Eksamensnoter

Ricardt Riis

4. marts 2023

Meningen med materialet er som disposition til mundtlig eksamen

Indhold

1 Funktioner **2**

2 Funktioner **4**

3 Funktioner **7**

4 Differential- og integralregning **11**

5 Differential- og integralregning **13**

6 Differential- og integralregning **16**

7 Differensligninger **17**

8 Sandsynlighedsregning **18**

9 Statistik **21**

9.1 Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for hypotesetest 21

10 Transformationer **22**

11 Vektorer **22**

12 Vektorer **24**

13 Annuiteter **24**

Introduktion

I det følgende vil overskriften angive hvilket spørgsmål der svares på. Da det er bedst at svare på begge spørgsmål ”samtidigt”eller i det mindste have en nogenlunde flydende overgang mellem de to spørgsmål, virker det gavnligst at beskrive spørgsmålene, og dernæst under *EN* overskrift besvare spørgsmålene. Bemærk desuden, at jeg kun har ringe forståelse af hvad Sætning og Definition betyder i streng matematisk konstekst.

1 Funktioner

1. Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for vektorfunktioner.
2. Brug vektorfunktioner til at bestemme de afledte af de trigonometriske funktioner.

Her kan man komme ind på følgende:

- Funktioner tager et input, og laver et output.
- For vektorfunktioner gælder at deres signatur er

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2.$$

- Vektorfunktioner skrives

$$\vec{v}(t).$$

- t kaldes normalt `parameterværdi`.
- Præsenteres en vektorfunktion grafisk, benyttes en banekurve.
Bemærk: En banekurve viser ikke alt ved en vektorfunktion. Fx. er banekurverne for $\begin{pmatrix} t^3 \\ t^3 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ de samme.
- Den afledede af en vektorfunktion kan bestemmes således

$$\vec{v}\,'(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x(t)' \\ y(t)' \end{pmatrix}$$

I det følgende vil afledte funktioner skrives således

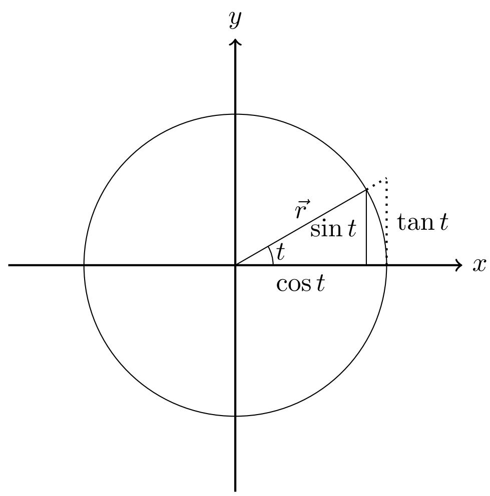
$$\dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}'$$

- Den afledede beskriver retningsvektoren for tangenten til en bestemt parameterværdi.
- Den afledede kaldes også hastighedsvektoren
- Dermed kan farten bestemmes ved længden af hastighedsvektoren

$$\text{fart}(\vec{v}) = \left|\dot{\vec{v}}\right|$$

- Se mere viden om vektorer i afsnit om vektorer.

Definition 1.1 (Cosinus, sinus og tangens): Cosinus, cos, sinus, sin, og tangens, tan, defineres ud fra enhedscirklen, der har radius 1.



Lemma 1.1 (Idiotformlen): $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Definition 1.2:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Sætning 1.1 (Afledte cosinus og sinus):

$$\cos' = -\sin$$
$$\sin' = \cos$$

Bevis: Det ønskes at finde $\dot{\vec{r}}(t)$, da vi i så fald kan bevise sætning 1.1.

Det vides om $\vec{r}$ at den bevæger sig langs enhedscirklens periferi. Dvs. at for hver omgang $\vec{r}$ bevæger sig omkring periferien, har punktet som stedvektoren $\vec{r}$ beskriver bevæget sig 2π. Da perioden for $\vec{r}$ også er 2π ved vi om farten af $\vec{r}$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = 1.$$

Bemærk, at længden af $\vec{r}$ også er 1 (jf. lemma 1.1).
Det vides om tangenter til punkter på en cirkel står ret på stedvektoren til punktet. Dermed gælder

$$\dot{\vec{r}} = \hat{\vec{r}}.$$

Derfor

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix} = \widehat{\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}} = \hat{\vec{r}}$$
$$\begin{pmatrix}\cos'\\ \sin'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\\ \cos\end{pmatrix}.$$

Da lighedstegnet gælder koordinatvis, er beviset gennemført.

