

PRÁCTICA 3 - GEOMETRÍA COMPUTACIONAL - 2023

8, 15 y 22 de marzo de 2023

DISCRETIZACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS CONTINUOS Y TEOREMA DE LIOUVILLE

Plantilla de uso obligatorio: ‘GCOM2023-practica3-plantilla.py’

IMPORTANTE: Indicar subgrupo (U1/U2) al lado del nombre en la memoria de la práctica.

Enunciado: Considera el hamiltoniano de un oscilador no lineal,

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (q, p) \mapsto p^2 + \frac{1}{a}(q^2 - b)^2,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son ciertos parámetros. Las ecuaciones de Hamilton–Jacobi del sistema son las siguientes,

$$\ddot{q} = -\frac{8}{a}q(q^2 - b).$$

Se trata de una ecuación diferencial que describe la evolución de $q(t)$ y de $p(t) = \dot{q}/2$.

Tomemos $\mathbf{a} = \mathbf{3}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{1/2}$. Supón que disponemos de un conjunto de condiciones iniciales $D_0 := [0, 1] \times [0, 1]$, y una granularidad del parámetro temporal $t = n\delta$ con $\delta \in [10^{-4}, 10^{-3}]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con la que puede estimarse la sensibilidad del sistema al grado de discretización.

i) Representa gráficamente el espacio fásico $D_{(0,\infty)}$ de las órbitas finales del sistema con las condiciones iniciales D_0 . Considera al menos 10 órbitas finales diferentes. **[0.75 puntos]**

ii) Obtén el **valor del área** de D_t para $t = 1/4$ y una estimación del su intervalo de error, presentando los valores de forma científicamente formal. ¿Se cumple el teorema de Liouville entre D_0 y D_t o bien entre D_0 y $D_{(0,\infty)}$? Razona la respuesta. **[1 punto]**

iii) Realiza una **animación GIF** con la evolución del diagrama de fases D_t para $t \in (0, 5)$. **[0.75 puntos]**

Observaciones:

La memoria debe entregarse antes de que transcurran **21 días** desde el inicio de la práctica, salvo que se indique lo contrario.

La memoria, siempre en pdf, debe incluir **al menos** la siguiente información: (1) Introducción (motivación/objetivo de la práctica), (2) Material usado (método y datos), (3) Resultados, (4) Conclusión y (5) Anexo con el script/código utilizado.

La extensión máxima de la memoria **no superará las 2 páginas**, sin contar el código anexado (ilimitado) y demás anexos. El total de la superficie de las figuras/tablas (si las hubiese) no podrán excederse del 50 % de la memoria.

La memoria (‘.pdf’), la **animación** (‘.gif’) y el **código fuente** (archivo ‘.py’) deben subirse como archivos independientes. **No subir archivos comprimidos.**