Домашнее задание 16

Кочиев Степан

№1

$\varphi(5^x6^y) = \varphi(5^x)\varphi(6^y) = \varphi(5^x)\varphi(2^y)\varphi(3^y) = 5^x(1-\frac{1}{5})\cdot 2^y(1-\frac{1}{2})\cdot 3^y(1-\frac{1}{3}) = 5^x2^y3^y\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$.
$5^x2^y3^y\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} = 1200 \Leftrightarrow 5^{x-1}6^y = 900 = 5^2\cdot 6^2 (2^y3^y5^{x-1} = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^2)$.
Зная, что каноническое разложение может быть только одно, получаем $(x, y) = (3, 2)$.

№2

$$\varphi(ab) = ab\prod_{p|ab}(1-\frac{1}{p})$$

Заметим, что $(1-\frac{1}{p}) = (1-\frac{1}{p})^2\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{p})}$. Тогда заметим также, что если хотим вырзаить функцию Эйлера через множители $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$, то в виде квадратов должны представлять только те множители $(1-\frac{1}{p})$, которые соответствуют простым делителям, на которые делятся оба множителя. Таким образом, если все множители перемножить, то получим то, что "прошлись"по наибольшему общему делителю множителей. Иными словами,

$$\varphi(ab) = ab\prod_{p|ab}(1-\frac{1}{p}) = ab\prod_{p_1|a}(1-\frac{1}{p_1})\prod_{p_2|b}(1-\frac{1}{p_2})\cdot\frac{1}{\prod\limits_{p_3|(a,b)}(1-\frac{1}{p_3})} = ab\prod_{p_1|a}(1-\frac{1}{p_1})\prod_{p_2|b}(1-\frac{1}{p_2})\cdot\frac{(a,b)}{(a,b)\prod\limits_{p_3|(a,b)}(1-\frac{1}{p_3})} =$$

$$= \varphi(a)\varphi(b)\frac{(a,b)}{\varphi((a,b))}.$$

Ч.т.д.

№3

а) По сути, здесь говорим о функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, такой что $f(n) = n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда по определению $\sigma(n) = = \sum\limits_{d|n} d = \sum\limits_{d|n} f(d)$. Тогда по формуле обращения Мёбиуса $n = f(n) = \sum\limits_{d|n}\mu(d)\sigma(\frac{n}{d})$. Ч.т.д.
б) Пусть функция $h(n) = \sum\limits_{d|n}\varphi(n)\tau(\frac{n}{d}), n \in \mathbb{N}$. Тогда по лемме из лекции знаем, что вследствие мультипликативности функций $\tau(n)$ и $\varphi(n)$ сама функция $h(n)$ тоже мультипликативна.
Заметим, что, используя каноническое разложение $n = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$ и зная, что функция $h(n)$ мультипликативна

$$h(n) = h(p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}) = h(p_1^{\alpha_1})\cdot\ldots\cdot h(p_s^{\alpha_s}).$$

Докажем теперь, что $h(p^\alpha) = \sigma(p^\alpha), \alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.
При $\alpha = 0$ $h(p^0) = h(1) = 1 = \sigma(p^0)$. Докажем теперь для случая, когда $\alpha > 0$. Воспользуемся формулами с семинаров и домашнего задания для простого числа в какой-то натуральной степени

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha(1-\frac{1}{p}),$$

$$\tau(p^\alpha) = \alpha + 1,$$

$$\sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}.$$

Тогда попробуем "раскрыть"$h(p^\alpha) = \sum\limits_{d|p^\alpha}\varphi(d)\tau(\frac{p^\alpha}{d})$. Учитывая, что мы имеем дело с простым числом в какой-то степени, легко заметить, что его делителями являются либо единица, либо такое простое число в натуральной степени не большей нашей. В таком случае если будем расписывать по всем делителям от 1 до p^{α}

$$h(p^{\alpha}) = \varphi(p^0)\tau(p^{\alpha}) + \varphi(p)\tau(p^{\alpha-1}) + ... + \varphi(p^{\alpha})\tau(p^{\alpha-\alpha}) = (\alpha+1) + (p-p^0)(\alpha+1-1) + ... + (p^{\alpha} - p^{\alpha-1})(\alpha+1-\alpha) =$$

$$= \alpha + 1 + \sum_{k=1}^{\alpha}(p^k - p^{k-1})(\alpha + 1 - k).$$

Докажем по индукции. База: пусть $\alpha = 1$. Тогда $h(p) = 1 + 1 + (p-1)(1+1-1) = 1 + 1 + p - 1 = 1 + p$. Рассмотрим $\sigma(p)$. У простого числа p по определению есть два делителя: 1 и p. Поэтому $\sigma(p) = 1 + p = h(p)$. База доказана.

