Лекция 7.1

Обработка экспериментальных данных о функции методом интерполяции по Лагранжу.

Пусть $z = z(x)$ - обычная числовая функция, значения которой экспериментально установлены в точках $x_0 < x_1 < ... < x_n$: $z_i = z(x_i)$, $i = 0,1,..., n$. Имеется, кроме того, точка $\bar{x}$, $x_0 < \bar{x} < x_n$. Требуется найти число $z(\bar{x})$, предполагая данную функцию бесконечно дифференцируемой всюду, где она рассматривается. Решение этой задачи называется *интерполяцией.* Если указанное число будет найдено не точно, а приближенно, то необходи-мо указать явно допущенную ошибку.

Существует несколько методик решения этой задачи. Наша цель – рассмотреть метод Лагранжа.

Введем функции

$$\pi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}, \quad i = 0,1,...,n;$$

Ясно, что $\pi_i(x_i) = 1$, а во всех остальных точках $\pi_i(x_k) = 0$, $k \neq i$. Поэтому многочлен n-ой степени $L(x) = \sum_{i=0}^{i=n} z_i \pi_i(x)$ принимает в точках $x_0 < x_1 < ... < x_n$ те же значения, соот-ветственно, что и данная функция $z = z(x)$. Этот многочлен называется *многочленом Ла-гранжа.* Если вместо искомого числа $z(\bar{x})$ взять $L(\bar{x})$, то ошибку можно указать совер-шенно точно:

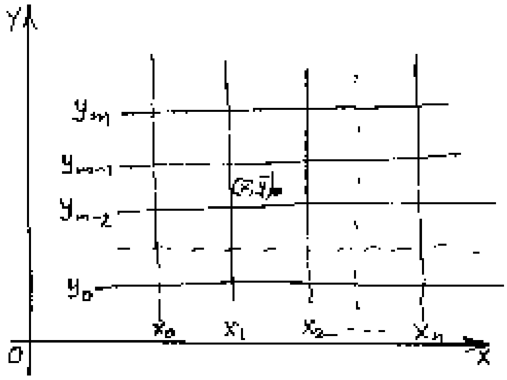
$$z(\bar{x}) = L(\bar{x}) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)...(\bar{x}-x_n),$$

где c - некоторая точка из (x_0, x_n). Это обстоятельство доказывается с помощью много-кратно применяемой теоремы Ролля к специально построенной для обсуждаемой задачи функции.

Предложенную Лагражем методику нетрудно распространить на любое число пе-ременных. Мы ограничимся далее лишь двумя переменными; случай трех и более пере-менных допускают точно такое же обобщение.

Пусть функция $z = z(x, y)$ оказалась установленной в результате некоторого экспе-римента в точках (x_i, y_j) и имеются числа $z_{ij} = z(x_i, y_j)$, $i = 0,...,n$, $j = 0,...,m$; требует-ся установить значение данной функции в некоторой точке $(\bar{x}, \bar{y})$, $x_0 < \bar{x} < x_n$, $y_0 < \bar{y} < y_m$, и, если это значение будет найдено приближенно, то указать погрешность. О функ-ции $z = z(x, y)$ предполагается, что она обладает непрерывными производными всех по-рядков.

Графически эту ситуацию надо представлять себе так:



Таким образом, речь идет о решетке, в узлах которой определена функция $z(x, y)$ и внут-ри которой имеется точка $(\bar{x}, \bar{y})$, где функцию надо приближенно определить.

Введем функции:

$$\pi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}, \quad i = 0,1,...,n;$$

$$\tau_j(y) = \frac{(y-y_0)(y-y_1)...(y-y_{i-1})(y-y_{i+1})...(y-y_m)}{(y_j-y_0)(y_j-y_1)...(y_j-y_{j-1})(y_j-y_{j+1})...(y_j-y_m)}, \quad j = 0,1,...,m.$$

Ясно, что $\pi_i(x_i) = 1, \quad \tau_j(y_j) = 1$, а во всех остальных точках

$$\pi_i(x_k) = 0, \quad k \neq i, \quad \tau_j(y_l) = 0, \quad l \neq j.$$

Поэтому многочлен от двух переменных

$$L(x, y) = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\substack{i=n \\ j=m}} z_{ij}\pi_i(x)\tau_j(y),$$

где $z_{ij} = z(x_i, y_j)$, в каждой точке (x_i, y_j) принимает то же самое значение, что и данная функция, т.е. $L(x_i, y_j) = z_{ij}$. Следуя идее Лагранжа, примем за значение функции $z = z(x, y)$ в точке $(\bar{x}, \bar{y})$ число $L(\bar{x}, \bar{y})$.

