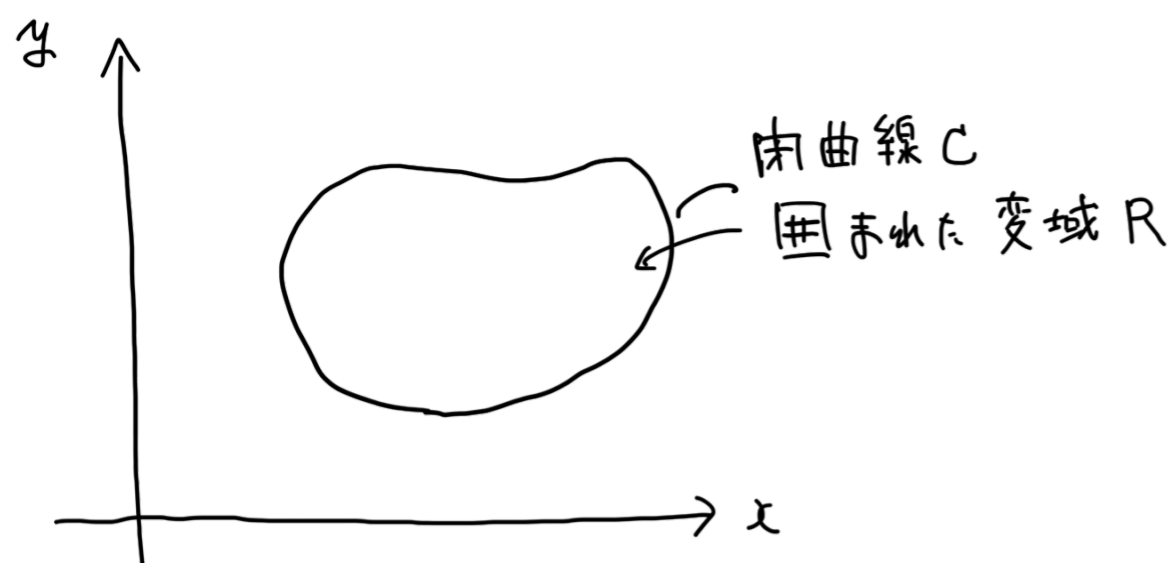


ヤコビアン の 具体例

3.5. 積分変数の変換



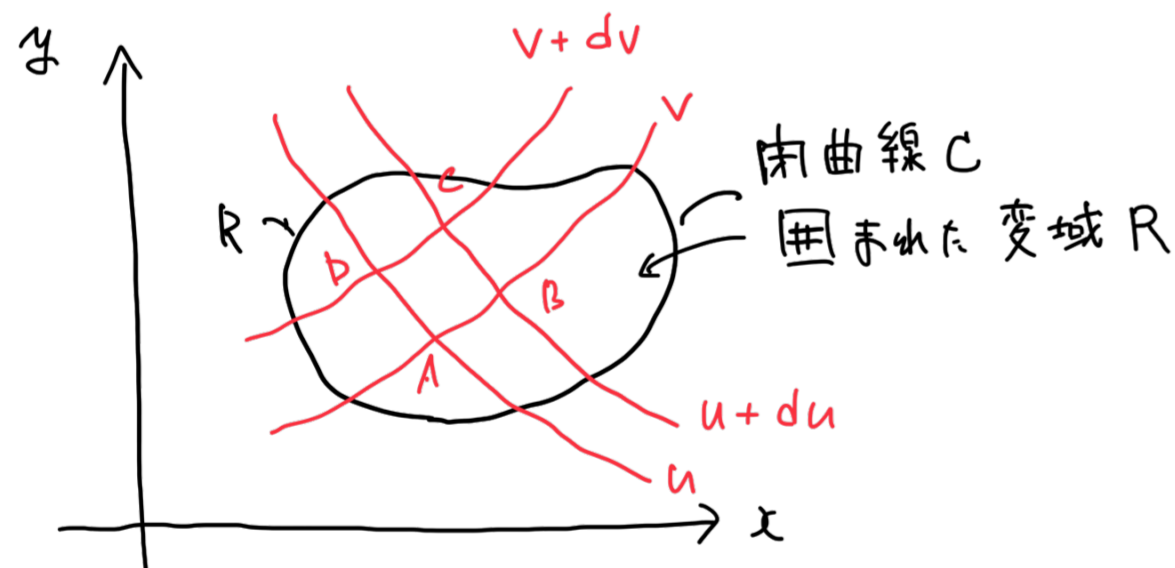
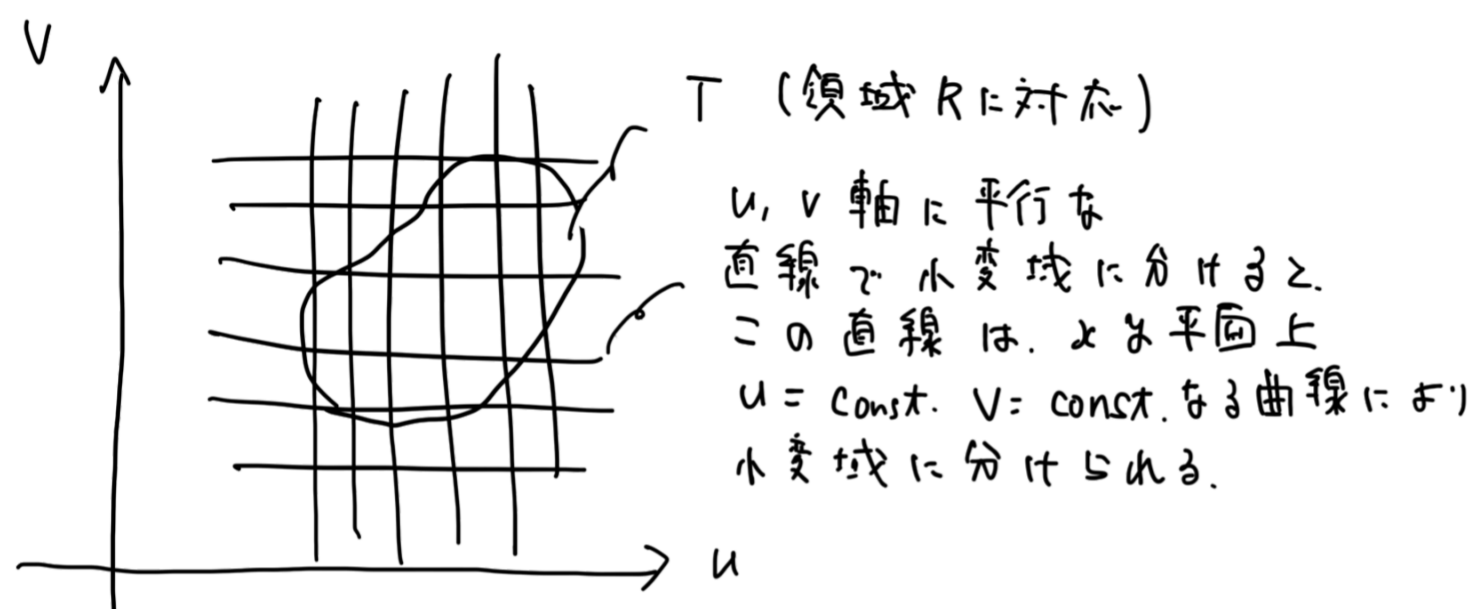
$\iint_R F(x, y) dx dy$ における積分変数 u, v を
次の関係式がある, u, v に変えることを考える。

