

Apellido y Nombres: \_\_\_\_\_ DNI: \_\_\_\_\_

- La primera parte del examen consta de cuatro preguntas de opción múltiple. Una sola opción es correcta. No se presentan los procedimientos.
- La segunda parte del examen consta de seis preguntas de desarrollo.
- El examen se aprueba con un 60 % de respuestas correctas.
- La duración del examen es de 120 minutos.
- Si el/la estudiante decide utilizar alguno de los programas autorizados, se compromete a informar cualquier anomalía y a explicar sus respuestas en una instancia oral de evaluación si los profesores lo consideran necesario.

1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	Nota Final

**Primera Parte**(1.1) La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  que tiene como sucesión de sumas parciales  $s_n = \frac{n^2+3n}{5n^2+4}$ 

- Diverge por el criterio necesario de convergencia.
- No se puede determinar la convergencia debido al criterio del cociente
- Converge pero no se puede determinar su suma
- Converge y su suma es  $\frac{1}{5}$
- Ninguna de las anteriores es correcta

(1.2) Dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{2n^2 + 3}$$

señalar la afirmación correcta:

- Converge porque  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5n}{2n^2 + 3} = 0$
- Diverge por comparación con la serie armónica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
- Converge por comparación en el límite con la serie armónica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
- Diverge por criterio del cociente
- Ninguna de las otras

(1.3) Sabiendo que el gráfico de la función

$$f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

tiene una longitud de  $\frac{14}{3}$ , señalar la afirmación correcta:

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx$  diverge.      $\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx = \frac{1}{2}$ .      $\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx = 2$ .      $\int_1^\infty \frac{1}{x^a} dx = 1$ .  
 Ninguna de las otras
- 

(1.4) El volumen determinado por la elipse de ecuación  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  al rotar en torno al eje horizontal es

- $\frac{8}{3}\pi$       $\frac{8}{5}\pi$       $\frac{5}{8}\pi$       $\pi$      Ninguna de las otras
- 

## Segunda Parte

(2.1) Dada una función vectorial

$$\vec{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{\alpha}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$$

donde  $x(t), y(t)$  son funciones con derivada continua, deducir una fórmula para calcular la longitud del arco de curva que parametriza.

(2.2) Hallar la serie de Maclaurin correspondiente a la función  $f(x) = \cos(2x)$  y determinar su intervalo de convergencia. Justificar detalladamente.

(2.3) Resolver el siguiente problema de valor inicial. Detallar los cálculos.

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y &= e^x \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$$

(2.4) A partir de cierta función  $f$  se define  $h(x) = 6 - 4x + 8f(x)$ . El polinomio de Taylor de orden dos centrado en 1 para  $h$  es  $p(x) = 2 + 4(x - 1) - 4(x - 1)^2$ . Calcular el polinomio de Taylor de orden dos centrado en 1 para  $f$ . Justificar detalladamente.

(2.5) Sean  $y_1, y_2$  dos soluciones de la ecuación diferencial

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Demostrar que  $(\alpha y_1 + \beta y_2)(x)$  también es solución para cualesquiera  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

(2.6) Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada por

$$xy = C \quad C \in \mathbb{R}$$

Detallar los cálculos y graficar aproximadamente ambas familias.

$$(1.1) \quad S_n = \frac{n^2 + 3n}{5n^2 + 4} \cdot \frac{1/n^2}{1/n^2} = \frac{1 + 3/n}{5 + 4/n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \boxed{\frac{1}{5}} \quad \text{La serie converge a este valor}$$

$$(1.2) \quad \frac{5n}{2n^2 + 3} \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow 5n^2 \geq 2n^2 + 3 \Leftrightarrow 3n^2 \geq 3 \Leftrightarrow n^2 \geq 1 \quad \checkmark$$

(n > 0)

↳ La serie diverge por ser mayorante de la armónica.

Obs: el criterio del cociente no decide porque

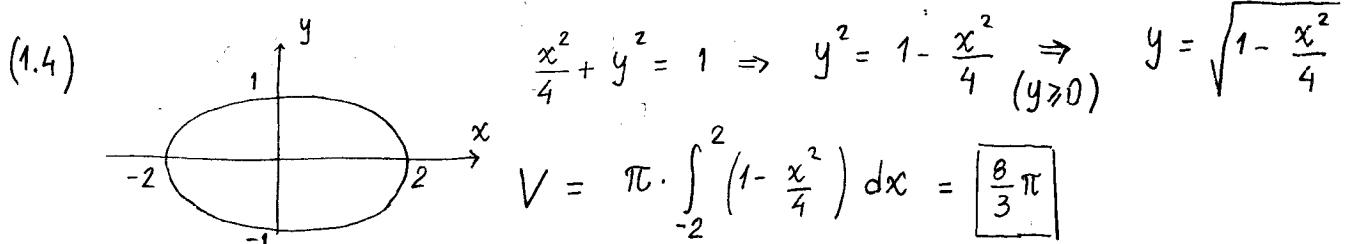
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5(n+1)}{2(n+1)^2 + 3}}{\frac{5n}{2n^2 + 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+5}{2n^2+4n+5} \cdot \frac{2n^2+3}{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n+5}{5n} \right) \cdot \left( \frac{2n^2+3}{2n^2+4n+5} \right) = 1$$

