【数学A】 第1章 場合の数と確率

高等学校数学科用/104/数研/数 A/713

Riku Sugawara

12.2025

第 1 節　場合の数

1.1　集合の要素の個数

1.2　場合の数

1.3　順列

Definition 1.3.1　順列

いくつかのものを順に 1 列に並べるとき, その並びの 1 つ 1 つを **順列** という.

一般に, 異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して並べる順列を

$\boldsymbol{n}$ 個から $\boldsymbol{r}$ 個取る順列

といい, その総数を $\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r}$ * で表す.

Theorem 1.3.1　順列の総数① $\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r}$

n 個から r 個取る順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ は次の式で表される.

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)} \tag{1.3.1}$$

練習問題 【教 p.24 練習 14】

次のものの総数を求めよ.

（1）10 人の生徒から 3 人を選んで 1 列に並べるときの並び順

（2）7 個の数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 のうちの異なる 4 個を並べて作る 4 桁の整数

Proof.

(1) 10 人の生徒から 3 人を選んで 1 列に並べる順列の総数であるから,

$$\begin{aligned} {}_{10}\mathrm{P}_3 &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \\ &= 720 \quad (\text{通り}) \end{aligned}$$

□

Proof.

(2) 7 個の数字から 4 個を選んで並べる順列の総数であるから,

$$\begin{aligned} {}_{7}\mathrm{P}_4 &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ &= 840 \quad (\text{通り}) \end{aligned}$$

□

順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ の式で, 特に $r = n$ のときは等式

$$ {}_n\mathrm{P}_n = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \tag{*} $$

が得られる.

Definition 1.3.2　階乗

$(*)$ の右辺は, 1 から n までのすべての自然数の積である.

これを n の **階乗** といい, $\boldsymbol{n!}$ で表す.

Theorem 1.3.2　階乗

Definition1.3.2 より, n の階乗 $n!$ は次の式で表される.

$$ \boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r = n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \tag{1.3.2} $$

Definition1.3.1 より, 一般に, 次のことがいえる.

異なる n 個のものすべてを並べる順列の総数は $n!$ である

また, 順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ の式で, $r < n$ のときについて考える.

Proof.

$$ \begin{aligned} {}_n\mathrm{P}_r &= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\boldsymbol{(n-r)\cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\boldsymbol{(n-r)\cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}} \\ &= \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{(n-r)!}} \end{aligned} $$

□

Theorem 1.3.3　順列の総数② ${}_n\mathrm{P}_r$

$$ \boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}} \tag{1.3.3} $$

Theorem1.3.3 が $r = 0, r = n$ のときも成り立つように, $\boldsymbol{{}_n\mathrm{P}_0 = 1}$, $\boldsymbol{0! = 1}$ と定めることとする.

---

* ${}_n\mathrm{P}_r$ の P は, 順列を意味する Permutation の頭文字である.

練習問題 【教 p.25 練習 16】

12 色の色鉛筆がある．A, B, C の 3 つの文字を, すべて異なる色で塗り分けるとき, 塗り方は何通りあるか.

Proof.

12 色の色鉛筆から 3 色を選んで 1 列に並べ左の色から順に, A, B, C と塗り分けると考えれば良いため,

$$\begin{aligned} {}_{12}\mathrm{P}_3 &= 12 \cdot 11 \cdot 10 \\ &= 1320 \quad (\text{通り}) \end{aligned}$$

□

例題 【教 p.26 応用例題 4】

大人 4 人と子ども 3 人が 1 列に並ぶとき, 次のような並び方は何通りあるか.

(1) 両端が大人である.

(2) 子どもが 3 人続いて並ぶ.

Technique 1.3.1 隣り合うものは合体させて, 隣り合わないものは最後に挿入しよう！

「隣り合う」という条件が与えられれば, 合体させたものについても, 自身の **階乗通り** の合体方法があることに注意したい.

一方, 「隣り合わない」という条件が与えられれば, それを **間または両端** に挿入することを考えよう!

Proof.

(1) 両端の大人の並び方は, ${}_4\mathrm{P}_2$ 通りある.

そのどの場合に対しても, 間に並ぶ残りの 5 人の並び方は, $5!$ 通りある.

よって, 並び方の総数は, **積の法則** により

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{P}_2 \times 5! &= 12 \times 120 \\ &= 1440 \quad (\text{通り}) \end{aligned}$$

□

Proof.

(2) 子ども 3 人をひとまとめにする.

大人 4 人とひとまとめにした子ども 4 人の並び方は, $5!$ 通りある. そのどの場合に対しても, ひとまとめにした子ども 3 人の並び方は, $3!$ 通りある.

よって, 並び方の総数は, **積の法則** により

$$\begin{aligned} 5! \times 3! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 720 \quad (\text{通り}) \end{aligned}$$

□

例題 【教 p.27 応用例題 5】

6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 のうちの異なる 4 個を並べて, 4 桁の整数を作るとき, 次のような整数は何個作れるか.

(1) 4 桁の整数

(2) 4 桁の奇数

Technique 1.3.2 場合の数・確率の問題は, いかに状況を整理するかを考えよ!

「どのように場合分けすればよいか」「この条件は, 要はどういうことなのか」などを, **実験を通して** 考えよう.

1つの方針として, **制限のあるもの** から考える, というものがある.

Proof.

(1) 千の位は, 0 以外の数字 1, 2, 3, 4, 5 のどれかであるから, その選び方は 5 通りある.

