introducción de conjunción

$$\frac{A \quad B}{A \land B}$$

Axiomas

1) $(\phi \equiv (\psi \equiv \tau)) \equiv ((\phi \equiv \psi) \equiv \tau)$
2) $(\phi \equiv \psi) \equiv (\psi \equiv \phi)$
3) $(\phi \equiv true) \equiv \phi$
4) $(\phi \lor (\psi \lor \tau)) \equiv ((\phi \lor \psi) \lor \tau)$
5) $(\phi \lor \psi) \equiv (\psi \lor \phi)$
6) $(\phi \lor false) \equiv \phi$
7) $(\phi \lor \phi) \equiv \phi$
8) $(\phi \lor (\psi \equiv \tau)) \equiv ((\phi \lor \psi) \equiv (\phi \lor \tau))$
9) $(\neg \phi) \equiv (\phi \equiv false)$
10) $(\phi \not\equiv \psi) \equiv ((\neg \phi) \equiv \psi)$
11) $(\phi \land \psi) \equiv (\phi \equiv (\psi \equiv (\phi \lor \psi)))$
12) $(\phi \rightarrow \psi) \equiv ((\phi \lor \psi) \equiv \psi)$
13) $(\phi \leftarrow \psi) \equiv (\psi \rightarrow \phi)$

- Ecuanimidad $\dfrac{\psi \quad (\psi \equiv \phi)}{\phi}$
- Leibniz $\dfrac{(\psi \equiv \tau)}{(\phi[p:=\psi] \equiv \phi[p:=\tau])}$
- Transitividad $\dfrac{(\phi \equiv \psi) \quad (\psi \equiv \tau)}{(\phi \equiv \tau)}$
- Identidad $\dfrac{\phi}{(\phi \equiv true)}$
- Asociatividad $\dfrac{((\phi \equiv \psi) \equiv \tau)}{(\phi \equiv (\psi \equiv \tau))}$
- Silogismo Disyuntivo $\dfrac{(\phi \lor \psi) \quad (\neg \phi)}{\psi}$
- Debilitamiento $\dfrac{\phi}{(\phi \lor \psi)}$
- Modus Tolens $\dfrac{(\phi \rightarrow \psi) \quad (\neg \psi)}{(\neg \phi)}$
- Ecuanimidad* $\dfrac{\psi \quad (\phi \equiv \psi)}{\phi}$
- Leibniz* $\dfrac{\tau \equiv \psi}{(\phi[p:=\psi] \equiv \phi[p:=\tau])}$
- Identidad $\dfrac{(\phi \equiv true)}{\phi}$
- Conmutatividad $\dfrac{(\phi \equiv \psi)}{(\psi \equiv \phi)}$
- Corte $\dfrac{(\phi \lor \psi) \quad (\neg \phi \lor \tau)}{(\psi \lor \tau)}$
- Modus P.P. $\dfrac{(\phi \rightarrow \psi) \quad \phi}{\psi}$
- Modus T.T. $\dfrac{(\phi \rightarrow \psi) \quad (\neg \psi)}{(\neg \phi)}$
- Simplificación $\dfrac{(\phi \land \psi)}{\phi \quad \psi}$
- Modus Ponens $\dfrac{\phi \quad (\phi \rightarrow \psi)}{\psi}$

Teoremas: Tos

4,6
1) True
2) $(\phi \equiv \phi) \equiv true$
3) $(\phi \equiv \phi)$

4,15
1) $false \equiv \neg true$
2) $\neg false \equiv true$
3) $\neg false$
4) $(\neg(\phi \equiv \psi)) \equiv ((\neg \phi) \equiv \psi)$
5) $((\neg \phi) \equiv \psi) \equiv (\phi \equiv (\neg \psi))$
6) $(\neg\neg \phi) \equiv \phi$
7) $(\phi \equiv \neg \phi) \equiv false$

