Lineare Algebra I - Vorlesungs-Script

Inhaltsverzeichnis

1 Bilinearformen

Das kanonische Skalarprodukt (oder: Standardskalarprodukt) von $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} <,>: \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto <x,y> \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben durch

$$<x,y> := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

falls $x = (x_1, \cdots, x_n)$ und $y = (y_1, \cdots, y_n)$ sind.

Definition 1 (Konvention)**.** eine $1x1$ Matrix wird mit Eintrag indentifiziert

$$(x) \in M(1 \times 1, K) \leftrightarrow x \in K$$

Dann können wir schreiben:

$$<x,y> = (x^t)(y)$$

$$x = \left(x_1, \vdots, x_n\right), y = \left(y_1, \vdots, \right)$$

$$(x_1, \cdots, x_n)\left(y_1, \vdots, y_n\right) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)$$

Bemerkung 1 ($<,>$ ist bilinear).

$$\begin{aligned} <x + x', y> &= <x,y> + <x', y> \\ <\lambda x, y> &= \lambda <x,y> \\ <x, y + y'> &= <x,y> + <x, y'> \\ <x, \lambda y> &= \lambda <x,y> \end{aligned}$$

symmetrisch:

$$<x,y> = <y,x>$$

positiv defininit:

$$\begin{aligned} <x,x> \geq & \quad 0 \\ <x,x> = & \quad = \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\text{für} \forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

Bemerkung 2 (Hintergrund: euklidische Geometrie).

$$\|x\| = \quad = \sqrt{<x,x>} = \quad = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Bemerkung 3 (Eigenschaften von $\|.\|$).

$$\begin{aligned} \|x\| \geq 0, \text{mit } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Dann definieren wir den Abstand von $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$d(x,y) \in \mathbb{R}$$

$$d(x,y) := \|y - x\|$$

Bemerkung 4. Eigenschaften

$$\begin{aligned} d(x,y) \geq 0, \text{mit} d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(y,x) = d(x,y) \\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

$$\text{für} x, y, z \in \mathbb{R}^n$$

Wir sind motiviert, Struktiren zu definieren, basierend auf diesen Eigenschaften, so z.B.

- Bilineare Formen (symetrisch, positiv definit)
- Norme
- Metriken

Proof. $\|.\|$ und d: die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 = & \qquad =< x+y, x+y > \\
= & \qquad = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y > \leq (?) \, (\|x\| + \|y\|)^2 \\
& \qquad \Leftrightarrow < x, y > \leq \|x\| \, \|y\|
\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$< x, y >^2 \leq < x, x > < y, y >$$

mit Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

$$\Leftrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} --- & x & --- \\ --- & y & --- \end{pmatrix} \in M(2 \times n, \mathbb{R})$$

A hat Rang ≤ 1 ☐

Proof.

$$\begin{aligned}
A \cdot A^t = & \qquad = \begin{pmatrix} < x, x > & < x, y > \\ < x, y > & < y, y > \end{pmatrix} \in M(2 \times 2), \mathbb{R} \\
\det(A \cdot A^t) = & \qquad =< x, x > < y, y > - < x, y >^2
\end{aligned}$$

Es gibt eine Gleichung von Determinanten:

$$\begin{aligned}
& A, B \in M(k \times n, K) \\
\det(A \cdot B^t) = & \sum_{1 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k \leq n} \det(A^{s_1, \cdots, s_k}) \det(B^{s_1, \cdots, s_k}) \\
\text{wobei } A^{s_1, \cdots, s_k} & := (a_i, s_j)_{1 \leq i, j \leq k}, B^{s_1, \cdots, s_k} = (b_i, s_j)_{1 \leq i, j \leq k}
\end{aligned}$$

Beweis-Skizze: Reduktion zum Fall, dass die Zeilen von A und B Standardbasiselemente sind; direkte Berechnung in diesem Fall.
Es folgt:

$$\det(A \cdot A^t) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \det(A^{i,j})^2 \geq 0$$

und ist $= 0 \Leftrightarrow$ alle 2×2 Minoren von A sind $0 \Leftrightarrow rang(A) \leq 1$ ☐

