Árvores binárias de pesquisa (mais): AVL, Vermelho-Preto, Splay

Algoritmos e Estruturas de Dados

2020/2021

FEUP

Árvores AVL

- Árvore de pesquisa binária
  - árvores podem ser desequilibradas
  - operações de inserção e eliminação de elementos são de complexidade linear no pior caso, quando árvore degenera em lista
- Árvores equilibradas
  - a diferença das alturas das sub-árvores de cada nó não pode exceder 1
  - evitam casos degenerados
  - garantem *O(logN)* para operações de inserção, remoção e pesquisa
- Árvores AVL
  - árvores de pesquisa binária
  - árvores equilibradas

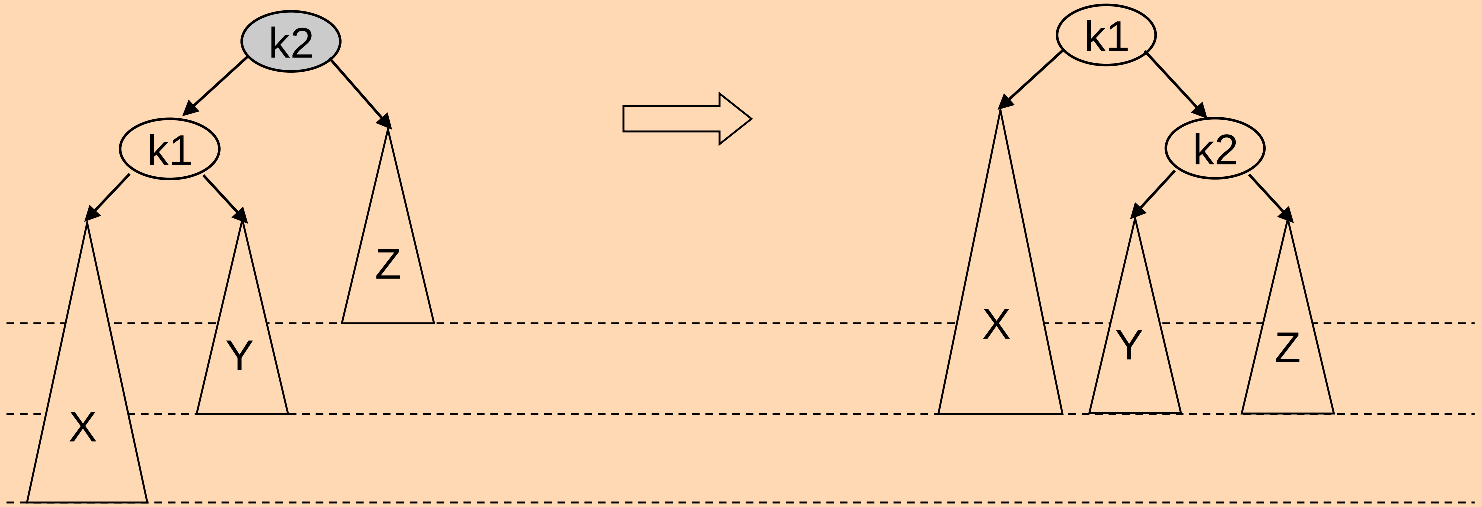
Árvores AVL

- Inserção de um elemento
  - inserção pode destruir o equilíbrio de alguns nós da árvore
  - após uma inserção, só os nós no caminho da raiz ao ponto de inserção podem ter a condição de equilíbrio alterada.
  - É necessário reequilibrar
    - reequilibrar o nó mais profundo onde surge desequilíbrio
    - toda a árvore resulta equilibrada
  - Seja ***K*** o nó a reequilibrar devido a inserção em:
    1. árvore esquerda do filho esquerdo de ***K***
    2. árvore direita do filho esquerdo de ***K***
    3. árvore esquerda do filho direito de ***K***
    4. árvore direita do filho direito de ***K***

    - casos 1 e 4 são simétricos; casos 2 e 3 são simétricos

Árvores AVL

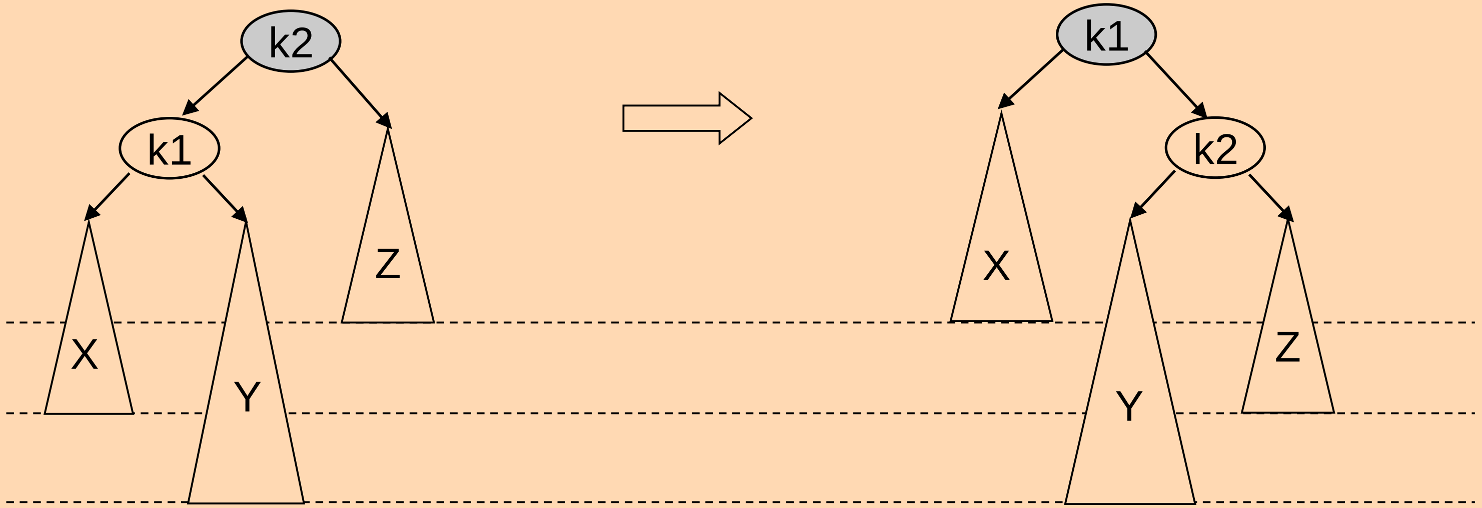
- Rotação simples (para os casos 1 e 4)



- *antes da rotação:*
  - k2 é nó mais profundo onde falha o equilíbrio
  - sub-árvore esquerda está 2 níveis abaixo da direita
- *depois:*
  - k1 e k2 passam a ter sub-árvores da mesma altura
  - problema fica resolvido com uma só operação

