松村可換環論 11 章ノート

Riley @Na2COOH_2

このノートは松村可換環論 [1] の第 11 章「完備局所環の応用」の内容をまとめたものである.

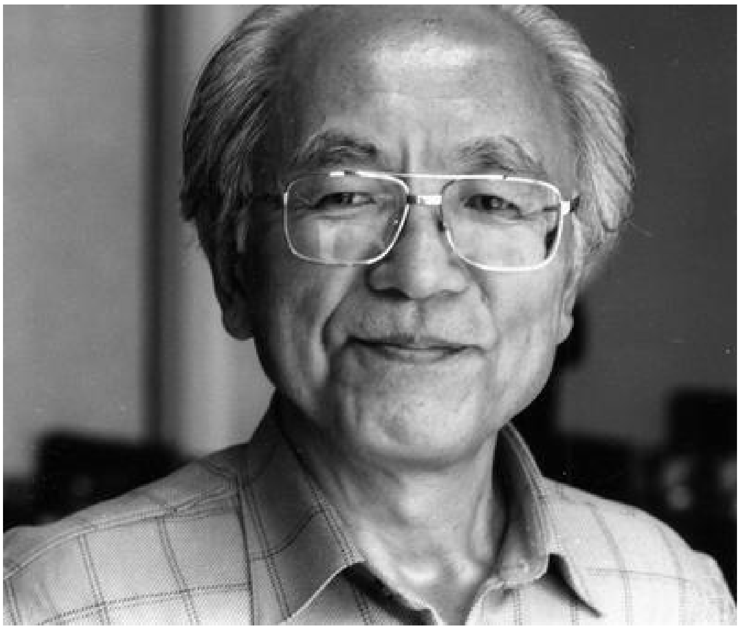

図 1: 松村 英之

https://opc.mfo.de/detail?photo_id=11895&would_like_to_publish=1 より

目次

§ 31 素イデアル鎖 ………… 3
§ 32 形式的ファイバー …… 8
§ 33 Kunz の定理 ………… 15
参考文献 …………………… 18

§ 31 素イデアル鎖

この章の目標は, 主に次のネーター局所環に関する性質のヒエラルキーを知り, 理解することである．下に行くほど強い性質であり，unmixed 以下はすでに 11 章以前に書いてある．ちなみにこの図で遊びたい場合はここにソースを置いたのでどうぞ.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{catenary} & & \\
\text{formally catenary} \arrow[r, Rightarrow, shift left, "\text{Th 31.6}"] & \text{universally catenary} \arrow[u, Rightarrow, "\text{clear}"'] \arrow[l, Rightarrow, shift left, "\text{Th 31.7}"] & \text{equidimensional} & \\
 & \text{quasi-unmixed} \arrow[u, Rightarrow, "\text{Th 31.6}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\text{Th 31.6}"'] & & \\
 & \text{unmixed} \arrow[u, Rightarrow, "\text{Th 17.2}"'] \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{Th 17.6}"'] & \text{CM} & \\
 & & \text{CTR} \arrow[u, Rightarrow] & \text{new! [2]} \arrow[l] \\
 & & \text{Gor} \arrow[u, Rightarrow] & \\
 & & \text{C.I.} \arrow[u, Rightarrow] & \\
 & & \text{HS} \arrow[u, Rightarrow] & \\
 & & \text{RLR} \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

本セクションではこのヒエラルキーの, 主に unmixed から上のわちゃわちゃした部分を扱う. ただし，これらに触れることが目標であり，詳細な証明に立ち入ると内容が脱線するため，多くの証明は省略することにする. 面倒な部分は適切に飛ばそうということで, テキトーに進むというわけではない．多分.

ちなみに，CM と Gor の間に挟まる環を探す試みが最近は主流である．Gor に関しては quasi-Gor, nearly-Gor, almost-Gor, weakly-Gor, approximately-Gor などが知られていた．しかし，完備化や多項式環との同値性が崩れたり，低次元ではほとんど意味のない概念だったりした．そこで最近 CTR 環が宮崎先生により発見された．これは結構うまくいっていると思う.

Th 31.1

Aをネーター半局所環とする．(有限個の極大イデアルしか持たないものを半局所環という．) $\mathfrak{p}$を素イデアルとする．このとき，次を満たすような素イデアル$\mathfrak{p}'$は高々有限個である．

$$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}', \quad \mathrm{ht}(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}) = 1, \quad \mathrm{ht}(\mathfrak{p}') \neq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + 1$$

□

$(proof)$
omit ♠

catenary の場合は，この有限個というのが 0 個を意味することは自明である．catenary でなくてもこのような，いじわる素イデアルは高々有限個しか存在しないということである．

Th 31.2: Ratliff の弱存在定理

Aをネーター環とする．$\mathfrak{p} \subset P$を素イデアルとする．$\mathrm{ht}(p) = h$, $\mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}) = d > 1$とおく．このとき，つぎのような素イデアル$\mathfrak{p}'$が無限に存在する．

$$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \subset P, \quad \mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = h + 1, \quad \mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}') = d - 1$$