Korollar 1. *Wir können definieren*

$$\angle(x, y) := \cos^{-1} \underbrace{\frac{< x, y}{\|x\| \, \|y\|}}_{\in [-1,1] \in \mathbb{R}} \in [0, \pi] \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
& \textit{für} \\
& 0 \neq x \in \mathbb{R}^n \\
& 0 \neq y \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Korollar 2. *x, y Vektoren, θ Winkel zwischen den beiden*

$$< x, y >= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2\right)$$

und deshalb:

$$\cos\theta = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2}{2\,\|x\|\,\|y\|}$$

$\implies$ *Winkel eines Dreiecks ist nur von den Seitenlängen abhängig.*

Beispiel 1.

$$\angle(x, y) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow < x, y >= 0$$

$$\underbrace{\{y| < x, y >= 0\} = 0}_{\text{Untervektorraum}} \cup \{0 \neq y \in \mathbb{R}^n | \angle(x, y) = \frac{\pi}{2}\}$$

Man nennt x und y senkrecht falls $< x, y >= 0$

Fazit 1.

$$\begin{aligned} < .,. > \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n & \qquad \text{bilinear form} \\ \|.\| \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} & \qquad \text{Norm} \\ d(.,.) \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{>0} & \qquad \text{Metrik} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{< x, x >} \\ d(x,y) &= \|y - x\| \\ < x, y > &= \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2}{2} \end{aligned}$$

1.1 Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to & \qquad \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto & \qquad x \times y \end{aligned}$$

für $y = (y_1, y_2, y_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ ist

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_2, x_1y_2 - x_2y_1)$$

oder:

$$x \times y = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

wobei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis ist. Es ist deshalb klar, dass

$$0 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} =< x, x \times y >$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} =< y, x \times y >$$

$x \times y$ liegt auf der Gerade von Vektoren senkrecht zu x und y. weiter:

$$\det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} =< x \times y, x \times y >$$

$$\begin{aligned} &= \|x \times y\|^2 = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 - < x, y >^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 \left(1 - \frac{< x, y >^2}{\|x\|^2 \|y\|^2}\right) \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 (1 - \cos^2 \angle(x,y) = \|x\|^2 \|y\|^2 \sin^2 \angle(x,y) \end{aligned}$$

Fazit 2. Wenn das Ergebnis $= 0$, folgt daraus, dass x und y linear abhängig sind. Falls x und y linear unabhängig sind, dann folgt dass $(x \times y, x, y)$ zu derselben Orientierungsklasse gehört wie (e_1, e_2, e_3). Insgesamt bedeutet dies, dass $x \times y$ folgende Eigenschaften hat:

- ist senkrecht zu x und y
- ist $0 \Leftrightarrow x$ und y sind linear abhängig
- hat Länge $\|x\| \|y\| \sin \angle(x,y)$
- und hat die Richtung, die mit x und y die gleiche Orientierungsklassse wie die Standardbasis hat.

1.2 Skalarprodukt über $\mathbb{C}^n$

Sei $z = (z_1, \cdots, z_n)$ und $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$

Bemerkung 5. Der Ausdruck macht Sinn.

$$< z, w > := z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n$$
$$< z, z > := z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

Dann kann die Länge nicht mehr interpretiert werden, z.B. für $z = (1, i, 0, \cdots, 0)$ haben wir $< z, z >= 1^2 + i^2 = 0$. Isotropische Untervektorräume von $\mathbb{C}^n$ werden nicht in in diesem Kurs behandelt. ($V \subset \mathbb{C}^n$ s.d. $< v, w >= 0\ \forall v, w \in V$). Für die Physik, die Geometrie usw. ist eine Interpretation in Zusammenhang mit Länge wichtig, deshalb brauchen wir eine neue Definition.

