Eksamensnoter

Ricardt Riis

19. januar 2023

Meningen med materialet er som disposition til mundtlig eksamen

Indhold

Introduktion

I det følgende vil overskriften angive hvilket spørgsmål der svares på. Da det er bedst at svare på begge spørgsmål "samtidigt"eller i det mindste have en nogenlunde flydende overgang mellem de to spørgsmål, virker det gavnligst at beskrive spørgsmålene, og dernæst under *EN* overskrift besvare spørgsmålene. Bemærk desuden, at jeg kun har ringe forståelse af hvad Sætning og Definition betyder i streng matematisk konstekst.

1 Funktioner

1. Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for vektorfunktioner.
2. Brug vektorfunktioner til at bestemme de afledte af de trigonometriske funktioner.

Her kan man komme ind på følgende:

- Funktioner tager et input, og laver et output.
- For vektorfunktioner gælder at deres signatur er
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2.$$
- Vektorfunktioner skrives
$$\vec{v}(t).$$
- t kaldes normalt `parameterværdi`.
- Præsenteres en vektorfunktion grafisk, benyttes en banekurve.
Bemærk: En banekurve viser ikke alt ved en vektorfunktion. Fx. er banekurverne for $\begin{pmatrix} t^3 \\ t^3 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ de samme.

- Den afledede af en vektorfunktion kan bestemmes således

$$\vec{v}\,'(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x(t)' \\ y(t)' \end{pmatrix}$$

  I det følgende vil afledte funktioner skrives således

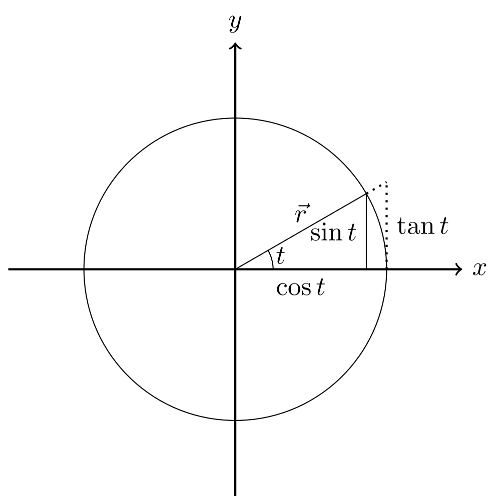
$$\dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}'$$

- Den afledede beskriver retningsvektoren for tangenten til en bestemt parameterværdi.
- Den afledede kaldes også hastighedsvektoren
- Dermed kan farten bestemmes ved længden af hastighedsvektoren

$$\text{fart}(\vec{v}) = \left|\dot{\vec{v}}\right|$$

- Se mere viden om vektorer i afsnit om vektorer.

Definition 1.1 (Cosinus, sinus og tangens): Cosinus, cos, sinus, sin, og tangens, tan, defineres ud fra enhedscirklen, der har radius 1.



Lemma 1.1 (Idiotformlen): $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Definition 1.2:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Sætning 1.1 (Afledte cosinus og sinus):

$$\cos' = -\sin$$
$$\sin' = \cos$$

Bevis: Det ønskes at finde $\dot{\vec{r}}(t)$, da vi i så fald kan bevise sætning 1.1.

Det vides om $\vec{r}$ at den bevæger sig langs enhedscirklens periferi. Dvs. at for hver omgang $\vec{r}$ bevæger sig omkring periferien, har punktet som stedvektoren $\vec{r}$ beskriver bevæget sig 2π. Da perioden for $\vec{r}$ også er 2π ved vi om farten af $\vec{r}$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = 1.$$

Bemærk, at længden af $\vec{r}$ også er 1 (jf. lemma 1.1).
Det vides om tangenter til punkter på en cirkel står ret på stedvektoren til punktet. Dermed gælder

$$\dot{\vec{r}} = \hat{\vec{r}}.$$

Derfor

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} = \widehat{\begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix}} = \hat{\vec{r}}$$
$$\begin{pmatrix} \cos' \\ \sin' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \\ \cos \end{pmatrix}.$$

Da lighedstegnet gælder koordinatvis, er beviset gennemført.