Árvores AVL

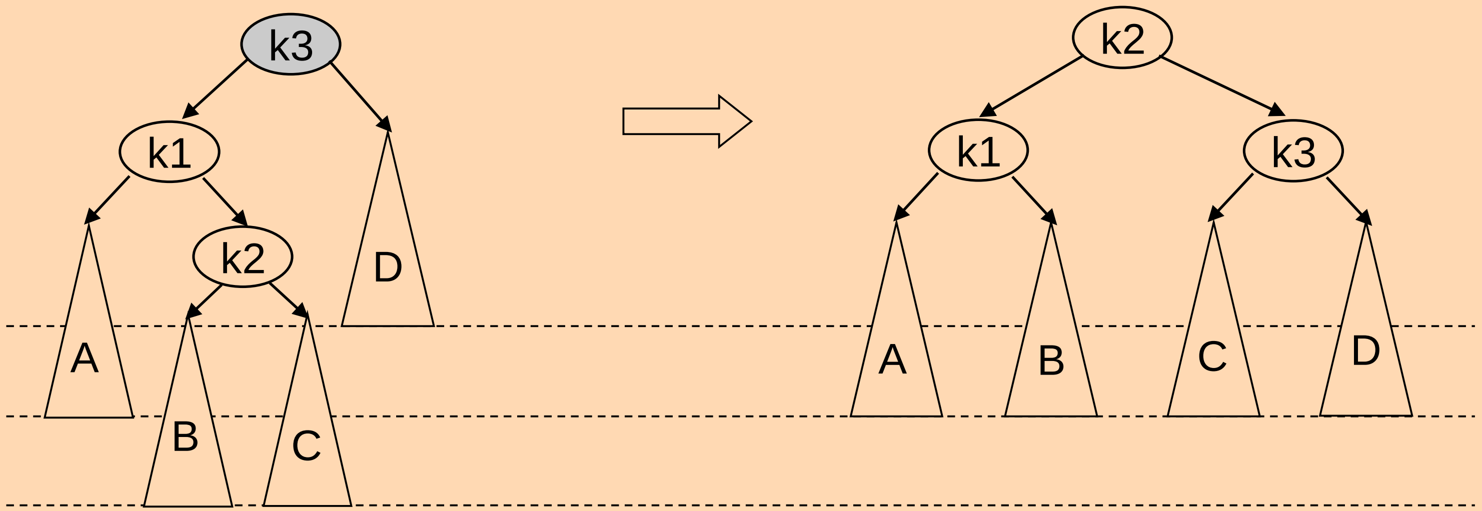
- Rotação simples não resolve os casos 2 e 3



- *antes da rotação:*
  - sub-árvore Y está a 2 níveis de diferença de Z
- *depois:*
  - sub-árvore Y está a 2 níveis de diferença de X

Árvores AVL

- Rotação dupla (para os casos 2 e 3)



- *antes da rotação:*
  - uma (e só uma) das sub-árvores B ou C está a 2 níveis de diferença de D
- Rotação dupla pode ser vista como uma sequência de 2 rotações simples
  - rotação entre o filho e o neto do nó
  - rotação entre o nó e o seu novo filho

Árvores AVL

- ***Nó*** **da árvore AVL**

```
template <class Comparable>
class AVLNode {
   Comparable element;
   AVLNode *left, *right;
   int height;
public:
   AVLNode(const Comparable &e, AVLNode *esq = 0,
      AVLNode *dir = 0, int h = 0): element(e),
      left(esq), right(dir), height(h) {}
   friend class AVLTree<Comparable>;
};
```

```
template <class Comparabe>
int AVLTree<Comparable>::height(AVLNode<Comparable> *t) const
{
   return t==NULL ? -1 : t->height;
}
```

Árvores AVL: implementação

- classe **AVLTree** : inserção

```
template <class Comparable>
void AVLTree<Comparable>:: insert(const Comparable & x,
                              AVLNode<Comparable> * & t)
{
   if ( t == NULL)
      t = new AVLNode<Comparable>(x, NULL, NULL);
   else if ( x < t->element )
   {
      insert(x, t->left);
      if ( height(t->left) - height(t->right) == 2 )
         if ( x < t->left->element )
            rotateWithLeftChild(t);
         else
            doubleWithLeftChild(t);
   }
   // continua
```

Árvores AVL: implementação

- classe **AVLTree** : inserção

```
    // continuação
    else if ( t->element < x )
    {
        insert(x, t->right);
        if ( height(t->right) - height(t->left) == 2 )
            if ( t->right->element < x )
                rotateWithRightChild(t);
            else
                doubleWithRightChild(t);
    }
    else
            ;     // nó repetido, não fazer nada
    t->height = max ( height(t->left), height(t->right) ) +1;
}
```

Árvores AVL: implementação

- classe **AVLTree** : rotação

```
template <class Comparable>
void AVLTree<Comparable>::
rotateWithLeftChild(AVLNode<Comparable> * & k2)
{
   AVLNode<Comparable> *k1 = k2->left;
   k2->left = k1-> right;
   k1->right = k2;
   k2->height = max ( height(k2->left), height(k2->right) ) + 1;
   k1->height = max ( height(k1->left), height(k1->right) ) + 1;
   k2 = k1;
}
```

Árvores AVL: implementação

- classe **AVLTree** : rotação

```
template <class Comparable>
void AVLTree<Comparable>::
rotateWithRightChild(AVLNode<Comparable> * & k2)
{
   AVLNode<Comparable> *k1 = k2->right;
   k2->right = k1->left;
   k1->left = k2;
   k2->height = max ( height(k2->left), height(k2->right) ) + 1;
   k1->height = max ( height(k1->left), height(k1->right) ) + 1;
   k2 = k1;
}
```

Árvores AVL: implementação

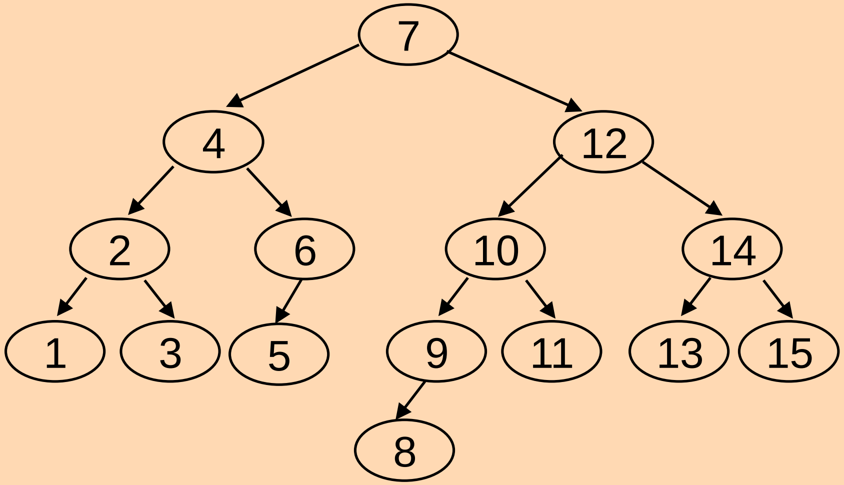
- classe **AVLTree** : rotação dupla

```
template <class Comparable>
void AVLTree<Comparable>::
doubleWithLeftChild(AVLNode<Comparable> * & k)
{
   rotateWithRightChild(k->left);
   rotateWithLeftChild(k);
}
```

```
template <class Comparable>
void AVLTree<Comparable>::
doubleWithRightChild(AVLNode<Comparable> * & k)
{
   rotateWithLeftChild(k->right);
   rotateWithRightChild(k);
}
```