Definition 2 (Das kanonische Skalarprodukt). von $\mathbb{C}^n$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} < ., . >_c : \mathbb{C}^n\mathbb{C}^n &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z_1\bar{w_1} + \cdots + z_n\bar{w_n} \end{aligned}$$

Eigenschaften 1 (von $< ., >_c$).

$$\begin{aligned} < z + z', w > = & < z, w >_c + < z', w >_c \\ < \lambda z, w >_c = & \lambda < z, w >_c \\ < z, w + w' >_c = & < z, w >_c + < z, w' >_c \\ < z, \lambda w >_c = & \bar{\lambda} < z, w >_c \end{aligned}$$

für $z, z', w, w' \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$
$< ., . >_c$ ist sesquilinear

$$\begin{aligned} < w, z >_c = & \overline{< z, w >_c}\text{hermitisch} \\ < z, z >_c \in & \mathbb{R}_{\geq 0}\text{positiv definit} \\ < z, z >= 0 \Leftrightarrow & z = 0 \end{aligned}$$

Fazit 3. $< ., . >_c$ ist sesquilinear, hermitisch und positiv definit.

Proof. Bei Bedarf sonstwo nachschauen (Zu viele Zeichen und zu wenig Sinn). Es läuft auf eine Sammlung von Quadraten heraus. □

Definition 3 (Norm von $\mathbb{C}^n$).

$$\|z\| = \sqrt{< z, z >_c}$$

Bemerkung 6. Sei $w = (x_1' + xy_1', \cdots, x_n' + iy_n')$. Dann:

$$\begin{aligned} < z, w >_c = (x_1 + iy_1)(x_1' - iy_1') + \cdots + (x_n + iy_n)(x_n' - iy_n') \\ = (x_1x_1' + y_1y_1' + \cdots + x_nx_n' + y_ny_n') + i(x_1'y_1 - x_1y_1' + \cdots + x_n'x_y - x_ny_n') \end{aligned}$$

Auf diese Weise ist $< ., . >_c$ eine Erweiterung von reellen Skalarprodukt.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2n} \to & \mathbb{C}^n\mathbb{R}\text{-linear} \\ e_1 \mapsto & (1, 0, \cdots, 0) \\ e_2 \mapsto & (i, 0, \cdots, 0 \\ \cdots & \\ e_{2n} \mapsto & (0, \cdots, 0, i) \end{aligned}$$

$$< ., . >_c = \left(< ., . > \text{von} \mathbb{R}^{2n}\right) + i(\text{neues})$$

Re $< ., . >_c =< ., . >$ von $\mathbb{R}^{2n}$ unter diesem Isomorpismus.
Sei $\omega := \text{Im} < ., . >$:

$$\begin{aligned} \omega : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \to \mathbb{R} \\ \text{oder} \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to & \mathbb{R} \end{aligned}$$

Eigenschaften 2 (von ω (Imaginärteil des kanonischen Skalarproduktes)). **bilinear**

schiefsymmetrisch $\omega(w, z) = -\omega(z, w)$

$\omega(z, z) = 0 \; \forall z \in \mathbb{C}^n$ (oder $\mathbb{R}^{2n}$)

1.3 Bilinearform

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

Definition 4 (Bilinearform). Eine bilineare Form auf V ist eine Abbildung

$$s : V \times V \to K$$

so dass:

$$\begin{aligned} s(v + v', w) &= & s(v, w) + s(v', w) \\ s(\lambda v, w) &= & \lambda s(v, w) \\ s(v, w + w') &= & s(v, w) + s(v, w') \\ s(v, \lambda w) &= & \lambda s(v, w) \end{aligned}$$

$\forall v, v', w, w' \in V, \lambda \in K$
Und: s heisst symmetrisch, falls $s(w, v) = s(v, w)$ und schiefsymmetrisch, falls $s(w, v) = -s(v, w)$.

Beispiel 2.

- $< .,. > := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine symmetrische bilineare Form
- ω ist eine schiefsymmetrisch bilineare Form
- ($< .,. >_c$ nicht)
- $V = \{$stetige Abbildung$[0, 1] \to \mathbb{R}\}$ über $\mathbb{R}$: $f, g \in V$

  $$s(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

  ist eine symmetrisch bilineare Form auf V

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, mit $\dim_K V < \infty$, und $s : V \times V \to K$ eine bilineare Form.

