Monotonias $A \diamond B = (A\cap B)\cup(A^c\cap c)$

- $(O \equiv \gamma)\wedge(\Gamma\Rightarrow\Delta)\rightarrow((O\wedge\Gamma)\equiv(\Psi\wedge\Delta))$
- $(O\rightarrow\lambda)\wedge(\Gamma\Rightarrow\Delta)\rightarrow(O\wedge\Gamma)\not\Rightarrow(\gamma\wedge O)$

7.1 Anidamientos

a) $(\forall x:t; y:s \mid : P) \equiv (\forall x:t \mid : (\forall y:s \mid : P))$

b) $(\exists x:t; y:s \mid : P) \equiv (\exists x:t \mid : (\exists y:s \mid : P))$

7.2 Axioma de trueque $\forall$

$(\forall x \mid R : P) \equiv (\forall x \mid : R \Rightarrow P)$

7.4 Axioma de trueque $\exists$

$(\exists x \mid R : P) \equiv (\exists x \mid : R \wedge P)$

7.8 (Monotonia de $\forall$ sobre $\equiv$)

$(\forall x \mid : P \equiv Q) \Rightarrow ((\forall x \mid : P) \equiv (\forall x \mid : Q))$

7.9 (Monotonia de $\forall$ sobre $\Rightarrow$)

$(\forall x \mid : P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((\forall x \mid : P) \Rightarrow (\forall x \mid : Q))$

7.10 ($\vee$ Distribuye sobre $\forall$)

$P \vee (\forall x \mid : Q) \equiv (\forall x \mid : P \vee Q)$ si x no aparece libre en P

7.11 ($\wedge$ Distribuye sobre $\forall$)

$P \wedge (\forall x \mid : Q) \equiv (\forall x \mid : P \wedge Q)$ si x no aparece libre en P

7.12 (universal implica particular)

$(\forall x \mid : P) \Rightarrow (\exists x \mid : P)$

7.15 Conjuntividad

$(\forall x \mid R : P \wedge Q) \equiv (\forall x \mid R : P) \wedge (\forall x \mid R : Q)$

7.16 Termino constante $(\forall x \mid R : P) \equiv P$

si R es no vacío y x no aparece libre en P.

7.13 Trueque

b) $(\forall x \mid R : P) \equiv (\forall x \mid : R \wedge P \equiv R)$

7.14 Trueque

c) $(\forall x \mid Q \wedge R : P) \equiv (\forall x \mid Q : R \wedge P \equiv R)$

7.20 ($\wedge$ distribuye sobre $\forall$) si R es no vacío y x no aparece libre en Q

$Q \wedge (\forall x \mid R : P) \equiv (\forall x \mid R : Q \wedge P)$

7.21 (Distributividad del antecedente)

$P \Rightarrow (\forall x \mid R : Q) \equiv (\forall x \mid R : P \Rightarrow Q)$ si x no aparece libre en P

7.22 Seudodistributividad del consecuente

$(\forall x \mid R : Q) \Rightarrow P \equiv (\exists x \mid R : Q \Rightarrow P)$ si R no es vacío y x no aparece libre en P

7.24 Regla de un punto

$(\forall x \mid x = E : P) \equiv P[x := E]$

Si E y x son del mismo tipo, x no aparece libre en E y E es libre para reemplazar x en P.

7.25 Ruptura de rango

$(\forall x \mid R \vee Q : P) \equiv (\forall x \mid R : P) \wedge (\forall x \mid Q : P)$

7.29 Intercambio de indices sobre $\forall$

$(\forall x \mid : (\forall y \mid : P)) \equiv (\forall y \mid : (\forall x \mid : P))$

7.30 (Intercambio relativizada en $\forall$

$(\forall x \mid R : (\forall y \mid Q : P)) \equiv (\forall y \mid Q : (\forall x \mid R : P))$

siempre que y no aparezca libre en R, ni x en Q.

