Formulario

Meneses Zepeda Raúl Ignacio

22 de Septiembre del 2022

1 Variables separables

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{1}$$

2 Ecuaciones Homogeneas

$$y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} + c_3e^{\lambda_3 x} ... + c_ne^{\lambda_n x} \tag{2}$$

3 Ecuaciones lineales

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{3}$$

4 Factor integrante

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} \tag{4}$$

5 Solucion general

$$y(x) = \frac{1}{u(x)}(\int u(x)g(x)dx) \tag{5}$$

6 Forma de una ecuacion lineal de segundo grado

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 \tag{6}$$

7 Rotación de ejes

$$(a) = A((cos)^2 z) + Bsen(z)cos(z) + C((sen)^2 z). \tag{7}$$

$$(b) = 2(C - A)cos(z)sen(z) + B((cos)^2 z - (sen)^2 z). \tag{8}$$

$$(c) = A((sen)^2 z) - Bsen(z)cos(z) + C((cos)^2 z). \tag{9}$$

$$(d) = Dcos(z) + Esen(z). \tag{10}$$

$$(e) = Ecos(z) - Dsen(z). \tag{11}$$

$$(f) = F. \tag{12}$$

8 El discriminante de una ecuacion

$$I = B^2 - 4AC \tag{13}$$

i) Parabolica, si $I = 0$

ii) Eliptica, si $I < 0$

iii) Hiperbolica, si $I > 0$

9 Cambio de coordenadas

$$\xi = a_{11}x + a_{12}y \tag{14}$$

$$\eta = a_{21}x + a_{22}y \tag{15}$$

$$\text{con } \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\| \neq 0$$

10 Forma de transformacion

$$A'u\xi\xi + B'u\xi\eta + C'u\eta\eta + D'u\xi + E'\eta + F'u + G = 0 \tag{16}$$

11 Transformada bajo el cambio de coordenadas

$$sgn(B^2 - 4AC) = sgn(B^2 - 4A'C') \tag{17}$$

12 Forma canonica de las ecuaciones

I	Tipo	Ecuaciones	
$I > 0$	Hiperbolica	$\xi = -(B + \sqrt{B^2 - 4AC}x + 2Ay$, $\eta = -(B - \sqrt{B^2 - 4AC})x, 2Ay$	$u\xi\eta = F'(u\xi, u$
$I = 0$	parabolica	$\xi = -Bx + 2Ay$, $\eta = x$	$U\eta\eta =$
$I < 0$	eliptica	$\eta = -Bx + 2Ay$,$\xi = \sqrt{4AC - B^2}x$	$U\xi\xi + u\eta$

13 Teorema de Fubini

$$\int_A \int_B f(x,y)dydx = \int_B \int_A f(x,y)dxdy \tag{18}$$

14 Teorema de la divergencia de Gauss

$$\iiint_V \nabla \cdot A = \iint_S A \cdot dS \tag{19}$$

15 Teorema de Stokes

$$\iint_S (\nabla \times A) \cdot dS = \oint_C A \cdot dr \tag{20}$$

16 Teorema de Green

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy \tag{21}$$

17 Separación de variables

$$U(x,y) = X(x)Y(y) = XY \tag{22}$$

18 Funciones Periodicas

Una funcion f definida sobre R es llamada periodica si existe un número $T > 0$ de tal manera que:

$$f(x+T) = f(x) \tag{23}$$

19 Ortogonalidad

$$\int f_1(x)f_2(x)\alpha(x)dx = 0 \tag{24}$$

20 Series de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\frac{npix}{L}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(\frac{npix}{L} \tag{25}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{26}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{\infty} f(x)cos(\frac{npix}{L})\mathrm{d}x \tag{27}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{\infty} f(x)sen(\frac{npix}{L})\mathrm{d}x \tag{28}$$

- En una función par los coeficientes de sen son cero, por lo que $b_n = 0$. Se debe integrar de $0 \leq x \leq L$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\mathrm{d}x \tag{29}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)cos(\frac{npix}{L})\mathrm{d}x \tag{30}$$

- En una función impar los coeficientes de cos son cero, por lo que $a_n = 0$ y $a_0 = 0$. Se debe integrar de $0 \leq x \leq L$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)sen(\frac{npix}{L})\mathrm{d}x \tag{31}$$

