GEOMETRÍA COMPUTACIONAL - 2023
Ejercicios prácticos voluntarios

Importante: Elegir un máximo de dos ejercicios para entregar antes del 18 de mayo de 2022. Cada uno de los dos ejercicios puntuará +1 puntos, contribuyendo al máximo de +2 puntos voluntarios que se sumarán al final. Todo ejercicio voluntario será INDIVIDUAL.

1. ATRACTOR LOGÍSTICO

Sea un sistema dinámico discreto $x_{n+1} = f(x_n)$ dominado por la función logística $f(x) = rx(1-x)$. Se pide:

i) Encuentra dos conjuntos atractores diferentes para $r \in (3, 3.544)$ con $x \in (0,1)$. Estima los valores de sus elementos con el correspondiente intervalo de error. [**+0.5 puntos**]

ii) Estima los valores de $r \in (3.544,\ 4)$, junto con su intervalo de error, para los cuales el conjunto atractor tiene 8 elementos. Obtén algún ejemplo concreto de conjunto atractor final. [**+0.5 puntos**]

Ayuda para quien lo necesite:

- Elije un valor concreto para r y x_0 dentro de los correspondientes intervalos dados.
- Encuentra la órbita parcial $orb_n(x_0, f)$ a partir de un $M \in \mathbb{N}$ tal que $\exists k \in \mathbb{N}$ que satisface $|f^{M+k}(x_0) - f^M(x_0)| < \epsilon_M$ para un $\epsilon_M > 0$ arbitrariamente pequeño que depende de M.
- Identifica los k estados a los que tiende $V_0 = \lim_{n\to\infty} orb_n(x_0, f)$.
- Repetir el proceso para diferentes $x_0 + \delta$ con $\delta > 0$, para analizar la estabilidad.
- Repetir el proceso para diferentes $r + \Delta$ con $\Delta > 0$, para analizar posibles bifurcaciones.

2. DIMENSIÓN DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

El triángulo de Sierpinski es una generalización del conjunto de Cantor aplicado a triángulos equiláteros. Se pide:

i) Programa un código en python para obtener una muestra aproximada (de 'resolución numérica' arbitraria) del triángulo de Sierpinski. Represéntalo gráficamente para una iteración deseada. [**+0.5 puntos**]

ii) A continuación, usando la medida de Hausdourff con refinamiento de recubrimientos n-esféricos, programa un código en python para obtener la dimensión de Hausdorff de cualquier objeto fractal (al menos los contenidos en $\mathbb{R}^2$) y aplícalo a la muestra anterior para comprobar que el triángulo de Sierpinski tiene una dimensión log 3 /log 2. [**+0.5 puntos**]

3. COMPLEJIDAD DE CODIFICACIÓN

De acuerdo con la teoría, existen diferentes maderas de medir la complejidad de una codificación. En la Práctica 2 hemos analizado la entropía del código de Huffman para la variable aleatoria $S_{English}$ (ver archivo adjunto en la Práctica 2). En este ejercicio voluntario se pide:

i) Programa un código en python para estimar el índice de Gini y la diversidad ${}^2D$ de Hill para una muestra de una variable aleatoria y aplícalo al ejemplo $\{0, 1, 0, 0, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 0, 1, 2, 0, 2, 0, 1, 1\}$ para comprobar que está bien programado en comparación con el cálculo explícito para dicho ejemplo. [**+0.5 puntos**]

ii) Considera ahora la muestra de la variable aleatoria $S_{English}$. Calcula el índice de Gini y la diversidad ${}^2D$ de Hill.[**+0.5 puntos**]

4. COMPONENTES CONEXAS

Un Departamento de Planificación Urbana nos ha solicitado que realicemos una ordenación del territorio para un Área Metropolitana A de 1000 calles con çarriles bici"que se intersectan de forma caótica. Supondremos que una calle se representa por un segmento en el plano $\mathbb{R}^2$, dado por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). La plantilla '*GCOM2022-plantilla_conexas.py*' se muestra un conjunto de los 1000 segmentos $\ell_i, 1 \leq i \leq 1000$ que conforman el espacio metropolitano con carriles bici, $A = \bigcup_{i=1}^{1000} \ell_i$. Este espacio A es un subespacio del plano $\mathbb{R}^2$ con la topología inducida. Se pide:

i) Diseñar primero un algoritmo, y luego programarlo en Python, para calcular el numero de componentes conexas de la unión de N segmentos aleatorios cualesquiera del plano. [**+0.5 puntos**]

ii) Representar gráficamente el espacio A y usar el apartado anterior para calcular el número de componentes conexas. ¿Cuántos carriles bici adicionales se requieren para conseguir conectar correctamente todos los anterior? [**+0.5 puntos**]

