EJERCICIOS SOBRE OPERACIONES CON MATRICES

Índice

A. Operaciones básicas con matrices

1. Dadas las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 19 & 2 \end{pmatrix},$$

se pide calcular las siguientes operaciones:

a) AB **Solución:**
$AB = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 4 & 4 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$

b) B^tA^t **Solución:**
$B^tA^t = (AB)^t = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 20 \\ 11 & 4 & 20 \end{pmatrix}$

c) $(A + I_3)^2$ **Solución:**

$$(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 102 & 31 & 13 \\ 14 & 28 & 6 \\ 30 & 91 & 23 \end{pmatrix},$$

d) $A^2 + 2A + I_3$ **Solución:**
Como $AI_3 = I_3A = A$ se puede utilizar el binomio de Newton y el resultado será entonces la matriz del apartado anterior.

e) AC **Solución:**

$$AC = \begin{pmatrix} 94 & 40 & 22 \\ 16 & 27 & 8 \\ 48 & 75 & 40 \end{pmatrix}$$

f) CA
Solución:

$$CA = \begin{pmatrix} 94 & 50 & 14 \\ 23 & 44 & 7 \\ 39 & 76 & 23 \end{pmatrix}$$

g) $(A + C)^2$
Solución:

$$(A + C)^2 = \begin{pmatrix} 19 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 37 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 379 & 183 & 75 \\ 81 & 145 & 33 \\ 177 & 305 & 129 \end{pmatrix}$$

h) $A^2 + 2AC + C^2$
Solución:

$$A^2 + 2AC + C^2 = \begin{pmatrix} 379 & 173 & 83 \\ 74 & 128 & 34 \\ 186 & 304 & 146 \end{pmatrix}$$

i) $A^2 + AC + CA + C^2$
Solución:
Como $(A+C)^2 = (A+C)(A+C) = A^2 + AC + CA + C^2$, entonces:

$$A^2 + AC + CA + C^2 = \begin{pmatrix} 379 & 183 & 75 \\ 81 & 145 & 33 \\ 177 & 305 & 129 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 16 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 17 & 2 \end{pmatrix},$$

se pide calcular las siguientes operaciones:

a) AB **Solución:**
$AB = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 5 & 7 \\ 18 & 19 \end{pmatrix}$

b) $B^t A^t$ **Solución:**
$B^t A^t = (AB)^t = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 18 \\ 11 & 7 & 19 \end{pmatrix}$

c) $(A + I_3)^2$ **Solución:**

$$(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 83 & 28 & 13 \\ 14 & 42 & 11 \\ 27 & 81 & 37 \end{pmatrix},$$

d) $A^2 + 2A + I_3$ **Solución:**
Como $AI_3 = I_3 A = A$ se puede utilizar el binomio de Newton y el resultado será entonces la matriz del apartado anterior.

e) AC **Solución:**

$$AC = \begin{pmatrix} 76 & 36 & 21 \\ 17 & 42 & 12 \\ 43 & 67 & 52 \end{pmatrix}$$

f) CA
Solución:

$$CA = \begin{pmatrix} 76 & 45 & 15 \\ 22 & 56 & 11 \\ 35 & 68 & 38 \end{pmatrix}$$

g) $(A+C)^2$
Solución:

$$(A+C)^2 = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 33 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 307 & 165 & 75 \\ 81 & 199 & 49 \\ 159 & 273 & 183 \end{pmatrix}$$

h) $A^2 + 2AC + C^2$
Solución:

$$A^2 + 2AC + C^2 = \begin{pmatrix} 307 & 156 & 81 \\ 76 & 185 & 50 \\ 167 & 272 & 197 \end{pmatrix}$$

i) $A^2 + AC + CA + C^2$
Solución:
Como $(A+C)^2 = (A+C)(A+C) = A^2 + AC + CA + C^2$, entonces:

$$A^2 + AC + CA + C^2 = \begin{pmatrix} 307 & 165 & 75 \\ 81 & 199 & 49 \\ 159 & 273 & 183 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 14 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 15 & 2 \end{pmatrix},$$

se pide calcular las siguientes operaciones:

a) AB **Solución:**
$AB = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 6 & 12 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$

b) B^tA^t **Solución:**
$B^tA^t = (AB)^t = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 16 \\ 11 & 12 & 18 \end{pmatrix}$

c) $(A+I_3)^2$ **Solución:**

$$(A+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 66 & 25 & 13 \\ 14 & 52 & 16 \\ 24 & 71 & 47 \end{pmatrix},$$

d) $A^2 + 2A + I_3$ **Solución:**
Como $AI_3 = I_3A = A$ se puede utilizar el binomio de Newton y el resultado será entonces la matriz del apartado anterior.

e) AC **Solución:**

$$AC = \begin{pmatrix} 60 & 32 & 20 \\ 18 & 53 & 16 \\ 38 & 59 & 60 \end{pmatrix}$$

f) CA
Solución:

$$CA = \begin{pmatrix} 60 & 40 & 16 \\ 21 & 64 & 15 \\ 31 & 60 & 49 \end{pmatrix}$$

g) $(A+C)^2$
Solución:

$$(A+C)^2 = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 29 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 243 & 147 & 75 \\ 81 & 237 & 65 \\ 141 & 241 & 221 \end{pmatrix}$$

h) $A^2 + 2AC + C^2$
Solución:

$$A^2 + 2AC + C^2 = \begin{pmatrix} 243 & 139 & 79 \\ 78 & 226 & 66 \\ 148 & 240 & 232 \end{pmatrix}$$

i) $A^2 + AC + CA + C^2$
Solución:
Como $(A+C)^2 = (A+C)(A+C) = A^2 + AC + CA + C^2$, entonces:

$$A^2 + AC + CA + C^2 = \begin{pmatrix} 243 & 147 & 75 \\ 81 & 237 & 65 \\ 141 & 241 & 221 \end{pmatrix}$$

