

Apellido y Nombres: _____ DNI: _____

- La primera parte del examen consta de cuatro preguntas de opción múltiple. Una sola opción es correcta. No se presentan los procedimientos.
- La segunda parte del examen consta de seis preguntas de desarrollo.
- El examen se aprueba con un 60 % de respuestas correctas.
- La duración del examen es de 120 minutos.
- Si el/la estudiante decide utilizar alguno de los programas autorizados, se compromete a informar cualquier anomalía y a explicar sus respuestas en una instancia oral de evaluación si los profesores lo consideran necesario.

1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	Nota Final

Primera Parte

- (1.1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que tiene como sucesión de sumas parciales $s_n = \frac{n^2+3n}{5n^2+4}$
- ☐ Diverge por el criterio necesario de convergencia.
 - ☐ No se puede determinar la convergencia debido al criterio del cociente
 - ☐ Converge pero no se puede determinar su suma
 - ☐ Converge y su suma es $\frac{1}{5}$
 - ☐ Ninguna de las anteriores es correcta

- (1.2) Dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{2n^2 + 3}$$

señalar la afirmación correcta:

- ☐ Converge porque $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5n}{2n^2+3} = 0$
- ☐ Diverge por comparación con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
- ☐ Converge por comparación en el límite con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
- ☐ Diverge por criterio del cociente
- ☐ Ninguna de las otras

(1.3) Sabiendo que el gráfico de la función

$$f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

tiene una longitud de $\frac{14}{3}$, señalar la afirmación correcta:

- ☐ $\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx$ diverge. ☐ $\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx = \frac{1}{2}$. ☐ $\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx = 2$. ☐ $\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx = 1$.
☐ Ninguna de las otras
-

(1.4) El volumen determinado por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ al rotar en torno al eje horizontal es

- ☐ $\frac{8}{3}\pi$ ☐ $\frac{8}{5}\pi$ ☐ $\frac{5}{8}\pi$ ☐ π ☐ Ninguna de las otras
-

Segunda Parte

(2.1) Dada una función vectorial

$$\vec{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{\alpha}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$$

donde $x(t), y(t)$ son funciones con derivada continua, deducir una fórmula para calcular la longitud del arco de curva que parametriza.

(2.2) Hallar la serie de Maclaurin correspondiente a la función $f(x) = \cos(2x)$ y determinar su intervalo de convergencia. Justificar detalladamente.

(2.3) Resolver el siguiente problema de valor inicial. Detallar los cálculos.

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

(2.4) A partir de cierta función f se define $h(x) = 6 - 4x + 8f(x)$. El polinomio de Taylor de orden dos centrado en 1 para h es $p(x) = 2 + 4(x - 1) - 4(x - 1)^2$. Calcular el polinomio de Taylor de orden dos centrado en 1 para f . Justificar detalladamente.

(2.5) Sean y_1, y_2 dos soluciones de la ecuación diferencial

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Demostrar que $(\alpha y_1 + \beta y_2)(x)$ también es solución para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(2.6) Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada por

$$xy = C \quad C \in \mathbb{R}$$

Detallar los cálculos y graficar aproximadamente ambas familias.

$$(1.1) \quad S_n = \frac{n^2 + 3n}{5n^2 + 4} \cdot \frac{1/n^2}{1/n^2} = \frac{1 + 3/n}{5 + 4/n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boxed{\frac{1}{5}} \quad \text{La serie converge a este valor}$$

$$(1.2) \quad \frac{5n}{2n^2 + 3} \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow 5n^2 \geq 2n^2 + 3 \Leftrightarrow 3n^2 \geq 3 \Leftrightarrow n^2 \geq 1 \quad \checkmark$$

(n > 0) \(\hookrightarrow\) La serie **diverge** por ser mayorante de la armónica.

Obs: el criterio del cociente no decide porque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5(n+1)}{2(n+1)^2 + 3}}{\frac{5n}{2n^2 + 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+5}{2n^2+4n+5} \cdot \frac{2n^2+3}{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+5}{5n} \right) \cdot \left(\frac{2n^2+3}{2n^2+4n+5} \right) = 1$$

$$(1.3) \quad f(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} \Rightarrow f'(x) = x^{1/2}$$

