【数学 A】 第 1 章 場合の数と確率

高等学校数学科用/104/数研/数 A/713

Riku Sugawara

12.2025

第 1 節　確率

1.1　事象と確率

Definition 1.1.1　確率

ある事柄が起こることが期待される程度を表す数値を **確率** という.

Definition 1.1.2　試行と事象

「さいころを投げる」とか「くじを引く」などのように, 同じ条件のもとで繰り返すことができ, その結果が偶然によって決まる実験や観測を **試行** という.
また, 試行の結果として起こる事柄を **事象** という.

Definition 1.1.3　全事象と根元事象

1 つの試行において, 起こりうる結果全体を集合 U で表すとき, その試行におけるどの事象も, U の部分集合で表すことができる. U 自身で表される事象を **全事象** , U のただ 1 つの要素からなる集合で表される事象を **根元事象** という.

Definition 1.1.4　同様に確からしい

1 つの試行において, ある事象 A の起こる確率を $P(A)$ で表す. *
ある試行において, どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき, これらの根元事象は **同様に確からしい** という.**

Theorem 1.1.1　事象 A の起こる確率

同様に確からしい試行において, 起こりうるすべての場合の数を N , 事象 A の起こる場合の数を a とするとき, 事象 A の起こる確率 $\boldsymbol{P(A)}$ は次の式で表される.

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\textbf{事象 } A \textbf{ の起こる場合の数}}{\textbf{起こりうるすべての場合の数}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{N}} \tag{1.1.1}$$

---

* $P(A)$ の P は, 確率を意味する Probability の頭文字である. また, 事象 A の起こる確率を単に **事象 A の確率** ということもある.

** ここから取り上げる試行では, 全事象 U におけるすべての根元事象は同様に確からしいものとする.

例題 【教 p.47 例題 8】

A, B の 2 人を含む 6 人のリレー選手がいる。走る順番をくじで決めるとき、A が 1 番目、B が 6 番目になる確率を求めよ。

Proof.

まず、起こりうるすべての場合の数を考える。

6 人全員の並び順は, $6!$ 通りある.

次に、求めたい場合の数を考える。

A が 1 番目、B が 6 番目のとき, A, B 以外の 4 人の並び順は, $4!$ 通りある.

よって、求める確率は

$$\frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$$

□

例題 【教 p.47 例題 9】

赤玉 4 個, 白玉 5 個の入った袋から、2 の玉を同時に取り出すとき、赤玉 1 個、白玉 1 個が出る確率を求めよ。

Proof.

まず、起こりうるすべての場合の数を考える。全部の 9 個から 2 個取る組合せは, ${}_9\mathrm{C}_2$ 通りある.

次に、求めたい場合の数を考える。

赤玉 4 個から 1 個、白玉 5 個から 1 個取る組合せは, ${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1$ 通りある.

よって、求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2} = 4 \times 5 \times \frac{2 \cdot 1}{9 \cdot 8} = \frac{5}{9}$$

□

1.2　確率の基本性質

確率の基本性質を議論する前に、事象 A, B に対して、次のような事象を定義しておく。

Definition 1.2.1　積事象と和事象

事象 A と B がともに起こる事象を A , B の **積事象** といい, $\boldsymbol{A \cap B}$ で表す.

一方, 事象 A または B が起こる事象を A と B の **和事象** といい, $\boldsymbol{A \cup B}$ で表す.

Definition 1.2.2　排反事象

2 つの事象 A 、 B が決して同時に起こらないとき、

A, B は互いに**排反**である

または

A, B は互いに**排反事象**である

という。

Definition 1.2.3　空事象

A 、 B が互いに排反であることは、$A \cap B = \emptyset$ であることと同値である。

空集合 $\emptyset$ で表される事象を **空事象** という。空事象は決して起こらない事象である。

Theorem 1.2.1　確率の基本性質

(1) どんな事象 A についても

$$\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$$

とくに、空事象 $\emptyset$ について　$\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$

全事象 U について　$\boldsymbol{P(U) = 1}$

(2) 事象 A, B が互いに排反であるとき

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)} \tag{1.2.1}$$

Theorem1.2.1 の (2) を、確率の **加法定理** という。

3 つ以上の事象については、どの 2 つの事象も互いに排反であるとき、これらは 互いに排反である という。3 つ以上の排反な事象についても、2 つの場合の加法定理と同様なことが成り立つ。

例題 【教 p.51 例題 10】

赤玉 4 個、白玉 5 個の入った袋から、2 個の玉を同時に取り出すとき、2 個が同じ色である確率を求めよ。

Proof.

