Tema 3. ESPACIOS VECTORIALES

Ejercicio 1. En $\mathbb{R}^2$ se definen las siguientes operaciones:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad y \quad \alpha \star (x, y) = (\alpha x, y)$$

Determina si es o no un espacio vectorial.

Ejercicio 2. Determina cúales de los siguientes subconjuntos, de $\mathbb{R}^3$ o $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, son subespacios vectoriales.

(a) $S = \{(x, y, z) : y = 0\}$
(b) $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$
(c) $S = \{(x, y, z) : x + z = 1\}$
(d) $S = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$
(e) $S = \{(x, y, z) : x + z \leq 0\}$
(f) $S = \{(x, y, z) : xy = 0\}$
(g) $S = \{p(x) = x^3 + ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$
(h) $S = \{p(x) = ax^3 + b : a, b \in \mathbb{R}\}$

Ejercicio 3. Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^3$.

(a) $\{(0, 1, 0), (1, 1, -1), (-1, 0, 1)\}$
(b) $\{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$
(c) $\{(1, 0, 0), (a, 1, 0), (a, a, 0)\}$
(d) $\{(1, 0, a), (a, 1, 0), (a, 0, 1)\}$

Ejercicio 4. Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(a) $\{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$
(b) $\{x, x^2, x + x^2\}$
(c) $\{1 - x^2, 1 + x, x^2 - x, x + x^2\}$
(d) $\{1 + x^2, 2 + x^2\}$

Ejercicio 5. Sean $f, g, h : \{a, b, c\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como: $f(a) = 0,\ f(b) = f(c) = 1;\ g(a) = g(c) = 1,\ g(b) = 0;\ h(a) = h(b) = 1,\ h(c) = 0$. Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto $\{f, g, h\}$.

Ejercicio 6. Determina si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes. En el primer caso, encuentra una combinación lineal entre ellos y un subconjunto con un número máximo de vectores linealmente independientes.

(a) $\{(3, 5, 1), (2, 1, 3)\}$
(b) $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (0, -1, 1)\}$
(c) $\{(1, 0, 1, 0), (2, 1, 3, 1), (0, 1, 1, 1), (2, 2, 4, 2)\}$
(d) $\{1 + 3x + 4x^2, 4 + x^2, 3 + x + 2x^2\} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

Ejercicio 7. Hallar los valores de a para que el conjunto $B = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$ sea base de $\mathbb{R}^3$. Para $a = 2$ calcula las coordenadas del vector $v = (-1, 1, 3)$ respecto de dicha base.

Ejercicio 8. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ se considera la base $B = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$. Halla las coordenadas del polinomio $p = 2 - 3x + x^2 + 2x^3$ respecto de dicha base.

Ejercicio 9. En $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se considera el conjunto $B = \{1, x+3, (x+3)^2\}$. Prueba que es una base, y halla las coordenadas del polinomio $p = a + bx + cx^2$ respecto de dicha base.

Ejercicio 10. Averigua si los vectores $u = (1, -1, 0)$ y $w = (2, -3, 1)$ pertenecen al espacio vectorial generado por el conjunto de vectores $\{v_1 = (2, 5, 1), v_2 = (3, 4, 1), v_3 = (5, 9, 2)\}$.

Ejercicio 11. Determina a y b para que el vector $(2, a, 3, -b)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores $(2, 3, 1, -5)$ y $(0, 2, -1, 3)$.

Ejercicio 12. Sean los conjuntos: $A = \{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, $B = \{(2, 1, -1), (1, 2, 1)\}$ y $C = \{(2, 1, -1), (1, -1, 0)\}$. Demuestra que A y B generan el mismo subespacio, y que éste no coincide con el generado por C.

Ejercicio 13. Halla una base del espacio vectorial generado por el conjunto de vectores:

$$\{v_1 = (3, 2, 0, 5), v_2 = (-1, 0, 3, -4), v_3 = (2, 2, 3, 1), v_4 = (0, 2, -9, 17)\}$$

Ejercicio 14. Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^4$: $(1+a, 1, 1, 1)$, $(1, 1+a, 1, 1)$, $(1, 1, 1+a, 1)$ y $(1, 1, 1, 1+a)$, $a \in \mathbb{R}$. Determina, en función de a, la dimensión y una base del espacio vectorial S que generan.

Ejercicio 15. Halla la dimensión y una base del espacio vectorial

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+3c & 2a-b \\ -a-c & a+2b+5c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejercicio 16. Estudia si es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ el conjunto de soluciones de cada uno de los siguientes sistemas:

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \qquad (b) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{array} \right.$$

En caso afirmativo, determina una base.

Ejercicio 17. Encuentra un sistema de generadores, una base y la dimensión del subespacio vectorial de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 18. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, determina la dimensión y una base del espacio vectorial generado $\{A^n : n \geq 0\}$.

