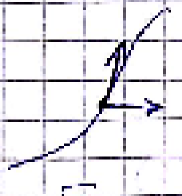
6

Кривые в $\mathbb{R}^n$.



$\bar r(s)$, $\bar r'(s) = \bar v(s)$

Рассм-м бирегул. кривые, т.е. $k>0$

$\bar n(s) = \frac{\bar r''}{|\bar r''|}$, $\bar r'' \parallel \bar n$

Будем строить базис: $(\bar m_1(s), \dots, \bar m_n(s))$

$\bar m_1(s) = \bar v(s)$, $\bar m_2(s) = \bar n(s)$

$\bar m_1'(s) = k(s)\bar m_2(s)$ $k_1(s) = k(s)$

Найдем $\bar m_2'(s)$ и разложим его по временному ортонорм-му базису $(\bar m_1, \bar m_2, \bar E_3, \dots, \bar E_n)$.

$$\bar m_2'(s) = \alpha_1(s)\bar m_1(s) + \underbrace{\sum_{i=3}^{n} \beta_i(s)\bar E_i(s)}_{\bar m_3(s) k_2(s)\ -\ \text{ортог. } \bar m_1 \text{ и } \bar m_2}$$

Направление выберем так, что $k_2(s)>0$

Если в-р $\bar m_3(s) k_2(s)$ – нулевой, то прекращаем построение. Но, нормируя, единственным образом получаем в-р $\bar m_3(s)$.

$|\bar m_3(s)| = 1$ $(\bar m_3, \bar m_2) = (\bar m_3, \bar m_1) = 0$

$\Rightarrow \bar m_2'(s) = \alpha_1(s)\bar m_1(s) + k_2(s)\bar m_3(s)$

$(\bar m_2, \bar m_1) = 0 \Rightarrow -(\bar m_2, \bar m_1') = (\bar m_2', \bar m_1) = \alpha_1(s) = -k_1(s)$

$\Rightarrow \bar m_2'(s) = -k_1(s)\bar m_1(s) + k_2(s)\bar m_3(s)$

Шаг индукции: имеем $\bar m_1(s), \dots, \bar m_i(s)$

$k_j(s) > 0$, $\forall j < i$

$\bar m_p'(s) = -k_{p-1}(s)\bar m_{p-1}(s) + k_p(s)\bar m_{p+1}(s)$, $p<i$

$\bar m_i' = -k_{i-1}(s)\bar m_{i-1}(s) + k_i(s)\bar m_{i+1}(s)$ (*)

Построим $k_i(s)$ и $\bar m_{i+1}(s)$. Берем базис $(\bar m_1, \dots, \bar m_i, \bar E_{i+1}, \dots, \bar E_n)$ $\bar m_i' = \sum_{p=1}^{i} \alpha_p(s)\bar m_p(s) + \underbrace{\sum_{l=i+1}^{n} \beta_l(s)\bar E_l(s)}_{k_i(s)\bar m_{i+1}(s)}$

Т.о. однозначно определены $k_i(s)$ и $\bar m_{i+1}(s)$.

Д-жем рав-во (*). $(\bar m_i', \bar m_p) = \alpha_p = -(\bar m_i, \bar m_p')$

Тогда по инд-ции имеем 2 вар-та:

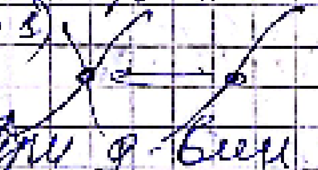
$(\bar m_i, \bar m_p') = \begin{cases} 0, & p < i-1 \\ k_p, & p = i-1 \end{cases}$ => получаем нуж-е рав-во

Последний в-р определяется однозначно (по ориентации пр-ва)

$$\begin{pmatrix} \bar m_1 \\ \vdots \\ \bar m_n \end{pmatrix}'(s) = \begin{pmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & & \\ -k_1(s) & 0 & k_2(s) & & \\ 0 & -k_2(s) & 0 & & \\ & & & & k_{n-1}(s) \\ \dots & & & -k_{n-1}(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar m_1 \\ \vdots \\ \bar m_n \end{pmatrix} \quad (*)$$

(Т) Кривизны однозначно задают кривую в $\mathbb{R}^n$ с точностью до собственного движения пространства

▶ 1)



Д-жем, что движением можно совместить. Сдвинем на r_0: $\bar r(s) - \bar r_0$

При д-вии базис м-цы A на базис, получаем диф. ур. Надо по Т! $\exists$ имеем нач. усл. е

2) Д-во $\exists$-ния. Рассм-м систему (*) и нач. условие (в зад. точке). Реш-е у диф. ур-я $\exists$

12. Необх-мо проверить, что получили рег. кривую