Para simplificar:

$$sen(xpi) = 0 \tag{32}$$

$$cos(xpi) = 0 \tag{33}$$

21 Fórmula de Kronecker

$$\int sen(ax)cos(bx)\mathrm{d}x = -\frac{cos(ax+bx)}{2(a+b)} - \frac{cos(ax-bx)}{2(a-b)} \tag{34}$$

$$\int sen(ax)sen(bx)\mathrm{d}x = -\frac{sen(ax+bx)}{2(a+b)} + \frac{sen(ax-bx)}{2(a-b)} \tag{35}$$

$$\int cos(ax)cos(bx)\mathrm{d}x = \frac{sen(ax+bx)}{2(a+b)} + \frac{sen(ax-bx)}{2(a-b)} \tag{36}$$

22 Método de Separación de Variables II

Paso 1: Separacion de Variables: Para hallar una solución particular de la ecuacion dada (1) proponemos una solucion de la forma:

$$U(x,t) = X(x)T(t) \tag{37}$$

derivamos y al sustituir en la ecuación original (1) obtenemos la igualdad

$$X(x)T'(t) = kX"(x)T(t) \tag{38}$$

como ni $X(x)$ y $T(t)$ son 0 porque de serlo tmabien U lo seria podemos dividir la ultima ecuacion por $kX(x)T(t)$ para obtener:

$$\frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X"(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{39}$$

Entonces las ecuaciones separadas son:

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < L \tag{40}$$

$$T'(x) + \lambda T(x) = 0, T > 0 \tag{41}$$

Para completar la separación acotamos las condiciones de frontera. Notemos que $U(0,t) = X(0)T(t) = 0$ para todo t ¿ 0. Como $T \neq 0$ se sigue que $X(0) = 0$. Analogamente $U(L,t) = 0$ lleva a la condicion $X(L) = 0$.

Paso 2: Sturm-Liouville: La definicion de estos problemas incluye dos condiciones de frontera.

En este ejemplo, la ecuación separada que es un problema S-L es:

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, X(0) = 0, X(L) = 0 \tag{42}$$

sabemos que sus valores propios tienen la forma:

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{L}^2) \tag{43}$$

y sus funciones propias tienen la forma:

$$X_n(x) = sen(\frac{n\pi}{L}), n = 1, 2, 3, ... \tag{44}$$

entonces para cada λ_n de la ecuacion $T'(x) + \lambda T(x) = 0, T > 0$ encontramos una componente temporal de la solución, es decir:

$$T_n(t) = e^{-k(\frac{n\pi x}{L})^{2t}}, n = 1, 2, 3, ... \tag{45}$$

Paso 3: Series de Fourier

23 Condiciones en la frontera

Ecuación	a	b	w(x)
Legendre	-1	1	1
Shifted Legendre	0	1	1
Associated Legendre	-1	1	1
Chebyshev I	-1	1	$(1-x^2)^{-1/2}$
Shifted Chebyshev I	0	1	$x(1-x^2)^{-1/2}$
Chebyshev II	-1	1	$(1-x^2)^{1/2}$
Laguerre	0	∞	e^x
Associated Laguerre	0	∞	$x^k e^{-x}$
Hermite	-∞	∞	e^{-x^2}
Simple harmonic oscillator	0	2π	1
	-π	π	1

24 Funciones propias, valores propios

Ecuación	p(x)	q(x)	λ	w(x)
Legendre	$1-x^2$	0	l(l+1)	1
Shifted Legendre	x(1-x)	0	l(l+1)	1
Associated Legendre	$1-x^2$	-$\frac{m^2}{1-x^2}$	l(l+1)	1
Chebyshev I	$(1-x^2)^{1/2}$	0	n^2	$(1-x^2)^{-1/2}$
Shifted Chebyshev I	$x(1-x^2)^{1/2}$	0	n^2	$x(1-x^2)^{-1/2}$
Chebyshev II	$(1-x^2)^{3/2}$	0	n(n+2)	$(1-x^2)^{1/2}$
Ultraspherical	$(1-x^2)^{\alpha+1/2}$	0	$n(n+2\alpha)$	$(1-x^2)^{\alpha-1/2}$
Bassel	x	-$\frac{n^2}{x}$	α^2	x
Laguerre	xe^{-x}	0	α	e^{-x}
Associated Laguerre	$x^{k+1}e^{-x}$	0	α-k	$x^k e^{-x}$
Hermite	e^{-x^2}	0	2α	e^{-x^2}
Simple harmonic oscillator	1	0	n^2	1

25 Valores en la frontera

Condiciión en la frontera	ϕ(-L)=ϕ(L)
Valores propios	$(\frac{n\pi}{L})^2$ n=0, 1, 2,..
Función propia	sen($\frac{nx\pi}{L}$), cos ($\frac{nx\pi}{L}$)
Serie	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ cos($\frac{nx\pi}{L}$) + $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ cos($\frac{nx\pi}{L}$)
Coeficientes	$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x$ $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos(\frac{npix}{L})\mathrm{d}x$ $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen(\frac{npix}{L})\mathrm{d}x$

