Получим соотношение для нач. условий (необходимые условия)
Полученные условия — условия совм-ти.

(Т) Если F_i, заданные на $U \times V$, — гладкие дважды дифф. ~~то~~ система совместна $\Leftrightarrow$ вып-ся усл-е совм-ти (причем ре-шение !-но) (д-жем для $n=2$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial u^1} = F_1(u^1, u^2, y^1, \dots, y^k) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u^2} = F_2(u^1, u^2, y^1, \dots, y^k) \end{cases}$$

Нач. усл-е: $y(a^1, a^2) = b$
Фиксируем $u^2 = a^2$
тогда рассм-м
$$\frac{\partial f}{\partial u^1} = F_1(u^1, a^2, f), \quad f(a^1) = b$$

По Т. $\exists$-я и ед-е реш-е $\exists$ и !-но и равномерно зависит от параметра a^2

в нек-рой окр-ти нашли реш-е
Необ-мо решить вторую ($\frac{\partial y}{\partial u^2}$) систему вдоль оси u^2 $\forall u^1$ фиксируем (из этой окр-ти)

$$h(u^1, u^2) = \frac{\partial y}{\partial u^1} - F_1(u^1, u^2, y), \quad h(u^1, a^2) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2 \partial u^1} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial u^2} - \frac{\partial F_1}{\partial y^s} F_2^s\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2 \partial u^1} - \left(\frac{\partial F_2}{\partial u^1} - \frac{\partial F_2}{\partial y^s} F_1^s\right) =$$
$$= \frac{\partial F_2}{\partial u^1} + \frac{\partial F_2}{\partial y^s}\left(\frac{\partial y^s}{\partial u^1} - F_1^s\right) - \dots = \frac{\partial F_2}{\partial y^s} h^s$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2 \partial u^1} = \frac{\partial F_2}{\partial u^1} + \frac{\partial F_2}{\partial y^s}\frac{\partial y^s}{\partial u^1}$$

условие совм-ти

Т.к. реш-е !-но, то $h(u^1, u^2) = 0$

$$(*)\ \frac{\partial y}{\partial u^i} = F_i(u^1, \dots, u^n) \qquad \frac{\partial F_i}{\partial u^j} = \frac{\partial F_j}{\partial u^i}$$
— усл-е совм-ти для системы типа (*)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial z}{\partial u^k}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial u^l \partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial u^l}\frac{\partial z}{\partial u^k} + \Gamma^k_{ij}\frac{\partial^2 z}{\partial u^k \partial u^l} = \frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^l}\frac{\partial z}{\partial u^s} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^s_{kl}\frac{\partial z}{\partial u^s} =$$
$$= \left(\frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^l} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^s_{kl}\right)\frac{\partial z}{\partial u^s} = \left(\frac{\partial \Gamma^s_{il}}{\partial u^j} + \Gamma^k_{il}\Gamma^s_{kj}\right)\frac{\partial z}{\partial u^s}$$

$$\underline{\frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma^s_{il}}{\partial u^j} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^s_{kl} - \Gamma^k_{il}\Gamma^s_{kj}} = 0.$$

тензор римановой кривизны $\rightarrow R^s_{ilj} = 0 \Leftrightarrow$ решение системы есть
плоская метрика

Экв-ные усл-я:
1) $\exists$ коор-ты, в которых метрика имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2) $\exists$ коор. $\Gamma^k_{ij} = 0$ — не тензор, надо уметь выводить закон замены
3) $R^k_{ilj} = 0$