# 松村可換環論 11 章ノート

Riley @Na2COOH_2

このノートは松村可換環論第 11 章「完備局所環の応用」の内容をまとめたものである.

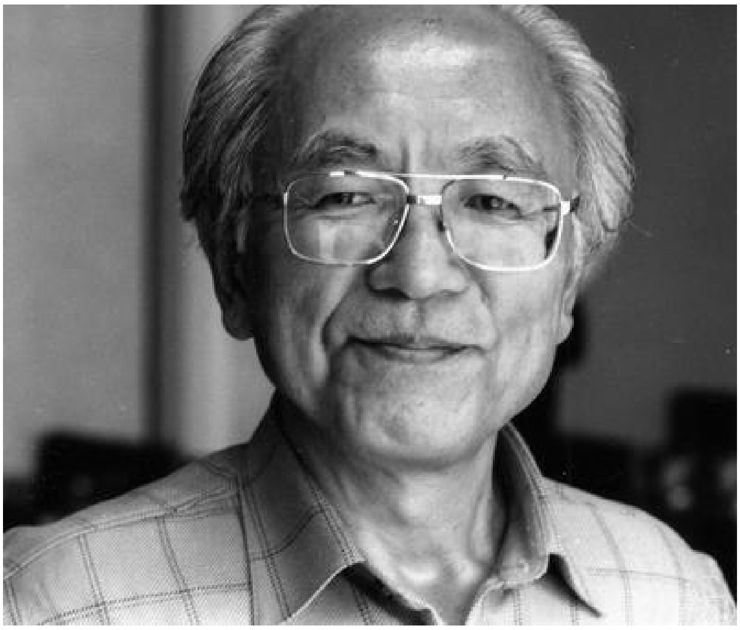

図 1: 松村 英之

https://opc.mfo.de/detail?photo_id=11895&would_like_to_publish=1 より

# 目次

§ 31 素イデアル鎖 ……… 3

# § 31 素イデアル鎖

この章の目標は, 主に次のネーター局所環に関する性質のヒエラルキーを知り, 理解することである．下に行くほど強い性質であり，unmixed 以下はすでに 11 章以前に書いてある．ちなみにこの図で遊びたい場合はここにソースを置いたのでどうぞ.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{catenary} & & \\
\text{formally catenary} \arrow[r, Rightarrow, shift left=2, "\text{Th 31.6}"] \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{universally catenary} \arrow[u, Rightarrow, "\text{clear}"'] \arrow[l, Rightarrow, shift left=2, "\text{Th 31.7}"] & \text{equidimensional} & \\
 & \text{quasi-unmixed} \arrow[u, Rightarrow, "\text{Th 31.6}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\text{Th 31.6}"'] & & \\
 & \text{unmixed} \arrow[u, Rightarrow, "\text{Th 17.2}"'] \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{Th 17.6}"'] & \text{CM} & \\
 & & \text{CTR} \arrow[u, Rightarrow] & \text{new!} \arrow[l] \\
 & & \text{Gor} \arrow[u, Rightarrow] & \\
 & & \text{C.I.} \arrow[u, Rightarrow] & \\
 & & \text{HS} \arrow[u, Rightarrow] & \\
 & & \text{RLR} \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

本セクションではこのヒエラルキーの, 主に unmixed から上のわちゃわちゃした部分を扱う．ただし，これらに触れることが目標であり，詳細な証明に立ち入ると内容が脱線するため，多くの証明は省略することにする．面倒な部分は適切に飛ばそうということで, テキトーに進むというわけではない．多分.

ちなみに，CM と Gor の間に挟まる環を探す試みが最近は主流である．Gor に関しては quasi-Gor, nearly-Gor, almost-Gor, weakly-Gor, approximately-Gor などが知られていた．しかし，完備化や多項式環との同値性が崩れたり，低次元ではほとんど意味のない概念だったりした．そこで最近 CTR 環が宮崎先生により発見された．これは結構うまくいっていると思う.

