3-7 定積分の例題【3】

〔3〕 式 (3.24) から、$b > a > 0$ のときに、

$$\int_0^\infty \frac{\sin(b+a)x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{—①}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(b-a)x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{—②}$$

(3.24) より $\lambda > 0$ のとき

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

① + ②

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax + \cancel{\cos bx \sin ax} + \sin bx \cos ax - \cancel{\cos bx \sin ax}}{x}\,dx = \pi$$

両辺 ÷ 2

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x} = \frac{\pi}{2}$$

① − ②

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx \sin ax}{x}\,dx = 0$$

$(b > a > 0)$

あるいは、

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad (0 < a < b)$$

$$= 0 \quad (0 < b < a) \qquad \text{—— (3.25)}$$

ともいえる。

この結果に e^{-bc} $(c > 0)$ をかけ、b に関して積分してみると、

$$\int_{b=0}^\infty e^{-bc}\,db \underbrace{\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos ax}{x}\,dx}_{x\text{に関して積分}}$$

$b > a > 0$?

$$= \int_{b=0}^\infty \frac{\pi}{2} e^{-bc}\,db$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{c} e^{-bc}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{e^{-bc}}{c} \qquad \text{—— ☆}$$

また、$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx)$ —— ⊛

Q この式はどこから？（検算）

A. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx)\right)$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[a e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx) + e^{ax}(ab \cos bx + b^2 \sin bx)\right]$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[a^2 e^{ax} \sin bx + b^2 \sin bx\right]$$

$$= e^{ax} \sin bx$$

により、

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x}\,dx \int_0^\infty e^{-bc} \sin bx\,db$$

$$\| $$

$$\left[\frac{e^{-cb}}{(-c)^2 + x^2}(-c \sin xb - x \cos xb)\right]_{b=0}^{b=\infty}$$

⊛との対応関係

$a = -c$、

$b = x$

$x = b$

とみるとよい

$b = \infty$ のとき $e^{-cb} \Rightarrow 0$

$b = 0$ のとき

$$\frac{1}{c^2 + x^2}(-x)$$

∴

$$= \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x}\,dx \cdot \frac{x}{c^2 + x^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\cos ax}{c^2 + x^2}\,dx \qquad \text{—— ☆}$$

元々 ☆ 同士だったので

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{c^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2c} e^{-ac} \quad (a > 0,\ c > 0)$$

$$= \frac{\pi}{2c} e^{ac} \quad (a < 0,\ c > 0) \qquad (3.26)$$

という結果が得られる。

こっちはどこから来た？ (3, 25) で $a > 0$ を仮定したから？

（解） $I(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{c^2 + x^2}\,dx$

を a の関数とみると、$I(-a) = I(a)$ （偶関数のため）

$\cos ax = \cos(-ax)$

∴ $I(a) = \dfrac{\pi}{2c} e^{-ac}$ $a > 0$

$I(a) = \dfrac{\pi}{2c} e^{ac}$ $a < 0$

となる。

偶関数のとき

$I(a) = I(|a|)$

∴ $a < 0$ なら

$$I(a) = I(|a|) = \frac{\pi}{2c} e^{-|a|c}$$

$$= \frac{\pi}{2c} e^{-(-a)c}$$

$$= \frac{\pi}{2c} e^{ac}$$

〃

上の (3.26) を a に関して微分するときは、

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{da} \int_0^\infty \frac{\cos ax}{c^2 + x^2}\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{-x \sin ax}{c^2 + x^2}\,dx$$

$$(\text{右辺}) = \frac{d}{da}\left(\frac{\pi}{2c} e^{-ac}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} e^{-ac} \quad (a > 0,\ c > 0)$$

(左辺) = (右辺)

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{c^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-ac} \quad (a > 0,\ c > 0) \qquad \text{—— (3.27)}$$

同様に計算すると $= -\dfrac{\pi}{2} e^{ac}$ $(a < 0,\ c > 0)$

また、(3.26) を a について、0 から a まで積分して、

$$(\text{左辺}) = \int_0^a \int_0^\infty \frac{\cos ax}{c^2 + x^2}\,dx\,da$$

$$= \int_0^\infty \int_0^a \frac{\cos ax}{c^2 + x^2}\,da\,dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{\sin ax}{c^2 + x^2}\,dx$$

$$(\text{右辺}) = \int_0^a \frac{\pi}{2c} e^{-ac}\,da$$

$$= \left[\frac{\pi}{2c} \cdot \left(-\frac{1}{c}\right) e^{-ac}\right]_0^a$$

$$= \frac{\pi}{2c^2}(1 - e^{-ac}) \quad (a > 0,\ c > 0)$$

同様に

$a < 0$, $c > 0$ のとき

$$= \frac{\pi}{2c^2}(1 - e^{ac})$$

∴

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(c^2 + x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2c^2}(1 - e^{-ac}), \quad (a > 0,\ c > 0) \qquad \text{—— (3.28)}$$

$$= \frac{\pi}{2c^2}(1 - e^{ac}) \quad (a < 0,\ c > 0)$$