Оценим теперь погрешность такого допущения, т.е. выясним, насколько велика разница между $z(\bar{x}, \bar{y})$ и $L(\bar{x}, \bar{y})$. Заметим, что

$$L(x, y) = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\substack{i=n \\ j=m}} z_{ij}\pi_i(x)\tau_j(y) = \sum_{i=0}^{i=n} \pi_i(x)\left(\sum_{j=0}^{j=m} z_{ij}\tau_j(y)\right);$$

выражение $T_i(y) = \sum_{j=0}^{j=m} z_{ij}\tau_j(y)$ можно рассматривать как многочлен Лагранжа для системы точек $y_0,..., y_m$ с соответствующими значениями в них функции $z_i = (z_{i0},..., z_{im})$. Поэтому

$$z(x_i, \bar{y}) = T_i(\bar{y}) + \frac{1}{(m+1)!}\frac{\partial^{m+1} z}{\partial y^{m+1}}(\bar{y} - y_0)(\bar{y} - y_1)...(\bar{y} - y_m),$$

причем частная производная $\frac{\partial^{m+1} z}{\partial y^{m+1}}$ берется в некоторой точке интервала (x_i, c_i). С дру-гой стороны, выражение

$$L(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=0}^{i=n} T_i(\bar{y})\pi_i(\bar{x})$$

можно воспринимать как значение при $x = \bar{x}$ многчлена Лагранжа $\sum_{i=0}^{i=n} T_i(\bar{y})\pi_i(x)$. Поэто-му

$$z(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=0}^{i=n} z(x_i, \bar{y})\pi_i(\bar{x}) + \frac{1}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}(\bar{x} - x_0)...(\bar{x} - x_n),$$

где частная производная $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}$ вычислена в некоторой точке. Учитывая вышесказанное, получаем:

$$z(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=0}^{i=n}\left(T_i(\bar{y}) + \frac{1}{(m+1)!}\frac{\partial^{m+1} z}{\partial y^{m+1}}(\bar{y} - y_0)(\bar{y} - y_1)...(\bar{y} - y_m)\right)\pi_i(\bar{x}) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}(\bar{x} - x_0)...(\bar{x} - x_n) =$$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\substack{i=n \\ j=m}} z_{ij}\pi_i(\bar{x})\tau_j(\bar{y}) + \frac{1}{(m+1)!}\sum_{i=0}^{i=n}\frac{\partial^{m+1} z}{\partial y^{m+1}}\pi_i(\bar{x})(\bar{y} - y_0)(\bar{y} - y_1)...(\bar{y} - y_m) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}(\bar{x} - x_0)...(\bar{x} - x_n).$$

Заметим, что в каждом слагаемом здесь частная производная считается в своей, новой, точке. Поэтому, если считать, что частная производная $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}$ ограничена по модулю константой Z_x^{n+1}, а частная производная $\frac{\partial^{m+1} z}{\partial y^{m+1}}$ ограничена по модулю константой Z_y^{m+1},

то нетрудно получить оценку:

$$|z(\bar{x}, \bar{y}) - L(\bar{x}, \bar{y})| \leq \frac{Z_x^{n+1}}{(n+1)!}|\bar{x} - x_0|...|\bar{x} - x_n| + \frac{Z_y^{m+1}}{(m+1)!}|\bar{y} - y_0|...|\bar{y} - y_{m+1}|$$

(надо для этого заметить, что при любом x выполняется равенство $\sum_{i=0}^{i=n}\pi_i(x) = 1$).

Была рассмотрена двумерная (но можно считать – многомерная) ситуация, в кото-рой точки, где задана функция, расположены в узлах прямоугольной решетки. В общем случае точки, где задана функция, могут, конечно располагаться на плоскости произволь-но. Чтобы свести произвольную ситуацию к уже рассмотренной, достаточно дополнить множество имеющихся точек до множества узлов той или иной решетки и считать, что заданная в исходных точках функция равна нулю во всех «новых» точках решетки; после этого можно строить функцию $L(x,y)$ (или ее более многомерный вариант) и ее значение в точке $(\bar{x},\bar{y})$ принимать за значение данной функции. Безусловно, следует стремиться к тому, чтобы число узлов на конструируемой решетке было как можно меньше.

Лекция 7.2

Обработка экспериментальных данных о функции методом интерполяции по Бернштейну (случаи размерностей 1 и 2).