26 Ecuacion de la onda

Resuelva el problema:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$
$$u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, t > 0$$
$$u(x,0) = f(x), \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = g(x), 0 < x < L$$

Se dice que $U(x,t) = X(x)T(t) = XT$

Derivamos $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = XT"$,$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X"T$

Sustituyendo tenemos

$$\frac{T"}{T} = \frac{X"}{X} = -\lambda$$

Resolviendo

$$X" + \lambda X = 0...(1) \qquad T" + \lambda T = 0...(2)$$

Donde por las c.f. sabemos que (1) es un problema S-L entonces:

$$\lambda = (\frac{n\pi}{L})^2$$

$$X(x) = B_n sen(\frac{n\pi x}{L})$$

Sustituimos λ en (2) y obtenemos:

$$T" + (\frac{n\pi}{L})^2 T = 0$$

Ec. Caracteristica es $m^2 + (\frac{n\pi}{L})^2 = 0, m = \pm\frac{n\pi}{L}i$

$$T(t) = C_1 cos(\frac{n\pi t}{L}) + C_2 sen(\frac{n\pi}{L}t)$$

Por lo que U(x,t)=X(x)T(t) es:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} sen(\frac{n\pi x}{L})(b_{1n}cos(\frac{n\pi t}{L}) + b_{2n}sen(\frac{n\pi t}{L}))$$
$$U_t = \sum_{n=1}^{\infty} sen(\frac{n\pi x}{L})(\frac{n\pi}{L}[b_{1n}sen(\frac{n\pi t}{L}) - b_{2n}cos(\frac{n\pi t}{L})])$$

Usamos condiciones iniciales:
$U(x,0) = X(x)T(0)$

$$T(0) = (b_{1n}cos(0) + b_{2n}sen(0))$$

por lo tanto $b_{2n} = 0$
$\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = X(x)T'(0)$

$$T'(0) = (b_{1n}sen(0) - b_{2n}cos(0)$$

por lo tanto $b_{1n} = 0$
Obstenemos como resultado:

$$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}sen(\tfrac{n\pi x}{L}) = f(x)$$
$$U_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\tfrac{n\pi}{L}sen(\tfrac{n\pi x}{L}) = g(x)$$

27 Serie de Fourier compleja

Con $w_0 = \frac{2\pi}{p}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{1n}d_n e^{-inw_0x} \tag{46}$$

Para un $n = 0, \pm 1, \pm 2...$

28 Teorema 2.10

Sea f periodica fundamental p. Sea f suave a pedazos en [-p/2, p/2]. Entonces, en cada x la serie de Fourier compleja converge a:

$$\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) \tag{47}$$

29 Transformada de Fourier

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{jwt}dw$$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(w)}$
A	$2\pi A\delta(w)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(w)$
$u(t)$	$\pi\delta(w)+\frac{1}{jw}$
$\|t\|$	$\frac{-2}{w^2}$
$sgn(t)$	$\frac{2}{jw}$
$\cos\left(w_o t\right)$	$\pi\left[\delta\left(w-w_o\right)+\delta\left(w+w_o\right)\right]$
$\mathrm{sen}\left(w_o t\right)$	$j\pi\left[\delta\left(w-w_o\right)-\delta\left(w+w_o\right)\right]$
$e^{jw_o t}$	$2\pi\delta\left(w-w_o\right)$
$j\pi\left[\delta\left(w-w_o\right)-\delta\left(w+w_o\right)\right]$	$\frac{1}{a+jw}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+jw)^2}$
$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+w^2}$
$\delta'(t)$	jw
$\delta''(t)$	$-w^2$
$x'(t)$	$jwX(w)$
$x\left(t-t_o\right)$	$e^{-jwt_o}X(w)$
$\delta\left(t-t_o\right)$	e^{-jwt_o}
$x''(t)$	$(jw)^2X(w)$
$f(x-a)$	$e^{-jaw}F(w)$
$f(t)\cos\left(w_o t\right)$	$\frac{1}{2}\left[F\left(w+w_o\right)+F\left(w-w_o\right)\right]$
$f(t)\,\mathrm{sen}\left(w_o t\right)$	$\frac{1}{2j}\left[F\left(w+w_o\right)-F\left(w-w_o\right)\right]$