□

$(proof)$
まず，$\mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}) = d$なので，$P = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{p}$という列をとれる．ここで$\mathfrak{p}_{d-2} \supset \mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = h + 1$とすると，$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{d-2}) \geq h + 2$だから$\mathfrak{p}_{d-2} \supsetneq \mathfrak{p}'$が従い，$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = h$なので

$$\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_{d-2} \supsetneq \mathfrak{p}' \supsetneq \mathfrak{p}$$

は，もはや間に素イデアルを挟めないから，$\mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}') = d - 1$が従う．ところで，$\mathfrak{p}_{d-2}$と$\mathfrak{p}$の真の間には$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}) = 1$なる素イデアルが無限に存在する．これを示すため，仮に有限個$\mathfrak{p}'_1, \cdots, \mathfrak{p}'_m$で尽きるとする．$\mathfrak{p}_{d-2} \supset \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{p}'_i$であるが，もしイコールなら prime avoidance によって$\mathfrak{p}_{d-2} = \mathfrak{p}_i$となて矛盾する．よって$a \in \mathfrak{p}_{d-2} \setminus \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{p}'_i$をとれる．$\mathfrak{p} + (a)$の極小素イデアル$\mathfrak{p}'_{m+1}$をとると，明らかにどの$\mathfrak{p}'_i$とも異なる．単項イデアル定理から$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}'_{m+1}/\mathfrak{p}) = 1$となり，矛盾である．このような$\mathfrak{p}'$は，Th 31.1 によって，有限個を除くほとんどが$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + 1$を満たす． ♠

ところで，この定理を使うと次がわかる．

Cor

Aを単位的可換環とする．$\mathrm{Spec}(A)$が有限集合で$\dim(A) \geq 2$なら，Aはネーター環ではない． □

$(proof)$
$\dim(A) \geq 2$で$\mathrm{Spec}(A)$が有限集合だから，$\mathfrak{p} \subset P$という素イデアルで$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$, $,\mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}) = 2$なるものがある．そこで，Th 31.2 を適用すると，無限に素イデアルが存在することになる．矛盾． ♠

特に, 2次元以上の付値環はネーター環ではないことがわかる. (無限次元の場合には, 単に極大イデアルの高さがもはや有限ではないのだから，標高定理からネーター環ではないことがわかる．)

次の補題1は（私の観測史上では）使っていないので省略する.

また, 次の定理は松村では整域を課しているが, 証明を見る限り整域である必要はなさそうである．さらに，同じことを思ったのかこの PDF でも整域という条件はしれっと外している.

Th 31.3: Ratliff の強存在定理

Aをネーター環とする．$\mathfrak{p} \subset P$を素イデアルとして，$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = h > 0,\quad, \mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}) = d > 0$ とする．このとき$0 \leq i < d$をみたす各iに対し次の集合は無限集合である．

$$\{\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(\mathfrak{p}') \mid \mathfrak{p}' \subset P, \quad \mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}') = d - i, \quad \mathrm{ht}\ \mathfrak{p}' = h + i\}$$

□

$(proof)$
omit ♠

Th 31.4

$(A, \mathfrak{m})$をネーター局所整域とする．このときAが catenary であることと，すべての素イデアル$\mathfrak{p}$に対し，$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \mathrm{coht}(\mathfrak{p}) = \dim(A)$を満たすことは同値である． □

$(proof)$
omit ♠

ちなみに上の定理で整域としているのは，(0)がただ一つの極小素イデアルであることを使いたいからである. 一般にネーター局所環では複数の極小素イデアルがあるが, どの極小素イデアルを選ぶかで coht が変わってしまうかもしれない．それがすべて一致していたらうれしいわけである．そこで次の定義が出てくる．

Def

$\dim(A) < \infty$なる環Aに対して，すべての極小素イデアル$\mathfrak{p}$が$\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A)$をみたすとき，$A$は **equidimensional** であるという． □

次の補題2も使っていない気がするので省略する.

Th 31.5

A, Bをネーター局所環．$A \to B$を局所環の射とする．BがA上 flat で equidimensional で catenary であれば, Aもそうである. さらに$\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$に対して$B/\mathfrak{p}B$も equidimensional である． □

$(proof)$
omit ♠

証明では同書籍の定理 15.1 を使うのでそちらも参照されたい．

ところで，局所環の射が flat ならば自動的に faithfully flat である．(定理 7.3)したがって上の定理では faithfully flat を想定することになる．一般に faithfully flat $A \to B$において，Bが持つ性質がAにも伝播するとき，その性質は descent するという．例えばネーター性は忠実平坦降下，faithfully flat descent する．上の定理は equidimensionality と catenary 性が faithfully flat descent することを言っている．

Cor

Aは正則局所環Rの準同型像である局所環とする．このとき完備化A^*が equidimensional ならば，Aも equidimensional である． □

$(proof)$
omit ♠

上の系でネーター性は勝手についてくるのでわざわざ述べていない．また，この系から次の定義が出てくる．

Def

ネーター局所環Aにおいて，完備化A^*が equidimensional ならば，Aは **quasi-unmixed** であるという． □

ちなみに quasi-unmixed は別名 formally equidimensional である．この名称からして unmixed ならば quasi-unmixed であることが期待される．unmixed というのは CM 環であることと同値なので（定理 17.6）CM 環は quasi-unmixed か？という話である．CM 環は完備化しても CM 環なので，CM 環が equidimensional であることを示せれば，unmixed ならば quasi-unmixed であることが従う．これは定理 17.3 の(i)で述べられている．

