

Модели порождения данных

Глава 8

Содержание

§36. Случайные процессы как модели порождения данных

§37. Процессы авторегрессии и скользящего среднего. Стационарность и обратимость.

§38. Корреляционная функция случайного процесса. Восстановление модели по корреляционной функции.

§39. Задача об оптимизации опроса векторного случайного процесса.

Содержание

§40. Методика Вальда проверки гипотезы о свойствах случайной величины.

§41. Задача разладки и её решение по экспериментальным данным.

§42. Проблема статистической идентификации модели случайного процесса и ее решение по методике Вальда.

§43. Проблема идентификации передаточной функции и ее решение по методу Виннера-Хопфа.

§36. Случайные процессы как модели порождения данных

Где используется случайный процесс?

Существует много задач, данные для которых возникают случайно. Например, задача о прогнозировании землетрясений опирается на данные, собираемые специальными датчиками и рассматриваемые современной наукой как случайные числа.

Где используется случайный процесс?

При исследовании случайных данных всегда возникает необходимость в их имитации на уровне уже распознанных закономерностей - тогда исследования можно проводить без дальнейшего сбора информации на уровне датчиков.

В этой связи к настоящему времени сложилось несколько *моделей порождения данных*. Одной из таких моделей является *случайный процесс*.

Что такое случайный процесс?

Случайным процессом называется функция вещественной переменной, значениями которой являются случайные величины.

Если $z(t)$ – случайный процесс, то аргумент t удобно рассматривать как время.

Мы будем предполагать, что для всех рассматриваемых ниже случайных процессов при $t < 0$ обязательно $z(t) = 0$.

Что такое случайный процесс?

Поскольку для каждого t величина $z(t)$ -случайная, постольку для каждого t имеется функция (или плотность) распределения этой случайной величины.

Что такое случайный процесс?

В теории случайных процессов принято особым образом выделять такой случайный процесс $z(t)$, для которого каждая случайная величина является нормально распределенной с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1 (для всех $t \geq 0$); этот случайный процесс называется **белым шумом** и всюду ниже будет обозначаться символом $a(t)$.

По традиции, аргумент случайного процесса записывают в виде индекса, т.е. вместо $z(t)$ пишут z_t , вместо $a(t)$ пишут a_t и т.д.

Что такое линейный случайный процесс?

Условимся, что всюду в дальнейшем время будет меняться дискретно, только по целым числам, т.е. $t=0; \pm 1; \pm 2 \dots$.

Среди случайных процессов особое место занимают процессы линейные, которые определяются так: случайный процесс z_t называется линейным, если имеет место равенство:

$$z_t = a_t + \pi_1 a_{t-1} + \pi_2 a_{t-2} + \dots + \pi_s a_{t-s} + \dots, \quad \parallel$$

где

$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s, \dots$

числовая последовательность, а суммирование в правой части последнего равенства происходит фактически на конечном числе слагаемых

Как описать случайный процесс?

При описании линейных случайных процессов удобно использовать технику формальных степенных рядов по следующей схеме.

Будем обозначать символом B так называемый *оператор сдвига*, т.е. символ, позволяющий формально сделать запись:

$$z_{t-1} = Bz_t$$

Как описать случайный процесс?

Такая запись означает, что $z_{t-2} = BZ_{t-1}$, а вместе эти две записи означают, что $z_{t-2} = BZ_{t-1} = B^2 z_t$.

Продолжая этот формализм, получаем:

$$z_{t-k} = B^k z_t.$$

Как описать случайный процесс?

Поэтому выражение $z_t = a_t + \pi_1 a_{t-1} + \pi_2 a_{t-2} + \dots + \pi_s a_{t-s} + \dots$ переписывается так:

$$z_t = a_t + \pi_1 B a_t + \pi_2 B^2 a_t + \dots + \pi_k B^k a_t + \dots; \parallel$$

последнее выражение можно переписать в виде

$$z_t = \pi(B) a_t,$$

где $\pi(B) = 1 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \dots + \pi_k B^k + \dots$

- формальный степенной ряд.

Как описать случайный процесс?

Учтем, что у этого формального степенного ряда свободный член отличен от нуля, тогда можно найти обратный к нему - такой ряд $\psi(B)$, что $\psi(B)\pi(B) = 1$; при этом $\psi(B)$ будет иметь следующий вид:

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots + \psi_k B^k + \dots,$$

здесь $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \dots$ - числовая последовательность

Как описать случайный процесс?

