Vetores: Algoritmos de Ordenação

Algoritmos e Estruturas de Dados

2020/2021

FEUP

Ordenação

- Problema (*ordenação de vetor*)
  - Dado um vetor (*v*) com **N** elementos, rearranjar esses elementos por ordem crescente (ou melhor, por ordem não decrescente, porque podem existir valores repetidos)
  - vetor de **N** elementos

- Ideias base:
  - Existem diversos algoritmos de ordenação com complexidade **O(N^2)** que são muito simples **(**por ex: Ordenação por Inserção, BubbleSort)
  - Existem algoritmos de ordenação mais difíceis de codificar que têm complexidade **O(N log N)**

Ordenação

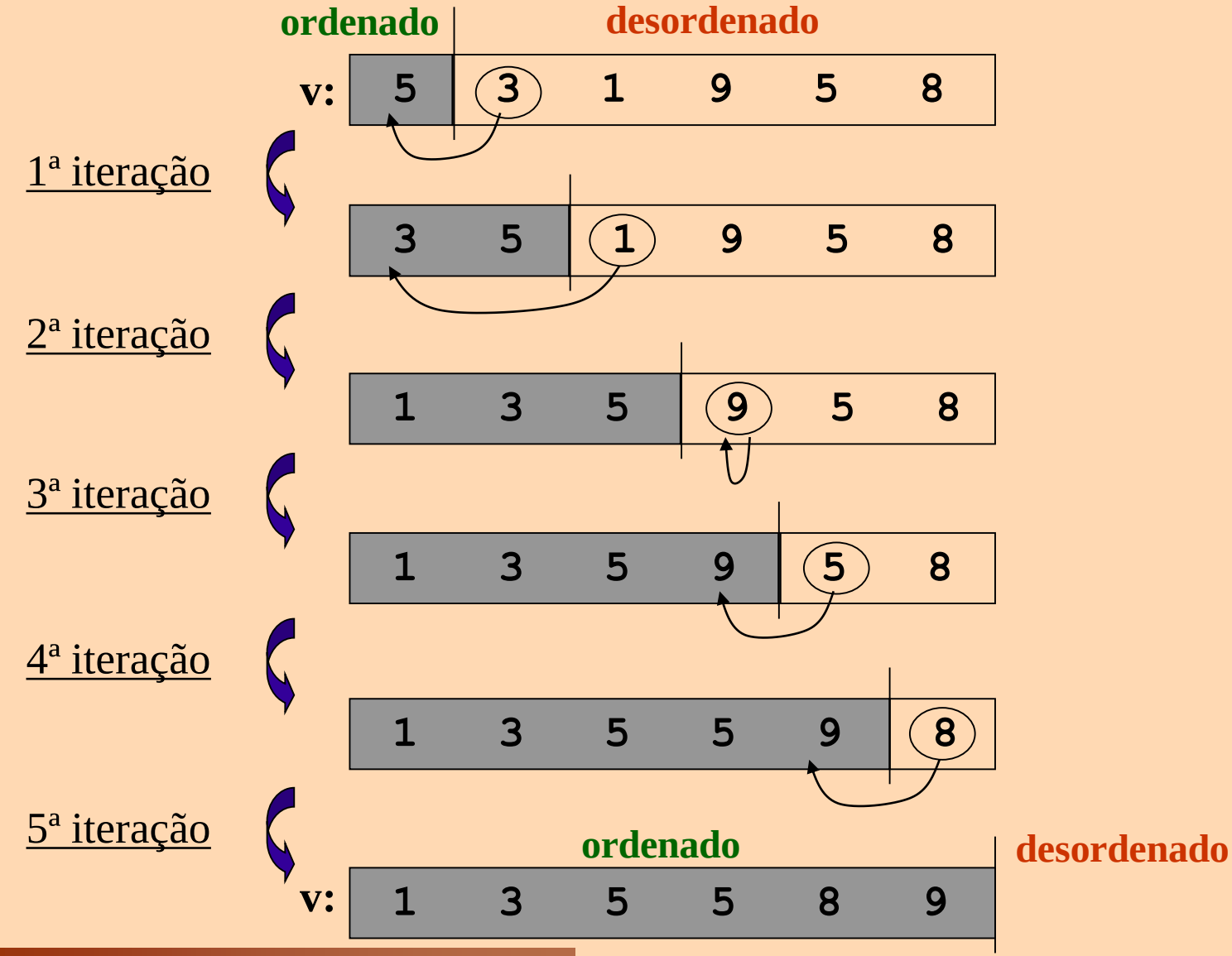
- Algoritmos:
  - Ordenação por Inserção - $O(N^2)$
  - Ordenação por Seleção - $O(N^2)$
  - Bubble Sort - $O(N^2)$
  - ShellSort - $O(N^2)$ variante mais popular
  - MergeSort - O(N logN)
  - Ordenação por Partição (QuickSort) - O(N log N)
  - HeapSort - O(N log N) , a estudar mais tarde
  - BucketSort

