1.

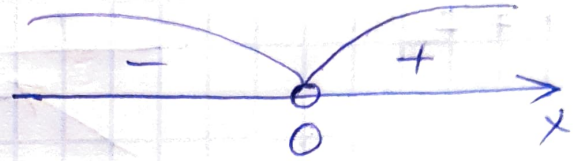
1) $f(x) = x + e^{-x}$

$f'(x) = 1 + e^{-x} \cdot (-1) = 1 - e^{-x}$

$1 - e^{-x} = 0$

$e^{-x} = 1$

$x = 0$



$f'(x) < 0: x \in (-\infty; 0)$

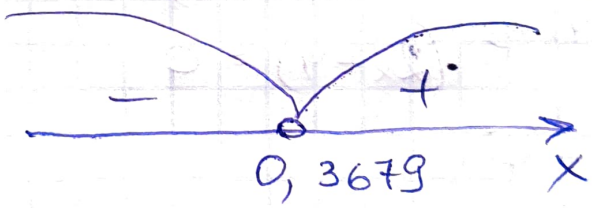
$f'(x) > 0: x \in (0; +\infty)$

2) $f(x) = x \ln x$

$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$\ln x = -1$

$x = \frac{1}{e}$

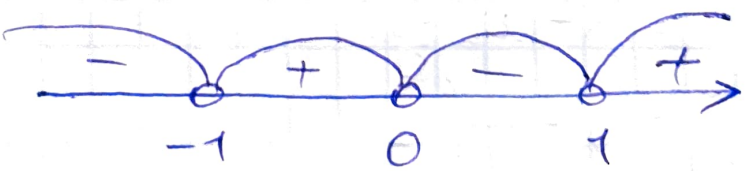


$f'(x) < 0: x \in (-\infty; 0{,}3679)$

$f'(x) > 0: x \in (0{,}3679; +\infty)$

3) $y = \frac{1}{1-x^2}$

$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$



$x = 0$

$x \neq 1$

$x \neq -1$

$f'(x) < 0: x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$

$f'(x) > 0: x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$

2.

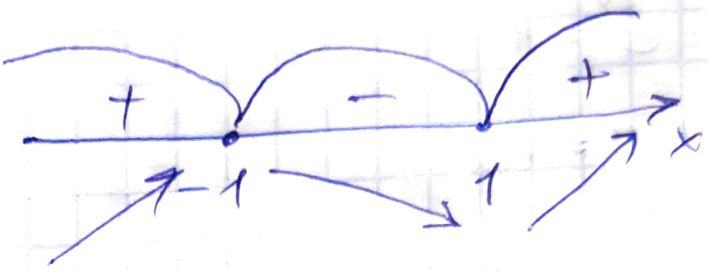
1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$



$f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ – максимум

$f(1) = -1$ – минимум

2) $y = e^{x^2 - 4x + 5}$

$y' = e^{x^2 - 4x + 5} \cdot (2x - 4)$

$e^{x^2 - 4x + 5} \cdot (2x - 4) = 0$

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ e^{x^2 - 4x + 5} = 0 \end{cases}$$

$x = 2$

$f(2) = e$ – минимум

3) $y = x - \operatorname{arctg} x$

$y' = 1 - \frac{1}{1 + x^2}$

$\frac{1}{1 + x^2} = 1$

$x^2 = 0$

$f(0) = 0$ - минимум

3.

1) $f(x) = e^{-x^2}$

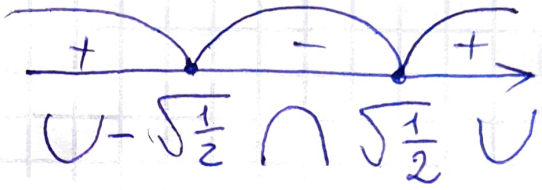
$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$

$f''(x) = (e^{-x^2})' \cdot (-2x) + e^{-x^2} \cdot (-2) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$

$2e^{x^2}(2x^2 - 1) = 0$

$2x^2 - 1 = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$



$\sqrt{\frac{1}{2}}$ и $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ - точки перегиба

и. выпуклости: $(-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{2}})$; и. вогнутости: $(-\infty; -\sqrt{\frac{1}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1}{2}}; +\infty)$

2) $y = \cos x$

$y' = -\sin x$

$y'' = -\cos x$

$-\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ - точка перегиба; и. вогнутости $(\frac{\pi}{2} + \pi k; +\infty)$

и. выпуклости: $(-\infty; \frac{\pi}{2} + \pi k)$

3) $y = x^5 - 10x^2 + 7x$

$y' = 5x^4 - 20x + 7$

$y'' = 20x^3 - 20$

$x = \pm 1$

интервал выпуклости $(-\infty; -1)$

инт. вогнутости $(-1; 1) \cup (1; +\infty)$

4)

1) $y = \frac{3x}{x+2}$

ОДЗ: $x = -2$ - вертикальная ас.