С помощью последнего формального степенного ряда линейный случайный процесс переписывается в следующем виде:

$$z_t = a_t - \psi_1 z_{t-1} - \psi_2 z_{t-2} - \dots - \psi_k z_{t-k} - \dots$$

ВЫВОД: таким образом, всякий линейный случайный процесс возникает по указанному выше правилу из белого шума и может задаваться через самого себя рекуррентно

Компьютерная имитация линейного случайного процесса

Начнем с имитации белого шума.

Из математики известно, что если взять двенадцать случайных чисел, распределенных равномерно в интервале $(0,1)$ - s_1, \dots, s_{12} - и с их помощью построить число $\sigma = (\sum_{i=1}^{12} s_i) - 6$, то числа σ , многократно повторенные с помощью такой процедуры, будут нормально распределены с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Компьютерная имитация линейного случайного процесса

Отсюда ясно, как осуществить имитацию белого шума: если требуется воспроизвести значения a_0, a_1, \dots, a_n , то нужно построить с помощью датчика случайных чисел, равномерно распределенных в интервале $(0,1)$, наборы $s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,12}$, $i = 0, 1, \dots, n$, а затем положить

$$a_i = \left(\sum_{k=1}^{12} s_{i,k} \right) - 6, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Компьютерная имитация линейного случайного процесса

Замечание. Если бы требовалось имитировать нормально распределенные случайные числа, но не с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, а с произвольно заданными математическим ожиданием m и дисперсией D , то несложное обобщение вышеупомянутой математической теоремы привело бы нас к следующей формуле:

$$a_i = \sqrt{D} \left(\left(\sum_{k=1}^{12} s_{i,k} \right) - 6 \right) + m, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Компьютерная имитация линейного случайного процесса

В случае же произвольного линейного случайного процесса

$$z_t = a_t + \pi_1 a_{t-1} + \pi_2 a_{t-2} + \dots + \pi_s a_{t-s} + \dots$$

алгоритм действий для его имитации следующий:

- 1) фиксируется число n , для которого будут имитироваться числа z_0, z_1, \dots, z_n
- 2) формируется имитация белого шума a_0, a_1, \dots, a_n в соответствии с описанным выше правилом;

Компьютерная имитация линейного случайного процесса

В случае же произвольного линейного случайного процесса

алгоритм действий для его имитации следующий:

3) формируются числа

$$z_0 = a_0;$$

$$z_1 = a_1 + \pi_1 a_0;$$

$$z_2 = a_2 + \pi_1 a_1 + \pi_2 a_0;$$

.....

$$z_n = a_n + \pi_1 a_{n-1} + \pi_2 a_{n-2} + \dots + \pi_n a_0.$$

§37. Процессы авторегрессии и скользящего среднего. Стационарность и обратимость.

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

Напомним, что случайный $z(t)$ процесс называется линейным, если он представляется в виде

$$z_t = a_t + \pi_1 a_{t-1} + \pi_2 a_{t-2} + \dots + \pi_s a_{t-s} + \dots;$$

форма *скользящего среднего*

как отмечалось в предыдущем параграфе, указанное представление имеет эквивалентную форму:

$$z_t = a_t - \psi_1 z_{t-1} - \psi_2 z_{t-2} - \dots - \psi_s z_{t-s} - \dots$$

форма *авторегрессии*

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

Определение. Если хоть одно из представлений линейного случайного процесса является конечным, т.е. равны нулю все коэффициенты π_1, π_2, \dots или все коэффициенты ψ_1, ψ_2, \dots начиная с какого-то номера, то и сам линейный случайный процесс называется ***конечным***.

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

Определение. Если равны нулю все коэффициенты π_q начиная с номера $p+1$ то говорят о *процессе скользящего среднего порядка p* и пишут $CC(p)$; если же равны нулю все коэффициенты ψ_q начиная с номера $p+1$ то говорят о *процессе авторегрессии порядка p* и пишут $AR(p)$.

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

С каждым линейным случайным процессом z_t связано два формальных степенных ряда:

$$\begin{aligned}\pi(B) &= 1 + \pi_1 B + \dots + \pi_s B^s + \dots, \\ \psi(B) &= 1 + \psi_1 B + \dots + \psi_s B^s + \dots,\end{aligned}$$

о которых подробно говорилось в предыдущем параграфе

(главная особенность: их произведение равно 1)

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

Безусловно, эти ряды могут рассматриваться и как простые степенные.

Тогда для каждого из них имеется собственный радиус сходимости и собственный круг сходимости, если воспринимать B как комплексную переменную (если воспринимать B как вещественную переменную, то речь будет идти об интервале сходимости).

