3) $\tilde{g}_{ij}(w) = g_{ks}(u(w))\frac{\partial u^k}{\partial w^i}\frac{\partial u^s}{\partial w^j}$

Риманова метрика в области евкл. пр-во ($\mathbb{R}^n$) матриц. (глад.) ф-ция, задаваемая в ∀ кривол. сист. коор-т, удовл. усл.:

1) положит. опр-ка ($\det g_{ij} \neq 0$)

2) $g_{ij} = g_{ji}$

3) $\tilde{g}_{ij}(w) = g_{ks}(u)\frac{\partial u^k}{\partial w^i}\frac{\partial u^s}{\partial w^j}$

Утв. М-ца Грама кривол. сист. коор-т явл-ся римановой метрикой.

(7) Рассм-м $\left(\frac{\partial r}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial u^n}\right)$; $g_{ij}(u) = \left(\frac{\partial r}{\partial u^i}, \frac{\partial r}{\partial u^j}\right)$

$\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma^k_{ij}(u)\frac{\partial r}{\partial u^k}$ (*) $\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial r}{\partial u^l}\right) = \Gamma^k_{ij}(u)\left(\frac{\partial r}{\partial u^k}, \frac{\partial r}{\partial u^l}\right) =$

$\frac{\partial r}{\partial u^k} = \varphi_k,\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial u^i} = \Gamma^k_{ij}(u)\varphi_k$ $\quad = \Gamma^k_{ij}(u) g_{kl}$

$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^k}, \frac{\partial r}{\partial u^j}\right) + \left(\frac{\partial r}{\partial u^i}, \frac{\partial^2 r}{\partial u^j \partial u^k}\right) = \Gamma^s_{ik} g_{sj} + \Gamma^s_{jk} g_{si}$

$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma^s_{ik} g_{sj} - \Gamma^s_{jk} g_{si} = 0 \Rightarrow \nabla_k g_{ij} = 0$

Из (*) $\Rightarrow \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$

введем $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}\left(\frac{\partial g_{si}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{sj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s}\right)$ тензор, обратный к g_{ij} (∃, т.к. матрица невырожд.)

Это ф-ла

(1) $\frac{\partial g_{si}}{\partial u^j} = \Gamma^l_{sj} g_{li} + \Gamma^l_{ij} g_{ls}$, (2) $\frac{\partial g_{sj}}{\partial u^i} = \Gamma^l_{si} g_{lj} + \Gamma^l_{ji} g_{ls}$,

(3) $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s} = \Gamma^l_{is} g_{lj} + \Gamma^l_{js} g_{li} \Rightarrow (1)+(2)-(3) = 2\Gamma^l_{ij} g_{ls} / \cdot g^{sk}$

$\Rightarrow \Gamma^l_{ij} g_{ls} g^{sk} \delta^k_l = \frac{1}{2}((1)+(2)-(3)) g^{sk}$

Совместные системы.

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial u^1} = F_1(u^1, \dots, u^n, y^1, \dots, y^k) \\ \dots \\ \frac{\partial y}{\partial u^n} = F_n(u^1, \dots, u^n, y^1, \dots, y^k) \end{cases} \quad U \subset \mathbb{R}^n,\ V \subset \mathbb{R}^k$$

F_i – гладкие ф-ции на $U \times V$

$\bar{a} \in U$, $\bar{b} \in V$, $\bar{y}(\bar{a}) = \bar{b}$, $y(u^1, \dots, u^n)$

Система наз-ся совм-ной $\Leftrightarrow \forall\ \bar{a}, \bar{b}\ \exists$ гладкое реш-е $\bar{y}(u)$: $\bar{y}(\bar{a}) = \bar{b}$ в некоторой окр-ти точки $\bar{a}$.

Вып-ся ур-ние: $\frac{\partial y}{\partial u^i} = F_i(u^1, \dots, u^n, y^1(u^1, \dots, u^n), \dots, y^k(u^1, \dots, u^n))$

$\frac{\partial^2 y}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{dF_i}{du^j} = \frac{\partial F_i}{\partial u^j} + \frac{\partial F_i}{\partial y^s}\frac{\partial y^s}{\partial u^j} = \frac{\partial F_i}{\partial u^j} + \frac{\partial F_i}{\partial y^s} F^s_j$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{dF_j}{du^i} = \frac{\partial F_j}{\partial u^i} + \frac{\partial F_j}{\partial y^s} F^s_i$