Lemma 1.2 (Tangens): $\tan = \frac{\sin}{\cos}$

Sætning 1.2 (Afledede tangens): $\tan' = \tan^2 + 1$

Bevis:

$$\begin{aligned}
\tan' &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' \\
&= \left(\sin \cdot \frac{1}{\cos}\right)' \\
&= \cos \cdot \frac{1}{\cos} + \sin \cdot \left(\frac{1}{\cos}\right)' \\
&= 1 + \sin \cdot \left(-\frac{1}{\cos^2}\right) \cdot (-\sin) \\
&= 1 + \frac{\sin^2}{\cos^2} \\
&= \tan^2 + 1
\end{aligned}$$

2 Funktioner

1. Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for plus- og gangefølger.
2. Bevis at to gangefølger altid giver anledning til en potenssammenhæng.

Eksempel (Hvordan ville jeg gøre?):
Jeg ville forklare stoffet i følgende rækkefølge.

- Introducer hvad plusfølger og gangefølger er (definition 2.1 og 2.2). Gør herunder brug af figur 1
- Forklar sætning 2.4, evt. ved brug af figur 2
- Hvis der er mere tid til overs, bevis logaritmeregnereglerne i rækkefølgen sætning 2.3, 2.2 og 2.1.

Sætning 2.1 (Logaritme laver gange om til plus):

$$\log_A B \cdot C = \log_A B + \log_A C$$

Bevis:

$$\log_A B \cdot C = \log_A B + \log_A C \iff$$

Der opløftes i A for at potensregneregler kan benyttes

$$A^{\log_A B \cdot C} = A^{\log_A B + \log_A C}$$

Føromtalte potensregneregel benyttes

$$= A^{\log_A B} \cdot A^{\log_A C} \iff$$

$A^{\log_A}$ går ud

$$B \cdot C = B \cdot C$$

Sætning 2.2 (Logaritmeregneregel): $\log_A B^C = C \cdot \log_A B$

Bevis: Opløftning er det samme som gentagen gange

$$\log_A B^C = \log_A \underbrace{B \cdot B \cdots B}_{C \text{ gange}}$$

Jævnfør sætning 2.1 så kan man skrive

$$= \underbrace{\log_A B + \log_A B + \cdots + \log_A B}_{C \text{ gange}}$$

Da der lægges sammen C gange, og gange er gentaget plus, så gælder

$$= C \cdot \log_A B$$

Sætning 2.3 (Logaritmeregneregel): $A^{\log_B C} = C^{\log_B A}$.

Bevis: Reglen opskrives

$$A^{\log_B C} = C^{\log_B A} \iff$$

Vi gør på en smart måde ingenting

$$B^{\log_B A^{\log_B C}} = B^{\log_B C^{\log_B A}} \iff$$

Ifølge sætning 2.2 så kan vi

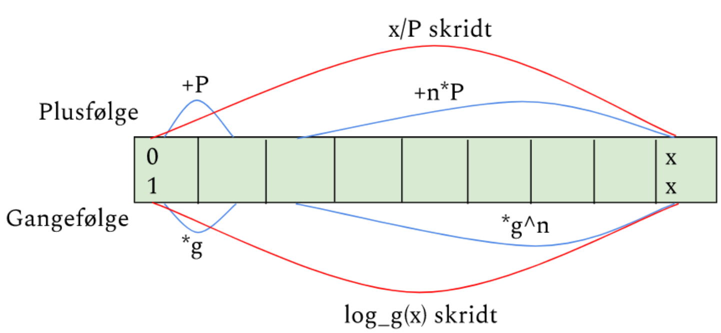
$$B^{\log_B C \cdot \log_B A} = B^{\log_B A \cdot \log_B C}$$

Da der har været ensbetydende pile er beviset fuldført.

Definition 2.1 (Plusfølge): En plusfølge lægger altid et bestemt tal til for hvert skridt i følgen.

Definition 2.2 (Gangefølge): En gangefølge gange altid et bestemt tal for hvert skridt i følgen.

Figur 1: Forklaring af definitionerne



Sætning 2.4 (Gangefølge - Gangefølge): To gangefølger,

$$c \cdot \mathrm{P}x^n \text{ og } d \cdot \mathrm{P}y^n,$$

giver altid anledning til en potenssammenhæng

$$y = \frac{d}{c^{\log_{\mathrm{P}x} \mathrm{P}y}} \cdot x^{\log_{\mathrm{P}x} \mathrm{P}y}.$$

Bemærk at $c^{\log_{\mathrm{P}x} \mathrm{P}y}$ *er 1, hvis x-følgen starter ved 1.*

y ønskes at kunne blive fundet ud fra vilkårlig x. Til det formål skal vi kende n.

$$x = c \cdot \mathrm{P}x^n$$

Der divideres med c, log rho x tages

$$n = \log_{\mathrm{P}x} \frac{x}{c}$$

Denne n kan indsættes i udtrykket for y_n, så enhver y kan findes.