冒頭のヒエラルキーの正当化に大きくかかわるのが次の定理である．

Th 31.6

$(A, \mathfrak{m})$を quasi-unmixed なネーター局所環とする．このとき次が成り立つ．

i) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$に対して$A_\mathfrak{p}$も quasi-unmixed である．
ii) AのイデアルIに対してA/Iが equidimensional であることと quasi-unmixed であることとは同値である．
iii) Bが essentially of finite type over Aである局所環で equidimensional であれば，Bも quasi-unmixed である．
iv) Aは universally catenary である．

□

$(proof)$
omit ♠

essentially of finite type over Aとは，A上有限生成な可換環の局所化であることを言う．例えば明らかなことだが，多項式環$A[x_1, ..., x_n]$の任意の極大イデアルで局所化したものはessentially of finite type over Aである．

ところで，EGA には quasi-unmixed を用いて，次の formally catenary の概念が導入された．

Def

ネーター局所環Aに対して，すべての素イデアル$\mathfrak{p}$に対して$A/\mathfrak{p}$が quasi-unmixed ならば，Aは **formally catenary** であるという． □

formally catenary ならば universally catenary であることは，次のようにして示せる．

∵ 次を示せばいい．

$$\forall \mathfrak{p} \in \min(A), A/\mathfrak{p} : \text{universally catenary} \iff A : \text{universally catenary}$$

$\Longleftarrow$は自明．$\Longrightarrow$について示す．SをA上有限生成な代数とする．任意のSの極小素イデアル$\mathfrak{q}$に対して$S/\mathfrak{q}$が catenary なこと示せばいい．$\mathfrak{q} \cap A \supset \mathfrak{p}$となる$A$の極小素イデアル$\mathfrak{p}$をとる．すると，剰余環の普遍性により次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd} A[X] \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] & & S/\mathfrak{q} \\ & A/\mathfrak{p}[X] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

（図のソースはこちら） ゆえにSは catenary である．

しかし，EGA でこの概念を導入後，Ratliff がこの逆も成立することを示した．すなわち，次が成り立つ．

Th 31.7

ネーター局所環Aが universally catenary であることと formally catenary であることは同値である． □

$(proof)$
omit ♠

ここでいまいちど冒頭のヒエラルキーに戻って鑑賞すると面白い．

§ 32 形式的ファイバー

本節では，geometrically regular や G-ring，Excellent ring の概念に触れる．これらは様々な可換環論的な性質が，可換環論的な操作において，ほどよく遺伝することが明らかになる．

まず, 一般に環準同型 $\varphi : A \to B$ に対して，$\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ が誘導される．このとき，$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$に対して，そのファイバー$\mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(\mathfrak{p})$を考える．$\mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathrm{Spec}(C)$となるような環を構成できるだろうか？答えは Yes であり，それは$C = B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$である．ここで$\kappa(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$で剰余体である．この$C$をファイバー環という．
なぜCをこのようにとるのか簡単に説明する．

次の同型変形ができる．ただし$S = \varphi(A \setminus \mathfrak{p})$は$B$の積閉集合である．

$$\begin{aligned} C &= B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \\ &= B \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) \\ &= S^{-1}B/\mathfrak{p}S^{-1}B \\ &= S^{-1}B/\mathfrak{p}S^{-1}B \end{aligned}$$

ゆえに$P \in \mathrm{Spec}(C)$は$\mathfrak{p}S^{-1}B \subset P$なる$S^{-1}B$の素イデアルに対応し，この$P$は$\mathfrak{p}B \subset P$かつ$P \cap S = \emptyset$なる$B$の素イデアルに対応する．このような$B$の素イデアルは$A$に引き戻すと$\mathfrak{p} \subset \varphi(P)$かつ$\varphi^{-1}(P) \cap (A \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset$となる．これを整理すると, $\varphi^{-1}(P) = \mathfrak{p}$となる．逆にこのような$B$の素イデアルは，逆をたどれば$C$の素イデアルに対応すると分かる．したがって, $\mathrm{Spec}(C)$の素イデアルはちょうど$\mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(\mathfrak{p})$なる素イデアルに対応する．上の同型はすべて対応するアフィンスキームの位相同型をも与えるので，$\mathrm{Spec}(C) = \mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(\mathfrak{p})$は位相同型でもある．

特に，ネーター局所環$(A, \mathfrak{m})$に対して完備化に関する自然な射$A \to A^*$のファイバー環のことを**形式的ファイバー**という．各素イデアルにおけるファイバー環がどうなっているかを調べることで，問題を分割することができるというイメージだろうか．

Def

可換環に対する条件を$\mathbb{P}$と書くことにする．例えば$\mathbb{P}$:regular，CM, Gorenstein, reduced など．
ネーター環Aと$k \subset A$: 部分体に対して，任意の有限次拡大k'/kに対しても$A \otimes_k k'$が，$\mathbb{P}$を持つとき，Aはk上に **geometrically** $\mathbb{P}$であるという． 例えば$\mathbb{P}$ =regular のとき，Aはk上に **geometrically regular** であるという． □

