黑龙江大学

本 科 学 生 毕 业 论 文

论文题目：求实对称阵特征值的数值算法

学　　院：数学科学学院

年　　级：2014

专　　业：信息与计算科学

姓　　名：刘宇轩

学　　号：20142534

指导教师：李媛

2018 年 04 月 30 日

摘 要

本文研究求解实对称矩阵特征值问题的数值算法, 包括QR方法, 乘幂法, 反幂法, Jacobi方法和Givens–Householder方法, 并且对数值算法进行了Matlab程序实现. 乘幂法用于计算矩阵按模最大的特征值. 当零不是特征值时, 可以利用反幂法求矩阵的按模最小特征值. Jacobi方法通过一系列正交相似变换(旋转变换)将对称矩阵近似对角化, 从而求得对称矩阵的全部特征值. Givens–Householder 方法通过使用Givens变换或者Householder变换将原矩阵化为一个三对角矩阵, 然后通过计算三对角矩阵的特征值来得出原矩阵的特征值.

关键词

实对称矩阵; 特征值; QR方法; 乘幂法; 反幂法; Jacobi方法; Givens-Householder方法

Abstract

This paper focuses on the algorithms for solving the eigenvalues of a real symmetric matrix, including the QR method, power method, inverse power method, Jacobi method and Givens–Householder method. All the numerical algorithms are implemented by using Matlab. The power method is used to calculate the maximum modulus eigenvalue of a matrix. The inverse power method can be used to calculate the minimum modulus eigenvalue of a matrix if zero is not one of its eigenvalues. Jacobi method is to calculate all the eigenvalues of a symmetric matrix through a series of orthogonal similarity transformation(rotation transformation) such that the matrix approximately diagonalized. In Givens–Householder method, Givens transformations or Householder transformations are employed to transfer the original matrix to a tridiagonal matrix, and then the eigenvalues of the original matrix can be obtained by calculating the eigenvalues of the tridiagonal matrix.

Key words

Real symmetric matrix; eigenvalue; QR method; power method, inverse power method; Jacobi method; Givens-Householder method

目 录

摘 要 I

Abstract II

第1章 前言 1

1.1 特征值问题在科学和工程上的应用 1

1.2 矩阵特征值问题算法概述 1

第2章 求解特征值问题的QR算法 3

2.1 基本QR算法 3

2.2 数值算例 4

第3章 求解特征值问题的乘幂法和反幂法 6

3.1 乘幂法 6

3.2 反幂法 7

3.3 数值算例 7

第4章 求解实对称阵特征值问题的Jacobi方法 9

4.1 Jacobi方法 9

4.2 数值算例 11

第5章 求解实对称阵特征值问题的Givens-Householder方法 14

5.1 Givens-Householder方法 14

5.2 数值算例 16

结论 18

参 考 文 献 19

致谢 20

第1章 前言

本章研究了特征值问题在科学和工程上的应用, 并且阐述了矩阵计算的基本问题, 而后对矩阵特征值问题的算法进行了概述.

1.1 特征值问题在科学和工程上的应用

第一台电子计算机在1946年问世之后, 历经70年来的发展, 科学工程计算已经成为现代世界非常重要的科学进步之一. 在二十世纪八十年代, 计算机物理学家、诺贝尔奖金获得者Wilson指提出:现代社会科学活动的三种重要方式并列有科学计算、理论研究和科学实验. 很多科学与工程领域假设没有科学计算, 那么将不存在一流的研究成果. 科学与工程计算的核心是矩阵计算, 科学工程大部分的问题都要归根于一个矩阵计算的问题, 下面我们将列举出矩阵计算的基本问题 [1].

(1)求解线性方程组的问题, 即给定n阶非奇异矩阵A和n维向量b, 求一个n维向量x, 使得:

$$Ax = b.$$

(2)线性最小二乘问题,即给定的$m \times n$矩阵A和m维的向量b, 求一个n维向量x, 使得:

$$\|Ax - b\|_2 = \min \left\{ \|Ax - b\|_2, y \in R^n \right\}.$$

(3)矩阵的特征值问题, 即给定一个n阶矩阵A, 求它的部分或者全部特征值和特征向量.