$$y = d \cdot \mathrm{P}y^{\log_{\mathrm{P}x} \frac{x}{c}}$$

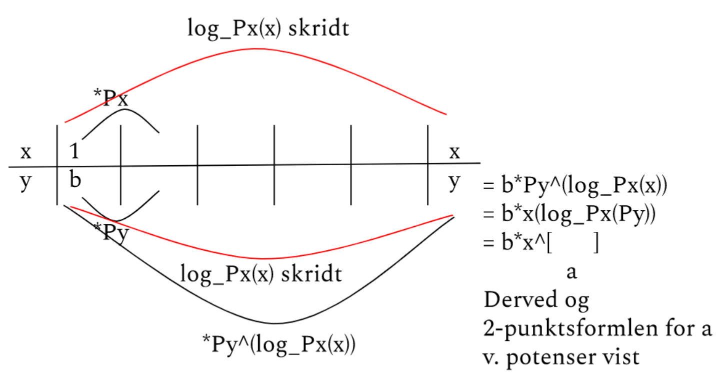
Per sætning 2.2

$$= d \cdot \left(\frac{x}{c}\right)^{\log_{\mathrm{P}x} \mathrm{P}y}$$

Potensregneregel

$$= \frac{d}{c^{\log_{\mathrm{P}x} \mathrm{P}y}} \cdot x^{\log_{\mathrm{P}x} \mathrm{P}y}$$

Figur 2: En grafisk fremstilling af ovenstående



3 Funktioner

1. Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for funktioner af to variable.

2. Udled formlen for hældningen af regressionslinjen ved mindste kvadraters metode.

Eksempel (Hvordan ville jeg gøre?): Jeg ville

1. Først tale om funktioner (tegne maskinen), og være opmærksom på to input.
2. Tale om definitionen på partiel afledning.
3. Tale om gradienten og stationære punkter.
4. Påbegynde beviset for sætning 3.3, og stoppe ved indsigten om

$$\overline{y} = a_{reg} \cdot \overline{x} + b_{reg}.$$

5. Bevise sætning 3.1 og 3.2.
6. Færdiggøre beviset for sætning 3.3.

Derudover ville jeg henlede opmærksomheden på at man også godt kunne bevise sætning 3.3 kun ved brug af funktioner af to variable.

Definition 3.1 (Partiel afledning): En funktion af to variable, $f(x, y)$ kan afledes partielt

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Man kan gøre det samme med y.

Eksempel (Partiel afledning): Givet funktionen

$$f(x, y) = x^2 + y^3 + xy,$$

så vil den partielt afledede med hensyn til x være

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} x^2 + y^3 + xy = 2x + y.$$

Definition 3.2 (Gradient): Gradienten til en funktion af to variable, noteret ∇ (nabla), defineres ved

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Definition 3.3 (Stationære punkter): Et stationært punkt til en funktion $f(x, y)$ defineres ved et punkt (x_0, y_0) hvor x_0 og y_0 opfylder

$$\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}.$$

Sætning 3.1 (Proportionalitetsregression): Den bedste hældning for en ret linje ved brug af mindste kvadraters metode gennem (0, 0) er givet ved

$$a_{reg} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

hvor n er så mange punkter der laves regression på, og x_i er x-koordinaten til det i-te punkt, og y_i tilsvarende er y-koordinaten til det i-te punkt.

Bevis: Først opskrives kvadratsummen for en given hældning

$$KS(a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot a - y_i)^2.$$

Nu ønskes den optimale hældning a_{reg} fundet, således at kvadratsummen bliver mindst. Der differentieres og sættes lig nul.

$$\begin{aligned} KS'(a_{reg}) &= 0 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot a_{reg} - y_i)^2 \right)' \end{aligned}$$

Grundet ledvis differentiation

$$= \sum_{i=1}^{n} \left((x_i \cdot a_{reg} - y_i)^2 \right)'$$

Kædereglen

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n} \left(2(x_i \cdot a_{reg} - y_i) \cdot x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(2(x_i^2 \cdot a_{reg} - x_i \cdot y_i) \right) \end{aligned}$$

Distributiv lov

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 \cdot a_{reg} - x_i \cdot y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 \cdot a_{reg} - x_i \cdot y_i) \end{aligned}$$

Kommutativ lov

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot a_{reg} - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Distributiv lov

$$= a_{reg} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

a_{reg} isoleres

$$a_{reg} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Sætning 3.2 (Hældning for ret linje gennem givet punkt): Den bedste hældning for en ret linje gennem (x_0, y_0) er givet ved

$$a_{reg} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)(y_i - y_0)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2}$$

hvor n er så mange punkter der laves regression på, og x_i er x-koordinaten til det i-te punkt, og y_i tilsvarende er y-koordinaten til det i-te punkt.