Lemma 1.2 (Tangens): $\tan = \frac{\sin}{\cos}$

Sætning 1.2 (Afledede tangens): $\tan' = \tan^2 + 1$

Bevis:

$$\begin{aligned}
\tan' &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' \\
&= \left(\sin \cdot \frac{1}{\cos}\right)' \\
&= \cos \cdot \frac{1}{\cos} + \sin \cdot \left(\frac{1}{\cos}\right)' \\
&= 1 + \sin \cdot \left(-\frac{1}{\cos^2}\right) \cdot (-\sin) \\
&= 1 + \frac{\sin^2}{\cos^2} \\
&= \tan^2 + 1
\end{aligned}$$

2 Funktioner

1. Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for plus- og gangefølger.
2. Bevis at to gangefølger altid giver anledning til en potenssammenhæng.

Eksempel (Hvordan ville jeg gøre?):
Jeg ville forklare stoffet i følgende rækkefølge.

- Introducer hvad plusfølger og gangefølger er (definition 2.1 og 2.2). Gør herunder brug af figur 1
- Forklar sætning 2.4, evt. ved brug af figur 2
- Hvis der er mere tid til overs, bevis logaritmeregnereglerne i rækkefølgen sætning 2.3, 2.2 og 2.1.

Sætning 2.1 (Logaritme laver gange om til plus):

$$\log_A B \cdot C = \log_A B + \log_A C$$

Bevis:

$$\log_A B \cdot C = \log_A B + \log_A C \iff$$

Der opløftes i A for at potensregneregler kan benyttes

$$A^{\log_A B \cdot C} = A^{\log_A B + \log_A C}$$

Føromtalte potensregneregel benyttes

$$= A^{\log_A B} \cdot A^{\log_A C} \iff$$

$A^{\log_A}$ går ud

$$B \cdot C = B \cdot C$$

Sætning 2.2 (Logaritmeregneregel): $\log_A B^C = C \cdot \log_A B$

Bevis: Opløftning er det samme som gentagen gange

$$\log_A B^C = \log_A \underbrace{B \cdot B \cdots B}_{C \text{ gange}}$$

Jævnfør sætning 2.1 så kan man skrive

$$= \underbrace{\log_A B + \log_A B + \cdots + \log_A B}_{C \text{ gange}}$$

Da der lægges sammen C gange, og gange er gentaget plus, så gælder

$$= C \cdot \log_A B$$

Sætning 2.3 (Logaritmeregneregel): $A^{\log_B C} = C^{\log_B A}$.

Bevis: Reglen opskrives

$$A^{\log_B C} = C^{\log_B A} \iff$$

Vi gør på en smart måde ingenting

$$B^{\log_B A^{\log_B C}} = B^{\log_B C^{\log_B A}} \iff$$

Ifølge sætning 2.2 så kan vi

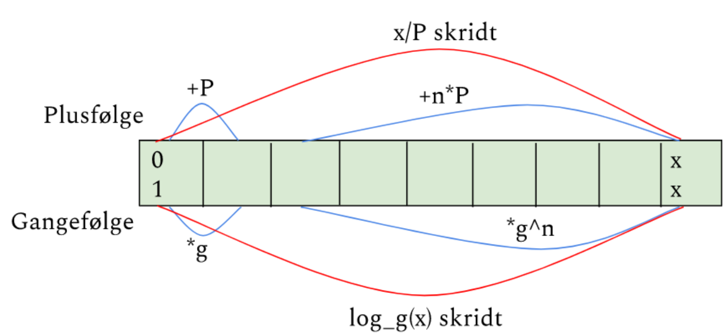
$$B^{\log_B C \cdot \log_B A} = B^{\log_B A \cdot \log_B C}$$

Da der har været ensbetydende pile er beviset fuldført.

Definition 2.1 (Plusfølge): En plusfølge lægger altid et bestemt tal til for hvert skridt i følgen.

Definition 2.2 (Gangefølge): En gangefølge gange altid et bestemt tal for hvert skridt i følgen.

