

【数学A】 第1章 場合の数と確率

高等学校数学科用/104/数研/数A/713

Riku Sugawara

12.2025

第1節 確率

1.1 事象と確率

Definition 1.1.1 確率

ある事柄が起こることが期待される程度を表す数値を **確率** という。

Definition 1.1.2 試行と事象

「さいころを投げる」とか「くじを引く」などのように、同じ条件のもとで繰り返すことができ、その結果が偶然によって決まる実験や観測を **試行** という。

また、試行の結果として起こる事柄を **事象** という。

Definition 1.1.3 全事象と根元事象

1つの試行において、起こりうる結果全体を集合 U で表すとき、その試行におけるどの事象も、 U の部分集合で表すことができる。 U 自身で表される事象を **全事象**、 U のただ1つの要素からなる集合で表される事象を **根元事象** という。

Definition 1.1.4 同様に確からしい

1つの試行において、ある事象 A の起こる確率を $P(A)$ で表す。^{*}

ある試行において、どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき、これらの根元事象は **同様に確からしい** という。^{**}

Theorem 1.1.1 事象 A の起こる確率

同様に確からしい試行において、起こりうるすべての場合の数を N 、事象 A の起こる場合の数を a とするとき、事象 A の起こる確率 $P(A)$ は次の式で表される。

$$P(A) = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}} = \frac{a}{N} \quad (1.1.1)$$

* $P(A)$ の P は、確率を意味する Probability の頭文字である。また、事象 A の起こる確率を単に **事象 A の確率** ということもある。

** ここから取り上げる試行では、全事象 U におけるすべての根元事象は同様に確からしいものとする。

例題 【教 p.47 例題 8】

A, B の 2 人を含む 6 人のリレー選手がいる。走る順番をくじで決めるとき、A が 1 番目、B が 6 番目になる確率を求めよ。

Proof.

まず、起こりうるすべての場合の数を考える。

6 人全員の並び順は、 $6!$ 通りある。

次に、求めたい場合の数を考える。

A が 1 番目、B が 6 番目のとき、A, B 以外の 4 人の並び順は、 $4!$ 通りある。

よって、求める確率は

$$\frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$$

□

例題 【教 p.47 例題 9】

赤玉 4 個、白玉 5 個の入った袋から、2 の玉を同時に取り出すとき、赤玉 1 個、白玉 1 個が出る確率を求めよ。

Proof.

まず、起こりうるすべての場合の数を考える。全部の 9 個から 2 個取る組合せは、 ${}_9C_2$ 通りある。

次に、求めたい場合の数を考える。

赤玉 4 個から 1 個、白玉 5 個から 1 個取る組合せは、 ${}_4C_1 \times {}_5C_1$ 通りある。

よって、求める確率は

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_5C_1}{{}_9C_2} = 4 \times 5 \times \frac{2 \cdot 1}{9 \cdot 8} = \frac{5}{9}$$

□

1.2 確率の基本性質

確率の基本性質を議論する前に、事象 A, B に対して、次のような事象を定義しておく。

Definition 1.2.1 積事象と和事象

事象 A と B がともに起こる事象を A, B の **積事象** といい、 $A \cap B$ で表す。

一方、事象 A または B が起こる事象を A と B の **和事象** といい、 $A \cup B$ で表す。

Definition 1.2.2 排反事象

2つの事象 A, B が決して同時に起こらないとき、

A, B は互いに**排反**である

または

A, B は互いに**排反事象**である

という。

Definition 1.2.3 空事象

A, B が互いに排反であることは、 $A \cap B = \emptyset$ であることと同値である。

空集合 \emptyset で表される事象を **空事象** という。空事象は決して起こらない事象である。

Theorem 1.2.1 確率の基本性質

(1) どんな事象 A についても

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

とくに、空事象 \emptyset について $P(\emptyset) = 0$

全事象 U について $P(U) = 1$

(2) 事象 A, B が互いに排反であるとき

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (1.2.1)$$

Theorem 1.2.1 の (2) を、確率の **加法定理** という。

3つ以上の事象については、どの2つの事象も互いに排反であるとき、これらは互いに排反である という。3つ以上の排反な事象についても、2つの場合の加法定理と同様なことが成り立つ。

例題 【教 p.51 例題 10】

赤玉 4 個、白玉 5 個の入った袋から、2 個の玉を同時に取り出すとき、2 個が同じ色である確率を求めよ。

Proof.

