Listas

Algoritmos e Estruturas de Dados

2020/2021

FEUP

Tipo de Dados Abstrato

- TDA
  - conjunto de objetos + conjunto de operações
  - constituem uma abstração matemática (dados são genéricos e não específicos)
  - **não especifica como as operações** são implementadas, *apenas os seus efeitos*
  - Implementação em C++:
    - classes genéricas
    - operações: membros-função *públicos*

Exs de TDAs: listas de objetos, filas, dicionários, ...

Exs de operações: comparar objetos, procurar um objeto, ...

TAD : Listas

- Lista
  - sequência de objetos do mesmo tipo

    $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$

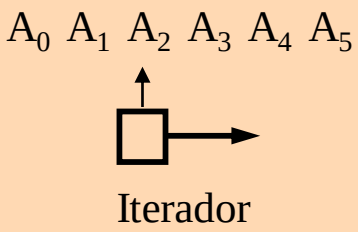
  - *lista vazia*: lista com zero elementos

  - Operações mais usuais:
    - criar uma lista vazia
    - adicionar/remover um elemento a uma lista
    - determinar a posição de um elemento na lista
    - determinar o comprimento (nº de elementos) de uma lista
    - concatenar duas listas

TAD: Iteradores

Para o tratamento de uma lista, é muitas vezes importante percorrer a lista, tratando os seus elementos um a um.

- Iterador
  - objeto apontador para um elemento de certos TDAs
  - abstração que permite encapsular a informação sobre o estado do processamento do TDA (i.e., a posição do elemento a processar)

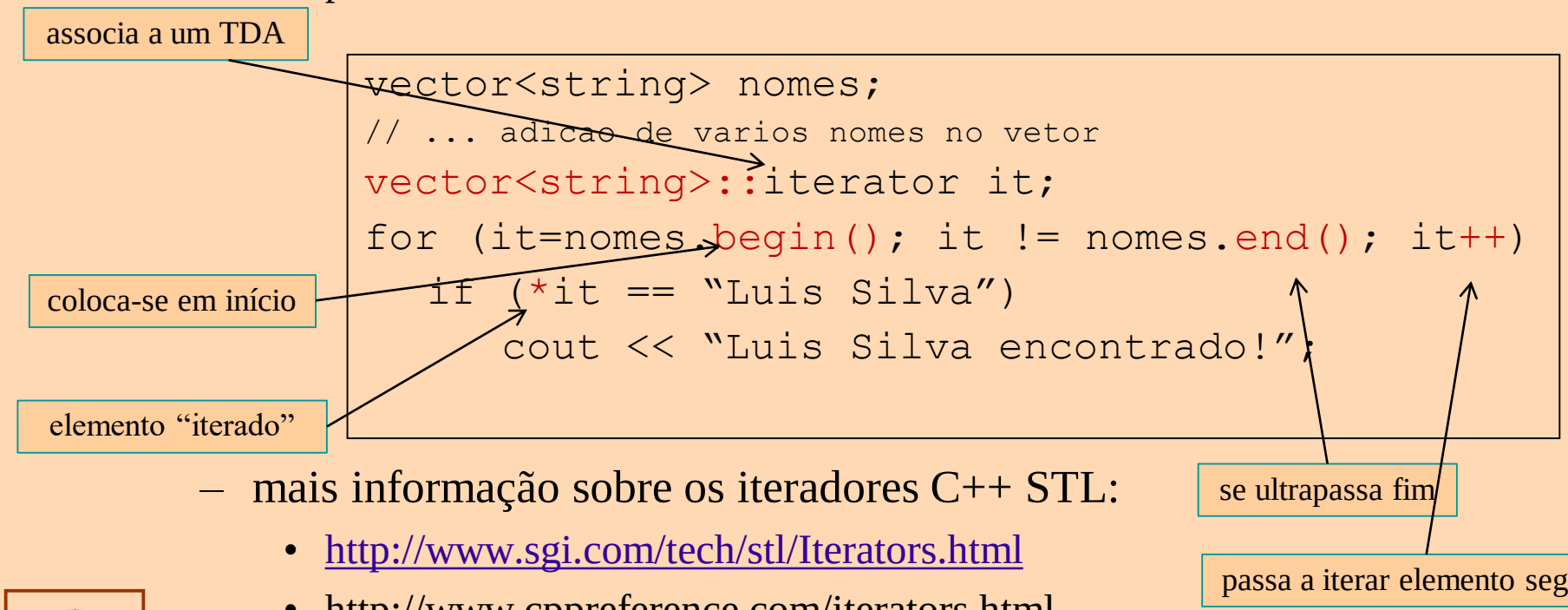


  - Operações básicas:
    - iniciar
    - avançar
    - verificar se chegou ao fim