4. Dadas las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 13 & 2 \end{pmatrix},$$

se pide calcular las siguientes operaciones:

a) AB **Solución:**
$$AB = \begin{pmatrix} 17 & 14 \\ 14 & 25 \\ 29 & 30 \end{pmatrix}$$

b) B^tA^t **Solución:**
$$B^tA^t = (AB)^t = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 29 \\ 14 & 25 & 30 \end{pmatrix}$$

c) $(A+I_3)^2$ **Solución:**

$$(A+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 53 & 36 & 17 \\ 20 & 75 & 29 \\ 30 & 88 & 54 \end{pmatrix},$$

d) $A^2 + 2A + I_3$ **Solución:**
Como $AI_3 = I_3A = A$ se puede utilizar el binomio de Newton y el resultado será entonces la matriz del apartado anterior.

e) AC **Solución:**

$$AC = \begin{pmatrix} 49 & 41 & 24 \\ 27 & 75 & 30 \\ 41 & 79 & 66 \end{pmatrix}$$

f) CA
Solución:

$$CA = \begin{pmatrix} 49 & 50 & 21 \\ 27 & 84 & 27 \\ 35 & 82 & 57 \end{pmatrix}$$

g) $(A + C)^2$
Solución:

$$(A + C)^2 = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 9 \\ 5 & 25 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 199 & 185 & 93 \\ 111 & 321 & 117 \\ 155 & 325 & 249 \end{pmatrix}$$

h) $A^2 + 2AC + C^2$
Solución:

$$A^2 + 2AC + C^2 = \begin{pmatrix} 199 & 176 & 96 \\ 111 & 312 & 120 \\ 161 & 322 & 258 \end{pmatrix}$$

i) $A^2 + AC + CA + C^2$
Solución:
Como $(A + C)^2 = (A + C)(A + C) = A^2 + AC + CA + C^2$, entonces:

$$A^2 + AC + CA + C^2 = \begin{pmatrix} 199 & 185 & 93 \\ 111 & 321 & 117 \\ 155 & 325 & 249 \end{pmatrix}$$

5. Dadas las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 11 & 2 \end{pmatrix},$$

se pide calcular las siguientes operaciones:

a) AB **Solución:**
$$AB = \begin{pmatrix} 15 & 14 \\ 15 & 34 \\ 25 & 27 \end{pmatrix}$$

b) B^tA^t **Solución:**
$B^tA^t = (AB)^t = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 25 \\ 14 & 34 & 27 \end{pmatrix}$

c) $(A + I_3)^2$ **Solución:**

$$(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 40 & 32 & 18 \\ 21 & 77 & 36 \\ 26 & 74 & 56 \end{pmatrix},$$

d) $A^2 + 2A + I_3$ **Solución:**
Como $AI_3 = I_3A = A$ se puede utilizar el binomio de Newton y el resultado será entonces la matriz del apartado anterior.

e) AC **Solución:**

$$AC = \begin{pmatrix} 37 & 36 & 24 \\ 29 & 78 & 36 \\ 35 & 67 & 66 \end{pmatrix}$$

f) CA
Solución:

$$CA = \begin{pmatrix} 37 & 44 & 23 \\ 27 & 84 & 33 \\ 30 & 70 & 60 \end{pmatrix}$$

g) $(A + C)^2$
Solución:

$$(A + C)^2 = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 11 \\ 5 & 21 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 151 & 163 & 97 \\ 115 & 327 & 141 \\ 133 & 277 & 255 \end{pmatrix}$$

h) $A^2 + 2AC + C^2$
Solución:

$$A^2 + 2AC + C^2 = \begin{pmatrix} 151 & 155 & 98 \\ 117 & 321 & 144 \\ 138 & 274 & 261 \end{pmatrix}$$

i) $A^2 + AC + CA + C^2$
Solución:
Como $(A + C)^2 = (A + C)(A + C) = A^2 + AC + CA + C^2$, entonces:

$$A^2 + AC + CA + C^2 = \begin{pmatrix} 151 & 163 & 97 \\ 115 & 327 & 141 \\ 133 & 277 & 255 \end{pmatrix}$$

6. Dadas las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix},$$

se pide calcular las siguientes operaciones:

a) AB **Solución:**

$$AB = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 16 & 45 \\ 21 & 24 \end{pmatrix}$$

b) $B^t A^t$ **Solución:**

$$B^t A^t = (AB)^t = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 21 \\ 14 & 45 & 24 \end{pmatrix}$$

c) $(A + I_3)^2$ **Solución:**

$$(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 29 & 28 & 19 \\ 22 & 75 & 43 \\ 22 & 60 & 54 \end{pmatrix},$$

d) $A^2 + 2A + I_3$ **Solución:**

Como $AI_3 = I_3 A = A$ se puede utilizar el binomio de Newton y el resultado será entonces la matriz del apartado anterior.

e) AC **Solución:**

$$AC = \begin{pmatrix} 27 & 31 & 24 \\ 31 & 77 & 42 \\ 29 & 55 & 62 \end{pmatrix}$$

f) CA

Solución:

$$CA = \begin{pmatrix} 27 & 38 & 25 \\ 27 & 80 & 39 \\ 25 & 58 & 59 \end{pmatrix}$$

g) $(A + C)^2$

Solución:

$$(A + C)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 13 \\ 5 & 17 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 111 & 141 & 101 \\ 119 & 317 & 165 \\ 111 & 229 & 245 \end{pmatrix}$$

h) $A^2 + 2AC + C^2$

Solución:

$$A^2 + 2AC + C^2 = \begin{pmatrix} 111 & 134 & 100 \\ 123 & 314 & 168 \\ 115 & 226 & 248 \end{pmatrix}$$

i) $A^2 + AC + CA + C^2$

Solución:

Como $(A + C)^2 = (A + C)(A + C) = A^2 + AC + CA + C^2$, entonces:

$$A^2 + AC + CA + C^2 = \begin{pmatrix} 111 & 141 & 101 \\ 119 & 317 & 165 \\ 111 & 229 & 245 \end{pmatrix}$$