ちなみに, このとき$A \otimes_k k' = A \otimes_k k[\alpha_1, ..., \alpha_n] = A[\alpha_1, ..., \alpha_n]$なので, $A \otimes_k k'$はネーター環である．また，$k' = k$としてもいいのだから，Aにおいて geometrically $\mathbb{P}$ならば$\mathbb{P}$である．

このノートでは，geometrically regular に注目する．geometrically reduced ものちに紹介する西村純一の結果[3] の中に出てくる．西村純一は松村可換環論の Krull 環の節の最後にも結果が残されている．

Prop

$k\subset A$をネーター環とその部分体とする．次は同値である．

i) Aはk上に geometrically regular である．

ii) $\forall\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)$に対して，$A_{\mathfrak{p}}$は$k$上に geometrically regular である．

iii) $\forall\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(A)$に対して，$A_{\mathfrak{m}}$は$k$上に geometrically regular である．

ただし，$k\to A\to A_{\mathfrak{p}}$という標準的な射によって$k$を$A_{\mathfrak{p}}$の部分体とみなす． □

$(proof)$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): k'/kを任意の有限次拡大とする．

$$A_{\mathfrak{p}}\otimes k'=A_{\mathfrak{p}}\otimes_A A\otimes_k k'=A_{\mathfrak{p}}\otimes_A(A\otimes_k k')$$

であり，正則環の局所化で表せるので$A_{\mathfrak{p}}\otimes k'$も正則.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 自明.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): $A\to A\otimes_k k'=A[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$は整拡大である．よって任意の$\mathfrak{n}\in\mathrm{Max}(A\otimes_k k')$に対して$\mathfrak{m}=\mathfrak{n}\cap A\in\mathrm{Max}(A)$である．ここで$\exists t\in(A\setminus\mathfrak{m})\cap\mathfrak{n}$とすると，$\mathfrak{m}(A\otimes_k k')\subset\mathfrak{n}$なので矛盾する．ゆえに$\mathfrak{n}$は$A_{\mathfrak{m}}\otimes_A A\otimes_k k'$の素イデアルと対応する．$A_{\mathfrak{m}}\otimes_A A\otimes_k k'=A_{\mathfrak{m}}\otimes_k k'$は正則環なので，その局所化である$(A\otimes_k k')_{\mathfrak{n}}$も正則である．$\mathfrak{n}$は任意だったから，$A\otimes_k k'$は正則である． ♠

次に射に対する regularity の概念などを導入し，G-ring の定義を行う．

Def

$\varphi:A\to B$をネーター環の射とする．また，環に対する条件$\mathbb{P}$を考える．

φが$\mathbb{P}$であるとは，任意の$\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)$に対して，$B\otimes_A\kappa(\mathfrak{p})$が体$\kappa(\mathfrak{p})$上に geometrically $\mathbb{P}$であるときを言う．特に，$\mathbb{P}$ =regular のとき，φは **regular** であるという．

Aが **G-ring** であるとは，任意の$\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)$に対して，完備化の射$A_{\mathfrak{p}}\to A_{\mathfrak{p}}^*$が regular であるときを言う． □

複雑でわかりにくいので，射が regular であることの定義をまとめてみると次のようになる．

ネーター環の射$A\to B$が regular であるとは，任意の素イデアル$\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)$と，任意の有限次拡大$k'/\kappa(\mathfrak{p})$に対して，$B\otimes_A k'$が regular であることを言う．

今述べた形で理解する．

ところで，geometrically regular や射の regularity は，scheme のレベルで定義される．これによればスキームの射が smooth ならば regular である．[4, 07R9]

さて，Th 32.1 を示すときに[1] では定理 23.7 を用いるとある．しかしこれはネーター局所環に対する定理であり，局所環を外した場合に成立するかはわからない．そこで次の補題を用意し,，これを使って Th 32.1 を示す．

ちなみに次の補題は Th 32.2 における正則環に関する主張の一般化でもある．

Lem

$\varphi : A \to B$が regular とする．このとき，Aが regular ならばBも regular である． □

$(proof)$
$\forall P \in \mathrm{Spec}(B)$をとり，$B_P$が正則なことを示せばいい．$\mathfrak{p} = P \cap A$として，$\tilde{\varphi} : A_{\mathfrak{p}} \to B_P$という flat な局所環の射が誘導されることが簡単な普遍性の議論などによってわかる．この$\tilde{\varphi}$も regular であることを示す．$\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$を任意にとって$K/\kappa(\mathfrak{q})$を任意の有限次拡大とする．$S = B \setminus P$とすれば

$$\begin{aligned} B_P \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} K &= S^{-1}(B_{\mathfrak{p}}) \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} K \\ &= (S^{-1}B)_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} K \\ &= S^{-1}(B \otimes_A K) \\ &= S^{-1}B \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} K \\ &= S^{-1}B \otimes_A K \\ &= S^{-1}B \otimes_B (B \otimes_A K) \end{aligned}$$