$y = kx + b$

$k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3}{x+2} = 0$

$b = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x}{x+2} = 3$ - горизонтальная ас.

$y = 3$

2) $y = e^{-\frac{1}{x}}$

ОДЗ: $x = 0$ - вертикальная ас.

$k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$

$b = \lim\limits_{x \to \infty} e^{-\frac{1}{x}} - 1 = -1$ - вертикальная ас.

$y = -1$

5)

1) $y = \ln(1-x^2)$

$1-x^2 > 0$

$-x^2 > -1$

$x^2 < 1$

1) ОДЗ: $x < \pm 1$

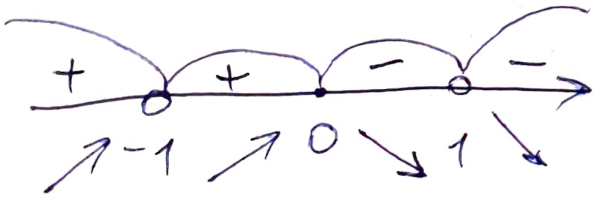
2) $y(-x) = y(x)$ - чётная

3) $y' = \frac{1}{(1-x^2)} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{1-x^2}$

Крит. точки

$-\frac{2x}{1-x^2} = 0$

$x = 0$ - т. максимума



$y(0) = \ln(1) = 0$

y возр. $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$

y убыв. $(0; 1) \cup (1; +\infty)$

4) $y'' = \frac{-2 \cdot (1-x^2) - (-2x \cdot (-2x))}{(1-x^2)^2} = \frac{-2 + 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2}$

точки перегиба (выпуклость и вогнутость)

$\frac{-2 + 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} = 0$

вогнутость: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

выпуклость: $(-1; 1)$

5) а симптоты

$x = \pm 1$ – верт. асимптоты

наклон.

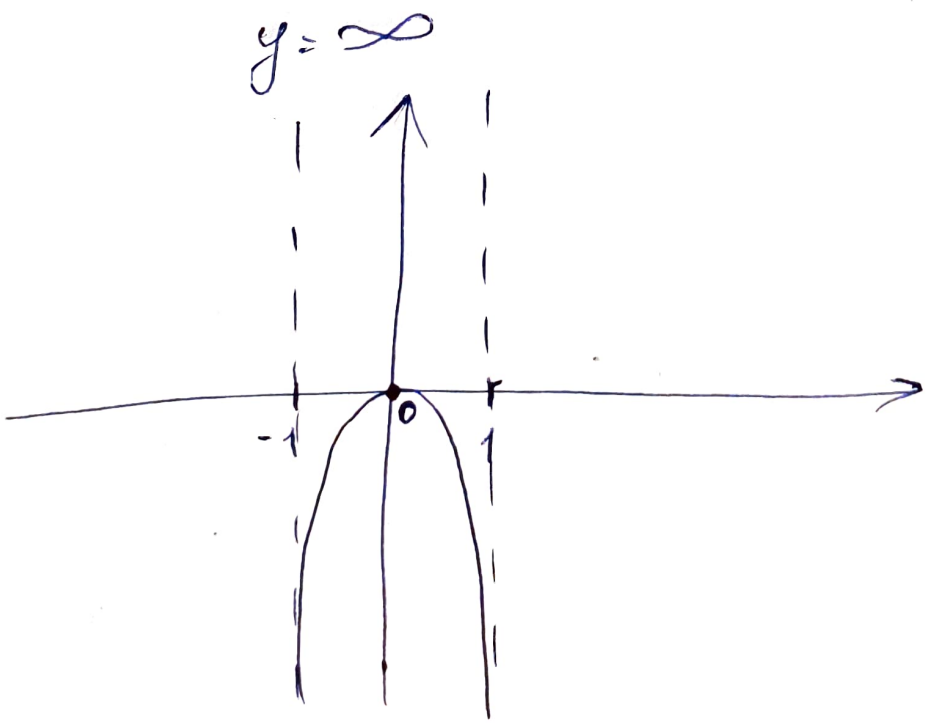
$y = kx + b$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1-x^2)}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \ln(1 - x^2) = \infty$$

Наклонные асимптоты отсутствуют

горизонт. асимптоты отсутствуют



2) $y = \frac{x^2}{1-x^2}$

$1 - x^2 \neq 0$

$x^2 \neq 1$

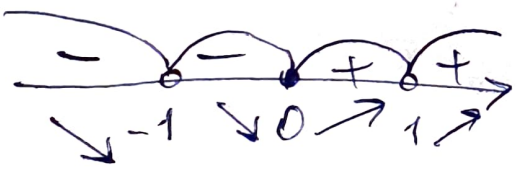
1) ОДЗ: $x \neq \pm 1$

2) $y(-x) = y(x)$ - четная

3) $y' = \frac{2x \cdot (1-x^2) - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

$\frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0$

$x = 0$ - т. максимума



$y(0) = 0$

у возр. $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.