まず、起こりうるすべての場合の数を考える。

全部の 9 個から 2 個取る組合せは, ${}_9\mathrm{C}_2$ 通りある.

次に、求めたい場合の数を考える。

ここで、「2 個が同じ色である」という事象は、

「2 個とも赤玉である」という事象を A,

「2 個とも白玉である」という事象を B

の和事象 $A \cup B$ である。

A, B は互いに排反であるから、確率の加法定理より

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} + \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{4}{9}$$

□

Definition 1.2.4 余事象

全事象を U とする。事象 A に対して, 「A が起こらない」という事象を A の **余事象** といい, $\overline{\boldsymbol{A}}$ で表す. $A, \overline{A}$ は互いに排反である。

Theorem 1.2.2 余事象と確率

事象 A に対して, A が起こらない事象を A の **余事象** といい, $\overline{A}$ で表す.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{1.2.2}$$

例題 【教 p.52 例 16】

1 から 100 までの番号札 100 枚のから 1 枚を引くとき、5 の倍数でない番号を引く確率を求めよ。

Proof.

まず、起こりうるすべての場合の数を考える。

100 枚から 1 枚引くため, ${}_{100}\mathrm{C}_1$ 通りある.

次に、求めたい場合の数を考える。

引いた札の番号が「5 の倍数でない」という事象は、「5 の倍数である」という事象の余事象である。

5 の倍数の番号を引く確率は、$\dfrac{20}{100}$

よって、求める確率は

$$1-\frac{20}{100}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

□

例題 【教 p.52 応用例題 10】

1 から 9 までの番号札 9 枚のから 4 枚を同時に引くとき、少なくとも 1 枚が偶数の番号である確率を求めよ。

Proof.

まず、起こりうるすべての場合の数を考える。

9 枚から 4 枚引くため, ${}_9\mathrm{C}_4$ 通りある.

次に、求めたい場合の数を考える。

「少なくとも 1 枚が偶数」という事象は、「偶数が 1 枚もない」すなわち「4 枚とも奇数」という事象の余事象である。

奇数の札は 5 枚ある。

よって、4 枚とも奇数である確率は、$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{126}$

よって、求める確率は、この余事象の確率であるから

$$1-\frac{5}{126}=\frac{121}{126}$$

□

ここまでは、互いに排反な事象についての確率を考えてきた。ここからは、2 つに事象 A, B が互いに排反でないとき、和事象の確率 $P(A \cup B)$ について考えてみよう。

Theorem 1.2.3　一般の和事象の確率

全事象を U とする。2 つの事象 A, B が互いに排反でないとき、和事象の確率 $P(A \cup B)$ は次の式で表される.

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \tag{1.2.3}$$

例題 【教 p.53 例 17】

1 から 30 までの 30 枚の番号札から 1 枚引くとき、その番号が 2 の倍数または 3 の倍数である確率を求めよ。

Proof.

まず、起こりうるすべての場合の数を考える。

30 枚から 1 枚引くため, ${}_{30}\mathrm{C}_1$ 通りある.