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

Определение. Если радиус сходимости ряда $\pi(B)$ больше или равен 1, то линейный случайный процесс называется **стационарным**; если радиус сходимости ряда $\psi(B)$ больше или равен 1, то линейный случайный процесс называется **обратимым**.

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

Таким образом, конечный линейный случайный процесс всегда либо стационарен, либо обратим.

Если он конечен как процесс скользящего среднего, то он обязательно стационарен; если он конечен как процесс авторегрессии, то он обязательно обратим.

Соответствующие степенные ряды в этом случае становятся многочленами, которые, естественно, сходятся всюду.

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

Имеется возможность проверить каждый конечный линейный случайный процесс на наличие у него обратимости и стационарности одновременно.

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

Вот соответствующее описание.

Пусть линейный конечный случайный процесс является процессом $СС(p)$, т.е. имеется процесс

$$z_t = a_t + \pi_1 a_{t-1} + \dots + \pi_p a_{t-p}.$$

Это означает, что

$$z_t = \pi(B) a_t,$$

где $\pi(B) = 1 + \pi_1 B + \dots + \pi_p B^p$

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

$$\pi(B) = 1 + \pi_1 B + \dots + \pi_p B^p$$

многочлен называется **характеристическим многочленом процесса** $CC(p)$.

Уравнение $1 + \pi_1 B + \dots + \pi_p B^p = 0$

также называется **характеристическим** и **характеристическими** называются корни этого уравнения.

Можно доказать, что если все **характеристические корни конечного процесса скользящего среднего по модулю больше единицы**, то этот процесс обратим.

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

Пусть теперь линейный конечный случайный процесс является процессом $AR(p)$, т.е. имеется процесс

$$z_t = a_t - \psi_1 z_{t-1} - \dots - \psi_p z_{t-p}.$$

Это означает, что

$$\psi(B)z_t = a_t,$$

где $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \dots + \psi_p B^p$.

характеристический *многочлен* *процесса*
 $AR(p)$.

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

Уравнение

$$1 + \psi_1 B + \dots + \psi_p B^p = 0$$

также называется *характеристическим* и *характеристическими* называются корни этого уравнения. Можно доказать, что если все характеристические *корни конечного процесса авторегрессии по модулю больше единице, то этот процесс стационарен.*

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

Отсюда возникает алгоритм построения модели конечного линейного случайного процесса, который был бы одновременно и стационарен и обратим:

- 1) нужно задать характеристические корни в виде чисел, больших единицы по модулю;
- 2) с помощью формул Виетта по этим корням следует восстановить уравнение, которые и имеет эти корни;

Процессы авторегрессии и скользящего среднего

Отсюда возникает алгоритм построения модели конечного линейного случайного процесса, который был бы одновременно и стационарен и обратим:

3) построенное уравнение следует привести к виду, при котором свободный член равен единице;

4) по коэффициентам последнего уравнения следует написать модель случайного процесса.

38. Корреляционная функция случайного процесса. Восстановление модели по корреляционной функции.

Корреляционная функция случайного процесса

Определение. *Корреляционной функцией случайного процесса* z_t называется функция $R(t) = R_t$ той же вещественной переменной t , задаваемая равенством:

$$R_t = M[z_s z_{s+t}],$$

где символ M обозначает, как обычно, математическое ожидание.

Корреляционная функция случайного процесса

Формально указанное математическое ожидание произведения двух случайных величин должно зависеть от двух аргументов - s и t ; однако, те значения t , при которых такая реальная зависимость от s есть, исключаются из области определения корреляционной функции.

Корреляционная функция случайного процесса

Сумма R_0 называется *дисперсией* случайного процесса. Она может быть как конечной, так и бесконечной.

В первом случае рассматривают также *нормированную корреляционную функцию* - функцию $\rho_t = R_t/R_0$ для нормированной корреляционной функции всегда $\rho_0 = 1$.

Корреляционная функция случайного процесса

Если $z_t = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k a_{t-k}$, где $\pi_0 = 1$,

то для корреляционной функции имеет место равенство:

$$R_t = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \pi_{k+t}.$$

В этом случае дисперсия

$$R_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k^2.$$

Корреляционная функция случайного процесса

Пусть

$$z_t = a_t + \psi_1 z_{t-1} + \dots + \psi_p z_{t-p}.$$

В этом случае можно доказать, что

$$R_t = \psi_1 R_{t-1} + \psi_2 R_{t-2} + \dots + \psi_p R_{t-p},$$

так что

$$\rho_t = \psi_1 \rho_{t-1} + \psi_2 \rho_{t-2} + \dots + \psi_p \rho_{t-p}.$$

Корреляционная функция случайного процесса

Отсюда нетрудно установить, используя методику решения линейных рекуррентных соотношений с помощью производящих функций,

