Conjuntos Disjuntos

Algoritmos e Estruturas de Dados

2020/2021

FEUP

Conjuntos disjuntos

Objetivo

- resolver eficientemente o problema da equivalência
- estrutura de dados simples (vector)
- implementação rápida

Desempenho

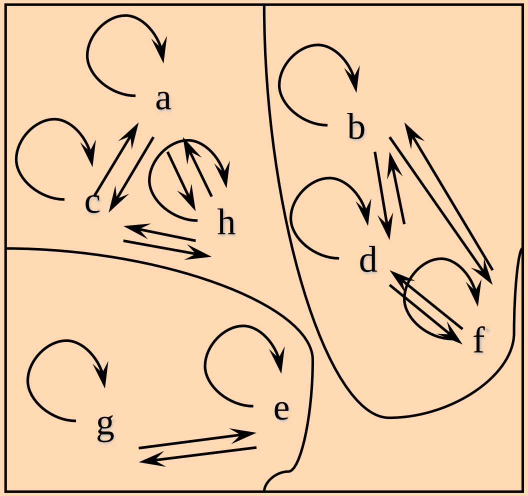
- análise complicada

Uso

- problemas de grafos
- equivalência de tipos em compiladores

Relações de equivalência

- relação R definida num conjunto S se
  - a R b = V ou a R b = F $\forall\, a, b \in$ S
  - a R b $\Rightarrow$ a está relacionado com b



- propriedades das relações de equivalência
  - **reflexiva** a R a, $\forall$ a $\in$ S
  - **simétrica** a R b $\rightarrow$ b R a
  - **transitiva** a R b, b R c $\rightarrow$ a R c
- exemplos de relações
  - $\leq$: reflexiva, transitiva; não é simétrica $\Rightarrow$ não é de equivalência
  - **"pertencer ao mesmo país**" (S é o conjunto das cidades): reflexiva, simétrica, transitiva $\Rightarrow$ relação de equivalência
- classe de equivalência de **a $\in$ S**
  - subconjunto de **S** que contém os elementos relacionados com **a**
  - relação de equivalência induz uma partição de **S**: cada elemento pertence exactamente a uma classe

Problema da equivalência dinâmica

R: relação de equivalência

Problema: dados ***a*** e ***b***, determinar se ***a R b***

Solução: relação armazenada numa matriz bidimensional de booleanos

$\Rightarrow$ resposta em tempo constante

Dificuldade: relações definidas implicitamente

{a1, a2, a3, a4, a5} (25 pares)

a1 R a2, a3 R a4, a5 R a1, a4 R a2 $\Rightarrow$ todos relacionados

° pretende-se obter esta conclusão rapidamente

Observação: *a* R *b* $\leftarrow$ *a* e *b* pertencem à mesma classe de equivalência

Problema da equivalência dinâmica

Algoritmo abstrato

- Entrada: coleção de N conjuntos, cada um com um elemento
  - disjuntos ($S_i \cap S_j = \emptyset$)
  - só propriedade reflexiva
- Duas operações:
  - **Pesquisa**: devolve o nome do conjunto que contém um dado elemento
  - **União**: substitui dois conjuntos pela respectiva união (preserva a disjunção da coleção)
- Método: acrescentar o par *a R b* à relação
  - usa Pesquisa em *a* e em *b* para verificar se pertencem já à mesma classe de equivalência
    - se sim, o par é redundante
    - se não, aplica União às respetivas classes

Problema da equivalência dinâmica

Algoritmo abstrato

- algoritmo **dinâmico** (os conjuntos são alterados por União) e ***online*** (cada Pesquisa tem que ser respondida antes de o algoritmo continuar)
- valores dos elementos irrelevantes $\Rightarrow$ basta numerá-los com uma função de dispersão, p.ex
- nomes concretos dos conjuntos irrelevantes $\Rightarrow$ basta que a igualdade funcione

Privilegiando a Pesquisa

- **Pesquisa com tempo constante para o pior caso:**
  - implementação: vetor indexado pelos elementos indica nome da classe respetiva
  - Pesquisa é O(1)
  - União(a, b): se Pesquisa(a) = i e Pesquisa (b) = j, pode-se percorrer o vector mudando todos os i's para j $\Rightarrow$ O(N)
  - para N-1 Uniões (o máximo até ter tudo numa só classe) $\Rightarrow$ $O(N^2)$

