p.94〜

Fourier の積分定理 (3.37) を拡張して、関数 f が2つの変数をもつ場合にも適用できる形をつくることができる。

$$\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos[u(v-x)]dv = \pi f(x) \quad \text{—— (3.37)}$$

$\int_0^{\infty} \to \int_{-\infty}^{\infty}$ にすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos[u-x]\,dv = \underline{2}\pi f(x)$$

を利用している。

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)\cos[\alpha(u-x)]\,du\,d\alpha$$

f(x, y) のうち、y を固定。f(u, y) と u の関数とみて、まず Fourier 積分を適用。

(3.37)でいうと

(3.37)

u —— α

v —— u

同様に

$$f(u,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\cos[\beta(v-y)]\,dv\,d\beta$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(u,y)}_{\parallel}\cos[\alpha(u-x)]\,du\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\cos[\beta(v-y)]\,dv\,d\beta$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\cos[\beta(v-y)]\,dv\,d\beta\,\cos[\alpha(u-x)]\,du\,d\alpha$$

積分順序の入れ替え

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\iiiint_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\cos[\alpha(u-x)]\cos[\beta(v-y)]\,du\,dv\,d\alpha\,d\beta$$

これらの2つを併合すれば、

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iiiint_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\cos[\alpha(u-x)]\cos[\beta(v-y)]\,du\,dv\,d\alpha\,d\beta \quad \text{—— (3.37a)}$$

同様の手続きによって

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiiiiint_{-\infty}^{\infty} f(u,v,w)\cos[\alpha(u-x)]\cos[\beta(v-y)]\cos[\gamma(w-z)]\,du\,dv\,dw\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma \quad \text{—— (3.37b)}$$

等の結果を導くことができる。