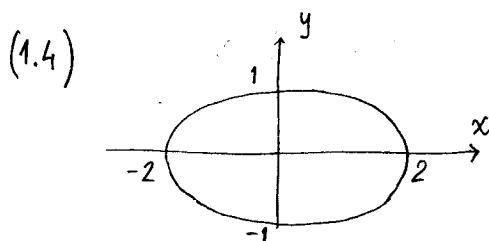
$$\text{long} = \int_0^a \sqrt{1 + (x^{1/2})^2} dx = \int_0^a \sqrt{1+x} dx$$

$$= \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} \Big|_0^a$$

$$= \frac{2}{3} (1+a)^{3/2} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \Rightarrow 2(1+a)^{3/2} - 2 = 14 \Rightarrow (1+a)^{3/2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\Rightarrow 1+a = 8^{2/3} = 4 \Rightarrow a = 3$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx = \int_1^\infty x^{-3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-2}}{-2} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$



$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \quad (y \geq 0)$$

$$V = \pi \cdot \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \boxed{\frac{8}{3} \pi}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} f(x) &= \cos(2x) & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -2 \sin(2x) & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -4 \cos(2x) & f''(0) &= -4 \\ f'''(x) &= +8 \sin(2x) & f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(x) &= 16 \cos(2x) & f^{(4)}(0) &= 16 \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

La serie es $\frac{1}{2^0} - \frac{4x^2}{2^2 2!} + \frac{16x^4}{2^4 4!} - \frac{64x^6}{2^6 6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$

\(\hookrightarrow\) Alternativamente se puede usar la serie del coseno

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

y dado que converge $\forall x \in \mathbb{R}$, reemplazar x por $2x$:

$$1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{2(n+1)} \cdot \frac{x^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}}{2^{2n} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{2n+2}}{2^{2n}} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^2 \cdot x^2 \cdot 1}{(2n+2)(2n+1)} \right| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

IC. = \mathbb{R}

(2.3) $y'' - 3y' + 2y = e^x \rightarrow$ ec. característica $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1 \vee r = 2$

Sol. ec. homogénea: $y_H = A e^x + B e^{2x}$

Sol. part. $y_p = C \cdot x e^x \quad y_p' = C(e^x + x e^x) \quad y_p'' = C(2e^x + x e^x)$

$$2C e^x + C x e^x - 3C e^x - 3C x e^x + 2C x e^x = e^x \Rightarrow -C e^x = e^x \Rightarrow C = -1$$

Sol. gral: $y = A e^x + B e^{2x} - x e^x$; $y' = A e^x + 2B e^{2x} - e^x - x e^x$

$y(0) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A$; $y'(0) = A + 2B - 1 = 1 \Rightarrow A + 2B = 2$

$\Rightarrow A - 2A = 2 \Rightarrow -A = 2 \Rightarrow A = -2 \quad B = 2$

Sol. DVI: $y = -2e^x + 2e^{2x} - x e^x$

(2.4) $h(x) = 6 - 4x + 8f(x) \Rightarrow h(1) = 2 + 8f(1) \quad (1)$

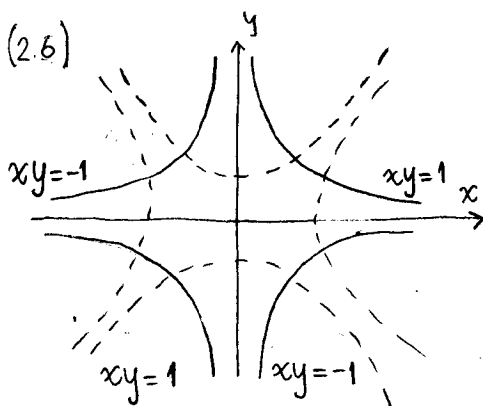
$h'(x) = -4 + 8f'(x) \Rightarrow h'(1) = -4 + 8f'(1) \quad (2)$

$h''(x) = 8f''(x) \Rightarrow h''(1) = 8f''(1) \quad (3)$

$p(x) = 2 + 4(x-1) - 4(x-1)^2 = \underbrace{h(1)} + \underbrace{h'(1)}(x-1) + \frac{\underbrace{h''(1)}}{2}(x-1)^2$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} h(1) = 2 \\ h'(1) = 4 \\ \frac{h''(1)}{2} = -4 \Rightarrow h''(1) = -8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Usando (1)(2)(3)} \quad 2 = 2 + 8f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \\ 4 = -4 + 8f'(1) \Rightarrow f'(1) = 1 \\ -8 = 8f''(1) \Rightarrow f''(1) = -1 \end{array}$$

El polinomio para f es $g(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}$



$xy = C \Rightarrow y = \frac{C}{x} \Rightarrow y' = -\frac{C}{x^2} = -\frac{xy}{x^2} = -\frac{y}{x}$

Ec. dif. trayectorias ortogonales $-\frac{1}{y'} = -\frac{y}{x}$

$\Rightarrow x = y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \int x dx = \int y dy$

$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = C$ hipérbolas