Figur 1: Forklaring af definitionerne



Sætning 2.4 (Gangefølge - Gangefølge): To gangefølger giver altid anledning til en potenssammenhæng.

$$y = \frac{d}{c^{\log_{\mathrm{P}x} \mathrm{P}y}} \cdot x^{\log_{\mathrm{P}x} \mathrm{P}y}$$

De to gangefølger defineres

$$x_n = c \cdot \mathrm{P}x^n$$
$$y_n = d \cdot \mathrm{P}y^n$$

y ønskes at kunne blive fundet ud fra vilkårlig x. Til det formål skal vi kende n.

$$x = c \cdot \mathrm{P}x^n$$

Der divideres med c, log rho x tages

$$\log_{\mathrm{P}x} x - \log_{\mathrm{P}x} c = n$$

Ukendt regneregel benyttes

$$n = \log_{\mathrm{P}x} \frac{x}{c}$$

Denne n kan indsættes i udtrykket for y_n, så enhver y kan findes.

$$y = d \cdot \mathrm{P}y^{\log_{\mathrm{P}x} \frac{x}{c}}$$

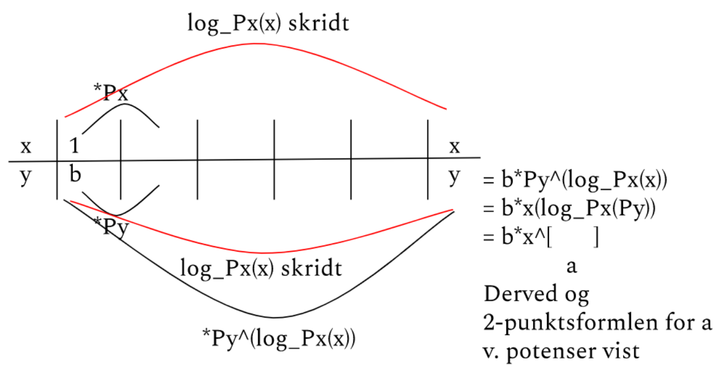
Per sætning 2.2

$$= d \cdot \left(\frac{x}{c}\right)^{\log_{\mathrm{P}x} \mathrm{P}y}$$

Potensregneregel

$$= \frac{d}{c^{\log_{\mathrm{P}x} \mathrm{P}y}} \cdot x^{\log_{\mathrm{P}x} \mathrm{P}y}$$

Figur 2: En grafisk fremstilling af ovenstående



3 Funktioner

3.1 Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for funktioner af to variable

- Maskiner, som en variabel
- Partiel afledning
- Stationære punkter.

3.2 Adled formlen for hældningen af regressionslinjen ved mindste kvadraters metode

- Opskriv KS
- Opskriv KS(a), $KS'(a) = 0$
- Vilkårligt punkt
- $\frac{\partial}{\partial a} KS(a, b)$, $\frac{\partial}{\partial b} KS(a, b)$
- Sæt b lig nul.
- Vind

4 Differential- og integralregning

1. Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for diskret analyse.
2. Bevis mindst en regneregel for diskret differentiation.

- I diskret analyse benyttes talfølger; i stedet for tal funktioner.
- For at gøre notationen af uendeligt lange talfølger nemmere, kan man benytte sig af funktionsnotation

$$f(x), x \in \mathbb{N}.$$

Eksempel 4.1 (Indeksering):
Hvis f defineres ved talfølgen $1, 3, 5, 4, 9$, så vil

$$f(3) = 5,$$

og $f(2.5)$ være udefineret.

- Der indføres desuden en anden potensfunktion

$$x^{\overline{n}} = \frac{x!}{(x-n)!}$$

Eksempel 4.2 (x i n-streg): $7^{\overline{4}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

- Det kaldes at differentiere når man trækker nabo-elementer fra hinanden

$$\Delta f : [2, 2, -1, 5].$$

- Det kan skrives med symboler

Definition 4.1 (Differentiation): $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

- Man kan desuden definere integration

Definition 4.2 (Integration):

$$F(x_0) = \sum f(x_0) = \sum_{-\infty}^{x_0} f(x)$$

- Det følger let at følgende gælder

Sætning 4.1 (Integralregningens hovedsætning):

$$\sum_{a}^{b} f(x) = F(b+1) - F(a)$$

Sætning 4.2 (Produktregel for differentiation):

$$\Delta(f \cdot g)(x) = \Delta f(x) \cdot g(x) + f(x+1) \cdot \Delta g(x)$$

Bevis:

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g)(x) &= \Delta(f(x) \cdot g(x)) \\
&= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot (g(x) + \Delta g(x)) - (f(x+1) - \Delta f(x)) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot g(x) + f(x+1) \cdot \Delta g(x) \\
&\qquad - f(x+1) \cdot g(x) + \Delta f(x) \cdot g(x) \\
&= \boxed{f(x+1) \cdot g(x)} + f(x+1) \cdot \Delta g(x) \\
&\qquad \boxed{-f(x+1) \cdot g(x)} + \Delta f(x) \cdot g(x) \\
&= f(x+1) \cdot \Delta g(x) + \Delta f(x) \cdot g(x)
\end{aligned}$$

Sætning 4.3 (Differentiation af $x^{\overline{n}}$): Givet konstant n og variabel x gælder

$$\Delta x^{\overline{n}} = n \cdot x^{\overline{n-1}}.$$

Bevis:

$$\begin{aligned}
\Delta x^{\overline{n}} &= (x+1)^{\overline{n}} - x^{\overline{n}} \\
&= (x+1) \cdot x^{\overline{n-1}} - x^{\overline{n-1}} \cdot (x - (n-1))
\end{aligned}$$

Det er vigtigt at indse hvorfor den sidste faktor er $(x - (n-1)$.

$$\begin{aligned}
&= (x + 1 - x + (n-1)) \cdot x^{\overline{n-1}} \\
&= n \cdot x^{\overline{n-1}}
\end{aligned}$$

5 Differential- og integralregning

5.1 Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for differential- og integralregning

- Sekanthældning
- Grænseværdier
- Tangenthældninger

5.2 Bevis mindst en regneregel for differentiation

- Kædereglen
- $(\ln x)'$
- $(x^n)'$, hvor $n \in \mathbb{C}$

6 Differential- og integralregning

6.1 Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for differential- og integralregning

- Sekanthældning
- Grænseværdier
- Integraler

6.2 Redegør for sammenhængen mellem stamfunktion og areal

- Bevis $\int_a^b f dx = F(b) - F(a)$

  Antag f kontinuert

  Antag en arealfunktion for f, $A(x)$, som finder areal mellem 0 og x. Ønskes nu arealet af et interval bestemt, kan man finde det ved

  $$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = A(x) - A(x_0) \qquad \text{Overbevisende ved graf}$$

  Dette areal kan også estimeres ved f, som dog giver en mindre fejl, E

  $$\begin{aligned} A(x) - A(x_0) &= f(x_0) \cdot (x - x_0) + E \\ f(x_0) &= \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} - \frac{E}{x - x_0} \\ &= d_A(x) - \frac{E}{x - x_0} \end{aligned}$$

  Hvis det kan vises at $\frac{E}{x-x_0}$ går mod nul når x går mod x_0, så er $A' = f$. Det vides om $\frac{E}{x-x_0}$

  $$\begin{aligned} \frac{E}{x - x_0} &\leq \frac{(x - x_0) \cdot (f(x_0 + t_{max}) - f(x_0 + t_{min}))}{x - x_0} \\ &= f(x_0 + t_{max}) - f(x_0 + t_{min}) \end{aligned}$$

- Herfra burde det være muligt at bevise færdig.

7 Differensligninger

7.1 Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for differensligninger

- Løsning er talfølge

7.2 Udled en løsningsformel til en selvvalgt type differensligning

- Tal også noget om $\Delta f(x) = r \cdot f(x) + p$

8 Binomial

8.1 Giv en præsentation af selvvalgt del af teorien for sandsynlighedsregning med fokus på binomialfordelingen

- Tæthedsfunktioner
- Bernoulli
- Binomialfordeling: Mange bernoulli
- K(n,r)

$$K(n+1,r) = K(n,r-1) + K(n,r)$$

Løs K(n,r) ved at indse at der differentieres.