TAD: Iteradores

Iterador

- associa-se a um Tipo de Dados Abstractos ou a uma sua implementação
- *Exemplo* de uso de iteradores em vetores:
  - considere o vetor **nomes** (vetor de strings: nomes de pessoas, p.ex)
  - procurar o nome "Luis Silva" no vetor **nomes**

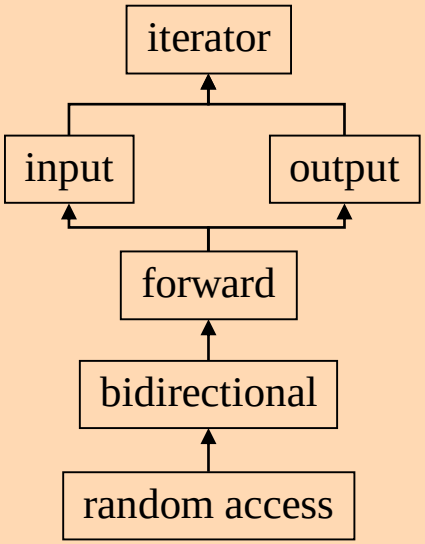



```
vector<string> nomes;
// ... adicao de varios nomes no vetor
vector<string>::iterator it;
for (it=nomes.begin(); it != nomes.end(); it++)
    if (*it == "Luis Silva")
        cout << "Luis Silva encontrado!";
```

- mais informação sobre os iteradores C++ STL:
  - http://www.sgi.com/tech/stl/Iterators.html
  - http://www.cppreference.com/iterators.html

Iteradores (Standard Template Library - STL)

- "iterator"
  - construtor de cópia
  - operador afectação (=)
  - operadores prefixo e sufixo de incremento (++it, it++)
- "input": acesso a dados
  - operadores igualdade (==, !=)
  - desreferenciação (*it)
- "output": escrita de dados
  - desreferenciação e afectação (*it=el)
- "forward": percorrer num sentido, leitura/escrita dados
  - construtor sem argumentos
- "bidirectional": percorrer em ambos sentidos, leitura/escrita dados
  - operadores prefixo e sufixo de decremento (--it, it--)
- "random access": permite saltar de uma posição para outra
  - operadores de aritmética (+=, +, -=, -)
  - operadores de comparação (<, >, <=, >=)



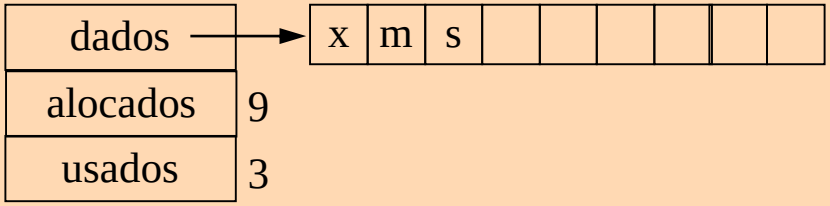
(http://www.sgi.com/tech/stl/Iterators.html)

Listas: implementação

- Técnicas artesanais de implementação de listas
  - baseada em *arrays*
  - baseada em apontadores:
    - listas ligadas
    - listas circulares
    - listas duplamente ligadas

Listas: implementação baseada em arrays

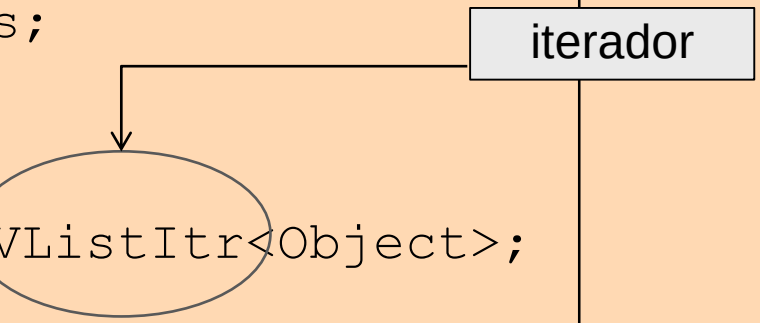
- Implementação de listas baseadas em *arrays*
  - os elementos são guardados num *array*
  - o tamanho do *array* (nº de elementos) exige monitorização constante
  - pesquisa, inserção e remoção de elementos:
    - operações de complexidade temporal *O(tamanho)*
  - Solução:



Listas: implementação baseada em arrays

- Declaração da classe ***VList*** em C++ (secção privada)

```
template <class Object>
class VList {
private:
    Object * dados;
    int usados;
    int alocados;
    friend class VListItr<Object>;
// ...
};
```



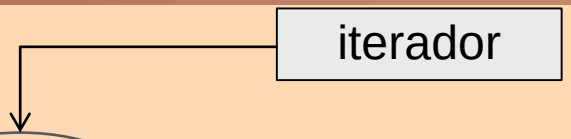
Listas: implementação baseada em arrays

- Declaração da classe ***VList*** em C++ (secção pública)

```
template <class Object> class VList {
   // ....
public:
   VList (int size = 100);
   VList (const VList &origem);
   ~VList();
   bool isEmpty() const;
   void makeEmpty();
   VListItr<Object> first() const;
   VListItr<Object> beforeStart() const;
   void insert (const Object &x, const VListItr<Object> &p);
   void insert (const Object &x, int pos);
   VListItr<Object> find (const Object &x) const;
   void remove (const Object & rhs);
   const VList & operator = (const VList & rhs);
};
```

Listas: implementação baseada em arrays

- O iterador (secção privada)




```
template <class Object> class VListItr {
private:
   int posActual;   // índice ou -1 se antes do 1º elemento
   const VList<Object> & aLista; // referência para a lista

   VListItr (const VList<Object> & v1, int pos = 0):
      aLista(v1), posActual(pos) {
         if ( pos > aLista.usados || pos < -1 )
            throw BadIterator();
   } // construtor privado

   friend class VList<Object>;
// ....
};
```

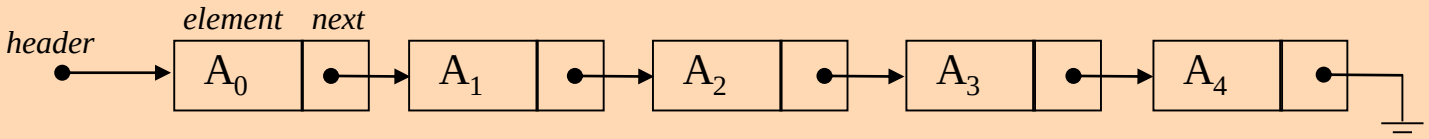
Listas: implementação baseada em arrays

- O iterador (secção pública)

```
template <class Object> class VListItr {
public:
   bool isPastEnd() const {
      return ( aLista.usados == 0 ||
                     posActual >= aLista.usados );
   }

   void advance() { if ( !isPastEnd() ) posActual++; }

   const Object & retrieve() const {
      if ( isPastEnd() || posActual < 0 )
            throw BadIterator();
      return aLista.dados[posActual];
   }
// ....
};
```

Listas: implementação baseada em listas ligadas

- Uma lista ligada é composta por nós. O nó possui dois campos:
  - o objeto a incluir na lista
  - um apontador para o elemento (nó) seguinte da lista