Definition 5. Ist $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von V, so setzen wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in M(n \times n, K)$$

die <u>darstellende Matrix</u>

Korollar 3. *für* $x, y \in V$

$$\begin{aligned} x &= \quad x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \\ y &= \quad y_1 v_1, + \cdots + y_n v_n \end{aligned}$$

und

$$M_B(s) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, d.h. a_{ij} = s(v_i, v_j)$$

haben wir:

$$\begin{aligned} s(x,y) &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij} \\ &= (x_1 \cdots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x^t M_B(s) \cdot y \end{aligned}$$

Proposition 1. *Sei V ein endlich-dim. Vektorraum über K mit Basis $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge von Bilinearformen und $M(n \times n, K)$, gegeben durch*

$$(s : V \times V \to K) \mapsto M_B(s)$$

Beweis 1. *Wir schreiben einen Vektor $x \in V$ als $(x_1, \cdots, x_n)$ falls $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$. Ähnlich für y. Dann ist*

$$\begin{aligned} A \in M(n \times n, K) \mapsto & V \times V \to K \\ & (x,y) \mapsto x^t \cdot A \cdot y \end{aligned}$$

inverses zu der obigen Abbildung.

Bemerkung 7. Sei $(s : V \times V \to K)$ eine bilineare Forum und $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ die darstellende Matrix. Wir erinnern uns an die Notation

$$\begin{aligned} \Phi_B : & K^n \to V \\ & e_1 \mapsto v_i \end{aligned}$$

Dann:

$$K^n \times K^n \xrightarrow{\Phi_B \times \Phi_B} V \times V \xrightarrow{s} \quad K$$

ist gegeben durch

$$(x,y) \mapsto \quad t_x A \cdot y$$

Sei $A = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine andere Basis.

$$K^n \xrightarrow{\Phi_A} \quad V$$

$$\xrightarrow{T} = \Phi_B^{-1} \circ \Phi_A$$

$$K^n \xrightarrow{\Phi_B}$$

Proposition 2. *Transforationsformel Mit dieser Notation haben wir:*

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot T$$

Beweis 2.

$$\begin{array}{ccc} K^n \times K^n \xrightarrow{\Phi_B \times \Phi_B} V \times V \xrightarrow{s} & & K \\ (x,y) \mapsto & & t_x \cdot M_B(s) \cdot y \end{array}$$

Es folgt: (eine Bastelei. . .)

$$\begin{array}{ccc} K^n \times K^n \xrightarrow{\Phi_A \times \Phi_A} & V \times V \xrightarrow{s} & K \\ \xrightarrow{T \times T} K^n \times K^n & \xrightarrow{\Phi_B \Phi_B} \uparrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} K^n \times K^n (x,y) \mapsto & K(x^t M_a(s) \cdot y) = t_x^t M_B(s) T_y = (T_x)^t M_B(s)(T_y) \\ \quad \mapsto K^n \times K^n (T_x, T_y) & \xmapsto{(T_x)^t M_B(s)(T_y)} \uparrow \end{array}$$

Es folgt aus der oberen Proposition (Vor der Transf.):

$$T^t M_B(s) T = M_a(s)$$

Beispiel 3. $V = K^n$, mit Standardskalaprodukt $< ., . >$. Ist $B = (e_1, \cdots, e_n)$, so ist

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = M_{\text{Standardbasis}}(< ., . >)$$

Sei

$$\begin{array}{rll} A = & (e_1, e_2 - e_1, & e_3 - e_2, \cdots, e_n - e_{n-1}) \\ =: & (u_1, u_2, & \cdots, u_n \end{array}$$

Direkt aus der Definition:

$$< u_i, u_j >= \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 2 & i = j > 1 \\ -1 & |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

oder mit der Transformationsformel

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \cdots & & \\ \cdots & & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{und} T^t E_N T''$$

Bemerkung 8. Ist A die darstellende Matrix bezügloich einer Basis, so haben wir:

- symmetrisch $\Leftrightarrow A = A^t$
- schiefsymmetrisch $\Leftrightarrow A = -A^t$

Das stimmt überein mit (vgl. Übungsblatt 3): $A \in M(n \times n)$ ist symmetrisch $\Leftrightarrow A = A^t$. A ist schiefsymmetrisch oder antisymmetrisch (oder alternierend wenn $\text{char}(K) \neq 2$) $\Leftrightarrow A = -A^t$

1.4 Bilineare und quadratische Formen

Eine quadratische Form $V \to K$ wird zu einer Bilinearform assoziert. Falls $\dim_K V < \infty$: "quadratische Form" bedeutet $q : V \to K$ bezüglich einem Koordinatensystem gegeben als homogenes quadratisches Polynom. Ist $s : V \times V \to K$ eine bilineare Form, dann heisst

$$\begin{aligned} q : V &\to K \\ v &\mapsto q(v) = s(v,v) \end{aligned}$$

die zu s gehörige quadratische Form.

