

浙江大学附属中学 2022 年高一年级测试

考试范围：必修一 A；考试时间：120 分钟；命题人：陈金康

问卷部分

注意事项：

1. 答题前填写好自己的姓名、班级、考号等信息
2. 请将答案正确填写在答题卡上
3. 考试时严禁抄袭作弊，不得使用计算器

一、单选题

1. 设正实数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$, 则当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}$ 的最大值为 ()

- A. 9 B. 1 C. $\frac{9}{4}$ D. 3

2. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \pi^x + x$. 若

$f(3a^2 + b^2) + f[\lambda(a^2 - ab)] \geq 0$ 对任意的 $b > a > 0$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围是 ()

- A. $[6, +\infty)$ B. $(-\infty, 4]$ C. $(0, 6]$ D. $(-\infty, 6]$

3. 关于 x 的不等式 $2\cos 2x > a - 4\sqrt{3}\sin x$ 在区间 (n, m) 上恒成立, $m - n$ 的最大值为 $\frac{5\pi}{3}$, 则实数 a 的取值范围 ()

- A. $a \leq -2\sqrt{3} + 1$ B. $a = -2\sqrt{3} + 1$ C. $a \leq -7$ D. $a = -7$

4. 已知 $a = e^{0.2} - 1, b = \ln 1.2, c = \tan 0.2$, 其中 $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数, 则 ()

- A. $c > a > b$ B. $a > c > b$
C. $b > a > c$ D. $a > b > c$

5. 设集合 $S, T, S \subseteq \mathbf{N}^*, T \subseteq \mathbf{N}^*, S, T$ 中至少有两个元素, 且 S, T 满足:

①对于任意 $x, y \in S$, 若 $x \neq y$, 都有 $xy \in T$

②对于任意 $x, y \in T$, 若 $x < y$, 则 $\frac{y}{x} \in S$;

下列命题正确的是 ()

- A. 若 S 有 4 个元素, 则 $S \cup T$ 有 7 个元素
B. 若 S 有 4 个元素, 则 $S \cup T$ 有 6 个元素
C. 若 S 有 3 个元素, 则 $S \cup T$ 有 5 个元素
D. 若 S 有 3 个元素, 则 $S \cup T$ 有 4 个元素

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left| \frac{2x+1}{x-1} \right|, & x < 0 \\ x^2 - 4x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$, 若方程 $f\left(x + \frac{1}{x} - 1\right) = a$ 恰有 4 个实根, 则实数 a 的

取值范围是 ()

- A. $[-1, 2]$ B. $\left(\frac{5}{4}, 2\right)$ C. $(-1, 0) \cup \left[\frac{5}{4}, 2\right)$
D. $(-1, 0) \cup \left(\frac{5}{4}, 2\right)$

7. 若关于 x 的不等式 $ax + 6 + |x^2 - ax - 6| \geq 4$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 1]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-1, +\infty)$
D. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(x+2), & -2 < x \leq 0 \\ x^2 - 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = [f(f(x))]^2 - (a+1)f(f(x)) + a$

($a \in \mathbb{R}$) 恰有 8 个不同零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1)$ B. $[0, 1)$ C. $(0, \frac{1}{4})$ D. $(0, 2)$

二、多选题

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |2x - 3|, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right), & x > 2 \end{cases}$, 则下列说法正确的是 ()

A. 若函数 $y = f(x) - kx$ 有 4 个零点, 则实数 k 的取值范围为 $\left(\frac{1}{24}, \frac{1}{6}\right)$

B. 关于 x 的方程 $f(x) - \frac{1}{2^n} = 0 (n \in \mathbb{N}^*)$ 有 $2n+4$ 个不同的解

C. 对于实数 $x \in [1, +\infty)$, 不等式 $2xf(x) - 3 \leq 0$ 恒成立

D. 当 $x \in [2^{n-1}, 2^n] (n \in \mathbb{N}^*)$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的图形的面积为 1

10. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x) = f(6-x)$, 且 $f(x+2) = f(x-2)$, 当 $x \in [-1, 1]$

时, $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$, 则下列说法正确的是 ()

A. $f(x)$ 是奇函数

B. $x \in (2020, 2022)$ 时, $f(x)$ 单调递减

C. $f(x)$ 关于点 $(2021, 0)$ 对称

D. $x \in (-1, 11)$ 时, 方程 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 所有根的和为 30

11. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 函数 $f(2x+2)$ 为奇函数, $f(x-1)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 则下列说法正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 的一个周期为 6