そのどの場合に対しても, 百, 十, 一の位には, 残りの 5 個の数字から 3 個取って並べるから, その並び方は ${}_5\mathrm{P}_3$ 通りある.

よって, 求める個数は, 積の法則により

$$\begin{aligned} 5 \times {}_5\mathrm{P}_3 &= 5 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 \\ &= 300 \quad (個) \end{aligned}$$

□

Proof.

(2) 一の位は, 数字 1, 3, 5 のどれかであるから, その選び方は 3 通りある.

そのどの場合に対しても, 千の位は, 0 と一の位の数字以外の 4 個の数字のどれかであるから, その選び方は 4 通りある.

さらに, 百, 十の位には, 残りの 4 個の数字から 2 個取って並べるから, その 並べ方は ${}_4\mathrm{P}_2$ 通りある.

よって, 求める個数は, 積の法則により

$$\begin{aligned} 3 \times 4 \times {}_4\mathrm{P}_2 &= 3 \times 4 \times 4 \cdot 3 \\ &= 144 \quad (個) \end{aligned}$$

□

Definition 1.3.3　円順列

いくつかのものを円形に並べる順列を **円順列** という.

円順列では, 回転して並びが同じになるものは同じ並び方とみなす.

Theorem 1.3.4　円順列の総数

異なる n 個のものの円順列の総数について, 次のことがいえる.

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_n}{n} = (n-1)! \tag{1.3.4}$$

練習問題 【教 p.29 練習 19】

色の異なる 6 個の玉を円形に並べて置くとき, 並べ方の総数を求めよ.

Technique 1.3.3　円順列は, 1 箇所を固定して考えよ!

ある 1 箇所を固定してしまえば, 残りの箇所は **区別できるようになる** ため, 今までの順列の問題と同様に処理することができる.

Proof.

$$\begin{aligned}(6-1)! &= 5!\\ &= 120 \quad (\text{通り})\end{aligned}$$

□

例題 【教 p.29 応用例題 6】

先生 4 人と生徒 4 人が輪の形に並ぶとき, 先生と生徒が交互に並ぶような並び方は何通りあるか.

Proof.

先生が円形に並んで, 間に生徒が並んでいくと考えればよい. 先生が円形に並んでから特定の生徒を基準にすると, 間に入る生徒の並び方は, 1 列に並ぶ順列と考えることができる.

先生 4 人の円順列の総数は, $(4-1)!$ 通りある.

そのどの場合に対しても, 生徒 4 人が先生の間に 1 人ずつ並ぶ方法は, $4!$ 通りある.

よって, 求める並び方の総数は, 積の法則により

$$\begin{aligned}(4-1)! \times 4! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 144 \quad (\text{通り})\end{aligned}$$

□

ここまでは, 異なるものだけを並べる順列を考えてきた. ここでは, 同じものを繰り返し使うことを許した場合の順列を考えてみよう.

Definition 1.3.4 重複順列

一般に, 異なる n 種類のものから重複を許して r 個取って並べる順列を **n 個から r 個取る重複順列** という.
重複順列では, $r \leqq n$ とは限らず, $r > n$ であってもよい.

Theorem 1.3.5 重複順列の総数

重複順列の総数について, 次のことがいえる.

$$n \text{ 個から } r \text{ 個取る重複順列の総数は} \qquad \boldsymbol{n^r} \tag{1.3.5}$$

練習問題 【教 p.30 練習 22】

4 個の文字 a, b, c, d を, 重複を許して次の個数だけ 1 列に並べるとき, 何通りの文字列が作れるか.

（1）2 個

（2）3 個

Proof.
(1) 4 個から 2 個取る重複順列であるから,

$$4^2 = 16 \quad (\text{通り})$$

□

Proof.
(2) 4 個から 3 個取る重複順列であるから,

$$4^3 = 64 \quad (\text{通り})$$

□

1.4　組合せ

Definition 1.4.1　組合せ

一般に, 異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して 作る組合せを

n 個から r 個取る組合せ

といい, その総数を $_{n}\mathrm{C}_{r}$ * で表す. ただし, $r \leqq n$ とする.

ここで, Permutation と Combination の違いを確認しておこう.

まずは, 日本語の意味の違いから. Permutation は「**順列**」, Combination は「**組合せ**」である.

次に, 数学的な視点から, Permutation と Combination の違いを考えてみよう.

例えば, 5 個から 3 個取る組合せの総数は $_{5}\mathrm{C}_{3}$ で表され, それは 10 (通り) であるが, これを順列の総数から考えてみよう.

5 個から 3 個取る順列の総数 $_{5}\mathrm{P}_{3}$ は, 次のように考えることもできる.

5 個から 3 個取る組合せを作り, ($_{5}\mathrm{C}_{3}$ 通り)
取り出した 3 個すべてを 1 列に並べる (3! 通り)

よって, 積の法則により, 次の等式が成り立つ.

$$_{5}\mathrm{C}_{3} \times 3! = {_{5}\mathrm{P}_{3}}$$

したがって, $_{5}\mathrm{C}_{3} = \dfrac{_{5}\mathrm{P}_{3}}{3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ (通り)

これを一般化したものを次に示す.

Theorem 1.4.1　組合せの総数 $_{n}\mathrm{C}_{r}$

n 個から r 個取る組合せの総数 $_{n}\mathrm{C}_{r}$ は次の式で表される.

$$_{n}\mathrm{C}_{r} = \frac{_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdot\cdots\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \tag{1.4.1}$$

Theorem1.4.1 において, 特に $_{n}\mathrm{C}_{1} = n$, $_{n}\mathrm{C}_{n} = 1$ である.

