

Tema 2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ejercicio 1. Halla una forma escalonada, el rango, y las matrices canónica por filas y de paso para cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 8 & 10 & 3 \\ -2 & 2 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Ejercicio 2. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, hallar k para que $rg(A + kB) < 2$.

Ejercicio 3. Calcula la inversa, si existe, de las siguientes matrices:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; (b) B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}; (c) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix};$$

$$(d) D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}; (e) E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; (f) F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(g) G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; (h) H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Calcula la inversa, si existe, de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. Calcula, según los valores de n , el rango de las matrices:

$$(a) A_n = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & 1 \\ 1 & n+1 & 1 \\ 1 & 1 & n+1 \end{pmatrix}; (b) B_n = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & n \\ 1 & n+1 & 1 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Obtén la matriz inversa en los casos que se pueda.

Ejercicio 6. Resuelve, por el método de Gauss, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$(a) \begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 2x + y - z = 6 \\ x + 2y + 2z = 2 \end{cases}; (b) \begin{cases} x + y + z + t = -2 \\ x - y - z + t = -4 \\ x - y + z + t = -6 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases}; (c) \begin{cases} 3x + y - z = 10 \\ x - 2y - z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x - y - 3z = 7 \end{cases};$$

$$(d) \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + 9y - 5z = 0 \end{cases}; (e) \begin{cases} x + 2y + z + 2t + 4u = 4 \\ -2x - 4y - z - 3t - 6u = -6 \\ 2x - 4y + t + 4u = 4 \\ 3x + 6y + z + 4t + 7u = 8 \end{cases}; (f) \begin{cases} 2x + y - z + t = 0 \\ x + 2y + z - t = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \end{cases};$$

Ejercicio 7. Discute, según los valores reales de los parámetros, los siguientes sistemas lineales:

$$(a) \begin{cases} x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x - 11y + 9z = k \end{cases}; (b) \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}; (c) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + ky + 6z = 6 \\ -x + 3y + (k-3)z = 0 \end{cases};$$

$$(d) \begin{cases} y + z = 2 \\ x + y + z = a \\ x + y + a = 2 \end{cases}; (e) \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ ax + y + bz = 1 \\ ax + y + z = b \end{cases}; (f) \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases};$$

$$(g) \begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b-1)y + z = 1 \\ ax + by + (b+3)z = 2b-1 \end{cases}; (h) \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + 2y = 4 \\ 4x + y = a \end{cases}; (i) \begin{cases} ax + ay + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a \end{cases};$$

$$(j) \begin{cases} x - y - z + at = c \\ x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 12 \\ x + y - z + t = -8 \end{cases};$$

Resuelve, cuando sea posible, los que dependen de un único parámetro.

Ejercicio 8. Resuelve la ecuación matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y (a) } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ o (b) } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ 10 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad (b) X \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$, encuentra todas las matrices B cuadradas de orden 2 tales que $AB = 0$.

Ejercicio 11. Obtén todas las matrices B que conmutan con la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 12. Encuentra todos los polinomios $p(x)$ de grado 2, con coeficientes reales, tales que:

$$(a) p(1) = 2, p(-1) = 4 \text{ y } p(3) = 16; (b) p(1) = p(-1) = 0$$

Ejercicio 13. Elimina parámetros en las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$(a) \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 - 3\alpha \end{cases}; (b) \begin{cases} x = 1 - 3\alpha + \beta \\ y = \alpha - 2\beta \\ z = 2 + \beta \end{cases}; (c) \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases};$$

$$(d) \begin{cases} x_1 = a + 2b - c \\ x_2 = a - b \\ x_3 = 3b \\ x_4 = b + c \\ x_5 = a - b + 2c \end{cases}; (e) \begin{cases} x_1 = a + b + 2c \\ x_2 = a + 2b + 3c \\ x_3 = a + c \\ x_4 = 0 \\ x_5 = a - b \end{cases}$$