30 Transformadas de Laplace

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s \pm a}$	$e^{\pm at}$
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$
$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{-at} + mt - 1)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1 - \cos at)$
$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1 - \cos at)$
$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^3}(at - \sin at)$
$\frac{1}{(s+a)\cdot(s+b)}$	$\frac{a-b}{e^{-bt} - e`-at}$
$\frac{s}{(s+a)\cdot(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$

$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
$\dfrac{1}{(s+a)^n}$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}$
$\dfrac{s}{(s+a)^2}$	$e^{-at}(1-at)$
$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{t}{2a}(\sin at)$
$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a}(\sin at + at\cos at)$
$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$

31 Coordendas Curvilineas

DEFINICION: Las coordenadas u, v, w forman un sistema de coordenadas curvilıneas ortogonal si la base $\frac{\partial r}{\partial u}$ $\frac{\partial r}{\partial v}$, $\frac{\partial r}{\partial w}$ es ortogonal y orientada positivamente.
COORDENADAS POLARES
Se definen x = $x(p,\theta) = pcos\theta, y = y(p,\theta) = psen\theta$, donde p $[0,+\infty]$ y $\theta[0,2pi]$.
El vector de posicion es r =$r(p,\theta) = (pcos\theta, psen\theta)$.
Al mantener p fijo y variar theta en sentido positivo se obtienen circunferencias concentricas de centro el origen. Sus vectores tangentes son: $\frac{\partial r}{\partial \theta} = (-psen\theta, pcos\theta)$.
Al mantener theta fijo y variar p se obtienen semirrectas que parten del origen. Sus vectores tangentes son $\frac{\partial r}{\partial p} = (cos\theta, sen\theta)$.
Los vectores $\frac{\partial r}{\partial p}, \frac{\partial r}{\partial \theta}$ forman una base ortogonal de R
COORDENADAS CILINDRICAS
Se definen x = $pcos\theta, y = psen\theta, z = z$, donde p $\varepsilon[0,\infty], \theta[0,2pi]yzR$.
El vector de posicion es r = $r(p,\theta,z) = (pcos\theta, psen\theta, z)$.
Al mantener z y theta constantes y variar p se obtienen semirrectas que empiezan en el eje Z. Sus vectores tangentes son : $\frac{\partial r}{\partial p} = (cos\theta, sen\theta, 0)$.
Al mantener p y z constantes y variar theta se obtienen circunferencias horizontales. Sus vectores tangentes son: $\frac{\partial r}{\partial \theta} = (-1psen\theta, pcos\theta, 0)$.
Al mantener p y theta constantes y variar z se obtienen rectas verticales. Sus vectores tangentes son: $\frac{\partial r}{\partial z} = (0,0,1)$. Los vectores $\frac{\partial r}{\partial p}, \frac{\partial r}{\partial \theta}, \frac{\partial r}{\partial z}$ forman una base ortogonal orientada positivamente de R3.
COORDENADAS ESFERICAS
Se definen x =$pcos\phi cos\lambda, y = pcos\phi sen\lambda\, z = psen\phi$, donde p $\varepsilon[0,\infty], \lambda\varepsilon[0,2pi]$ y $\phi\varepsilon[1pi/2, pi/2]$.
El vector de posicion es $r(p,\lambda,\phi) = p(cos\phi cos\lambda, cos\phi sen\lambda, sen\phi)$.
Si fijamos p obtenemos una esfera centrada en el origen. Lambda corresponde a la longitud y phi es la latitud.
Al variar p y fijar las otras dos variables obtenemos semirrectas que parten del

origen. Sus vectores tangentes son : $\frac{\partial r}{\partial p} = (cos\phi cos\lambda, cos\phi sen\lambda, sen\phi)$.
Al variar phi y fijar las otras dos variables obtenemos meridianos. Sus vectores tangentes son: $\frac{\partial r}{\partial \phi} = p(sen\phi cos\lambda, sen\phi sen\lambda, cos\phi)$.
Al variar lambda manteniendo fijas las demas obtenemos paralelos. Sus vectores tangentes son : $\frac{\partial r}{\partial \lambda} = p(cos\phi sen\lambda, cos\phi cos\lambda, 0)$
Los vectores $\frac{\partial r}{\partial p}, \frac{\partial r}{\partial \lambda}, \frac{\partial r}{\partial \phi}$ forman una base orientada positivamente de R3.

32 laplaciano

En coordenadas rectangulares:

$$\bigtriangledown \cdot \bigtriangledown f = \bigtriangledown^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{48}$$

En coordenadas cilindricas:

$$\bigtriangledown^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{49}$$

En coordenadas esfericas:

$$\bigtriangledown^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{cot\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} \tag{50}$$