Árvores AVL

- Construir a árvore AVL que resulta da inserção da seguinte sequência de valores:
  - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8



- Remoção de um elemento
  - remoção pode destruir o equilíbrio de alguns nós da árvore
  - reequilibrar a árvore (como no caso da inserção)

Árvores AVL

- classe **AVLTree** : remoção

```
template <class Comparable>
void AVLTree<Comparable>::
remove(const Comparable & x, AVLNode<Comparable> * & t)
{
   if ( t == NULL ) return;  // não existe
   if ( x < t->element ) {
      remove(x, t->left);
      if ( height(t->right) - height(t->left) == 2 )
         if ( height(t->right->left) <= height(t->right->right) )
            rotateWithRightChild(t);
         else
            doubleWithRightChild(t);
   }
   // continua
```

Árvores AVL

- classe **AVLTree** : remoção

```
// continuação
else if ( t->element < x ) {
    remove(x, t->right);
    if ( height(t->left) - height(t->right) == 2 )
        if ( height(t->left->right) <= height(t->left->left) )
            rotateWithLeftChild(t);
        else
            doubleWithLeftChild(t);
}
else if ( t->left ==  NULL || t->right == NULL ) {
    AVLNode<Comparable> * oldNode = t;
    t = ( t->left != NULL ) ? t->left : t->right;
    delete oldNode;
}
// continua
```

Árvores AVL

- classe **AVLTree** : remoção

```
    // continuação
    else {        // nó tem 2 filhos
       t->element = findMin(t->right)->element;
       remove(t->element, t->right);
       if ( height(t->left) - height(t->right) == 2 )
          if ( height(t->left->right) <= height(t->left->left) )
             rotateWithLeftChild(t);
          else
             doubleWithLeftChild(t);
    }
    if (t)
       t->height = max ( height(t->left), height(t->right) ) + 1;
 }
```

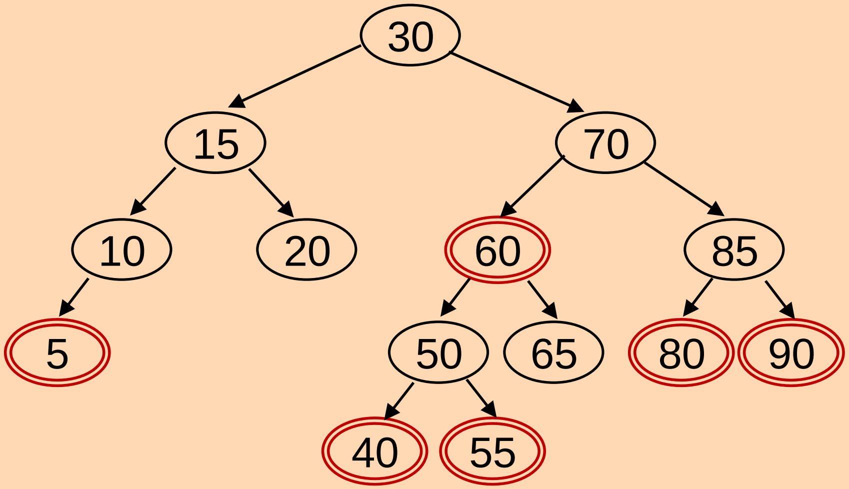
Árvores VP

- Árvore Vermelho-Preto
  - alternativa à árvore AVL
  - operações possuem complexidade O(logN)

- Propriedades de uma árvore VP
  1. cada nó é colorido como vermelho ou preto
  2. a raiz é preta
  3. se um nó é vermelho, os seus filhos são pretos
  4. qualquer caminho de um nó até uma subárvore vazia contém o mesmo número de nós pretos

  - Altura de uma árvore VP é no máximo = $2 \times \log(N+1)$
    - garante que operação de pesquisa é de ordem logarítmica

Árvores VP



nós pretos: traço simples
nós vermelhos: traço duplo

Operação mais complexa: inserção de um novo elemento

- o novo elemento é folha e é vermelho
- se pai é preto, terminar (ex: inserção do elemento 25)
- se pai é vermelho, corrigir a árvore (mudança de cor e/ou rotações)

Árvores VP

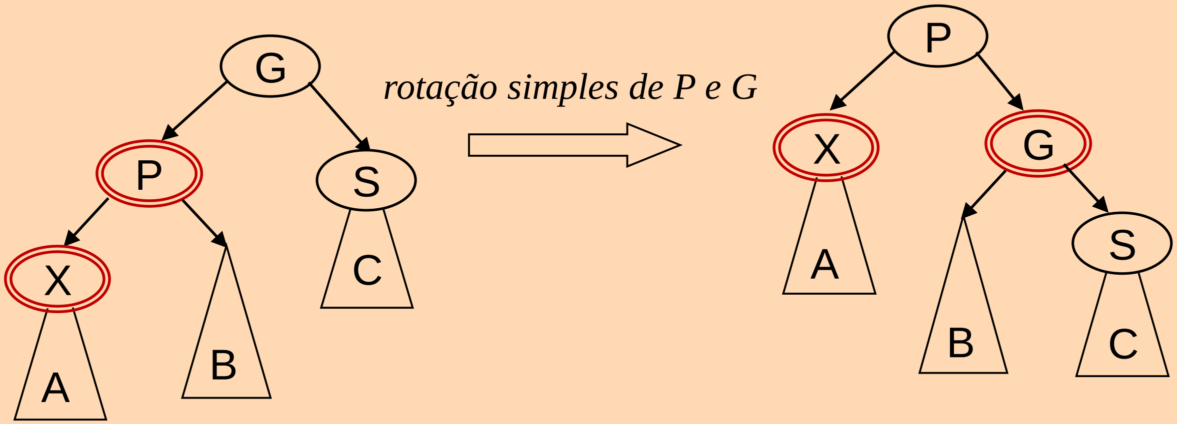
Inserção de um novo elemento X *(quando pai é vermelho)*

- se irmão do pai (tio) é preto ou nulo: rotação simples ou dupla, seguida de mudança de cor

Rotação simples, quando:

