Examen de Álgebra Lineal (Enero 2019)
Grados I.I.I.S. e I.I.I.C.

1. Responde las siguientes preguntas:

a) Comprueba que el núcleo de una aplicación lineal $T : E \to F$ es un subespacio vectorial de E.

b) Comprueba que un sistema ortogonal de vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un sistema linealmente independiente.

c) Comprueba sin calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 1 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

2. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los siguientes subespacios vectoriales:

$$S \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 & = 0 \end{cases} \qquad T \equiv \begin{cases} x_1 & = \alpha + \beta + 2\gamma \\ x_2 & = \beta + \gamma \\ x_3 & = -\alpha + \beta \\ x_4 & = 3\beta + 3\gamma, \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Halla la dimensión y una base de los subespacios S, T, $S+T$ y $S \cap T$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida $f(x, y, z) = (x - y + z, x + y + 2z, 2x + y + 3z)$. Calcula:

a) La matriz asociada a f en las bases canónicas.

b) Coordenadas de $u = (1, -2, 3)$ en la base $B' = \{(2, 1, -1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

c) Matriz asociada a f en la base B'.

d) Calcula las coordenadas de $f(u)$ en B' usando la matriz anterior.

4. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo definido por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_1, x_1, x_1 + ax_2)$. Calcula $a \in \mathbb{R}$ para que f sea diagonalizable y, en estos casos, halla una base B respecto de la cual la matriz de f sea diagonal. Escribe también dicha matriz diagonal.