1.2 矩阵特征值问题算法概述

现阶段, 变换方法和向量迭代法是求解矩阵特征值的两种方法. 变换方法是将矩阵经过一系列改变, 使原矩阵变成方便特征值求解的矩阵, 如QR方法, 乘幂法和反幂法, Jacobi 方法, Givens-Householder 方法等. 一般使用变换方法和向量迭代法求解阶数较

低的矩阵, 通过一系列矩阵向量乘积而求得特征值和特征向量的方法我们称为向量迭代法. 由于迭代法对于求解大型矩阵有着巧妙的方法, 所以在大型矩阵的求解中应用十分广. QR方法, 乘幂法和反幂法, Jacobi方法在求解中、小规模的矩阵特征值时非常有效. 所以可以说, 求解中小规模的特征值会很好地被解决.

第2章 求解特征值问题的QR算法

求解实矩阵的全部特征值时我们一般使用QR方法, 因为其稳定性高, 并且收敛速度快, 所以自1961年Francis提出这一方法后, 人们在目前求解中、小矩阵全部特征值时, 都会用到这种方法 [2].

2.1 基本QR算法

我们从正交迭代出发, 导出QR算法. 取$U_0 = I$,记$U_k R_k$为Z_k的QR分解, U_k是正交矩阵, R_k为上三角, 由正交迭代有:

$$\begin{aligned} Z_1 &= AU_0 = U_1 R_1, \\ Z_2 &= AU_1 = U_2 R_2, \\ Z_3 &= AU_2 = U_3 R_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

定义$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{U}_{k-1}^t \boldsymbol{A} \boldsymbol{U}_{k-1}$ $(k = 2, 3, \cdots)$, 这里$\boldsymbol{A}_k$有Rayleigh商形式.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_2 &= \boldsymbol{U}_1^t \boldsymbol{A} \boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{U}_1, \\ &= \boldsymbol{U}_1^t (\boldsymbol{A} \boldsymbol{U}_1) = \boldsymbol{U}_1^T \boldsymbol{U}_2 \boldsymbol{R}_2, \\ \boldsymbol{A}_3 &= \boldsymbol{U}_2^t \boldsymbol{A} \boldsymbol{U}_2 = \boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{U}_1^t \boldsymbol{U}_2, \\ &= \boldsymbol{U}_1^t (\boldsymbol{A} \boldsymbol{U}_2) = \boldsymbol{U}_2^T \boldsymbol{U}_3 \boldsymbol{R}_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

定义$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{U}_{k-1}^T \boldsymbol{U}_k (k = 1, 2, \cdots)$, 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1 &= \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{R}, \\ \boldsymbol{A}_2 &= \boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{Q}_2 \boldsymbol{R}_2, \\ \boldsymbol{A}_3 &= \boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{Q}_3 \boldsymbol{R}_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

上述迭代过程可总结为著名的QR算法 [3].

取$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}$, 进行如下迭代:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{R}_k,\\&\boldsymbol{A}_{k+1}=\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{Q}_k,\quad k=1,2,\cdots\\&\vdots\end{aligned}$$

由算法导出过程易知:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_k=\boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{U}_1^t\boldsymbol{U}_2)\cdots(\boldsymbol{U}_{k-1}^t\boldsymbol{U}_k)=\boldsymbol{U}_k,\\&\boldsymbol{A}_{k+1}=\boldsymbol{U}_k^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_k.\end{aligned}$$

2.2 数值算例

利用Matlab, 求解QR算法求矩阵的特征值.

