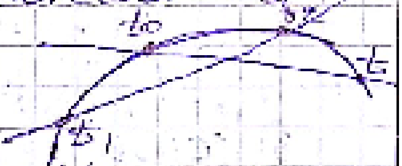
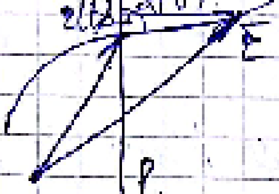
Т.к. кривая регул., то точно получим прямую.

$\bar r_t \cdot \bar r_t \left(\frac{d\bar r}{ds}\right)_{t_0}$ Напомним, что предел секущей также явл-ся касательной.

Упр. Д-ть для секущих, что они явл-ся кас-ми (в пределе) (т.е. $t_1, t_2 \to t_0$; $t \to t_0$)





l — $\forall$ прямая, $\bar r(t_0)$ — $\forall$ точка

$\alpha(t)$ — угол между l и $(\bar r(t) - \bar r(t_0))$

Утв. Касат. явл-ся ! прямой, расстояние до кот. явл-ся величиной второго пор-ка малости.

▷ $\rho(t,l) = |\bar r(t) - \bar r(t_0)| \sin\alpha(t)$

$\bar r(t) = \bar r(t_0) + \bar v_0 (t-t_0) + \bar{\bar o}(t-t_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow |\bar r(t) - \bar r(t_0)| = |\bar v_0 + \bar{\bar o}(1)|\,|t-t_0|$ (*) $\bar v_0 \ne 0$

В пределе секущая станет касательной $\Rightarrow$

$\alpha(t) = \alpha_0 + \bar{\bar o}(1)$ $\quad \bar v_0 \cdot \bar{\bar o}(1)$ — перв. пор. к. мал.

$t-t_0$ — перв. пор. мал. Но из рав-ва (*) имеем, что $|\bar r(t)-\bar r(t_0)|$ втор. пор-ка малости $\Leftrightarrow \sin\alpha_0 = 0 \Leftrightarrow$ кас. и l совп-т ◁

$$\begin{cases} f_1(x^1,\dots,x^n)=0 \\ \dots \\ f_{n-1}(x^1,\dots,x^n)=0 \end{cases}$$

Как написать ур-ние ~~кривой~~ касат. для этой ~~касат.~~ кривой.

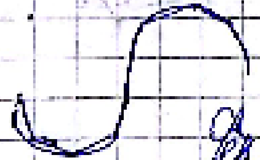
$\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\Big|_{x=x_0}(x^j - x_0^j) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0}(x-x_0)=0$

где x_0 — решение

Перейдем к параметризации: $\bar r(t)$, $f_i(\bar r(t))=0$

$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j} x^j_t\right)\Big|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow$ в-р скорости удовл-т системе $\Rightarrow$ действительно имеем ур-ние кас-ной.

Длина кривой в $\mathbb{R}^n$



$\sum |\bar r(t_i) - \bar r(t_{i-1})|, \qquad S = \int_{t_0}^{t} |\bar r_t|\,dt$

При замене переменных длина не изм-ся! Можно считать $\forall$ параметризации.

$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(\bar r_t, \bar r_t)}\,dt = \int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\sum \frac{\partial \bar r}{\partial u^i} u^i_t, \sum \frac{\partial \bar r}{\partial u^j} u^j_t\right)} =$

при введении новых коор.: $u^1,\dots,u^n$

$= \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{\partial \bar r}{\partial u^i}, \frac{\partial \bar r}{\partial u^j}\right) u^i_t u^j_t}\,dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\underbrace{g_{ij}(u)}_{\text{м-ца Грама}} u^i_t u^j_t}\,dt$

Натуральный параметр на кривой в $\mathbb{R}^n$

Опр. Параметр s на рег. кривой наз-ся натуральным, если $|\bar r_s| = 1$

Утв. 1) На $\forall$ регул. кривой $\exists$ нат. параметр.

2) $\tilde s, s$ — натур. $\Rightarrow \tilde s = \pm s + const$.

3) $|\bar r_t| = const \Leftrightarrow t = \lambda s$, $\lambda = const \ne 0$

Scanned by CamScanner