また, 式 1.3.3 より,

$$\begin{aligned} {_{n}\mathrm{C}_{r}} &= \frac{_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!} && (\because \text{式 } 1.4.1) \\ &= \frac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{r!} && (\because \text{式 } 1.3.3) \\ &= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \end{aligned}$$

と表すこともできる. ただし, $_{n}\mathrm{C}_{0} = 1$ と定めることとする.

練習問題 【教 p.33 練習 24】

次のような選び方の総数を求めよ.

(1) 8 人から 2 人を選ぶ

(2) 7 色から 4 色を選ぶ

Proof.

(1) 8 個から 2 個取る組合せであるから,

$$\begin{aligned} {}_8\mathrm{C}_2 &= \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \\ &= 28 \quad (\text{通り}) \end{aligned}$$

□

Proof.

(2) 7 個から 4 個取る組合せであるから,

$$\begin{aligned} {}_7\mathrm{C}_4 &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 35 \quad (\text{通り}) \end{aligned}$$

□

練習 24(1) において, 8 人から 2 人選ぶことは, 選ばない 6 人を選ぶことと同じである.
よって, 次の等式が成り立つ.

$$ {}_8\mathrm{C}_2 = {}_8\mathrm{C}_6 $$

これを一般化したものを次に示す.

Theorem 1.4.2　${}_n\mathrm{C}_r$ の性質

一般に, n 個から r 個取る組合せの総数は, n 個から $(n-r)$ 個取る組合わせの総数に等しい. すなわち, 次の等式が成り立つ.

$$ \boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}} \tag{1.4.2} $$

練習問題 【教 p.34 練習 26】

正六角形について, 次の数を求めよ.

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形の個数

(2) 2 個の頂点を結ぶ線分の本数

Proof.

(1) 6 個の頂点はどの 3 点も一直線上にないから, 3 個の点を 1 組決めると三角形を 1 個作ることができる.

$$ \begin{aligned} {}_6\mathrm{C}_3 &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 20 \quad (\text{個}) \end{aligned} $$

□

Proof.

(2) 6 個の頂点それぞれに対して, 相方の点を 1 個決めると 2 個の頂点を結ぶ線分を 1 本作ることができる.

$$\begin{aligned} {}_6\mathrm{C}_2 &= \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \\ &= 15 \quad (\text{本}) \end{aligned}$$

□

例題 【教 p.35 応用例題 7】

大人 6 人, 子ども 4 人の中から, 5 人を選ぶとき, 次のような選び方は何通りあるか.

(1) 大人 3 人と子ども 2 人を選ぶ.

(2) 子どもが少なくとも 1 人は含まれるように選ぶ.

Technique 1.4.1 場合の数・確率の問題では, 常に余事象を疑え！

「少なくとも〜」というキーワードがあれば, 余事象は限られるため容易に疑える.

しかし, **そのようなキーワードがなくとも余事象を考えたほうが楽な場合も多い** ため, 余事象を疑うことを習慣化しよう.

Proof.

(1) 大人と子どもを別々に選び, 積の法則を用いて求めたい.

大人 3 人の選び方は, ${}_6\mathrm{C}_3$ 通りある.

そのどの場合に対しても, 子ども 2 人の選び方は, ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りある.

よって, 求める選び方の総数は, 積の法則により

$$\begin{aligned} {}_6\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_2 &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \\ &= 120 \quad (\text{通り}) \end{aligned}$$

□

Proof.

(2) 「少なくとも 1 人」は「1 人以上」という意味である．したがって, 余事象が「 **0 人** 」と限定されるためこれを利用する．

10 人から 5 人の選び方は, ${}_{10}\mathrm{C}_5$ 通りある．

子どもが 1 人も選ばれず, 5 人とも大人となる選び方は, ${}_{6}\mathrm{C}_5$ 通りある．

よって, 求める選び方の総数は

$$\begin{aligned}{}_{10}\mathrm{C}_5 - {}_{6}\mathrm{C}_5 &= {}_{10}\mathrm{C}_5 - {}_{6}\mathrm{C}_1 \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 6 \\ &= 252 - 6 \\ &= 246 \quad (\text{通り})\end{aligned}$$

□

例題 【教 p.36 応用例題 8】

6 人を次のように分けるとき, 分け方は何通りあるか.

(1) A, B, C の 3 つの部屋に, 2 人ずつ分ける.

(2) 2 人ずつの 3 つの部屋に分ける.

Proof.

(1) 部屋 A の 2 人の選び方は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通りある.

部屋 B の 2 人の選び方は残りの 4 人から選ぶので ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り,

部屋 A, B の人が決まれば, 残りの部屋 C の 2 人は決まる.

よって, 分け方の総数は, 積の法則により

$$\begin{aligned} {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 &= \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \\ &= 90 \quad (\text{通り}) \end{aligned}$$

□

Technique 1.4.2 区別できないものを含む場合は, あえて異なるものとして区別して, 重複度で割る方法を疑え！

区別できないものをあえて区別して考えた上で, 重複度で割ること で, 場合の数を求める手法が有効なことも多い. なお, 問題によっては **重複度の異なるものが混在している場合もある** ので, 検討は丁寧に行うことに注意したい.

Proof.

(2) 本問と前問の違いは, 部屋に名前がついているかいないか, すなわち, それぞれの組を区別できるかできないかである. (人数が違えば, それは区別できる.)

