1. Найти пределы

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(x+3)-\ln x] = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{x+3}{x} =$

$= \ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{x}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)=\ln 1=0$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{7^x-1}{3^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln 7}{x\ln 3}=\log_3 7$

4) $\lim\limits_{a\to0}\frac{(x+a)^3-x^3}{a}=\lim\limits_{a\to0}\frac{x^3+3x^2a+3xa^2-a^3-x^3}{a}=$

$=\lim\limits_{a\to0}\frac{a(3x^2+3xa-a^2)}{a}=3x^2$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{x^2}{5x-3}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{2x\,tg\,2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{(4x)^2}{2}}{2x\cdot 2x}=\frac{16x^2\cdot\frac{1}{2}}{4x^2}=2$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\left(\frac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\frac{2}{x}=2$

8) $\lim\limits_{x\to0}(1+tg\,x)^{ctg\,x}=\lim\limits_{x\to0}tg\,x\cdot ctg\,x+1=2$

9) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} =$

10) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x\sin x-1}{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin x}{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\sqrt{1+x\sin x}+1} = \frac{1}{2}$

2. Установить характер разрыва функции в точке x_0

1) $f(x) = \frac{x^2-16}{x+4}$, $x_0 = -4$

$\frac{x^2-16}{x+4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x+4} = x-4$

$\lim\limits_{x\to -4-0} x-4 = -8$

$\lim\limits_{x\to -4+0} x-4 = -8$

Точка разрыва I рода, устранимая

2) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0\pm 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

I рода, устранимая точка разрыва

3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2}{x-1}$; $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1-0} \operatorname{arctg}\frac{2}{x-1} = \operatorname{arctg} -\infty = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 1+0} \operatorname{arctg}\frac{2}{x-1} = \operatorname{arctg} +\infty = \frac{\pi}{2}$$

I рода, типа "скачок"

2) $f(x) = \frac{1}{2^{x-3}-1}$; $x_0 = 3$

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{1}{2^{x-3}-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{1}{2^{x-3}-1} = \infty$$

II рода