Examen de Álgebra Lineal (Enero 2020)
Grados I.I.I.S. e I.I.I.C.

1. Responde y razona (o al revés):

   a) ¿Cuáles de los siguientes sistemas describen un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$?

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ z+t &= 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x+y &= 2 \\ z+t &= -1 \end{cases}$$

   En caso afirmativo determina una base e interpreta el resultado geométricamente.

   b) Calcula sin desarrollar: $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix}$.

2. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los siguientes subespacios vectoriales:

$$F = <(1,0,1,1),(1,-1,-1,0),(0,1,2,1)>$$
$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - z - t = 0, y + z = 0\}.$$

   Obtén las ecuaciones paramétricas e implícitas, dimensiones y bases de F, G, $F+G$ y $F \cap G$. Interpreta geométricamente cada uno de estos subespacios.

3. Considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de ecuaciones $\begin{cases} y_1 = & x + 2z \\ y_2 = & -x - y - z \\ y_3 = & 2y - 3z \\ y_4 = & x - z. \end{cases}$

   a) Obtén bases de los subespacios vectoriales $Im(f)$ y $Ker(f)$. Verifica además el teorema de la dimensión.

   b) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? ¿Es f un isomorfismo? Razona las respuestas.

   c) ¿Pertenece le vector $(1,1,1,1)$ a $Im(f)$? Encuentra, si es posible, un vector $u \neq 0$ tal que $f(u) = 0$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida $f(x,y) = (y, x, x+y)$. Calcula:

   a) La matriz asociada a f en las bases canónicas.

   b) Coordenadas de $u = (-2,3)$ en la base $B_1 = \{u_1, u_2\}$ con $u_1 = (1,-1)$ y $u_2 = (3,1)$.

   c) Matriz asociada a f en la base B_1 y $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$, con $v_1 = (2,3,4)$, $v_2 = (1,2,6)$ y $v_3 = (1,3,5)$.

   d) Calcula las coordenadas de $f(u)$ en B' usando la matriz anterior. ¿De qué forma podrías comprobar que el resultado es correcto?

5. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo definido por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 2x_1, x_1, x_1 + ax_2)$. Calcula $a \in \mathbb{R}$ para que f sea diagonalizable y, en estos casos, halla una base B respecto de la cual la matriz de f sea diagonal. Escribe también dicha matriz diagonal.

Cada ejercicio vale dos puntos