Ordenação por Inserção

- Algoritmo iterativo de **N-1** passos
- Em cada passo *p* :
  - coloca-se um elemento na ordem, sabendo que elementos dos índices inferiores (entre **0** e **p-1**) já estão ordenados

- Algoritmo (*ordenação por inserção*):
  - Considera o vetor dividido em dois sub-vetores (esquerdo e direito), com o da esquerda ordenado e o da direita desordenado
  - Começa com um elemento apenas no sub-vetor da esquerda
  - Move um elemento de cada vez do sub-vetor da direita para o sub-vetor da esquerda, inserindo-o na posição correta por forma a manter o sub-vetor da esquerda ordenado
  - Termina quando o sub-vetor da direita fica vazio

Exemplo de Ordenação por Inserção



Ordenação por Inserção usando `vector`

```
// Ordena elementos do vetor v
// Comparable: deve possuir construtor cópia, operadores
// atribuição (=) e comparação(<)

template <class Comparable>
void insertionSort(vector<Comparable> &v)
{
    for (unsigned int p = 1; p < v.size(); p++)
    {
       Comparable tmp = v[p];
       int j;
       for (j = p; j > 0 && tmp < v[j-1]; j--)
          v[j] = v[j-1];
       v[j] = tmp;
    }
}
```

Eficiência da Ordenação por Inserção

- o nº de iterações do ciclo `for` interior é:
  - **1**, no melhor caso
  - **n**, no pior caso
  - **n/2**, em média

- o nº total de iterações do ciclo `for` exterior é:
  - no **melhor caso**, 1 + 1 + ... + 1 (n-1 vezes) = n-1 ≈ **n**
  - no **pior caso**, 1 + 2 + ... + n-1 = (n-1)(1 + n-1)/2 = n(n-1)/2 ≈ $\mathbf{n^2/2}$
  - em **média**, metade do anterior, isto é, aproximadamente $\mathbf{n^2/4}$

⇒ **T(n) = *O(n^2)*** (quadrático) (pior caso e caso médio)

Ordenação por Seleção

- Provavelmente é o algoritmo mais intuitivo:
  - Encontrar o mínimo do vetor
  - Trocar com o primeiro elemento
  - Continuar para o resto do vetor (excluíndo o primeiro)

- 2 ciclos encaixados, cada um pode ter N iterações :
  - **Complexidade $O(N^2)$**

- Variantes:
  - "stableSort" – insere mínimo na primeira posição (em vez de realizar a troca)
  - "shaker Sort" – procura máximo e mínimo em cada iteração (seleção bidirecional)

Ordenação por Seleção

Algoritmo em C++:

```
// Ordena vetor v de n elementos, ficando v[0]≤... ≤v[n-1]

template <class Comparable>
void selectionSort(vector<Comparable> &v )
{
    typename vector<Comparable>::iterator it;
    for(it = v.begin(); it != v.end()-1; ++it )
        iter_swap(it, min_element(it, v.end()));
}
```

Existente em STL:

- template <class ForwardIterator> ForwardIterator ForwardIterator **min_element**(ForwardIterator first, ForwardIterator last);
- template <class ForwardIterator1, class ForwardIterator2> inline void **iter_swap**(ForwardIterator1 a, ForwardIterator2 b);

Bubble Sort

- Algoritmo de Ordenação "BubbleSort" ("Exchange Sort"):
  - Compara elementos adjacentes. Se o segundo for menor que o primeiro, troca-os.
  - Repetir para todos os elementos excepto o último (que já está correcto)
    - Repetir, usando menos um par em cada iteração até não haver mais pares (ou não haver trocas)

- 2 ciclos encaixados, cada um pode ter N iterações:
  - **Complexidade $O(N^2)$**