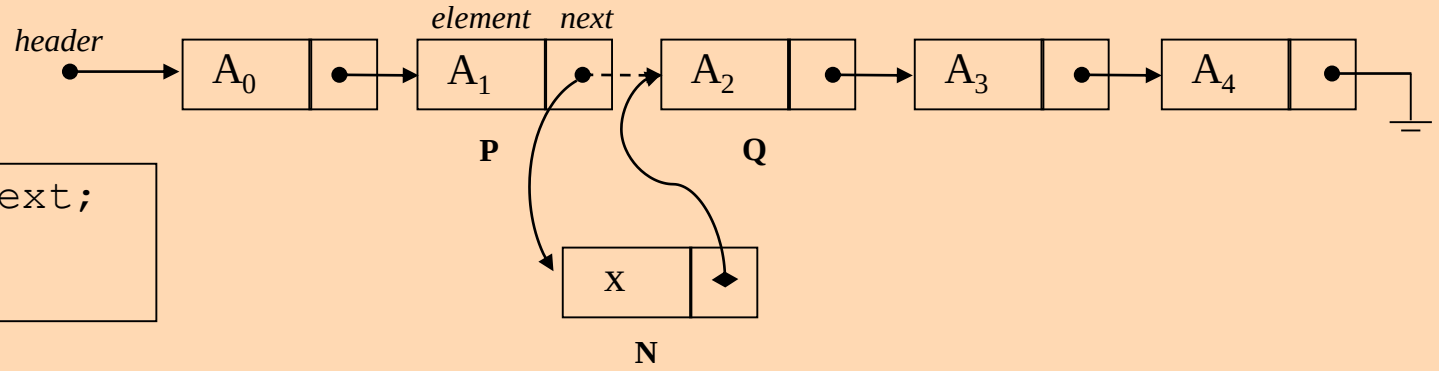


  - tamanho da lista varia facilmente por alocação dinâmica
  - pode ter ou não um nó especial (cabeçalho)

  - inserção e remoção de elementos:
    - operações de complexidade temporal *O(1)*
  - pesquisa de elementos:
    - operação de complexidade temporal *O(tamanho)*

Listas: implementação baseada em listas ligadas

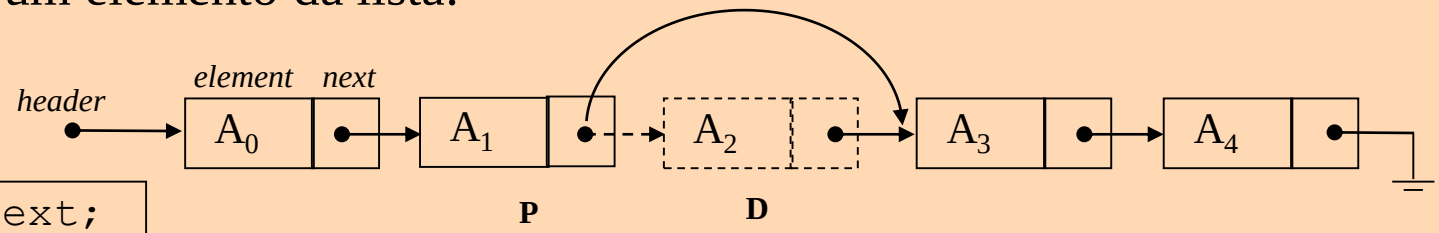
- Inserção de um elemento na lista:




```
N.next = P.next;
P.next = N;
```

  - O primeiro nó é um caso especial

- Remoção de um elemento da lista:



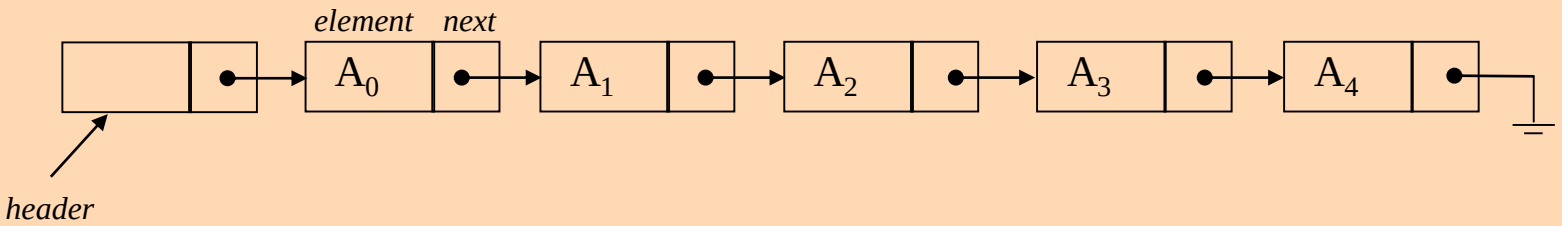

```
P.next = D.next;
delete D;
```

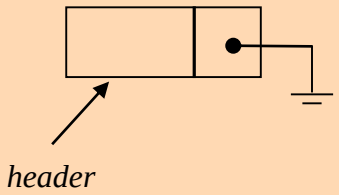
  - O primeiro nó é um caso especial

Técnicas de implementação

Usar um *cabeçalho* (nó fictício) para simplificar a manipulação da lista

- o primeiro nó deixa de ser um caso especial





lista vazia

Listas: implementação listas ligadas

- A classe ***LListNode***

```
template <class Object>
class LListNode {
   LListNode (const Object & theElement = Object(),
              LListNode *n = 0)
      : element(theElement), next(n) {}

   Object element;
   LListNode *next;

   friend class LList<Object>;
   friend class LListItr<Object>;
};
```

