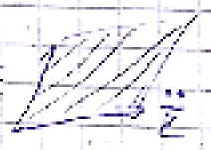
Кривизна кривой в $\mathbb{R}^n$ в произвольном параметре.

$\bar k(s) = \bar r''(s)$, $k(s) = |\bar r''(s)| = |\bar k(s)|$

$\bar k(t) = \frac{(\dot r,\dot r)\ddot r - (\dot r,\ddot r)\dot r}{|\dot r|^4}$; $k(t) = \frac{S(\dot r,\ddot r)}{|\dot r|^3}$



$\bar k(t) = \bar r''(s) = \frac{d}{ds}\left(\dot r \frac{dt}{ds}\right)$, но $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\dot r|}$ (ур. длины)

$\Rightarrow \bar r''(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot r}{|\dot r|}\right) = \frac{\ddot r \frac{dt}{ds}}{|\dot r|} - \frac{\dot r}{|\dot r|^2}\frac{d}{ds}(|\dot r|) =$

$= \frac{\ddot r}{|\dot r|^2} - \frac{\dot r}{|\dot r|^2}\frac{d}{ds}\left(\sqrt{(\dot r,\dot r)}\right) = \frac{\ddot r}{|\dot r|^2} - \frac{\dot r}{|\dot r|^3}(\dot r,\ddot r)\frac{dt}{ds} =$

$= \frac{|\dot r|^2\ddot r - (\dot r,\ddot r)\dot r}{|\dot r|^4}$

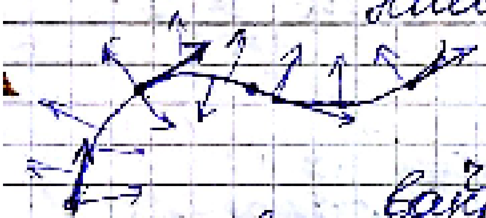
$\Rightarrow k(t) = \frac{1}{|\dot r|^4}\sqrt{(|\dot r|^2\ddot r - (\dot r,\ddot r)\dot r,\ |\dot r|^2\ddot r - (\dot r,\ddot r)\dot r)} =$

$= \frac{1}{|\dot r|^4}\sqrt{|\dot r|^4|\ddot r|^2 - 2|\dot r|^2(\dot r,\ddot r)^2 + |\dot r|^2(\dot r,\ddot r)^2} =$

$= \frac{1}{|\dot r|^3}\sqrt{|\dot r|^2|\ddot r|^2 - |\dot r|^2|\ddot r|^2\cos^2\alpha} = \frac{|\dot r||\ddot r|\sin\alpha}{|\dot r|^3}$

$\mathbb{R}^3$: $k(t) = \frac{|[\dot r,\ddot r]|}{|\dot r|^3}$; $\mathbb{R}^2$: $k(t) = \frac{|\dot x\ddot y - \ddot x\dot y|}{(\dot x^2+\dot y^2)^{3/2}}$

Плоские кривые (в $\mathbb{R}^2$).



$\bar v(s)$, $\bar n(s) = \frac{\bar r''(s)}{|\bar r''(s)|}$

Коориентация: $(\bar v(s), \bar n(s))$

$\bar r''(s) = k(s)\,\bar n(s)$ — для коориентированных кривых ф-ла верно всегда (кривизна м.б. как положительна, так и отрицательна)

Ф-лы Френе для плоской кривой.

$(\bar v(s), \bar n(s))$ — репер Френе

$\begin{cases} v'(s) = k\,n(s) \\ n'(s) = -k\,v(s) \end{cases}$ деривационные ф-лы

$n'(s) = \alpha(s)v(s) + \beta(s)n(s)$

Известно: $(\bar v,\bar v) = 1$, $(\bar n,\bar n) = 1$, $(\bar v,\bar n) = 0$

$0 = (n, n') = \beta(s)$; $(n', v) = \alpha(s)$

$(n,v) = 0 \Rightarrow (n',v) + (n,v') = 0 \Rightarrow (n',v) = -k(n,n) = -k$

$\rightarrow$ $kn = k(n,n) \Rightarrow \alpha(s) = -k$

$$\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix}'(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix}(s)$$

Имеем ортонорм. базис $\bar v_1, \dots, \bar v_n$

$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}(s+\Delta s) = B(s,\Delta s)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}(s)$, $B(s,\Delta s)B^T(s,\Delta s) = E$

Scanned by CamScanner