Bevis: Koordinatsystemet forskydes således at punktet (x_0, y_0) kommer til at ligge i origo. Nu kan sætning 3.1 benyttes. For at forskyde koordinatsystemet trækkes x_0 fra x-koordinaten for hvert punkt og y_0 fra y-koordinaten for hvert punkt.

Sætning 3.3 (Lineær regression): Givet en liste af punkter (x, y), så kan man finde den bedste rette linje ved mindste kvadraters metode med følgende hældning a_{reg} og begyndelsesværdi b_{reg}.

$$a_{reg} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{y})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

$$b_{reg} = \overline{y} - a_{reg} \cdot \overline{x}.$$

hvor n er så mange punkter der laves regression på, og x_i er x-koordinaten til det i-te punkt, og y_i tilsvarende er y-koordinaten til det i-te punkt, $\overline{x}$ er gennemsnits x-koordinaten og $\overline{y}$ er gennemsnits y-koordinaten.

Bevis: Kvadratsummen for den lineære regression opskrives

$$KS(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot a + b - y_i)^2.$$

Da det ønskes at finde minimum for funktionen, og et minimum er et stationært punkt, og der kun er et stationært punkt for funktionen, som også er et minimum, kan definition 3.3 bruges.

If. definition 3.2

$$\frac{\partial}{\partial a}KS(a_{reg}, b_{reg}) = 0 \wedge \frac{\partial}{\partial b}KS(a_{reg}, b_{reg}) = 0.$$

Ligningssystemet løses, først afledes kvadratsumsfunktion med hensyn til begyndelsesværdien.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial b}KS(a_{reg}, b_{reg}) \\
&= \frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot a_{reg} + b_{reg} - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (x_i \cdot a_{reg} + b_{reg} - y_i) \\
&= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot a_{reg} + b_{reg} - y_i) \\
&= n \cdot b_{reg} + \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot a_{reg} - y_i) \\
&= b_{reg} + \sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{n} \cdot a_{reg} - \frac{y_i}{n}) \\
&= b_{reg} + (\overline{x} \cdot a_{reg} - \overline{y})
\end{aligned}$$

Nu kan enten a eller b isoleres, og der kan differentieres partielt med hensyn til den anden variabel, ligningssystemet kan løses. I stedet indses følgende

$$\overline{y} = a_{reg} \cdot \overline{x} + b_{reg}$$

Dette er meget centralt, for det fortæller, at punktet $\overline{x}$ og $\overline{y}$ ligger på regressionslinjen. Dermed kan hældningen findes ved sætning 3.2

$$a_{reg} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{y})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

Begyndelsesværdien er triviel at finde

$$b_{reg} = \overline{y} - a_{reg} \cdot \overline{x}.$$

4 Differential- og integralregning

1. Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for diskret analyse.
2. Bevis mindst en regneregel for diskret differentiation.

- I diskret analyse benyttes talfølger; i stedet for tal funktioner.
- For at gøre notationen af uendeligt lange talfølger nemmere, kan man benytte sig af funktionsnotation

$$f(x), x \in \mathbb{N}.$$

Eksempel 4.1 (Indeksering):
Hvis f defineres ved talfølgen $1, 3, 5, 4, 9$, så vil

$$f(3) = 5,$$

og $f(2.5)$ være udefineret.

- Der indføres desuden en anden potensfunktion

$$x^{\overline{n}} = \frac{x!}{(x-n)!}$$

Eksempel 4.2 (x i n-streg): $7^{\overline{4}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4.$

- Det kaldes at differentiere når man trækker nabo-elementer fra hinanden

$$\Delta f : [2, 2, -1, 5].$$

- Det kan skrives med symboler

Definition 4.1 (Differentiation): $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$

- Man kan desuden definere integration

Definition 4.2 (Integration): Givet en talfølge defineret ved alle heltal i intervallet $[a; b]$, $a, b \in \mathbb{Z}$, så er alle stamfølger givet ved

$$F(x_0) = \sum_{a}^{x_0} f(x) + k,$$

hvor $k \in \mathbb{R}$.