例 2.1 利用QR算法求矩阵A的特征值:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&2&2\\2&1&4\\2&4&1\end{bmatrix}.$$

编制程序如下:

$A=[1\quad -1\quad 2;-2\quad 0\quad 5;6\quad -3\quad 6]$;%输入矩阵

$n=max(size(A))$;%测定A的阶数

$e=0.00001$;%要求误差

$r=1$;%当前误差,预设为1

$k=1$;%迭代次数

$m=100$;%最大迭代次数,预设为100

$while\quad r>=e\&k<m$

%QR过程

$[QR]=qr(A)$

$A = R * Q$

$amax = 0$

$for \quad i = 2 : n$

$for \quad j = 1 : i - 1$

$if \quad max(abs(A(i, j))) >= amax$

$amax = abs(A(i, j));$

end

end

end

$r = amax;$%重算当前误差

$k = k + 1$

end

$if \quad k >= m$

'不收敛'

$else$

A

$\lambda = diag(A)$

end

运行结果:

$$\lambda = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

第3章 求解特征值问题的乘幂法和反幂法

乘幂法适合计算矩阵的按模最大的特征值以及其特征向量. 当特征值不为零的时候, 我们来使用反幂法求按模最小的特征值及其特征向量, 使用方法简单是幂法的有点, 这就使得幂法对于求解大型稀疏矩阵非常适合.

3.1 乘幂法

假设矩阵A有特征值$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$, 并且$|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$, 任取一$n$维非零列向量$u_0$, 则$u_0$一定可以表示为$x_1,x_2,\cdots,x_n$的线性组合:

$$\boldsymbol{u}_0=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$

两边乘以A^k, 并利用Ax_i=$\lambda_ix_i(i=1,2,\cdots,n)$, 并记$u_k=A^ku_0$, 故有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{A}^ku_0&=a_1\lambda_1^kx_1+a_2\lambda_2^kx_2+\cdots+a_n\lambda_n^kx_n\\&=\lambda_1^k[a_1x_1+a_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^kx_2+\cdots+a_n(\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^kx_n].\end{aligned}$$

设$a_1\neq0$, 由于$\frac{\lambda_i}{\lambda_1}<1$ $(i=2,3,\cdots,n)$, 故对充分大的k, 有

$$\frac{u_k}{\lambda_1^k}\approx a_1x_1,$$

$$u_k\approx\lambda_1^ka_1x_1\approx\lambda_1u_{k-1}.$$

u_{k-1},u_k几乎仅差一个常数因子λ_1, 故

$$\lambda_1\approx\frac{(u_k)_i}{(u_{k-1})_i}\quad i=1,2,\cdots,n.$$

由$u_k=A^ku_0$推得

$$u_k=Au_{k-1}\quad k=1,2,\cdots.$$

综合以上讨论, 求主特征值λ_1及相应特征向量的步骤如下:

(1)任意n维初始向量$u_0\approx0$.

(2)按$u_k = Au_{k-1}(k=1,2,\cdots)$计算$u_k$.

(3)如果k从某个数后$\dfrac{(u_k)_i}{(u_{k-1})_i} \approx c$(常数)$(i=1,2,\cdots,n)$, 则取$\lambda_1 \approx c$, 而$u_k$就是与$\lambda_1$对应的一个近似特征向量[4].

3.2 反幂法

反幂法是求矩阵A按模最小的特征值及相应特征向量的迭代法.

设矩阵A的特征值按模的大小排列为

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| > 0,$$

相应的n个线性无关的特征向量是$v_1, v_2, \cdots v_n$, 则A^{-1}的特征值为

$$|\frac{1}{\lambda_1}| \leq |\frac{1}{\lambda_2}| \leq \cdots \leq |\frac{1}{\lambda_n}|,$$

对应的特征向量仍然是$v_1, v_2, \cdots v_n$. 计算矩阵A按模最小的特征值, 就是计算矩阵A^{-1}按模最大的特征值. 任何一个规范化非零初始向量$x^{(0)}$,则有迭代格式

$$\begin{cases} x^{(k)} \approx A^{-1}y^{k-1}, \\ m^{(k)} \approx max(x^{(k)}), \quad k=1,2,\cdots \\ y^{(k)} \approx x^{(k)}/m^k. \end{cases}$$

由于计算A^{-1}会很麻烦, 所以实际应用时可将上式变为等价的格式

$$\begin{cases} Ax^{(k)} \approx y^{k-1}, \\ m^{(k)} \approx max(x^{(k)}), \quad k=1,2,\cdots \\ y^{(k)} \approx x^{(k)}/m^k, \end{cases}$$

相应的, 取

$$\begin{cases} \lambda_n = 1/m^{(k)}, \\ x_n = y^{(k)}. \end{cases}$$

3.3 数值算例

求矩阵A的最大特征值及特征向量.