Beispiel 4. $< v, v >= v_1^2 + \cdots + v_n^2$ für $v \in K^n$
Für $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine symmetrische Matrix mit $s : V \times V \to K$, $(x, y) \mapsto x^t Ay$, haben wir

$$\begin{aligned} s(x,x) &= x^t Ax \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so haben wir:

$$\begin{aligned} \{\text{symm. bilineare Formen in } K^n\} &\leftrightarrow \{\text{quadr. Formen auf} K^n\} \\ s &\mapsto q(v) := s(v,v) \\ &\leftarrow \text{(Polarisierungsformel)} \end{aligned}$$

1.4.1 Polarisierungsformel

Ist s eine symmetrische Bilinearform und q die zu s gehörende quadratische Form über einem Vektorraum V über K mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$, dann gilt:

$$\begin{aligned} s(v,w) &= \frac{1}{2} \left(q(v+w) - q(v) - q(w) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(q(v) + q(w) - q(v+w) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(q(v+w) - q(v-w) \right) \end{aligned}$$

1.5 Sesquilineare Form

Definition 6. Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung

$$s : V \times V \to \mathbb{C}$$

heisst sesquilinear falls:

$$\begin{aligned} s(v+v', w) &= s(v,w) + s(v', w) \\ s(\lambda v, w) &= \lambda s(v,w) \\ s(v, w+w') &= s(v,w) + s(v,w') \\ s(v, \lambda w) &= \bar{\lambda} s(v,w) \end{aligned}$$

für $v, v', w, w' \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Beispiel 5. $< ., . >$ auf $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} s(f,g) &= \int_0^1 f(x) g(x) dx \\ \text{auf} V &:= \{\text{stetige Abb.}\}[0,1] \to \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

Definition 7. Eine sesquilineare Form heisst <u>hermitesch</u>, falls

$$s(w,v) = s(v,w)\ \forall v,w \in V$$

Beispiel 6. $< .,. >_c$ auf $\mathbb{C}^n$ ist hermitesch.

Bemerkung 9. Man spricht von <u>hermiteschen Form</u>, diese sind immer sesquilinear

Definition 8. Sei $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, und $B := (V_i)_{1\leq i\leq n}$ eine Basis. Ist s eine sesquilineare Form, so definieren wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1\leq i\leq n}$$

die <u>darstellende Matrix</u>. Sind $z, w \in V$

$$\begin{aligned} z &= z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n \\ w &= w_1 v_1 + \cdots + w_n v_n \end{aligned}$$

dann haben wir

$$\begin{aligned} s(z,w) &= \sum_{i,j=1}^{n} z_i \bar{w_j} a_{ij} \text{wobei} a_{ij} = s(v_i, v_j) \\ &= (z_1 \cdots z_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w_1} \\ \vdots \\ \bar{w_n} \end{pmatrix} = z^t M_B(s) \cdot \bar{w} \end{aligned}$$

Proposition 3. *Sei V ein endlich dim. $\mathbb{C}$ Vektorraum und $B = (v_i)_{1\leq i\leq n}$. Wir haben eine Bijektion*

$$\{\textit{sesquilineare Form auf } V\} \leftrightarrow M(n \times n, \mathbb{C})$$

Unter dieser Bijektion haben wir:

$$\{\textit{hermitesche Formen}\} \leftrightarrow \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) : A^t = \bar{A}\}$$

Man sagt: eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $A^t = \bar{A}$ ist <u>hermitesch</u>.

