4.4 無限級数の乗法

次の二つの級数；

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

のうち、第一は、絶対収束級数で、第二は収束級数であるとする。

いま、

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots$$

という級数を考える。その一般項は、

$$c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

で各項の添字の和は、$n+1$ である。a 級数，b 級数，c 級数の部分和を s_n, s_n', S_n とすれば

$$s_ns_n' - S_n = a_2b_n + a_3(b_{n-1}+b_n) + \cdots + a_n(b_2+b_3+\cdots+b_n)$$ ← 添字の和が $n+1$ 以外が残る.

$$= a_2(s_n'-s_{n-1}') + a_3(s_n'-s_{n-2}') + \cdots + a_n(s_n'-s_1').$$

いま、k, l という二つの自然数をとり、$n=k+l$ として、上の式を

$$s_ns_n' - S_n = [\,\underbrace{a_2(s_n'-s_{n-1}')}_{=b_n} + \cdots + a_{k+1}(s_n'-s_l')\,]$$

$$+ [\,a_{k+2}(s_n'-s_{l-1}')\,] + \cdots + [\,a_n(s_n'-s_1')\,] \quad (4.7)$$

元の式は

$a_\circ(b_\triangle + b_{\triangle+1} + \cdots + b_n)$

で $\circ + \triangle$ が $n+2$ となるようになっていた。

$a_{k+1}\,(b_{n-(k+1)+2} + \cdots + b_n)$

$(b_{n-k+1} + \cdots + b_n)$

$n=l+k$ より、$n-k=l$

$a_{k+1}\,(b_{l+1} + \cdots + b_n)$

$= a_{k+1}(s_n' - s_l')$

なる形に書く。

b 級数は、収束であるから、l を十分に大きくとれば、第一行の各項の括弧内の絶対値は任意の ε より小さい。（Cauchyの収束条件より）

ゆえに、

$$|第一行| < \varepsilon\,\{\,|a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{k+1}|\,\}$$

$|s_n'-s_{n-1}'|$ などが $< \varepsilon$

a 級数は、絶対収束級数だったので、k の値によらず、

$$|a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{k+1}| < K$$

を満足する有限な数 K が存在する。（絶対収束のテイギ）

したがって、

$$|第一行| < \varepsilon K$$

が成り立つ。

また、b 級数の収束性により、(4.7) の第二行の各項の絶対値（$|b_l + \cdots + b_n|$ など）は、ある有限な定まった値 M より小さい。ゆえに、

$$|第二行| < M\,\{\,|a_{k+2}| + \cdots + |a_n|\,\}$$

a 級数が絶対収束であるから、k を十分大きくとれば、

$$|a_{k+2}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon'$$

ゆえに

$$|第二行| < \varepsilon' M$$

すなわち、

$$|S_n - s_ns_n'| < \varepsilon K + \varepsilon' M$$

n が十分大きい（k, l も十分大きい）ようにすると、

$$|S_n - s_ns_n'| < \varepsilon''$$

ここで ε'' は任意の正の数。ゆえに、c 級数は収束する。かつ a 級数の和を s，b 級数の和を s' とすれば、c 級数の和は、ss' である。∎

〈結論〉

a 級数（絶対収束級数）※和を s × b 級数（収束級数）※和を s' ＝ c 級数 は収束級数でその和は ss' である。//