例 3.1

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.
$$

编制程序如下:

$function \quad [m,u]=pow(A,ep,Nmax)$

$if \quad nargin<3 \quad Nmax=500;end$

$if \quad nargin<2 \quad ep=1e-5;end$

$n=length(A);$

$u=ones(n,1);$

$k=0;$

$m_1=0$

$while \quad k<=Nmax$

$v=A*u;$

$[vmax,i]=max(abs(v))$

$m=v(i);$

$u=v/m;$

$if \quad abs(m-m_1)<ep$

$break;$

end

$m_1=m;k=k+1$

end

运行结果: 最大特征值$m=3.4142$

特征向量:

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -0.7071 \\ 1.0000 \\ -0.7071 \end{pmatrix}
$$

第4章 求解实对称阵特征值问题的Jacobi方法

雅克比方法利用一系列特殊的相似变换将原始矩阵$\boldsymbol{A}$化为易于求解的特殊形式的矩阵, 然后再对这类特殊形式的矩阵求解特征值问题.

4.1 Jacobi方法

Jacobi旋转法是求实对称矩阵全部特征值及对应特征向量的方法.

设$\boldsymbol{A}$为n阶实对称矩阵, 则存在正交矩阵$\boldsymbol{P}$, 使得

$$P^T AP = P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为$A$的$n$个特征值, 正交矩阵$\boldsymbol{P}$的各列为矩阵$\boldsymbol{A}$相对应于$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的特征向量.

设$\boldsymbol{A}^{(0)} = \boldsymbol{A}$,由$\boldsymbol{A}^{(0)}$出发对其作Givens变换$\boldsymbol{G}_0(p, q)$, 一般地, 有

$$\boldsymbol{A}^{(k)} = \boldsymbol{G}_k^T \boldsymbol{A}^{(k-1)} \boldsymbol{G}_k,$$

其中

$$\boldsymbol{G}_k(p,q) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \cos\theta & & \cdots & & \sin\theta & & & \\ & & & & & 1 & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & -\sin\theta & & \cdots & & \cos\theta & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

为Givens矩阵.

为使$\boldsymbol{A}^{(k)}$趋向一解矩阵$(k \to \infty)$, 可以这样确定$\boldsymbol{G}_k(p,q)$, 对于$\forall k > 0$, p,q 由$\boldsymbol{A}^{(k-1)}$中对角线元素$a_{ij}^{(k-1)}(i \neq j)$按模最大者的角标决定, 令$a_{pq}^{(k)} = 0$来确定θ, 这种方法称为Jacobi方法[5].

$\boldsymbol{A}^{(k)}$是实对称矩阵, $\boldsymbol{A}^{(k)}$与$\boldsymbol{A}^{(k-1)}$ 只有p, q两行(列)不同, 它们之间的关系是:

$$\begin{cases} a_{pi}^{(k)} = a_{ip}^{(k)} = a_{ip}^{(k-1)}\cos\theta + a_{ip}^{(k-1)}\sin\theta \quad (i \neq p,q), \\ a_{qi}^{(k)} = a_{iq}^{(k)} = -a_{ip}^{(k-1)}\sin\theta + a_{ip}^{(k-1)}\cos\theta \quad (i \neq p,q), \\ a_{pp}^{(k)} = a_{pp}^{(k-1)}\cos^2\theta + 2a_{pq}^{(k-1)}\sin\theta\cos\theta + a_{qq}^{(k-1)}\sin^2\theta, \\ a_{qq}^{(k)} = a_{qq}^{(k-1)}\sin^2\theta^2 - 2a_{pq}^{(k-1)}\sin\theta\cos\theta + a_{qq}^{(k-1)}\cos^2\theta, \\ a_{pq}^{(k)} = a_{qp}^{(k)} = (a_{jj}^{(k-1)} - a_{pp}^{(k-1)})\sin\theta\cos\theta + a_{pq}^{(k-1)}(\cos^2\theta - \sin^2\theta). \end{cases}$$