Satz 1. *Transformationsformel Sei $A = (u_1, \cdots, u_n)$ eine andere Basis mit Transformationsmatrix T:*

TODO: hier einfügen

Dann gilt:

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot \bar{T}$$

Mit $g(v) := s(v,v)$ gilt die Polarisierungsformel

$$s(v,w) = \frac{1}{4}\left(q(v+w) - q(v-w) + iq(v+iw) - iq(v-iw)\right)$$

Definition 9. Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, V ein K-Vektorraum und $s : V \times V \to K$ eine Billinearform $\begin{cases} \text{symmetrisch} & K = \mathbb{R} \\ \text{hermitesch} & K = \mathbb{C} \end{cases}$ heisst <u>positiv definit</u>, falls $s(v;v) > 0$ $\forall 0 \neq v \in V$

Beispiel 7. $< .,. >$ ist positiv definit auf $\mathbb{R}^n$
$< .,. >_c$ ist psoitiv definit auf $\mathbb{C}^n$

Definition 10. Ein <u>Skalarprodukt</u> ist $\begin{cases} \text{positiv definite symetrische bilineare Form} & K = \mathbb{R} \\ \text{eine positiv definite hermetische Form} & K = \mathbb{C} \end{cases}$

Definition 11. Skalarprodukt oft $< .,. >$, Norm $\|v\| := \sqrt{< v, v >}$

Definition 12. Euklidischer Vektorraum Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt

Definition 13. Untärer Vektorraum Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt

Beispiel 8.

$$V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\text{stetig}\} \text{ mit } < f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$$
$$V = \{f : [0,1] \to \mathbb{C}\text{stetig}\} \text{ mit } < f, g >= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

in beiden Fällen

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx}$$

"L^2-Norm"

Bemerkung 10. In einem beliebigen euklidischen bzw. unitären Vektorraum gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichtung

$$|< v, w >| \leq \|v\| \, \|w\| \;\; \forall v, w \in V$$

mit $=$ genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis 3. *(Skizze) klar falls $v = 0$ oder $w = 0$, also nehmen wir an, dass $v \neq 0$ und $w \neq 0$ 1. Reduktion: zum Fall $\|v\| = \|w\| = 1$.*

$$v_1 := \frac{v}{\|v\|} w_1 := \frac{w}{\|w\|}$$
$$\|v_1\| = 1 \, \|w_1\| = 1$$

2. Reduktion: Es reicht aus, zu zeigen: $\mathrm{Re} < v, w > \leq 1$ *$=$ genau dann wenn $V = W$*

$$\begin{aligned} |< v, w >| &= & \mu < v, w > \mu \in \mathbb{C}, |\mu| = 1 \\ &= & < \mu v, w > \in \mathbb{R}_{\geq} \\ &= & \mathrm{Re} < v', w > \textit{wobei} v' := \mu v \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung $\leq$, Gleicheit: v, w linear unabhängig $\implies$ v', w linear unabhängig $\implies$ $v' \neq w$

Eigenschaften 3.

$$\begin{aligned} &= \text{falls} \\ < v - w, v - w > &\geq 0 v - w = 0 \\ < v, v > - < v, w > - < w, v > + < w, w > &\geq 0 v = w \\ 1 - < v, v > - \overline{< v, w >} + 1 &\geq 0 v = w \end{aligned}$$

Beispiel 9. Ist $T : V \to \mathbb{R}^n$ oder $T : V \to \mathbb{C}^n$ ein Isomorphismus, dann ist $s : V \times V \to \mathbb{R}$ (bzw. $s : V \times V \to \mathbb{C}$) gegeben durch

$$s(x, y) =< T_x, T_y >$$

bzw.

$$s(x, y) =< T_x, T_y >_c$$

ein Skalarprodukt.

Definition 14. Sei V ein exklusiver, bzw. unitärer Vektorraum

- $v, w \in V$ heisst orthogonal, falls $< v, w >= 0$
- $U, W \subset V$ heissen orthogonal (geschrieben $U \perp V$) falls $U \perp W$ $\forall u \in U$, $w \in W$