Bubble Sort

Algoritmo em C++

*// Ordena vetor **v** de **n** elementos inteiros, ficando v[0]≤... ≤v[n-1]*

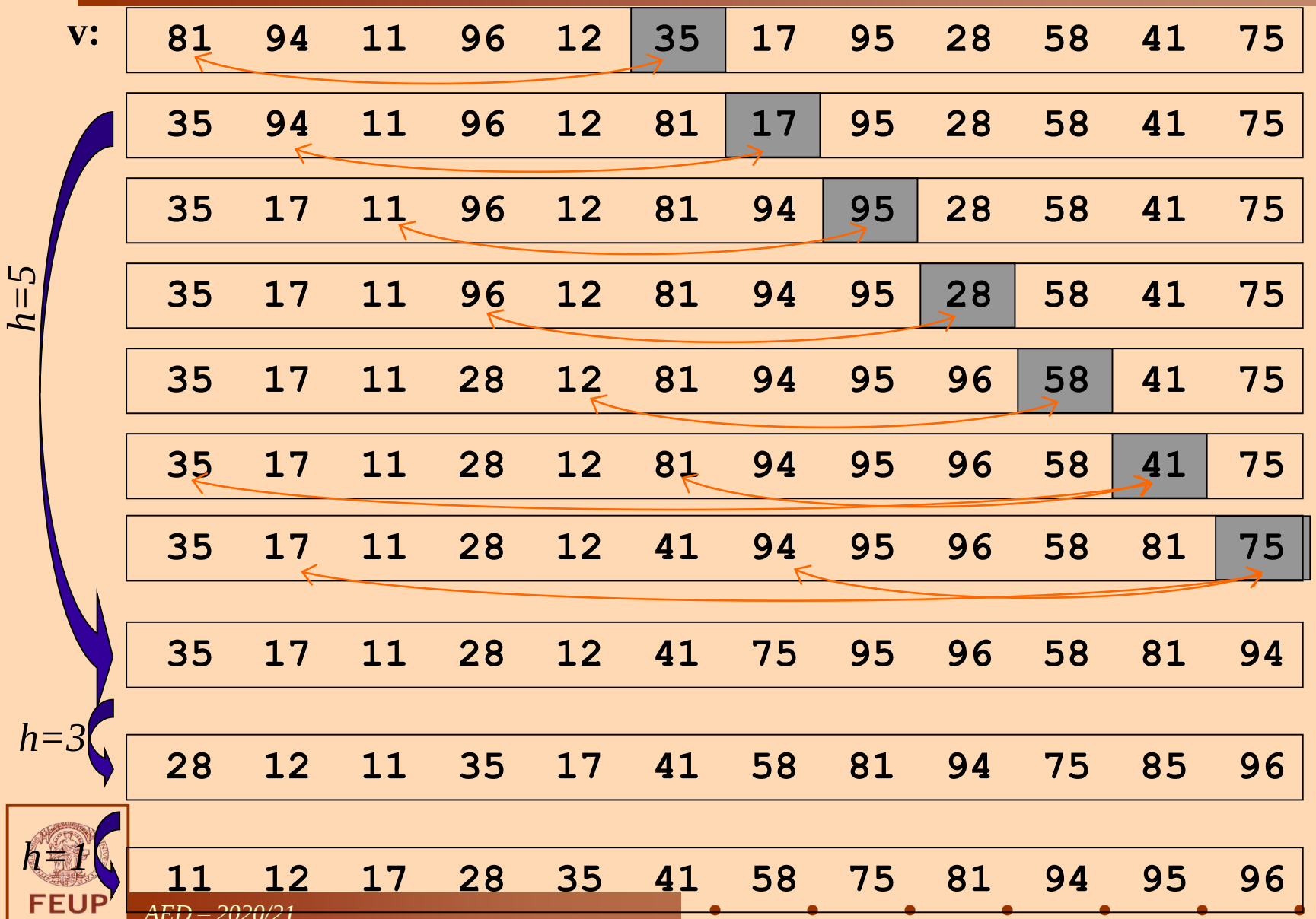
```
template <class Comparable>
void bubbleSort(vector<Comparable> &v)
{
        for(unsigned int j=v.size()-1; j>0; j--)
        {
                bool troca=false;
                for(unsigned int i = 0; i<j; i++)
                   if(v[i+1] < v[i]) {
                       swap(v[i],v[i+1]);
                       troca = true;
                   }
                if (!troca) return;
        }
}
```