令$a_{pq}^{(k)} = a_{qp}^{(k)} = 0$, 解$\theta$满足的条件是:

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{pq}^{(k-1)}}{a_{pp}^{(k-1)} - a_{qq}^{(k-1)}}.$$

通常取:

$$|\theta| \leq \frac{\pi}{4}.$$

若$a_{pp}^{(k-1)} = a_{qq}^{(k-1)}$, 则取

$$\theta = \begin{cases} -\pi/4, a_{pq}^{(k-1)} < 0, \\ \pi/4, a_{pq}^{(k-1)} > 0. \end{cases}$$

实际应用中不需计算θ, 只需计算$\sin\theta, \cos\theta$, 令

$$y = |a_{pp}^{(k-1)} - a_{qq}^{(k-1)}|, x = \mathrm{sign}(a_{pp}^{(k-1)} - a_{qq}^{(k-1)})2a_{pq}^{(k-1)},$$

则

$$\begin{aligned} \tan 2\theta &= \frac{x}{y}, \\ \cos\theta &= (\frac{1}{2}(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}))^{1/2}, \\ \sin\theta &= \frac{x}{2\cos\theta\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

4.2 数值算例

利用Matlab, 根据Jacobi方法求矩阵的全部特征值和特征向量.

例 4.1 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

的全部特征值和特征向量.

编制程序如下:

$function[D,R]=Jacobieig(A,ep)$

%求对称矩阵的特征值的Jocabi法,A为矩阵,ep为精度(默认值为1e-5)

%D为对角线上的值(特征值),R为对应特征值的特征向量

$if\quad nargin<2\quad ep=1e-5;end;$

$n=length(A);$

$R=eye(n);$

$while\quad 1$

$Amax=0$

$for\quad l=1:n-1$

$\quad for\quad k=l+1:n$

$\quad\quad if\quad abs(A(l,k))>Amax$

$\quad\quad\quad Amax=abs(A(l,k));$

$\quad\quad\quad i=l;j=k$

$\quad\quad end;$

$\quad end;$

$end;$

$if\quad Amax<e\quad break;end;$

%计算三角函数

```
d = (A(i,i) - A(j,j))/2 * (A(i,j));
if   abs(d) < 1e - 10
  t = 1
else
  t = sign(d)/(abs(d) + sqrt(d^2 + 1));
end;
c = 1/sqrt(t^2 + 1); s = c * t;
%旋转计算
for   l = 1 : n
  if   l == i
        A_ij = A(i,j) * c^2 + 2 * A(i,j) * s * c;
        A_jj = A(i,i) * s^2 + A(j,j) * c^2 - 2 * A(i,j) * s * c;
        A(i,j) = (A(i,j) - A(i,i)) * s * c + A(i,j) * (c^2 - s^2);
        A(j,i) = A(i,j); A(i,i) = A_ii; A(jj) = A_jj;
  elseif   l == j
        A_il = A(i,l) * c + A(j,l) * s;
        A_jl = -A(i,l) * s + A(j,l) * c;
        A(i,l) = A_il; A(l,i) = A_il;
        A(j,l) = A_jl; A(l,j) = A_jl;
  end;
  R_li = R(l,i) * c + R(l,j) * s;
  R_lj = R(l,i) * s + R(l,j) * c;
  R(l,i) = R_li; R(l,j) = R_lj;
  end;
end;
D = diag(diag(A))
```

在Matlab中运行程序,执行结果为:

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 0.5858 & 0 & 0 \\ 0 & 3.4142 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 0.5000 & -0.5000 & -0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0.5000 & -0.5000 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

第5章 求解实对称阵特征值问题的Givens-Householder方法

在上一章中, 我们介绍了Jacobi方法是通过旋转变换构造一个正交相似矩阵序列$A_{k+1} = R_k^T A_k R_k$, 使得A_{k+1}趋于一个对角矩阵, 从而得到特征值. Givens 指出, 如果不要求A_k趋于对角矩阵而是三角矩阵的话, 则这个过程可以使有限步的. Householder建议R_k 取为镜像变换, 这样可以更有效的实现三角化过程.