- $U \subset W$ das orthagonale Koplement ist $U^\perp = \{v \in V : u \perp v \forall u \in U\}$
- $v_1, \cdots, v_n$ sind orthogonal, falls $v_i \perp v_j \ \forall i \neq j$
- $v_1, \cdots, v_n$ sind orthonormal, falls $v_i \perp v_j \ \forall i \neq j$ und $\|v_i\| = 1 \ \forall i$
- V ist orthagonale direkte Summe von Untervektorräumen $V_1, \cdots, V_r$ falls

$$V = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_r$$
$$V_i \perp V_j \forall i \neq j$$

$$C([-1,1], \mathbb{R}) := \{f : [-1;1] \to \mathbb{R}\text{stetig}\}$$

dann ist $C([-1,1]\mathbb{R})$ die orthogonale direkte Summe von $C([-1,1]\mathbb{R})_{\text{gerade}}$ und $C([-1,1]\mathbb{R})_{\text{ungerade}}$. gerade: $f(-x) = f(x)$ und ungerade: $f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{gerader Teil}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{ungerader Teil}}$$

g gerade, h ungerade $\implies$ gh ungerade $\implies$ $< g, h >= \int_{-1}^{1} g(x)h(x) = 0$

Bemerkung 11. Ist $v_1, \cdots, v_n$ eine orthonormale Familie mit $v_i \neq 0 \forall i$, so gilt

1. $(i)(v_1, \cdots, v_n)$ ist linear unabhängig ($c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0 \implies c_i < v_i, v - i > + \cdots + c_i < v_i, v_i > + \cdots + c_n < v_n, v_i >= 0 \implies c_i \|v_i\|^2 = 0 \implies c_i = 0$)

2. $\left(\frac{v_1}{\|v_i\|}, \cdots, \frac{v_n}{\|v_i\|} \right)$ ist orthonormal

Satz 2. *Ist $(v_1, \cdots, v_n)$ eine orthonormale Basis von V, so gilt folgendes für beliebiges $v \in V$*

$$v = \sum_{i=1}^{n} < v_i, v_j > v_i$$

$$\begin{aligned} v = & \sum_{i=1}^{b} c_i v_i \\ < v, v_j > = & \sum_{i=1}^{n} c_i < v_i, v_j > \\ = & c_j < v_i, v_j > = & c_j \end{aligned}$$

Proposition 4. *Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $(V, < .,. >)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum über K*

1. *Ist $n := \dim_K V < \infty$ und $(v_1, \cdots, v_d)$ eine orthonormale Familie von Vektoren von V, so existieren $v_{d+1}, \cdots, v_n$, so dass $(v_1, \cdots, v_n)$ eine orthonormale Basis von V ist.*

2. *Ist $U \subset V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so gilt $V = U \bigoplus U^\perp$, orthonormal direkte Summe.*

Beweis 4. *Es gibt triviale Fälle: $d = n$ in 1., $U = 0$ in 2. Auch: der Fall ($d = 0$) in 1. $\Leftarrow d = 1$: $0 \neq v \in V$ beliebiger Vektor, wir nehmen $b_1 = \frac{v}{\|v\|}$*
Beweis durch Induktion nach N mit Indunktionsannahme 1. gilt für $n \leq N$ $N = 1$ okay.

Plan: *Wir zeigen IA $\implies$ 2. für $\dim_K U \leq N$ und IA $\implies$ 1. für $n \leq N + 1$.*
IA $\xRightarrow{\dim U \leq N}$ $\exists$ orthonormale Basis $(u_1, \cdots, u_d)$ von U $d := \dim U$. Für beliebiges $v \in V$ gilt:

$$v - \sum_{i=1}^{n} < v_i, v_j > u_i \in U^\perp$$

denn

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^{n} < v_i, u_i > u_i, u_j \right\rangle =< v, u_j > - \sum_{i=1}^{n} < v, u_j >< u_i, u_j >= 0$$

Und: 1. für $\dim V \leq N + 1$ folgt aus IA und 2. für $U \leq N$

$$\begin{aligned} 1 \leq d < n = \dim V \geq N + 1 \\ \implies 1 \leq d \leq N und 1 \leq \dim V - d \geq N \end{aligned}$$

Sei $U := span(v_1, \cdots, v_d)$ Aus 2. haben wir $V = U \bigoplus U^\perp$ Nach IA, $\exists$ orthonormale Basis $(v_{d+1}, \cdots, v_n)$ von $U^\perp$ Es folgt, dass $(v_1, \cdots, v_n)$ ist eine orthonormale Basis von V.

