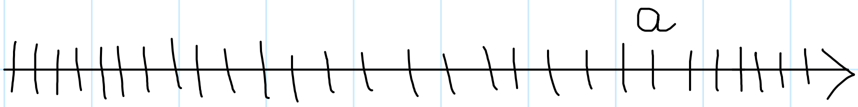
ДЗ №2

1) Сформулировать на языке "$\varepsilon - N$" определение того, что число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$ ($a \neq \lim_{n\to\infty} x_n$), и дать геометрическую интерпретацию этого определения.

$$a \neq \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \xi > 0\ \exists N(\xi), \exists n > N: |x_n - a| \geq \xi$$



2) Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} = 0$.

Так как факториал возможен только от натурального числа и знаменатель растёт, значит последовательность является бесконечно малой. А предел бесконечно малой последовательности по свойству б.м последовательностей равен 0.

3) Пусть $x_n = n^{(-1)^n}$. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$: а) неограниченная; б) не является бесконечно большой.

а) $\lim_{n\to\infty} n^{(-1)^n}$

Так как предел последовательности не существует (в случае, если n не чётное, предел будет стремиться в 0, а в случае, если чётное - в +∞) значит последовательность не ограничена.

б) В случае, если n не чётное:

$$x_1 = \frac{1}{1} = 1$$
$$x_3 = 3^{(-1)^3} = \frac{1}{3} \qquad n < N$$
$$x_5 = \frac{1}{5}$$

В случае, если n чётное:

$$x_2 = 2$$
$$x_4 = 4 \qquad n > N$$
$$x_6 = 6$$

Так как в случае, если n не чётное, n < N последовательность не может быть бесконечно большой, т.к это противоречит свойству бесконечно большой последовательности.

4) Доказать, что последовательность $\{\sin n\}$ расходится.

Так как sin любого числа лежит в диапазоне [1;-1], то у последовательности нет предела, а это значит что последовательность расходится.

5) Найти пределы:

5) Найти пределы:

а) $\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}$; б) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$; в) $\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$.

а) $$\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1}=0$$

б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{\sqrt{n}}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\sqrt{\frac{1}{n^3}}}=\frac{1}{0}=\infty$$

в) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{1-\frac{2}{3^n}}=5$$

6) Найти предел $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+n}{n}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+n)\cdot(1-n)}{n(1-n)}}+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1-n^2}{n-n^2}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{\frac{1}{n^2}-1}{\frac{1}{n}-1}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

7) Вычислить $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n}{n^2}}\cos n}{1+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}\cos n}{1+\frac{1}{n}}=\frac{0}{1}=0$$