ShellSort

- Compara elementos distantes
- Distância entre elementos comparados vai diminuindo, até que a comparação seja sobre elementos adjacentes
  - Usa a sequência $h_1, h_2, \ldots, h_t$ $(h_1=1)$
  - Em determinado passo, usando incremento h_k, todos os elementos separados da distância h_k estão ordenados, $v[i] \leq v[i+h_k]$

- Sequência de incrementos:
  - Shell: mais popular, não mais eficiente $O(N^2)$
    - $h_t = N/2, \quad h_k = h_{k+1}/2$
  - Hibbard: incrementos consecutivos não têm fatores comuns
    - $h = 1, 3, 7, \ldots, 2^k-1$ $O(N^{5/4})$

ShellSort (h = {5, 3, 1})



Implementação de ShellSort

```
// ShellSort - com incrementos de Shell
template <class Comparable>
void shellSort(vector<Comparable> &v)
{
    int j;
    for (int gap = v.size()/2; gap > 0; gap /= 2)
       for (unsigned int i = gap; i < v.size(); i++)
       {
          Comparable tmp = v[i];
          for (j = i; j >= gap && tmp < v[j-gap]; j -= gap)
             v[j] = v[j-gap];
          v[j] = tmp;
       }
}
```

MergeSort

- Abordagem recursiva
  - Divide-se o vetor ao meio
  - Ordena-se cada metade (usando MergeSort recursivamente)
  - Fundem-se as duas metades já ordenadas
- Divisão e conquista
  - problema é dividido em dois de metade do tamanho
- Análise
  - Tempo execução: O(N logN)
    - 2 chamadas recursivas de tamanho N/2
    - Operação de junção de vectores: O(N)
- Inconveniente
  - fusão de vetores requer espaço extra linear

Implementação de MergeSort em C++

```
template <class Comparable>
void mergeSort(vector <Comparable> & v) {
    vector<Comparable> tmpArray(v.size());
    mergeSort(v, tmpArray, 0, v.size()-1);
}

// internal method that makes recursive calls
// v is an array of Comparable terms
// tmpArray is an array to place the merged result
// left (right) is the left(right)-most index of the subarray
template <class Comparable>
void mergeSort(vector <Comparable> & v,
          vector<Comparable> & tmpArray, int left, int right)
{
    if (left < right)
    {
       int center = (left + right) / 2;
       mergeSort(v, tmpArray, left, center);
       mergeSort(v, tmpArray, center + 1, right);
       merge(v, tmpArray, left, center +1, right);
    }
}
```