5.1 Givens-Householder方法

将A化成三对角矩阵$C = H^T AH$后, 还需要求C的特征值. Givens根据$C - \lambda I$的顺序主子式构成Sturm序列这一事实提出了求C的特征值的二分法.

为计算A的特征向量, 要先计算A的特征值, 一个有效的方法就是反迭代法. 接下来我们讨论如何求解三对角矩阵C的特征值和特征向量.

考虑实对称三角矩阵:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \beta_n \\ & & & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

不失一般性, 可假定$\beta_i \neq 0 (i = 2, \cdots, n)$, 即$C$是不可约的, 否则$C$可分解成几个阶数更小的不可约三对角矩阵.

令$p_k(\lambda)$表示矩阵$C - \lambda I$的前k阶主子式, 即

$$p_k(\lambda) = \det(C - \lambda I)_k$$

$$= \det \begin{pmatrix} \alpha_1 - \lambda & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 - \beta_2 & \beta_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{k-1} & \alpha_{k-1} - \lambda & \beta_k \\ & & & \beta_k & \alpha_k - \lambda \end{pmatrix}.$$

并规定$p_0(\lambda) \equiv 1$, 则

$$p_1(\lambda) = \alpha_1 - \lambda,$$
$$p_k(\lambda) = (\alpha_k - \lambda)p_{k-1}(\lambda) - \beta_k^2 p_{k-2}(\lambda), k = 2, \cdots, n.$$

显然这个序列满足:

$$p_k(-\infty) \equiv \lim_{\lambda \to -\infty} \mathrm{sgn}\ p_k(\lambda) > 0,$$

$$p_k(+\infty) \equiv \lim_{\lambda \to +\infty} \mathrm{sgn}\ p_k(\lambda) \begin{cases} > 0, k = 0, 2, 4, \cdots, \\ < 0, k = 1, 3, 5, \cdots. \end{cases}$$

序列$p_k(\lambda)_0^n$有如下三个特征:

1. $p_0(\lambda)$无零点, 相邻两个多项式$p_i(\lambda), p_{i+1}(\lambda)$无公共零点.

2. 设λ_0是$p_k(\lambda)(0 < k < n)$的零点, 则$p_{k-1}(\lambda_0)p_{k+1}(\lambda_0) < 0$.

3. $p_k(\lambda)(1 \le k < n)$的零点全是单重的, 并且$p_k(\lambda)$的零点把$p_{k+1}(\lambda)$的零点严格隔离出来.

对于一个多项式序列$\{p_i(\lambda)\}_0^n$, 如果它具有以上几种性质,那么这个多项式序列为Sturm序列.

对于任意取定的实数α,

$$p_0(\alpha), p_2(\alpha), \cdots, p_k(\alpha), \quad k \le n$$

是一个有限数列.

接下来我们设C是对称不可约三对角矩阵, $p_k(\lambda)$是$C - \lambda I$的前k阶主子式, $s_n(\alpha)$是序列$\{p_k(a)\}_0^n$的同号数, 则$s_n(a)$等于C在$[\alpha, +\infty)$ 中特征值的个数.

利用这个推论可以确定在任意一个区间$[\alpha, +\infty)$中所含C的特征值数目. 实际上, 它等于$s_n(\alpha) - s_n(\beta)$. 而且若C的特征值排列为

$$\lambda_n < \lambda_(n-1) < \cdots < \lambda_1,$$

$s_n(\alpha) \ge m > s_n(\beta)$, 则有$\lambda_m \in [\alpha, \beta)$.

