DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES: RESUMEN

Se trata de encontrar la matriz P tal que $P^{-1}AP=D$, siendo la matriz A la que queremos diagonalizar y la matriz D la matriz diagonal.

Lo primero es encontrar el polinomio característico de la matriz A. A partir del mismo, igualándolo a 0 obtenemos los autovalores que son las raíces del polinomio característico. Estas han de ser números reales y los llamamos λ. Si el rango de la matriz es n y el polinomio característico tiene n soluciones, entonces podemos asegurar que la matriz A es diagonalizable.

Una vez obtenidos los autovalores podemos encontrar los autovectores asociados a esos autovalores. Formaremos la ecuación matricial $(A-\lambda I)u=0$ siendo *u* el autovector asociado al autovalor λ. Quedaran unas ecuaciones paramétricas. Si el autovalor tiene multiplicidad simple nos quedará un único parámetro y por lo tanto un único autovector asociado a λ. En el caso de tener un autovalor con multiplicidad distinta de 1 se pueden dar dos casos:

a) Que tengamos tantos parámetros como la multiplicidad del autovalor, entonces tendremos tantos autovectores como la multiplicidad del mismo. Si esto ocurre con todos los autovalores también podemos asegurar que la matriz es diagonalizable.
b) En el caso de obtener menos autovectores que la multiplicidad de alguno de los autovalores, la matriz no será diagonalizable.

Una vez obtenidos los autovalores y los autovectores los colocamos de la siguiente manera en cada una de sus matrices:

Supongamos que tenemos una matriz de rango 3 y encontramos 3 autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 con autovectores *u* de coordenadas (u_1,u_2,u_3), *v* (v_1,v_2,v_3) y $w(w_1,w_2,w_3)$ entonces las matrices P y D serán:

$$P=\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Si tenemos algún autovalor repetido también colocaremos por orden sus autovectores.

Se dice que una matriz A es ortogonalmente diagonalizable si podemos encontrar una matriz tal que $P^T AP=D$, siendo D una matriz diagonal. Esto no es más que decir que la matriz de paso P es ortogonal y por tanto su traspuesta coincide con su inversa ($P^T=P^{-1}$).

Es condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea ortogonalmente diagonalizable que está sea simétrica. Además esta matriz tiene un conjunto ortonormal de vectores. Resumiendo, si A es simétrica la podemos diagonalizar ortogonalmente, calculamos autovalores y autovectores. Nos podemos encontrar entonces en los siguientes casos:

a) Los autovectores son ortonormales, entonces el problema estaría concluido.
b) Los autovectores son ortogonales pero no ortonormales, solo nos quedaría normalizar los autovectores (dividiendo por su módulo)
c) Los autovectores no son ortogonales. Por el método de Gram- Schmidt podemos encontrar una base ortogonal y después podemos normalizar esos vectores dividiendo por el módulo.