2 способа задания k-мерных подмногообр.:

1) $\bar r(u^1,\dots,u^k)$ – параметрический

2) Система ур-ний: $F_i(\dots)=0$, $i=1,\dots,m$
$k=n-m$

Локально это один и тот же способ

Рассм-м кривую $(x^1(t),\dots,x^n(t))$, лежащую на подмногообразии: $F_i(x^1(t),\dots,x^n(t))=0$

$\Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}=0$ – имеем скалярное произв-ние в-ров

$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial F_i}{\partial x^n}\right),\ \left(\frac{dx^1}{dt},\dots,\frac{dx^n}{dt}\right)$

Имеем m в-ров и ~~это касат. пр-ва~~, каждый из которых ортогонален в-ру из касат. пр-ва. Тогда получаем m-мерное нормальное пр-во, которое обозн-ся N_x.

Тогда $\mathbb{R}^n = N_x \oplus T_x$

Касат. пр-во $T_x = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u^1},\dots,\frac{\partial r}{\partial u^k}\right\rangle$.

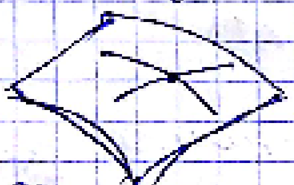
Рассм-м $(x^1,\dots,x^n)\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases}\frac{\partial x^1}{\partial u^1}x^1+\dots+\frac{\partial x^n}{\partial u^1}x^n=0\\ \dots\\ \frac{\partial x^1}{\partial u^k}x^1+\dots+\frac{\partial x^n}{\partial u^k}x^n=0\end{cases}$$

Ранг м-цы этой системы k. Тогда размер-ть пр-ва реш-й: $n-k=m$.

Можно рассм-ть ~~...~~ гладкий переход к ортонорм. базису $(\bar n^1(u^1,\dots,u^k),\dots,\bar n^m(u^1,\dots,u^k))$: $(\bar n^i,\bar n^j)=\delta^{ij}$

Элемент объема на k-мерном подмн-зии.



← k-мерное регул. подмн. $\bar r(u^1,\dots,u^k)$

Сдвигаясь на du^i по соотв. коорд. и посчитаем площадь получившегося парал-ма.

$\frac{\partial r}{\partial u^1}du^1$

Напомним, что $V^2(\bar a,\bar b,\dots,\bar d)=\begin{vmatrix}a^1&\dots&a^n\\ \vdots&&\vdots\\ d^1&\dots&d^n\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a^1&\dots&d^1\\ \vdots&&\vdots\\ a^n&\dots&d^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(a,a)&\dots&(a,d)\\ \vdots&&\vdots\\ (d,a)&\dots&(d,d)\end{vmatrix}$

Будем рассм-ть скал. произв-ние в кас. пр-ве:

$V^2\left(\frac{\partial r}{\partial u^1}du^1,\dots,\frac{\partial r}{\partial u^k}du^k\right)=\left|\left(\frac{\partial r}{\partial u^i},\frac{\partial r}{\partial u^j}\right)(du^i)^2 \ \dots\right|=$

$=\left|\left(\frac{\partial r}{\partial u^i},\frac{\partial r}{\partial u^j}\right)\right|(du^1)^2\dots(du^k)^2$

$\Rightarrow V=\sqrt{\det g_{ij}}\,du^1\dots du^k$

S, V, l – зависят только от I-й кв. формы!