у убыв. $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$

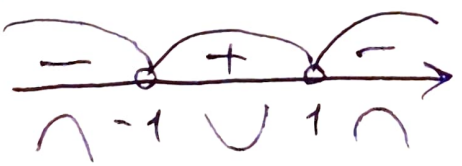
4) $y'' = \frac{2 \cdot (1-x^2)^2 - 2x \cdot 2 \cdot (1-x^2) \cdot (-2x)}{((1-x^2)^2)^2} =$

$= \frac{2 \cdot (1 - 2x^2 + x^4) + 8x^2 (1-x^2)}{(1-x^2)^4} = \frac{2 - 4x^2 + 2x^4 + 8x^2 - 8x^4}{(1-x^2)^4} =$

$4x^2 - 6x^4$

$= \frac{2 - 4x^2 - 6x^4}{(1-x^2)^4}$

$\frac{2 - 4x^2 - 6x^4}{(1-x^2)^4} = 0$



выпук. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

вогнутость $(-1; 1)$

5) $x = \pm 1$ – верт. асимп.

наклон.

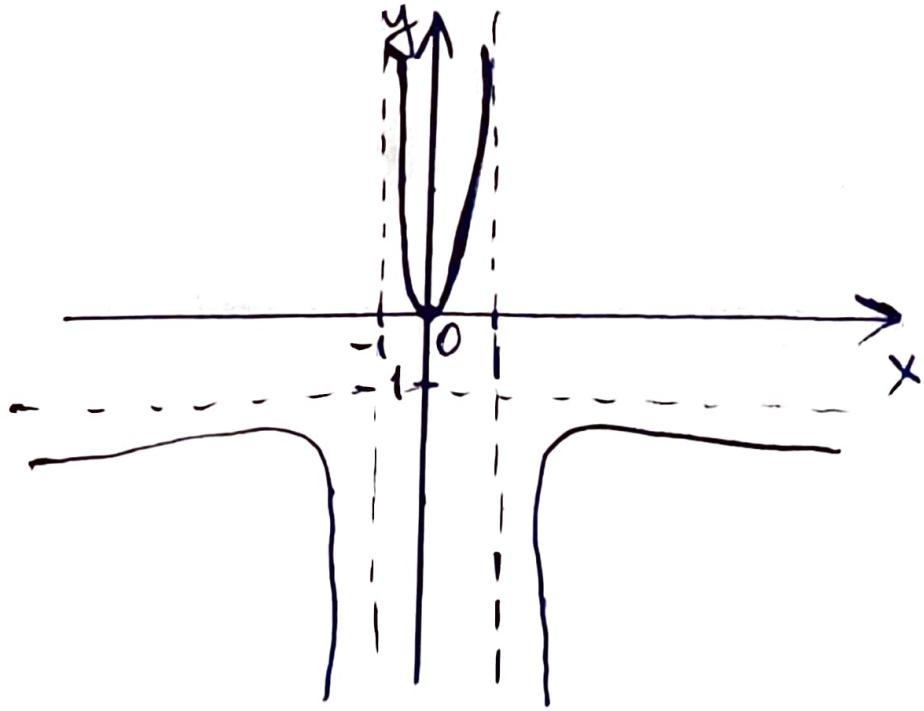
$y = kx + b$

горизонт. b

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{(1-x^2)}{x}} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$y = -1$



3) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

1) ОДЗ: $(-\infty; +\infty)$

2) $y(-x) \neq y(x)$ – ни чет. ни нечет

3) $y' = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1)$

$2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = 0$

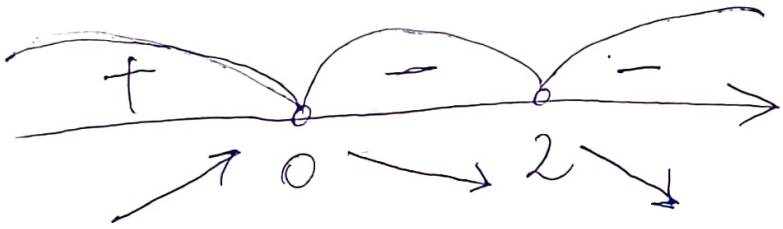
$x \cdot e^{-x}(2 - x) = 0$

$x = 2$

$x = 0$

$y(0) = 0$ – min

$y(2) = 4e^{-2}$ – max



у возр. $(-\infty; 0)$

у убыв $(0; 2) \cup (2; +\infty)$

4) $y'' = 2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x}$

$2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} = 0$

$2 \cdot e^{-x}(1 - x) = 0$

$x = 1$

вып. $(1; 2) \cup (2; +\infty)$

вог. $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$