- Det følger let at følgende gælder

Sætning 4.1 (Integralregningens hovedsætning):

$$\sum_{a}^{b} f(x) = F(b+1) - F(a)$$

Definition 4.3 (Produkt af to følger): $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Sætning 4.2 (Produktregel for differentiation):

$$\Delta(f \cdot g)(x) = \Delta f(x) \cdot g(x) + f(x+1) \cdot \Delta g(x)$$

Bevis:

$$\Delta(f \cdot g)(x) = \Delta(f(x) \cdot g(x))$$

Ud fra definition af at gange to følger med hinanden

$$\begin{aligned}
&= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot (g(x) + \Delta g(x)) - (f(x+1) - \Delta f(x)) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x) + f(x+1) \cdot \Delta g(x) \\
&\qquad - f(x+1) \cdot g(x) + \Delta f(x) \cdot g(x) \\
&= \boxed{f(x+1) \cdot g(x)} + f(x+1) \cdot \Delta g(x) \\
&\qquad \boxed{-f(x+1) \cdot g(x)} + \Delta f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot \Delta g(x) + \Delta f(x) \cdot g(x)
\end{aligned}$$

Sætning 4.3 (Differentiation af $x^{\overline{n}}$): Givet konstant n og variabel x gælder

$$\Delta x^{\overline{n}} = n \cdot x^{\overline{n-1}}.$$

Bevis:

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\overline{n}} &= (x+1)^{\overline{n}} - x^{\overline{n}} \\
&= (x+1) \cdot x^{\overline{n-1}} - x^{\overline{n-1}} \cdot (x - (n-1))
\end{aligned}$$

Det er vigtigt at indse hvorfor den sidste faktor er $(x - (n-1)$. *Se eksempel 4.2.*

$$\begin{aligned}
&= (x + 1 - x + (n-1)) \cdot x^{\overline{n-1}} \\
&= n \cdot x^{\overline{n-1}}
\end{aligned}$$

5 Differential- og integralregning

1. Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for differential- og integralregning
2. Bevis mindst en regneregel for differentiation

Eksempel (Hvordan ville jeg gøre?):

1. Bevise sætning 5.1, inddrage viden om kontinuitet og differentiabilitet,
2. Bevise sætning 5.3 ved brug af sætning 5.2 og 5.1
3. Bevise sætning 5.2

Definition 5.1 (Kontinuitet): Grænseværdien for $f(x)$ når x går mod x_0 er $f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

For at noget skal være kontinuert, skal, hvis x-værdierne er tæt på hinanden, så skal y-værdierne også være tæt på hinanden. Vi går ud fra, at alle standardfunktioner er kontinuerte.

Definition 5.2 (Sekanthældning): Sekanthældningen er hældningen for en ret linje gennem to forskellige punkter på en funktion f.

$$d_{f,x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definition 5.3 (Differentiabilitet): Differentialkvotienten er grænseværdien for sekanthældningen for f i x-værdierne x og x_0 når x går mod x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} d_f(x)$$

Sætning 5.1 (Kædereglen):

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Bevis:

$$\begin{aligned} d_{f \circ g, x_0}(x) &= \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \end{aligned}$$

Der ganges med 1 på en sjov måde

$$= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

Vha. brøkregneregel

$$
\begin{aligned}
&= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= d_{f,g(x_0)}(g(x)) \cdot d_{g,x_0}(x)
\end{aligned}
$$

Grundet viden om sekanthældninger og grænseværdier

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} d_{f \circ g, x_0}(x) &= (f \circ g)'(x_0) \\
&= \lim_{x \to x_0} d_{f,g(x_0)}(g(x)) \cdot d_{g,x_0}(x)
\end{aligned}
$$

Når x går mod x_0, og hvis g er kontinuert og ikke konstant, så går $g(x)$ mod $g(x_0)$. Dermed

$$= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Da x_0 er vilkårlig gælder

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

Sætning 5.2 (Afledte logaritme): $(\ln \cdot)' = \frac{1}{\cdot}$

Bevis: Med kædereglen

$$
\begin{aligned}
e^{\ln x} &= x \\
\left(e^{\ln x}\right)' &= x' \\
x \cdot (\ln x)' &= 1 \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Da x er vilkårlig

$$(\ln \cdot)' = \frac{1}{\cdot}$$

Sætning 5.3 (Afledte $\cdot^n$):

$$(\cdot^n)' = n \cdot^{n-1}$$

Bevis:

$$
\begin{aligned}
(\ln x^n)' &= (n \cdot \ln x)' \\
(\ln x^n)' &= n(\ln x)' \\
\frac{1}{x^n} \cdot (x^n)' &= n \cdot \frac{1}{x} \\
(x^n)' &= x^n \cdot n \cdot \frac{1}{x} \\
&= n \cdot x^{n-1}
\end{aligned}
$$

Og da x er vilkårlig

$$(\cdot^n)' = n \cdot^{n-1}.$$

6 Differential- og integralregning

1. Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for differential- og integralregning
2. Redegør for sammenhængen mellem stamfunktion og areal

Se definitioner i tidligere afsnit.

