解答 3.2.4

$$n(S_0) = 0$$
$$n(S_1) = 3 + 3 \times 0 + 0^3 = 3$$
$$n(S_2) = 3 + 3 \times 3 + 3^3 = 39$$
$$n(S_3) = 3 + 3 \times 39 + 39^3 = 59439$$

解答 3.2.5

任意の i について $S_i \subseteq S_{i+1}$ であることを数学的帰納法で示す.

- $i = 0$ のとき

  $S_0 = \emptyset$ より, $S_0 \subseteq S_1$ である.

- $i = 1$ のとき

  $S_1 = \{\texttt{true}, \texttt{false}, 0\}$ より, $S_1 \subseteq S_2$ である.

- $i = k$ のとき, $S_i \subseteq S_{i+1}$ が成り立つと仮定して, $i = k + 1$ のとき

  $t_1 \in S_{k+1}$ について

  - t_1 が定数のとき

    S の定義より, $t_1 \in S_{k+2}$ である.

  - $t_1 = \texttt{succ}\ t_2$ または $t_1 = \texttt{pred}\ t_2$ または $t_1 = \texttt{iszero}\ t_2$ のとき

    S の定義より, $t_2 \in S_k$ であり, 帰納法の仮定から $t_2 \in S_{k+1}$ を得る.
    ゆえに, S の定義から $t_1 \in S_{k+2}$ である.

  - $t_1 = \texttt{if}\ t_2\ \texttt{then}\ t_3\ \texttt{else}\ t_4$ のとき

    S の定義より, $t_2, t_3, t_4 \in S_k$ であり, 帰納法の仮定から $t_2, t_3, t_4 \in S_{k+1}$ を得る.
    ゆえに, S の定義から $t_1 \in S_{k+2}$ である.

  したがって, $S_{i+1} \subseteq S_{i+2}$ が成り立つ.

以上から, 各 i について $S_i \subseteq S_{i+1}$ であるので, 集合 S_i は累積的である.

Ans 3.2.5

We prove that $S_i \subseteq S_{i+1}$ holds for all i by mathematical induction.

- For $i = 0$

  Since $S_0 = \emptyset$, $S_0 \subseteq S_1$ holds.

- For $i = 1$

  Since $S_1 = \{\texttt{true},\ \texttt{false},\ 0\}$, $S_1 \subseteq S_2$ holds.

- Assume $S_i \subseteq S_{i+1}$ holds for $i = k$, then for $i = k + 1$

  For $t_1 \in S_{k+1}$

  - When t_1 is a constant

    By definition of S, $t_1 \in S_{k+2}$.
  - When $t_1 = \texttt{succ}\ t_2$ or $t_1 = \texttt{pred}\ t_2$ or $t_1 = \texttt{iszero}\ t_2$

    By definition of S, $t_2 \in S_k$, and by induction hypothesis, we get $t_2 \in S_{k+1}$.
    Therefore, by definition of S, $t_1 \in S_{k+2}$.
  - When $t_1 = \texttt{if}\ t_2\ \texttt{then}\ t_3\ \texttt{else}\ t_4$

    By definition of S, $t_2, t_3, t_4 \in S_k$, and by induction hypothesis, we get $t_2, t_3, t_4 \in S_{k+1}$.
    Therefore, by definition of S, $t_1 \in S_{k+2}$.

  Hence, $S_{i+1} \subseteq S_{i+2}$ holds.

From the above, since $S_i \subseteq S_{i+1}$ holds for each i, the set S_i is cumulative.

解答 3.2.6

命題 3.2.6 の証明例が少々分かりにくかったので，私なりにまとめてみる．

$\mathcal{T}$ はある条件を満たす最小の集合と定義された．よって，(a) と (b) を示せば十分．

(a) S は条件を満たすこと

(b) S は条件を満たす集合の中で最小であること

ある条件：

(1) $\{\texttt{true},\ \texttt{false},\ 0\} \in \mathcal{T}$

(2) $t_1 \in \mathcal{T}$ ならば $\texttt{succ}\ t_1,\ \texttt{pred}\ t_1,\ \texttt{iszero}\ t_1 \in \mathcal{T}$

(3) $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T}$ ならば $\texttt{if}\ t_1\ \texttt{then}\ t_2\ \texttt{else}\ t_3 \in \mathcal{T}$

証明　以下，証明を行う．

(a) S は条件を満たすこと

- $S_1 = \{\texttt{true},\ \texttt{false},\ 0\}$ より，条件(1)を満たす．
- ある i が存在して，$t_1 \in S_i$ のとき，S の定義より，
  $\texttt{succ}\ t_1,\ \texttt{pred}\ t_1,\ \texttt{iszero}\ t_1 \in S_{i+1}$ であるから，条件(2)を満たす．
- ある i が存在して，$t_1, t_2, t_3 \in S_i$ のとき，S の定義より，
  $\texttt{if}\ t_1\ \texttt{then}\ t_2\ \texttt{else}\ t_3 \in S_{i+1}$ であるから，条件(3)を満たす．