- X é filho esquerdo e neto esquerdo , ou
- X é filho direito e neto direito

Mudança de cor: pai e antigo avô



Árvores VP

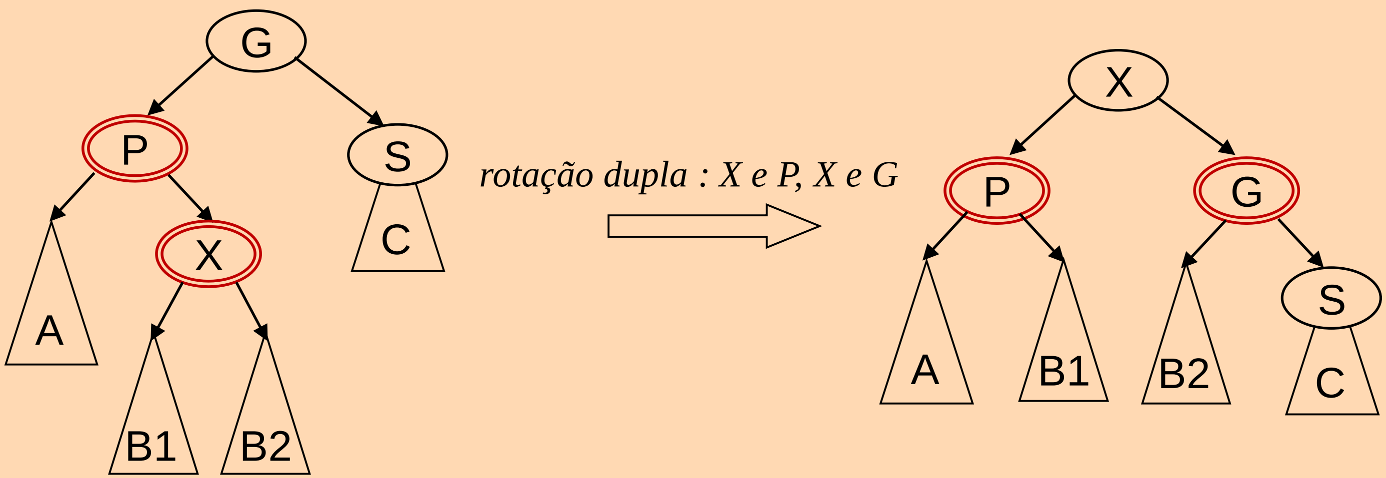
Inserção de um novo elemento X *(quando pai é vermelho)*

– se irmão do pai (tio) é preto ou nulo: rotação simples ou dupla, seguida de mudança de cor

Rotação dupla, quando:

- se X é filho esquerdo e neto direito , ou
- se X é filho direito e neto esquerdo

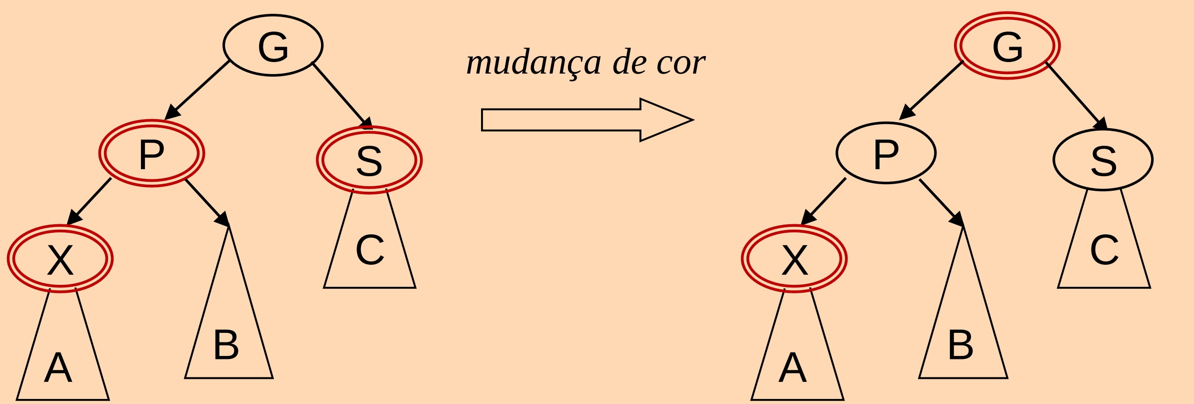
Mudança de cor: nó e antigo avô

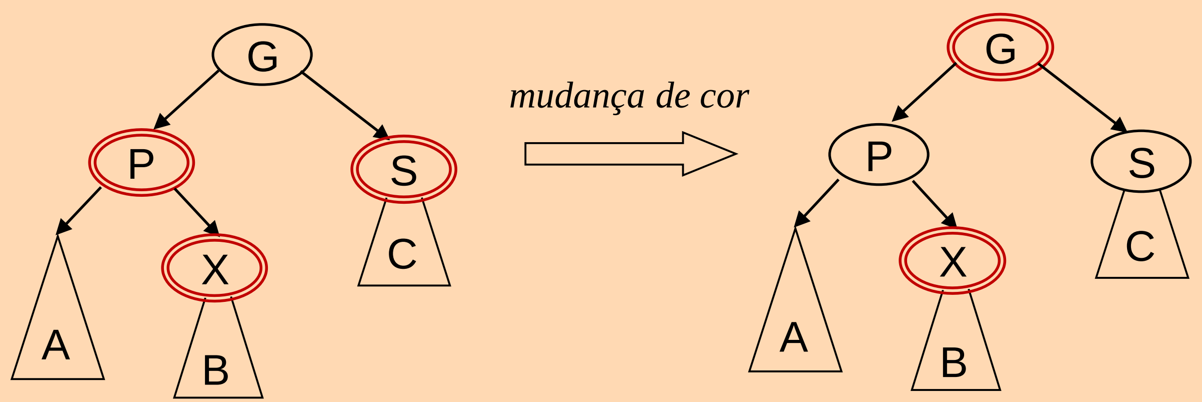


Árvores VP

Inserção de um novo elemento X *(quando pai é vermelho)*

- se irmão do pai é vermelho: mudança de cor
  - pai e tio passam para preto, e avô para vermelho



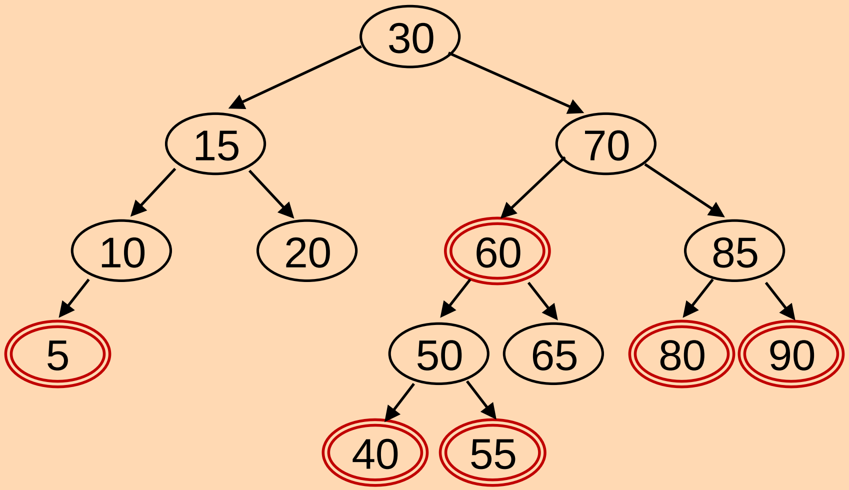


Árvores VP

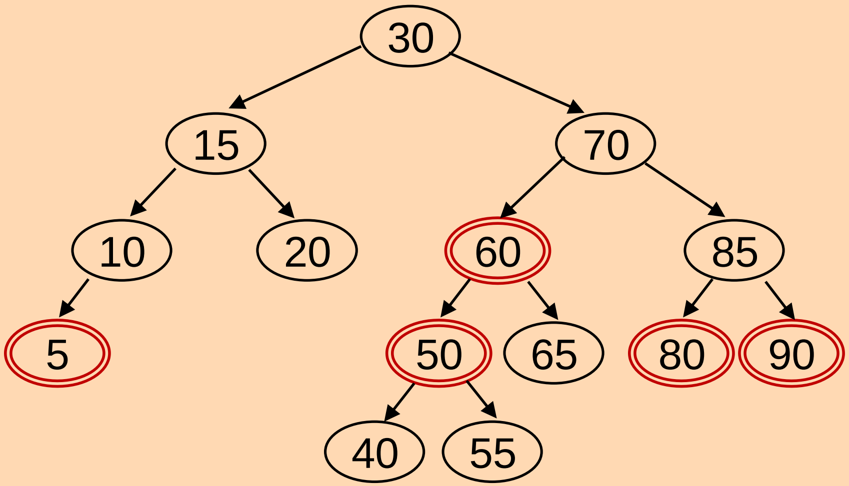
Inserção de um novo elemento *(Top-Down)*