Sætning 6.1 (Stamfunktion): Lad f være en kontinuert funktion defineret i intervallet $[a;b]$. Da er fs stamfunktion, F,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dx.$$

Bevis: Antag, at $A(x)$ måler "arealet"under en graf fra $-\infty$ til x. Arealet har her et fortegn, dvs. at hvis grafen er under nul, så tæller den negativt, medens hvis grafen er over nul så tæller den positivt.

Ønsker man at finde arealet mellem to x-koordinater x og x_0, kan dette lade sig gøre ved

$$A(x) - A(x_0).$$

Dette udtryk kan approximeres, men der kommer en fejl, kaldet E

$$A(x) - A(x_0) = f(x_0) \cdot (x - x_0) + E.$$

Der divideres med $x - x_0$.

$$\begin{aligned}
\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} &= f(x_0) + \frac{E}{x - x_0} \iff \\
d_{A,x_0}(x) &= f(x_0) + \frac{E}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \\
A'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \frac{E}{x - x_0}
\end{aligned}$$

Det undersøges nu, hvad der sker med $\frac{E}{x-x_0}$, når $x \to x_0$. Vi ved om E

$$E \leq (f(x_h) - f(x_l))(x - x_0),$$

hvor x_h og x_l noterer x-koordinaten til henholdsvis det højeste og laveste punkt på grafen mellem x og x_0. Men fordi x_h og x_l skal ligge mellem x og x_0, så vil både x_h og x_l gå mod x_0 når x går mod x_0. Med lidt omskrivninger fås altså

$$\begin{aligned}\frac{E}{x - x_0} &\leq f(x_h) - f(x_l) \xrightarrow[x\to x_0]{} \\ &= f(x_0) - f(x - 0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dvs.

$$\begin{aligned}A'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \frac{E}{x - x_0} \\ &= f(x_0) + 0,\end{aligned}$$

fordi $f(x_0)$ ikke påvirkes af x. Altså er A en stamfunktion til f.

Sætning 6.2 (Integralregningens hovedsætning): Givet en funktion f der er kontinuert

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f.

7 Differensligninger

1. Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for differensligninger.
2. Udled en løsningsformel til en selvvalgt type differensligning

Sætning 7.1 (Sum af potenser):

$$\sum_{x=a}^{b} g^x = \frac{g^{b+1} - g^a}{g - 1}.$$

Bevis: g^x er en følge der integreres, ganske som i diskret analyse. Dermed skal der blot findes stamfølgen til g^x. Det er $\frac{1}{g-1}g^x$, udledningen overlades til læseren.

Således gælder

$$\begin{aligned}\sum_{x=a}^{b} g^x &= \frac{1}{g-1}g^{b+1} - \frac{1}{g-1}g^a \\ &= \frac{g^{b+1} - g^a}{g - 1}\end{aligned}$$

Sætning 7.2 (Løsningsformel for $\Delta f(x) = r \cdot f(x) + p$):

$$\Delta f(x) = r \cdot f(x) + p, f(0) = b \implies f(x) = b \cdot (r+1)^x + p \cdot \frac{(r+1)^x - 1}{r},$$

hvor $p, b \in \mathbb{R}$ og $r \neq 0$.

Bevis: Der definieres følgende for at undgå skrivekrampe $g = r + 1$.
Første 4 elementer i f skrives op.

$$\begin{aligned} f(0) &= b \\ f(1) &= g \cdot b + p \\ f(2) &= g^2 \cdot b + gp + p \\ f(3) &= g^3 \cdot b + g^2 p + gp + p \end{aligned}$$

Det indses dermed hurtigt at følgende gælder

$$f(x) = g^x \cdot b + \sum_{i=0}^{x-1} g^i \cdot p$$

Efter en omskrivning

$$f(x) = b \cdot g^x + p \cdot \sum_{i=0}^{x-1} g^i$$

Grundet sætning 7.1

$$\begin{aligned} f(x) &= b \cdot g^x + p \cdot \frac{g^x - 1}{g - 1} \\ &= b \cdot (r+1)^x + p \cdot \frac{(r+1)^x - 1}{r}. \end{aligned}$$

8 Sandsynlighedsregning

1. Giv en præsentation af selvvalgt del af teorien for sandsynligheds-regning med fokus på binomialfordelingen.

2. Bevis formlen $K(n, r) = \frac{n^{\overline{r}}}{r!}$ ved at løse differensligningen

$$K(n+1, r) = K(n, r-1) + K(n, r).$$

Sætning 8.1 (Binomialkoefficient): Givet to ikke negative hele tal, n og r, hvor $r \leq n$ gælder det at binomialkoefficienten $K(n, r)$ er på formen

$$K(n, r) = \frac{n^{\overline{r}}}{r!}.$$

$K(n, r)$ udtales "n vælg r".