まず、起こりうるすべての場合の数を考える。

全部の 9 個から 2 個取る組合せは、 ${}_9C_2$ 通りある。

次に、求めたい場合の数を考える。

ここで、「2 個が同じ色である」という事象は、

「2 個とも赤玉である」という事象を A ,

「2 個とも白玉である」という事象を B

の和事象 $A \cup B$ である。

A, B は互いに排反であるから、[確率の加法定理](#) より

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4C_2}{9C_2} + \frac{5C_2}{9C_2} = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{4}{9}$$

□

Definition 1.2.4 余事象

全事象を U とする。事象 A に対して、「 A が起こらない」という事象を A の **余事象** といい、 \bar{A} で表す。 A, \bar{A} は互いに排反である。

Theorem 1.2.2 余事象と確率

事象 A に対して、 A が起こらない事象を A の **余事象** といい、 \bar{A} で表す。

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (1.2.2)$$

例題 【教 p.52 例 16】

1 から 100 までの番号札 100 枚のから 1 枚を引くとき, 5 の倍数でない番号を引く確率を求めよ.

Proof.

まず, 起こりうるすべての場合の数を考える.

100 枚から 1 枚引くため, ${}_{100}C_1$ 通りある.

次に, 求めたい場合の数を考える.

引いた札の番号が「5 の倍数でない」という事象は, 「5 の倍数である」という事象の余事象である.

5 の倍数の番号を引く確率は, $\frac{20}{100}$

よって, 求める確率は

$$1 - \frac{20}{100} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

□

例題 【教 p.52 応用例題 10】

1 から 9 までの番号札 9 枚のから 4 枚を同時に引くとき, 少なくとも 1 枚が偶数の番号である確率を求めよ.

Proof.

まず, 起こりうるすべての場合の数を考える.

9 枚から 4 枚引くため, ${}_9C_4$ 通りある.

次に, 求めたい場合の数を考える.

「少なくとも 1 枚が偶数」という事象は, 「偶数が 1 枚もない」すなわち「4 枚とも奇数」という事象の余事象である.

奇数の札は 5 枚ある.

よって, 4 枚とも奇数である確率は, $\frac{{}_5C_4}{{}_9C_4} = \frac{5}{126}$

よって, 求める確率は, この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{5}{126} = \frac{121}{126}$$

□

ここまででは、互いに排反な事象についての確率を考えてきた。ここからは、2つに事象 A, B が互いに排反でないとき、和事象の確率 $P(A \cup B)$ について考えてみよう。

Theorem 1.2.3 一般の和事象の確率

全事象を U とする。2つの事象 A, B が互いに排反でないとき、和事象の確率 $P(A \cup B)$ は次の式で表される。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (1.2.3)$$

例題 【教 p.53 例 17】

1から30までの30枚の番号札から1枚引くとき、その番号が2の倍数または3の倍数である確率を求めよ。

Proof.

まず、起こりうるすべての場合の数を考える。

30枚から1枚引くため、 ${}_{30}C_1$ 通りある。

次に、求めたい場合の数を考える。

引いた札の番号が「2の倍数である」という事象を A 、「3の倍数である」という事象を B とすると、求める確率は $P(A \cup B)$ である。

ここで、

$$A = \{2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots, 2 \cdot 15\}$$

$$B = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 10\}$$

$$A \cap B = \{6 \cdot 1, 6 \cdot 2, 6 \cdot 3, \dots, 6 \cdot 5\}$$

であるから、 $n(A) = 15$, $n(B) = 10$, $n(A \cap B) = 5$ である。

よって、番号が2の倍数または3の倍数である確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

□

1.3 独立な試行と確率

A, B の 2 人がさいころを投げるとする。このとき, A がさいころを投げる試行と, B がさいころを投げる試行では, それぞれの結果は互いに影響を与えない。

Definition 1.3.1 独立な試行

いくつかの試行において, どの試行の結果も他の試行の結果に影響を与えないとき, これらの試行は **独立** であるといふ。

一般に, 独立な 2 つの試行における事象の確率について, 次のことが成り立つ。

Theorem 1.3.1 独立な試行の確率

2 つの試行 S と T が独立であるとき, S で事象 A が起こり, かつ T で事象 B が起こる確率 p は, $P(A)$ と $P(B)$ の積に等しい。

すなわち,

$$p = P(A) \times P(B) \quad (1.3.1)$$

独立な 3 つ以上の試行についても, Theorem 1.3.1 と同様なことが成り立つ。

練習問題 【教 p.55 例 18】

2 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げるとき, 次の確率を求めよ。

- (1) 硬貨は 2 枚とも表が出て, さいころは偶数の目が出る。
- (2) 硬貨は 1 枚だけが表が出て, さいころは 2 以下の目が出る。

Proof.

(1) 「硬貨を投げる」という試行と, 「さいころを投げる」という試行は独立である。

硬貨が 2 枚とも表が出る確率は, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

さいころが偶数の目が出る確率は, $\frac{1}{2}$

よって, 求める確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

□

例題 【教 p.56 例題 11】

A の袋には赤玉 3 個と白玉 2 個, B の袋には赤玉 2 個と白玉 4 個が入っている. A, B の袋から 1 個ずつ玉を取り出すとき, 次の確率を求めよ.

