・$f(x)$ が偶関数 $f(-x) = f(x)$ のとき、

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\, du \int_0^\infty f(v)\cos uv\, dv \quad \text{—— (3.38)}$$

・$f(x)$ が奇関数 $f(-x) = -f(x)$ のとき

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin ux\, du \int_0^\infty f(v)\sin uv\, dv \quad \text{—— (3.39)}$$

※ $f(x) = e^{-ax}$ $(a>0)$

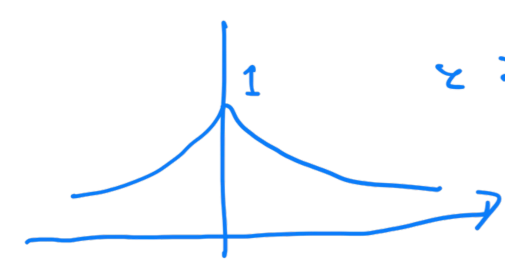
$f(-x) = e^{ax}$

↑ 偶・奇関数ではないが、

$x>0$ でのみ定義し、

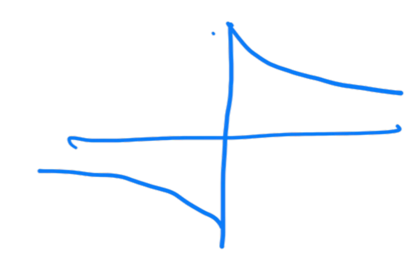
$$f(x) = e^{-ax} \quad (x>0)$$
$$\quad = e^{ax} \quad (x<0)$$

と拡張すると (3.38) が成り立つ。



$$f(x) = e^{-ax} \quad (x>0)$$
$$\quad = -e^{ax} \quad (x<0)$$

と拡張すると、(3.39) が成り立つ。



3.9 Fourier積分 例2

例2. (3.38) および (3.39) に $f(x) = e^{-ax}$ $(a>0)$ とおけば、それぞれ

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\, du \int_0^\infty e^{-av}\cos uv\, dv,$$

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin ux\, du \int_0^\infty e^{-av}\sin uv\, dv$$

v に関して積分すれば、それぞれ

$$\int_0^\infty \frac{\cos ux}{a^2+u^2}\, du = \frac{\pi}{2a}e^{-ax},$$

$$\int_0^\infty \frac{u\sin ux}{a^2+u^2}\, du = \frac{\pi}{2}e^{-ax}$$

これは、それぞれ (3.26) (3.27) の $a>0$ の結果と一致する。

既知の不定積分 P.84

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$

a の代わりに $-a$,
b の 〃 u,
x 〃 v とすると

$$\int_0^\infty e^{-av}\cos uv\, dv = \left[\frac{e^{-av}}{a^2+u^2}(-a\cos uv + b\sin bv)\right]_{v=0}^{v=\infty}$$

$v=\infty$ のとき、$e^{-av} \to 0$ より
$v=0$ のときのみ考える

$$= -\frac{1}{a^2+u^2}(-a+0)$$

$$= \frac{a}{a^2+u^2}$$

∴ $$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos ux\, du \int_0^\infty e^{-av}\cos uv\, dv,$$

は、$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\cos ux}{a^2+u^2}\, du$$

$$\frac{\pi}{2a}e^{-ax} = \int_0^\infty \frac{\cos ux}{a^2+u^2}\, du$$

※ sin 版も同じ計算（省略）

P.86

$$\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

の不定積分を利用すればよい。