例えば, 1 つの組分け {a, b}, {c, d}, {e, f} において, この 3 つの組に A, B, C の名前をつけるとすると, 3! 通りのつけ方がある. よって, 本問の総数を求めるには, 前問の答えを 3! で割ればよい.

(1) で, A, B, C の区別をなくすと, 3! 通りずつ同じ組み分けができる. *

よって, 分け方の総数は

$$\begin{aligned} \frac{90}{3!} &= \frac{90}{6} \\ &= 15 \quad (\text{通り}) \end{aligned}$$

□

ここで, もう一度 Permutation と Combination の違いを復習しておこう.

まずは, 日本語の意味の違いから. Permutation は「順列」, Combination は「組合せ」である. したがって, 順列の総数を求めたいときは Permutation を, 組合せの総数を求めたいときは Combination を使ってきたと思う.

しかし, ここからは「順列」の総数を求めるのに, 「組合せ」Combination を利用できる場合があるということを覚えておこう. これが, Permutation と Combination を混同させる原因の一つである.

Theorem 1.4.3　同じものを含む順列の総数

a が p 個, b が q 個, c が r 個あるとき, それら全部を 1 列に並べる順列の総数は

$$ {}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{p!\,q!\,r!}} \qquad \text{ただし} \qquad p+q+r=n \tag{1.4.3}$$

$r=0$ のときは, ${}_{n-p}\mathrm{C}_q = 1$ であり, 順列の総数は $\dfrac{n!}{p!\,q!}$ である.

例題 【教 p.38 例題 7】

9 個の数字 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, の全部を使って, 9 桁の整数を作るとき, 何個の整数が作れるか.

Proof.

1 が 4 個, 2 が 3 個, 3 が 2 個あり, これらを 1 列に並べるから

$$\begin{aligned}\frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} &= \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\times 3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1} \\ &= 1260 \quad (\text{個})\end{aligned}$$

□

練習問題 【教 p.39 練習 29】

BANANA の 6 文字すべて使って文字列を作るとき, 何通りの文字列が作れるか.

Proof.

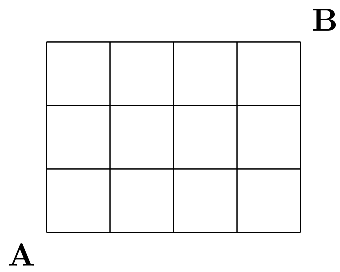
BANANA の 6 文字は, B が 1 個, A が 3 個, N が 2 個あり, これらを 1 列に並べるから

$$\begin{aligned}\frac{6!}{3!\cdot 2!} &= \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1}\\ &= 60 \quad (\text{通り})\end{aligned}$$

□

例題 【教 p.39 応用例題 9】

右の図は, ある地域の道を直線で示したものである. 交差点 A から交差点 B まで遠回りしないで行く最短経路の道順は, 何通りあるか.



Proof.

交差点から次の交差点に行くのに, ↑ と → の向きがある. このとき, 最短経路は, そのどこを通っても,

↑ 3 個と → 4 個を使って作られる順列に対応している.

上へ 1 区画進むことを ↑ で, 右へ 1 区画進むことを → で表す. A から B まで行く最短の道順の総数は, ↑ 3 個と → 4 個を 1 列に並べる順列の総数に等しい.

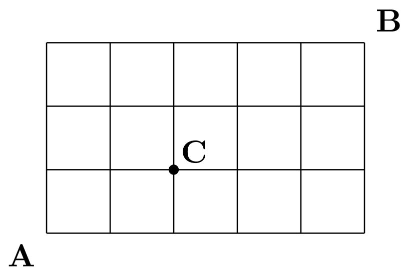
よって, 求める最短の道順の総数は

$$\begin{aligned}\frac{7!}{3!4!} &= \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\times 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\\ &= 35 \quad (\text{通り})\end{aligned}$$

□

練習問題 【教 p.39 練習 30】

右の図のような道のある地域で，次のような最短の道順は何通りあるか.



(1) A から B まで行く.

(2) A から C を通って B まで行く.

(3) A から C を通らずに B まで行く.

Proof.

(1)

$$\frac{8!}{3!5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\times 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 56 \quad (\text{通り})$$

□

Proof.

(2)

$$\frac{3!}{2!1!}\times\frac{5!}{3!2!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\times 1}\times\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1} = 30 \quad (\text{通り})$$

□

Proof.

(3)

$$56 - 30 = 26 \quad (\text{通り})$$

□

第 2 節　確率

2.1　事象と確率

Definition 2.1.1　確率

ある事柄が起こることが期待される程度を表す数値を **確率** という.

Definition 2.1.2　試行と事象

「さいころを投げる」とか「くじを引く」などのように, 同じ条件のもとで繰り返すことができ, その結果が偶然によって決まる実験や観測を **試行** という.

また, 試行の結果として起こる事柄を **事象** という.

Definition 2.1.3　全事象と根元事象

1 つの試行において, 起こりうる結果全体を集合 U で表すとき, その試行におけるどの事象も, U の部分集合で表すことができる. U 自身で表される事象を **全事象** , U のただ 1 つの要素からなる集合で表される事象を **根元事象** という.

Definition 2.1.4　同様に確からしい

1 つの試行において, ある事象 A の起こる確率を $P(A)$ で表す. *

ある試行において, どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき, これらの根元事象は **同様に確からしい** という.**

Theorem 2.1.1　事象 A の起こる確率

同様に確からしい試行において, 起こりうるすべての場合の数を N , 事象 A の起こる場合の数を a とするとき, 事象 A の起こる確率 $\boldsymbol{P(A)}$ は次の式で表される.