Listas: implementação listas ligadas

- A classe ***LList*** (secção privada)

```
template <class Object>
class LList {
private:
   LListNode<Object> *header;     // nó fictício
   LListItr<Object> findPrevious(const Object & x) const;
public:
   // ...
};
```

Listas: implementação listas ligadas

- A classe ***LList*** (secção pública)

```
template <class Object> class LList {
public:
   LList();
   LList (const LList &rhs);
   ~LLIst();
   bool isEmpty() const;
   void makeEmpty();
   LListItr<Object> first() const;
   LListItr<Object> beforeStart() const;
   void insert(const Object &x, const LListItr<Object> &p);
   void insert(const Object &x, const int pos = 0);
   LListItr<Object> find(const Object &x) const;
   void remove(const Object & rhs);
   const LList & operator = (const LList & rhs);
// ...
};
```

Listas: implementação listas ligadas

- A classe ***LListItr*** : iterador de listas ligadas (secção privada)

```
template <class Object>
class LListItr {
private:
   LListNode<Object> *current;

   LListItr(LListNode<Object> *theNode): current(theNode) {};
   friend class LList<Object>;
// ...
};
```

iterador

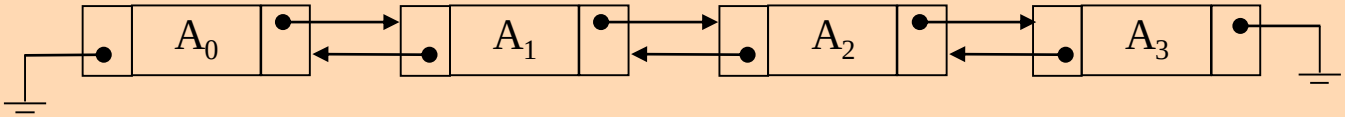
Listas: implementação listas ligadas

- A classe ***LListItr*** : iterador de listas ligadas (secção pública)

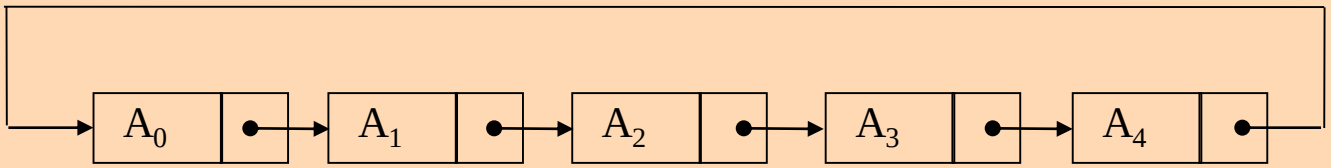
```
template <class Object> class LListItr {
public:
   LListItr() : current(0) {};

   bool isPastEnd() const { return current == 0; }

   void advance() {
      if ( !isPastEnd() ) current = current->next;
   }

   const Object & retrieve() const {
      if ( isPastEnd() ) throw BadIterator();
      return current->element;
   }
// ...
};
```

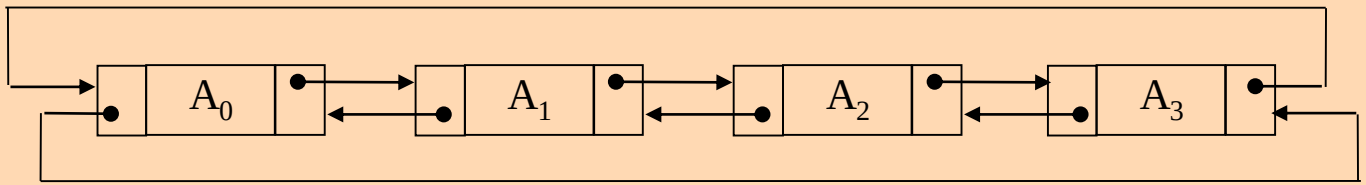
Outros tipos de listas

- Lista duplamente ligada
  - pode ter ou não nós especiais (cabeçalho e rodapé)



