【数学A】 第1章 場合の数と確率

高等学校数学科用/104/数研/数A/713

Riku Sugawara

12.2025

第1節 確率

1.1 事象と確率

Definition 1.1.1 確率

ある事柄が起こることが期待される程度を表す数値を **確率** という.

Definition 1.1.2 試行と事象

「さいころを投げる」とか「くじを引く」などのように, 同じ条件のもとで繰り返すことができ, その結果が偶然によって決まる実験や観測を **試行** という.
また, 試行の結果として起こる事柄を **事象** という.

Definition 1.1.3 全事象と根元事象

1つの試行において, 起こりうる結果全体を集合 U で表すとき, その試行におけるどの事象も, U の部分集合で表すことができる. U 自身で表される事象を **全事象**, U のただ1つの要素からなる集合で表される事象を **根元事象** という.

Definition 1.1.4 同様に確からしい

1つの試行において, ある事象 A の起こる確率を $P(A)$ で表す. *
ある試行において, どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき, これらの根元事象は **同様に確からしい** という.**

Theorem 1.1.1 事象 A の起こる確率

同様に確からしい試行において, 起こりうるすべての場合の数を N, 事象 A の起こる場合の数を a とするとき, 事象 A の起こる確率 $\boldsymbol{P(A)}$ は次の式で表される.

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\textbf{事象 } A \textbf{ の起こる場合の数}}{\textbf{起こりうるすべての場合の数}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{N}} \tag{1.1.1}$$

---

* $P(A)$ の P は, 確率を意味する Probability の頭文字である. また, 事象 A の起こる確率を単に **事象 A の確率** ということもある.

** ここから取り上げる試行では, 全事象 U におけるすべての根元事象は同様に確からしいものとする.

例題 【教 p.47 例題 8】

A, B の 2 人を含む 6 人のリレー選手がいる．走る順番をくじで決めるとき, A が 1 番目, B が 6 番目になる確率を求めよ．

Proof.

まず, 起こりうるすべての場合の数を考える．

6 人全員の並び順は, $6!$ 通りある．

次に, 求めたい場合の数を考える．

A が 1 番目, B が 6 番目のとき, A, B 以外の 4 人の並び順は, $4!$ 通りある．

よって, 求める確率は

$$\frac{4!}{6!} = \frac{1}{30}$$

□

例題 【教 p.47 例題 9】

赤玉 4 個, 白玉 5 個の入った袋から, 2 の玉を同時に取り出すとき, 赤玉 1 個, 白玉 1 個が出る確率を求めよ．

Proof.

まず, 起こりうるすべての場合の数を考える．全部の 9 個から 2 個取る組合せは, ${}_9\mathrm{C}_2$ 通りある．

次に, 求めたい場合の数を考える．

赤玉 4 個から 1 個, 白玉 5 個から 1 個取る組合せは, ${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1$ 通りある．

よって, 求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2} = 4 \times 5 \times \frac{2 \cdot 1}{9 \cdot 8} = \frac{5}{9}$$

□

1.2　確率の基本性質

確率の基本性質を議論する前に, 事象 A, B に対して, 次のような事象を定義しておく.

Definition 1.2.1　積事象と和事象

事象 A と B がともに起こる事象を A , B の **積事象** といい, $\boldsymbol{A \cap B}$ で表す.

一方, 事象 A または B が起こる事象を A と B の **和事象** といい, $\boldsymbol{A \cup B}$ で表す.

Definition 1.2.2　排反事象

2 つの事象 A , B が決して同時に起こらないとき,

A, B は互いに**排反**である

または

A, B は互いに**排反事象**である

という.

Definition 1.2.3　空事象

A , B が互いに排反であることは, $A \cap B = \emptyset$ であることと同値である.

空集合 $\emptyset$ で表される事象を **空事象** という. 空事象は決して起こらない事象である.

Theorem 1.2.1　確率の基本性質

1. どんな事象 A についても

$$\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$$

とくに、空事象 $\emptyset$ について　$\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$

全事象 U について　$\boldsymbol{P(U) = 1}$

2. 事象 A, B が互いに排反であるとき

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)} \tag{1.2.1}$$

Theorem1.2.1 の (2) を, 確率の **加法定理** という.

3 つ以上の事象については, どの 2 つの事象も互いに排反であるとき, これらは 互いに排反である という. 3 つ以上の排反な事象についても, 2 つの場合の加法定理と同様なことが成り立つ.

例題 【教 p.51 例題 10】

赤玉 4 個, 白玉 5 個の入った袋から, 2 個の玉を同時に取り出すとき, 2 個が同じ色である確率を求めよ.

Proof.

まず, 起こりうるすべての場合の数を考える.

全部の 9 個から 2 個取る組合せは, ${}_9\mathrm{C}_2$ 通りある.

次に, 求めたい場合の数を考える.

ここで, 「2 個が同じ色である」という事象は,

「2 個とも赤玉である」という事象を A,

「2 個とも白玉である」という事象を B

の和事象 $A \cup B$ である.