Шаг индукции: пусть выполнено для некоторого $n-1$ ($n \geqslant 2$), докажем для n. Рассмотрим $\sigma(p^{n-1}) + p^n$

$$\sigma(p^{n-1}) + p^n = \frac{p^n - 1}{p-1} + p^n = p^n(\frac{1 - \frac{1}{p^n}}{p-1} + 1) = p^n(\frac{1 - \frac{1}{p^n} + p - 1}{p-1}) = \frac{p^{n+1} - 1}{p-1} = \sigma(p^n)$$

Рассмотрим $h(p^{n-1})$

$$h(p^{n-1}) = n + \sum_{k=1}^{n-1}(p^k - p^{k-1})(n-k)$$

Рассмотрим $h(p^n)$

$$h(p^n) = n + 1 + \sum_{k=1}^{n}(p^k - p^{k-1})(n+1-k) = n + 1 + \sum_{k=1}^{n}(p^k - p^{k-1} + (p^k - p^{k-1})(n-k)) =$$

$$= n + 1 + (p-1) + (p^2 - p) + ... + (p^n - p^{n-1}) + \sum_{k=1}^{n}(p^k - p^{k-1})(n-k) = n + p^n + \sum_{k=1}^{n}(p^k - p^{k-1})(n-k)$$

Заметим, что при $k = n$ $(p^n - p^{n-1})(n-n) = 0 \Rightarrow n + p^n + \sum\limits_{k=1}^{n}(p^k - p^{k-1})(n-k) = n + p^n + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(p^k - p^{k-1})(n-k) =$
$= h(p^n)$.

Рассмотрим теперь $h(p^{n-1}) + p^n$

$$h(p^{n-1}) + p^n = n + \sum_{k=1}^{n-1}(p^k - p^{k-1})(n-k) + p^n = n + p^n + \sum_{k=1}^{n}(p^k - p^{k-1})(n-k) = h(p^n)$$

Но по предположению $h(p^{n-1}) + p^n = \sigma(p^{n-1}) + p^n$. При этом $h(p^{n-1}) + p^n = h(p^n)$, а $\sigma(p^{n-1}) + p^n = \sigma(p^n)$. Отсюда получаем, что $h(p^n) = \sigma(p^n)$.

Таким образом, по индукции доказали, что $h(p^n) = \sigma(p^n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда помня о мультипликативности функции $\sigma(n)$

$$h(n) = h(p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_s^{\alpha_s}) = h(p_1^{\alpha_1}) \cdot ... \cdot h(p_s^{\alpha_s}) = \sigma(p_1^{\alpha_1}) \cdot ... \cdot \sigma(p_s^{\alpha_s}) = \sigma(p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_s^{\alpha_s}) = \sigma(n).$$

Иными словами, доказали, что $\sum\limits_{d|n}\varphi(n)\tau(\frac{n}{d}) = \sigma(n)$. Ч.т.д.

№4

С семинара знаем, что функция Лиувилля является мультипликативной. Тогда

$$\sum_{d|n}\lambda(d) = \prod_{p|n}(1 + \lambda(p) + ... + \lambda(p^{\nu_p(n)}))$$

Проанализируем сумму $\lambda(p) + ... + \lambda(p^{\nu_p(n)})$. Из определения функции Лиувилля первое слагаемое будет равно -1 (очевидно), второе будет равно 1, третье -1 и т.д. Иными словами, т.к в слагаемых мы рассматриваем простые числа их степени, то точно можем сказать какое будет значение, а вся сумма может быть тогда равна либо 0, либо -1: -1 в случае, если слагаемых нечётное количество (т.е сама степень в каноническом разложении нечётная), и 0, если чётное (соответственно чётная степень в каноническом разложении). Если число n является полным квадратом, то тогда в каноническом разложении все степени простых делителей должны быть чётными. В таком случае каждая такая сумма будет равна 0 и тогда $\sum\limits_{d|n}\lambda(d) = 1$. Если число не является полным квадратом, то тогда одна из степеней в каноническом разложении должна быть нечётной; выйдет, что одна из таких сумм будет равна -1 и в таком случае $\sum\limits_{d|n}\lambda(d) = 0$. Таким образом, доказали утверждение. Ч.т.д.