- Lista circular (simplesmente ou duplamente ligada)
  - pode ou não ter nós especiais (cabeçalho e rodapé)





Classe `list` (STL)

- classe `list` em STL:
  - *sequence* que pode ser percorrida nos dois sentidos: "para a frente" ou "para trás"
    - *sequence: container* de tamanho variável com elementos dispostos linearmente
    - *container:* objeto que armazena outros objetos (elementos)
      - suporta métodos de acesso aos elementos
      - tem iterador associado
  - implementada como lista duplamente ligada

consultar:

- http://www.sgi.com/tech/stl/List.html
- http://www.cppreference.com/cpplist

Classe `list` (STL)

Alguns métodos de *list* (STL):

- iterator **begin**()
- iterator **end**()
- size_type **size**() const
- bool **empty**() const
- reference **back**()
- reference **front**()
- iterator **insert**(iterator p, const T & e) // insere *e* antes de *p*, retorna iterator para *e*
- void **push_back**(const T & e)
- void **push_front**(const T & e)
- iterator **erase**(iterator p) // retorna iterator para o elemento seguinte ao removido
- void **pop_front**()
- void **pop_back**()
- void **clear()**
- void **sort()**

Classe `list` (STL)

e o algoritmo **`sort`**`()`

void sort(iterator start, iterator end);

void sort(iterator start, iterator end, StrictWeakOrdering cmp);

- class `list` **não** pode usar o algoritmo **`sort()`**
- o algoritmo **`sort()`** da STL funciona com *Random Access Iterators* e não com *Bidirectional Iterators*
- a classe `list` usa *Bidirectional Iterators*
- mas `list` tem função-membro **`sort()`**

e o algoritmo **`find`**`()`

iterator find(iterator start, iterator end, const TYPE& val);

iterator find_if(iterator start, iterator end, Predicate up);

- class `list` pode usar o algoritmo **`find()`**

Aplicação

- Polinómios esparsos
  - Polinómios de grau elevado, mas com poucos termos, p.ex:

    $3x^{1000} + 4x^{200} + 1$

  - Polinómio de grau n: $P_n(x) = a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
    - representar polinómio: lista de termos
    - termo i: a_ix^i (= *coeficiente* * *base*^{expoente})
    - operar com polinómios
      - $P1 + P2$
      - $k\ P1$
      - $P1 * P2$
      - avaliar polinómio: $P(x)$

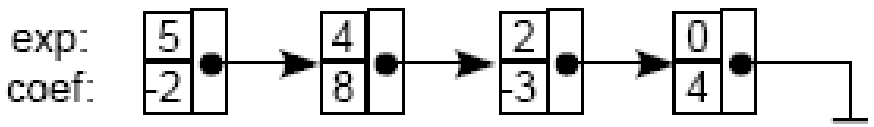
Aplicação

- Representação baseada em arrays:
  - *array* contém os coeficientes
  - posição é o grau do termo
  - desperdiça espaço de memória
    - espaço é proporcional ao grau e não ao nº de termos!

$-2x^5 + 8x^4 - 3x^2 + 4$ como *array*:

- Representação baseada em listas ligadas:
  - aproveita melhor o espaço de memória
  - lista de termos [pares (coeficiente, expoente)]
  - termo de maior grau é o primeiro da lista
  - a lista é mantida ordenada por grau (ordem decrescente)

$-2x^5 + 8x^4 - 3x^2 + 4$ como *lista*



Aplicação

- A classe **Termo**

```
class Termo
{
public:
   double coeficiente;
   int potencia;

   Termo (double coef=0.0, int pot=0): coeficiente(coef),
                        potencia(pot) { };
   double avaliar(double x);
};


double Termo::avaliar(double x)
{
    return coeficiente*pow(x, potencia);
}
```

Aplicação

- Operações com termos

```
Termo operator *(const Termo &t1, const Termo &t2);
Termo operator +(const Termo &t1, const Termo &t2);
bool operator ==(const Termo &t1, const Termo &t2);
bool operator !=(const Termo &t1, const Termo &t2);
ostream & operator <<(ostream &out, const Termo
&val);
```

```
Termo operator *(const Termo &t1, const Termo &t2) {
 Termo res(t1.coeficiente*t2.coeficiente, t1.potencia+t2.potencia);
 return res;
}

Termo operator +(const Termo &t1, const Termo &t2) {
   if (t1.potencia != t2.potencia) {
      cout << "operacao de soma impossivel";
      Termo res(t1.coeficiente,t1.potencia); return res; }
   Termo resultado(t1.coeficiente + t2.coeficiente, t1.potencia);
   return resultado;
```