となるが，φは regular なので$B \otimes_A K$は正則であり，正則間の局所化だから$B_P \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} K$も正則である．ゆえに$\tilde{\varphi}$は regular である．したがって，主張はネーター局所環の射である場合に示せばいい．すると，いま，$\varphi : A \to B$は flat で A が正則，さらに（$\mathfrak{m}$をAの極大イデアルとして）$B/\mathfrak{m}B = B \otimes_A A/\mathfrak{m} = B \otimes_A \kappa(\mathfrak{m})$より，これは$\varphi$の正則性によって正則環．ゆえに定理 23.7 からBも正則である． ♠

Th 32.1

$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$をネーター環の射とする．

i) もしφとψが regular ならば，$\psi \circ \varphi$も regular である．
ii) もし$\psi \circ \varphi$が regular で，かつψが faithfully flat ならば，φも regular である．

□

$(proof)$
(i) めんどくさいので補足にとどめる．最後に$\varphi_L : B_L \to C_L$という正則な射でB_Lが正則環であることがわかる．ここで前の補題を用いてC_Lが正則なことを示すことで証明が終了する．
(ii) φが flat なのは[1] の 3 章の初めの方に書いてあることを用いればよい．$\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$をとり，$L/\kappa(\mathfrak{p})$を有限次拡大とする．$B_L = B \otimes_A L$が正則なことを示す．$C_L = C \otimes_A L$は仮定から正則となり，$B_L \to C_L$は faithfully flat なので，$B_L$も正則である． ♠

最後に用いた，$A \to B$が faithfully flat でBが正則ならばAも正則であるという事実を一応示しておく．

∵ $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$をとり，$A_{\mathfrak{p}}$が正則であることを示せばいい．忠実平坦性から，とある$P \in \mathrm{Spec}(B)$をとって$P \cap A = \mathfrak{p}$となる．ゆえに$A_{\mathfrak{p}} \to B_P$という平坦な局所環の射が誘導される．これは局所環の射なので忠実平坦でもある．ゆえに，もとから局所環の射だったとしてよい．$\mathrm{gl.dim}(A) < \infty$を示せばいい．任意の$A$加群$M$をとる．

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を，Mの射影分解とする．Pたちは局所環A上の射影加群だから自由加群である．これに$\otimes_A B$をすると，忠実平坦性とPが自由加群であることから

$$\cdots \longrightarrow P_1 \otimes_A B \longrightarrow P_0 \otimes_A B \longrightarrow M \otimes_A B \longrightarrow 0$$

は$M \otimes_A B$の射影分解になる．Bは正則局所環なので$\mathrm{gl.dim}(B) < \infty$である．したがって，十分大きい任意の$i$に対して$P_i \otimes_A B = 0$である．忠実平坦性から$P_i = 0$である．ゆえに射影分解は有限であったから$\mathrm{proj.dim}(M) < \infty$であり，ゆえに$\mathrm{gl.dim}(A) < \infty$である．

Serre の定理はすごい．

忠実平坦や regular な射を仮定すると，正則関係の環（正則環，CM 環など）に対して良い性質が伝播することがわかる．

Th 32.2

$\varphi : A \to B$をネーター環の射で，忠実平坦かつ regular であるとする．

i) Aが正則環（または reduced, Gorenstein, CTR, CM 環）であることと，Bが同じ性質を持つことは同値である．

ii) Bが G-ring ならば，Aも G-ring である．(逆は成立しない．)

□

$(proof)$
(i) CTR 環以外については，[1] の§23 の定理などからわかる．CTR 環について示す．局所環の射に帰着できる．[2, Proposition 3.5]によってBが CTR ならばAも CTR である．逆にAが CTR ならば，同じく[2, Proposition 3.5]によって，$\forall \mathfrak{p} \in \min\{\mathrm{tr}_R(\omega_R)\}$に対して$\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B$が reduced なことを示せばいい．しかし，$\varphi$は regular なので，$\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B$は regular であり，特に reduced である．
(ii) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$に対して$A_{\mathfrak{p}} \to (A_{\mathfrak{p}})^*$が regular なことを示す．$\mathfrak{p}$の上にある$B$の素イデアルを$P$とする．すると，次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} (A_{\mathfrak{p}})^* \arrow[r, "f^*"] & (B_P)^* \\ A_{\mathfrak{p}} \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "f"] & B_P \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

図式のソースはこちら．あとは Th 32.1 によってαが regular なことがわかる． ♠

Th 32.3

完備ネーター局所環は G-ring である. □

$(proof)$
omit ♠

Th 32.4

Aをネーター環とする. Aのすべての極大イデアル$\mathfrak{m}$に対して$A_\mathfrak{m} \to (A_\mathfrak{m})^*$が regular ならば, Aは G-ring である. □

$(proof)$
Th 32.3 により, $(A_\mathfrak{m})^*$は G-ring である. Th 32.2 (ii)より, $A_\mathfrak{m}$も G-ring である. 任意の素イデアル$\mathfrak{p}$に対して, とある極大イデアル$\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}$が存在するから, Aは G-ring であることの定義を満たす. ♠

次の二つは, 環が G-ring であることの判定に使える.

Th 32.5

Aをネーター環とする. 次は同値である.

i) Aは G-ring である.
ii) Cを有限A-代数で整域であるとし, $\mathfrak{m}$をCの極大イデアルとする. $B = C_\mathfrak{m}, Q \in \mathrm{Spec}(B^*), Q \cap B = 0$ならば$(B^*)_Q$は正則局所環である.