- (1) ともに赤玉を取り出す確率
- (2) 同じ色の玉を取り出す確率

Proof.

(1) 「A の袋から玉を 1 個取り出す」という試行と, 「B の袋から玉を 1 個取り出す」という試行は独立である.

A の袋から赤玉を取り出す確率は, $\frac{3}{5}$

B の袋から赤玉を取り出す確率は, $\frac{2}{6}$

よって, 求める確率は

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{5}$$

□

Proof.

(2) 「A の袋から玉を 1 個取り出す」という試行と, 「B の袋から玉を 1 個取り出す」という試行は独立である.

また, 「同じ色の玉を取り出す」という事象は, 「赤玉を取り出す」という場合と「白玉を取り出す」という場合がある.

ともに赤玉を取り出す確率は, (1) より $\frac{1}{5}$

ともに白玉を取り出す確率は, $\frac{2}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{15}$

これらの事象は互いに排反であるから, 求める確率は

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$$

□

Definition 1.3.2 反復試行

同じ条件のもとでの試行の繰り返しを **反復試行** という。1つの試行を何回か繰り返すとき、これらの試行は独立である。

Theorem 1.3.2 反復試行の確率

反復試行の確率について、一般に次のことが成り立つ。

1回の試行で事象 A の起こる確率を p とする。

この試行を n 回行う反復試行で、 A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_n C_r p^r (1-p)^{n-r} \quad (1.3.2)$$

一般に、正の数 a に対して、 $a^0 = 1$ と定めることとする。

例題 【教 p.58 例題 12】

赤玉 2 個、白玉 4 個の入った袋から、玉を 1 個取り出し、色を見てからもとにもどす。この試行を 6 回行うとき、次の確率を求めよ。

- (1) 赤玉が 5 回以上出る確率
- (2) 6 回目に 3 度目の赤玉が出る確率

Proof.

(1) 1 回の試行で赤玉が出る確率は、 $\frac{1}{3}$ である。また、6 回のうち赤玉が 5 回以上出るのは、次の場合である。

赤玉がちょうど 5 回出る 赤玉が 6 回出る

これらの事象は互いに排反であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} {}_6 C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 &= 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^6 \\ &= \frac{13}{729} \end{aligned}$$

□

Proof.

(2) 5 回目までに 赤玉がちょうど 2 回 出て、6 回目に 3 度目の赤玉が出る確率であるから

$$\begin{aligned} {}_5 C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} &= 10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{80}{729} \end{aligned}$$

□

例題 【教 p.59 応用例題 11】

数直線上を動く点 P が原点の位置にある。1枚の硬貨を投げて、表が出たときは P を正の向きに 2だけ進め、裏が出たときは P を負の向きに 1だけ進める。硬貨を 6回投げ終わったとき、 P が原点にもどっている確率を求めよ。

Technique 1.3.1 反復試行は、(並び替えの数) × (1個あたりの確率) で計算せよ!

反復試行の確率は、(並び替えの数) と (1個あたりの確率) を順に考えることで求めることができる。

このように考えることによって、事象が 3つ以上の場合でも容易に確率を求めることができる。

Proof.

条件を満たす場合を考えて、和の法則を使って確率を求めるこどもできる。しかし、この方法では、漏れなく場合を分けることと時間がかかることがデメリットである。

したがって、次のように文字を使用し、一般化することによって求めることとする。

6回のうち、表の回数を r 回とすると、裏の回数は $6 - r$ 回である。

よって、6回投げ終わったときの P の座標は $2r + (-1)(6 - r)$ と表すことができる。

硬貨を 1回投げる時、表が出る確率は $\frac{1}{2}$ である。

6回のうち、表が r 回出るとすると、裏は $(6 - r)$ 回出るから 6回で原点に戻るのは

$$2r + (-1)(6 - r) = 0$$

が成り立つときである。

これを解くと $r = 2$

よって、 P が原点にもどっているのは 6回のうち 表がちょうど 2回 出るときである。

したがって、求める確率は

$$\begin{aligned} {}_6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 &= 15 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{15}{64} \end{aligned}$$

□

1.4 条件付き確率

Definition 1.4.1 条件付き確率

条件付き確率 一般に、1つの試行における2つの事象 A, B について、事象 A が起こったとして、そのときに事象 B が起こる確率を、 A が起こったときの B が起こる**条件付き確率**といい、 $P_A(B)$ で表す。