Aplicação

- A classe `Polinomio`

```
class Polinomio {
public:
   list<Termo> termos;

   Polinomio() { };
   Polinomio(const Polinomio &p);
   Polinomio(Termo &t);
   Polinomio(double coef_um, double coef_zero);
   Polinomio(double coef_dois, double coef_um,
                                    double coef_zero);

   void operator +=(const Polinomio &p);
   void operator +=(const Termo &t);
   void operator *=(const Termo &t);
   double avaliar(double x);
};
```

Aplicação

```
Polinomio::Polinomio(const Polinomio &p) {
  list<Termo>::const_iterator itr = p.termos.begin();
  list<Termo>::const_iterator itre = p.termos.end();
  while ( itr != itre ) {
      double coef = itr->coeficiente;
      int pot = itr->potencia;
      termos.push_back(Termo(coef,pot));
      itr++;
   }
}

Polinomio::Polinomio(double coef_um, double coef_zero) {
   Termo t1(coef_um,1); Termo t0(coef_zero,0);
   termos.push_front(t0);
   termos.push_front(t1);
}
```

Aplicação

```
Polinomio::Polinomio(double coef_dois, double coef_um,
                                        double coef_zero) {
   Termo t2(coef_dois,2);
   Termo t1(coef_um,1); Termo t0(coef_zero,0);
   termos.push_front(t0); termos.push_front(t1);
   termos.push_front(t2);
}

double Polinomio:: avaliar(double x) {
   double sum = 0.0;
   list<Termo>::iterator itr = termos.begin();
   list<Termo>::iterator itre = termos.end();
   for ( ; itr!=itre ; itr++ )
      sum += itr->avaliar(x);
   return sum;
}
```

Aplicação

```
void Polinomio::operator +=(const Termo &t)  {
   list<Termo>::iterator itr = termos.begin();
   list<Termo>::iterator itre = termos.end();
   while ( itr != itre ) {
      if ( itr->potencia < t.potencia ) {
        termos.insert(itr,t);
        return;
      }
      else if (itr->potencia == t.potencia ) {
          itr->coeficiente += t.coeficiente;
          return;
      }
      else  itr++;
   }
   termos.insert(itr,t);
}
```

Aplicação

```
void Polinomio::operator +=(const Polinomio &p) {
   list<Termo>::const_iterator itr = p.termos.begin();
   list<Termo>::const_iterator itre = p.termos.end();
   while (itr != itre) {
      (*this) += (*itr);
      itr++;
    }
}

void Polinomio::operator *=(const Termo &t) {
  list<Termo>::iterator itr = termos.begin();
  list<Termo>::iterator itre = termos.end();
  for ( ; itr != itre ; itr++ )
      (*itr) = (*itr) * t;
}
```

Aplicação

```
Polinomio operator *(const Polinomio &p, const Termo &t) {
   Polinomio result(p);
   result *= t;
   return result;
}

Polinomio operator *(const Polinomio &p, const Polinomio &q) {
   Polinomio result;
   list<Termo>::const_iterator itr = p.termos.begin();
   list<Termo>::const_iterator itre = p.termos.end();
   for ( ; itr !=itre; itr++ )
      result += q * (*itr);
   return result;
}
```

Aplicação

```
ostream & operator <<(ostream &out, const Polinomio &p)
{
   list<Termo>::const_iterator itr = p.termos.begin();
   list<Termo>::const_iterator itre = p.termos.end();
   while (itr != itre) {
      out << (*itr) << " + " ;
      itr++;
   }
   out << "\n";
   return out;
}
```