7.37 Termino constante en $\exists$

$(\exists x \mid R : P) \equiv P$ si R es no vacío y x no aparece libre en P

7.38 Generalización existencial.

$P[x := E] \Rightarrow (\exists x \mid : P)$

7.44 Distributividad del antecedente

$P \Rightarrow (\exists x \mid R : Q) \equiv (\exists x \mid R : P \Rightarrow Q)$

Si R es no vacío y x no aparece libre en P

7.45 (contradistributividad del consecuente

$(\exists x \mid R : Q) \Rightarrow P \equiv (\forall x \mid R : Q \Rightarrow Q)$

si x no aparece libre en P

7.47. Regla de un punto

$(\exists x \mid x = E : P) \equiv P[x := E]$

Si E y x son del mismo tipo, x no aparece libre en E y E es libre para remplazar x en P

7.49 Renombramiento de indices en $\exists$

$(\exists x \mid R : P) \equiv (\exists y \mid R[x := y] : P[x := y])$

siempre que y no aparezca libre ni en P ni en R

7.53 Teorema de intercambio de $\exists$ y $\forall$)

$(\exists x \mid : (\forall y \mid : P)) \Rightarrow (\forall y \mid : (\exists x \mid : P))$

12.1 Axioma de pertenencia

$F \in \{x:T \mid R : E\} \equiv (\exists x:T \mid R : F = E)$ siempre y cuando "x no aparezca libre en F"

12.2 Axioma de extensionalidad

$A = B \equiv (\forall x:T \mid : x \in A \equiv x \in B)$

12.4 Axiomas del dominio del discurso

- Conjunto universal

$\mathcal{U} = \{x \mid true : x\}$

12.5 Conjunto vacío

$\emptyset = \{x \mid false : x\}$

12.8 $A = \emptyset \equiv (\forall x \mid : x \notin A)$

12.9 $A \neq \emptyset \equiv (\exists x \mid : x \in A)$

12.16 Idempotencia de $\cup$ en $\cap$

a) $A \cup A = A$

b) $A \cap A = A$

12.17 Leyes de absorción

a) $(A \cup B) \cap A = A$

b) $(A \cap B) \cup A = A$

12.19 Inclusión y unión

$A \subseteq B \equiv A \cup B = B$

12.21 $A \cap A^c = \emptyset$

12.22 $A \cup A^c = \mathcal{U}$

12.23 inclusión mutua

$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \equiv A = B$

12.24 unión e intersección

$A \cup B = B \equiv A \cap B = A$

12.30 Cotas mínimas y máx

a) $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \equiv C \subseteq A \cap B$

b) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \equiv A \cup B \subseteq C$

12.31 Monotonias simples

a) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$

b) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$

12.33 Modulo y anulador de $\cup$

a) $A \cup \emptyset = A$

b) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

12.34 Modulo y anulador de $\cap$

a) $A \cap \mathcal{U} = A$

b) $A \cap \emptyset = \emptyset$

12.36 $A \subseteq B \equiv B^c \subseteq A^c$

12.37 $A \subseteq \emptyset \equiv A = \emptyset$

12.39 Irreflexividad de $\subset$

$\neg(A \subset A)$

12.40 Asimetría de $\subset$

$A \subset B \Rightarrow \neg(B \subset A)$

12.42 $A \cap B = \emptyset \equiv A \subseteq B^c$

12.43 $A \cup B = \mathcal{U} \equiv A^c \subseteq B$

12.48 Universalidad

- $A \diamond \mathcal{U} = A$

12.49 $A \diamond \emptyset = A^c$

12.50 Conexión

$A \diamond B = \mathcal{U} \equiv A = B$

12.52 Complemento de $\diamond$

$(A \diamond B)^c = A^c \diamond B$

12.54 ($\cup$ distribuye sobre $\diamond$)