Ejercicio 19. En $\mathbb{R}^3$ se consideran

$$S = \{(x, y, z) : x = -z\}$$

$$T = \{(x, y, z) : x = z - y\}$$

(a) Prueba que S y T son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

(b) Encuentra una base de S, y halla las coordenadas de un vector arbitrario de S respecto de dicha base.

(c) Prueba que $B_T = \{(0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$ es una base de T, y encuentra las coordenadas de $(-2, 1, -1) \in T$ respecto de dicha base.

Ejercicio 20. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$S = L(\{(1, 0, 1, 1), (1, -1, -1, 0), (0, 1, 2, 1)\})$$

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}$$

Obtén las ecuaciones paramétricas e implícitas y una base de $S + T$ y de $S \cap T$.

Ejercicio 21. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ se consideran los conjuntos
$S = \{p(x) : p(-1) = 0\}$ y $T = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + (a + b)x + 2b : a, b \in \mathbb{R}\}$

(a) Prueba que S y T son subespacios vectoriales.

(b) Obtén las ecuaciones paramétricas e implícitas y una base de S y de T.

(c) Calcula $S \cap T$ y $S + T$.

Ejercicio 22. En $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Halla la dimensión y una base de los subespacios V_1, V_2, $V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2$.

Ejercicio 23. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$S \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad T \equiv \begin{cases} x_1 = \alpha + \beta + 2\gamma \\ x_2 = \beta + \gamma \\ x_3 = -\alpha + \beta \\ x_4 = 3\beta + 3\gamma \end{cases} ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Halla la dimensión y una base de los subespacios S, T, $S + T$ y $S \cap T$.

Ejercicio 24. En $\mathbb{R}^5$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = \{(1, 0, -1, 0, 0), (2, 1, 0, 1, -1), (4, 1, -2, 1, -1)\}$$
$$W = \{(1, -1, 1, -1, 1), (-2, 0, 0, 0, 3), (0, 1, 2, 1, -1), (0, -2, 2, -2, 5)\}$$

Halla bases de U, W, $U + W$ y $U \cap W$.

Ejercicio 25. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = \{(x, y, z) : z = 0\}$$
$$W = L(\{(0, 1, 1), (2, 0, 1), (2, 1, 2)\})$$

Halla un sistema de generadores y las dimensiones de los subespacios U, W, $U + W$ y $U \cap W$.

Ejercicio 26. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$S = L(\{(1, 0, 2, -1), (0, -1, 2, 0), (2, -1, 6, -2)\})$$
$$T = L(\{(1, -1, 4, -1), (1, 0, 0, 1), (-1, -2, 2, 1)\})$$

Demuestra que $dim(S + T) = 3$ y que $dim(S \cap T) = 2$.

Ejercicio 27. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios:
$U = \{(a, b, c) : a = c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$
$V = \{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}$

$W=\{(a,b,c) : a+b+c=0, a,b,c\in\mathbb{R}\}$

Prueba que $\mathbb{R}^3 = U+V = U+W = V+W$. Determina si alguna de las sumas anteriores es directa.

Ejercicio 28. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$S=L(\{(1,0,1),(1,1,-1),(2,1,0)\}) \quad T=L(\{(1,0,1),(0,0,1),(3,0,-1)\})$$

Halla un subespacio U tal que $\mathbb{R}^3=S\oplus U$, y $T+U$ no sea suma directa.

Ejercicio 29. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:
$S_1=L(\{(1,0,1,0),(2,1,0,2),(0,-1,2,-2)\})$
$S_2=L(\{(1,1,1,0),(-1,-1,1,-2)\})$
Determina si la suma S_1+S_2 es directa. Halla una base de dicha suma.

Ejercicio 30. Determina $a,b\in\mathbb{R}$ para que el vector $v=(2,a,b,1)$ pertenezca al subespacio vectorial $S=L(\{(1,0,2,0),(0,-1,1,1)\})$. Obtén un subespacio suplementario de S en $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 31. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales:
$V=L(\{1+x^3, 1+x+x^2, 2x-x^2, 2+3x^2\})$
$W=L(\{1+3x^2-x^3, 1+4x+x^2-x^3, 2x-x^2\})$
Demuestra que $W\subset V$, y halla un suplementario de W en V.

Ejercicio 32. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$V=L(\{x+x^2, x-x^2, 2x+x^2\})$$

$$W=\{a+bx+cx^2+dx^3 : b+c=0, 2b-c=0\}$$

$$T=\{a+bx+cx^2+dx^3 : a=0, b=-\mu, c=0, d=\lambda+\mu, \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$$

(a) Halla $V\cap W$ y $V+W$. Determina si V y W son suplementarios.
(b) Halla una base de $W\cap T$ y las ecuaciones implícitas de $V+T$.