что если G_1, G_2, \dots, G_p характеристические корни рассматриваемого процесса авторегрессии, т.е. корни уравнения

$$1 + \psi_1 B + \dots + \psi_p B^p = 0$$

Корреляционная функция случайного процесса

То

$$\rho_t = A_1 G_1^{-t} + A_2 G_2^{-t} + \dots + A_p G_p^{-t}$$

при некоторых константах A_1, A_2, \dots, A_p , которые находятся из начальных условий. В частности, для процесса $AP(2)$ имеет место равенство:

$$\rho_t = \frac{G_1(G_2^2 - 1)}{(G_2 - G_1)(1 + G_1 G_2)} G_1^{-t} - \frac{G_2(G_1^2 - 1)}{(G_2 - G_1)(1 + G_1 G_2)} G_2^{-t}.$$

Корреляционная функция случайного процесса

Если имеется конечный процесс скользящего среднего, т.е.

$$z_t = a_t + \pi_1 a_{t-1} + \dots + \pi_p a_{t-p} = \sum_{i=0}^p \pi_i a_{t-i},$$

где $\pi_0 = 1$, то корреляционная функция вычисляется явно и результат таков:

$$R_t = \begin{cases} \pi_0 \pi_t + \pi_1 \pi_{t+1} + \pi_2 \pi_{t+2} + \dots + \pi_{p-t} \pi_p, & t \leq p, \\ 0, & t > p. \end{cases}$$

Корреляционная функция случайного процесса

Отсюда - выражение для нормированной корреляционной функции:

$$\rho_t = \begin{cases} \frac{\pi_0 \pi_t + \pi_1 \pi_{t+1} + \dots + \pi_{p-t} \pi_p}{\pi_0^2 + \pi_1^2 + \dots + \pi_p^2}, & t \leq p, \\ 0, & t > p. \end{cases}$$

Напомним, что $\pi_0 = 1$

§39. Задача об оптимизации опроса векторного случайного процесса.

Векторный случайный процесс

Определение. *Векторный случайный процесс* - это упорядоченный набор нескольких случайных процессов. Количество этих процессов называется *размерностью* векторного случайного процесса.

Векторный случайный процесс

Например,

$$\bar{z} = \{z_t^{(1)}, z_t^{(2)}, \dots, z_t^{(6)}\}$$

- шестимерный случайный процесс.

Случайные процессы $z_t^{(i)}$ называются *координатами* или *компонентами* векторного случайного процесса.

Векторный случайный процесс

В теории информации рассматривается следующая задача. Пусть имеется n -мерный векторный случайный процесс

$$\bar{z} = \left\{ z_t^{(1)}, \dots, z_t^{(n)} \right\};$$

в отношении его компонент известны нормированные корреляционные функции $\rho_i(t)$, а также значение любой одной компоненты $z_t^{(i)}$ в любой момент времени t . Само время меняется дискретно: $t=0,1,2,\dots$

Векторный случайный процесс

Природа экспериментальных данных о компонентах данного векторного случайного процесса, следовательно, такова, что в любой данный момент времени можно «опросить» (т.е. установить значение) только одну, хоть и любую, компоненту, но не все сразу.

Поэтому информацию о значении векторного случайного процесса в конкретный момент времени в этой ситуации можно получить лишь приближенно.

Векторный случайный процесс

Фиксируется некоторая подстановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots & i_n \end{pmatrix};$$

затем компоненты опрашиваются в следующем порядке: компонента $z_t^{(i_k)}$ опрашивается k -ой, здесь $k=1,2,\dots,n$.

Векторный случайный процесс

Если опрос начался в момент времени t , то именно в этот момент, согласно условию, будет опрошена компонента $z_t^{(i_1)}$ затем, в момент времени $t+1$ будет опрошена компонента $z_t^{(i_2)}$, затем - в момент времени $t+2$ будет опрошена компонента $z_t^{(i_3)}$ - и так далее.

Векторный случайный процесс

Возникнет другой набор из случайных чисел, нежели тот, который реально составлял значение вектора $\bar{z} = \{z_t^{(1)}, z_t^{(2)}, \dots, z_t^{(n)}\}$ в момент времени t .

Требуется найти такую подстановку

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

чтобы построенный в соответствии с этой подстановкой опрос давал минимальную ошибку.

Векторный случайный процесс

Решение этой задачи представляет собой создание той или иной методики оценки упомянутой ошибки. Именно такая методика и является методикой обработки соответствующих экспериментальных данных.