- novo elemento é vermelho, e é folha
- começar na raiz, comparando valor com os nós por onde passa para escolher a subárvore onde inserir o novo elemento
- quando um nó *N* tem dois filhos vermelhos
  - tornar *N* vermelho e os dois filhos pretos
    - se pai de *N* (*P*) é vermelho, ocorre violação da condição VP
    - neste caso, efectuar rotação simples ou dupla com mudança de cor

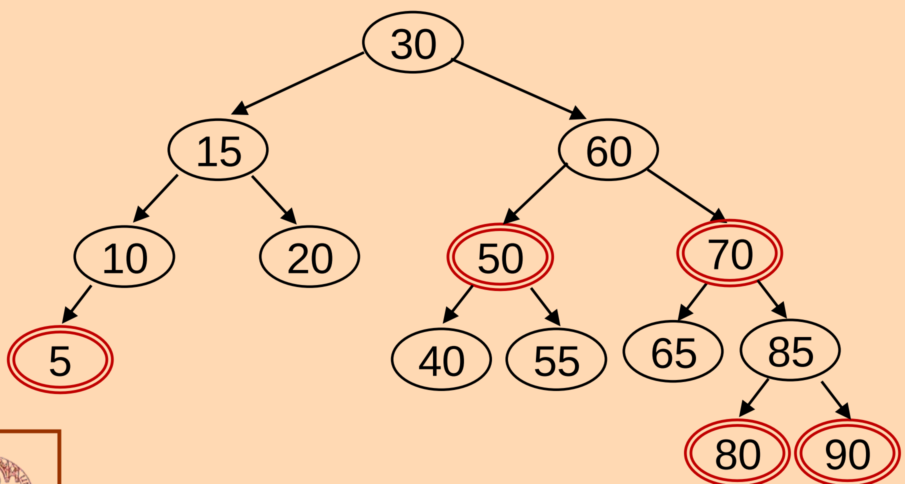
- ex: inserir valor 45
  - passa por 30, 70, 60,
  - nó 50 tem dois filhos V
  - então, efectuar mudança de cor



Árvores VP



– agora, 50 e 60 são ambos V (não pode ser)
– efectuar rotação simples entre 60 e 70 com mudança de cor



– continuar a procurar posição do novo elemento
– colocar 45 como folha V, e filho direito de 40
– como pai é preto, terminar

Árvores VP

Remoção de um elemento *(Top-Down)* **

- remoção é sempre realizada em uma folha

- se nó tem 2 filhos, ou apenas filho direito, substituir pelo menor da subárvore direita, e eliminar esse nó (tem no máximo 1 filho)
- se nó tem apenas filho esquerdo, substituir pelo maior da subárvore esquerda, e eliminar esse nó
- eliminação de uma folha vermelha, é trivial
- eliminação de uma folha preta, é mais complicado

Devemos garantir que folha a eliminar é vermelha !

- Solução: ao percorrer a árvore, manter o nó em análise como vermelho

** adicional

Árvores VP

Remoção de um elemento *(Top-Down)* **

- Se raiz tem 2 filhos pretos, mudar raiz para vermelho, *X* é filho correspondente
- Senão, *X* é a raiz

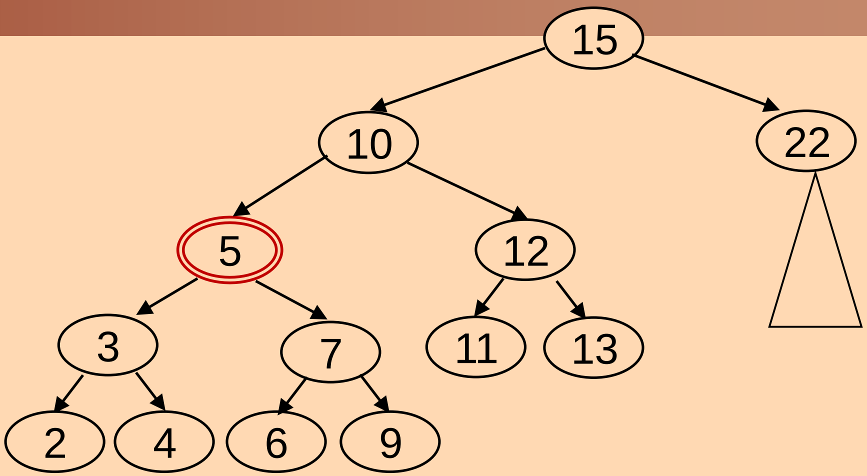
nota: X e irmão de X (Y) são pretos

- se *X* tem 2 filhos pretos:
  - se *Y* tem 2 filhos pretos, alterar as cores de *X*, *Y*, e o pai (*P*). Continuar
  - se *Y* tem pelo menos um filho vermelho (*S*), efetuar i) ou ii) conforme *S* e continuar:
    1. rotação simples (*Y*, *P*), recolorir *X*, *Y*, *P*, *S*
    2. rotação dupla (*S*, *Y*, *P*), recolorir *X*, *P*
- se *X* tem pelo menos 1 filho vermelho, continuar na subárvore correspondente:
  - se novo *X* é o filho vermelho, continuar
  - se novo *X* é o filho preto, novo *Y* é vermelho, e novo *P* é preto: rotação simples de novo *Y* e novo *P*. Recolorir nós rodados.
- Quando encontrar *X*, remover
- Colocar a raiz na cor preto

