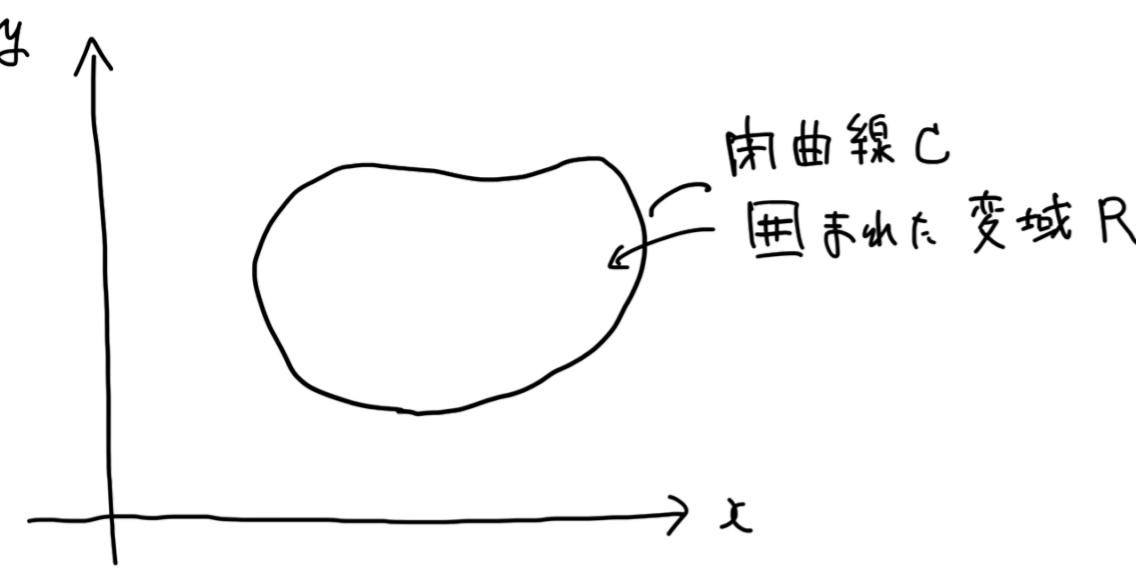


### 3.5. 積分変数の変換



$\iint_R F(x, y) dx dy$ における積分変数 $x, y$ を

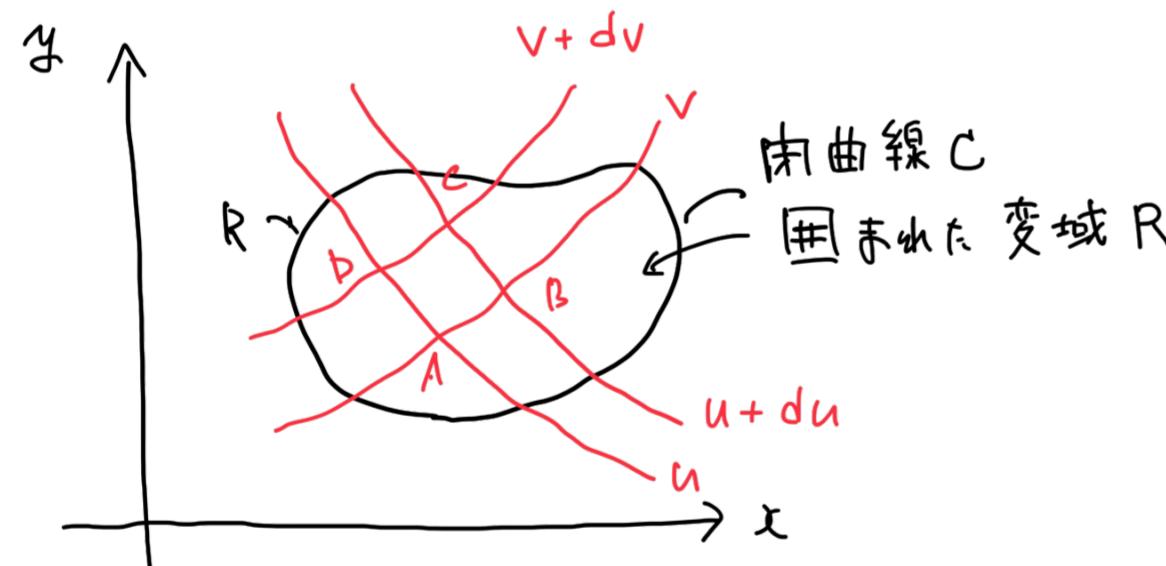
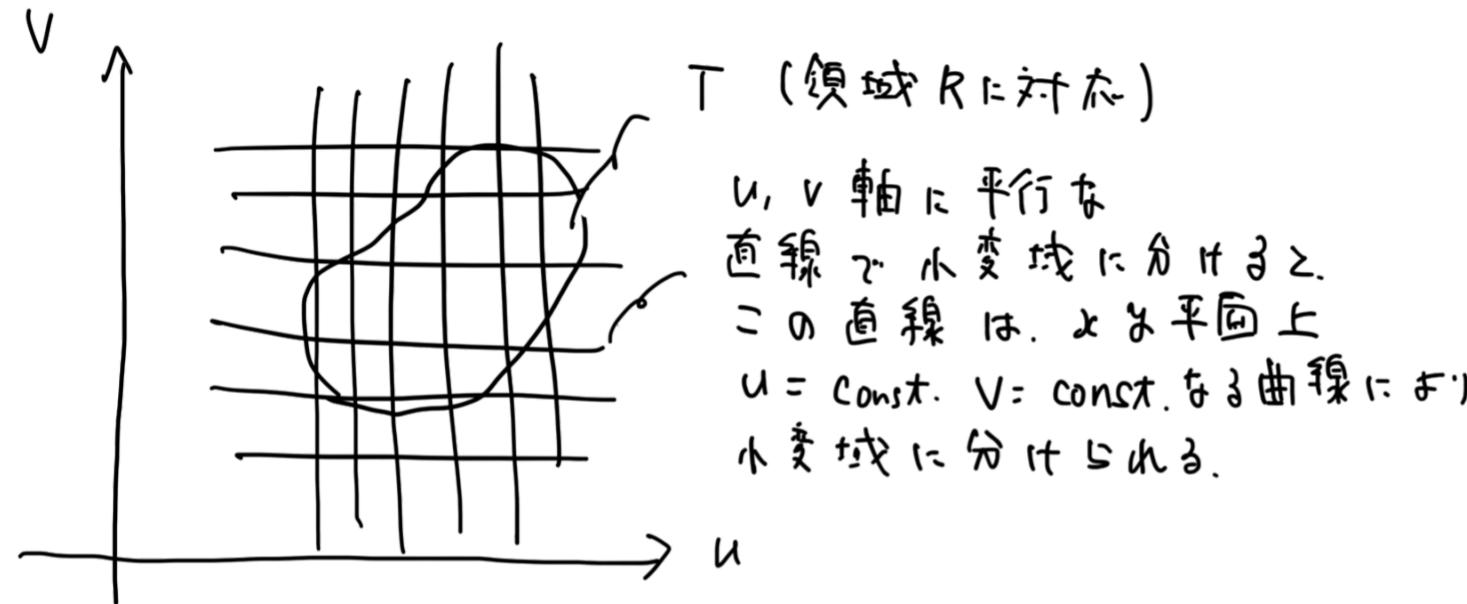
次の関係式がある、 $u, v$ に変えることを考へる。