Implementação de MergeSort em C++

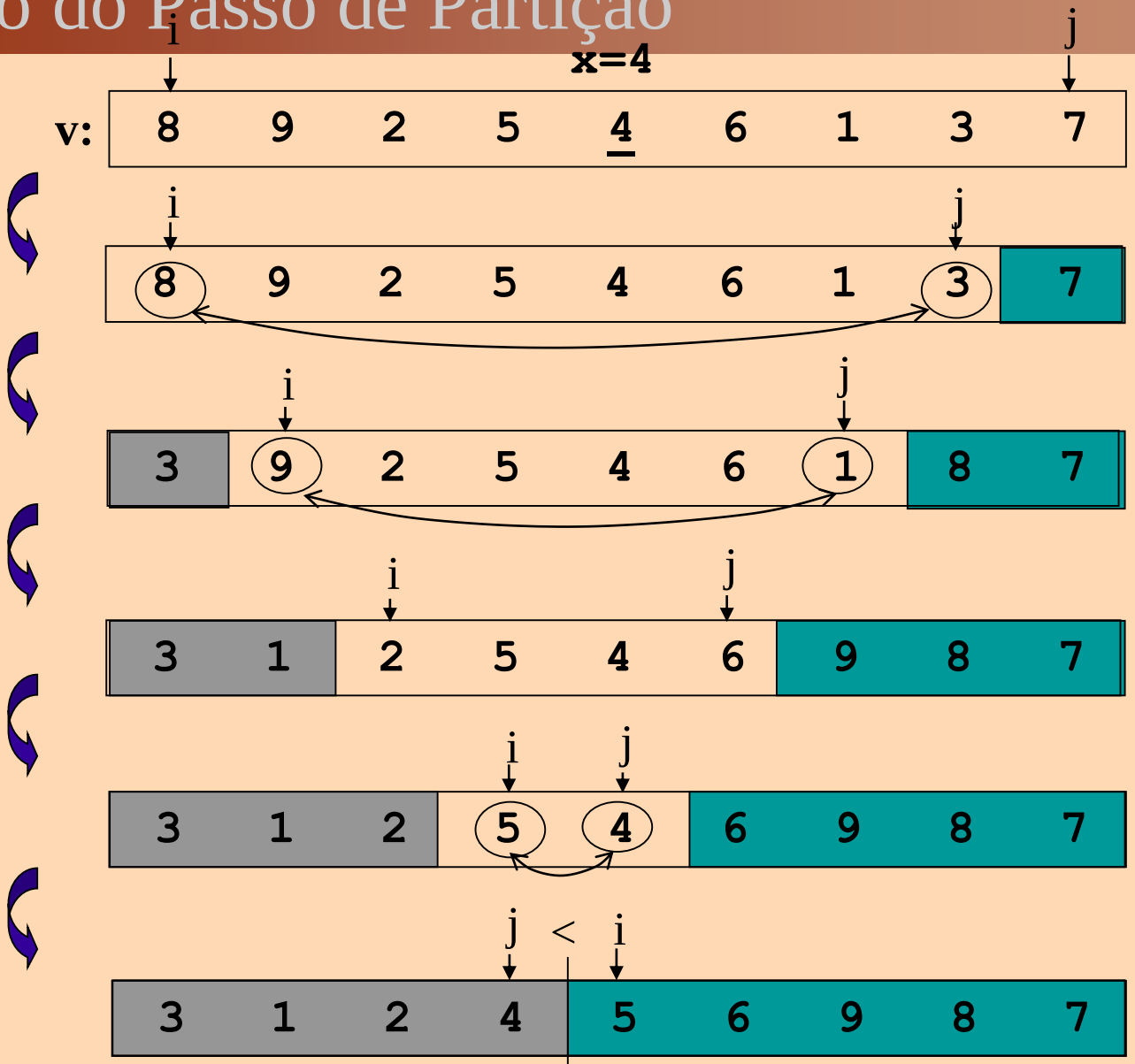
```
// internal method that makes recursive calls. v is an array of
// Comparable terms. tmpArray is an array to place the merged result.
// left (right) is the left(right)-most index of the subarray
template <class Comparable>
void merge(vector <Comparable> & v, vector<Comparable> &tmpArray,
           int leftPos, int rightPos, int rightEnd)
{
    int leftEnd = rightPos - 1;
    int tmpPos = leftPos;
    int numElements = rightEnd - leftPos + 1;
    while ( leftPos <= leftEnd && rightPos <= rightEnd )
       if ( v[leftPos] <= v[rightPos] )
          tmpArray[tmpPos++] = v[leftPos++];
       else
          tmpArray[tmpPos++] = v[rightPos++];
    while ( leftPos <= leftEnd )
       tmpArray[tmpPos++] = v[leftPos++];
    while ( rightPos <= rightEnd )
       tmpArray[tmpPos++] = v[rightPos++];
    for ( int i = 0; i < numElements; i++, rightEnd-- )
       v[rightEnd] = tmpArray[rightEnd];
}
```

Ordenação por Partição (Quick Sort)

- Algoritmo (ordenação por partição):
  1. Caso básico: Se o número (*n*) de elementos do vetor (*v*) a ordenar for muito pequeno, usar outro algoritmo (insertionSort)
  2. Passo de partição:
     2.1. Escolher um elemento "arbitrário" (**x**) do vector (chamado pivot)
     2.2. Partir o vetor inicial em dois sub-vetores (esquerdo e direito), com valores ≤ **x** no sub-vetor esquerdo e valores ≥ **x** no sub-vetor direito
  3. Passo recursivo: Ordenar os sub-vetores esquerdo e direito, usando o mesmo método recursivamente

- Algoritmo recursivo baseado na técnica *divisão e conquista*

Exemplo do Passo de Partição



Ordenação por Partição (QuickSort)

- Escolha pivot determina eficiência
  - *pior caso*: pivot é o elemento mais pequeno
    - O(N2)
  - *melhor caso*: pivot é o elemento médio
    - O(N logN)
  - *caso médio*: pivot corta vetor arbitrariamente

    O(N logN)

- Escolha do pivot
  - um dos elementos extremos do vetor:
    - má escolha: $O(N^2)$ se vetor ordenado
  - elemento aleatório:
    - envolve uso de mais uma função pesada
  - mediana de três elementos (extremos do vetor e ponto médio)
    - recomendado

