Ascoli–Arzelà の定理

荒木 理求

araki-riku@ed.tmu.ac.jp

定理 1 (Ascoli–Arzelà の定理, 1 次元 version).

I を $\mathbb{R}$ 上の有界閉区間, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を I 上の実数値連続関数全体 $C^0(I;\mathbb{R})$ の点列とする．このとき $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様有界かつ同程度連続ならば, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は I 上一様収束する部分列を持つ.

Key Point: 可分性, Cantor の対角線論法

Proof. $I\cap\mathbb{Q}$ の全ての元からなる数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は, I の稠密部分集合である (I の可分性).

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様有界なので, 特に $\{f_n(x_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である. したがって Bolzano-Weierstrass の定理より, x_1 での値が収束するような $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{f_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ がとれる．同様に, ある部分列 $\{f_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\{f_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して, $\{f_{2,n}(x_2)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する．この操作を繰り返せば, $\{f_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\{f_{k-1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ で, $\{f_{k,n}(x_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するような部分列がとれる．このとき対角線上に並ぶ列 $\{f_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は, 任意の $i\in\mathbb{N}$ について $\{f_{n,n}(x_i)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するような関数列である (対角線論法)．実際, $\{f_{n,n}\}_{n\geq i}\subset\{f_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ であり, かつ $\{f_{i,n}(x_i)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する.

$$
\begin{array}{ccccl}
f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & \cdots & \text{s.t. } \{f_{1,n}(x_1)\} \text{ は収束する} \\
f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & \cdots & \text{s.t. } \{f_{2,n}(x_2)\} \text{ は収束する} \\
f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & \cdots & \text{s.t. } \{f_{3,n}(x_3)\} \text{ は収束する} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \{f_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}}
\end{array}
$$

以下 $\{f_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $||\cdot||_I$(一様ノルム) について Cauchy 列であることを示す．$\varepsilon>0$ を任意にとる．このとき

(1) ある $\delta>0$ が存在して

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x,y\in I\ \left(|x-y|<\delta\to|f_{n,n}(x)-f_{n,n}(y)|<\frac{\varepsilon}{3}\right)$$

を満たす ($\{f_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ の同程度連続性より).

(2) (1) の δ に対し, ある $M\in\mathbb{N}$ が存在して

$$\forall x\in I\ \exists i\in\{1,2,\cdots,M\}\ |x-x_i|<\delta$$

を満たす (I の有界性 &$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の I における稠密性より).

(3) (2) の M に対し

$$\forall i \in \{1,2,\cdots,M\}\ \exists N_i \in \mathbb{N}\ \forall m,n \in \mathbb{N}\ \left(m,n \geq N_i \to |f_{m,m}(x_i) - f_{n,n}(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

が成り立つ ($\{f_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ のとり方から, 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $\{f_{n,n}(x_i)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は絶対値ノルム $|\cdot|$ について Cauchy 列だから). したがって $N \coloneqq \max_{1\leq i\leq M} N_i$ とすれば

$$\forall i \in \{1,2,\cdots,M\}\ \forall m,n \in \mathbb{N}\ \left(m,n \geq N \to |f_{m,m}(x_i) - f_{n,n}(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

が成り立つ.

ここで (1)-(3) の手順から, N は M にのみ依存し, M は δ, δ は ε にのみ依存することがわかる. すなわち (3) の N は ε にのみ依存する. したがって任意の $m,n \geq N$, 任意の $x \in I$ について, (2) の $|x - x_i| < \delta$ を満たす x_i をとれば

$$\begin{aligned}
|f_{m,m}(x) - f_{n,n}(x)| &\leq |f_{m,m}(x) - f_{m,m}(x_i)| + |f_{m,m}(x_i) - f_{n,n}(x_i)| + |f_{n,n}(x_i) - f_{n,n}(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ. $\varepsilon > 0$ は任意だったので

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m,n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I\ (m,n \geq N \to |f_{m,m}(x) - f_{n,n}(x)| < \varepsilon) \\
\iff &\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m,n \in \mathbb{N}\ (m,n \geq N \to ||f_{m,m}(x) - f_{n,n}(x)||_I < \varepsilon) \\
\iff &\{f_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ は } ||\cdot||_I \text{ について Cauchy 列}
\end{aligned}$$

がわかる. さて $\{f_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ の一様有界性から

$$\{f_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_b^0(I) \coloneqq \{f \in C^0(I) \colon\ ||f||_I < \infty\}$$