B. 函数 $g(x)$ 的一个周期为 8

C. 若 $f(0)=2$, 则 $f(18)+g(68)=-2$

D. 若当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $g(x) = \ln(x+1)$, 则当 $10 \leq x \leq 12$ 时, $g(x) = \ln(13-x)$

12. 已知函数 $f(x) = \sin|x| + |\cos x|$, 以下结论正确的是 ()

A. 它是偶函数

B. 它是周期为 2π 的周期函数

C. 它的值域为 $[-1, \sqrt{2}]$

D. 它在 $(-\pi, 2\pi)$ 这个区间有且只有 2 个零点

三、填空题

13. 已知关于 x 的不等式 $\frac{e^x}{x^3} - x - a \ln x \geq 1$ 对于任意 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

14. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x+1)-2$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$. 若 $f(-1) + f(0) = 1$, 则 $f\left(\frac{2023}{2}\right) =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = 2\ln x - 1$, $g(x) = a|x-m|$, 若存在实数 $a > 0$ 使 $y = f(x) - g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ 上有 2 个零点, 则 m 的取值范围为_____.

16. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 集合 $B = \{1, 2, 3, 4\}$, 函数 $f: A \rightarrow B$, 且对于一切的 $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, 都有 $|f(i+1) - f(i)| \geq 2$, 则满足条件的函数 f 的个数为_____.

四、解答题

17. 集合 $S = \{a \mid a = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in \{0.5, -0.5\}, i = 1, 2, \dots, n\}$, 其中 n 为正整数. 对 S 中的任意元素 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 和 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 定义

$$D(a, b) = ((a_1 + b_1)^3 - |a_1 - b_1|) + ((a_2 + b_2)^3 - |a_2 - b_2|) + \dots + ((a_n + b_n)^3 - |a_n - b_n|)$$

(1) 当 $n = 3, a = (0.5, 0.5, -0.5), b = (-0.5, 0.5, -0.5)$ 时, 求 $D(a, a)$ 和 $D(a, b)$ 的值.

(2) 当 $n = 4$ 时, S 的子集 A 满足: 对 A 中任意元素 a 和 $b, D(a, a)$ 不能被 4 整除, 且当 $a \neq b$ 时, $D(a, b)$ 能被 4 整除. 求集合 A 中元素个数的最大值.

(3) 给定 $n > 3$, S 的子集 A 满足: 对 A 中任意元素 a 和 b , 当 $a \neq b$ 时, $D(a, b) \geq n - 4$. 求集合 A 中元素个数的最大值.

18. 已知定义在 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 满足: ① 对 $\forall x, y \in \mathbf{R}, f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$; ② 当 $x > 0$ 时, $f(x) < 1$; ③ $f(1) = -2$.

(1) 求 $f(0)$, 判断并证明 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $\exists x \in [-1, 1]$, 使得 $f(x) \leq m^2 - 2am - 5$, 对 $\forall a \in [-1, 1]$ 成立, 求实数 m 的取值范围;

(3) 解关于 x 的不等式 $f(ax^2) < f((a+2)x) + 6$.

19. 已知函数 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$.

(1) 求证: 函数 $f(x)$ 是偶函数;

(2) 设 $a \in \mathbf{R}$, 求关于 x 的函数 $y = 2^{2x} + 2^{-2x} - 2af(x)$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 时的最小值 $g(a)$ 的表达式;

(3) 若关于 x 的不等式 $mf(x) \leq 2^{-x} + m - 1$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时恒成立, 求实数 m 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3x-2} - ax, a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 求 a 的最小值;

(2) 当 $x \geq 1$ 时, $5x^2 + x - m^2 \geq m\sqrt{3x-2}$, 求实数 m 的取值范围.

21. 对正整数 n , 记 $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}, P_n = \left\{ \frac{m}{\sqrt{k}} \mid m \in I_n, k \in I_n \right\}$.

(1) 用列举法表示集合 P_3 ;

(2) 求集合 P_7 中元素的个数;

(3) 若集合 A 中任意两个元素之和都不是整数的平方, 则称 A 为“稀疏集”. 已知集合 P_n 能

分成两个不相交的稀疏集的并集，求 n 的最大值.

22. 函数 $f(x) = x^2 + 2|x - a| + a (a \in \mathbf{R})$ ，在 $x \in [-2, 2]$ 上的最大值为 $M(a)$ ，最小值为 $m(a)$.

(1) 求 $g(a) = M(a) - m(a)$;

(2) 设 $b \in \mathbf{R}$ ，若 $[f(x) + b]^2 \leq 36$ 对 $x \in [-2, 2]$ 恒成立，求 $a + b$ 的取值