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\textbf{事象 } A \textbf{ の起こる場合の数}}{\textbf{起こりうるすべての場合の数}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{N}} \tag{2.1.1}$$

* $P(A)$ の P は, 確率を意味する Probability の頭文字である. また, 事象 A の起こる確率を単に **事象 A の確率** ということもある.

** ここから取り上げる試行では, 全事象 U におけるすべての根元事象は同様に確からしいものとする.

例題 【教 p.47 例題 8】

A, B の 2 人を含む 6 人のリレー選手がいる．走る順番をくじで決めるとき, A が 1 番目, B が 6 番目になる確率を求めよ．

Proof.

まず, 起こりうるすべての場合の数を考える．

6 人全員の並び順は, $6!$ 通りある．

次に, 求めたい場合の数を考える．

A が 1 番目, B が 6 番目のとき, A, B 以外の 4 人の並び順は, $4!$ 通りある．

よって, 求める確率は

$$\frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$$

□

例題 【教 p.47 例題 9】

赤玉 4 個, 白玉 5 個の入った袋から, 2 の玉を同時に取り出すとき, 赤玉 1 個, 白玉 1 個が出る確率を求めよ．

Proof.

まず, 起こりうるすべての場合の数を考える．全部の 9 個から 2 個取る組合せは, ${}_9\mathrm{C}_2$ 通りある．

次に, 求めたい場合の数を考える．

赤玉 4 個から 1 個, 白玉 5 個から 1 個取る組合せは, ${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1$ 通りある．

よって, 求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2} = 4 \times 5 \times \frac{2 \cdot 1}{9 \cdot 8} = \frac{5}{9}$$

□

2.2 確率の基本性質

確率の基本性質を議論する前に, 事象 A, B に対して, 次のような事象を定義しておく.

Definition 2.2.1 積事象と和事象

事象 A と B がともに起こる事象を A , B の **積事象** といい, $\boldsymbol{A \cap B}$ で表す.

一方, 事象 A または B が起こる事象を A と B の **和事象** といい, $\boldsymbol{A \cup B}$ で表す.

Definition 2.2.2 排反事象

2 つの事象 A , B が決して同時に起こらないとき,

A, B は互いに**排反**である

または

A, B は互いに**排反事象**である

という.

Definition 2.2.3 空事象

A , B が互いに排反であることは, $A \cap B = \emptyset$ であることと同値である.

空集合 $\emptyset$ で表される事象を **空事象** という. 空事象は決して起こらない事象である.

Theorem 2.2.1 確率の基本性質

(1) どんな事象 A についても

$$\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$$

とくに、空事象 $\emptyset$ について $\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$

全事象 U について $\boldsymbol{P(U) = 1}$

(2) 事象 A, B が互いに排反であるとき

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)} \tag{2.2.1}$$

Theorem2.2.1 の (2) を, 確率の **加法定理** という.

3 つ以上の事象については, どの 2 つの事象も互いに排反であるとき, これらは 互いに排反である という. 3 つ以上の排反な事象についても, 2 つの場合の加法定理と同様なことが成り立つ.

例題 【教 p.51 例題 10】

赤玉 4 個, 白玉 5 個の入った袋から, 2 個の玉を同時に取り出すとき, 2 個が同じ色である確率を求めよ.

Proof.

まず, 起こりうるすべての場合の数を考える.

全部の 9 個から 2 個取る組合せは, ${}_9\mathrm{C}_2$ 通りある.

次に, 求めたい場合の数を考える.

ここで, 「2 個が同じ色である」という事象は,

「2 個とも赤玉である」という事象を A,

「2 個とも白玉である」という事象を B

の和事象 $A \cup B$ である.

A, B は互いに排反であるから, 確率の加法定理より

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} + \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{4}{9}$$

□

Definition 2.2.4 余事象

全事象を U とする. 事象 A に対して, 「A が起こらない」という事象を A の **余事象** といい, $\overline{\boldsymbol{A}}$ で表す. $A, \overline{A}$ は互いに排反である.

Theorem 2.2.2 余事象と確率

事象 A に対して, A が起こらない事象を A の **余事象** といい, $\overline{A}$ で表す.

$$\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)} \tag{2.2.2}$$

例題 【教 p.52 例 16】

1 から 100 までの番号札 100 枚のから 1 枚を引くとき, 5 の倍数でない番号を引く確率を求めよ.

Proof.

まず, 起こりうるすべての場合の数を考える.

100 枚から 1 枚引くため, ${}_{100}\mathrm{C}_1$ 通りある.

次に, 求めたい場合の数を考える.

引いた札の番号が「5 の倍数でない」という事象は, 「5 の倍数である」という事象の余事象である.

5 の倍数の番号を引く確率は, $\dfrac{20}{100}$

よって, 求める確率は

$$1-\frac{20}{100}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

□

例題 【教 p.52 応用例題 10】

1 から 9 までの番号札 9 枚のから 4 枚を同時に引くとき, 少なくとも 1 枚が偶数の番号である確率を求めよ.

Proof.

まず, 起こりうるすべての場合の数を考える.

9 枚から 4 枚引くため, ${}_9\mathrm{C}_4$ 通りある.

次に, 求めたい場合の数を考える.

