Необ-мо воспользоваться теоремой об ортог-ти $M(S)$ (критерий)

Криволинейные системы коор-т в $\mathbb{R}^n$ (области)

Рассм-м еще один экземпляр

Криволин. коор-ты — отн-ие $U \to X$, причем это диффеоморфизм (можно также рассм-ть гомеом-зм).

$$\begin{cases} x^1(u^1,\dots,u^n) \\ \dots \\ x^n(u^1,\dots,u^n)\end{cases}$$

дифф-зм $\to$ будем учесть регулярные криволин. сист. координат $\det\left(\partial x^i/\partial u^j\right) \neq 0$

Пример

Полярная сист. коор-т

$$\det\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix} = r > 0$$

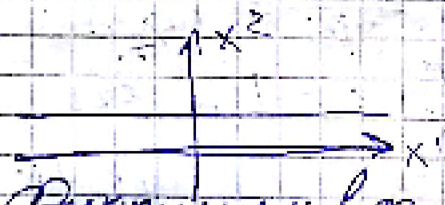
Из нер-ва $\det \neq 0$ по Th. о неявной ф-ции $\exists$ окр-ть, в которой задается криволин. система коор-т

Замена коор-т — переход от $u^1,\dots,u^n$ к $w^1,\dots,w^n$

Координатные линии

$x^1 = t,\ x^2 = x_0^2,\ \dots,\ x^n = x_0^n$

все коор-ты кроме одной фиксированы



При замене $\begin{cases} x^1(u^1,\dots,u^n) \\ x^n(u^1,\dots,u^n)\end{cases}$ Фиксируем все, кроме i-ой

$\to \bar r(u^i)$ $\quad \frac{\partial \bar r}{\partial u^i} \neq 0$ (иначе бы якобиан был равен нулю)

в такую кривую переходит коор. линия из прямоуг. сист. коор.

$\bar r(u^1,\dots,u^n)$ $\quad \frac{\partial \bar r}{\partial u^i}$ — л.н.з. в-ры $\Rightarrow$ имеем базис в $\mathbb{R}^n$ (не ортонорм.)

$\left(\frac{\partial \bar r}{\partial u^i}, \frac{\partial \bar r}{\partial u^j}\right) = g_{ij}(u)$ — м-ца Грама

1) $\det g_{ij} \neq 0$. Скал. произ-е сим-но $\to$ м-ца также сим-на 2) $g_{ij} = g_{ji}$

g_{ij} положительно определена

$\forall$ сист. коор-т будем иметь такую м-цу

Рассм-м з-н, по которому м-ца изменяется

$g_{ij}(u) \to g'_{ij}(w)$

$$g'_{ij}(w) = \left(\frac{\partial \bar r}{\partial w^i}, \frac{\partial \bar r}{\partial w^j}\right) = \left(\frac{\partial \bar r}{\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial w^i}, \frac{\partial \bar r}{\partial u^s}\frac{\partial u^s}{\partial w^j}\right) \text{ (Эйнш.)}$$

$$= \left(\frac{\partial \bar r}{\partial u^k}, \frac{\partial \bar r}{\partial u^s}\right)\frac{\partial u^k}{\partial w^i}\frac{\partial u^s}{\partial w^j} = g_{ks}(u(w))\frac{\partial u^k}{\partial w^i}\frac{\partial u^s}{\partial w^j}$$