LINEALIDAD Y RANGO

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde los coeficientes $a_{ij},\ i = 1, 2 \ldots m,$ $j = 1, 2 \ldots\ n$ y los términos independientes $b_i, i = 1, 2 \ldots m,$ son escalares y $x_1, x_2\ \ldots x_n$ son las incógnitas.

- Tipos de sistemas de sistemas lineales:

- **Sistemas compatibles**, cuando tienen solución. Estos a su vez pueden ser *Determinados* si la solución es única o *Indeterminados* si tienen infinitas soluciones.

- **Sistemas Incompatibles**, cuando no admiten ninguna solución.

- **Sistemas homogéneos**, son los que tienen todos los términos independientes nulos, es decir:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- **Propiedades de los sistemas de sistemas homogéneos:**

- Siempre van a tener como solución al menos $(0, 0, 0 \ldots 0)$ llamada solución trivial.

- Si $(s_1, s_2, s_3 \ldots s_n)$ es una solución particular de un sistema homogéneo, entonces $(\lambda s_1, \lambda s_2, \lambda s_3 \ldots \lambda s_n)$, también será solución.

- Si $(s_1, s_2, s_3 \ldots s_n)$ y $(s'_1, s'_2, s'_3 \ldots s'_n)$, son soluciones particulares de un sistema homogéneo entonces:

$(s_1 + s'_1, s_2 + s'_2, s_3 + s'_3 \ldots s_n + s'_n)$

también lo es.

- Dado el sistema

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se llama sistema homogéneo asociado a S a:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- **Sistemas equivalentes**

- Dos *sistemas* son *equivalentes* cuando tienen la misma solución.

- Se llaman *operaciones elementales* entre las ecuaciones de un sistema a las que se puedan efectuar en las mismas resultando otro sistema equivalente al anterior. Son las siguientes:

1.- Multiplicar una ecuación cualquiera por un escalar distinto de 0.
2.- Intercambiar de lugar entre sí dos ecuaciones del sistema.
3.- Sumar a una ecuación una combinación lineal de las otras ecuaciones.

- Método de Gauss: Se trata de realizar operaciones elementales en un sistema para que la solución resulte evidente o ver que el sistema no tiene solución.

LINEALIDAD Y RANGO

Matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m_x n}$$

El subíndice *i* nos indica la fila y *j* la columna.
La matriz A tiene como dimensión *mxn,* si *m = n* se dice que la matriz es de orden *n,* y además esa matriz es cuadrada.

Matriz cuadrada simétrica: $a_{ij} = a_{ji}$

Matriz cuadrada antisimétrica: $a_{ij} = -a_{ji}$

Matriz traspuesta: $a_{ij}^{t} = a_{ji}$

Una matriz *A* cuadrada es simétrica si y solo si $A^t = A$

Una matriz *A* cuadrada es antisimétrica si y solo si $A^t = -A$

Elementos a_{ij} tal que i=j

Matriz diagonal: todos los elementos que no estén en la diagonal principal son nulos

Matriz antidiagonal: todos los elementos de la diagonal principal son nulos.

Matriz escalar: matriz diagonal en la que todos los elementos son iguales

Traza de una matriz: suma de los elementos de la diagonal principal

Suma de matrices: Propiedades.

1. Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. Elemento neutro: $A + 0 = A$
3. Elemento simétrico: $A + (-A) = 0$
4. Conmutativa: $A + B = B + A$

Producto por un escalar: Propiedades.

1.- Distributiva 1: $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$

2.- Distributiva 2: $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

3.- Asociativa mixta: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

4.- Elemento unidad: $1 \cdot A = A$

Producto de matrices: Propiedades.

No se pueden efectuar el producto de matrices si el número de columnas de la primera matriz es distinto al número de filas de la segunda.

1.- Asociativa: $(AB)C = A(BC)$
2.- Distributiva: $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)A = BA + CA$
3.- Matriz Identidad: Sea $A \in M_{mxn}$; I_m verifica que $I_m A = A$ e I_n $A I_n = A$
4.- El producto de matrices no es conmutativo en general

Matriz inversa: Propiedades.

