3-7 定積分の例題【5】Laplace 積分（ラプラスの積分）

〔5〕

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx$$

この値を求めるため、これを a に関して微分してみる。

$$\frac{dI}{da} = \frac{d}{da}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{d}{da} e^{-x^2}\cos 2ax\right)dx$$

$$= -2\int_0^\infty e^{-x^2} x\sin 2ax\,dx$$

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$f' = xe^{-x^2}$$

$$g = \sin 2ax$$

$$f = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

$$g' = 2a\cos 2ax$$

∴ $\frac{dI}{da}$ に部分積分を適用すると

$$\frac{dI}{da} = -2\left\{\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\sin 2ax\right]_0^\infty - 2a\int_0^\infty\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}\cos 2ax\,dx\right\}$$

$$= \underbrace{\left[e^{-x^2}\sin 2ax\right]_0^\infty}_{x=0,\ x=\infty \text{ ともに } 0 \text{ になる}} - 2a\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx$$

$$= -2a\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx$$

$$= -2aI$$

ゆえに、 $\frac{dI}{da} = -2aI$

変数分離の形にすると

$$\frac{dI}{I} = -2a\,da$$

両辺積分すると

$$\int\frac{dI}{I} = \int -2a\,da$$

$$\log I = -a^2 + C$$

$$I = C'e^{-a^2}$$

C は積分定数。$a=0$ とすると、
（C'）

$$C' = \underset{a=0}{I(0)}$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ ∵ (3.17)

したがって $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}$

この結果からただちに、

$$\int_0^\infty e^{-bx^2}\cos 2ax\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\,e^{-a^2/b} \quad (b>0) \quad \text{—— (3.32)}$$ < Laplace の積分 >

（証明） $x = \frac{t}{\sqrt{b}}$ とおく

$$dx = \frac{1}{\sqrt{b}}dt$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos\frac{2at}{\sqrt{b}}\,dt}_{= I \text{ とおく}}$$ となり、

形として、$a = \frac{a}{\sqrt{b}}$ になったとみると

$$\frac{dI}{da} = -\frac{2a}{\sqrt{b}}I$$

$$\frac{dI}{I} = \frac{-2a}{\sqrt{b}}da$$

$$I = C'e^{-\frac{a^2}{b}}$$

$a=0$ のとき、

$$I(0) = C' = \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}}$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\,e^{-\frac{a^2}{b}}$$

なお、$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}$

の両辺を a で微分して

$$\int_0^\infty e^{-x^2}(-\sin 2ax)\cdot 2x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(-2a)e^{-a^2}$$ ） 両辺 ÷ (−2)

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin 2ax\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}ae^{-a^2},$$

さらに a で微分して

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\cos 2ax\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}(1-2a^2)e^{-a^2},$$

さらに a で微分して

$$\int_0^\infty x^3e^{-x^2}\sin 2ax\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}(3a-2a^3)e^{-a^2}$$

素直に計算したらできそうなのでとばした。

等の結果も導ける。□

また、

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}$$

を、a に関して、0～a まで積分すると、

$$\int_0^a I\,da = \int_0^a\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx\,da = \int_0^a\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}da$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin 2ax}{2x}dx = \int_0^a\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}da$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin 2ax}{x}dx = \sqrt{\pi}\int_0^a e^{-a^2}da$$

↖ 積分変数 a を x とかき直すと教科書と同じ表記になる。

この式の右辺にでてくる

$$\int_0^x e^{-x}dx$$ の形、とくに

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$$

は、Gauss の誤差関数と呼ばれ、誤差論、確率論で重要な関数の形である。□