Предположим, что некоторая функция одной переменной $z=z(x)$ за-дана в точках $x_k=\dfrac{k}{n}$ для $k=0,1,2,\ldots,n$ при некотором фиксированном числе n. Это значит, что отрезок [0,1] разбит на n равных частей и функция $z=z(x)$ задана в точках деления. Положим:

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n} z(\frac{i}{n})C_n^i x^i(1-x)^{n-i}\cdot$$

Здесь C_n^i - биномиальный коэффициент (число сочетаний из n по i). Этот многочлен называется *многочленом Бернштейна* функции $z=z(x)$ степени n.

Можно доказать, что *при* $n\to\infty$ *функция* $B_n(x)$ *стремится к функции* $z=z(x)$ *равномерно по x в отрезке* [0,1]; более того, аналогичное утверж-дение верно в отношении любой производной функции $z=z(x)$: *при* $n\to\infty$ $\dfrac{d^s}{dx^s}(B_n(x))$ *стремится к* $\dfrac{d^s}{dx^x}(z(x))$ *при произвольном* s (если только у функ-ции $z=z(x)$ есть непрерывные производные всех порядков).

Можно также доказать, что на отрезке [0,1] имеет место следующее неравенство:

$$\left|B_n(x)-z(x)\right|\le\frac{L}{2\sqrt{n}},$$

где L - число, ограничивающее первую производную функции $z(x)$ на отрез-ке [0,1] (например, максимум этой производной, учитывая, что производная - непрерывна).

Следовательно, возникает возможность заменять значения функции на значения ее многочлена Бенрнштейна, указывая при этом ошибку замены.

Специфика ситуации, в которой применима описанная конструкция в том, что исходная функция $z(x)$ задана в точках деления на равные части единичного отрезка. Кроме того, приближение функции с заданной точно-стью производится в любой точке отрезка, т.е. равномерно. Нетрудно пере-нести конструкцию с единичного отрезка на отрезок произвольный, который также делится на равные части и в точках деления задается исследуемая функция. А именно:

пусть $z(x)$ задана на отрезке $[a,b]$ в точках

$$x_k = a + \frac{b-a}{n} k, \quad k = 0,1,\dots,n;$$

положим $y_k = \dfrac{x_k - a}{b-a}$; тогда последнее выражение будет меняться по точкам деления на n равных частей единичного отрезка; пусть

$$B_n(y) = \sum_{k=0}^{n} z(a + (b-a)y_k) C_n^k y^k (1-y)^{n-k};$$

заменив в последнем выражении *y* на его выражение через *x*, получим мно-гочлен Бернштейна на произвольном отрезке:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} z(x_k) C_n^k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-k}.$$

Обратимся теперь к случаю двух переменных. Итак, пусть функция $z = z(x,y)$ задана в точках (x_k, y_l) единичного квадрата (n,m - фиксированы, $k = 0,1,2,\dots,n, \quad l = 0,1,2,\dots,m$): $x_k = \dfrac{k}{n}, y_l = \dfrac{l}{m}$. Построим *двумерный многочлен Бернштейна*:

$$B_{n,m}(x,y) = \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\substack{k=n \\ l=m}} z(x_k, y_l) C_n^k C_m^l x^k y^l (1-x)^{n-k} (1-y)^{m-l}.$$

Об этом многочлене можно доказать утверждение, аналогичное одномер-ному случаю:

для любых u, v *при наличии у функции z непрерывных производных соответствующих порядков многочлены*

$$\frac{\partial^{u+v}}{\partial x^u \partial y^v} B_{n,m}$$

при $n,m \to \infty$ *стремятся равномерно относительно x,y к функции* $\frac{\partial^{u+v} z}{\partial x^u \partial y^v}$.

Поэтому при заданной точности возможна замена функции в точке на значение многочлена Бернштейна в этой точке в произвольном месте еди-ничного квадрата. Доказывается, что *если числа* L, M *ограничивают первые частные производные функции z, то для всех точек единичного квадрата справедливо неравенство*:

$$\left| z(x,y) - B_{n,m}(x,y) \right| \le \frac{L}{2\sqrt{n}} + \frac{M}{2\sqrt{m}}.$$

Так же, как и в случе одной переменной, проведенные построения обобщаются на случай не единичного квадрата, а любого прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат.

На практике функция двух переменных редко задается таблицей, точки которой расположены так, как этого требует конструкция Бернштейна; поэтому таблицу, которую требует конструкция Бернштейна, формируют по заданному условию, приближенно заменяя функцию в узлах соответст-вующей решетки на числа, которые строятся тем или иным способом.