Se llama *matriz inversa* de A (A^{-1}) a la matriz cuadrada que verifica: $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$

- La inversa de una matriz, si existe, es única.

- Si A y B son invertibles también lo es AB y $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

- Si A es invertible entonces $(A^{-1})^{-1} =A$

- Si A es invertible entonces $(A^{t})^{-1} =(A^{-1})^{t}$

Expresión matricial de un sistema lineal.

Dado el sistema lineal

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz de los términos independientes:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada del sistema:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \cdots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}} & b_1 \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \cdots & \mathrm{a}_{2\mathrm{n}} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{m}1} & \mathrm{a}_{\mathrm{m}2} & \cdots & \mathrm{a}_{\mathrm{mn}} & b_m \end{array}\right)$$

La matriz de las incógnitas:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Entonces: AX=B

LINEALIDAD Y RANGO

Determinantes

Determinante de una matriz cuadrada de orden 2

El determinante de A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es:

$$|A| = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante de una matriz cuadrada de orden 3

El determinante de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es:

$$|A| = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Regla de Sarrus

Se llama *menor complementario del elemento* $\mathbf{a_{ij}}$ y se denota por $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ al determinante de la matriz obtenida al eliminar la fila **i** y la columna **j.**

Se llama *adjunto del elemento* $\mathbf{a_{ij}}$ y se denota por $\mathbf{A_{ij}}$:

$$\mathbf{A_{ij}} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$$

Determinante de una matriz cuadrada de orden n.

Se define el *determinante de la matriz A* a la suma de los elementos de la primera fila de A por sus correspondientes adjuntos

Propiedades de los determinantes

- Si una matriz cuadrada tiene una fila de ceros, el determinante es 0
- Al intercambiar entre sí dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo

- Si un determinante tiene dos filas iguales es cero

- Si la matriz B se obtiene multiplicando una fila de A por un número k: $|B| = k|A|$

- Si un determinante tiene dos filas proporcionales es cero.

- $|C| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- $|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

- Si una fila es combinación lineal de otras filas, el determinante es cero.

- Si a una fila se le suma una combinación lineal de otras filas, el determinante no varia.

- $|A^t| = |A|$

Determinantes y sistemas de ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones AX=B con m ecuaciones y n incógnitas es de *Cramer* si n=m y $|\mathrm{A}| \neq 0$

Un sistema de Cramer siempre es compatible y determinado.

La solución de un sistema de Cramer será:
$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$

Sea $\mathrm{A_i}$ la matriz A sustituyendo la columna i por la matriz B, entonces: $\mathrm{x_i} = \frac{|\mathrm{A_i}|}{|\mathrm{A}|}$ con $\mathrm{x_i} \in \mathrm{X}$

Matriz inversa.

Se dice que una matriz A es:

- Invertible si existe su inversa
- Regular si $|A| \neq 0$
- Singular si $|A| = 0$

Si una matriz es regular entonces existe su inversa.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)^t$$

Método de Gauss

Rango de una matriz

Un *menor de orden h de A* es el determinante de una submatriz cuadrada de orden h de A

Rango de la matriz A: orden del menor de mayor orden no nulo de A, rg(A)

Rango de la matriz A: Número de filas (o columnas) no nulas resultantes de escalonar por filas (o columnas) la matriz realizando transformaciones elementales.

Teorema de Rouche-Fröbenius

Sea AX=B un sistema lineal con m ecuaciones y n incógnitas, entonces:

- Si $rg(A) = rg(A|B)$ el sistema es compatible, si además $rg(A) = rg(A|B)$=n será determinado e indeterminado en caso contrario.

- Si $rg(A) \neq rg(A|B)$ el sistema será incompatible y no tendrá solución.

Factorización LU

A=LU

Utilidades

Determinantes: $|\mathrm{A}| = |\mathrm{L}||\mathrm{U}|$

Inversas: $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

Sistemas de ecuaciones: Sea AX=B y A=LU, entonces LY=B, $\mathrm{Y} = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{B}$, $\mathrm{X} = \mathrm{U}^{-1}\mathrm{Y}$