Векторный случайный процесс

Согласно методике А.М. Яглома, оптимальной для организации описанного выше опроса является та подстановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

на которой обращается в минимум следующая функция:

$$J(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln(1 - \rho_{i_k}^2(n - k + 1)).$$

Векторный случайный процесс

Замечание. При практической оптимизации опроса векторного случайного процесса функцию $J(\sigma)$ минимизируют прямым перебором всех подстановок σ .

§40. Методика Вальда проверки гипотезы о свойствах случайной величины.

Методика Вальда. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача: имеются экспериментальные данные о некоторой случайной величине ξ .

Методика Вальда. Постановка задачи

Известно аналитическое выражение для плотности распределения этой случайной величины - некоторое выражение $f(x, \theta)$, где x - аргумент, а θ - некоторый параметр, принимающий одно из двух возможных значений $\theta = \theta_1$ или $\theta = \theta_2$, причем $\theta_1 < \theta_2$.

Какое именно из этих двух значений принимает параметр θ - неизвестно.

Именно это и надо определить по значениям случайной величины ξ , которые можно разыгрывать неограниченно много.

Методика Вальда. Постановка задачи

Примером такой плотности может служить плотность нормального распределения:

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}},$$

где, кроме параметра θ , участвует даже еще один параметр - σ .

Описание методики Вальда для решения поставленной задачи

Фиксируем достаточно малые числа α и β , например $\alpha, \beta \in (0;1)$; фиксируем, далее, числа

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad B = \frac{\beta}{1-\alpha};$$

при достаточно малых α, β между числами A, B имеет место неравенство: $B < A$ - именно для этого неравенства должны быть достаточно малы числа α, β .

Описание методики Вальда для решения поставленной задачи

Пусть, далее $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots$ - значения случайной величины ξ , получаемые экспериментально.

Построим суммы:

$$\Lambda_t = \sum_{i=1}^t \ln \frac{f(\xi_i, \theta_2)}{f(\xi_i, \theta_1)}.$$

Основная теорема Вальда:

если $\Lambda_t > \ln A$, то $\theta = \theta_2$ с вероятностью ошибки β ;

если же $\Lambda_t < \ln B$, то $\theta = \theta_1$ с вероятностью ошибки α .

Описание методики Вальда для решения поставленной задачи

Принято рассматривать в описанной ситуации две величины - n и Δ_g , определяемые так:

то минимальное значение t , при котором выполняется одно из неравенств - $\Lambda_t > \ln A$ или $\Lambda_t < \ln B$ - является случайной величиной, зависящей от той или иной реализации случайной величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots$; именно это минимальное значение t и является случайной величиной n ;

Описание методики Вальда для решения поставленной задачи

Принято рассматривать в описанной ситуации две величины - n и Δ_g , определяемые так:

учитывая смысл только что введенного обозначения n , введем величину

$$\Delta g_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{f(\xi_i, \theta_2)}{f(\xi_i, \theta_1)};$$

очевидно, и эта величина - также случайная.

Описание методики Вальда для решения поставленной задачи

Замечание. На практике часто имеют смысл математические ожидания последних двух случайных величин;

их находят как обычные средние арифметические значения реализаций этих величин, конструируемых по различным реализациям $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots$

§41. Задача разладки и её решение по экспериментальным данным.

В чем же состоит задача разладки?

Имеется случайный процесс z_t , в аналитическом выражении модели которого (т.е. в «формуле, которой он записывается») присутствует некий параметр μ .

Предположим, что экспериментальные данные об этом случайном процессе позволили установить значение этого параметра.

В чем же состоит задача разладки?

И, предположим, что появилась серия экспериментальных данных, такая, что параметр μ меняет свое постоянное значение на какое-то другое, а затем снова к своему постоянному значению возвращается.

Факт смены постоянного значения параметра называется *разладкой* случайного процесса.

Задача разладки состоит в определении момента времени, в который разладка наступила.

Конкретная постановка задачи разладки

Пусть случайный процесс z_t задается выражением:

$$z_t = a_t + \Phi_1 z_{t-1} + \Phi_2 z_{t-2} + m(1 - \Phi_1 - \Phi_2),$$

где Φ_1, Φ_2 - известные константы, а параметр m принимает значение M_1 также известное;

Конкретная постановка задачи разладки

пусть, далее, в некоторые моменты времени параметр m меняет значение M_1 на некоторое значение M_2 ($M_2 > M_1$), причем это значение M_2 также известно.