次に、求めたい場合の数を考える。

引いた札の番号が「2 の倍数である」という事象を A 、「3 の倍数である」という事象を B とすると、求める確率は $P(A \cup B)$ である。

ここで、

$$\begin{aligned} A &= \{2 \cdot 1,\ \ 2 \cdot 2,\ \ 2 \cdot 3,\ \ \cdots\cdots,\ \ 2 \cdot 15\} \\ B &= \{3 \cdot 1,\ \ 3 \cdot 2,\ \ 3 \cdot 3,\ \ \cdots\cdots,\ \ 3 \cdot 10\} \\ A \cap B &= \{6 \cdot 1,\ \ 6 \cdot 2,\ \ 6 \cdot 3,\ \ \cdots\cdots,\ \ 6 \cdot 5\} \end{aligned}$$

であるから、　$n(A) = 15,\ n(B) = 10,\ n(A \cap B) = 5$ である。

よって、番号が 2 の倍数または 3 の倍数である確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

□

1.3　独立な試行と確率

A、B の 2 人がさいころを投げるとする。このとき、A がさいころを投げる試行と、B がさいころを投げる試行では、それぞれの結果は互いに影響を与えない。

Definition 1.3.1　独立な試行

いくつかの試行において、どの試行の結果も他の試行の結果に影響を与えないとき、これらの試行は **独立** であるという。

一般に、独立な 2 つの試行における事象の確率について、次のことが成り立つ。

Theorem 1.3.1　独立な試行の確率

2 つの試行 S と T が独立であるとき, S で事象 A が起こり, かつ T で事象 B が起こる確率 p は,　$P(A)$ と $P(B)$ の積に等しい。
すなわち、

$$\boldsymbol{p = P(A) \times P(B)} \tag{1.3.1}$$

独立な 3 つ以上の試行についても、Theorem1.3.1 と同様なことが成り立つ。

練習問題 【教 p.55 例 18】

2 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げるとき、次の確率を求めよ。

（1）硬貨は 2 枚とも表が出て、さいころは偶数の目が出る。
（2）硬貨は 1 枚だけが表が出て、さいころは 2 以下の目が出る。

Proof.
(1) 「硬貨を投げる」という試行と、「さいころを投げる」という試行は独立である。
硬貨が 2 枚とも表が出る確率は、$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
さいころが偶数の目が出る確率は、$\frac{1}{2}$
よって、求める確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

□

例題 【教 p.56 例題 11】

A の袋には赤玉 3 個と白玉 2 個、B の袋には赤玉 2 個と白玉 4 個が入っている。A、B の袋から 1 個ずつ玉を取り出すとき、次の確率を求めよ。

（1）ともに赤玉を取り出す確率

（2）同じ色の玉を取り出す確率

Proof.

(1) 「A の袋から玉を 1 個取り出す」という試行と、「B の袋から玉を 1 個取り出す」という試行は独立である。

A の袋から赤玉を取り出す確率は、$\frac{3}{5}$

B の袋から赤玉を取り出す確率は、$\frac{2}{6}$

よって、求める確率は

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{5}$$

□

Proof.

(2) 「A の袋から玉を 1 個取り出す」という試行と、「B の袋から玉を 1 個取り出す」という試行は独立である。

また、「同じ色の玉を取り出す」という事象は、「赤玉を取り出す」という場合と「白玉を取り出す」という場合がある。

ともに赤玉を取り出す確率は、(1) より $\frac{1}{5}$

ともに白玉を取り出す確率は、$\frac{2}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{15}$

これらの事象は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$$

□

Theorem 1.3.2　反復試行の確率

1 回の試行で事象 A が起こる確率を p とする. この試行を n 回繰り返すとき, 事象 A がちょうど r 回起こる確率は次の式で表される.

$$ {}_n\mathrm{C}_r \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r} \tag{1.3.2} $$

1.4　条件付き確率

Definition 1.4.1

条件付き確率事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる**条件付き確率** $P_A(B)$ は次のように定義される.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) > 0) \tag{1.4.1}$$

Theorem 1.4.1　確率の乗法定理

2 つの事象 A, B について, 次が成り立つ.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \tag{1.4.2}$$

1.5　期待値

Definition 1.5.1

条件付き確率事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる**条件付き確率** $P_A(B)$ は次のように定義される.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) > 0) \tag{1.5.1}$$

Theorem 1.5.1　確率の乗法定理

2 つの事象 A, B について, 次が成り立つ.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \tag{1.5.2}$$