3.10 曲線積分の応用

P.96

応用として、最も多く現れる曲線積分は、上に述べた函数の代わりに、三つの函数 $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$, があり、しかも次のような三つの曲線積分の和：

$$\int_C (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_u^{u'} \left(X\frac{dx}{du} + Y\frac{dy}{du} + Z\frac{dz}{du} \right) du \quad \text{—— (3.40)}$$

の形をなす場合である。

※多変数ベクトル関数（input, output 共にベクトル）の曲線積分 $\int_C F \cdot dr$ のような形のこと。（テラカンはベクトル表記が少ない）

※前項（P.95〜96 は多変数スカラー関数の曲線積分だった。

例えば、ここに或るベクトル V の場があって、その直角座標軸の方向の三つの成分を X, Y, Z とする。また動径 r の微分 dr の成分は、dx, dy, dz であるから、(3.40) の左辺の被積分関数は、V と dr のスカラー積 (V, dr) である。$(V \cdot dr = X dx + Y dy + Z dz)$

ゆえに (3.40) は以下とも書ける。

$$\int_C \underset{V \cdot dr}{\underset{\shortparallel}{(V, dr)}} = \int_{u_0}^{u'} \underset{V \cdot \frac{dr}{du}}{\underset{\shortparallel}{\left(V, \frac{dr}{du}\right)}} du \quad \text{—— (3.40')}$$

もし、曲線 C に一定の向きを規定して、その曲線要素を ds で表せば、(3.40) はまた、

$$\int_C (V, ds) = \int_C \left(V, \frac{ds}{du}\right) du$$

とも書ける。

もし、V が、或る一価連続な関数 $F(x, y, z)$ の勾配であるとき、

同じ入力に対して、値が1つに定まる連続な関数。

すなわち、その成分が

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z} \qquad \left(V = (X, Y, Z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \right)$$

で与えられるとき、これを

$$V = \mathrm{grad}\, F \quad \text{—— (3.41)}$$

という記号で表す。これを (3.40) に入れて、

$$\int_C (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int_{u_0}^{u'} \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{du} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{du} \right)}_{= \frac{dF}{du}\ \text{(全微分の形)}} du$$

$$\parallel$$

$$\int_C (\mathrm{grad}\, F, ds) = \int_{u_0}^{u} \frac{dF}{du} du = \underbrace{F(x', y', z')}_{\text{終点}} - \underbrace{F(x, y, z)}_{\text{始点}}$$

ベクトルの場において、そのベクトルの曲線積分を考えれば、その値は、両端の F の値の差に等しく、曲線の途中の形によらない。ゆえにもし、曲線 C について、積分を作れば

$$\oint_C (\mathrm{grad}\, F, ds) = 0$$

となる。