【数学 A】 第 1 章 場合の数と確率

高等学校数学科用/104/数研/数 A/713

Riku Sugawara

12.2025

第 1 節 確率

1.1 事象と確率

Definition 1.1.1 確率

ある事柄が起こることが期待される程度を表す数値を **確率** という.

Definition 1.1.2 試行と事象

「さいころを投げる」とか「くじを引く」などのように, 同じ条件のもとで繰り返すことができ, その結果が偶然によって決まる実験や観測を **試行** という.
また, 試行の結果として起こる事柄を **事象** という.

Definition 1.1.3 全事象と根元事象

1 つの試行において, 起こりうる結果全体を集合 U で表すとき, その試行におけるどの事象も, U の部分集合で表すことができる. U 自身で表される事象を **全事象** , U のただ 1 つの要素からなる集合で表される事象を **根元事象** という.

Definition 1.1.4 同様に確からしい

1 つの試行において, ある事象 A の起こる確率を $P(A)$ で表す. *
ある試行において, どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき, これらの根元事象は **同様に確からしい** という.**

Theorem 1.1.1 事象 A の起こる確率

同様に確からしい試行において, 起こりうるすべての場合の数を N , 事象 A の起こる場合の数を a とするとき, 事象 A の起こる確率 $\boldsymbol{P(A)}$ は次の式で表される.

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{N}} \tag{1.1.1}$$

---

* $P(A)$ の P は, 確率を意味する Probability の頭文字である. また, 事象 A の起こる確率を単に **事象 A の確率** ということもある.

** ここから取り上げる試行では, 全事象 U におけるすべての根元事象は同様に確からしいものとする.

例題 【教 p.47 例題 8】

A, B の 2 人を含む 6 人のリレー選手がいる。走る順番をくじで決めるとき、A が 1 番目、B が 6 番目になる確率を求めよ。

Proof.

まず、起こりうるすべての場合の数を考える。

6 人全員の並び順は, $6!$ 通りある.

次に、求めたい場合の数を考える。

A が 1 番目、B が 6 番目のとき, A, B 以外の 4 人の並び順は, $4!$ 通りある.

よって、求める確率は

$$\frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$$

□

例題 【教 p.47 例題 9】

赤玉 4 個, 白玉 5 個の入った袋から、2 の玉を同時に取り出すとき、赤玉 1 個、白玉 1 個が出る確率を求めよ。

Proof.

まず、起こりうるすべての場合の数を考える。全部の 9 個から 2 個取る組合せは, ${}_9\mathrm{C}_2$ 通りある.

次に、求めたい場合の数を考える。

赤玉 4 個から 1 個、白玉 5 個から 1 個取る組合せは, ${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1$ 通りある.

よって、求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2} = 4 \times 5 \times \frac{2 \cdot 1}{9 \cdot 8} = \frac{5}{9}$$

□

1.2 確率の基本性質

確率の基本性質を議論する前に、事象 A, B に対して、次のような事象を定義しておく。

Definition 1.2.1　積事象と和事象

事象 A と B がともに起こる事象を A , B の **積事象** といい, $\boldsymbol{A \cap B}$ で表す.

一方, 事象 A または B が起こる事象を A と B の **和事象** といい, $\boldsymbol{A \cup B}$ で表す.

Definition 1.2.2　排反事象

2 つの事象 A 、 B が決して同時に起こらないとき、

A, B は互いに**排反**である

または

A, B は互いに**排反事象**である

という。

Definition 1.2.3　空事象

A 、 B が互いに排反であることは、$A \cap B = \emptyset$ であることと同値である。

空集合 $\emptyset$ で表される事象を **空事象** という。空事象は決して起こらない事象である。

Theorem 1.2.1　確率の基本性質

事象 A の確率 $P(A)$ について, 次の性質が成り立つ.

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{1.2.1}$$

$$P(U) = 1, \quad P(\emptyset) = 0 \tag{1.2.2}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{1.2.3}$$

ここで, U は全事象, $\emptyset$ は空事象, $\bar{A}$ は事象 A の余事象を表す.

Theorem 1.2.2　確率の加法定理

2 つの事象 A, B について, 次が成り立つ.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1.2.4}$$

特に, A と B が互いに排反である場合（$A \cap B = \emptyset$）, 次が成り立つ.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{1.2.5}$$

1.3　独立な試行と確率

Theorem 1.3.1　独立な試行の確率

2 つの試行 T_1, T_2 が独立であるとき, 事象 A, B について次が成り立つ.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{1.3.1}$$

Theorem 1.3.2　反復試行の確率

1 回の試行で事象 A が起こる確率を p とする. この試行を n 回繰り返すとき, 事象 A がちょうど r 回起こる確率は次の式で表される.

$$ {}_n\mathrm{C}_r \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r} \tag{1.3.2}$$

1.4　条件付き確率

Definition 1.4.1

条件付き確率事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる**条件付き確率** $P_A(B)$ は次のように定義される.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) > 0) \tag{1.4.1}$$

Theorem 1.4.1　確率の乗法定理

2 つの事象 A, B について, 次が成り立つ.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \tag{1.4.2}$$

1.5　期待値

Definition 1.5.1

条件付き確率事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる**条件付き確率** $P_A(B)$ は次のように定義される.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) > 0) \tag{1.5.1}$$

Theorem 1.5.1　確率の乗法定理

2 つの事象 A, B について, 次が成り立つ.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \tag{1.5.2}$$