

解答 2.2.6

R の反射的閉包を $R^=$ として, $R^= \subseteq R'$ かつ $R' \subseteq R^=$ を示す.
 $R' = R \cup \{(s, s) \mid s \in S\}$ を ① とおく.

- $R^= \subseteq R'$ の証明

① より, すべての $s \in S$ に対して $(s, s) \in R'$ であるから R' は反射的である.
また, R' は R を含む. $R^=$ は R を含む最小の反射的關係であるため, $R^= \subseteq R'$ である.

- $R' \subseteq R^=$ の証明

$(s, t) \in R'$ とすると, ① より, $(s, t) \in R$ または $s = t (s \in S)$ である.

- $(s, t) \in R$ のとき, $R \subseteq R^=$ より, $(s, t) \in R^=$ である.
- $s = t (s \in S)$ のとき, $(s, t) = (s, s) \in R^=$ である.

したがって, $R' \subseteq R^=$ である.

以上から, $R' = R^=$ である. □

Ans 2.2.6

Let $R^=$ be the reflexive closure of R . We show that $R^= \subseteq R'$ and $R' \subseteq R^=$.
Let $R' = R \cup \{(s, s) \mid s \in S\}$ be ①.

- Proof of $R^= \subseteq R'$

By ①, R' is reflexive since $(s, s) \in R'$ for all $s \in S$.

Moreover, R' contains R . Since $R^=$ is the minimal reflexive relation containing R , we have $R^= \subseteq R'$.

- Proof of $R' \subseteq R^=$

Suppose $(s, t) \in R'$. Then by ①, either $(s, t) \in R$ or $s = t (s \in S)$.

- If $(s, t) \in R$, then $(s, t) \in R^=$ since $R \subseteq R^=$.
- If $s = t (s \in S)$, then $(s, t) = (s, s) \in R^=$.

Therefore, $R' \subseteq R^=$.

Hence, $R' = R^=$. □

解答 2.2.7

R^T を R の推移的閉包とする. $R^T \subseteq R^+$ と $R^+ \subseteq R^T$ を示す.

- $R^T \subseteq R^+$

$(s, t), (t, u) \in R^+$ とすると, ある i, j が存在して $(s, t) \in R_i$ かつ $(t, u) \in R_j$ である.

R^+ の定義より $(s, u) \in R_{\max(i, j)+1}$ であり, したがって, $(s, u) \in R^+$.

よって, R^+ は推移的である.

また, R^+ は R を含む. R^T は R を含む最小の推移的關係であるため, $R^T \subseteq R^+$ である.

- $R^+ \subseteq R^T$

任意の i について $R_i \subseteq R^T$ であることを数学的帰納法で示す.

– $i = 0$ のとき, $R_0 = R \subseteq R^T$.

– $i = n$ のとき $R_i \subseteq R^T$ が成り立つと仮定して, $i = n + 1$ のとき

$(s, u) \in R_{n+1}$ とすると, ある $t \in S$ が存在して $(s, t), (t, u) \in R_n$ である.

帰納法の仮定より $(s, t), (t, u) \in R^T$ であり, R^T は推移的なので $(s, u) \in R^T$.

したがって, $R^+ \subseteq R^T$ である.

以上から, $R^+ = R^T$ である. □

Ans 2.2.7

Let R^T be the transitive closure of R . We show that $R^T \subseteq R^+$ and $R^+ \subseteq R^T$.

- $R^T \subseteq R^+$

Suppose $(s, t), (t, u) \in R^+$. Then there exist some i, j such that $(s, t) \in R_i$ and $(t, u) \in R_j$.

By the definition of R^+ , we have $(s, u) \in R_{\max(i, j)+1}$, and therefore $(s, u) \in R^+$.

Thus, R^+ is transitive.

Moreover, R^+ contains R . Since R^T is the minimal transitive relation containing R , we have $R^T \subseteq R^+$.

- $R^+ \subseteq R^T$

We prove that $R_i \subseteq R^T$ for all i by mathematical induction.

– When $i = 0$, $R_0 = R \subseteq R^T$.

– Assuming $R_i \subseteq R^T$ holds for $i = n$, let's prove for $i = n + 1$.

If $(s, u) \in R_{n+1}$, then there exists some $t \in S$ such that $(s, t), (t, u) \in R_n$.

By the induction hypothesis, $(s, t), (t, u) \in R^T$, and since R^T is transitive, $(s, u) \in R^T$.

Therefore, $R^+ \subseteq R^T$.

Hence, $R^+ = R^T$. □