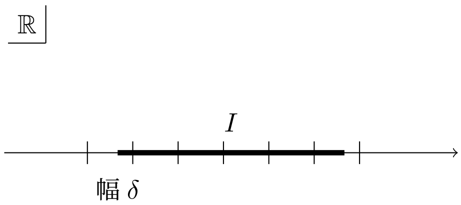
であり, $(C_b^0(I), ||\cdot||_I)$ は Banach 空間なので, $\{f_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は I 上一様収束する. □

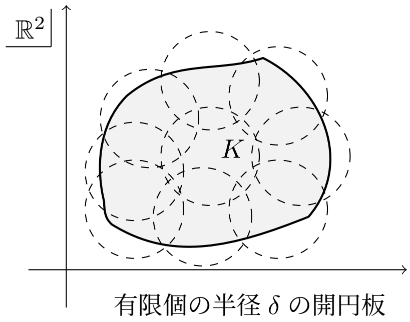
$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を I 上の複素数値連続関数全体 $C^0(I;\mathbb{C})$ の部分集合としても, 複素数の絶対値を考えることで, 1 次元 version の Ascoli–Arzelà の定理が成り立つことは容易にわかる.

さて, 定義域を $\mathbb{R}^n$ 上の有界領域 (連結な開集合) としても同様に成立するのだが, 少し詳しく見てみよう. 有界領域 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対し, $K \cap \mathbb{Q}^n$ の元からなる点列は K の可算な稠密部分集合であり, 「$\mathbb{R}^n$ の任意の有界数列は収束する部分列を持つ」というのが Bolzano-Weierstrass の定理の主張だから, Euclid ノルムを考えれば, 前半の対角線論法までは問題ない.

あとは構成した部分列が Cauchy 列であることを示せばよいのだが, (2) は 1 次元のときより多少複雑になる. 上の証明の (2) は, くだけた言い方をすれば, I の有界性から「有界区間 I を幅 δ で分割すると部屋は有限個で足りる」こと, そして $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の稠密性から「どの部屋にも必ず $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の元がいる」ことがわかるので, 各部屋に一つずつ割り当てた $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の元のうち, 最も大きい添え字を M とすればよい, という流れであった.

K の稠密部分集合がとれることはすでに見たが, 1 次元のときとパラレルな議論をするには, 「有界区間 I を (ε に依存して決まる) 幅 δ で分割すると部屋は有限個で足りる」ことに対応する, 「任意の $\delta > 0$ について, K の有限 δ-ネットが存在する」ことが必要となる.





言い換えれば K の全有界性が必要で, これは (ほとんど明かな) 次の補題からわかる.

補題 2.

Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ における任意の部分集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ について

$$K \text{ は有界} \Rightarrow K \text{ は全有界}$$

が成り立つ.

Proof. K を R^n の有界部分集合とすれば, ある点 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ と $M > 0$ が存在して

$$K \subset B(\boldsymbol{a}, M) \coloneqq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < M\}$$

が成り立つ. この $\boldsymbol{a}, M$ について $M' \coloneqq d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}) + M$ とおくと $B(\boldsymbol{a}, M) \subset [-M', M']^n$ なので, $[-M', M']^n$ が全有界であることを示せばよい.

$\varepsilon > 0$ を任意にとる. このとき $m \in \mathbb{N}$ を十分大きくとることで $1/m < \varepsilon/\sqrt{n}$ とできる. さて

$$A \coloneqq \left\{ \left(\frac{k_1}{m}, \frac{k_2}{m}, \cdots, \frac{k_n}{m} \right) : -mM' \leq k_1, k_2, \cdots, k_n \leq mM' \right\}$$

という, 各 $[-M', M']^n$ を幅 $1/m$ で分割したときの格子点の集合を考えれば

$$[-M', M']^n \subset \bigcup_{\boldsymbol{\alpha} \in A} B(\boldsymbol{\alpha}, \varepsilon)$$

となる. 実際, 任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [-M', M']^n$ に対し $\boldsymbol{y} \coloneqq \left(\frac{k_1}{m}, \frac{k_2}{m}, \cdots, \frac{k_n}{m}\right) \in A$ が存在して

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} \left| x_i - \frac{k_i}{m} \right| < \frac{1}{m}$$

が成り立つので，このような $\boldsymbol{y}$ について

$$
\begin{aligned}
d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{k_i}{m} \right)^2} \\
&< \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m^2}} = \frac{\sqrt{n}}{m} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