$A \cup (B \diamond D) = (A \cup B) \diamond (A \cup D$

12.55 Igualdad dorada

$A \cap B = A \cup B \diamond A \diamond B$

12.57 $A \diamond A = \mathcal{U}$

12.58 $A \diamond A^c = \emptyset$

12.59 $A \diamond B^c = A^c \diamond B$

12.60 $A \diamond B = (A^c \cup B) \cap (B^c \cup A)$

12.61 $A \cap (B \diamond C) = A \cap B \diamond A \cap C$

12.62 $A \cup B \diamond A \cup B^c = A$

12.64 Distribución sobre $\cap$

a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C$

12.65 Anulador

$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

12.67 Distribuidor sobre $-$

$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

12.68 Distribuidor sobre $\cup$

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

12.69 $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D$

12.70 $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup$

12.71 Monotonia

$A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$

Relaciones

- $(\forall a,b \mid : a R^T b \equiv b R a)$
- $(\forall a,b \mid : a \overline{R} b \equiv \neg(a R b))$
- $(\forall a,b \mid : a R\cup S b \equiv a R b \vee a S b)$
- $R \subseteq S \equiv (\forall a,b \mid : a R b \rightarrow a S b)$
- $R = S \equiv (\forall a,b \mid : a R b \equiv a S b)$
- $a I b \equiv a = b$
- $R \circ S \equiv (\forall a,b \mid : (\exists c \mid : a R c \wedge c S b))$
- mínimo b es un elemento sii $(\forall x \mid x \in B : b \sqsubseteq x)$
- minimal $\neg(\exists x \mid x \in B : x \sqsubseteq b \wedge x \neq b)$
- máximo $(\forall x \mid x \in B : x \sqsubseteq b)$
- maximal $\neg(\exists x \mid x \in B : b \sqsubseteq x \wedge x \neq b)$
- $A \in \mathcal{P}(B) \equiv A \subseteq B$
- $a \in A - B \equiv a \in A \wedge a \notin B$

Asocia

- $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$

Tras

- $(R \circ S)^T = S^T \circ R^T$
- "R es total" $(\forall a \mid : (\exists b \mid : a R b))$

Axiomas de dominio de integridad

15.1 $a+(b+c)=(a+b)+c$

15.2 $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

15.3 $a+b=b+a$

15.4 $a\cdot b=b\cdot a$

15.5 $a+0=a$

15.6 $a\cdot 1=a$

15.7 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

15.8 $a+(-a)=0$

15.9 $c\neq 0\rightarrow(a\cdot c=b\cdot c\rightarrow a=b)$

15.10 $a=b\rightarrow a\cdot c=b\cdot c$

15.11 $a\cdot 0=0$

15.16 $a+c=b+c\equiv a=b$

15.17 $a+b=0\equiv a=-b$

15.19 $-(-a)=a$

15.21 $-(a+b)=(-a)+(-b)$

15.22 $-a=(-1)\cdot a$

15.24 $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

15.25 $a-0=a$

Axioma sustracción

$a-b=a+(-b)$

Dominios ordenados Axiomas

$a\leq b\rightarrow -b\leq -a$

15.30 $\neg(a<a)$

15.31 $a<b\wedge b<c\rightarrow a<c$

15.32 $a\neq b\rightarrow a<b\vee b<a$

15.33 $a<b\rightarrow a+c<b+c$

15.34 $a<b\wedge 0<c\rightarrow a\cdot c<b\cdot c$

15.35 $a<b\wedge c<d\rightarrow a+c<b+d$

15.36 $a\leq b\wedge b<c\rightarrow a<c$

15.37 $a<b\wedge b\leq c\rightarrow a<c$

15.38 $a\leq b\wedge b\leq c\rightarrow a\leq c$

15.40 $0\leq c\wedge a\leq b\rightarrow a\cdot c\leq b\cdot c$

15.42 $a+c<b+c\equiv a<b$ y con el $\leq$ se cumple

15.43 $a\leq b\wedge b\leq a\equiv a=b$

15.45 $a\leq b\equiv(\forall z\,|\!:z\leq a\rightarrow z\leq b)$

15.46 $a\leq b\equiv(\forall z\,|\!:b\leq z\rightarrow a\leq z)$

15.47 $a=b\equiv(\forall z\,|\!:z\leq a\equiv z\leq b)$

15.48 $a=b\equiv(\forall z\,|\!:b\leq z\equiv a\leq z)$

Axiomas $\uparrow\wedge\downarrow$ $\cdot\, x<y\equiv\neg(y\leq x)$.