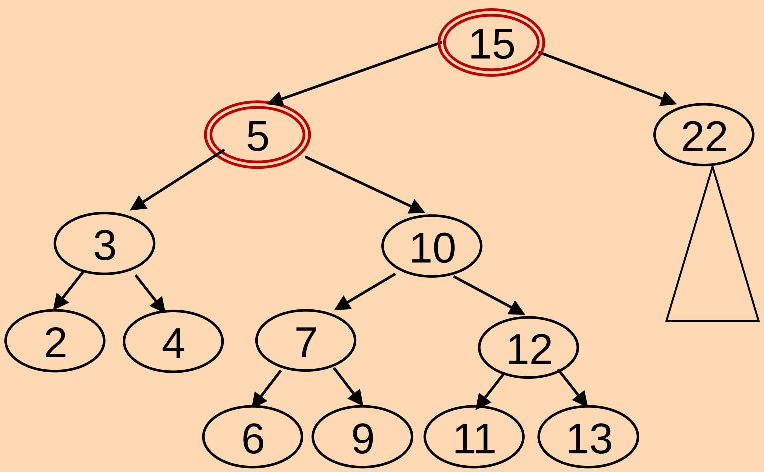
Árvores VP

**

- ex: remover 11 na árvore apresentada

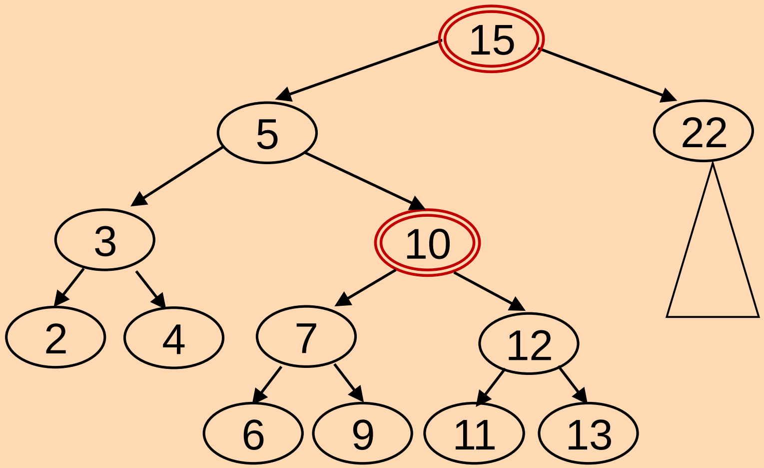


  - mudar raiz para vermelho
  - ir para X=10
  - Tem 1 filho vermelho, ir para X= 12
  - X=12 é filho preto, rotação simples de Y=5 e P=10

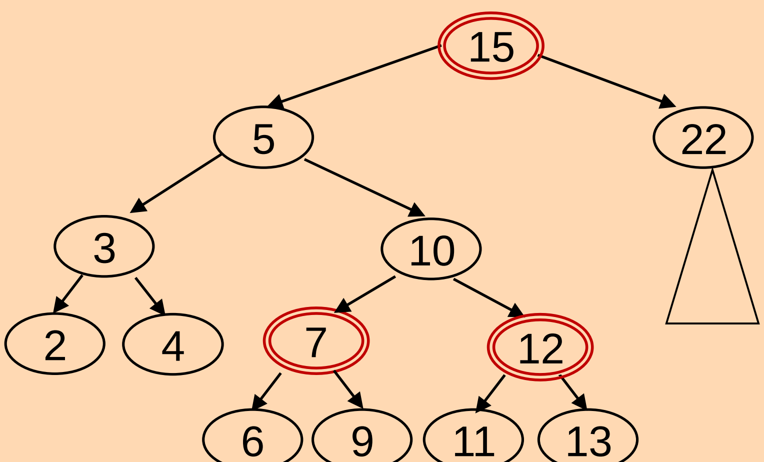


Árvores VP

– recolorir nós rodados: 5 e 10 **



– X=12, tem 2 filhos pretos e Y=7 também: alterar cores de X, Y e P (12, 7 e 10)

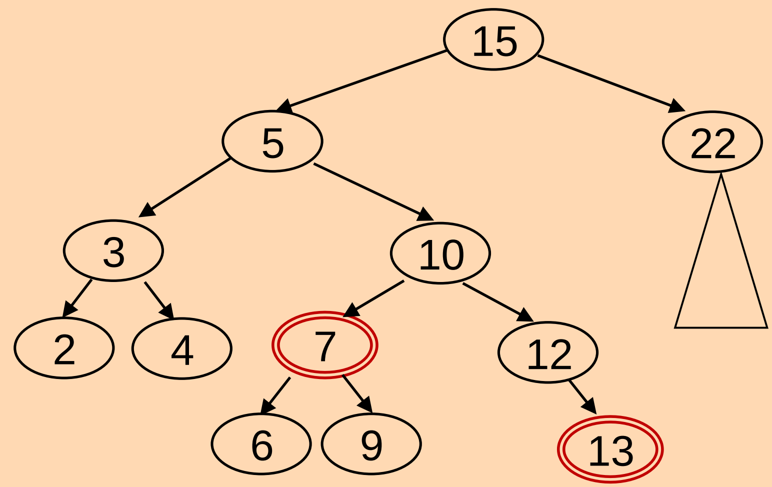


– ir para X=11

– X=11 não tem filhos (equivalente a ter 2 filhos pretos), Y também: alterar cores de X, Y e P (11, 13 e 12)

– remover X=11 (que é vermelho)

– colorir a raiz a preto



Árvores VP (Standard Template Library - STL)

- class ***set***

- Alguns métodos:
  - void clear();
  - std::pair<iterator,bool> insert(const value_type& value);
  - iterator erase(const_iterator position);
  - iterator find(const Key& key)
  - …

Árvores Splay

- Nas árvores AVL, as pesquisas frequentes a um mesmo elemento são penalizadas se este estiver a uma grande profundidade
  - em certas aplicações, quando um elemento é pesquisado uma vez, é muito provável que seja acedido de novo
  - seria bom que os elementos acedidos com frequência fossem "puxados" para a raiz da árvore