となり，$\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{y}, \varepsilon)$ が従う． □

このように $\mathbb{R}^n$ の有界領域 K についても無事 (2) の議論ができて，対角線論法で構成した部分列が Cauchy 列であることがわかる．

念のため証明の最後も復習すると，完備性のために $\{f_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_b^0(K)$ であることを使っていた．$K \subset \mathbb{R}^n$ が有界閉集合 (Heine-Borel の被覆定理より K はコンパクト) のとき最大値の原理 (コンパクト集合上の連続関数は最大値を持つ) より $C^0(K, \mathbb{C}) = C_b^0(K, \mathbb{C})$ が成り立つのだが，前述の通り一様有界性さえあればそのような議論は不要である．

! 以上の確認から，定義域を Euclid 空間で考える場合には有界性さえあれば十分で，定理 1 における I が開集合であるという仮定，あるいは K が領域であるという仮定は減らせることがわかる．

ここまでの結果をまとめると次の様になる．

定理 3 (Ascoli–Arzelà の定理，Euclid 空間 version).

K を $\mathbb{R}^n$ 上の有界集合，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を K 上の複素数値連続関数全体 $C^0(K;\mathbb{C})$ の点列とする．このとき $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様有界かつ同程度連続ならば，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は K 上一様収束する部分列を持つ．

$\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ は同一視できるので，定理 3 は定義域を $\mathbb{C}$ の有界領域としても成り立ち，この形は例えば Montel の定理の証明で役立つ (開集合でなくてよいことは用無しである)．

さらなる一般化によって定義域を任意の全有界距離空間としても上の定理は成り立つ．全有界距離空間 X 上の複素数値連続関数全体を $C^0(K, \mathbb{C})$ とすると，$(C^0(K, \mathbb{C}), ||\cdot||_I)$ は Banach 空間となる ($\mathbb{C}$ の完備性から示せるので，定理 3 でも問題にならなかった)．

定理 4 (Ascoli–Arzelà の定理).

(X, d) を全有界距離空間，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上の複素数値連続関数全体 $C^0(X;\mathbb{C})$ の点列とする．このとき $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様有界かつ同程度連続ならば，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は X 上一様収束する部分列を持つ．

定理 3 までの議論で得た教訓から，次の補題があれば十分である．

補題 5.

全有界距離空間 (X, d) は可分である．すなわち X の可算部分集合で，X で稠密なものが存在する．

Proof. X は全有界なので, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して有限 $1/n$-ネット $S_n = \left\{B\left(x_{n,k}, \frac{1}{n}\right) : 1 \le k \le k_n\right\}$ が存在する．このとき

$$S := \{x_{n,k} : n \in \mathbb{N}, 1 \le k \le k_n\}$$

とおけば, S は X の可算な稠密部分集合である．実際, 有限集合 S_n の可算個の合併なので可算である．また任意の $x \in X$, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $m \in \mathbb{N}$ を十分大きくとることで $1/n < \varepsilon$ とできて, S_m は X の被覆だから, ある $x_{m,k} \in S_m$ が存在して $x \in B(x_{m,k}, \frac{1}{n})$ となる．すなわち $d(x, x_{x_{m,k}}) < 1/n < \varepsilon$ が成り立つので, S は X で稠密である．

□

定理 3 が定理 1 として知られているように, 定理 4 を "きれいな形" で主張し直したのが定理 6 である．

定理 6 (Ascoli–Arzelà の定理).

(X, d) をコンパクト距離空間, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X 上の複素数値連続関数全体 $C^0(X; \mathbb{C})$ の点列とする．このとき $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が一様有界かつ同程度連続ならば, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は X 上一様収束する部分列を持つ.

Proof. X をコンパクト距離空間とすれば, X は全有界である. 実際, 任意の $\varepsilon > 0$ について $\{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$ は X の開被覆だから有限部分被覆が存在し, それは X の有限 ε-ネットに他ならない. □

上で使った「コンパクト距離空間は全有界である」は自明だが, 次の関係が有名である.

定理 7.

(X, d) を距離空間とすると, 以下は同値である.

(1) X はコンパクト
(2) X は点列コンパクト
(3) X は全有界かつ完備

参考文献

[1] Jurgen Jost. *Postmodern Analysis*. Springer.
[2] Karel SVADLENKA. 『解析学 A : 講義ノート』.