$(\forall z\,|\!:z\leq a\downarrow b\equiv z\leq a\wedge z\leq b)$

$(\forall z\,|\!:a\uparrow b\leq z\equiv a\leq z\wedge b\leq z)$

simetría $\uparrow\downarrow$, asociatividad $\uparrow\downarrow$

15.55 $a\downarrow a=a$

15.56 $a\uparrow a=a$

15.57 $a\leq b\equiv a\downarrow b=a$

15.58 $a\leq b\equiv a\uparrow b=b$

15.59 $a\downarrow b\leq a\wedge a\downarrow b\leq b$

15.60 $a\leq a\uparrow b\wedge b\leq a\uparrow b$

15.61 $a\downarrow(a\uparrow b)=a$

15.62 $a\uparrow(a\downarrow b)=a$

15.63 $a\downarrow b=a\vee a\downarrow b=b$

15.64 $a\uparrow b=a\vee a\uparrow b=b$

15.65 $a\downarrow b\leq c\equiv a\leq c\vee b\leq c$

15.66 $c\leq a\uparrow b\equiv c\leq a\vee c\leq b$

15.69 $a\downarrow b\leq a\uparrow b$

15.70 $a\leq b\rightarrow a\downarrow c\leq b\downarrow c$

15.71 $a\leq b\rightarrow a\uparrow c\leq b\uparrow c$

15.72 $-(a\downarrow b)=-a\uparrow -b$

15.73 $-(a\uparrow b)=-a\downarrow -b$

15.74 Dist $\uparrow$ sobre $\downarrow$

15.75 dist $\downarrow$ sobre $\uparrow$

15.76 $c+(a\downarrow b)=c+a\downarrow c+b$

15.77 $c+(a\uparrow b)=c+a\uparrow b+c$

15.78 $0\leq c\rightarrow c\cdot a\downarrow b=c\cdot a\downarrow c\cdot b$

15.79 $0\leq c\rightarrow c\cdot a\uparrow b=c\cdot a\uparrow c\cdot b$

15.80 $c\leq 0\rightarrow c\cdot(a\downarrow b)=c\cdot a\uparrow c\cdot b$

15.81 $c\leq 0\rightarrow c\cdot(a\uparrow b)=c\cdot a\downarrow c\cdot b$

- $a\leq b\rightarrow a\downarrow c\leq b\uparrow c$
- $a\uparrow b=a\equiv a\downarrow b=b$

Axiomas piso y techo

$(\forall z\,|\!:z\leq\lfloor x\rfloor\equiv z\leq x)$

$(\forall z\,|\!:\lceil x\rceil\leq z\equiv x\leq z)$

15.93 $\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$

15.94 $\lceil x\rceil-1<x\leq\lceil x\rceil$

15.95 $\lfloor k\rfloor=k=\lceil k\rceil$

15.96 $-\lfloor -x\rfloor=\lceil x\rceil$

15.97 $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$

$\lfloor x\rfloor=-\lceil -x\rceil$

Valor absoluto

$|a|=a\uparrow -a$; $|a-b|=(a\uparrow b)-(a\downarrow b)$

15.98 $|a|=|-a|$

15.99 $|a+b|\leq|a|+|b|$

15.100 $||a||\leq|a|$

15.101 $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

15.102 $|a|\leq b\equiv -b\leq a\leq b$

15.103 $0\leq a\equiv|a|=a$

15.104 $a\leq 0\equiv|a|=-a$

- $a\geq 0\rightarrow a\uparrow 0=a$
- $a\leq 0\rightarrow a\uparrow 0=0$
- $a=b\wedge c=d\rightarrow a\cdot c=b\cdot d$
- $0\leq|a|$