- **Melhoramentos:**
  - colocar os elementos da mesma classe numa lista ligada para saltar diretamente de uns para os outros ao fazer a alteração do nome da classe (mas mantém o tempo do pior caso em $O(N^2)$)
  - registar o tamanho da classe de equivalência para alterar sempre a mais pequena; cada elemento é alterado no máximo logN vezes (cada fusão duplica a classe) $\Rightarrow$ com N-1 fusões e M Pesquisas O(N logN + M)

Privilegiando a União

- **Representar cada conjunto como uma árvore**
  - a raiz serve como nome do conjunto
  - inicialmente, cada conjunto contém um elemento
  - árvores podem não ser binárias: cada nó só tem um apontador para o pai
  - as árvores são armazenadas implicitamente num vetor
    - p[i] contém o número do pai do elemento i
    - se i for raiz p[i] = -1

- **União:** fusão de duas árvores
  - colocar a raiz de uma a apontar para a outra (O(1))
  - convenção: União(x, y) tem como raiz x

- **Pesquisa(x)** devolve a raiz da árvore que contém x
  - tempo proporcional à profundidade de x (N-1 no pior caso)

- Não é possível ter tempo constante simultaneamente para União e Pesquisa

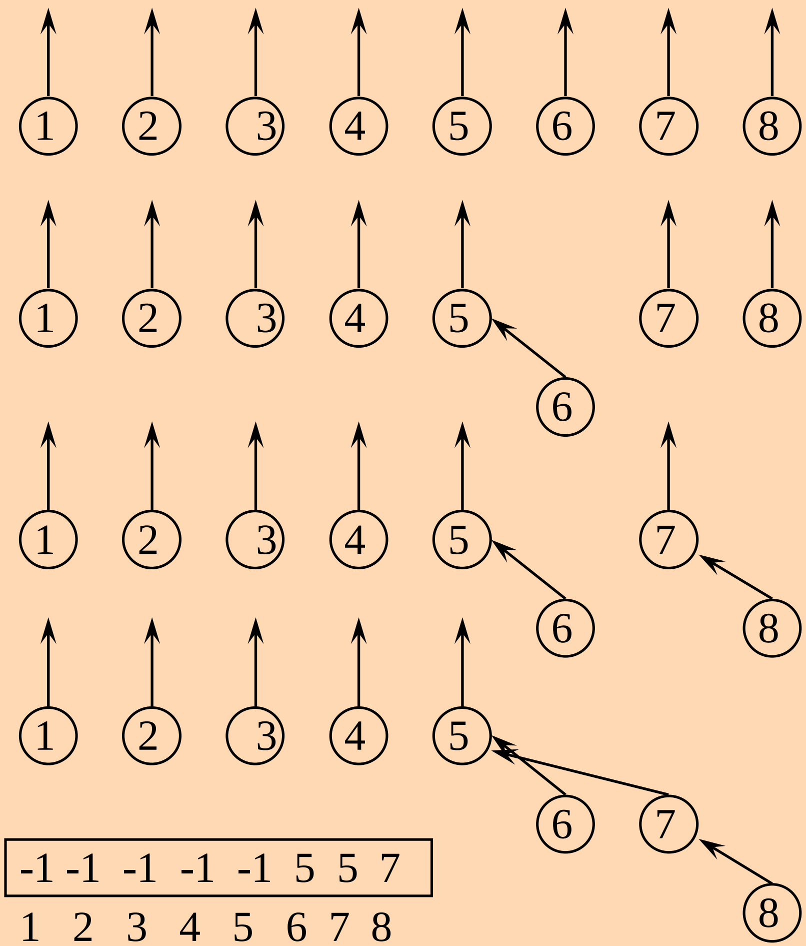
Exemplo

inicial

após União(5, 6)

após União(7, 8)

após União(5, 7)



representação implícita

-1	-1	-1	-1	-1	5	5	7
1	2	3	4	5	6	7	8

Implementação

```
class DisjointSets
{
      vector<int> s;
public:
      explicit DisjointSets(int numElements);
      int find(int x) const;
      void unionSets(int root1, int root2);
};
```

Construtor

```
DisjointSets::DisjointsSets (int numElements) :
      s{numElements,-1}
{ }
```

União (fraco)

```
void DisjointsSets::unionSets (int root1,
                               int root2)
{
      s[root2] = s[root1];
}
```

Pesquisa simples

```
int DisjointSets::find(int x) const
{
      if ( s[x] ==-1 )
          return x;
      else
          return find(s[x]);
}
```

Análise no caso médio *

- Como definir "médio" relativamente à operação União?