Implementação da Ordenação por Partição

```
/* Ordena elementos do vetor v. Supõe que os elementos do vetor
possuem operadores de atribuição e comparação */


template <class Comparable>
void quickSort(vector<Comparable> &v)
{
    quickSort(v,0,v.size()-1);
}
```

Implementação da Ordenação por Partição

```
template <class Comparable>
void quickSort(vector<Comparable> &v, int left, int right)
{
    if (right-left <= 10)      // se vetor pequeno
       insertionSort(v,left,right);
    else {
       Comparable x = median3(v,left,right);    // x é o pivot
       int i = left; int j = right-1;     // passo de partição
       for(; ; ) {
          while (v[++i] < x) ;
          while (x < v[--j]) ;
          if (i < j)
             swap(v[i], v[j]);
          else break;
       }
       swap(v[i], v[right-1]);  //repoe pivot
       quickSort(v, left, i-1);
       quickSort(v, i+1, right);
    }
}
```

Implementação da Ordenação por Partição

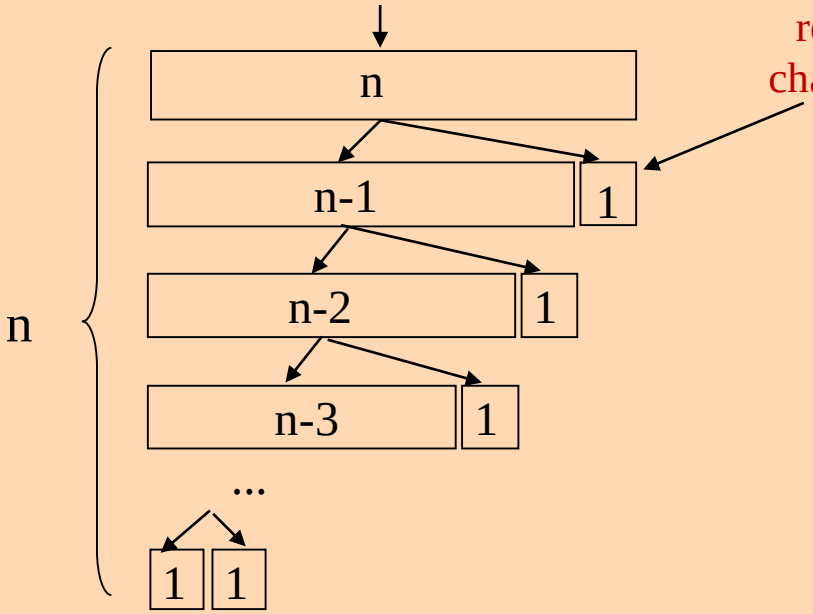
```
/* determina o valor do pivot como sendo a mediana de 3 valores: elementos
extremos e central do vetor */

template <class Comparable>
const Comparable &median3(vector<Comparable> &v, int left,
int right)
{
    int center = (left+right) /2;
    if (v[center] < v[left])
       swap(v[left], v[center]);
    if (v[right] < v[left])
       swap(v[left], v[right]);
    if (v[right] < v[center])
       swap(v[center], v[right]);

    //coloca pivot na posicao right-1
    swap(v[center], v[right-1]);
    return v[right-1];
}
```

Eficiência da Ordenação por Partição

Pior caso:

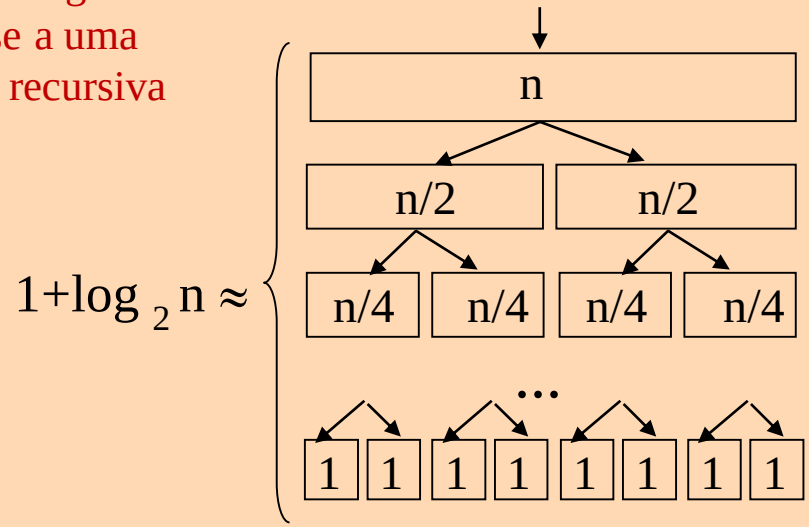


- profundidade de recursão: **n**
- tempo de execução total (somando totais de linhas):