$$(1.3) \quad f(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} \Rightarrow f'(x) = x^{1/2}$$

$$\begin{aligned} \text{long} &= \int_0^a \sqrt{1 + (x^{1/2})^2} dx = \int_0^a \sqrt{1+x} dx \\ &= \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} \Big|_0^a \\ &= \frac{2}{3} (1+a)^{3/2} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \Rightarrow 2(1+a)^{3/2} - 2 = 14 \Rightarrow (1+a)^{3/2} = \frac{16}{2} = 8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1+a = 8^{2/3} = 1+a = 4 \Rightarrow a=3$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx = \int_1^\infty x^{-3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$



$$(2.2) \quad f(x) = \cos(2x) \quad f'(0) = 1 \quad \text{La serie es } \frac{1}{2^0} - \frac{4x^2}{2^2 2!} + \frac{16x^4}{2^4 4!} - \frac{64x^6}{2^6 6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$$

$$f'(x) = -2 \sin(2x) \quad f'(0) = 0$$

↳ Alternativamente se puede usar la serie del coseno

$$f''(x) = -4 \cos(2x) \quad f''(0) = -4$$

$$1 - \frac{x^2}{2^1} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$f'''(x) = +8 \sin(2x) \quad f'''(0) = 0$$

y dado que converge  $\forall x \in \mathbb{R}$ , reemplazar  $x$  por  $2x$ :

$$f''(x) = 16 \cos(2x) \quad f''(0) = 16$$

$$1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{2(n+1)} \cdot \frac{x^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}}{2^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{2n+2}}{2^{2n}} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^2 \cdot x^2 \cdot 1}{(2n+2)(2n+1)} \right| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

I.C. =  $\mathbb{R}$

$$(2.3) \quad y'' - 3y' + 2y = e^x \rightarrow \text{ec. característica } r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1 \vee r = 2$$

$$\text{Sol. ec. homogénea: } y_h = A e^x + B e^{2x}$$

$$\text{Sol. part. } y_p = C \cdot x e^x \quad y'_p = C(e^x + x e^x) \quad y''_p = C(2e^x + x e^x)$$

$$2Ce^x + Cxe^x - 3Ce^x - 3Cxe^x + 2Cxe^x = e^x \Rightarrow -Ce^x = e^x \Rightarrow C = -1$$

$$\text{Sol. gral: } y = A e^x + B e^{2x} - x e^x ; \quad y' = A e^x + 2B e^{2x} - e^x - x e^x$$

$$y(0) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A \quad ; \quad y'(0) = A + 2B - 1 = 1 \Rightarrow A + 2B = 2$$

$$\Rightarrow A - 2A = 2 \Rightarrow -A = 2 \Rightarrow A = -2 \quad B = 2$$

$$\text{Sol. DVI: } \boxed{y = -2e^x + 2e^{2x} - x e^x}$$

$$(2.4) \quad h(x) = 6 - 4x + 8f(x) \Rightarrow h(1) = 2 + 8f(1) \quad ①$$

$$h'(x) = -4 + 8f'(x) \Rightarrow h'(1) = -4 + 8f'(1) \quad ②$$

$$h''(x) = 8f''(x) \Rightarrow h''(1) = 8f''(1) \quad ③$$

$$p(x) = 2 + \overbrace{4(x-1)} - \overbrace{4(x-1)^2} = h(1) + \overbrace{h'(1)(x-1)} + \overbrace{\frac{h''(1)}{2}(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore h(1) &= 2 \\ h'(1) &= 4 \\ \frac{h''(1)}{2} &= -4 \Rightarrow h''(1) = -8 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\text{Usando } ①②③ \quad 2 = 2 + 8f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \\ &4 = -4 + 8f'(1) \Rightarrow f'(1) = 1 \\ &-8 = 8f''(1) \Rightarrow f''(1) = -1 \end{aligned} \right.$$

$$\text{El polinomio para } f \text{ es } \boxed{g(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}}$$

$$(2.6) \quad xy = C \Rightarrow y = \frac{C}{x} \Rightarrow y' = -\frac{C}{x^2} = -\frac{xy}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

$$\text{Ec. dif. trayectorias ortogonales } -\frac{1}{y'} = -\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow x = y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \int x dx = \int y dy$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = C \quad \text{hipérbolas}$$