \cos ux}{u}\, du = \underset{f(x)=1}{1}$$

$x = 1$ のとき

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u \cdot \cos ux}{u}\, du = \underset{f(1)=\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$x > 1$ のとき

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u \cdot \cos ux}{u}\, du = \underset{f(x)=0}{0}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin u \cdot \cos ux}{u}\, du &= \frac{\pi}{2} \quad (0 \leqq x < 1) \\ &= \frac{\pi}{4} \quad (x = 1) \\ &= 0 \quad (x > 1) \end{aligned}\right\}$$

となり、これは (3.25) の結果とも一致する。

(3.25)

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \quad (0 < a < b)$$
$$= 0 \quad (0 < b < a)$$

$0 \leqq x < 1$ は、$b = 1$、$a = x$ とみれば $0 < a < b$ の条件と同じ。

$x > 1$ は $0 < b < a$ 条件と同じ

※ $a = b = 1$ のとき

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \cos x}{x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{2x}\, dx$$

(3.24) より $\lambda = 2$ とみると

$$\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x}}_{= \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

となり、今回の結果と一致する。

(3,24) は以下。

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \quad (\lambda > 0)$$
$$= 0 \quad (\lambda = 0)$$
$$= -\frac{\pi}{2} \quad (\lambda < 0)$$