- Solução: Árvores *Splay*

Árvores Splay

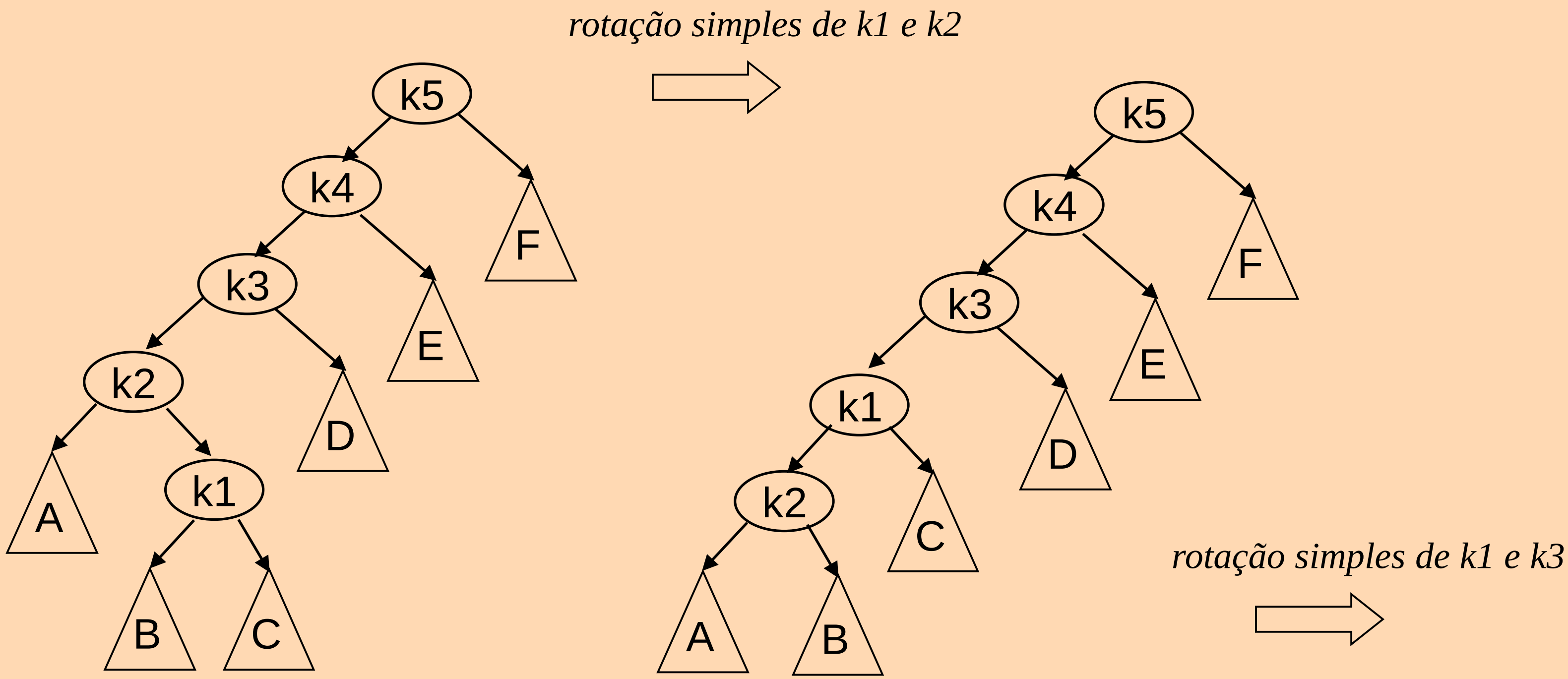
- Árvores mais simples que AVL
  - não força o equilíbrio
  - não mantém informação da altura

- Ajusta a estrutura da árvore à frequência de acesso aos dados
  - cada nó acedido é puxado para a raiz através de uma sequência de rotações
  - junto à raiz estão os elementos mais usados
  - os elementos mais inativos ficam mais “longe” da raiz

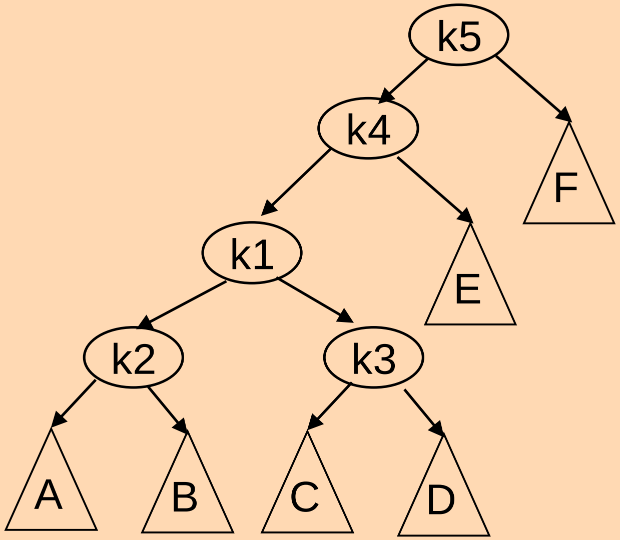
- ex: registos de doentes num hospital
  - podem estar no fundo da árvore, se os doentes não estiverem internados
  - passam para a raiz no momento do internamento
  - vão afundando se não voltarem a ser acedidos

Árvores Splay

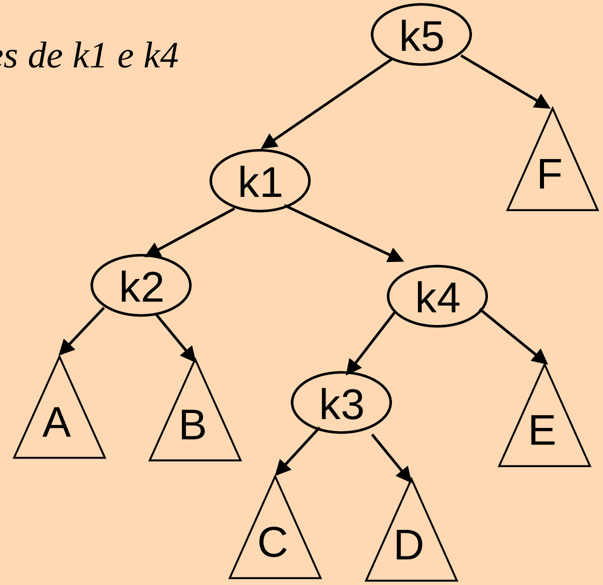
- Uma ideia simples (não resulta)
  - efectuar rotações simples
- *Exemplo:* aceder ao nó k1



Árvores Splay

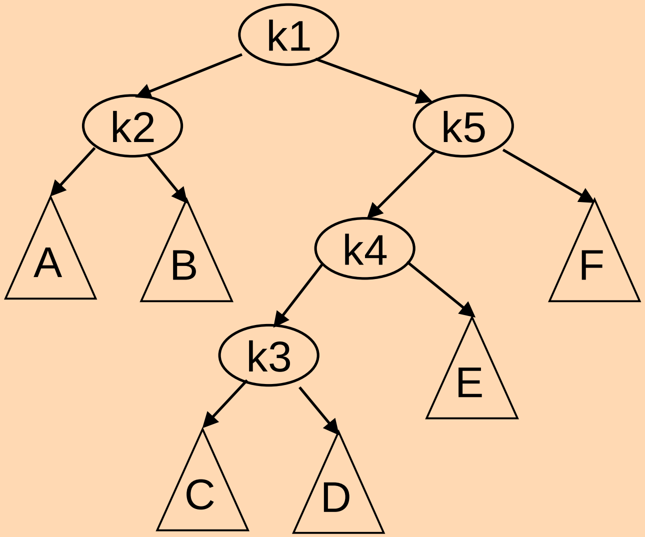


rotação simples de k1 e k4



rotação simples de k1 e k5

Árvores Splay



- O nó k3 está quase à mesma profundidade que k1 inicialmente
- uma visita a k3 seria também pesada, e afundaria outro nó
- **solução não serve**

