解答 2.2.6

R の反射的閉包を $R^=$ として，$R^= \subseteq R'$ かつ $R' \subseteq R^=$ を示す．
$R' = R \cup \{(s,s) \mid s \in S\}$ を①とおく．

- $R^= \subseteq R'$ の証明

  ①より，すべての $s \in S$ に対して $(s,s) \in R'$ であるから R' は反射的である．
  また，R' は R を含む．$R^=$ は R を含む最小の反射的関係であるため，$R^= \subseteq R'$ である．

- $R' \subseteq R^=$ の証明

  $(s,t) \in R'$ とすると，①より，$(s,t) \in R$ または $s = t\ (s \in S)$ である．

  - $(s,t) \in R$ のとき，$R \subseteq R^=$ より，$(s,t) \in R^=$ である．
  - $s = t\ (s \in S)$ のとき，$(s,t) = (s,s) \in R^=$ である．

  したがって，$R' \subseteq R^=$ である．

以上から，$R' = R^=$ である． □

Ans 2.2.6

Let $R^=$ be the reflexive closure of R. We show that $R^= \subseteq R'$ and $R' \subseteq R^=$.
Let $R' = R \cup \{(s,s) \mid s \in S\}$ be ①.

- Proof of $R^= \subseteq R'$

  By ①, since $(s,s) \in R'$ for all $s \in S$, R' is reflexive.
  Moreover, R' contains R. Since $R^=$ is the minimal reflexive relation containing R, we have $R^= \subseteq R'$.

- Proof of $R' \subseteq R^=$

  Suppose $(s,t) \in R'$. Then by ①, either $(s,t) \in R$ or $s = t\ (s \in S)$.

  - If $(s,t) \in R$, then $(s,t) \in R^=$ since $R \subseteq R^=$.
  - If $s = t\ (s \in S)$, then $(s,t) = (s,s) \in R^=$.

  Therefore, $R' \subseteq R^=$.

Hence, $R' = R^=$. □

解答 2.2.7

R^T を R の推移的閉包とする． $R^T \subseteq R^+$ と $R^+ \subseteq R^T$ を示す．

- $R^T \subseteq R^+$

  $(s,t),(t,u) \in R^+$ とすると，ある i,j が存在して $(s,t) \in R_i$ かつ $(t,u) \in R_j$ である．
  R^+ の定義より $(s,u) \in R_{\max(i,j)+1}$ であるから $(s,u) \in R^+$．
  よって，R^+ は推移的である．
  また，R^+ は R を含む．R^T は R を含む最小の推移的関係であるため，$R^T \subseteq R^+$ である．

- $R^+ \subseteq R^T$

  任意の i について $R_i \subseteq R^T$ であることを数学的帰納法で示す．

  - $i = 0$ のとき，$R_0 = R \subseteq R^T$．
  - $i = n$ のとき $R_i \subseteq R^T$ が成り立つと仮定して，$i = n+1$ のとき
    $(s,u) \in R_{n+1}$ とすると，S の定義より，ある $t \in S$ が存在して $(s,t),(t,u) \in R_n$ である．
    $R_n \subseteq R^T$（帰納法の仮定）より $(s,t),(t,u) \in R^T$ であり，R^T が推移的であることから $(s,u) \in R^T$．

  したがって，$R^+ \subseteq R^T$ である．

以上から，$R^+ = R^T$ である． □

Ans 2.2.7

Let R^T be the transitive closure of R. We show that $R^T \subseteq R^+$ and $R^+ \subseteq R^T$.

- $R^T \subseteq R^+$

  If $(s,t),(t,u) \in R^+$, then there exist some i,j such that $(s,t) \in R_i$ and $(t,u) \in R_j$.
  By definition of R^+, we have $(s,u) \in R_{\max(i,j)+1}$, thus $(s,u) \in R^+$.
  Therefore, R^+ is transitive.
  Moreover, R^+ contains R. Since R^T is the minimal transitive relation containing R, we have $R^T \subseteq R^+$.

- $R^+ \subseteq R^T$

  We prove that $R_i \subseteq R^T$ holds for all i by mathematical induction.

  - When $i = 0$, $R_0 = R \subseteq R^T$.
  - Assuming $R_i \subseteq R^T$ holds for $i = n$, we prove for $i = n+1$.
    If $(s,u) \in R_{n+1}$, then by definition of S, there exists some $t \in S$ such that $(s,t),(t,u) \in R_n$.
    By the induction hypothesis $R_n \subseteq R^T$, we have $(s,t),(t,u) \in R^T$, and since R^T is transitive, $(s,u) \in R^T$.

  Therefore, $R^+ \subseteq R^T$.

Hence, $R^+ = R^T$. □