「少なくとも 1 枚が偶数」という事象は, 「偶数が 1 枚もない」すなわち「4 枚とも奇数」という事象の余事象である.

奇数の札は 5 枚ある.

よって, 4 枚とも奇数である確率は, $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{126}$

よって, 求める確率は, この余事象の確率であるから

$$1-\frac{5}{126}=\frac{121}{126}$$

□

ここまでは, 互いに排反な事象についての確率を考えてきた. ここからは, 2 つに事象 A, B が互いに排反でないとき, 和事象の確率 $P(A \cup B)$ について考えてみよう.

Theorem 2.2.3　一般の和事象の確率

全事象を U とする. 2 つの事象 A, B が互いに排反でないとき, 和事象の確率 $P(A \cup B)$ は次の式で表される.

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \tag{2.2.3}$$

例題 【教 p.53 例 17】

1 から 30 までの 30 枚の番号札から 1 枚引くとき, その番号が 2 の倍数または 3 の倍数である確率を求めよ.

Proof.

まず, 起こりうるすべての場合の数を考える.

30 枚から 1 枚引くため, ${}_{30}\mathrm{C}_1$ 通りある.

次に, 求めたい場合の数を考える.

引いた札の番号が「2 の倍数である」という事象を A , 「3 の倍数である」という事象を B とすると, 求める確率は $P(A \cup B)$ である.

ここで,

$$\begin{aligned} A &= \{2 \cdot 1,\ \ 2 \cdot 2,\ \ 2 \cdot 3,\ \ \cdots\cdots,\ \ 2 \cdot 15\} \\ B &= \{3 \cdot 1,\ \ 3 \cdot 2,\ \ 3 \cdot 3,\ \ \cdots\cdots,\ \ 3 \cdot 10\} \\ A \cap B &= \{6 \cdot 1,\ \ 6 \cdot 2,\ \ 6 \cdot 3,\ \ \cdots\cdots,\ \ 6 \cdot 5\} \end{aligned}$$

であるから, 　$n(A) = 15,\ n(B) = 10,\ n(A \cap B) = 5$ である.

よって, 番号が 2 の倍数または 3 の倍数である確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

□

2.3 独立な試行と確率

A, B の 2 人がさいころを投げるとする．このとき, A がさいころを投げる試行と, B がさいころを投げる試行では, それぞれの結果は互いに影響を与えない.

Definition 2.3.1 独立な試行

いくつかの試行において, どの試行の結果も他の試行の結果に影響を与えないとき, これらの試行は **独立** であるという.

一般に, 独立な 2 つの試行における事象の確率について, 次のことが成り立つ.

Theorem 2.3.1 独立な試行の確率

2 つの試行 S と T が独立であるとき, S で事象 A が起こり, かつ T で事象 B が起こる確率 p は, $P(A)$ と $P(B)$ の積に等しい.
すなわち,

$$\boldsymbol{p = P(A) \times P(B)} \tag{2.3.1}$$

独立な 3 つ以上の試行についても, Theorem2.3.1 と同様なことが成り立つ.

練習問題 【教 p.55 例 18】

2 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げるとき, 次の確率を求めよ.

(1) 硬貨は 2 枚とも表が出て, さいころは偶数の目が出る.
(2) 硬貨は 1 枚だけが表が出て, さいころは 2 以下の目が出る.

Proof.

(1) 「硬貨を投げる」という試行と, 「さいころを投げる」という試行は独立である.
硬貨が 2 枚とも表が出る確率は, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
さいころが偶数の目が出る確率は, $\frac{1}{2}$
よって, 求める確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

□

例題 【教 p.56 例題 11】

A の袋には赤玉 3 個と白玉 2 個, B の袋には赤玉 2 個と白玉 4 個が入っている．A, B の袋から 1 個ずつ玉を取り出すとき, 次の確率を求めよ．

(1) ともに赤玉を取り出す確率

(2) 同じ色の玉を取り出す確率

Proof.

(1) 「A の袋から玉を 1 個取り出す」という試行と, 「B の袋から玉を 1 個取り出す」という試行は独立である．

A の袋から赤玉を取り出す確率は, $\frac{3}{5}$

B の袋から赤玉を取り出す確率は, $\frac{2}{6}$

よって, 求める確率は

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{5}$$

□

Proof.

(2) 「A の袋から玉を 1 個取り出す」という試行と, 「B の袋から玉を 1 個取り出す」という試行は独立である．

また, 「同じ色の玉を取り出す」という事象は, 「赤玉を取り出す」という場合と「白玉を取り出す」という場合がある．

ともに赤玉を取り出す確率は, (1) より $\frac{1}{5}$

ともに白玉を取り出す確率は, $\frac{2}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{15}$

これらの事象は互いに排反であるから, 求める確率は

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$$

□

Definition 2.3.2　反復試行

同じ条件のもとでの試行の繰り返しを **反復試行** という．1 つの試行を何回か繰り返すとき，これらの試行は独立である．

Theorem 2.3.2　反復試行の確率

反復試行の確率について，一般に次のことが成り立つ．

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする．

この試行を n 回行う反復試行で，A がちょうど r 回起こる確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_r\, p^r\,(1-p)^{n-r} \tag{2.3.2}$$