  Depende do modelo escolhido: (ver exemplo anterior, última situação)

  – Considerando como equiprováveis as Uniões entre diferentes árvores
    - restam 5 árvores, há 5*4 = 20 resultados equiprováveis da próxima União
    - 2/5 de hipóteses de envolver a árvore maior

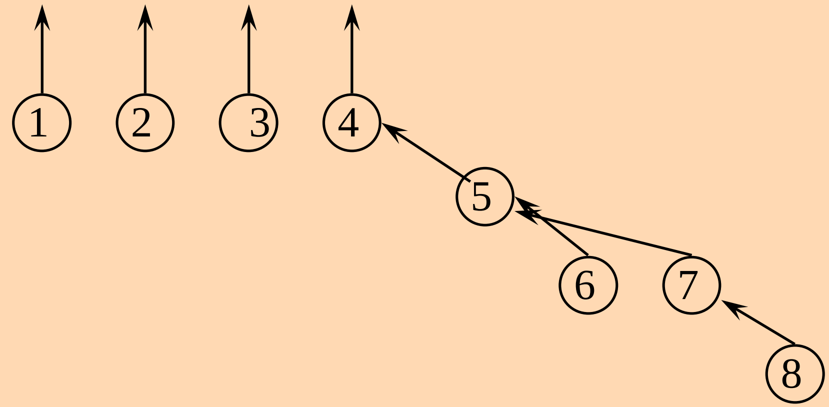
  – Outro modelo: considerando como equiprováveis as Uniões entre dois quaisquer elementos de árvores diferentes
    - há 6 maneiras de fundir dois elementos de {1, 2, 3, 4} (não contando simetrias) e 16 maneiras de fundir um elemento de {1, 2, 3, 4} e um de {5, 6, 7, 8}
    - probabilidade de a árvore maior estar envolvida: 16/22

- O tempo médio depende do modelo: O(M), O(MlogN), O(MN) (o mais realista)

  – tempo quadrático é mau, mas evitável

União melhorada

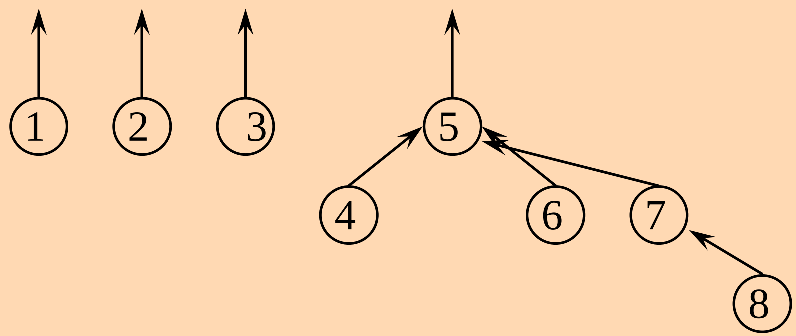
após União(4, 5)
(altura 3)



União-por-Tamanho

colocar a árvore menor como sub-árvore da maior (arbitrar em caso de empate)