A, B は互いに排反であるから, 確率の加法定理より

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} + \frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{4}{9}$$

□

Definition 1.2.4　余事象

全事象を U とする. 事象 A に対して, 「A が起こらない」という事象を A の **余事象** といい, $\overline{\boldsymbol{A}}$ で表す. $A, \overline{A}$ は互いに排反である.

Theorem 1.2.2　余事象と確率

事象 A に対して, A が起こらない事象を A の **余事象** といい, $\overline{A}$ で表す.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{1.2.2}$$

例題 【教 p.52 例 16】

1 から 100 までの番号札 100 枚のから 1 枚を引くとき, 5 の倍数でない番号を引く確率を求めよ.

Proof.

まず, 起こりうるすべての場合の数を考える.

100 枚から 1 枚引くため, ${}_{100}\mathrm{C}_1$ 通りある.

次に, 求めたい場合の数を考える.

引いた札の番号が「5 の倍数でない」という事象は, 「5 の倍数である」という事象の余事象である.

5 の倍数の番号を引く確率は, $\dfrac{20}{100}$

よって, 求める確率は

$$1 - \frac{20}{100} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

□

例題 【教 p.52 応用例題 10】

1 から 9 までの番号札 9 枚のから 4 枚を同時に引くとき, 少なくとも 1 枚が偶数の番号である確率を求めよ.

Proof.

まず, 起こりうるすべての場合の数を考える.

9 枚から 4 枚引くため, ${}_9\mathrm{C}_4$ 通りある.

次に, 求めたい場合の数を考える.

「少なくとも 1 枚が偶数」という事象は, 「偶数が 1 枚もない」すなわち「4 枚とも奇数」という事象の余事象である.

奇数の札は 5 枚ある.

よって, 4 枚とも奇数である確率は, $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4} = \dfrac{5}{126}$

よって, 求める確率は, この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{5}{126} = \frac{121}{126}$$

□

ここまでは, 互いに排反な事象についての確率を考えてきた. ここからは, 2 つに事象 A, B が互いに排反でないとき, 和事象の確率 $P(A \cup B)$ について考えてみよう.

Theorem 1.2.3 一般の和事象の確率

全事象を U とする. 2 つの事象 A, B が互いに排反でないとき, 和事象の確率 $P(A \cup B)$ は次の式で表される.

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \tag{1.2.3}$$

例題 【教 p.53 例 17】

1 から 30 までの 30 枚の番号札から 1 枚引くとき, その番号が 2 の倍数または 3 の倍数である確率を求めよ.

Proof.

まず, 起こりうるすべての場合の数を考える.

30 枚から 1 枚引くため, ${}_{30}\mathrm{C}_1$ 通りある.

次に, 求めたい場合の数を考える.

引いた札の番号が「2 の倍数である」という事象を A , 「3 の倍数である」という事象を B とすると, 求める確率は $P(A \cup B)$ である.

ここで,

$$\begin{aligned} A &= \{2 \cdot 1,\ \ 2 \cdot 2,\ \ 2 \cdot 3,\ \ \cdots\cdots,\ \ 2 \cdot 15\} \\ B &= \{3 \cdot 1,\ \ 3 \cdot 2,\ \ 3 \cdot 3,\ \ \cdots\cdots,\ \ 3 \cdot 10\} \\ A \cap B &= \{6 \cdot 1,\ \ 6 \cdot 2,\ \ 6 \cdot 3,\ \ \cdots\cdots,\ \ 6 \cdot 5\} \end{aligned}$$

であるから, $n(A) = 15,\ n(B) = 10,\ n(A \cap B) = 5$ である.

よって, 番号が 2 の倍数または 3 の倍数である確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

□

1.3 独立な試行と確率

A, B の 2 人がさいころを投げるとする. このとき, A がさいころを投げる試行と, B がさいころを投げる試行では, それぞれの結果は互いに影響を与えない.

Definition 1.3.1　独立な試行

いくつかの試行において, どの試行の結果も他の試行の結果に影響を与えないとき, これらの試行は **独立** であるという.

一般に, 独立な 2 つの試行における事象の確率について, 次のことが成り立つ.

Theorem 1.3.1　独立な試行の確率

2 つの試行 S と T が独立であるとき, S で事象 A が起こり, かつ T で事象 B が起こる確率 p は, 　$P(A)$ と $P(B)$ の積に等しい.
すなわち,

$$\boldsymbol{p = P(A) \times P(B)} \tag{1.3.1}$$

独立な 3 つ以上の試行についても, Theorem1.3.1 と同様なことが成り立つ.

練習問題 【教 p.55 例 18】

2 枚の硬貨と 1 個のさいころを投げるとき, 次の確率を求めよ.

1. 硬貨は 2 枚とも表が出て, さいころは偶数の目が出る.
2. 硬貨は 1 枚だけが表が出て, さいころは 2 以下の目が出る.

Proof.