一般に，正の数 a に対して，$a^0=1$ と定めることとする．

例題 【教 p.58 例題 12】

赤玉 2 個，白玉 4 個の入った袋から，玉を 1 個取り出し，色を見てからもとにもどす．この試行を 6 回行うとき，次の確率を求めよ．

（1）赤玉が 5 回以上出る確率

（2）6 回目に 3 度目の赤玉が出る確率

Proof.
(1) 1 回の試行で赤玉が出る確率は，$\dfrac{1}{3}$ である．また，6 回のうち赤玉が 5 回以上出るのは，次の場合である．

赤玉がちょうど 5 回出る　　赤玉が 6 回出る

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\begin{aligned} {}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^6 &= 6\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\times\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^6 \\ &= \frac{13}{729} \end{aligned}$$

□

Proof.
(2) 5 回目までに 赤玉がちょうど 2 回 出て，6 回目に 3 度目の赤玉が出る確率であるから

$$\begin{aligned} {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3} &= 10\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{80}{729} \end{aligned}$$

□

例題 【教 p.59 応用例題 11】

数直線上を動く点 P が原点の位置にある．1 枚の硬貨を投げて，表が出たときは P を正の向きに 2 だけ進め，裏が出たときは P を負の向きに 1 だけ進める．硬貨を 6 回投げ終わったとき，P が原点にもどっている確率を求めよ．

Technique 2.3.1 反復試行は、（並び替えの数）×（1 個あたりの確率）で計算せよ!

反復試行の確率は，**（並び替えの数） と （1 個あたりの確率）を順に考える**ことで求めることができる．

このように考えることによって，事象が 3 つ以上の場合でも容易に確率を求めることができる．

Proof.

条件を満たす場合を考えて，和の法則を使って確率を求めることもできる．しかし，この方法では，**漏れなく場合を分けること**と**時間がかかること**がデメリットである．

したがって，次のように文字を使用し，一般化することによって求めることとする．

6 回のうち，表の回数を r 回とすると，裏の回数は $6-r$ 回である．

よって，6 回投げ終わったときの P の座標は $2r+(-1)(6-r)$ と表すことができる．

硬貨を 1 回投げる時，表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$ である．

6 回のうち，表が r 回出るとすると，裏は $(6-r)$ 回出るから 6 回で原点に戻るのは

$$2r+(-1)(6-r)=0$$

が成り立つときである．

これを解くと $r=2$

よって，P が原点にもどっているのは 6 回のうち 表がちょうど 2 回 出るときである．

したがって，求める確率は

$$\begin{aligned}{}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 &= 15\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\\ &=\frac{15}{64}\end{aligned}$$

□

2.4 条件付き確率

Definition 2.4.1 条件付き確率

条件付き確率一般に, 1 つの試行における 2 つの事象 A, B について, 事象 A が起こったとして, そのときに事象 B が起こる確率を, A が起こったときの B が起こる**条件付き確率**といい, $\boldsymbol{P_A(B)}$ で表す.
ここで, 全事象を U とする. 2 つの事象 A, B について, 条件付き確率 $P_A(B)$ は,

A を全事象としたときに, 事象 B が起こる確率

であり, 次の式で定義される. ただし, $n(A) \neq 0$ とする.

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}} \tag{2.4.1}$$

式 2.4.1 の右辺の分母と分子を, それぞれ $n(U)$ で割ると, 次の等式が得られる.

Theorem 2.4.1 条件付き確率

2 つの事象 $A,\ B$ について, 次が成り立つ.

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \tag{2.4.2}$$

例題 【教 p.61 例題 13】

ある博物館の入館者のうち, 全体の 20% が高校生で, 全体の 15% が前売り券で入館した高校生である. 入館した高校生の中から 1 人を選び出すとき, その人が前売り券で入館している確率を求めよ.

Technique 2.4.1 条件付き確率は、2 つの確率を求めよ!

Theorem2.4.1 より,「A が起こる確率」と,「A と B がともに起こる確率」の 2 つを求めるだけで, 条件付き確率を求めることができる. すなわち, **条件付き確率の問題は確率 2 問分にすぎない** ということである.

Proof.
入館者全体から選び出された 1 人が高校生であるという事象を A , 前売り券で入館しているという事象を B とすると

$$P(A) = \frac{20}{100}, \qquad P(A \cap B) = \frac{15}{100}$$

よって、求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{20}{100}} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

□

練習問題 【教 p.61 練習 51】

大人と子どもの人数の比が 3：2 であるグループに, ある提案をしたところ, 子供で賛成した人数は全体の 15% であった. このグループの子どもの中から 1 人選び出すとき, その人が提案に賛成である確率を求めよ.

Proof.

グループから選び出された 1 人が子どもである という事象を A , 提案に賛成である という事象を B とすると

$$P(A) = \frac{2}{5}, \qquad P(A \cap B) = \frac{15}{100}$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} &= \frac{\frac{15}{100}}{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{15}{100} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

□

練習問題 【MASTERKEYp.127 例題】

ある製品の 50% は工場 X, 30% は工場 Y, 20% は工場 Z で製造されており, 工場 X, Y, Z で製造された製品にはそれぞれ 5%, 3%, 2% の確率で不良品が含まれる.
この製品の中から無作為に 1 つを選んで調べたところ不良品であったとき, それが工場 X の製品である確率を求めよ.

Proof.

不良品である という事象を A , 工場 X の製品である という事象を B とすると

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{50}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{30}{100} \cdot \frac{3}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{380}{10000} \\ P(A \cap B) &= \frac{50}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{250}{10000} \end{aligned}$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} &= \frac{\frac{250}{10000}}{\frac{380}{10000}} \\ &= \frac{250}{380} = \frac{25}{38} \end{aligned}$$

□

式 2.4.2 において, 分母を払って得られる等式から, 次の確率の **乗法定理** が成り立つ.