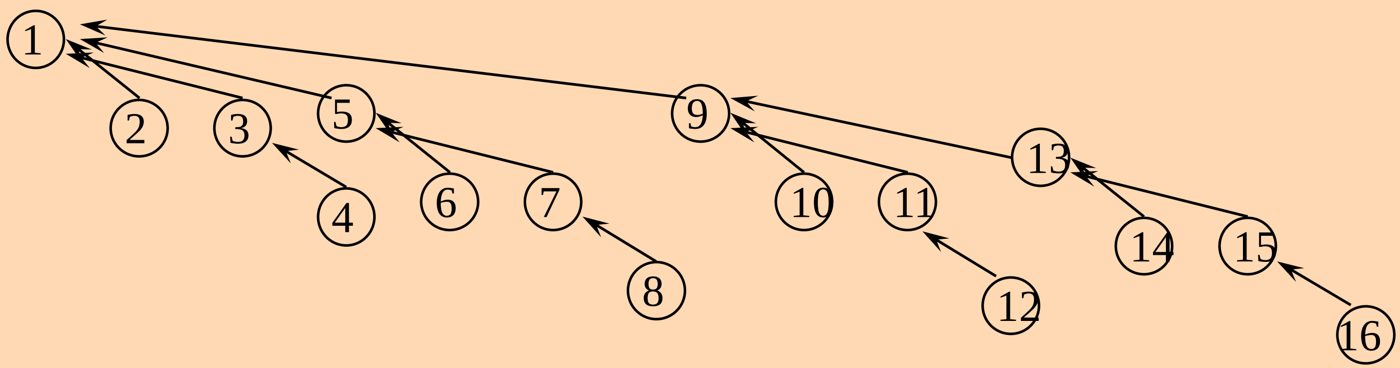
após União(4, 5)
(altura 2)



União-por-Tamanho

- Profundidade de cada nó - nunca superior a logN
  - um nó começa por ter profundidade 0
  - cada aumento de profundidade resulta de uma união que produz uma árvore pelo menos com o dobro do tamanho
  - logo, há no máximo logN aumentos de profundidade
  - Pesquisa é O(logN),   M operações é O(M logN)

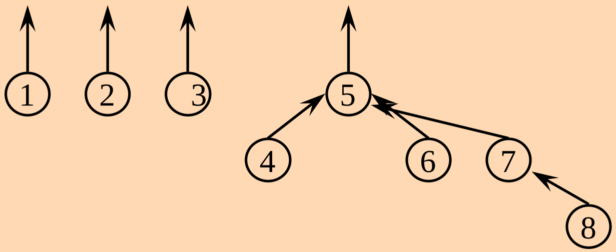
Pior caso para n=16 (União entre árvores de igual tamanho)



- Registar a dimensão de cada árvore (na raiz respetiva e com sinal negativo)
  - o resultado de uma União tem dimensão igual à soma das duas anteriores

União-por-Altura

- Em vez da dimensão, regista-se informação sobre altura (valor=*altura-1*)
  - coloca-se a árvore mais baixa como subárvore da mais alta
  - altura só se altera quando as árvores a fundir têm a mesma altura



União-por-Tamanho

-1	-1	-1	5	-5	5	5	7
1	2	3	4	5	6	7	8

União-por-Altura

-1	-1	-1	5	-3	5	5	7
1	2	3	4	5	6	7	8

União (melhorado)

```
void DisjSets::unionSets(int root1, int root2) {
      if ( s[root2] < s[root1] )
         s[root1] = root2;
      else {
         if ( s[root1] == s[root2] )
            --s[root1];
         s[root2] = root1;
      }
}
```

Compressão

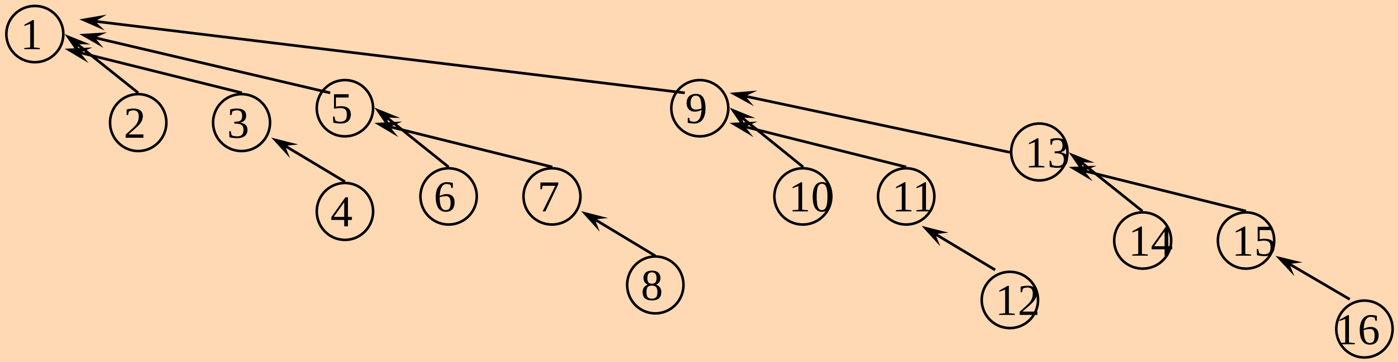
- Algoritmo descrito é linear na maior parte das situações, mas no pior caso é O(M logN) *
  - já não é fácil melhorar União: atuar em Pesquisa

