1. (0.9 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal que verifica:

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \langle (1,1,1), (2,1,2), (0,1,0) \rangle , \\ \text{Im } f &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2t = 0,\ x + z + t = 0,\ z + t = 0 \right\} . \end{aligned}$$

Entonces las bases para Ker f e Im f son, respectivamente,

a) $\{(1,1,1),(0,0,0)\}$ y $\{(0,1,0)\}$.
b) $\{(1,1,1),(2,1,2)\}$ y $\{(0,1,0,0),(0,0,0,0)\}$.
c) $\{(1,1,1),(2,1,2)\}$ y $\{(0,1,0,0)\}$.
d) $\{(1,1,1)\}$ y $\{(0,1,0,0),(0,0,0,0)\}$.
e) $\{(1,1,1),(2,1,2)\}$ y $\{(0,0,0,0)\}$.
f) $\{(1,1,1),(2,1,2)\}$ y $\{(0,0,0)\}$.

2. (0.9 puntos) Si la matriz asociada a la aplicación lineal anterior, respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^4$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Entonces la matriz, C, asociada a la aplicación lineal en la base,

$$B_1 = (1,0,1),(0,1,0),(0,0,1),$$

de $\mathbb{R}^3$ y la base canónicas de $\mathbb{R}^4$ es:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$

3. (0.9 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que: $f(x,y,z) = (3x,y,z)$. Entonce, los autovalores de la matriz asociada a esta aplicación lineal en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son:

a) 3 y 0.
b) 3 y 1.
c) 1 y 0.
d) 1, 2, y 3.
e) Ninguna de las respuestas anteriores es cierta.

4. (0.9 puntos) Los autovectores de la matriz asociada a la aplicación lineal anterior en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son:

a) $\{(3,1,0),(0,0,0),(0,0,0)\}$. b) $\{(0,1,0),(0,0,1),(3,1,1)\}$.

c) $\{(3,0,0),(1,-3,0),(1,0,-3)\}$. d) $\{(1,0,0),(0,-1,0),(2,1,1)\}$.

e) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. f) Ninguna de las respuestas anteriores es cierta.

1. (0.9 puntos) Determina el valor del siguiente determinante (no se puede hacer por menores. En ese caso la puntuación será cero):

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 7 & 22 \\ 4 & 4 & 4 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 11 \end{vmatrix}$$

a) $A = 0$ b) $A = 1$ c $A = 2$

d) $A = 3$ e) $A = 4$ f) $A = 5$

g) $A = 6$ h) $A = 7$ i) $A = 8$

2. (1 punto) Considérese los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z\right\}, \\ G &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = \alpha+\beta+\gamma,\ y = \alpha + 2\gamma,\ z = \gamma,\ t = \beta\right\}. \end{aligned}$$

Entonces es falso que:

a) $\dim(F) \neq \dim(G)$.

b) $F + G = \langle (1,1,1,0), (0,0,0,1), (1,1,0,0), (1,0,0,1) \rangle$.

c) $F = \langle (1,1,1,0), (0,0,0,1) \rangle$.

d) F y G no son subespacios complementarios.

e) $G = \langle (1,1,0,0), (1,0,0,1), (1,2,1,0) \rangle$.

f) $F \cap G = \langle (1,1,1,0) \rangle$.

¡¡¡Solo Teleco!!!

3. (1 punto) En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, una base ortonormal del subespacio (hiperplano),

$$H = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 - x_4 = 0\right\}$$

es:

a) $\{(0,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1)\}$.

b) $\left\{(0,1,0,0), (1,0,1,0), \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$.

c) $\left\{(0,1,0,0), (1,0,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)\right\}$.

d) $\left\{(0,1,0,0), (1,0,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$.

e) $\left\{(0,1,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$.

f) $\left\{(0,0,0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$.

g) Ninguna de las respuestas anteriores es cierta.