$$\begin{aligned} x &= f(u, v) \\ y &= g(u, v) \end{aligned} \quad (3.12)$$

(3.12) による写像が一対一とし、逆関数が

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x, y) \\ v &= \psi(x, y) \end{aligned} \quad (3.12. a)$$

とし、変域 R は uv 平面上の変域 T に当るとする。



A の座標 (x, y) とする。

B の座標 $(x + \frac{\partial x}{\partial u} du, y + \frac{\partial y}{\partial u} du)$

C の座標 $(x + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, y + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv)$

D の座標 $(x + \frac{\partial x}{\partial v} dv, y + \frac{\partial y}{\partial v} dv)$

ゆえに小変域 ABCD の面積は

$$\begin{aligned} |\vec{AB} \times \vec{AD}| &= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial y}{\partial u} du, 0 \right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial y}{\partial v} dv, 0 \right) \right| \\ &= \left| 0, 0, \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du \cdot dv \right| \\ &= \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| du dv \\ &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \end{aligned}$$

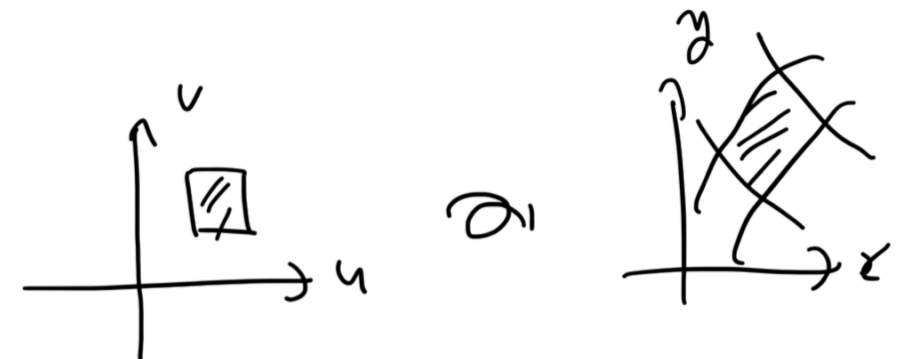
$$\iint_R F(x, y) dx dy = \iint_T F(f(u, v), g(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (3.13)$$

uv 平面から xy 平面への変換 T

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}(u+v) \quad \text{--- ①} \\ y &= \frac{1}{2}(u-v) \quad \text{--- ②} \end{aligned} \quad (3)$$

(a) $T(1, 3)$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\downarrow T \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



(b) $v = -2, -1, 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} \text{①} \times 4 \quad 4x &= u+v \\ + \text{②} \times 2 \quad 2y &= u-v \end{aligned}$$

$$4x + 2y = 2u$$

$$2 \quad 4x - 2y = 2v$$