* suponha: conjuntos estão numa fila, retiram-se 2 elementos da fila, faz-se a união que se coloca na fila

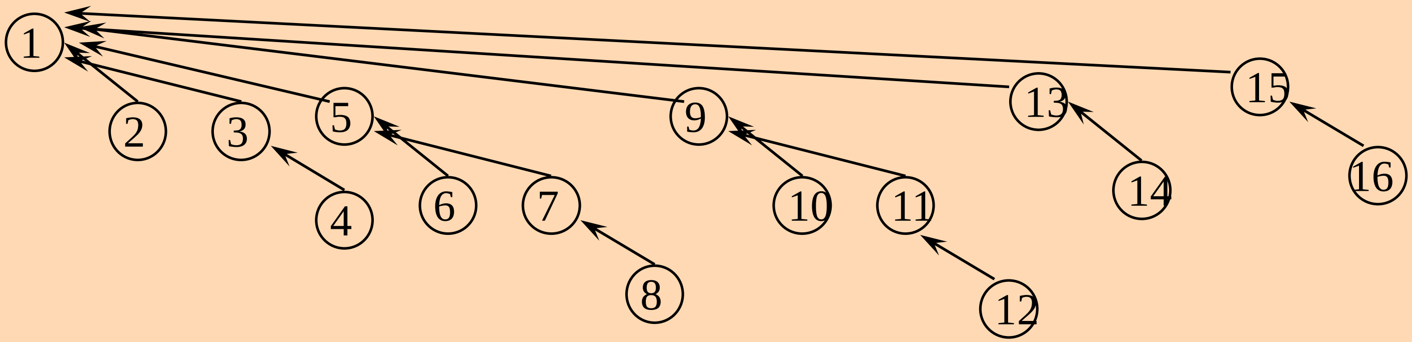
Compressão do caminho

ao executar Pesquisa(x), todos os nós no caminho de x até à raiz ficam com a raiz como pai

Compressão



Compressão após Pesquisa_e_Compressão(15)



Pesquisa modificada

Pesquisa com compressão

```
int DisjSets::find(int x) {     // não const!
        if ( s[x] <= 0 )
            return x;
        else
            return s[x] = find(s[x]);
}
```

- profundidade de vários nós diminui
- com União arbitrária, a compressão garante M operações, no pior caso, em tempo O(M logN)
- a compressão é compatível com União-por-Tamanho
- não é completamente compatível com União-por-Altura: não é fácil computar eficientemente as alturas modificadas pela compressão
- não se modificam os valores: passam a ser entendidos como estimativas da altura, designados por nível
- ambos os métodos de União garantem M operações em tempo linear: não é evidente que a compressão traga vantagem em tempo médio: melhora o tempo no pior caso; a análise é complexa, apesar da simplicidade do algoritmo

Aplicação *

- Rede de computadores com uma lista de ligações bidireccionais; cada ligação permite a transferência de ficheiros de um computador para o outro
  - é possível enviar um ficheiro de um qualquer nó da rede para qualquer outro?
  - problema deve ser resolvido apresentando as ligações uma de cada vez
- O algoritmo começa por pôr cada computador em seu conjunto
  - o invariante é que dois computadores podem transferir ficheiros se estiverem no mesmo conjunto
  - esta capacidade determina uma relação de equivalência
  - à medida que se lêem as ligações vão-se fundindo os conjuntos
- O grafo da capacidade de transferência é conexo se no fim houver um único conjunto
  - com M ligações e N computadores o espaço requerido é O(N)
  - com União-por-Tamanho e compressão de caminho obtém-se um tempo no pior caso praticamente linear