Aplicação

```
int main() {
   Termo t(11.5, 2);
   Polinomio p1(3.5, 2, 1), p2(2, 8), p3, p4;
   cout << t << endl;
   cout << "p1: " << p1 << endl << "p2: " << p2 << endl;
   cout << "p2(1): " << p2.avaliar(1) << endl;
   Polinomio temp = p1 + p2;
   cout << "p1+p2: " << temp << endl;
   cout << "(p1+p2) (1): " << temp.avaliar(1) << endl;
   cout << "p1*p2: " << p1*p2 << endl;
   p3 += Termo(10,3); p3 += Termo(2,100); p3 += Termo(1,50);
   cout << "p3: " << p3 << endl;
   cout << p3(1): " << p3.avaliar(1) << endl;
   cout << "p3^2: " << p3*p3 << endl;
   p4 += Termo(1,1000); p4 += Termo(1,0);
   cout << "p4: " << p4 << endl;
   cout << "p4^3: " << p4*p4*p4 << endl;
```

Aplicação

- Resultado:

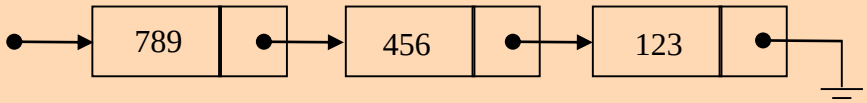
```
11.5x^2
p1: 3.5x^2 + 2x + 1
p2: 2x + 8
p2(1): 10
p1+p2: 3.5x^2 + 4x + 9
(p1+p2)(1): 16.5
p1*p2: 7x^3 + 32x^2 + 18x + 8
p3: 2x^100 + 1x^50 + 10x^3
p3(1): 13
p3^2: 4x^200 + 4x^150 + 40x^103 + 1x^100 + 20x^53 + 100x^6
p4: 1x^1000 + 1
p4^3: 1x^3000 + 3x^2000 + 3x^1000 +1
```

Aplicação 2

- Números naturais “ilimitados”
  - O número 123456789 pode ser representado em base 1000 como

$$123 \times 1000^2 + 456 \times 1000^1 + 789 \times 1000^0$$

    - Cada um dos coeficientes está entre 0 e 999
  - Representar cada número como uma sequência de coeficientes (“digitos” em base 1000). Implementação baseada em listas:
    - O grupo menos significativo é o primeiro da lista
    - Classe *NumNatural*



Aplicação 2

- A classe `NumNatural`

```
class NumNatural {
   list<int> digitos;
   void rec_output(ostream &out,
                   list<int>::iterator &itr) const;
   static const int modulo;

public:
   NumNatural(int n = 0) ;
   NumNatural(const NumNatural &n): digitos(n.digitos) { }
   NumNatural & operator =(const NumNatural &n)
                           { digitos = n.digitos; }
   void output(ostream &out) const;
   void operator +=(const NumNatural &n);
};
```

Aplicação 2

```
NumNatural operator+ (const NumNatural &n,
                      const NumNatural &m);
ostream & operator <<(ostream &out, const NumNatural &n);
```

- Como somar ?
  - Para cada grupo de dígitos (do menos significativo para o mais significativo):
    - somar os grupos (coeficientes) correspondentes e o transporte do grupo anterior
    - o novo valor é igual a *soma%1000*
    - o transporte para o grupo é igual a *soma/1000* (divisão inteira)
  - Cuidados a ter:
    - os números a somar têm geralmente comprimento diferente
    - a soma pode ter comprimento superior às duas parcelas

Aplicação 2

- A classe `NumNatural` (soma de números naturais)

```
void NumNatural::operator += (const NumNatural &n)  {
   int soma, nd, transporte = 0;
   list<int>::iterator itr = digitos.begin();
   list<int>::iterator itre = digitos.end();
   list<int>::iterator nitr = n.digitos.begin();
   list<int>::iterator nitre = n.digitos.end();
   while ( true ) {
        if ( itr == itre ) break;
        if ( nitr == nitre && transporte == 0 ) break;
        if ( nitr == nitre ) nd = 0; else nd = *nitr;
        soma = *itr + nd + transporte;
        transporte = soma/modulo;
        (*itr) = soma % modulo;
        nitr++; itr++;
   }
  //  ... continua
```

Aplicação 2

- A classe `NumNatural` (soma de números naturais)

```
// continuação
   while ( transporte > 0 || nitr != nitre ) {
                                  // o comprimento do nº pode aumentar
         if ( nitr == nitre )
               nd = 0;
         else
               nd = *nitr;
         soma = transporte + nd;
         transporte = soma/modulo;
         digitos.insert(itr,soma%modulo);
         itr++;
         nitr++;
   }
}
```