Задача: требуется по набору значений случайного процесса z_t найти момент разладки.

Одна из методик решения этой задачи

Пусть α, β - два положительных числа, достаточно малых для того, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{1-\beta}{\alpha} > \frac{\beta}{1-\alpha};$$

положим

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad B = \frac{\beta}{1-\alpha},$$

так что $A > B$.

Конкретная постановка задачи разладки

Пусть, далее,

$$w(z_i, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z_i - \Phi_1 z_{i-1} - \Phi_2 z_{i-2} - m(1 - \Phi_1 - \Phi_2))^2}{2}\right) -$$

значения функции $w(z; m)$ на
экспериментальных данных о случайном
процессе $z_0, z_1, \dots, z_i, \dots$

Конкретная постановка задачи разладки

Можно проверить, что

$$\ln \frac{w(z_i, M_2)}{w(z_i, M_1)} = \\ = (M_2 - M_1)(1 - \Phi_1 - \Phi_2) \left(z_i - \Phi_1 z_{i-1} - \Phi_2 z_{i-2} - \frac{M_1 + M_2}{2} (1 - \Phi_1 - \Phi_2) \right).$$

Построим числа

$$x_t = \ln \frac{w(z_t, M_2)}{w(z_t, M_1)},$$

а по ним - рекуррентную последовательность

$$\Omega_1 = x_1, \quad \Omega_t = \max\{0, \Omega_{t-1} + x_t\}$$

Конкретная постановка задачи разладки

Можно доказать, что как только $\Omega_t > \ln A$, возникает разладка и это верно с вероятностью ошибки α .

Если же в действительности разладки нет, а неравенство, указанное только что выше, выполняется, то говорят, что имеет место **ложная тревога**.

Описанная ситуация с процессом

$$z_t = a_t + \Phi_1 z_{t-1} + \Phi_2 z_{t-2} + m(1 - \Phi_1 - \Phi_2),$$

это просто пример!!!!!!!!!!

Другая задача разладки

Разладка же, как характеристика случайного процесса, может рассматриваться и в другом случае.

Пусть процесс z_t как функция, значениями которой являются случайные величины, при каждом t является случайной величиной с одной и той же плотностью распределения $f(x; m)$, где x - аргумент, а параметр m принимает одно из двух значений m_1 или m_2 ($m_1 < m_2$).

Другая задача разладки

Разладка такого процесса – это эпизодическая смена значения параметра m ; в какой-то момент m_1 меняется на m_2 , а в следующий момент m_2 снова заменяется на m_1 , после чего параметр m остается неизменным некоторое время.

Важно, что параметр после момента разладки сразу возвращается к своему исходному значению.

Другая задача разладки

Методика определения момента разладка, описанная выше, применима и здесь.

Схема следующая: строятся числа

$$x_t = \ln \frac{w(z_t, M_2)}{w(z_t, M_1)},$$

где

$$w(z_t, m) = f(z_t, m);$$

Другая задача разладки

по ним строятся числа

$$\Omega_1 = x_1, \quad \Omega_t = \max\{0, \Omega_{t-1} + x_t\}$$

до тех пор, пока не окажется выполненным неравенство $\Omega_t > \ln A$.

Оно и означает, что *возникает разладка и это верно с вероятностью ошибки α .*

Другая задача разладки

Очевидно, что к описанной методике в неизменном виде применимо понятие ложной тревоги. Очевидно так же, что методика может пропускать моменты разладки (ответ-то ведь она предусматривает вероятностный).

§42. Проблема статистической идентификации модели случайного процесса и ее решение по методике Вальда.

Статистическая идентификация модели случайного процесса

Предположим, что в аналитической записи модели некоторого случайного процесса z_t присутствует некоторый параметр M , о котором известно, что он может принимать только одно из двух значений: $M_2 > M_1$.

Статистическая идентификация модели случайного процесса

Имеется неограниченная возможность создавать экспериментально значения данного случайного процесса, причем известно, что при каждой конкретной реализации процесса параметр M принимает только одно из двух своих значений. Требуется выяснить, какое именно из значений параметр M принял.

Статистическая идентификация модели случайного процесса

Рассмотрим конкретный случай описанной задачи: процесс

$$z_t = a_t + \Phi_1 z_{t-1} + \Phi_2 z_{t-2} + m(1 - \Phi_1 - \Phi_2),$$

где a_t - белый шум, Φ_1, Φ_2 , m - константы, причем либо $m = M_1$, либо $m = M_2$ и $M_2 > M_1$.