  T(n) = O[n+n+(n-1) + ... +2]

  = O[n+(n-1)(n + 2)/2] = ***O(n²)***

Melhor caso:



- profundidade de recursão: ≈ $1+log_2 n$ (sem contar com a possibilidade de um elemento ser excluído dos sub-vetores esquerdo e direito)
- tempo de execução total (uma vez que a soma de cada linha é *n*):

  T(n) = O[(1+log₂n) n] = ***O(n log n)***

Complexidade Espacial de QuickSort

- O espaço de memória exigido por cada chamada de **quickSort**, sem contar com chamadas recursivas, é independente do tamanho (*n*) do vetor

- O espaço de memória total exigido pela chamada de **quickSort**, incluindo as chamadas recursivas, é pois proporcional à profundidade de recursão

- Assim, a complexidade espacial de **quickSort** é:
  - ***O(log n)*** no melhor caso (e no caso médio)
  - ***O(n)*** no pior caso

- Em contrapartida, a complexidade espacial de **insertionSort** é ***O(1)***

BucketSort

- Ordenação linear
  - usa informação adicional sobre entrada

- Algoritmo
  - vetor de entrada: inteiros positivos inferiores a **M**

    $a = [A_1, A_2, \ldots, A_N]$; $A_i < M$
  - inicializar um vetor de **M** posições a **0's**

    $count = [c_1, c_2, \ldots, c_M]$; $c_j = 0$
  - Ler vetor entrada (*a*) e para cada valor incrementar a posição respetiva no vetor *count* : *count[Ai]++*
  - Produzir saída lendo o vetor *count*

- Eficiência
  - tempo linear

Algoritmos de Ordenação

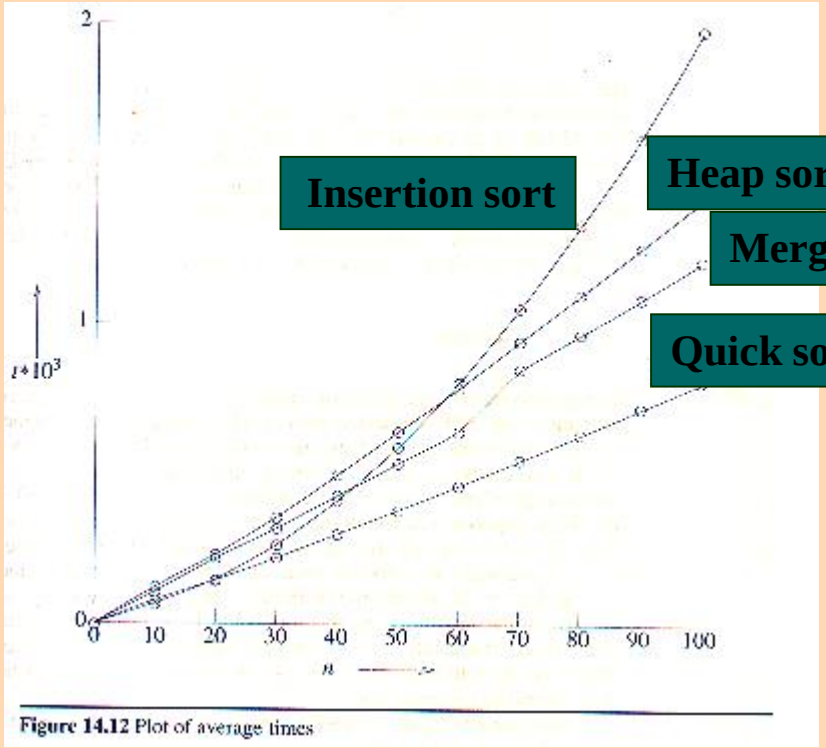


Figure 14.12 Plot of average times

Cada ponto corresponde à ordenação de 100 vetores de inteiros gerados aleatoriamente

Fonte: Sahni, "Data Structures, Algorithms and Applications in C++"

Método de ordenação por partição (*quickSort*) é na prática o mais eficiente, excepto para vetores pequenos (até cerca 20 elementos), em que o método de ordenação por inserção (*insertionSort*) é melhor!