5. REDES NEURONALES

Sean tres elementos con pares de estados $E_1 = (1, 1)$, $E_2 = (1, 0)$, $E_3 = (0, 1)$, deseamos clasificarlos mediante una sepación por la función $f(x, y) = 3x + 2y > 2$ (es decir, devuelve 1 si se cumple la desigualdad y 0 si no la cumple). Se pide:

i) Diseña un perceptrón simple y utiliza como función de activación la función sigmoide, una función de aprendizaje basada en la Regla Delta generalizada y un factor de aprendizaje $e = 0{,}5$. [**+0.5 puntos**]

ii) Implementa un algoritmo en python para obtener la clasificación deseada. Asigna valores aleatorios y pequeños, tanto positivos como negativos a los pesos sinápticos. Realiza sólo una iteración para cada uno de los patrones de entrada. Comprueba el resultado con la librería **Keras**. [**+0.5 puntos**]

6. DEFORMACIÓN CONTINUA DE LA ESFERA

Considera S_1^2 como la variedad diferencial dada por una 2-esfera de radio unitario, embebido en $\mathbb{R}^3$. Se pide representar gráficamente en 3D el difeomorfismo de una determinada proyección $\Pi : S_1^2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Para ello, extraremos el punto $e_3 := (0, 0, -1) \in S_1^2$, y utilizamos las coordenadas cartesianas $(x, y, z) \in [-1, 1]^3$ para representar en $\mathbb{R}^3$.

- Utilizar las propiedades del dominio e imagen de las funciones tan y $\tan^{-1}$ para diseñar una familia paramétrica $g_t : S_1^2 \setminus \{(1, 0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$ tal que existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ que $\lim_{t\to t_0} g_t \simeq \Pi$ y $g_0(p) = p \in S_1^2$. Usar la composición de tan y $\tan^{-1}$, de manera que para cierto t conduce a la identidad y para otro t envía a infinito el polo norte. Finalmente, obtender una **animación** de al menos 15 fotogramas de dicha familia paramétrica. [**+1 punto**]

7. ATRACTOR DE LORENZ

En variedades diferenciables, los sistemas conservativos de Liouville presentan caos a partir de **3 dimensiones**. Probablemente el caso más famoso es el sistema de coordenadas de Lorenz $q = (q_1, q_2, q_3)$, determinado por:

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = \alpha(q_2 - q_1) \tag{1}$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = \beta q_1 - q_2 - q_1 q_3 \tag{2}$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = q_1 q_2 - \gamma q_3 \tag{3}$$

, donde los parámetros se fijan como $\alpha = 10$, $\beta = 28$ y $\gamma = 8/3$. Suponiendo que $p = \dot{q}/2$,

i) Discretiza el sistema de ecuaciones diferenciales Y Encuentra la órbita final de $q = (q_1, q_2, q_3)$ y $p = (p_1, p_2, p_3)$ para $q(0) \in D_0 = \{(1, 1, 1)\}$, usando para ello la representación 3D de q y p por separado (dos gráficas). [**+0.2 puntos**]

ii) Representa gráficamente el **espacio fásico** de los pares $\{(q_i, p_i)\}_{i=1}^3$ dado por el conjunto de condiciones iniciales $(q(0), p(0)) \in D_0 = [-1, 1]^3 \times [-1, 1]^3$ (por ejemplo en tres gráficas) [**+0.2 puntos**]

iii) De acuerdo con la definición de **medida de Hausdorff**, estima el d-volumen del espacio fásico de Lorenz para cualquier par de condiciones iniciales $(q(0), p(0)) \in D_0 = [-1, 1]^3 \times [-1, 1]^3$. [**+0.6 puntos**]

8. SISTEMA DE NAVIER-STOKES

Sea un sistema dinámico continuo en $\mathbb{R}^3$, de posiciones $q = (x, y, z)$, de velocidad $\dot{q} = (v_x, v_y, v_z)$ y con cantidad de movimiento $p = \frac{1}{2}\dot{q}$, se dispone de las siguientes ecuaciones de evolución

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \nu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + g_x \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \nu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + g_y \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + g_z \tag{6}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

donde $\nu \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria y $g = (g_x, g_y, g_z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una función cualquiera que depende de la posición q pero no de la velocidad v. Considera que las tres velocidades son campos vectoriales $v_i : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ que se evaluan en las posiciones $q \in \mathbb{R}^3$ y en el parámetro tiempo $t \in \mathbb{R}$ para representar los valores de las velocidades instantáneas en cada punto. Suponiendo unas **condiciones iniciales** q_0 y v_0 para $t = 0$, se pide:

i) Discretiza el sistema e implementa un algoritmo en python para estimar la evolución de dichos campos en cualquier instante. ¿Cuál es el conjunto de valores que debería conservarse en el tiempo según el teorema de Liouville? Identifica el isomorfismo y razona tu respuesta. [**+0.5 puntos**]

ii) Suponiendo $g = (0, 0, -1)$, $\nu = 0.01$ y $(q_0, p_0) \in [0, 1]^3 \times [0, 1]^3$, obtén una representación de su espacio de fases $F \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ en dos gráficas 3D, una para las componentes espaciales y otra para la velocidad. ¿Existen cuencas de atracción en F? Razona la respuesta. [**+0.5 puntos**]