(b) S は条件を満たす集合の中で最小であること

ある集合 S' が条件(1), (2), (3)を満たすとする．すべての i に対して $S_i \subseteq S'$ であることを示す．

- $i=0$ のとき

  $S_0 = \emptyset \subseteq S'$ である．
- $i=1$ のとき

  $S_1 = \{\texttt{true},\ \texttt{false},\ 0\}$ であり，条件(1)より，$S_1 \subseteq S'$ である．
- $i=k$ のとき，$S_i \subseteq S'$ が成り立つと仮定して，$i=k+1$ のとき

  $t_1 \in S_{k+1}$ について
  * t_1 が定数のとき

    S の定義より，$t_1 \in S_k$ である．よって，帰納法の仮定より，$t_1 \in S'$ である．
  * $t_1 = \texttt{succ}\ t_2$ または $t_1 = \texttt{pred}\ t_2$ または $t_1 = \texttt{iszero}\ t_2$ のとき

    S の定義より，$t_2 \in S_k$ である．帰納法の仮定より，$S_k \subseteq S'$ であるから，$t_2 \in S'$ を得る．よって，条件(2)より，$t_1 \in S'$ である．
  * $t_1 = \texttt{if}\ t_2\ \texttt{then}\ t_3\ \texttt{else}\ t_4$ のとき

    S の定義より，$t_2, t_3, t_4 \in S_k$ である．帰納法の仮定より，$S_k \subseteq S'$ であるから，$t_2, t_3, t_4 \in S'$ を得る．よって，条件(3)より，$t_1 \in S'$ である．

  したがって，すべての i に対して $S_i \subseteq S'$ であるから，$S = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i \subseteq S'$ が成り立つ．

以上から，S はある条件を満たす最小の集合である．

(a) と (b) が示されたので，$\mathcal{T} = S$ を得る． $\square$

Ans 3.2.6

Since the example proof of Proposition 3.2.6 was somewhat difficult to understand, I'll summarize it in my own way.

$\mathcal{T}$ was defined as the smallest set satisfying certain conditions. Therefore, it is sufficient to show (a) and (b).

(a) S satisfies the conditions

(b) S is the smallest among sets satisfying the conditions

The conditions:

(1) $\{\texttt{true},\ \texttt{false},\ 0\} \in \mathcal{T}$

(2) if $t_1 \in \mathcal{T}$ then $\texttt{succ}\ t_1,\ \texttt{pred}\ t_1,\ \texttt{iszero}\ t_1 \in \mathcal{T}$

(3) if $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T}$ then $\texttt{if}\ t_1\ \texttt{then}\ t_2\ \texttt{else}\ t_3 \in \mathcal{T}$

$\boxed{\textbf{Proof}}$ In what follows, we give a proof.

(a) S satisfies the conditions

- Since $S_1 = \{\texttt{true},\ \texttt{false},\ 0\}$, it satisfies condition (1).
- When there exists some i such that $t_1 \in S_i$, by definition of S,
  $\texttt{succ}\ t_1,\ \texttt{pred}\ t_1,\ \texttt{iszero}\ t_1 \in S_{i+1}$, thus satisfying condition (2).
- When there exists some i such that $t_1, t_2, t_3 \in S_i$, by definition of S,
  $\texttt{if}\ t_1\ \texttt{then}\ t_2\ \texttt{else}\ t_3 \in S_{i+1}$, thus satisfying condition (3).

(b) S is the smallest among sets satisfying the conditions

Let S' be a set satisfying conditions (1), (2), (3). We show that $S_i \subseteq S'$ for all i.

- For $i = 0$

  $S_0 = \emptyset \subseteq S'$.
- For $i = 1$

  Since $S_1 = \{\texttt{true}, \texttt{false}, 0\}$ and by condition (1), $S_1 \subseteq S'$.
- Assume $S_i \subseteq S'$ holds for $i = k$, then for $i = k + 1$

  For $t_1 \in S_{k+1}$
  * When t_1 is a constant

    By definition of S, $t_1 \in S_k$. Thus, by induction hypothesis, $t_1 \in S'$.
  * When $t_1 = \texttt{succ}\ t_2$ or $t_1 = \texttt{pred}\ t_2$ or $t_1 = \texttt{iszero}\ t_2$

    By definition of S, $t_2 \in S_k$. By induction hypothesis, since $S_k \subseteq S'$, we get $t_2 \in S'$. Therefore, by condition (2), $t_1 \in S'$.
  * When $t_1 = \texttt{if}\ t_2\ \texttt{then}\ t_3\ \texttt{else}\ t_4$

    By definition of S, $t_2, t_3, t_4 \in S_k$. By induction hypothesis, since $S_k \subseteq S'$, we get $t_2, t_3, t_4 \in S'$. Therefore, by condition (3), $t_1 \in S'$.

  Thus, since $S_i \subseteq S'$ holds for all i, we have $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i \subseteq S'$.

From the above, S is the smallest set satisfying the conditions.

Since (a) and (b) have been shown, we obtain $\mathcal{T} = S$. □