Классическая дифференциальная геометрия

Можов Олег Иванович

с/к Доп. главы дифф. геом. среда 16^{45} 13-20

(1) Далее всегда будем рассм-ть $\mathbb{R}^n$ с евкл. скал. произв-ием $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$, $\bar{x} = (x^1, \dots, x^n)$, $\bar{y} = (y^1, \dots, y^n)$

Напомним, что $|\bar{x}| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$, $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = |\bar{x} - \bar{y}|$

$U(x_0, \varepsilon) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\bar{x} - \bar{x}_0| < \varepsilon\}$

Кривые в евклидовом пр-ве $\mathbb{R}^n$.

Опр Элементарная кривая (простая дуга) — мн-во точек в $\mathbb{R}^n$, гомеоморфное $I = [a, b]$ ($\exists \varphi: [a,b] \to \mathbb{R}^n$)

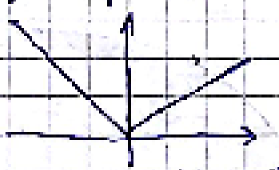
Конкретный гомеоморфизм наз-ся параметризацией

Опр Регулярная параметризация, если:

1) $\bar{r}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, где $x^i \in C^k$ — дост. но гладкие

2) $\bar{r}_t \neq 0$

Опр Элем. кривая наз-ся регулярной, если $\exists$ регулярная параметризация.



$\begin{cases} x = t^2 \\ y = at^2 \\ t \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = t^2 \\ y = bt^2 \\ t \leq 0 \end{cases}$ $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$

$\bar{r}_t \neq 0$: $x_t \neq 0$ или $y_t \neq 0$

пусть $x_t \neq 0$

$\Rightarrow$ по Т. о неявн. ф-ции $\Rightarrow t(x)$

$\Rightarrow y(t(x))$, но эта ф-ция не гладкая, хотя по принципу суперпозиции должна быть гладкая

Counter $\Rightarrow$ нельзя рег-но запарам-ть

1) Рашевский П.К. Курс класс. дифф. геом.

2) Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля.

3) Тайманов. Лекции по клас. диф. геом.

4) Дубровин, Новиков, Фоменко. Современная геометрия

Опр Две параметризованные кривые наз-ся экв-ми, если $\exists \varphi: I_1 \to I_2$ — гомеом-зм т.ч.

$(\bar{r}_1: I_1 \to \mathbb{R}^n$, $\bar{r}_2: I_2 \to \mathbb{R}^n)$ $\forall t \in I_1$: $\bar{r}_1(t) = \bar{r}_2(\varphi(t))$.

φ — замена параметра

Упр. Проверить, что это отн-е экв-ти.

Под кривой в $\mathbb{R}^n$ обычно понимают класс экв-ных кривых.

Утв. $\forall$ 2 параметризации глад. регул. кривой отобр-е будет гладким.

$\blacktriangleright$ $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ $\quad (x^1_t, \dots, x^n_t) \neq 0$ $\quad x^n_t \neq 0$

$(x^1(s), \dots, x^n(s))$ $\quad \Rightarrow t(x^n)$ $\quad x^n(s)$

$\Rightarrow t(x^n(s)) = t(s)$ $\Rightarrow$ разл. параметры гладко зависят друг от друга $\blacktriangleleft$

Scanned by CamScanner