Bevis: Følgende differensligning indføres

$$K(n+1, r) = K(n, r-1) + K(n, r).$$

Det viser sig at være smart at isolere $K(n, r-1)$.

$$K(n, r-1) = K(n+1, r) - K(n, r)$$

$K(n, r)$ kaldes for det n'te element i den r'te følge

$$f_{r-1}(n) = f_r(n+1) - f_r(n)$$

Idé fra diskret analyse indføres

$$f_{r-1}(n) = \Delta f_r(n)$$

Det er et super centralt resultat, for nu kan alle f_r findes. Det skyldes at $f_0(n)$ er kendt, og en hvilken som helst $f_r(n)$ kan findes ved at integrere diskret r gange med pluskonstant 0, og evaluere i n. Bevis ved induktion.

Startbetingelse: $f_0(n) = 1$, da $K(n, 0)$ er 1, fordi der kun kan vælges nul elementer på en måde.

Induktionsskridt: Under antagelse af at $f_r(n) = \frac{n^{\overline{r}}}{r!}$, vis da at $f_{r+1}(n) = \frac{n^{\overline{r+1}}}{(r+1)!}$.

Idéen fra diskret analyse bruges nu

$$\begin{aligned} f_r(n) &= \frac{n^{\overline{r}}}{r!} \\ &= \frac{(r+1) \cdot n^{\overline{r}}}{(r+1)!} \\ &= \frac{\Delta n^{\overline{r+1}}}{(r+1)!} \\ &= \Delta \frac{n^{\overline{r+1}}}{(r+1)!} \\ &= \Delta f_{r+1}(n) \end{aligned}$$

Det vil sige

$$\begin{aligned} \Delta f_{r+1}(n) &= \Delta \frac{n^{\overline{r+1}}}{(r+1)!} \\ f_{r+1}(n) &= \frac{n^{\overline{r+1}}}{(r+1)!} \end{aligned}$$

Dermed er induktionsbeviset afsluttet.

Da det nu er vist at $f_r(n) = \frac{n^{\overline{r}}}{r!}$, og $f_r(n) = K(n,\, r)$, da er differensligningen løst

$$K(n,\, r) = \frac{n^{\overline{r}}}{r!}.$$

Definition 8.1 (Tæthedsfunktion): En funktion f defineret i udfaldsmængden for en stokastisk variabel X givet ved intervallet $[a; b]$ er en tæthedsfunktion hvis og kun hvis den opfylder

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{og} \qquad \int_a^b f(x)\, dx = 1.$$

Tæthedsfunktionen angiver sandsynligheden for et givent udfald

$$P(X = x) = f(x).$$

Definition 8.2 (Bernoullifordeling): En bernoullifordelt stokastisk variabel har tæthedsfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ (1-p) & x = 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}.$$

Sætning 8.2 (Binomialfordelingen): Givet n bernoullifordelte stokastiske variable, X, med sandsynlighed for succes p, defineres en binomialfordelt stokastisk variabel som

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

eller bare

$$Y \sim bin(n, p).$$

Så gælder

$$P(Y = r) = p^r \cdot (1-p)^{n-r} \cdot K(n,\, r).$$

Bevis: Hvis en bernoullifordelt stokastisk variabel er lig med 1, kaldes udfaldet for en succes, s, ellers fiasko, f. For at spare på blækket skrives $P(s \,\text{og}\, f)$

som $P(sf)$. Således fås

$$\begin{aligned} P(Y=r) &= P(\underbrace{ss\dots s}_{r}\underbrace{ff\dots f}_{n-r}) \\ &+ P(\underbrace{ss\dots s}_{r-1}\underbrace{ff\dots f}_{n-r}s) \\ &+ P(\underbrace{ss\dots s}_{r-2}\underbrace{ff\dots f}_{n-r}ss) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

hvor summeringen forsætter med andre permutationer af r successer og $(n-r)$ fiaskoer. Det viser sig, at alle disse permutationer er ens, som følge af multiplikationsprincippet og den kommutative lov for gange. Dvs.

$$P(Y=r) = P(\underbrace{ss\dots s}_{r}\underbrace{ff\dots f}_{n-r}) \cdot \text{værdi}.$$

Herfra kan sandsynligheden beregnes

$$\begin{aligned} &= \underbrace{P(s)\cdot P(s)\cdots P(s)}_{r} \cdot \underbrace{P(f)\cdot P(f)\cdots P(f)}_{n-r} \cdot \text{værdi} \\ &= P(s)^r \cdot P(f)^{n-r} \cdot \text{værdi} \\ &= p^r \cdot (1-p)^{n-r} \cdot \text{værdi}. \end{aligned}$$