4,16
1) $(\phi \not\equiv (\psi \not\equiv \tau)) \equiv ((\phi \not\equiv \psi) \not\equiv \tau)$
2) $(\phi \not\equiv \psi) \equiv (\psi \not\equiv \phi)$
3) $(\phi \not\equiv false) \equiv \phi$
4) $(\phi \not\equiv \phi) \equiv false$
5) $((\phi \not\equiv \psi) \equiv \psi) \equiv \phi$

4,19
1) $\phi \lor (\neg \phi)$
2) $(\phi \lor true) \equiv true$
3) $\phi \lor true$
4) $(\phi \lor \psi) \equiv ((\phi \lor (\neg \psi)) \equiv \phi)$

4,24
1) $(\phi \land (\psi \land \tau)) \equiv ((\phi \land \psi) \land \tau)$
2) $(\phi \land \psi) \equiv (\psi \land \phi)$
3) $(\phi \land true) \equiv \phi$
4) $(\phi \land false) \equiv false$
5) $(\phi \land \phi) \equiv \phi$

4,28
1) $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg \phi \lor \psi)$
2) $(\phi \rightarrow \psi) \equiv ((\phi \land \psi) \equiv \phi)$

4,17

$(A \not\equiv B \equiv C) \equiv (A \equiv B \not\equiv C)$

4,26 $(A \lor B \equiv A \lor \neg B) \equiv A$

4,25
1) $(\phi \land \neg \phi) \equiv false$
2) $(\neg(\phi \land \psi)) \equiv (\neg \phi \lor \neg \psi)$
3) $(\neg(\phi \lor \psi)) \equiv (\neg \phi \land \neg \psi)$
4) $(\phi \land (\psi \equiv \tau)) \equiv ((\phi \land \psi) \equiv (\phi \land \tau) \equiv \phi)$
5) $(\phi \land (\psi \not\equiv \tau)) \equiv ((\phi \land \psi) \not\equiv (\phi \land \tau))$
6) $(\phi \land (\psi \lor \tau)) \equiv ((\phi \land \psi) \lor (\phi \land \tau))$
7) $(\phi \lor (\psi \land \tau)) \equiv ((\phi \lor \psi) \land (\phi \lor \tau))$

4,29
1) $\phi \rightarrow true$
2) $false \rightarrow \phi$
3) $(true \rightarrow \phi) \equiv \phi$
4) $(\phi \rightarrow false) \equiv \neg \phi$

4,36
1) $((\phi \equiv \psi) \land (\psi \equiv \tau)) \rightarrow (\phi \equiv \tau)$
2) $((\phi \equiv \psi) \land (\psi \equiv \tau)) \rightarrow (\phi \rightarrow \tau)$
3) $((\phi \rightarrow \psi) \land (\psi \equiv \tau)) \rightarrow (\phi \rightarrow \tau)$

4,30
1) $(\phi \rightarrow (\psi \equiv \tau)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \equiv (\phi \rightarrow \tau))$
2) $(\phi \rightarrow (\psi \lor \tau)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \lor (\phi \rightarrow \tau))$
3) $(\phi \rightarrow (\psi \land \tau)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \land (\phi \rightarrow \tau))$
4) $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \tau)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \tau))$
5) $(\phi \rightarrow (\psi \leftarrow \tau)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \leftarrow (\phi \rightarrow \tau))$

4,31
1) $(\neg \phi \rightarrow \neg \psi) \equiv (\psi \rightarrow \phi)$
2) $(\neg(\phi \rightarrow \psi)) \equiv (\phi \land \neg \psi)$
3) $(\phi \equiv \psi) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \land (\psi \rightarrow \phi))$
4) $(\phi \equiv \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)$
5) $(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \tau)) \equiv ((\phi \land \psi) \rightarrow \tau)$
6) $(\phi \lor (\phi \rightarrow \psi))$
7) $(\phi \lor (\psi \rightarrow \phi)) \equiv (\psi \rightarrow \phi)$
8) $(\phi \land (\phi \rightarrow \psi)) \equiv (\phi \land \psi)$
9) $(\phi \land (\psi \rightarrow \phi)) \equiv \phi$