Имеется неограниченная возможность получать экспериментально значения $z_0, z_1, \dots, z_i, \dots$

Методика Вальда отыскания истинного значения параметра m

Фиксируем два достаточно малых положительных числа - α, β ; по ним строим два других числа:

$$A = \frac{1 - \beta}{\alpha} \text{ и } B = \frac{\beta}{1 - \alpha},$$

причем α, β должны быть малы настолько, чтобы выполнилось неравенство: $B < A$.

Например, при $\alpha, \beta \in (0; 0,1)$ это неравенство выполнено наверняка.

Методика Вальда отыскания истинного значения параметра m

Положим, далее,

$$w(z_i, M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z_i - \Phi_1 z_{i-1} - \Phi_2 z_{i-2} - M(1 - \Phi_1 - \Phi_2))^2}{2}\right);$$

можно проверить, что

$$\ln \frac{w(z_i, M_2)}{w(z_i, M_1)} = (M_2 - M_1)(1 - \Phi_1 - \Phi_2) \left(z_i - \Phi_1 - \Phi_2 - \frac{M_1 + M_2}{2} (1 - \Phi_1 - \Phi_2) \right).$$

Методика Вальда отыскания истинного значения параметра m

Построим, далее, *кумулятивные суммы*:

$$\Lambda_t = \sum_{i=1}^t \ln \frac{w(z_i, M_2)}{w(z_i, M_1)}.$$

Можно доказать следующее принципиальное положение:

если при некотором $t=n$ возникает неравенство $\Lambda_t > \ln A$, то $m = M_2$ с вероятностью ошибки β ; если возникает неравенство $\Lambda_t < \ln B$, то $m = M_1$ с вероятностью ошибки α .

Методика Вальда отыскания истинного значения параметра m

В описанной ситуации возникают, очевидно, две случайные величины - число n и число

$$\Delta g_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{w(z_i, M_2)}{w(z_i, M_1)}.$$

При многократных повторных вычислениях величин n , Δg_n возникает возможность вычислить их математические ожидания экспериментально.

Методика Вальда отыскания истинного значения параметра m

Замечание.

Напомним, что белый шум a_t - это случайный процесс, который в каждый момент времени принимает в качестве своего значения

нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Методика Вальда отыскания истинного значения параметра m

Однако, в ряде построений оказывается полезным рассматривать случайную величину a_t как нормально распределенную с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ .

Методика Вальда отыскания истинного значения параметра m

В этом случае задача о случайном процессе

$$z_t = a_t + \Phi_1 z_{t-1} + \Phi_2 z_{t-2} + m(1 - \Phi_1 - \Phi_2),$$

решается по методике Вальда дословно так же с той лишь разницей, что функция

$$w(z_i, M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z_i - \Phi_1 z_{i-1} - \Phi_2 z_{i-2} - M(1 - \Phi_1 - \Phi_2))^2}{2}\right),$$

Методика Вальда отыскания истинного значения параметра m

введенная выше, заменится на функцию

$$w(z_i, M) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z_i - \Phi_1 z_{i-1} - \Phi_2 z_{i-2} - M(1 - \Phi_1 - \Phi_2))^2}{2\sigma}\right),$$

в результате чего выражение

$$\ln \frac{w(z_i, M_2)}{w(z_i, M_1)} = (M_2 - M_1)(1 - \Phi_1 - \Phi_2) \left(z_i - \Phi_1 - \Phi_2 - \frac{M_1 + M_2}{2}(1 - \Phi_1 - \Phi_2) \right)$$

примет вид:

$$\ln \frac{w(z_i, M_2)}{w(z_i, M_1)} = \frac{(M_2 - M_1)(1 - \Phi_1 - \Phi_2)}{\sigma} \left(z_i - \Phi_1 - \Phi_2 - \frac{M_1 + M_2}{2}(1 - \Phi_1 - \Phi_2) \right).$$

§43. Проблема идентификации передаточной функции и ее решение по методу Виннера-Хопфа.

Проблема идентификации передаточной функции

Пусть x_t - некоторый случайный процесс, значения которого можно неограниченно воспроизводить генератором.

Пусть, далее, имеется преобразователь значений случайного процесса x_t , который из каждого значения x_t создает некоторое новое значение y_t .

Проблема идентификации передаточной функции

Наконец, предположим, что известно принципиальное строение зависимости y_t от x_t :

$$y_t = \Phi(B)x_t, \quad \text{где } \Phi(B) = \frac{\omega_0 + \omega_1 B + \dots + \omega_s B^s}{1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r} B^b,$$

причем в последнем выражении числа b, s, r известны, а числа $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_s, \delta_1, \dots, \delta_r$ - неизвестны; символ B как обычно, обозначает оператор сдвига.