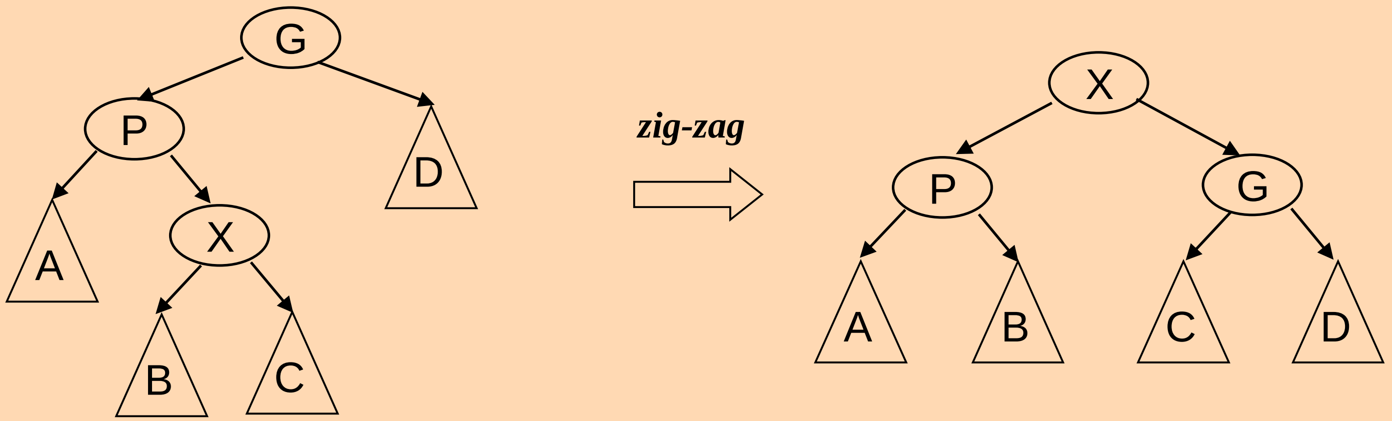
Árvores Splay

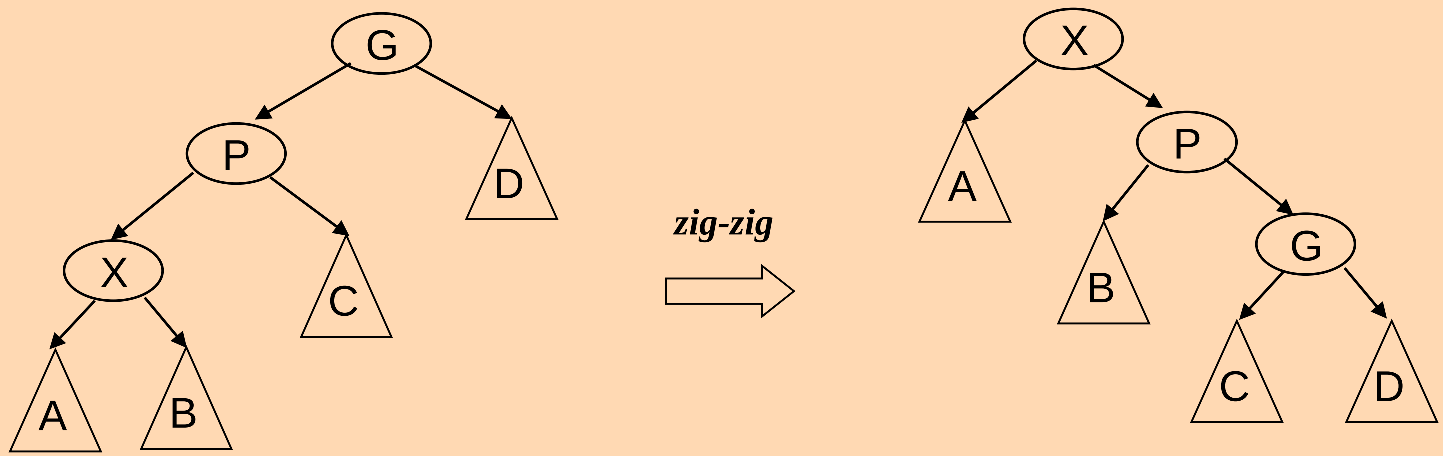
Splaying

- Rotações ascendentes desde o nó acedido (*X*) até à raiz
- Se pai de *X* é raiz : rotação simples de *X* e raiz
- Senão, X possui um pai (*P*) e um avô (*G*)
  - *X* é filho direito (esquerdo) de *P*, e *P* é filho esquerdo (direito) de *G* : zig-zag
  - *X* é filho direito (esquerdo) de *P*, e *P* é filho direito (esquerdo) de *G* : zig-zig

  - zig-zag é uma rotação dupla AVL (duas rotações: 1ª rotação é de *X* e *P*; 2ª rotação é de *X* e *G*)
  - zig-zig é específico do "splay" (duas rotações: 1ª rotação é de *P* e *G*; 2ª rotação é de *X* e *P*)

Árvores Splay

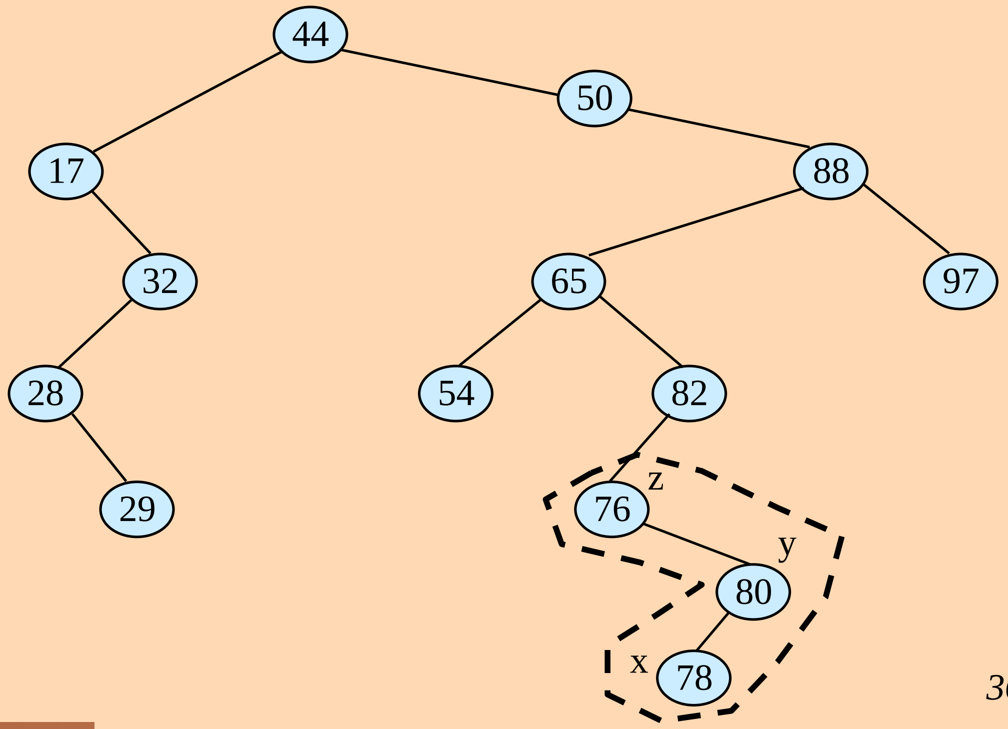




Inserção

- Inserir novo valor como na BST
- Se inserção com sucesso, efetuar operação “splaying” ao novo nó
- Se inserção com insucesso, efetuar operação “splaying” ao nó que provocou insucesso

Ex: inserir(78)



Árvores Splay

Remoção

- Remover valor como na BST
- Se remoção com sucesso (e não é raiz), efetuar operação “splaying” ao pai do nó removido
- Se remoção com insucesso, efetuar operação “splaying” ao último nó acedido

Pesquisa

- Se pesquisa com sucesso, efetuar operação “splaying” ao nó encontrado
- Se pesquisa com insucesso, efetuar operação “splaying” ao último nó acedido