$A \land (A \equiv B) \equiv A \land B$

4,33
1) $\phi \rightarrow \phi$
2) $((\phi \rightarrow \psi) \land (\psi \rightarrow \tau)) \rightarrow (\phi \rightarrow \tau)$
3) $((\phi \rightarrow \psi) \land (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \equiv \psi)$

4,35
1) $(\phi \rightarrow (\phi \lor \psi))$
2) $(\phi \land \psi) \rightarrow \phi$
3) $(\phi \land \psi) \rightarrow (\phi \lor \psi)$
4) $((\phi \lor \psi) \rightarrow (\phi \land \psi)) \equiv (\phi \equiv \psi)$
5) $((\phi \lor \psi) \rightarrow \tau) \equiv ((\phi \rightarrow \tau) \land (\psi \rightarrow \tau))$
6) $((\phi \rightarrow (\psi \land \tau)) \equiv ((\phi \rightarrow \psi) \land (\phi \rightarrow \tau))$

4,61

$A \rightarrow (B \equiv C) \equiv A \land B \equiv A \land C$

def

sucesión de números reales es una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

- Φ es satisfacible sii hay una $v = T$
- Φ es insatisfacible sii toda $v(\Phi) = F$
- derivación es una secuencia finita de prop $\Phi_0 \dots \Phi_n$ tal que tos $(\Phi_{k-1} \equiv \Phi_k)$ para $\Phi \, 2 \leq k \leq n$
- si tos $(\Phi \rightarrow \psi)$ entonces se dice deb.
- tos $(\Phi_{k-1} \rightarrow \Phi_k \quad \Phi < k \leq n$
- def 6,16

t es libre para x en Φ sii ninguna aparición libre de x en Φ está bajo el alcance de un $\forall y$ o $\exists y$, y es variable de t

▲ para cualquier variable y formula

▲ si x no aparece libre en ( )

metateorema de la deducción.

si $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash_{DS} \phi$ entonces $\Gamma \vdash_{DS} \psi \to \phi$

Teoremas $\vdash_{DS}$ ($\mathcal{L}$)

7,8 para cualquier variable y formula

1) $\forall x \; true \equiv true$
2) $\forall x \; false \equiv false$
3) $\forall x \forall x \; \phi \equiv \forall x \phi$

7,9 ▲

1) $(\forall x \mid \psi : \phi) \equiv (\forall x \mid : \neg\psi \vee \phi)$
2) $(\forall x \mid \psi \wedge \Upsilon : \phi) \equiv (\forall x \mid : \psi \wedge \Upsilon \to \phi)$
3) $(\forall x \mid \psi \wedge \Upsilon : \phi) \equiv (\forall x \mid \psi : \Upsilon \to \phi)$

7,10 ▲

1) $\forall x (\psi \to \phi) \to (\forall x \; \psi \to \forall x \; \phi)$
2) $\forall x (\psi \equiv \phi) \to (\forall x \; \psi \equiv \forall x \; \phi)$
3) $(\forall x \mid \Upsilon : \psi \to \phi) \to ((\forall x \mid \Upsilon : \psi) \to (\forall x \mid \Upsilon : \phi))$
4) $(\forall x \mid \Upsilon : \psi \equiv \phi) \to ((\forall x \mid \Upsilon : \psi) \equiv (\forall x \mid \Upsilon : \phi))$

7,11 ▲ (ψ)

1) $\psi \wedge \forall x \phi \equiv \forall x (\psi \wedge \phi)$
2) $\psi \to \forall x \phi \equiv \forall x (\psi \to \phi)$

7,12 ▲

1) $(\forall x \mid false : \phi)$
2) $(\forall x \mid \psi \vee \Upsilon : \phi) \equiv (\forall x \mid \psi : \phi) \wedge (\forall x \mid \Upsilon : \phi)$
3) $\forall x \phi \equiv \forall y (\phi[x := y])$, si y es libre para x en ϕ
4) $\forall x \forall y \; \phi \equiv \forall y \forall x \; \phi$