□

$(proof)$
omit ♠

Th 32.6: 水谷 博之

Rを正則とする. $\forall n \geq 0$に対して, $R[x_1, ..., x_n]$で(WJ)が成立すれば, Rは G-ring である. □

$(proof)$
omit ♠

最後の(WJ)について説明しよう. これは Weak Jacobian condition の略であり, 正則環Rに関する次の条件を言う.

(WJ): 任意の素イデアル$P \in \mathrm{Spec}(R)$で$\mathrm{ht}(P) = r$なるものに対して, $D_1, ..., D_r \in \mathrm{Der}(R), f_1, ..., f_r \in P$が存在して, $\det\left(D_i(f_j)\right) \notin P$となる.

$\mathrm{Der}(R)$はRからそれ自身への derivation 全体である. 微分作用素みたいなもの. ちなみにこのとき, R_pは$\dim(R_P) = r$なる正則局所環だが, $f_1, ..., f_r$は, その正則巴系である. (定理 30.4)

これらと§30 の話をまとめることで, 次の系を得る.

Cor

体上有限生成代数，本質的に有限生成代数な環は G-ring である． □

$(proof)$
omit ♠

$k[x_1,...,x_n]$に対して(WJ)が成立することについて触れてみよう．例えば極大イデアル$\mathfrak{m} = (x_1,...,x_n)$と，$\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathrm{Der}(k[x_1,...,x_n])$と，$x_1,...,x_n \in \mathfrak{m}$に対して

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j)\right) = 1 \notin \mathfrak{m}$$

となり，たしかに$\mathfrak{m}$においては(WJ)が成立する．$k[x_1,...,x_n]$に対して(WJ)が成立していることをいうためには，初めの素イデアル$\mathfrak{m}$を様々取り換えていかなければならない．これをやっているのが§30 なのである．

ところで，Th 32.6 にはタイトルとして水谷 博之をあげている．彼について調べてみたが，論文が一本あるのみ[5] で，他の情報がほぼない．これほど立派な戦績を挙げていて消息不明なのは不思議である．

上の系は，実はそれより強いことが成り立つ．

Th 32.7: Grothendieck

Aが G-ring ならば，その上の一変数多項式環$A[x]$も G-ring である． □

$(proof)$
omit ♠

証明は[6, Theorem 77]にあるが，かなり難しい．(到達するまでの準備が長そう．)

G-ring の準同型像や局所化は G-ring であるので，これによって G-ring A上の有限生成代数，本質的に有限生成代数も G-ring であることが従う．

さて，Th 32.7 と類似の定理がべき級数でも成り立つかが気になる．すなわち，Aが G-ring ならば，$A[[x]]$も G-ring であるか？である．なんとこれは一般には成立しない．

1979 年，Rotthaus によってAが半局所環であるような G-ring ならば$A[[x]]$も G-ring であることを示した．[7]
1980 年，松村可換環論初版出版．松村英之は著書の中で上述の Rotthaus の結果を紹介し，Aが一般の場合も正しいのではないかと綴った．
1981 年，西村純一がAが一般の場合には反例があることを報告．[3, 5. Example]

という流れのようである．西村が論文を提出したのはもう少し前なので，松村が初版を書いているときに，西村が反例を絶賛構成中であった可能性もある．ずいぶんタイムリーな話題だったのだろう．

西村の反例について，詳しくは元論文を見ていただきたいが，大雑把に説明する．まず西村はとある 1 次元ネーター整域Rであって G-ring であるものを構成する．Th 32.7 によって一

変数多項式環$R[t]$も G-ring である．しかし，これをイデアル$I = tR$で完備化して$R[[t]]$をとると, それまでに述べた定理から$R[[t]]$が N-ring ではありえないことを述べる．ここに, N-ring とは，任意の素イデアル$\mathfrak{p}$に対して，完備化の射$A_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{p}}^*$が reduced であることをいう．（G-ring の reduced バージョン.）regular ならば reduced なので，G-ring ならば N-ring である．ゆえに，$R[[t]]$は G-ring ではないことがわかる．

これより，西村の反例は G-ring の完備化が G-ring であるとは限らないことも与えている．

さて，§24 に書いてあるが，以下について考える．

$\mathbb{P}$を局所環に対する条件とする．例えば，$\mathbb{P}$ = regular, CM, Gorenstein, reduced など．環Aに対して$\mathbb{P}(A) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid A_{\mathfrak{p}}\ \text{は}\ \mathbb{P}\ \text{を満たす}\}$とおく. $\mathbb{P}$が正則局所環を表すときは特に, これを$\mathrm{Reg}(A)$とかく．

Def

ネーター環Aが次の三つを満たすとき，Aは **Excellent ring** であるという．

i) Aは universally catenary である．
ii) Aは G-ring である．
iii) すべての有限A-代数Bに対して，$\mathrm{Reg}(B)$は$\mathrm{Spec}(B)$の開集合である．

□

後ろの二つだけを満たすならば, Aは **quasi-excellent ring** であるという．これらの条件はどれも局所化，有限生成代数をとる操作で閉じている．多分局所環ならばべき級数や完備化をとっても許されると思う．

