Рассм-м $\bar{r}(u(t))$, то $\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial u^i} \cdot u_t^i = \frac{\partial r}{\partial u^i} a^i$
→ ∃ необ-мая кривая

Первая квадратичная форма k-мерного подмногообразия. $g_{ij}(u) = \left(\frac{\partial r}{\partial u^i}, \frac{\partial r}{\partial u^j}\right)$

Утв. ↓ явл-ся римановой метрикой
$\det g_{ij} \neq 0$ и положит. опр-на (т.к. м-ца Грама) ($g_{ij}(u) = g_{ji}(u)$)

Ф-лы замены получаются ан-но крив. с.к.:

$$g_{ij}(u) = \left(\frac{\partial r}{\partial u^i}, \frac{\partial r}{\partial u^j}\right) \quad \hat g_{ij}(v) = \left(\frac{\partial r}{\partial v^i}, \frac{\partial r}{\partial v^j}\right) = \left(\frac{\partial r}{\partial u^s}\frac{\partial u^s}{\partial v^i}, \frac{\partial r}{\partial u^l}\frac{\partial u^l}{\partial v^j}\right) = \left(\frac{\partial r}{\partial u^s},\frac{\partial r}{\partial u^l}\right)\frac{\partial u^s}{\partial v^i}\cdot\frac{\partial u^l}{\partial v^j} =$$
$$= g_{sl}(u(v))\frac{\partial u^s}{\partial v^i}\cdot\frac{\partial u^l}{\partial v^j}$$

Пусть имеем $\bar v_1, \bar v_2 \in T_x$, $\bar v_1 = a^i \frac{\partial r}{\partial u^i}$, $\bar v_2 = b^j\frac{\partial r}{\partial u^j}$

Тогда $(\bar v_1,\bar v_2) = \left(\frac{\partial r}{\partial u^i},\frac{\partial r}{\partial u^j}\right) a^i b^j = g_{ij}a^ib^j$

Увидим, что $R_{ijk}^l \neq 0$ для этих метрик

Заметим, что ∃ коор-ты (локально) т.ч.

$$\begin{cases} x^1 = u^1 \\ x^k = u^k \\ x^{k+1} = x^{k+1}(u^1,\dots,u^k) \\ x^n = x^n(u^1,\dots,u^k) \end{cases}$$

$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right) = k$ ← ∃ минор k-го пор-ка, опр-ль которого ≠ 0, т.е. $\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right)\neq 0$, $1\le i,j\le k$

Тогда по Т. о неявной ф-ции (от-нии) можно получить $u^1 = u^1(x^1,\dots,x^k)$
$u^k = u^k(x^1,\dots,x^k)$

Тогда получим $r(x^1,\dots,x^k)$

Опр. Ф-ция наз-ся гладкой на подмногообразии, если она гладкая при ограничении на координатную обл-ть.

Неявное задание k-мерных поверхностей.

Рассм-м систему ур-ний:

$$m<n \begin{cases} F_1(x^1,\dots,x^n)=0 \\ \dots \\ F_m(x^1,\dots,x^n)=0 \end{cases}$$

Пусть эта система имеет решение $x_0 = (x_0^1,\dots,x_0^n)$

Утв. $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\right)\Big|_{x_0} = m$ ← коразмерность ⇒ в нек-рой окр-ти т. x_0 решение задает регул. k-мерное подмногообразие в R^n, где $k = n-m$. ← размерность

Пусть невырожд. минор отвечает первым m координатам: $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\right)\neq 0$, $1\le i,j\le m$

$$\rightarrow \begin{cases} x^1 = x^1(x^{m+1},\dots,x^n) \\ x^m = x^m(x^{m+1},\dots,x^n) \\ x^i = x^i(x^{m+1},\dots,x^n) \end{cases}$$

→ $x^{m+1},\dots,x^n$ — криволин. коорд. на подмногооб.