7,14 ▲

1) $\exists x \; true \equiv true$
2) $\exists x \; false \equiv false$
3) $\exists x \exists x \; \phi \equiv \exists x \phi$

7,15 si t es libre para x en ϕ

$\vdash_{DS}(\mathcal{L}) \; \phi[x := \Upsilon] \to \exists x \phi$

7,16 ▲

1) $\exists x(\psi \to \phi) \to (\exists x \psi \to \exists x \phi)$
2) $\exists x(\psi \equiv \phi) \to (\exists x \psi \equiv \exists x \phi)$
3) $(\exists x \mid \Upsilon : \psi \to \phi) \to ((\exists x \mid \Upsilon : \psi) \to (\exists x \mid \Upsilon : \phi))$
4) $(\exists x \mid \Upsilon : \psi \equiv \phi) \equiv ((\exists x \mid \Upsilon : \psi) \equiv (\exists x \mid \Upsilon : \phi))$

7,17 ▲ ψ

1) $\psi \vee \exists x \phi \equiv \exists x (\psi \vee \phi)$
2) $\psi \to \exists x \phi \equiv \exists x (\psi \to \phi)$

7,18 ▲

1) $(\exists x \mid false : \phi) \equiv false$
2) $(\exists x \mid \psi \vee \Upsilon : \phi) \equiv (\exists x \mid \psi : \phi) \vee (\exists x \mid \Upsilon : \phi)$
3) $\exists x \phi \equiv \exists y (\phi[x := y])$, si y es libre para x en ϕ
4) $\exists x \exists y \; \phi \equiv \exists y \exists x \; \phi$

7,19 ▲ ϕ

1) $\forall x \; \psi \to \phi \equiv \exists x (\psi \to \phi)$
2) $\exists x \; \psi \to \phi \equiv \forall x (\psi \to \phi)$

7,27

1) $(\forall x \mid x = t : \phi) \equiv \phi[x := t]$
2) $(\exists x \mid x = t : \phi) \equiv \phi[x := t]$

7,15

1) $\phi[x := t] \to \exists x \phi$

regla de un punto

1) $\forall x (x = t : \phi) \equiv \phi[x := t]$

2) $\exists x \; x = t : \phi \equiv \phi[x := t]$

Metateorema 9,14,2 - Bx 3

Metateorema 7,15 es el testigo de divisibilidad

Axiomas

Bx1 : $(\forall x \phi) \equiv \phi$, si ▲(ϕ)

Bx2 : $\phi \vee (\forall x \psi) \equiv \forall x (\phi \vee \psi)$ ▲(ϕ)

Bx3 : $(\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi) \equiv \forall x (\phi \wedge \psi)$

Bx4 : $\forall x (\phi) \to \phi[x := \Upsilon]$, si t es libre para x en ϕ

Bx5 : $\exists x \phi \equiv \neg \forall x \neg \phi$

Bx6 : $x = x$

Bx7 $x = t \to (\phi \equiv \phi[x := t])$

si descartas true $\to \phi$

metateoremas

7,20 $\Gamma \vdash_{DS}(\mathcal{L}) \forall x \phi$ sii $\Gamma \vdash_{DS}(\mathcal{L}) \phi$

7,21

1) $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash_{DS}(\mathcal{L}) \phi$

2) la deriv. γ no usar generalización sobre variables de ψ entonces $\Gamma \vdash_{DS}(\mathcal{L}) \psi \to \phi$

una formula no tiene variable libre

7,23

1) $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash_{DS}(\mathcal{L}) \phi$ y

2) ψ es una sentencia $\Gamma \vdash_{DS}(\mathcal{L}) \psi \to \phi$

7,24 $\Gamma \vdash_{DS}(\mathcal{L}) \psi \to \phi$

entonces

$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash_{DS}(\mathcal{L}) \phi$

Coherencia Completitud

$\Gamma \vdash \phi$ a $\Gamma \models \phi$