Nu mangles det blot at finde hvor mange forskellige permutationer der er. For at finde det, kan man forestille sig at man blandt de n bernoullifordelte stokastiske variable, så vælges r af dem til at være successer. Dette kan, per vores binomialkoefficient gøres på netop $K(n, r)$ måder. Altså fås

$$P(Y=r) = p^r \cdot (1-p)^{n-r} \cdot K(n, r),$$

som var det, der ønskedes vist. ■

9 Statistik

9.1 Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for hypotesetest

- Nulhypotese
- Hvornår er hvad rigtigt?
- Bevis

$$P(p \in [\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}]) \approx 95\%$$

- Ved $\hat{p} = \frac{X}{n}$, og $X \in$

10 Transformationer

- Flytning (x, y)
- Strækning (x, y)
- $e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Tæthedsfunktioner
- Areal
- Skaler langs y.
- Strækning langs x, konsekvenser
- Middelværdi

11 Vektorer

1. Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for vektorer.
2. Gør rede for skalarproduktet og måder at beregne dette på.

- Vektorer er abstrakte pile, man kan lægge dem sammen og trække fra. Vektoren starter ikke et bestemt sted
- Består af en længde og en retning

Sætning 11.1 (Skalarprodukt ved længder): En regneoperation der ganger to vektorer sammen og giver et tal, som givet tre vektorer af samme dimension $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ opfylder

1. $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$,
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, og
3. $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$,

kan kun give

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{2}.$$

Operationen kaldes også prikprodukt.

Bevis:

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}+\vec{b})^2 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\
&= (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}\\
&= \vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\
&= \vec{a}^{\,2}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}^{\,2}\\
&= \vec{a}^{\,2}+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}
\end{aligned}
$$

Der omarrangeres

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{(\vec{a}+\vec{b})^2-\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}}{2}\\
&= \frac{|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{2}
\end{aligned}
$$

Sætning 11.2 (Skalarprodukt ved dekomposanering af vektorer): Givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, som kan dekomposaneres til $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, så gælder

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2.$$

Bevis:

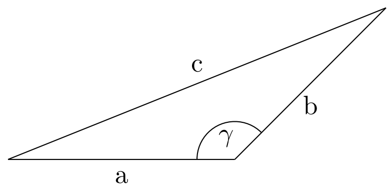
$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{2}\\
&= \frac{(\vec{a}+\vec{b})_1^2+(\vec{a}+\vec{b})_2^2-(\vec{a}_1^2+\vec{a}_2^2)-(\vec{b}_1^2+\vec{b}_2^2)}{2}\\
&= \frac{(\vec{a}_1+\vec{b}_1)^2+(\vec{a}_2+\vec{b}_2)^2-(\vec{a}_1^2+\vec{a}_2^2)-(\vec{b}_1^2+\vec{b}_2^2)}{2}\\
&= \frac{\vec{a}_1^2+2\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{b}_1+\vec{b}_1^2+\vec{a}_2^2+2\cdot\vec{a}_2\cdot\vec{b}_2+\vec{b}_2^2-(\vec{a}_1^2+\vec{a}_2^2)-(\vec{b}_1^2+\vec{b}_2^2)}{2}\\
&= \frac{2\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{b}_1+2\cdot\vec{a}_2\cdot\vec{b}_2}{2}\\
&= \vec{a}_1\cdot\vec{b}_1+\vec{a}_2\cdot\vec{b}_2
\end{aligned}
$$

Sætning 11.3 (Skalarprodukt ved vinkel): Givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og vinklen mellem disse v, gælder

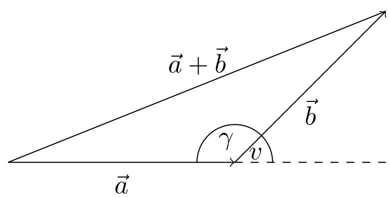
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos v.$$

Bevis: Det er givet, at cosinusrelationen gælder

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$



Der konstrueres en trekant så c^2 er $|\vec{a}+\vec{b}|^2$ og a^2 er $|\vec{a}|^2$ og b^2 er $|\vec{b}^2|$.



I denne trekant vil γ være givet ved $180 - v$. Dvs. at udtrykket for $|\vec{a}+\vec{b}|^2$ kan indsættes i sætning 11.1. Da fås

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(180-v) - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{2}\\ &= \frac{-2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(180-v)}{2}\\ &= -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(180-v)\\ &= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos v.\end{aligned}$$

12 Vektorer

1. Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for vektorer.
2. Bevis projektionsformlen og gør rede for, hvordan den kan bruges i forbindelse med regression eller afstand mellem punkt og linje.

- Kør ovenstående
- Bevis projektionsformlen
- Afstand mellem punkt og linje (mums)
- Regression hvis der er tid

13 Annuiteter

- Tænkning kræves