応用上, 考えつくような環は上の三つをたいてい満たしているので, 冒頭に述べた「様々な可換環論的な性質が, 可換環論的な操作において, ほどよく遺伝する」というのはそういうことだ．

そもそも Excellent ring の定義は Grothendieck が導入したものと思われる．[8, 7.8.2] 導入の動機は，広中による特異点解消の証明が発端だろう．広中は標数 0 の体 k 上の代数的 scheme X に対して，その特異点解消$\tilde{X}$が存在することを示した．[9, MAIN THEOREM I] 続く [10] でも証明が述べられるが，特異点解消の舞台となる scheme は，標数 0 の体 k 上の代数的 scheme である．Grothendieck は，この手法がまわるには標数 0 の体上の Excellent scheme にまで拡張できることを述べた．そして当然，Excellent scheme は Excellent ring の張り合わせである．これが Excellent ring の初出だろう．

ちなみに, 正標数, 混標数の場合の特異点解消は 2026 年 1 月現在, 一般の場合は未解決問題である．(部分的な解決はある．) 一般の場合で解決できたらすごい．フィールズ賞ものと思う．

§ 33 Kunz の定理

最後に，Kunz の定理を示す．

Def

Aを環，$x_1, ..., x_n \in A$とする．$x_1, ..., x_n$が Lech 独立であるとは

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0 \Longrightarrow \forall a_i \in (x_1, ..., x_n)$$

が成立することをいう． □

これは定理 19.9 の後にすでに出てきた概念である．

Lem: 補題 1

$x_1^{\nu_1}, ..., x_n^{\nu_n}$が Lech 独立ならば, $1 \leq \forall \alpha_i \leq \nu_i$について$x_1^{\{\alpha_1\}}, ..., x_n^{\{\alpha_n\}}$も Lech 独立である. □

$(proof)$

$1 < \nu_1$のときに$x_1^{\nu_1 - 1}, ..., x_2^{\nu_2}, ..., x_n^{\nu_n}$も Lech 独立であることを示せば十分である．

$$a_1 x_1^{\nu_1 - 1} + a_2 x_2^{\nu_2} + ... + a_n x_n^{\nu_n} = 0$$

として，両辺にx_1をかけると

$$a_1 x_1^{\nu_1} + a_2 x_1 x_2^{\nu_2} + ... + a_n x_1 x_n^{\nu_n} = 0$$

ゆえに$a_1, a_2 x_1, ..., a_n x_1 \in (x_1^{\nu_1}, ..., x_n^{\nu_n})$である．

$$a_2 x_1 = b_1 x_1^{\nu_1} + b_2 x_2^{\nu_2} + ... + b_n x_n^{\nu_n}$$

として$x^{\nu_1 - 1}$をかけて整理すると

$$\left(b_1 x_1^{\nu_1 - 1} - a_2\right) x_1^{\nu_1} + b_2 x_1^{\nu_1 - 1} x_2^{\nu_2} + ... + b_n x_1^{\nu_1 - 1} x_n^{\nu_n} = 0$$

ゆえに$b_1 x_1^{\nu_1 - 1} - a_2 \in (x_1^{\nu_1}, ..., x_n^{\nu_n})$である．したがって$a_2 \in \left(x_1^{\nu_1 - 1}, ..., x_n^{\nu_n}\right)$である．$a_3, ..., a_n$についても同様. ♠

Lem: 補題 2

$(A, \mathfrak{m}, k)$を局所環とする．$\mathfrak{m} = (x_1, ..., x_n)$として$\nu_i > 0 \quad (1 \leq i \leq n)$について$x_1^{\nu_1}, ..., x_n^{\nu_n}$が独立ならば

$$l_A(A/(x_1^{\nu_1}, ..., x_n^{\nu_n})) = \nu_1 \cdot \nu_2 \cdots \nu_n$$

である．ただし，l_AはA加群としての長さを表す． □

$(proof)$

[1] の証明だとなんかよくわからないが，nに関する帰納法と，一般にイデアルの列$I_n \subset \cdots \subset I_1 \subset I_0 = A \quad (n \geq 1)$について，次の完全列を帰納的に使って

$$0 \longrightarrow I_{k-1}/I_k \longrightarrow A/I_k \longrightarrow A/I_{k-1} \longrightarrow 0 \quad (1 \le k \le n)$$

$$\begin{aligned} l_A(A/I_n) &= l_A(A/I_{n-1}) + l_A(I_{n-1}/I_n) \\ &= \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} l_A(I_k/I_{k+1}) \end{aligned}$$

となることを用いるなどすればいい．この際，$A/\mathfrak{m}$:体はA加群として0でない単純加群であり，したがって$l_A(A/\mathfrak{m}) = 1$であることを用いるかもしれない． ♠

pを素数としてAを標数pである局所環とする．このとき次の Frobenius 環準同型が定まる．

$$F : A \to A, a \mapsto a^p$$

これのe回合成を単にF^eと書く．$F^e(A)$はこの写像によるAの像であるような環で，Aの部分環である．もしAが reduced なら，この写像によって$A \cong F^e(A)$である．

