4.3 条件つき収束級数

正および負の項を含む級数

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$　　(4.5)

があって、そのうち正の項を(4.5)に含まれている順序にとって、$p_1, p_2, p_3, \cdots$とし、負の項を$-q_1, -q_2, -q_3\cdots$とする。もしこれらの数列で作った二つの級数が収束であるときには、それぞれの和をpおよび$-q$とすれば、(4.5)は、絶対収束であって、その和は$p-q$である。(i) pの級数またはqの級数の一方が収束し、他方が発散する級数ならば(4.5)は、発散級数である。(ii)

しかし、pの級数およびqの級数が共に発散級数であって、かつ$n\to\infty$のとき、$\lim_{n\to\infty} p_n=0$, $\lim_{n\to\infty} q_n=0$ならば、項の順序を変えて、(4.5)を任意の数値に等しくさせることができる。(iii) これが条件つき収束という名のある理由である。

(証明 (iii))

いまK ($\geqq 0$)をこのような場合における(4.5)の和ならしめようとする数とする。pの級数は発散するから、適当な項までの和をとって、

$P' = p_1+p_2+\cdots+p_i$

とし、$P' \geqq K$および$P'-K<p_i$を満足するようにすることができる。次にqの級数の幾つかの項をとり、

$Q' = q_1+q_2+\cdots+q_j$

とし、$P'-Q' \leqq K$, $K-(P'-Q')<q_j$であるようにすることができる。次に、

$P'' = p_{i+1}+p_{i+2}+\cdots+p_K$

をつくって、$P'-Q'$に加え、$P'-Q'+P'' \geqq K$, $P'-Q'+P''-K<p_K$であるようにすることができる。この手続きを$\lim_{n\to\infty} p_n=0$, $\lim_{n\to\infty} q_n=0$であることを使えば、上の定理が証明できる。

$K<0$のときは、P'の代わりにQ'から出発すればよい。

前提条件

$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$

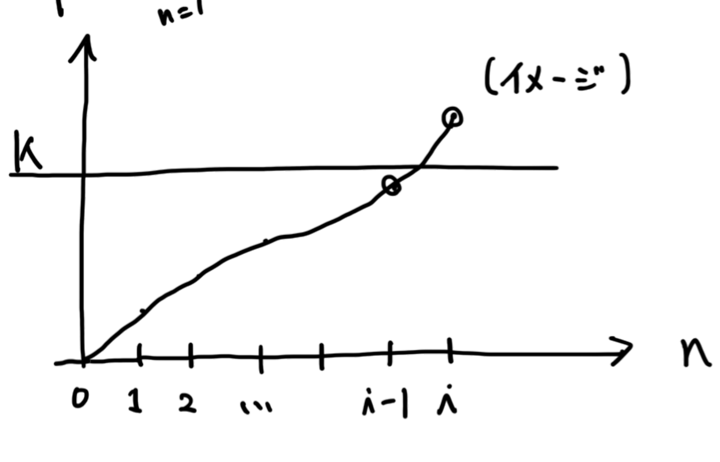
の正の項の和P、負の項の和$-q$が共に発散。

$\lim_{n\to\infty} p_n=0$, $\lim_{n\to\infty} q_n=0$.

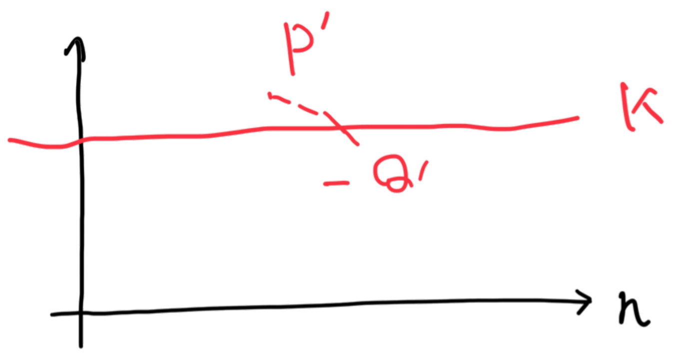
証明したいこと

$\boxed{P-q \text{ を任意の値にできる.}}$

$P' = \sum_{n=1}^{i} p_n$



$P'-Q' \leqq K$,　$K-(P'-Q')<q_j$



$q_j > K-(P'-Q') \geqq 0$

$-q_j < -\{K-(P'-Q')\} \leqq 0$

Q 無限級数の収束って、合計というより、手続きをくり返したときの極限(?)