9 Statistik

9.1 Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for hypotesetest

- Nulhypotese
- Hvornår er hvad rigtigt?
- Bevis

$$P(p \in [\hat{p} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}]) \approx 95\%$$

- Ved $\hat{p} = \frac{X}{n}$, og $X \in$

10 Transformationer

- Flytning (x, y)
- Strækning (x, y)
- $e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Tæthedsfunktioner
- Areal
- Skaler langs y.
- Strækning langs x, konsekvenser
- Middelværdi

11 Vektorer

1. Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for vektorer.
2. Gør rede for skalarproduktet og måder at beregne dette på.

- Vektorer er abstrakte pile, man kan lægge dem sammen og trække fra. Vektoren starter ikke et bestemt sted
- Består af en længde og en retning

Sætning 11.1 (Skalarprodukt ved længder): En regneoperation der ganger to vektorer sammen og giver et tal, som givet tre vektorer af samme dimension $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ opfylder

1. $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$,
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, og
3. $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$,

kan kun give

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{2}.$$

Operationen kaldes også prikprodukt.

Bevis:

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})^2 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\ &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}\\ &= \vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})\\ &= \vec{a}^{\,2}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}^{\,2}\\ &= \vec{a}^{\,2}+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}\end{aligned}$$

Der omarrangeres

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{(\vec{a}+\vec{b})^2-\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}}{2}\\ &= \frac{|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{2}\end{aligned}$$

Sætning 11.2 (Skalarprodukt ved dekomposanering af vektorer): Givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, som kan dekomposaneres til $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, så gælder

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2.$$

Bevis:

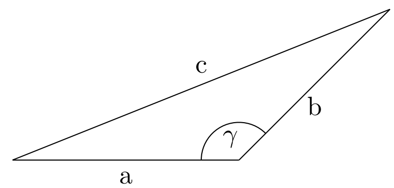
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{2}\\ &= \frac{(\vec{a}+\vec{b})_1^2+(\vec{a}+\vec{b})_2^2-(\vec{a}_1^2+\vec{a}_2^2)-(\vec{b}_1^2+\vec{b}_2^2)}{2}\\ &= \frac{(\vec{a}_1+\vec{b}_1)^2+(\vec{a}_2+\vec{b}_2)^2-(\vec{a}_1^2+\vec{a}_2^2)-(\vec{b}_1^2+\vec{b}_2^2)}{2}\\ &= \frac{\vec{a}_1^2+2\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{b}_1+\vec{b}_1^2+\vec{a}_2^2+2\cdot\vec{a}_2\cdot\vec{b}_2+\vec{b}_2^2-(\vec{a}_1^2+\vec{a}_2^2)-(\vec{b}_1^2+\vec{b}_2^2)}{2}\\ &= \frac{2\cdot\vec{a}_1\cdot\vec{b}_1+2\cdot\vec{a}_2\cdot\vec{b}_2}{2}\\ &= \vec{a}_1\cdot\vec{b}_1+\vec{a}_2\cdot\vec{b}_2\end{aligned}$$

Sætning 11.3 (Skalarprodukt ved vinkel): Givet to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og vinklen mellem disse v, gælder

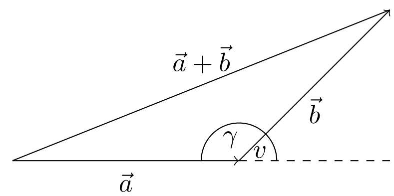
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos v.$$

Bevis: Det er givet, at cosinusrelationen gælder

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$



Der konstrueres en trekant så c^2 er $|\vec{a}+\vec{b}|^2$ og a^2 er $|\vec{a}|^2$ og b^2 er $|\vec{b}^2|$.



I denne trekant vil γ være givet ved $180 - v$. Dvs. at udtrykket for $|\vec{a}+\vec{b}|^2$ kan indsættes i sætning 11.1. Da fås

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(180 - v) - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{2} \\
&= \frac{-2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(180 - v)}{2} \\
&= -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(180 - v) \\
&= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos v.
\end{aligned}$$

12 Vektorer

1. Giv en præsentation af en selvvalgt del af teorien for vektorer.
2. Bevis projektionsformlen og gør rede for, hvordan den kan bruges i forbindelse med regression eller afstand mellem punkt og linje.

- Kør ovenstående
- Bevis projektionsformlen
- Afstand mellem punkt og linje (mums)
- Regression hvis der er tid

13 Annuiteter

- Tænkning kræves