由上述讨论, 可以得出求C的特征值λ_m的二分法:

给定包含λ_m的初始区间$[a_0, b_0]$, 对于$k = 0, 1, \cdots,$

1) 取$[a_k, b_k]$的中点$r_k = (a_k + b_k)/2$.

2) 计算$\{p_i(r_k)\}_0^n$的同号数$s_n(r_k)$.

3) 若$s_n(r_k) \geq m$,则

$$a_{k+1} = r_k, \qquad b_{k+1} = b_k,$$

否则

$$a_{k+1} = a_k, \qquad b_{k+1} = r_k.$$

4)若$|b_{k+1} - a_{k+1}| \leq \varepsilon$, 则令

$$\lambda_m = \frac{1}{2}(a_{k+1} + b_{k+1}),$$

计算终止, 否则, $k + 1 \Rightarrow k$, 继续循环.

5.2 数值算例

利用Matlab,根据Givens-Householder方法求解矩阵特征值.

例 5.1 求矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

的全部特征值.

编制程序如下:

$function : [\alpha, \beta] = house(x)$

$n = length(x)$向量x的长度

$\eta = ||x||_\infty x = \frac{x}{\eta}$

$\sigma = x(2:n)^T x(2:n)$

$\nu(I) = 1; v(2:n) = x(2:n)$

$if \quad \sigma = 0$

$if \quad \beta = 0$

$else$

$\alpha = \sqrt{x(1)^2 + \sigma}$

$if \quad x(l) \leq 0$

$v(l) = x(l) - a$

$else$

$v(l) = -\sigma/(x(1) + \alpha)$

end

$\beta = 2\nu(l)^2/(\sigma + \nu(l)^2); \nu = \nu/\nu(l)$

end

在Matlab中运行程序,得到结果为:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 4.701941 \\ 7.814260 \\ 9.416460 \\ 1.606734 \end{pmatrix}$$

结论

本文通过对特征值求解问题在科学研究和工程上的应用,阐述了特征值求解的必要性以及重要性, 并且介绍了一般几种用于求解实对称阵的全部特征值问题方法, 其中有QR算法, 乘幂法和反幂法, Jcobi 方法. 此外, 本文也通过使用Matlab软件对QR 算法, 乘幂法和反幂法, Jacobi方法, Givens-Householder方法, 编制程序对方法进行实现, 并且通过简单的矩阵进行了数值实现.

对实对称矩阵特征值计算方法繁多，本文只是介绍了其中几种常用的方法，没有对各种问题都非常完美的求解方法，如果遇到实际问题我们只能根据问题具体情况去分析，因此深入的研究还是非常有必要的.

参 考 文 献

[1] 向华. 数值计算及其工程应用[M]. 清华大学出版社出版社. 2015: 90-93.

[2] 冯果忱, 黄明游. 数值分析(上册)[M]. 高等教育出版社. 2007: 52-62.

[3] 王开荣，杨大地. 应用数值分析[M]. 高等教育出版社. 2010(2): 240-241.

[4] 姚仰新，罗家洪，庄楚强. 高等工程数学[M]. ,华南理工大学出版社. 2014: 203-205.

[5] 吕同富，康兆敏，方秀敏. 数值计算方法[M]. 清华大学出版社. 2008: 113-115.

致谢

我首先要感谢我的论文指导老师李媛老师对我论文的研究方向做出了指导性的意见和推荐，在论文撰写过程中及时对我遇到的困难和疑惑给予悉心指点，提出了许多有益的改善性意见，投入了超多的心血和精力。同时，还要感谢黑龙江大学数学科学学院的授课老师们和所有同学们，大家在日常的数学问题学习中互相学习，互相帮忙，共同度过了一段完美难忘的时光。

此外，还要感谢同学们在论文编写中带给的大力支持和帮忙，给我带来极大的启发。也要感谢参考文献中的作者们，透过他们的研究文章，使我对研究课题有了很好的出发点。

最后，谢谢论文评阅老师们的辛苦工作。衷心感谢我的老师和同学们，在他们的鼓励和支持下我才得以顺利完成此论文。