Проблема идентификации передаточной функции

Задача состоит в том, чтобы эти числа $w_0, w_1, \dots, w_s, \delta_1, \dots, \delta_r$ найти по значениям x_t и y_t .

Выражение $\Phi(B)$ называется **передаточной функцией**.

Для начала запишем явно y_t через x_t :

$$y_t = \delta_1 y_{t-1} + \dots + \delta_r y_{t-r} + \omega_0 x_{t-b} + \dots + \omega_s x_{t-b-s}.$$

Проблема идентификации передаточной функции

Для решения задачи введем новый объект - **импульсную переходную функцию** - функцию целого неотрицательного аргумента $v(k) = v_k$, $k = 0; 1; 2; \dots$

$$v_j = 0, 0 \leq j < b;$$

$$v_j = \omega_0, j = b;$$

$$v_j = \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} - \omega_{j-b}, j = b + 1, \dots, b + s;$$

$$v_j = \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r}, j > b + s.$$

Проблема идентификации передаточной функции

Импульсная переходная функция называется **устойчивой**, если $v_j, j \rightarrow \infty$.

Можно доказать, что устойчивость импульсной переходной функции имеет место, если все корни уравнения $1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r = 0$ по модулю больше единицы.

Это уравнение называется **характеристическим уравнением** импульсной переходной функции, а его корни - **характеристическими корнями** импульсной переходной функции.

Проблема идентификации передаточной функции

Итак, если есть много значений импульсной переходной функции, можно идентифицировать передаточную функцию - найти коэффициенты w_i, δ_j .

Для нахождения коэффициентов достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений, в которые превращаются приведенные выше равенства в определении импульсной переходной функции.

Теорема Виннера-Хопфа

Существует методика построения импульсной переходной функции по значениям x_t , y_t основанная на *теореме Виннера-Хопфа*.

Опишем эту методику и, по ходу, сформулируем теорему Виннера-Хопфа.

Теорема Виннера-Хопфа

Пусть N - произвольное достаточно большое натуральное число и K - другое натуральное число, удовлетворяющее условию $N > 2K$. Положим для $k = 0; 1; 2; \dots; K$:

$$R_{xx}(k) = \frac{1}{N-K} \sum_{i=k+1}^{N-K} x_i x_{i-k},$$
$$R_{xy}(k) = \frac{1}{N-K} \sum_{i=k+1}^{N-K} x_i y_{i-k}.$$

Теорема Виннера-Хопфа

Построим квадратную матрицу размером $(K+1) \times (K+1)$:

$$R_{xx} = \begin{pmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & R_{xx}(2) & \dots & R_{xx}(K) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & R_{xx}(1) & \dots & R_{xx}(K-1) \\ R_{xx}(2) & R_{xx}(1) & R_{xx}(0) & \dots & R_{xx}(K-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{xx}(K) & R_{xx}(K-1) & R_{xx}(K-2) & \dots & R_{xx}(0) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что она - симметрична и что вдоль линий, параллельных главной диагонали, стоит одно и то же число.

Теорема Виннера-Хопфа

Затем построим матрицу-столбец из $(K+1)$ строк:

$$R_{xy} = \begin{pmatrix} R_{xy}(0) \\ R_{xy}(1) \\ R_{xy}(2) \\ \dots \\ R_{xy}(K) \end{pmatrix}.$$

Теорема Виннера-Хопфа

С помощью введенных матриц построим систему линейных алгебраических линейных уравнений относительно неизвестных:

$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_K \end{pmatrix}.$$

А именно, положим (в матричной записи):

$$R_{xx}U = R_{xy}.$$

Это система Виннера-Хопфа

Теорема Виннера-Хопфа

Упомянутая выше теорема Виннера-Хопфа утверждает, что при $k, K, N \rightarrow \infty$ разность $v_k - u_k$ стремится к нулю.

Это означает, что по значениям x_t, y_t можно построить последовательность u_0, \dots, u_k, \dots заменить на нее значения импульсной переходной функции v_0, \dots, v_k, \dots и восстановить передаточную функцию.

Методика Виннера-Хопфа

При реальной организации вычислений следует

 задать точность, с которой надо найти коэффициенты передаточной функции,

 фиксировать произвольно K ,

 провести вычисления, затем увеличить K

 и провести вычисления заново, затем вновь увеличить K

 и вновь вычислить коэффициенты и так далее, пока два раза подряд не получатся одинаковые с заданной точностью ответы.



Спасибо за внимание!