$$\begin{aligned} x &= f(u, v) \\ y &= g(u, v) \end{aligned} \quad (3.12)$$

(3.12)による写像が一対一で、逆関数が

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x, y) \\ v &= \psi(x, y) \end{aligned} \quad (3.12.a)$$

よし、変域 $R$ は $uv$ 平面上の変域 $T$ に当るとする。



A の座標 $(x, y)$ とするよ。

B の座標 $(x + \frac{\partial x}{\partial u} du, y + \frac{\partial y}{\partial u} du)$

C の $\sim (x + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, y + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv)$

D の $\sim (x + \frac{\partial x}{\partial v} dv, y + \frac{\partial y}{\partial v} dv)$

よし、小変域ABCDの面積は、

$$|\vec{AB} \times \vec{AD}| = \left| \left( \frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial u} du, 0 \right) \times \left( \frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial v} dv, 0 \right) \right|$$

$$= \left| 0, 0, \left( \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right) du \cdot dv \right|$$

$$= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| du \cdot dv$$

$$= \frac{d(x, y)}{d(u, v)} du \cdot dv$$

uv平面からxy平面への変換T

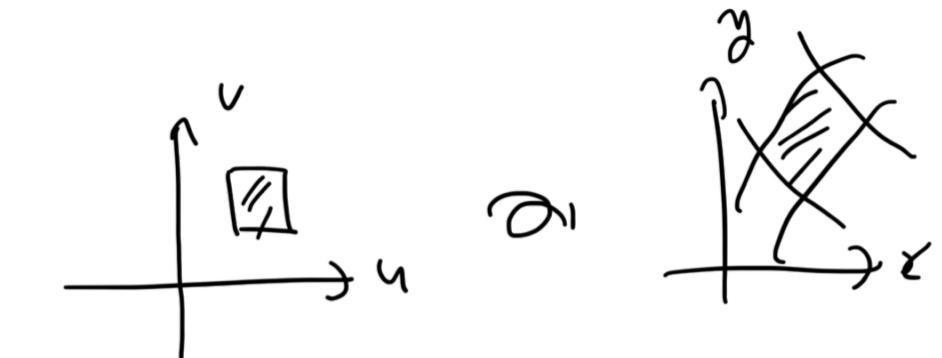
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(u+v) - \textcircled{1} \\ y &= \frac{1}{2}(u-v) - \textcircled{2} \end{aligned} \quad (3)$$

(a)  $T(1, 3)$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

↓ T

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



(b)  $v = -2, -1, 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \times 4 \quad 4x &= u+v \\ + \textcircled{2} \times 2 \quad -y &= u-v \end{aligned}$$

$$4x+2y = 2u$$

$$\therefore 4x-2y = 2v$$

$$4x+2y = 2u$$

$$4x-2y = 2v$$

外側ときたが、区域を0とした。

$$\iint_R F(x, y) dx dy = \iint_T F(f(u, v), g(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (3.13)$$