Algoritmos da STL

- Ordenação de vetores:

  void sort(iterator start, iterator end);

  ordena os elementos do vetor entre *[start, end[* por ordem ascendente, usando o operador <

  void sort(iterator start, iterator end, StrictWeakOrdering cmp);

  ordena os elementos do vetor entre *[start, end[* por ordem ascendente, usando a função *StrictWeakOrdering*

  – Algoritmo de ordenação implementado em *sort()* é o algoritmo *introsort*, possui complexidade O(N logN)

Algoritmo *sort* da STL (exemplo)

```
class Pessoa {
    string BI;
    string nome;
    int idade;
public:
    Pessoa (string BI, string nm="", int id=0);
    string getBI() const;
    string getNome() const;
    int getIdade() const;
    bool operator < (const Pessoa & p2) const;
};

Pessoa::Pessoa(string b, string nm, int id):
      BI(b),nome(nm), idade(id) {}

string Pessoa::getBI() const { return BI; }
string Pessoa::getNome() const { return nome; }
int Pessoa::getIdade() const { return idade; }
```

Algoritmo *sort* da STL (exemplo)

```
bool Pessoa::operator < (const Pessoa & p2) const
{
    return nome < p2.nome;
}


ostream & operator << (ostream &os, const Pessoa & p)
{
   os << "(BI: " << p.getBI() << ", nome: " <<
   p.getNome() << ", idade: " << p.getIdade() << ")";
   return os;
}
```

Algoritmo *sort* da STL (exemplo)

```
template <class T>
void write_vector(vector<T> &v)
{
    for (unsigned int i=0 ; i < v.size(); i++)
       cout << "v[" << i << "] = " << v[i] << endl;
    cout << endl;
}


bool compPessoa(const Pessoa &p1, const Pessoa &p2)
{
    return p1.getIdade() < p2.getIdade();
}
```

Algoritmo *sort* da STL (exemplo)

```
int main()
{
  vector<Pessoa> vp;
  vp.push_back(Pessoa("6666666","Rui Silva",34));
  vp.push_back(Pessoa("7777777","Antonio Matos",24));
  vp.push_back(Pessoa("1234567","Maria Barros",20));
  vp.push_back(Pessoa("7654321","Carlos Sousa",18));
  vp.push_back(Pessoa("3333333","Fernando Cardoso",33));
  vector<Pessoa> vp1=vp;
  vector<Pessoa> vp2=vp;

  cout << "vector inicial:" << endl;
  write_vector(vp);
```

vector inicial:
v[0] = (BI: 6666666, nome: Rui Silva, idade: 34)
v[1] = (BI: 7777777, nome: Antonio Matos, idade: 24)
v[2] = (BI: 1234567, nome: Maria Barros, idade: 20)
v[3] = (BI: 7654321, nome: Carlos Sousa, idade: 18)
v[4] = (BI: 3333333, nome: Fernando Cardoso, idade: 33)

Algoritmo *sort* da STL (exemplo)

```
 sort(vp1.begin(),vp1.end());
 cout << "Apos 'sort' usando 'operador <':“ << endl;
 write_vector(vp1);
```

Apos 'sort' usando 'operador <':
v[0] = (BI: 7777777, nome: Antonio Matos, idade: 24)
v[1] = (BI: 7654321, nome: Carlos Sousa, idade: 18)
v[2] = (BI: 3333333, nome: Fernando Cardoso, idade: 33)
v[3] = (BI: 1234567, nome: Maria Barros, idade: 20)
v[4] = (BI: 6666666, nome: Rui Silva, idade: 34)

```
 sort(vp2.begin(),vp2.end(),compPessoa);
 cout << "Apos 'sort' usando funcao de comparacao:" << endl;
 write_vector(vp2);
}
```

Apos 'sort' usando funcao de comparacao:
v[0] = (BI: 7654321, nome: Carlos Sousa, idade: 18)
v[1] = (BI: 1234567, nome: Maria Barros, idade: 20)
v[2] = (BI: 7777777, nome: Antonio Matos, idade: 24)
v[3] = (BI: 3333333, nome: Fernando Cardoso, idade: 33)
v[4] = (BI: 6666666, nome: Rui Silva, idade: 34)