4.1. 無限級数の収束

〈収束・発散級数のテイギ〉

無限数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \quad \text{———} \quad (4.1)$$

部分和

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{———} \quad ※1$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad (s\text{は有限な値}) \quad \text{———} \quad ※2$$

※2が成り立つとき、元の数列は、収束級数をつくると表現し、また、sをその和と呼ぶ。$\lim_{n\to\infty} s_n$が一定に収束しないとき、この和は発散級数という。

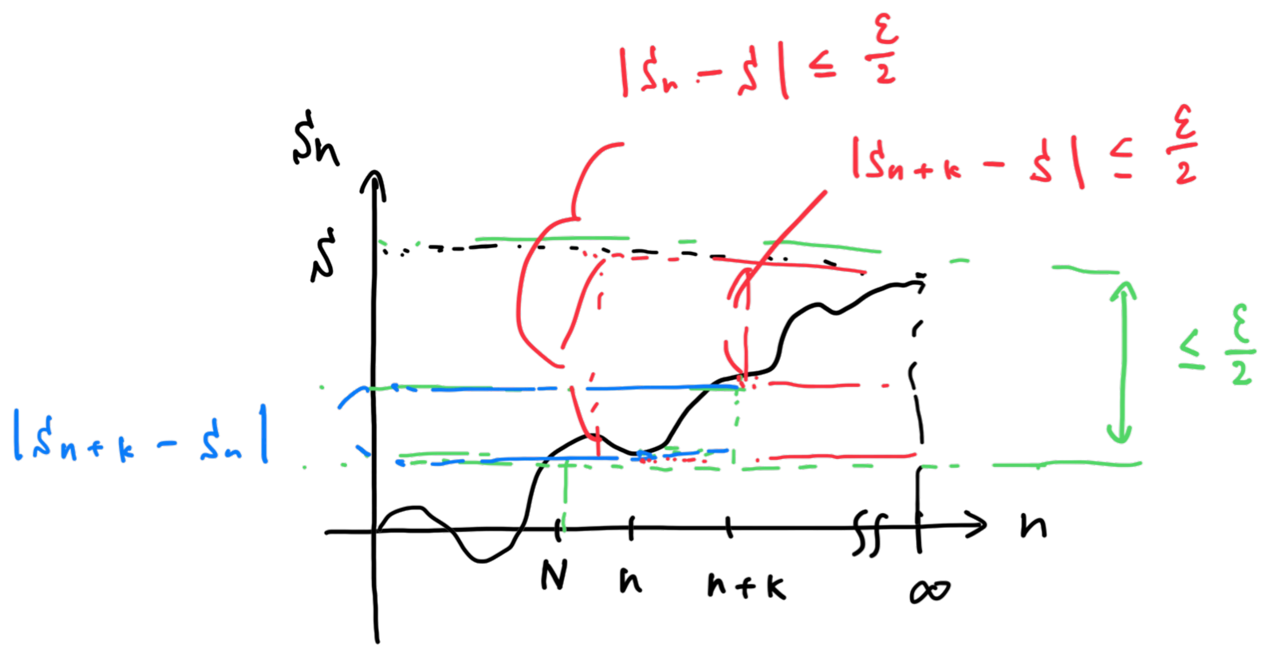
〈収束級数の必要十分条件（Cauchyの収束条件）〉

$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots$ (4.1) が収束級数をつくる

$\downarrow \uparrow$ (証明略だが成り立つ)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N$$

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{———} \quad ※3$$



したがってkを任意の自然数とするとき、

$$|s_{n+k} - s_n| \leq |s_{n+k} - s| + |s_n - s| < \varepsilon$$

$$\Downarrow \qquad \Uparrow$$

$$|s_{n+k} - s - (s_n - s)| \leq |s_{n+k} - s| + |-(s_n - s)|$$

すなわち、正の数εをどれだけ小さく与えても、それに応じて適当なNが存在し$n \geq N$とすると、

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon \quad (k=1,2,3,\cdots) \quad \text{———} \quad (4.2)$$

が成り立つ。(4.2)をCauchyの収束条件という。

（収束級数 → Cauchyの収束条件が成り立つ。ゆえにCauchyの収束条件は、無限級数が収束級数の必要条件であることが示された。逆にCauchyの収束条件が成り立つとき、無限級数は収束するので、十分条件にもなっている（証明略。））

〈絶対収束級数〉

もし、$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n, \cdots$ (4.1)の各項の絶対値でつくった級数が
（$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots$）
収束級数を構成する。

これは次の不等式：

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+k}| \quad \text{———} \quad ※4$$

からただちに分かる。　↖ $<\varepsilon$ となるとき、元の級数もCauchyの収束条件を満たすことになる。

このような場合に(4.1)を絶対収束級数をつくる数列であるという。

絶対収束でない収束級数を、条件づき収束級数という。

〈無限級数の一般的性質〉

1、無限級数の収束性は、有限個の項を除いても変わらない。

2. 無限級数の各項に同一の数c ($\neq 0$)を掛けて得られる級数は、元の級数と同じ収束性をもつ。もしこれが収束するときは、元の級数の和にcを掛けたものと等しい。

3, 収束級数においてその項の順序を変更することなく、任意の項を括弧でくくったものを項とする級数をつくれば、また収束する。ただし、この逆は成り立たないことがある。