(1) 「硬貨を投げる」という試行と, 「さいころを投げる」という試行は独立である.
硬貨が 2 枚とも表が出る確率は, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
さいころが偶数の目が出る確率は, $\frac{1}{2}$
よって, 求める確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

□

例題 【教 p.56 例題 11】

A の袋には赤玉 3 個と白玉 2 個, B の袋には赤玉 2 個と白玉 4 個が入っている．A, B の袋から 1 個ずつ玉を取り出すとき, 次の確率を求めよ．

1. ともに赤玉を取り出す確率
2. 同じ色の玉を取り出す確率

Proof.

(1) 「A の袋から玉を 1 個取り出す」という試行と, 「B の袋から玉を 1 個取り出す」という試行は独立である．

A の袋から赤玉を取り出す確率は, $\frac{3}{5}$

B の袋から赤玉を取り出す確率は, $\frac{2}{6}$

よって, 求める確率は

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{5}$$

□

Proof.

(2) 「A の袋から玉を 1 個取り出す」という試行と, 「B の袋から玉を 1 個取り出す」という試行は独立である．

また, 「同じ色の玉を取り出す」という事象は, 「赤玉を取り出す」という場合と「白玉を取り出す」という場合がある．

ともに赤玉を取り出す確率は, (1) より $\frac{1}{5}$

ともに白玉を取り出す確率は, $\frac{2}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{15}$

これらの事象は互いに排反であるから, 求める確率は

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$$

□

Definition 1.3.2　反復試行

同じ条件のもとでの試行の繰り返しを **反復試行** という．1 つの試行を何回か繰り返すとき，これらの試行は独立である．

Theorem 1.3.2　反復試行の確率

反復試行の確率について，一般に次のことが成り立つ．

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする．

この試行を n 回行う反復試行で，A がちょうど r 回起こる確率は

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r\, p^r\, (1-p)^{n-r}} \tag{1.3.2}$$

一般に，正の数 a に対して，$a^0 = 1$ と定めることとする．

例題　【教 p.58 例題 12】

赤玉 2 個，白玉 4 個の入った袋から，玉を 1 個取り出し，色を見てからもとにもどす．この試行を 6 回行うとき，次の確率を求めよ．

1. 赤玉が 5 回以上出る確率
2. 6 回目に 3 度目の赤玉が出る確率

Proof.

(1) 1 回の試行で赤玉が出る確率は，$\dfrac{1}{3}$ である．また，6 回のうち赤玉が 5 回以上出るのは，次の場合である．

赤玉がちょうど 5 回出る　　赤玉が 6 回出る

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\begin{aligned} {}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^6 &= 6\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\times\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^6 \\ &= \frac{13}{729} \end{aligned}$$

□

Proof.

(2) 5 回目までに 赤玉がちょうど 2 回 出て，6 回目に 3 度目の赤玉が出る確率であるから

$$\begin{aligned} {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3} &= 10\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{80}{729} \end{aligned}$$

□

例題 【教 p.59 応用例題 11】

数直線上を動く点 P が原点の位置にある．1 枚の硬貨を投げて，表が出たときは P を正の向きに 2 だけ進め，裏が出たときは P を負の向きに 1 だけ進める．硬貨を 6 回投げ終わったとき，P が原点にもどっている確率を求めよ．

Technique 1.3.1 反復試行は、（並び替えの数）×（1 個あたりの確率）で計算せよ!

反復試行の確率は，**（並び替えの数） と （1 個あたりの確率）を順に考える**ことで求めることができる．
このように考えることによって，事象が 3 つ以上の場合でも容易に確率を求めることができる．

Proof.
条件を満たす場合を考えて，和の法則を使って確率を求めることもできる．しかし，この方法では，**漏れなく場合を分けること**と**時間がかかること**がデメリットである．

したがって，次のように文字を使用し，一般化することによって求めることとする．

6 回のうち，表の回数を r 回とすると，裏の回数は $6-r$ 回である．
よって，6 回投げ終わったときの P の座標は $2r+(-1)(6-r)$ と表すことができる．
硬貨を 1 回投げる時，表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$ である．
6 回のうち，表が r 回出るとすると，裏は $(6-r)$ 回出るから 6 回で原点に戻るのは

$$2r+(-1)(6-r)=0$$

が成り立つときである．

これを解くと $r=2$

よって，P が原点にもどっているのは 6 回のうち 表がちょうど 2 回 出るときである．

したがって，求める確率は

$$\begin{aligned}{}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 &= 15\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\\ &= \frac{15}{64}\end{aligned}$$

□

1.4 条件付き確率

Definition 1.4.1

条件付き確率事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる**条件付き確率** $P_A(B)$ は次のように定義される.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) > 0) \tag{1.4.1}$$

Theorem 1.4.1 確率の乗法定理

2 つの事象 A, B について, 次が成り立つ.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \tag{1.4.2}$$

1.5 期待値

Definition 1.5.1

条件付き確率事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる**条件付き確率** $P_A(B)$ は次のように定義される.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) > 0) \tag{1.5.1}$$

Theorem 1.5.1 確率の乗法定理

2 つの事象 A, B について, 次が成り立つ.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \tag{1.5.2}$$