ここで、全事象を U とする。2つの事象 A, B について、条件付き確率 $P_A(B)$ は、

A を全事象としたときに、事象 B が起こる確率

であり、次の式で定義される。ただし、 $n(A) \neq 0$ とする。

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \quad (1.4.1)$$

式 1.4.1 の右辺の分母と分子を、それぞれ $n(U)$ で割ると、次の等式が得られる。

Theorem 1.4.1 条件付き確率

2つの事象 A, B について、次が成り立つ。

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (1.4.2)$$

例題 【教 p.61 例題 13】

ある博物館の入館者のうち、全体の 20% が高校生で、全体の 15% が前売り券で入館した高校生である。入館した高校生の中から 1 人を選び出すとき、その人が前売り券で入館している確率を求めよ。

Technique 1.4.1 条件付き確率は、2つの確率を求めよ！

Theorem 1.4.1 より、「 A が起こる確率」と、「 A と B がともに起こる確率」の 2 つを求めるだけで、条件付き確率を求めることができる。すなわち、**条件付き確率の問題は確率 2 問分にすぎない** ということである。

Proof.

入館者全体から選び出された 1 人が高校生であるという事象を A 、前売り券で入館しているという事象を B とすると

$$P(A) = \frac{20}{100}, \quad P(A \cap B) = \frac{15}{100}$$

よって、求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{20}{100}} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

□

練習問題 【教 p.61 練習 51】

大人と子どもの人数の比が 3 : 2 であるグループに、ある提案をしたところ、子供で賛成した人数は全体の 15% であった。このグループの子どもの中から 1 人選び出すとき、その人が提案に賛成である確率を求めよ。

Proof.

グループから選ぶ出された 1 人が子どもである という事象を A 、提案に賛成である という事象を B とすると

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(A \cap B) = \frac{15}{100}$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{15}{100} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

□

練習問題 【MASTERKEYp.127 例題】

ある製品の 50% は工場 X、30% は工場 Y、20% は工場 Z で製造されており、工場 X、Y、Z で製造された製品にはそれぞれ 5%，3%，2% の確率で不良品が含まれる。

この製品の中から無作為に 1 つを選んで調べたところ不良品であったとき、それが工場 X の製品である確率を求めよ。

Proof.

不良品である という事象を A 、工場 X の製品である という事象を B とすると

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{50}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{30}{100} \cdot \frac{3}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{380}{10000} \\ P(A \cap B) &= \frac{50}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{250}{10000} \end{aligned}$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{250}{10000}}{\frac{380}{10000}} \\ &= \frac{250}{380} = \frac{25}{38} \end{aligned}$$

□

式 1.4.2において、分母を払って得られる等式から、次の確率の 乗法定理 が成り立つ。

Theorem 1.4.2 確率の乗法定理

2つの事象 A, B がともに起こる確率 $P(A \cap B)$ は、次の式で表される。

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) \quad (1.4.3)$$

3つ以上の事象の場合についても、Theorem 1.4.2 と同様なことが成り立つ。

練習問題 【教 p.62 例 22】

当たりくじを 4 本含む 10 本くじを、A, B の 2 人がこの順に 1 本ずつ引く。ただし、引いたくじはもとにもどさない。この試行において、A, B の 2 人とも当たる確率を求めよ。

Proof.

A が当たる という事象を A , B が当たる という事象を B

とすると、求める確率は $P(A \cap B)$ は、乗法定理により

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

A が当たったときに、残りのくじは 9 本で、当たりくじは 3 本を含むから、条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{3}{9}$$

よって、求める確率は

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{4}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

□

練習問題 【教 p.62 練習 52】

例 22において、次の確率を求めよ。

- (1) A が当たり、B がはずれる確率
- (2) A がはずれ、B が当たる確率
- (3) 2 人ともはずれる確率

Proof.

(1) A が当たる という事象を A , B がはずれる という事象を \bar{B}

とすると, 求める確率は $P(A \cap \bar{B})$ は, 乗法定理により

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P_A(\bar{B})$$

A が当たったときに, 残りのくじは 9 本で, はずれくじは 6 本を含むから, 条件付き確率 $P_A(\bar{B})$ は

$$P_A(\bar{B}) = \frac{6}{9}$$

よって, 求める確率は

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)P_A(\bar{B}) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

□

Proof.

(2) A がはずれる という事象を \bar{A} , B が当たる という事象を B

とすると, 求める確率は $P(\bar{A} \cap B)$ は, 乗法定理により

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$$

A がはずれたときに, 残りのくじは 9 本で, 当たりくじは 4 本を含むから, 条件付き確率 $P_{\bar{A}}(B)$ は

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{4}{9}$$

よって, 求める確率は

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$$

□

Proof.

(3) 求める確率は $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ は, 乗法定理により

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P_{\bar{A}}(\bar{B})$$

A がはずれたときに, 残りのくじは 9 本で, はずれくじは 5 本を含むから, 条件付き確率 $P_{\bar{A}}(\bar{B})$ は

$$P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{5}{9}$$

よって, 求める確率は

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

□

1.5 期待值