**Th 31.1**

$A$をネーター半局所環とする．(有限個の極大イデアルしか持たないものを半局所環という．) $\mathfrak{p}$を素イデアルとする．このとき，次を満たすような素イデアル$\mathfrak{p}'$は高々有限個である．

$$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}', \quad \mathrm{ht}(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}) = 1, \quad \mathrm{ht}(\mathfrak{p}') \neq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + 1$$

□

$(proof)$
omit ♠

catenary の場合は，この有限個というのが 0 個を意味することは自明である．catenary でなくてもこのような，いじわる素イデアルは高々有限個しか存在しないということである．

**Th 31.2: Ratliff の弱存在定理**

$A$をネーター環とする．$\mathfrak{p} \subset P$を素イデアルとする．$\mathrm{ht}(p) = h, \quad \mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}) = d > 1$とおく．このとき，つぎのような素イデアル$\mathfrak{p}'$が無限に存在する．

$$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \subset P, \quad \mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = h + 1, \quad \mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}') = d - 1$$

□

$(proof)$
まず，$\mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}) = d$なので，$P = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{p}$という列をとれる．ここで$\mathfrak{p}_{d-2} \supset \mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}, \quad \mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = h + 1$とすると，$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{d-2}) \geq h + 2$だから$\mathfrak{p}_{d-2} \supsetneq \mathfrak{p}'$が従い，$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = h$なので

$$\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_{d-2} \supsetneq \mathfrak{p}' \supsetneq \mathfrak{p}$$

は，もはや間に素イデアルを挟めないから，$\mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}') = d - 1$が従う．ところで，$\mathfrak{p}_{d-2}$と$\mathfrak{p}$の真の間には$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}) = 1$なる素イデアルが無限に存在する．これを示すため，仮に有限個$\mathfrak{p}'_1, \cdots, \mathfrak{p}'_m$で尽きるとする．$\mathfrak{p}_{d-2} \supset \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{p}'_i$であるが，もしイコールなら prime avoidance によって$\mathfrak{p}_{d-2} = \mathfrak{p}_i$となて矛盾する．よって$a \in \mathfrak{p}_{d-2} \setminus \bigcup_{i=1}^m \mathfrak{p}'_i$をとれる．$\mathfrak{p} + (a)$の極小素イデアル$\mathfrak{p}'_{m+1}$をとると，明らかにどの$\mathfrak{p}'_i$とも異なる．単項イデアル定理から$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}'_{m+1}/\mathfrak{p}) = 1$となり，矛盾である．このような$\mathfrak{p}'$は，Th 31.1 によって，有限個を除くほとんどが$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + 1$を満たす． ♠

ところで，この定理を使うと次がわかる．

**Cor**

$A$を単位的可換環とする．$\mathrm{Spec}(A)$が有限集合で$\dim(A) \geq 2$なら，$A$はネーター環ではない． □

$(proof)$
$\dim(A) \geq 2$で$\mathrm{Spec}(A)$が有限集合だから，$\mathfrak{p} \subset P$という素イデアルで$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0, \quad , \mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}) = 2$なるものがある．そこで，Th 31.2 を適用すると，無限に素イデアルが存在することになる．矛盾． ♠

特に, 2 次元以上の付値環はネーター環ではないことがわかる. (無限次元の場合には, 単に極大イデアルの高さがもはや有限ではないのだから，標高定理からネーター環ではないことがわかる．)

次の補題 1 は（私の観測史上では）使っていないので省略する.

また, 次の定理は松村では整域を課しているが, 証明を見る限り整域である必要はなさそうである．さらに，同じことを思ったのかこの PDF でも整域という条件はしれっと外している.

**Th 31.3: Ratliff の強存在定理**

$A$をネーター環とする．$\mathfrak{p} \subset P$を素イデアルとして，$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = h > 0,\quad, \mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}) = d > 0$ とする．このとき$0 \leq i < d$をみたす各$i$に対し次の集合は無限集合である.

$$\{\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(\mathfrak{p}') \mid \mathfrak{p}' \subset P,\quad \mathrm{ht}(P/\mathfrak{p}') = d - i,\quad \mathrm{ht}\ \mathfrak{p}' = h + i\}$$

□

$(proof)$
omit ♠

**Th 31.4**

$(A, \mathfrak{m})$をネーター局所整域とする．このとき$A$が catenary であることと，すべての素イデアル$\mathfrak{p}$に対し，$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \mathrm{coht}(\mathfrak{p}) = \dim(A)$を満たすことは同値である. □

$(proof)$
omit ♠

ちなみに上の定理で整域としているのは，(0)がただ一つの極小素イデアルであることを使いたいからである. 一般にネーター局所環では複数の極小素イデアルがあるが, どの極小素イデアルを選ぶかで coht が変わってしまうかもしれない．それがすべて一致していたらうれしいわけである．そこで次の定義が出てくる.

