松村可換環論 11 章ノート

Riley @Na2COOH_2

このノートは松村可換環論第 11 章「完備局所環の応用」の内容をまとめたものである．

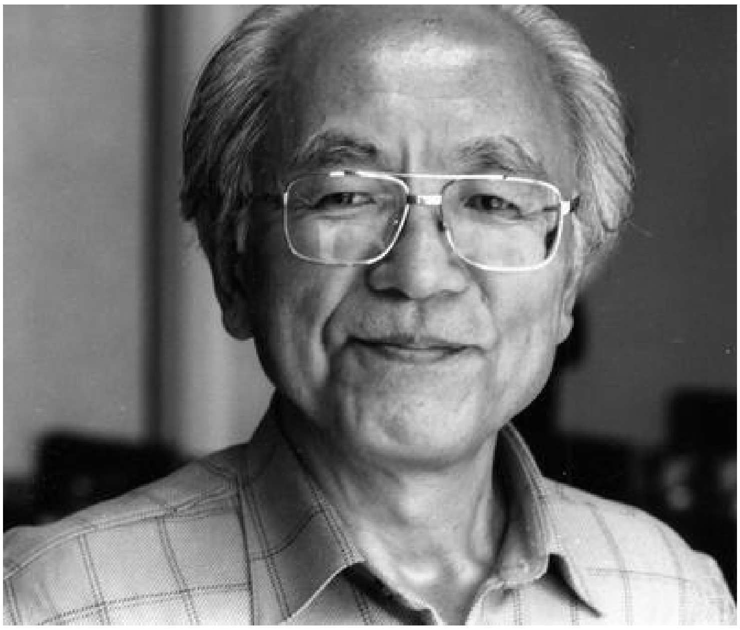

図 1: 松村 英之
https://opc.mfo.de/detail?photo_id=11895&would_like_to_publish=1 より

目次

§ 31 素イデアル鎖

この章の目標は, 主に次のネーター局所環に関する性質のヒエラルキーを知り, 理解することである． 下に行くほど強い性質であり，unmixed 以下はすでに 11 章以前に書いてある．

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{catenary} & & \\
\text{formally catenary} \arrow[r, Rightarrow, shift left=2, "\text{Th 31.6}"] \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{univ catenary} \arrow[l, Rightarrow, shift left=2, "\text{Th 31.7}"] \arrow[u, Rightarrow, "\text{clear}"'] & \text{equi dimensional} & \\
 & \text{quasi-unmixed} \arrow[u, Rightarrow, "\text{Th 31.6}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\text{Th 31.6}"'] & & \\
 & \text{unmixed} \arrow[u, Rightarrow, "\text{Th 17.2}"'] \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{Th 17.6}"'] & \text{CM} & \\
 & & \text{CTR} \arrow[u, Rightarrow] & \text{new!} \arrow[l] \\
 & & \text{Gor} \arrow[u, Rightarrow] & \\
 & & \text{C.I.} \arrow[u, Rightarrow] & \\
 & & \text{HS} \arrow[u, Rightarrow] & \\
 & & \text{RLR} \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

本セクションではこのヒエラルキーの, 主に unmixed から上のわちゃわちゃした部分を扱う. ただし，これらに触れることが目標であり，詳細な証明に立ち入ると内容が脱線するため，多くの証明は省略することにする. 面倒な部分は適切に飛ばそうということで, テキトーに進むというわけではない． 多分.

Th 31.1

Aをネーター半局所環とする．(有限個の極大イデアルしか持たないものを半局所環という．) $\mathfrak{p}$を素イデアルとする．このとき，次を満たすような素イデアル$\mathfrak{p}'$は高々有限個である．

$$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}', \quad \mathrm{ht}(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}) = 1, \quad \mathrm{ht}(\mathfrak{p}') \neq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + 1$$

□

$(proof)$
omit ♠

catenary の場合は，この有限個というのが 0 個を意味することは自明である．catenary でなくてもこのような，いじわる素イデアルは高々有限個しか存在しないということである．

Th 31.2: Ratliff の弱存在定理

Aをネーター環とする．$\mathfrak{p} \subset P$を素イデアルとする．$\mathrm{ht}(p) = h, \quad \mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}) = d > 1$とおく．このとき，つぎのような素イデアル$\mathfrak{p}'$が無限に存在する．

$$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \subset P, \quad \mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = h + 1, \quad \mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}') = d - 1$$

□

$(proof)$
まず，$\mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}) = d$なので，$P = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{p}$という列をとれる．ここで$\mathfrak{p}_{d-2} \supset \mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}, \quad \mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = h + 1$とすると，$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{d-2}) \geq h + 2$だから$\mathfrak{p}_{d-2} \supsetneq \mathfrak{p}'$が従い，$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = h$なので

$$\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_{d-2} \supsetneq \mathfrak{p}' \supsetneq \mathfrak{p}$$

は，もはや間に素イデアルを挟めないから，$\mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}') = d - 1$が従う．ところで，$\mathfrak{p}_{d-2}$と$\mathfrak{p}$の真の間には$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}) = 1$なる素イデアルが無限に存在する．これを示すため，仮に有限個$\mathfrak{p}'_1, \cdots, \mathfrak{p}'_m$で尽きるとする．$\mathfrak{p}_{d-2} \supset \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{p}'_i$であるが，もしイコールなら prime avoidance によって$\mathfrak{p}_{d-2} = \mathfrak{p}_i$となて矛盾する．よって$a \in \mathfrak{p}_{d-2} \setminus \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{p}'_i$をとれる．$\mathfrak{p} + (a)$の極小素イデアル$\mathfrak{p}'_{m+1}$をとると，明らかにどの$\mathfrak{p}'_i$とも異なる．単項イデアル定理から$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}'_{m+1}/\mathfrak{p}) = 1$となり，矛盾である．このような$\mathfrak{p}'$は，Th 31.1 によって，有限個を除くほとんどが$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + 1$を満たす． ♠

ところで，この定理を使うと次がわかる．

Cor

Aを単位的可換環とする．$\mathrm{Spec}(A)$が有限集合で$\dim(A) \geq 2$なら，Aはネーター環ではない． □

$(proof)$
$\dim(A) \geq 2$で$\mathrm{Spec}(A)$が有限集合だから，$\mathfrak{p} \subset P$という素イデアルで$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0, \quad , \mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}) = 2$なるものがある．そこで，Th 31.2 を適用すると，無限に素イデアルが存在することになる．矛盾． ♠

特に, 2 次元以上の付値環はネーター環ではないことがわかる. (無限次元の場合には, 単に極大イデアルの高さがもはや有限ではないのだから，標高定理からネーター環ではないことがわかる．)

次の補題 1 は（私の観測史上では）使っていないので省略する.

また, 次の定理は松村では整域を課しているが, 証明を見る限り整域である必要はなさそうである．さらに，同じことを思ったのかこの PDF でも整域という条件はしれっと外している.

Th 31.3: Ratliff の強存在定理

Aをネーター環とする．$\mathfrak{p} \subset P$を素イデアルとして，$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = h > 0, \quad, \mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}) = d > 0$ とする．このとき$0 \leq i < d$をみたす各iに対し次の集合は無限集合である.

$$\{\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(\mathfrak{p}') \mid \mathfrak{p}' \subset P, \quad \mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}') = d - i, \quad \mathrm{ht}\ \mathfrak{p}' = h + i\}$$

□

$(proof)$

omit ♠