B. Cálculo de determinantes

7. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 18 & 5 & 7 & 8 \\ 18 & 3 & 4 & 4 \\ 9 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \text{(b)} \begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 27 & 7 & 7 \\ 18 & 5 & 4 \end{vmatrix}, \text{(c)} \begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 28 & 8 & 8 \\ 18 & 5 & 4 \end{vmatrix}, \text{(d)} \begin{vmatrix} 19 & 5 & 7 & 8 \\ 18 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 1 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 9, (b) -9, (c) -16 (d) -46

8. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 16 & 5 & 7 & 10 \\ 16 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \text{(b)} \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 24 & 7 & 11 \\ 16 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \text{(c)} \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 25 & 8 & 12 \\ 16 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \text{(d)} \begin{vmatrix} 17 & 5 & 7 & 10 \\ 16 & 4 & 4 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 8, (b) -16, (c) -21 (d) -53

9. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 14 & 5 & 7 & 12 \\ 14 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \text{(b)} \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 21 & 7 & 15 \\ 14 & 5 & 8 \end{vmatrix}, \text{(c)} \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 22 & 8 & 16 \\ 14 & 5 & 8 \end{vmatrix}, \text{(d)} \begin{vmatrix} 15 & 5 & 7 & 12 \\ 14 & 4 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 7, (b) -21, (c) -24 (d) -56

10. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 12 & 8 & 7 & 14 \\ 12 & 4 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}, \text{(b)} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 18 & 10 & 19 \\ 12 & 7 & 10 \end{vmatrix}, \text{(c)} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 19 & 11 & 20 \\ 12 & 7 & 10 \end{vmatrix}, \text{(d)} \begin{vmatrix} 13 & 8 & 7 & 14 \\ 12 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 12, (b) -24, (c) -25 (d) -90

11. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 10 & 8 & 7 & 16 \\ 10 & 4 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 8 \end{vmatrix}, \text{(b)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 15 & 10 & 23 \\ 10 & 7 & 12 \end{vmatrix}, \text{(c)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 16 & 11 & 24 \\ 10 & 7 & 12 \end{vmatrix}, \text{(d)} \begin{vmatrix} 11 & 8 & 7 & 16 \\ 10 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 10, (b) -25, (c) -24 (d) -84

12. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a) \begin{vmatrix} 8 & 8 & 7 & 18 \\ 8 & 4 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}, (b) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 12 & 10 & 27 \\ 8 & 7 & 14 \end{vmatrix}, (c) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 13 & 11 & 28 \\ 8 & 7 & 14 \end{vmatrix}, (d) \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 18 \\ 8 & 5 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

<u>**Solución:**</u>

(a) 8, (b) -24, (c) -21 (d) -72

13. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a) \begin{vmatrix} 6 & 8 & 7 & 20 \\ 6 & 4 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 10 \end{vmatrix}, (b) \begin{vmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 9 & 10 & 31 \\ 6 & 7 & 16 \end{vmatrix}, (c) \begin{vmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 10 & 11 & 32 \\ 6 & 7 & 16 \end{vmatrix}, (d) \begin{vmatrix} 7 & 8 & 7 & 20 \\ 6 & 5 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

<u>**Solución:**</u>

(a) 6, (b) -21, (c) -16 (d) -54

14. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a) \begin{vmatrix} 4 & 8 & 7 & 22 \\ 4 & 4 & 4 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 11 \end{vmatrix}, (b) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 6 & 10 & 35 \\ 4 & 7 & 18 \end{vmatrix}, (c) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 7 & 11 & 36 \\ 4 & 7 & 18 \end{vmatrix}, (d) \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 22 \\ 4 & 5 & 4 & 11 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 11 \end{vmatrix}$$

<u>**Solución:**</u>

(a) 4, (b) -16, (c) -9 (d) -30

15. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 8 & 7 & 24 \\ 2 & 4 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 12 \end{vmatrix}, (b) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 3 & 10 & 39 \\ 2 & 7 & 20 \end{vmatrix}, (c) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 4 & 11 & 40 \\ 2 & 7 & 20 \end{vmatrix}, (d) \begin{vmatrix} 3 & 8 & 7 & 24 \\ 2 & 5 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 12 \end{vmatrix}$$

<u>**Solución:**</u>

(a) 2, (b) -9, (c) 0 (d) 0

16. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a) \begin{vmatrix} 18 & 5 & 9 & 8 \\ 18 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}, (b) \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 27 & 11 & 7 \\ 18 & 8 & 4 \end{vmatrix}, (c) \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 28 & 12 & 8 \\ 18 & 8 & 4 \end{vmatrix}, (d) \begin{vmatrix} 19 & 5 & 9 & 8 \\ 18 & 4 & 5 & 4 \\ 9 & 1 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

<u>**Solución:**</u>

(a) 18, (b) -18, (c) -32 (d) -39

17. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a)\begin{vmatrix} 16 & 5 & 7 & 11 \\ 16 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix},\ (b)\begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 24 & 7 & 14 \\ 16 & 5 & 8 \end{vmatrix},\ (c)\begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 25 & 8 & 15 \\ 16 & 5 & 8 \end{vmatrix},\ (d)\begin{vmatrix} 17 & 5 & 7 & 11 \\ 16 & 4 & 4 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 16, (b) -16, (c) -20 (d) -81

18. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a)\begin{vmatrix} 14 & 5 & 7 & 14 \\ 14 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 8 \end{vmatrix},\ (b)\begin{vmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 21 & 7 & 21 \\ 14 & 5 & 12 \end{vmatrix},\ (c)\begin{vmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 22 & 8 & 22 \\ 14 & 5 & 12 \end{vmatrix},\ (d)\begin{vmatrix} 15 & 5 & 7 & 14 \\ 14 & 4 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 21, (b) -21, (c) -22 (d) -104

19. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a)\begin{vmatrix} 12 & 8 & 7 & 17 \\ 12 & 4 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 10 \end{vmatrix},\ (b)\begin{vmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 18 & 10 & 28 \\ 12 & 7 & 16 \end{vmatrix},\ (c)\begin{vmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 19 & 11 & 29 \\ 12 & 7 & 16 \end{vmatrix},\ (d)\begin{vmatrix} 13 & 8 & 7 & 17 \\ 12 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 48, (b) -24, (c) -22 (d) -180

20. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a)\begin{vmatrix} 10 & 8 & 7 & 20 \\ 10 & 4 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 12 \end{vmatrix},\ (b)\begin{vmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 15 & 10 & 35 \\ 10 & 7 & 20 \end{vmatrix},\ (c)\begin{vmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 16 & 11 & 36 \\ 10 & 7 & 20 \end{vmatrix},\ (d)\begin{vmatrix} 11 & 8 & 7 & 20 \\ 10 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 12 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 50, (b) -25, (c) -20 (d) -180

21. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a)\begin{vmatrix} 8 & 8 & 7 & 23 \\ 8 & 4 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 14 \end{vmatrix},\ (b)\begin{vmatrix} 4 & 3 & 12 \\ 12 & 10 & 42 \\ 8 & 7 & 24 \end{vmatrix},\ (c)\begin{vmatrix} 4 & 3 & 12 \\ 13 & 11 & 43 \\ 8 & 7 & 24 \end{vmatrix},\ (d)\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 23 \\ 8 & 5 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 14 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 48, (b) -24, (c) -16 (d) -162

22. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$
\text{(a)} \begin{vmatrix} 6 & 8 & 7 & 26 \\ 6 & 4 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 16 \end{vmatrix}, \text{(b)} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 14 \\ 9 & 10 & 49 \\ 6 & 7 & 28 \end{vmatrix}, \text{(c)} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 14 \\ 10 & 11 & 50 \\ 6 & 7 & 28 \end{vmatrix}, \text{(d)} \begin{vmatrix} 7 & 8 & 7 & 26 \\ 6 & 5 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 16 \end{vmatrix}
$$

<u>Solución:</u>

(a) 42, (b) -21, (c) -10 (d) -126

23. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$
\text{(a)} \begin{vmatrix} 4 & 8 & 7 & 29 \\ 4 & 4 & 4 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 18 \end{vmatrix}, \text{(b)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 16 \\ 6 & 10 & 56 \\ 4 & 7 & 32 \end{vmatrix}, \text{(c)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 16 \\ 7 & 11 & 57 \\ 4 & 7 & 32 \end{vmatrix}, \text{(d)} \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 29 \\ 4 & 5 & 4 & 11 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 18 \end{vmatrix}
$$

<u>Solución:</u>

(a) 32, (b) -16, (c) -2 (d) -72

24. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$
\text{(a)} \begin{vmatrix} 2 & 8 & 7 & 32 \\ 2 & 4 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 20 \end{vmatrix}, \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 18 \\ 3 & 10 & 63 \\ 2 & 7 & 36 \end{vmatrix}, \text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 18 \\ 4 & 11 & 64 \\ 2 & 7 & 36 \end{vmatrix}, \text{(d)} \begin{vmatrix} 3 & 8 & 7 & 32 \\ 2 & 5 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 20 \end{vmatrix}
$$

<u>Solución:</u>

(a) 18, (b) -9, (c) 8 (d) 0

25. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$
\text{(a)} \begin{vmatrix} 18 & 8 & 9 & 8 \\ 18 & 4 & 5 & 4 \\ 9 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \text{(b)} \begin{vmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 27 & 14 & 7 \\ 18 & 10 & 4 \end{vmatrix}, \text{(c)} \begin{vmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 28 & 15 & 8 \\ 18 & 10 & 4 \end{vmatrix}, \text{(d)} \begin{vmatrix} 19 & 8 & 9 & 8 \\ 18 & 5 & 5 & 4 \\ 9 & 1 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}
$$

<u>Solución:</u>

(a) 36, (b) -18, (c) -32 (d) -56

26. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$
\text{(a)} \begin{vmatrix} 16 & 8 & 9 & 11 \\ 16 & 4 & 5 & 5 \\ 8 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}, \text{(b)} \begin{vmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 24 & 14 & 14 \\ 16 & 10 & 8 \end{vmatrix}, \text{(c)} \begin{vmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 25 & 15 & 15 \\ 16 & 10 & 8 \end{vmatrix}, \text{(d)} \begin{vmatrix} 17 & 8 & 9 & 11 \\ 16 & 5 & 5 & 5 \\ 8 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}
$$

<u>Solución:</u>

(a) 64, (b) -32, (c) -40 (d) -105

27. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a)\begin{vmatrix} 14 & 8 & 9 & 14 \\ 14 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 8 \end{vmatrix},\ (b)\begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 21 & 14 & 21 \\ 14 & 10 & 12 \end{vmatrix},\ (c)\begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 22 & 15 & 22 \\ 14 & 10 & 12 \end{vmatrix},\ (d)\begin{vmatrix} 15 & 8 & 9 & 14 \\ 14 & 5 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 84, (b) -42, (c) -44 (d) -138

28. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a)\begin{vmatrix} 12 & 8 & 9 & 17 \\ 12 & 4 & 5 & 7 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 10 \end{vmatrix},\ (b)\begin{vmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 18 & 14 & 28 \\ 12 & 10 & 16 \end{vmatrix},\ (c)\begin{vmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 19 & 15 & 29 \\ 12 & 10 & 16 \end{vmatrix},\ (d)\begin{vmatrix} 13 & 8 & 9 & 17 \\ 12 & 5 & 5 & 7 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 96, (b) -48, (c) -44 (d) -155

29. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a)\begin{vmatrix} 10 & 8 & 9 & 20 \\ 10 & 4 & 5 & 8 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 12 \end{vmatrix},\ (b)\begin{vmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 15 & 14 & 35 \\ 10 & 10 & 20 \end{vmatrix},\ (c)\begin{vmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 16 & 15 & 36 \\ 10 & 10 & 20 \end{vmatrix},\ (d)\begin{vmatrix} 11 & 8 & 9 & 20 \\ 10 & 5 & 5 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 12 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 100, (b) -50, (c) -40 (d) -156

30. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a)\begin{vmatrix} 8 & 8 & 9 & 23 \\ 8 & 4 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 14 \end{vmatrix},\ (b)\begin{vmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 12 & 14 & 42 \\ 8 & 10 & 24 \end{vmatrix},\ (c)\begin{vmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 13 & 15 & 43 \\ 8 & 10 & 24 \end{vmatrix},\ (d)\begin{vmatrix} 9 & 8 & 9 & 23 \\ 8 & 5 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 14 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 96, (b) -48, (c) -32 (d) -141

31. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$(a)\begin{vmatrix} 6 & 8 & 9 & 26 \\ 6 & 4 & 5 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 16 \end{vmatrix},\ (b)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 14 \\ 9 & 14 & 49 \\ 6 & 10 & 28 \end{vmatrix},\ (c)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 14 \\ 10 & 15 & 50 \\ 6 & 10 & 28 \end{vmatrix},\ (d)\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 & 26 \\ 6 & 5 & 5 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 16 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 84, (b) -42, (c) -20 (d) -110

32. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 4 & 8 & 9 & 29 \\ 4 & 4 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 18 \end{vmatrix}, \text{(b)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 6 & 14 & 56 \\ 4 & 10 & 32 \end{vmatrix}, \text{(c)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 7 & 15 & 57 \\ 4 & 10 & 32 \end{vmatrix}, \text{(d)} \begin{vmatrix} 5 & 8 & 9 & 29 \\ 4 & 5 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 18 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 64, (b) -32, (c) -4 (d) -63

33. Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades de éstos:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 2 & 8 & 9 & 32 \\ 2 & 4 & 5 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 20 \end{vmatrix}, \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 18 \\ 3 & 14 & 63 \\ 2 & 10 & 36 \end{vmatrix}, \text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 18 \\ 4 & 15 & 64 \\ 2 & 10 & 36 \end{vmatrix}, \text{(d)} \begin{vmatrix} 3 & 8 & 9 & 32 \\ 2 & 5 & 5 & 12 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 20 \end{vmatrix}$$

Solución:

(a) 36, (b) -18, (c) 16 (d) 0

34. Demuestra, usando las propiedades de los determinantes, que

$$\begin{Vmatrix} 2a & 3b+2 & 2c+5 & 2e+d+5 \\ 2a & b+2 & 2c+3 & e+3 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a & b+1 & c+2 & d+e+2 \end{Vmatrix} = abcd.$$

35. Demuestra, usando las propiedades de los determinantes, que

$$\begin{Vmatrix} a & b+c & d+e \\ 3a & 3b+4c & 3d+4e \\ 2a & 2b+3c & 2d+2e \end{Vmatrix} = -ace$$

C. Cálculo de la inversa de una matriz

36. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

37. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

38. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

39. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

40. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & -2 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

41. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

42. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

43. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

44. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 11 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 & -4 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

45. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -9 \\ 3 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

46. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 13 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & -5 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

47. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -11 \\ 4 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

48. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 15 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 9 & -1 & 0 & -6 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

49. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} 8 & 2 & -13 \\ 5 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

50. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 17 \\ 1 & 2 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 & -7 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

51. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 10 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} 10 & 2 & -15 \\ 6 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

52. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 6 & 19 \\ 1 & 2 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 11 & -1 & 0 & -8 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

53. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 11 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} 12 & 2 & -17 \\ 7 & 1 & -9 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

54. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

55. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

56. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

57. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

58. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

59. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

60. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & -2 \\ -4 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

61. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

62. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

63. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

64. Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 14 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ y comprueba que es: $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 & -4 \\ -4 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

65. Calcula la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 10 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y comprueba que el resultado es $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -10 \\ 4 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

66. Calcula la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & c & d & f \\ 2 & 2\,c+1 & 2\,d+b & 2\,f+e \\ 1 & c+1 & d+b+1 & f+e+a \\ 1 & c & d & f+1 \end{pmatrix}$$

y comprueba que el resultado es:

$$\begin{pmatrix} f-c\,e-a\,d-d+a\,b\,c+b\,c+2\,c+1 & d-b\,c-c & -(d-b\,c) & -(f-c\,e-a\,d+a\,b\,c) \\ e-a\,b-b-2 & b+1 & -b & -(e-a\,b) \\ a+1 & -1 & 1 & -a \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

67. Calcula la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ -2 & 2\,a+1 & c+2\,b \\ -1 & a & b+1 \end{pmatrix}$$

y comprueba que el resultado es:

$$\begin{pmatrix} a\,c-b-2\,a-1 & a & -(a\,c-b) \\ c-2 & 1 & -c \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D. Diagonalización de matrices

68. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ se pide responder a las siguientes preguntas:

   a) Calcula el polinomio característico de A y sus raíces dando las multiplicidades.
   Solución:
   $p_A(x) = (x-2)^2(x-1),\ \mathrm{m}(2) = 2\ \mathrm{m}(1) = 1.$

   b) Calcula una base del espacio vectorial $S = \{(x,y,z) : (A-2I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
   Solución:
   $\beta_S = \{(1,1,0),(1,0,1)\}.$

   c) Calcula una base del espacio vectorial $T = \{(x,y,z) : (A-1I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
   Solución:
   $\beta_T = \{(1,1,1)\}.$

d) Justifica si la matriz A es diagonalizable y caso de serlo da la matriz diagonal y de paso.
Solución:
La matriz es diagonalizable porque $\dim V_2 = \dim V_S = \mathrm{m}(2) = 2$ y $\dim V_1 = \dim V_T = \mathrm{m}(1) = 2$

e) Sean las bases $\beta = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\}$ y $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se sabe que $M_{\beta\beta'} = A$ y se pide que des las coordenadas de los vectores de β' respecto de la base canónica.
Solución:
Usando la definición de la matriz $M_{\beta\beta'}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 = (3,1,1)_\beta = 3u_1 + 1u_2 + 1u_3 &= (5,4,3) \\ v_2 = (-1,1,-1)_\beta &= (-1,0,-1) \\ v_3 = (-1,-1,1)_\beta &= (-1,-2,-1) \end{aligned}$$

69. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ se pide responder a las siguientes preguntas:

a) Calcula el polinomio característico de A y sus raíces dando las multiplicidades.
Solución:
$p_A(x) = (x-3)^2(x-1),\ \mathrm{m}(3) = 2\ \mathrm{m}(1) = 1.$

b) Calcula una base del espacio vectorial $S = \{(x,y,z) : (A - 3I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
Solución:
$\beta_S = \{(1,1,0),(1,0,1)\}.$

c) Calcula una base del espacio vectorial $T = \{(x,y,z) : (A - 1I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
Solución:
$\beta_T = \{(1,1,1)\}.$

d) Justifica si la matriz A es diagonalizable y caso de serlo da la matriz diagonal y de paso.
Solución:
La matriz es diagonalizable porque $\dim V_3 = \dim V_S = \mathrm{m}(3) = 2$ y $\dim V_1 = \dim V_T = \mathrm{m}(1) = 2$

e) Sean las bases $\beta = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\}$ y $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se sabe que $M_{\beta\beta'} = A$ y se pide que des las coordenadas de los vectores de β' respecto de la base canónica.
Solución:
Usando la definición de la matriz $M_{\beta\beta'}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 = (5,2,2)_\beta = 5u_1 + 2u_2 + 2u_3 &= (9,7,5) \\ v_2 = (-2,1,-2)_\beta &= (-3,-1,-2) \\ v_3 = (-2,-2,1)_\beta &= (-3,-4,-2) \end{aligned}$$

70. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ se pide responder a las siguientes preguntas:

a) Calcula el polinomio característico de A y sus raíces dando las multiplicidades.
Solución:
$p_A(x) = (x-4)^2(x-1),\ \mathrm{m}(4) = 2\ \mathrm{m}(1) = 1.$

b) Calcula una base del espacio vectorial $S = \{(x, y, z) : (A - 4I_3)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\}$.
Solución:
$\beta_S = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

c) Calcula una base del espacio vectorial $T = \{(x, y, z) : (A - 1I_3)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\}$.
Solución:
$\beta_T = \{(1, 1, 1)\}$.

d) Justifica si la matriz A es diagonalizable y caso de serlo da la matriz diagonal y de paso.
Solución:
La matriz es diagonalizable porque $\dim V_4 = \dim V_S = \mathrm{m}(4) = 2$ y $\dim V_1 = \dim V_T = \mathrm{m}(1) = 2$

e) Sean las bases $\beta = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)\}$ y $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se sabe que $M_{\beta\beta'} = A$ y se pide que des las coordenadas de los vectores de β' respecto de la base canónica.
Solución:
Usando la definición de la matriz $M_{\beta\beta'}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 = (7, 3, 3)_\beta &= 7u_1 + 3u_2 + 3u_3 = (13, 10, 7) \\ v_2 &= (-3, 1, -3)_\beta = (-5, -2, -3) \\ v_3 &= (-3, -3, 1)_\beta = (-5, -6, -3) \end{aligned}$$

71. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 9 & -4 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ se pide responder a las siguientes preguntas:

a) Calcula el polinomio característico de A y sus raíces dando las multiplicidades.
Solución:
$p_A(x) = (x - 5)^2(x - 1),\ \mathrm{m}(5) = 2\ \mathrm{m}(1) = 1$.

b) Calcula una base del espacio vectorial $S = \{(x, y, z) : (A - 5I_3)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\}$.
Solución:
$\beta_S = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

c) Calcula una base del espacio vectorial $T = \{(x, y, z) : (A - 1I_3)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\}$.
Solución:
$\beta_T = \{(1, 1, 1)\}$.

d) Justifica si la matriz A es diagonalizable y caso de serlo da la matriz diagonal y de paso.
Solución:
La matriz es diagonalizable porque $\dim V_5 = \dim V_S = \mathrm{m}(5) = 2$ y $\dim V_1 = \dim V_T = \mathrm{m}(1) = 2$

e) Sean las bases $\beta = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)\}$ y $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se sabe que $M_{\beta\beta'} = A$ y se pide que des las coordenadas de los vectores de β' respecto de la base canónica.
Solución:
Usando la definición de la matriz $M_{\beta\beta'}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 = (9, 4, 4)_\beta &= 9u_1 + 4u_2 + 4u_3 = (17, 13, 9) \\ v_2 &= (-4, 1, -4)_\beta = (-7, -3, -4) \\ v_3 &= (-4, -4, 1)_\beta = (-7, -8, -4) \end{aligned}$$

72. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ 5 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ se pide responder a las siguientes preguntas:

a) Calcula el polinomio característico de A y sus raíces dando las multiplicidades.
Solución:
$p_A(x) = (x-6)^2(x-1),\ \mathrm{m}(6) = 2\ \mathrm{m}(1) = 1.$

b) Calcula una base del espacio vectorial $S = \{(x,y,z) : (A - 6I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
Solución:
$\beta_S = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$.

c) Calcula una base del espacio vectorial $T = \{(x,y,z) : (A - 1I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
Solución:
$\beta_T = \{(1,1,1)\}$.

d) Justifica si la matriz A es diagonalizable y caso de serlo da la matriz diagonal y de paso.
Solución:
La matriz es diagonalizable porque $\dim V_6 = \dim V_S = \mathrm{m}(6) = 2$ y $\dim V_1 = \dim V_T = \mathrm{m}(1) = 2$

e) Sean las bases $\beta = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\}$ y $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se sabe que $M_{\beta\beta'} = A$ y se pide que des las coordenadas de los vectores de β' respecto de la base canónica.
Solución:
Usando la definición de la matriz $M_{\beta\beta'}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 = (11,5,5)_\beta = 11u_1 + 5u_2 + 5u_3 &= (21,16,11) \\ v_2 = (-5,1,-5)_\beta &= (-9,-4,-5) \\ v_3 = (-5,-5,1)_\beta &= (-9,-10,-5) \end{aligned}$$

73. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 13 & -6 & -6 \\ 6 & 1 & -6 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ se pide responder a las siguientes preguntas:

a) Calcula el polinomio característico de A y sus raíces dando las multiplicidades.
Solución:
$p_A(x) = (x-7)^2(x-1),\ \mathrm{m}(7) = 2\ \mathrm{m}(1) = 1.$

b) Calcula una base del espacio vectorial $S = \{(x,y,z) : (A - 7I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
Solución:
$\beta_S = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$.

c) Calcula una base del espacio vectorial $T = \{(x,y,z) : (A - 1I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
Solución:
$\beta_T = \{(1,1,1)\}$.

d) Justifica si la matriz A es diagonalizable y caso de serlo da la matriz diagonal y de paso.
Solución:
La matriz es diagonalizable porque $\dim V_7 = \dim V_S = \mathrm{m}(7) = 2$ y $\dim V_1 = \dim V_T = \mathrm{m}(1) = 2$

e) Sean las bases $\beta = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\}$ y $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se sabe que $M_{\beta\beta'} = A$ y se pide que des las coordenadas de los vectores de β' respecto de la base canónica.

Solución:
Usando la definición de la matriz $M_{\beta\beta'}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 &= (13,6,6)_\beta = 13u_1 + 6u_2 + 6u_3 = (25,19,13) \\ v_2 &= (-6,1,-6)_\beta = (-11,-5,-6) \\ v_3 &= (-6,-6,1)_\beta = (-11,-12,-6) \end{aligned}$$

74. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 15 & -7 & -7 \\ 7 & 1 & -7 \\ 7 & -7 & 1 \end{pmatrix}$ se pide responder a las siguientes preguntas:

a) Calcula el polinomio característico de A y sus raíces dando las multiplicidades.
Solución:
$p_A(x) = (x-8)^2(x-1),\ \mathrm{m}(8) = 2\ \mathrm{m}(1) = 1.$

b) Calcula una base del espacio vectorial $S = \{(x,y,z) : (A - 8I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
Solución:
$\beta_S = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$.

c) Calcula una base del espacio vectorial $T = \{(x,y,z) : (A - 1I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
Solución:
$\beta_T = \{(1,1,1)\}$.

d) Justifica si la matriz A es diagonalizable y caso de serlo da la matriz diagonal y de paso.
Solución:
La matriz es diagonalizable porque $\dim V_8 = \dim V_S = \mathrm{m}(8) = 2$ y $\dim V_1 = \dim V_T = \mathrm{m}(1) = 2$

e) Sean las bases $\beta = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\}$ y $\beta' = \{v_1,v_2,v_3\}$. Se sabe que $M_{\beta\beta'} = A$ y se pide que des las coordenadas de los vectores de β' respecto de la base canónica.
Solución:
Usando la definición de la matriz $M_{\beta\beta'}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 &= (15,7,7)_\beta = 15u_1 + 7u_2 + 7u_3 = (29,22,15) \\ v_2 &= (-7,1,-7)_\beta = (-13,-6,-7) \\ v_3 &= (-7,-7,1)_\beta = (-13,-14,-7) \end{aligned}$$

75. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & -8 \\ 8 & 1 & -8 \\ 8 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ se pide responder a las siguientes preguntas:

a) Calcula el polinomio característico de A y sus raíces dando las multiplicidades.
Solución:
$p_A(x) = (x-9)^2(x-1),\ \mathrm{m}(9) = 2\ \mathrm{m}(1) = 1.$

b) Calcula una base del espacio vectorial $S = \{(x,y,z) : (A - 9I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
Solución:
$\beta_S = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$.

c) Calcula una base del espacio vectorial $T = \{(x,y,z) : (A - 1I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
Solución:
$\beta_T = \{(1,1,1)\}$.

d) Justifica si la matriz A es diagonalizable y caso de serlo da la matriz diagonal y de paso.
Solución:
La matriz es diagonalizable porque $\dim V_9 = \dim V_S = \mathrm{m}(9) = 2$ y $\dim V_1 = \dim V_T = \mathrm{m}(1) = 2$

e) Sean las bases $\beta = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\}$ y $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se sabe que $M_{\beta\beta'} = A$ y se pide que des las coordenadas de los vectores de β' respecto de la base canónica.
Solución:
Usando la definición de la matriz $M_{\beta\beta'}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 = (17,8,8)_\beta = 17u_1 + 8u_2 + 8u_3 &= (33,25,17) \\ v_2 = (-8,1,-8)_\beta &= (-15,-7,-8) \\ v_3 = (-8,-8,1)_\beta &= (-15,-16,-8) \end{aligned}$$

76. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 19 & -9 & -9 \\ 9 & 1 & -9 \\ 9 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ se pide responder a las siguientes preguntas:

a) Calcula el polinomio característico de A y sus raíces dando las multiplicidades.
Solución:
$p_A(x) = (x-10)^2(x-1),\ \mathrm{m}(10) = 2\ \mathrm{m}(1) = 1.$

b) Calcula una base del espacio vectorial $S = \{(x,y,z) : (A - 10I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
Solución:
$\beta_S = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$.

c) Calcula una base del espacio vectorial $T = \{(x,y,z) : (A - 1I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
Solución:
$\beta_T = \{(1,1,1)\}$.

d) Justifica si la matriz A es diagonalizable y caso de serlo da la matriz diagonal y de paso.
Solución:
La matriz es diagonalizable porque $\dim V_{10} = \dim V_S = \mathrm{m}(10) = 2$ y $\dim V_1 = \dim V_T = \mathrm{m}(1) = 2$

e) Sean las bases $\beta = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\}$ y $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se sabe que $M_{\beta\beta'} = A$ y se pide que des las coordenadas de los vectores de β' respecto de la base canónica.
Solución:
Usando la definición de la matriz $M_{\beta\beta'}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 = (19,9,9)_\beta = 19u_1 + 9u_2 + 9u_3 &= (37,28,19) \\ v_2 = (-9,1,-9)_\beta &= (-17,-8,-9) \\ v_3 = (-9,-9,1)_\beta &= (-17,-18,-9) \end{aligned}$$

77. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ se pide responder a las siguientes preguntas:

a) Calcula el polinomio característico de A y sus raíces dando las multiplicidades.
Solución:
$p_A(x) = (x-3)^2(x-2),\ \mathrm{m}(3) = 2\ \mathrm{m}(2) = 1.$

b) Calcula una base del espacio vectorial $S = \{(x, y, z) : (A - 3I_3)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\}$.
Solución:
$\beta_S = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

c) Calcula una base del espacio vectorial $T = \{(x, y, z) : (A - 2I_3)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\}$.
Solución:
$\beta_T = \{(1, 1, 1)\}$.

d) Justifica si la matriz A es diagonalizable y caso de serlo da la matriz diagonal y de paso.
Solución:
La matriz es diagonalizable porque $\dim V_3 = \dim V_S = \mathrm{m}(3) = 2$ y $\dim V_2 = \dim V_T = \mathrm{m}(2) = 2$

e) Sean las bases $\beta = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)\}$ y $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se sabe que $M_{\beta\beta'} = A$ y se pide que des las coordenadas de los vectores de β' respecto de la base canónica.
Solución:
Usando la definición de la matriz $M_{\beta\beta'}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 = (4, 1, 1)_\beta = 4u_1 + 1u_2 + 1u_3 = (6, 5, 4) \\ v_2 = (-1, 2, -1)_\beta = (0, 1, -1) \\ v_3 = (-1, -1, 2)_\beta = (0, -2, -1) \end{aligned}$$

78. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ se pide responder a las siguientes preguntas:

a) Calcula el polinomio característico de A y sus raíces dando las multiplicidades.
Solución:
$p_A(x) = (x - 4)^2(x - 2),\ \mathrm{m}(4) = 2\ \mathrm{m}(2) = 1$.

b) Calcula una base del espacio vectorial $S = \{(x, y, z) : (A - 4I_3)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\}$.
Solución:
$\beta_S = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

c) Calcula una base del espacio vectorial $T = \{(x, y, z) : (A - 2I_3)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\}$.
Solución:
$\beta_T = \{(1, 1, 1)\}$.

d) Justifica si la matriz A es diagonalizable y caso de serlo da la matriz diagonal y de paso.
Solución:
La matriz es diagonalizable porque $\dim V_4 = \dim V_S = \mathrm{m}(4) = 2$ y $\dim V_2 = \dim V_T = \mathrm{m}(2) = 2$

e) Sean las bases $\beta = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)\}$ y $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se sabe que $M_{\beta\beta'} = A$ y se pide que des las coordenadas de los vectores de β' respecto de la base canónica.
Solución:
Usando la definición de la matriz $M_{\beta\beta'}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 = (6, 2, 2)_\beta = 6u_1 + 2u_2 + 2u_3 = (10, 8, 6) \\ v_2 = (-2, 2, -2)_\beta = (-2, 0, -2) \\ v_3 = (-2, -2, 2)_\beta = (-2, -4, -2) \end{aligned}$$

79. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ se pide responder a las siguientes preguntas:

   a) Calcula el polinomio característico de A y sus raíces dando las multiplicidades.
   <u>Solución:</u>
   $p_A(x) = (x-5)^2(x-2),\ \mathrm{m}(5) = 2\ \mathrm{m}(2) = 1.$

   b) Calcula una base del espacio vectorial $S = \{(x,y,z) : (A - 5I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
   <u>Solución:</u>
   $\beta_S = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$.

   c) Calcula una base del espacio vectorial $T = \{(x,y,z) : (A - 2I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
   <u>Solución:</u>
   $\beta_T = \{(1,1,1)\}$.

   d) Justifica si la matriz A es diagonalizable y caso de serlo da la matriz diagonal y de paso.
   <u>Solución:</u>
   La matriz es diagonalizable porque $\dim V_5 = \dim V_S = \mathrm{m}(5) = 2$ y $\dim V_2 = \dim V_T = \mathrm{m}(2) = 2$

   e) Sean las bases $\beta = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\}$ y $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se sabe que $M_{\beta\beta'} = A$ y se pide que des las coordenadas de los vectores de β' respecto de la base canónica.
   <u>Solución:</u>
   Usando la definición de la matriz $M_{\beta\beta'}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 &= (8,3,3)_\beta = 8u_1 + 3u_2 + 3u_3 = (14,11,8) \\ v_2 &= (-3,2,-3)_\beta = (-4,-1,-3) \\ v_3 &= (-3,-3,2)_\beta = (-4,-6,-3) \end{aligned}$$

80. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ se pide responder a las siguientes preguntas:

   a) Calcula el polinomio característico de A y sus raíces dando las multiplicidades.
   <u>Solución:</u>
   $p_A(x) = (x-6)^2(x-2),\ \mathrm{m}(6) = 2\ \mathrm{m}(2) = 1.$

   b) Calcula una base del espacio vectorial $S = \{(x,y,z) : (A - 6I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
   <u>Solución:</u>
   $\beta_S = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$.

   c) Calcula una base del espacio vectorial $T = \{(x,y,z) : (A - 2I_3)(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$.
   <u>Solución:</u>
   $\beta_T = \{(1,1,1)\}$.

   d) Justifica si la matriz A es diagonalizable y caso de serlo da la matriz diagonal y de paso.
   <u>Solución:</u>
   La matriz es diagonalizable porque $\dim V_6 = \dim V_S = \mathrm{m}(6) = 2$ y $\dim V_2 = \dim V_T = \mathrm{m}(2) = 2$

   e) Sean las bases $\beta = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\}$ y $\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se sabe que $M_{\beta\beta'} = A$ y se pide que des las coordenadas de los vectores de β' respecto de la base canónica.

Solución:

Usando la definición de la matriz $M_{\beta\beta'}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} v_1 = (10,4,4)_\beta = 10u_1 + 4u_2 + 4u_3 &= (18,14,10) \\ v_2 = (-4,2,-4)_\beta &= (-6,-2,-4) \\ v_3 = (-4,-4,2)_\beta &= (-6,-8,-4) \end{aligned}$$