**Def**

$\dim(A) < \infty$なる環$A$に対して，すべての極小素イデアル$\mathfrak{p}$が$\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A)$をみたすとき，$A$は equidimensional であるという. □

次の補題 2 も使っていない気がするので省略する.

**Th 31.5**

$A, B$をネーター局所環．$A \to B$を局所環の射とする．$B$が$A$上 flat で equidimensional で catenary であれば, $A$もそうである. さらに$\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$に対して$B/\mathfrak{p}B$も equidimensional である. □

$(proof)$
omit ♠

証明では同書籍の定理 15.1 を使うのでそちらも参照されたい．

ところで，局所環の射が flat ならば自動的に faithfully flat である．(定理 7.3) したがって上の定理では faithfully flat を想定することになる．一般に faithfully flat $A \to B$において，$B$が持つ性質が$A$にも伝播するとき，その性質は descent するという．例えばネーター性は忠実平坦降下，faithfully flat descent する．上の定理は equidimensionality と catenary 性が faithfully flat descent することを言っている．

**Cor**

$A$は正則局所環$R$の準同型像である局所環とする．このとき完備化$A^*$が equidimensional ならば，$A$も equidimensional である． □

$(proof)$
omit ♠

上の系でネーター性は勝手についてくるのでわざわざ述べていない．また，この系から次の定義が出てくる．

**Def**

ネーター局所環$A$において，完備化$A^*$が equidimensional ならば，$A$は quasi-unmixed であるという． □

ちなみに quasi-unmixed は別名 formally equidimensional である．この名称からして unmixed ならば quasi-unmixed であることが期待される．unmixed というのは CM 環であることと同値なので（定理 17.6）CM 環は quasi-unmixed か？という話である．CM 環は完備化しても CM 環なので，CM 環が equidimensional であることを示せれば，unmixed ならば quasi-unmixed であることが従う．これは定理 17.3 の(i)で述べられている．

冒頭のヒエラルキーの正当化に大きくかかわるのが次の定理である．

**Th 31.6**

$(A, \mathfrak{m})$を quasi-unmixed なネーター局所環とする．このとき次が成り立つ．

i) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$に対して$A_{\mathfrak{p}}$も quasi-unmixed である．
ii) $A$のイデアル$I$に対して$A/I$が equidimensional であることと quasi-unmixed であることは同値である．
iii) $B$が essentially of finite type over $A$である局所環で equidimensional であれば，$B$も quasi-unmixed である．
iv) $A$は universally catenary である．

□

$(proof)$
omit ♠

essentially of finite type over $A$とは，$A$上有限生成な可換環の局所化であることを言う．例えば明らかなことだが，多項式環$A[x_1, ..., x_n]$の任意の極大イデアルで局所化したものはessentially of finite type over $A$である．

ところで，EGA には quasi-unmixed を用いて，次の formally catenary の概念が導入された．

**Def**

ネーター局所環$A$に対して，すべての素イデアル$\mathfrak{p}$に対して$A/\mathfrak{p}$が quasi-unmixed ならば，$A$は formally catenary であるという． □

formally catenary ならば universally catenary であることは，次のようにして示せる．

∵ 次を示せばいい．

$$\forall \mathfrak{p} \in \min(A), A/\mathfrak{p} : \text{universally catenary} \Longleftrightarrow A : \text{universally catenary}$$

$\Longleftarrow$は自明．$\Longrightarrow$について示す．$S$を$A$上有限生成な代数とする．任意の$S$の極小素イデアル$\mathfrak{q}$に対して$S/\mathfrak{q}$が catenary なこと示せばいい．$\mathfrak{q} \cap A \supset \mathfrak{p}$となる$A$の極小素イデアル$\mathfrak{p}$をとる．すると，剰余環の普遍性により次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
A[X] \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] & & S/\mathfrak{q} \\
& A/\mathfrak{p}[X] \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

（図のソースはこちら） ゆえに$S$は catenary である．

しかし，EGA でこの概念を導入後，Ratliff がこの逆も成立することを示した．すなわち，次が成り立つ．

**Th 31.7**

ネーター局所環$A$が universally catenary であることと formally catenary であることは同値である． □

$(proof)$
omit ♠

ここでいまいちど冒頭のヒエラルキーに戻って鑑賞すると面白い．