Divisibilidad

$a\,|\,b\equiv(\exists z\,|\!:a\cdot z=b)$

- $z\cdot z'=1\rightarrow(z=1\wedge z'=1)\vee(z=-1\wedge z'=-1)$
- $z\,|\,1\equiv z=1\vee z=-1$
- $1\,|\,a$
- $a\,|\,b\equiv a\,|\,|b|$
- $a\,|\,b=|a|\,|\,b$
- $a\,|\,b\equiv(\forall z\,|\!:z\,|\,a\rightarrow z\,|\,b)$
- $a\,|\,b\equiv(\forall z\,|\!:b\,|\,z\rightarrow a\,|\,z)$

16.2 $a\,|\,b\wedge b\,|\,c\rightarrow a\,|\,c$

16.3 $a\,|\,b\wedge b\,|\,a\rightarrow a=b\vee a=-b$

16.4 $a\,|\,b\rightarrow a\,|\,b\cdot c$

16.5 $a\,|\,0$; 6 $1\,|\,a$; 7 $0\,|\,a\rightarrow a=0$

16.8 $a\,|\,1\rightarrow a=1\vee a=-1$

16.9 $1<a\wedge a\,|\,b\rightarrow\neg(a\,|\,b+1)$

16.10 $a\,|\,b\rightarrow a\cdot c\,|\,b\cdot d$

16.11 $a\,|\,b\wedge c\,|\,d\rightarrow a\cdot c\,|\,b\cdot d$

16.12 $a\,|\,b=a\,|-b=-a\,|\,b$

16.14 $a\,|\,b\wedge a\,|\,c\rightarrow a\,|\,b+c$

16.17 $a=b\equiv(\forall z\,|\!:z\,|\,a\equiv z\,|\,b)$

16.18 $a=b\equiv(\forall z\,|\!:a\,|\,z\equiv b\,|\,z)$

Axioma máximo divisor común

$(\forall z\,|\!:z\,|\,m\Downarrow n\equiv z\,|\,m\wedge z\,|\,n)$

mínimo múltiplo común

$(\forall z\,|\!:m\Uparrow n\,|\,z\equiv m\,|\,z\wedge n\,|\,z)$

simetría, asociatividad

① $a\Downarrow a=|a|$ ② $a\Uparrow a=|a|$

16.24
① $a\Downarrow(b\Uparrow a)=|a|$
② $a\Uparrow(b\Downarrow a)=|a|$

16.25
① $a\Downarrow b\,|\,a\wedge a\Downarrow b\,|\,b$
② $a\,|\,b\Uparrow a\wedge b\,|\,b\Uparrow a$

16.26
① $a\,|\,b\equiv a\Downarrow b=|a|$
② $a\,|\,b\equiv a\Uparrow b=|b|$

16.27
① $1\Downarrow a=1$
② $0\Uparrow a=0$

16.28
① $0\Downarrow a=|a|$
② $1\Uparrow a=|a|$

16.30
① $a\,|\,b\rightarrow a\Downarrow c\,|\,b\Downarrow c$
② $a\,|\,b\rightarrow a\Uparrow c\,|\,b\Uparrow c$

16.32
① $a\Downarrow -a=|a|$
② $a\Uparrow -a=|a|$

16.33
① $a\Downarrow b=|a|\Downarrow|b|$
② $a\Uparrow b=|a|\Uparrow|b|$

16.36
① $c\Downarrow(a\Uparrow b)=(c\Downarrow a)\Uparrow(c\Downarrow b)$
② $c\Uparrow(a\Downarrow b)=(c\Uparrow a)\Downarrow(c\Uparrow b)$

$a<b\wedge b=c\rightarrow a<c$