9. TRANSPORTE PARALELO EN UNA ESFERA

Supongamos que tenemos una variedad esférica de radio unitario, $S_1^2 \subset \mathbb{R}^3$, embebida en un espacio Euclideo de métrica identidad, y usamos un sistema de referencia de "longitudes" $\phi = [0, 2\pi)$ y "latitudes" $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Entonces deseamos describir el **transporte paralelo** del vector $v_0 = (0, \pi/5) \in T_q(S_1^2)$, tangente a la variedad en $q = (0, \theta_0)$, a lo largo del paralelo $\theta = \theta_0$ en la esfera S_1^2, **trasladándolo de forma completa** ($\phi \to 2\pi$)). Se pide:

i) Define una *familia paramétrica* $f(t)$ de tipo no-lineal (p.e. con t^2) que reproduzca desde la identidad hasta la "translación paralela" del vector $v_0 \in T(S_1^2)$ en torno a cualquier paralelo $\theta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Presenta tu *familia* en la memoria. [**+0.4 puntos**]

ii) Realiza una animación de la transformación anterior de tal manera que dos copias de v_0 se transladen en dos paralelos diferentes, siendo uno de ellos $\theta_0 = 0$, y el otro correspondiente a cualquier latitud entre 0 y $\pi/2$, excluidos ambos. [**+0.6 puntos**]

10. PCA y ANALOGÍA

- **De uso obligatorio** (solicitar al profesor): Se dispone de 4 archivos NetCDF; dos de temperatura T (air*) y dos de altura geopotencial Z (hgt*) en los años 2021 y 2022, según un re-análisis climatológico conocido como NCEP. Cada archivo se ordena en 144 longitudes (x), 73 latitudes (y), 17 niveles de presión (p).

Considera que la atmósfera es un sistema de 6 variables de estado $(t, x, y, p, Z, T) \in \mathbb{R}^6$ pero sólo dos de ellas (T y Z) son dinámicas respecto a la variable t que llamaremos tiempo. Para poder trabajar con *elementos numerables*, discretizaremos las x en 144 valores posibles, y en 73, p en 17 y el parámetro tiempo t en lapsos de 1 día.

Es decir, podemos considerar que tenemos $144 \times 73 \times 17$ elementos de aire que no modifican sus coordenadas (x_i, y_j, p_k), pero sí su temperatura T y altura geopotencial Z en función de la coordenada temporal t.

Desde un punto de vista geométrico, podemos redefinir el sistema como un conjunto numerable de elementos (días) con $144 \times 73 \times 17 \times 2$ variables de estado diferentes (pares de temperatura-altura) representados como $\{(T_{i,j,k}, Z_{i,j,k})\}_{i=1,j=1,k=1}^{i=144,j=73,k=17} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

i) Considera el sistema $S = \{a_d, X_d\}_{d=1}^{365}$ formado por los elementos 'días' a_d del año 2021 y las variables de estado $X_d := \{Z_{i,j,k}\}_{i=1,j=1,k=1}^{i=144,j=73,k=17}$ y estima las 4 componentes principales fijando $p_k = 500hPa$. **Represéntalas espacialmente** en (x, y). Qué porcentaje de varianza se explica? [**+0.5 puntos**]

ii) Considera un subsistema $\sigma \subset S$ delimitado* por $x \in (-20°, 20°),\ y \in (30°, 50°)$. Considerando sólo Z, encuentra los 4 días de 2021 más análogos al elemento $a_0 :=$ "2022/01/11" y calcula el error absoluto medio de la temperatura $\{T_{i,j,1000hPa}\}_{i,j}$, del subsistema, prevista para el elemento a_0 según la media de dichos análogos. Para la analogía, considera la **distancia euclídea** de elementos de σ con los pesos $w_{i,j,k} = w_{i,j} w_k$, donde $w_{i,j} = 1$ para las coordenadas (x, y) y $w_{500hPa} = w_{1000hPa} = 0{,}5$ y $w_k = 0$ para el resto de p_k. [**+0.5 puntos**]

Observaciones para cada ejercicio:

Cada memoria debe entregarse antes del **18 de mayo de 2023**.

Cada memoria, siempre en pdf, debe incluir **al menos** la siguiente información: (1) Introducción (motivación/objetivo de la práctica), (2) Material usado (método y datos), (3) Resultados, (4) Conclusión y (5) Anexo con el script/código utilizado.

La extensión máxima de cadala memoria **no superará las 2 páginas**, sin contar el código anexado (ilimitado). El total de la superficie de las figuras/tablas (si las hubiese) no podrán excederse del 50 % de la memoria.

Además, debe entregarse el código fuente como archivo '.py' independiente.