Examen de Álgebra Lineal (Julio 2019)
Grados I.I.I.S. e I.I.I.C.

1.

a) Comprueba si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, en el caso en que proceda calcular la dimensión y una base:

$$E = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\} \qquad F = \{(x, x, 8x) : x \in \mathbb{R}\}$$

b) Determina el valor del siguiente determinante sin desarrollarlo, es decir, usando sólo las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a+1 & b & c & d \\ a & b+1 & c & d \\ a & b & c+1 & d \\ a & b & c & d+1 \end{vmatrix}$$

2. Obtén las ecuaciones paramétricas, implícitas y bases de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$: F, G, $F+G$ y $F \cap G$, donde

$$F = \{(x, y, z) : z = 0\} \quad y \quad G = \langle (0,0,1), (2,0,1), (2,1,2) \rangle$$

3. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y, y + 3z)$. Calcular:

a) La matriz asociada a f con respecto a las bases canónicas y las coordenadas de $f(u)$ en la base canónica, siendo $u = (1, 2, 4)$.

b) La matriz asociada a f con respecto de la base $B_1 = \{(1,1,1), (0,1,-1), (1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la canónica de $\mathbb{R}^2$.

c) La matriz asociada a f con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base $B_2 = \{(1,2), (0,1)\}$.

d) La matriz asociada a f con respecto de las bases B_1 y B_2. Calcula las coordenadas de $f(u)$ en la base B_2 usando la matriz que acabas de obtener.

4. Averigua si el

4. Averigua si el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = & 2x + y - z \\ y' = & -x - y \\ z' = & -x + y + 2z. \end{cases}$$

es diagonalizable. En caso afirmativo, obtén su forma diagonal y la matriz de cambio de base.