さて，Frobenius 環準同型のふるまいによって正標数の局所環の正則性を特徴づけることができる．これが Kunz の定理である．

Th 33.1: Kunz

Aを標数$p > 0$であるネーター局所環とする．次は同値である．

i) Aは正則である．

ii) Aは reduced で，$\forall e \ge 1$に対して，Aは$F^e(A)$上平坦である．

iii) Aは reduced で，$\exists e \ge 1$に対して，Aは$F^e(A)$上平坦である．

□

[1] とは少し違う証明をする．[4, 0EC0] にも同様の証明がある．

$(proof)$

$\mathfrak{m}$をAの極大イデアルとする．

(i) $\implies$ (ii): Aが reduced なのはよい．定理 23.1 を用いる．$F^e : A \longrightarrow F^e(A)$において，$A$は regular で$F^e(A)$も regukar で特に CM である．さらに$F^e(A)/F^e(\mathfrak{m})$は体なので$\dim(A) = \dim(F^e(A)) + \dim(F^e(A)/F^e(\mathfrak{m}))$が成立する．ゆえに定理 23.1 から$A$は$F^e(A)$上平坦である．

(ii) $\implies$ (iii): 自明．

(iii) $\implies$ (i): $l_A(A/(x_1^q, ..., x_r^q)) = q^r$を示すまでは[1] と同じ．(Notation も[1] と同じ．)

まず，nを十分に大きい任意の自然数とする．$\chi(n) = l_A(A/\mathfrak{m}^n)$とおく．Krull の次元定理からこれは多項式であり，次数は$\dim(A)$である．$r = \dim(A)$が示せれば，Aが正則局所環であるとわかる．nは十分大きいので

$$\mathfrak{m}^{qn+qr} \subset F^e(\mathfrak{m}^n)A \subset \mathfrak{m}^{qn}$$

が成立し，

$$A/\mathfrak{m}^{qn+qr} \twoheadrightarrow A/F^e(\mathfrak{m}^n)A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}^{qn}$$

である．一方で

$$A/F^e(\mathfrak{m}^n)A \cong (F^e(A)/F^e(\mathfrak{m}^n)) \otimes_{F^e(A)} A$$

であり，Aは$F^e(A)$上平坦なので

$$\begin{aligned} l_A(A/F^e(\mathfrak{m}^n)A) &= l_{F^e(A)}(F^e(A)/F^e(\mathfrak{m}^n)) \cdot l_A(A/F^e(\mathfrak{m})A) \\ &= l_A(A/\mathfrak{m}^n) \cdot l_A(A/F^e(\mathfrak{m})A) \\ &= \chi(n) \cdot q^r \end{aligned}$$

と計算できる．ただし計算に[4, 02M1] を用いた．これらより次を得る．

$$\chi(qn+qr) \geq \chi(n) \cdot q^r \geq \chi(qn)$$

ここで$\chi(n)$の最高次係数をCとおくと

$$C(qn)^{\dim(A)} + \cdots \geq Cn^{\dim(A)} \cdot q^r \geq C(qn+qr)^{\dim(A)} + \cdots$$

すべてを$(qn)^{\dim(A)}$で割って$n \to \infty$とすると

$$\frac{q^r}{q^{\dim(A)}} = 1$$

を得る．ゆえに$r = \dim(A)$であり，Aは正則局所環である． ♠

参考文献

[1] 松村英之, 可換環論, 復刊. 東京, Japan: 共立出版, 2000.

[2] M. Miyazaki,「Radical property of the traces of the canonical modules of Cohen-Macaulay rings」. [Online]. 入手先: https://arxiv.org/abs/2506.17987

[3] J.-i. Nishimura,「On ideal-adic completion of noetherian rings」, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 21, no. 1, pp. 153–169, 1981, doi: 10.1215/kjm/1250522110.

[4] T. Stacks project authors,「The Stacks project」. 2026 年.

[5] H. Mizutani,「Hironaka's additive group schemes」, *Nagoya Mathematical Journal*, vol. 52, pp. 85–95, 1973, doi: 10.1017/S0027763000015907.

[6] 松村英之, *Commutative algebra*. Mathematics lecture note series ;. New York, United States: W.A. Benjamin, 1970.

[7] C. Rotthaus,「Komplettierung semilokaler quasiausgezeichneter Ringe」, *Nagoya Mathematical Journal*, vol. 76, pp. 173–180, 1979, doi: 10.1017/S0027763000018560.

[8] A. Grothendieck,「Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie」, *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, vol. 24, pp. 5–231, 1965, [Online]. 入手先: https://www.numdam.org/item/PMIHES_1965__24__5_0/

[9] H. Hironaka,「Resolution of Singularities of an Algebraic Variety Over a Field of Characteristic Zero: I」, *Annals of Mathematics*, vol. 79, no. 1, pp. 109–203, 1964, 参照: 2026 年 1 月 21 日. [Online]. 入手先: http://www.jstor.org/stable/1970486

[10] H. Hironaka,「Resolution of Singularities of an Algebraic Variety Over a Field of Characteristic Zero: II」, *Annals of Mathematics*, vol. 79, no. 2, pp. 205–326, 1964, 参照: 2026 年 1 月 21 日. [Online]. 入手先: http://www.jstor.org/stable/1970547