Übungen zur Vorlesung Theoretische Informatik I

Wim Martens und Tina Trautner

Universität Bayreuth

SS20 | Übungsblatt 0 | 20.05.2020

Präsenzblatt 20.5.20

Aufgabe 0.1 **0 Punkte**

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass die nachfolgende Sprache nicht regulär ist.

$$L = \{a^i \in \{a\}^* \mid \text{ es gibt ein } n \in \mathbb{N}, \text{ so dass } i = 2^n\}$$

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen mit dem Pumping-Lemma, dass die Sprache nicht regulär ist: Sei n beliebig aber fest. Wir wählen $w = a^{2^n}$ mit $|w| \geq n$ und $w \in L$. Wir können beobachten, dass für alle Zahlen gilt: $n < 2^n$. Sei nun $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung mit 1) $|xy| \leq n$ und 2) $y \neq \varepsilon$. Wir wählen $k = 2$. Dann gilt: $2^n = |w| < |xy^2z| \leq 2^n + n < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, wobei das erste $<$ wegen 2) und das 2. $<$ wegen 1) gilt. Damit kann xy^2z nicht in der form a^{2^j} für irgendein j geschrieben werden und ist damit nicht in L.

Aufgabe 0.2 **0 Punkte**

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass folgende Sprachen nicht kontextfrei sind. **(0 Punkte)**

(i) $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i, k \geq 0, j \geq 1 \text{ und } i < j \text{ und } j > k\}$ **[0 Punkte]**

(ii) $L_2 = \{ww^Rw \mid w \in \{a,b\}^*\}$ **[0 Punkte]**

b) Ist das Komplement von L_1, d.h. $\overline{L_1} = \{a,b,c\}^* - L_1$ kontextfrei oder nicht? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

a) **(i)** Wir wenden das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen an.

Sei $n > 0$ beliebig.
Wir wählen $z = a^n b^{n+1} c^n$. Offensichtlich gilt $z \in L_1$ und $|z| \geq n$.
Sei nun $z = uvwxy$ eine beliebige Zerlegung von z mit

(1) $vx \neq \epsilon$

(2) $|vwx| \leq n$

Wir unterscheiden zwei Fälle: (WICHTIG: Fallunterscheidung nach vx und nicht nach vwx, da wir Symbole in w nicht pumpen können!)

1.Fall: vx enthält kein b.
Dann enthält vx wegen (2) nur a's oder nur c's. Wegen (1) aber mindestens eines davon. Wähle $k = 2$. Dann enthält uv^2wx^2y mindestens so viele a's wie b's oder mindestens so viele c's wie b's. Damit gilt $uv^2wx^2y \notin L_1$.

2.Fall: vx enthält mindestens ein b.
Wegen (2) enthält vx kein a oder kein c. Wähle $k = 0$. In uv^0wx^0y ist die Anzahl der b's verringert. uv^0wx^0y enthält also höchstens so viele b's wie a's oder höchstens so viele b's wie c's. Somit $uv^0wx^0y \notin L_1$.

Da das alle möglichen Fälle sind, folgt mit dem Pumping Lemma, dass L_1 nicht kontextfrei ist.

(ii) Wir wenden wieder das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen an.

Sei $n > 0$ gegeben.
Wir wählen das Wort $z = ba^nbba^nbba^nb$. Offensichtlich gilt $z \in L_2$ und $|z| \geq n$.
Sei nun $z = uvwxy$ eine beliebige Zerlegung von z mit

(1) $vx \neq \varepsilon$

(2) $|vwx| \leq n$

Wir nennen die ersten n a's in z *1. a-Block*, die zweiten n a's *2. a-Block* und die letzten n a's *3. a-Block*. Wegen (2) erstreckt sich vwx maximal über zwei a-Blöcke. Es sei weiterhin angemerkt, dass in vx nicht drei b's enthalten sein können. Wir machen wieder eine Fallunterscheidung.

1.Fall: vx enthält ein oder zwei b's.
Wir wählen $k = 0$. Dann enthält $uv^0wx^0y = uwy$ fünf oder vier b's. Damit ist aber uwy nicht in L enthalten, da jedes Wort in L_2 entweder kein b oder eine durch drei teilbare Anzahl an b's enthalten muss.

2.Fall: vx enthält nur a's.
Wegen (2) enthält vx nur a's aus maximal 2 verschiedenen a-Blöcken. Wir wählen $k = 0$. Dann haben mindestens zwei a-Blöcke eine unterschiedliche Anzahl an a's. Da die Zerlegung in "ww^Rw" durch die b's vorgegeben ist, kann man uv^0wx^0y nicht in dieser Form schreiben, damit folgt $uv^0wx^0y \notin L_2$.

Damit ist L_2 nicht kontextfrei.

b) Das Komplement von L_1 ist kontextfrei. Für den Beweis der Kontextfreiheit können wir zum Beispiel einen Kellerautomaten oder eine kontextfreie Grammatik für $\overline{L}_1$ konstruieren. Es gilt

$$\overline{L}_1 = \{a^ib^jc^k \mid i \geq j\} \cup \{a^ib^jc^k \mid j \leq k\} \cup L((a+b+c)^*(ba+ca+cb)(a+b+c)^*)$$

Da kontextfreie Sprachen unter Vereinigung (mit kontextfreien Sprachen) abgeschlossen sind, reicht es also zu zeigen, dass jeder Teil der Vereinigung kontextfrei ist. Für die Sprachen $\{a^ib^jc^k \mid i \geq j\}$ und $\{a^ib^jc^k \mid j \leq k\}$ kann man dafür einfach eine kontextfreie Grammatik konstruieren. (Die Konstruktion dieser Grammatiken bleibt dem Leser überlassen ;-)) Die

Sprache $L((a + b + c)^*(ba + ca + cb)(a + b + c)^*)$ ist regulär (da definiert durch regulären Ausdruck) und damit auch kontextfrei.

Damit folgt, dass $\overline{L}_1$ kontextfrei ist.