Theorem 2.4.2　確率の乗法定理

2 つの事象 A, B がともに起こる確率 $P(A \cap B)$ は, 次の式で表される.

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A)P_A(B)} \tag{2.4.3}$$

3 つ以上の事象の場合についても、Theorem2.4.2 と同様なことが成り立つ.

練習問題 【教 p.62 例 22】

当たりくじを 4 本含む 10 本くじを, A, B の 2 人がこの順に 1 本ずつ引く. ただし, 引いたくじはもとにもどさない. この試行において, A, B の 2 人とも当たる確率を求めよ.

Proof.

A が当たる という事象を A , B が当たる という事象を B

とすると, 求める確率は $P(A \cap B)$ は, 乗法定理により

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

A が当たったときに, 残りのくじは 9 本で, 当たりくじは 3 本を含むから, 条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{3}{9}$$

よって, 求める確率は

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{4}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

□

練習問題 【教 p.62 練習 52】

例 22 において, 次の確率を求めよ.

(1) A が当たり, B がはずれる確率

(2) A がはずれ, B が当たる確率

(3) 2 人ともはずれる確率

Proof.

(1) A が当たる という事象を A , B がはずれる という事象を $\overline{B}$

とすると, 求める確率は $P(A \cap \overline{B})$ は, 乗法定理により

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P_A(\overline{B})$$

A が当たったときに, 残りのくじは 9 本で, はずれくじは 6 本を含むから, 条件付き確率 $P_A(\overline{B})$ は

$$P_A(\overline{B}) = \frac{6}{9}$$

よって, 求める確率は

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P_A(\overline{B}) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

□

Proof.

(2) A がはずれる という事象を $\overline{A}$, B が当たる という事象を B

とすると, 求める確率は $P(\overline{A} \cap B)$ は, 乗法定理により

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P_{\bar{A}}(B)$$

A がはずれたときに, 残りのくじは 9 本で, 当たりくじは 4 本を含むから, 条件付き確率 $P_{\bar{A}}(B)$ は

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{4}{9}$$

よって, 求める確率は

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P_{\bar{A}}(B) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$$

Proof.

(3) 求める確率は $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ は, 乗法定理により

□

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P_{\bar{A}}(\overline{B})$$

A がはずれたときに, 残りのくじは 9 本で, はずれくじは 5 本を含むから, 条件付き確率 $P_{\bar{A}}(\overline{B})$ は

$$P_{\bar{A}}(\overline{B}) = \frac{5}{9}$$

よって, 求める確率は

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P_{\bar{A}}(\overline{B}) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

□

2.5　期待値

Definition 2.5.1　期待値

一般に, ある試行の結果に応じて, $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ のどれか 1 つの値をとる数量 X があり, 各値をとる確率が

$$p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n \qquad \text{ただし}\quad p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n = 1$$

であるとき, $x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots\cdots + x_np_n$ を数量 X の **期待値** という.

Theorem 2.5.1　期待値

X の取りうる値と確率が右の表のようなとき, X の期待値は, 次の式で与えられる.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$\boldsymbol{x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots\cdots + x_np_n}$$

練習問題 【教 p.68 練習 56】

5 枚の硬貨を同時に投げて, 表の出た枚数が 5, 4, 3 の場合に, それぞれ得点 40, 16, 4 を得るが, それ以外の場合には得点は得られないとする. 得点の期待値を求めよ.

Proof.

1 枚の硬貨を投げるとき, 表の出る確率は $\dfrac{1}{2}$, 裏の出る確率は $\dfrac{1}{2}$ である.

5 枚の硬貨を投げて 5 枚とも表が出る確率は

$${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$$

5 枚の硬貨を投げて 4 枚が表で 1 枚が裏が出る確率は

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$$

5 枚の硬貨を投げて 3 枚が表で 2 枚が裏が出る確率は

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$$

したがって, 得点と確率の関係は次の表のようになる.

得点	40	16	4	計
確率	$\dfrac{1}{32}$	$\dfrac{5}{32}$	$\dfrac{10}{32}$	1

よって、得点の期待値は

$$40 \times \frac{1}{32} + 16 \times \frac{5}{32} + 4 \times \frac{10}{32} = \frac{1}{32}(40 + 80 + 40) = \frac{160}{32} = 5$$

□

例題 【教 p.69 応用例題 12】

赤玉 2 個と白玉 3 が入った袋から, 3 個の玉を同時に取り出し, 出た赤玉 1 個につき 100 円もらえるゲームがある. このゲームの参加料が 150 円のとき, このゲームに参加することは得であるといえるか.

Proof.

受け取る金額の期待値が参加料よりも大きいときに得であると判断する.

出る赤玉の個数は,0, 1, 2 のいずれかである。
赤玉が 0 個の確率は

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_3} = \frac{1}{10}$$

赤玉が 1 個の確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3} = \frac{6}{10}$$

赤玉が 2 個の確率は

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3} = \frac{3}{10}$$

よって, 受け取る金額を X 円とすると, 次のような表ができる.

X	0	100	200	計
確率	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

したがって, ゲームに参加したときの受け取る金額の期待値は

$$0 \times \frac{1}{10} + 100 \times \frac{6}{10} + 200 \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}(0 + 600 + 600) = 120$$

よって, 受け取る金額の期待値がゲームの参加料より小さいから, ゲームに参加することは得であるといえない.

□