Eigenschaften 4. Praktisches Verfahren zu testen ob ein symmetrisch bilineare bzw. hermetische Form ein Skalaprodukt ist (falls $\dim_K V < \infty$). Verfahren:

U : 1-dimensional	$U^\perp$: 2-dim
$s(e_1, e_1) = 3$	=24

- wählen $U \subset V$ nicht trivialer Untervektorraum (z.B. $U = span(v), 0 \neq v \in V$)
- Berechnen $U^\perp$
- Testen:
  - Ist $V = U \bigoplus U^\perp$?
  - Ist die Einschränkung von der Form auf U ein Skalarprodukt?
  - Ist die Einschränkung von der Form auf $U^\perp$ ein Skalarprodukt?

Beispiel 10. $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die entsprechende Bilinearform

$$(x, y) \mapsto t_x \cdot M \cdot y$$

$$\begin{aligned} U &= (e_1) \\ U^\perp &= \{(x_1, x_2, x_3 : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} \\ &= ((1, -3, 0), (0, 2, -1)) \end{aligned}$$

Die darstellende Matrix:

$$s|_{U^\perp} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} U &\cong \mathbb{R}^2 \\ W &= (e_1) \in \mathbb{R}^2 \\ W^\perp &= \{(x_1, x_2) | 24x_1 - 21x_2 = 0\} \\ &= (21, 24) \end{aligned}$$

W 1-dim, $W^\perp$ 1-dim

$$(s|_{U^\perp})(e_1, e_2) = 24$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 18 \end{pmatrix} = -216$$

$\implies$ kein Skalarprodukt

1.6 Volumen

Definition 15. Volumen $\begin{matrix} \text{Skalarprodukt} & \rightsquigarrow & \text{Norm} & \rightsquigarrow & \text{Metrik} \\ < .,. > & & \|v\| := \sqrt{< v, v >} & & d(x, y) = \|y, x\| \end{matrix}$

$K = \mathbb{R} \rightsquigarrow$ Volumen ($\dim V < \infty$)

1.6.1 Spat

Definition 16. Spat $u_1, \cdots, u_n$ orthonormale Basis. Dann ist der von $(u_1, \cdots, u_n)$ aufgespannte Spat definiert als (wobei $c_i :=$ von $(u_1, \cdots, u_n)$ aufgespannten Spat)

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i u_i | 0 \leq c_i \leq 1 \; \forall i \right\}$$

Vol(Spat):=1
Falls $v_1, \cdots, v_n \in V$ beliebig sind, dann hat der von $(v_1, \cdots, v_n)$ aufgespannte Spat

$$\mathrm{Vol} = \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| \quad v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i$$

Sei $b_i j :=< v_i, v_j >$ und $B := \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ Wir haben $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$, also $B = A \cdot A^t$. Es folgt:

$$\mathrm{Vol} = \sqrt{(\det A)^2} = \sqrt{\det B}$$

Vorteile:

- keine Wahl von orthonormaler Basis nötig
- auch sinnvoll für eine Kollektion $v_1, \cdots, v_m$ evzl. $m \neq n$

Beispiel 11. $m = 1$

$$\begin{aligned} \det B = & \quad \|v_1\|^2 \\ \sqrt{\det B} = & \quad \|v_1\| \end{aligned}$$

Definition 17. Grammsche Determinante Im m-dim Volumen $:= \sqrt{G(v_1, \cdots, v_m)}$ wobei

$$G(v_1, \cdots, v_m) := \det \left(< v_i, v_j > \right)_{1 \leq i,j \leq m}$$

die sogenannte Grammsche Determinante ist.

Bemerkung 12. Es gilt $G(v_1, \cdots, v_m) = 0 \Leftrightarrow v_1, \cdots, v_m$ lineare abhängig, weil

$$A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

mit

$$G(v_1, \cdots, v_m) = \det(A, A^t) = \sum (m \times m\mathrm{Minor})$$

Bemerkung 13.

$$\mathrm{Vol}(v_1, \cdots, v_m) := \sqrt{G(v_1, \cdots, v_m)}$$

ist 0 falls $\exists i : v_i = 0$
sonst:

$$\mathrm{Vol}(v_1, \cdots, v_m) = \|v_1\| \cdots \|v_m\| \, \mathrm{Vol}(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \cdots, \frac{v_m}{\|v_m\|}$$

Satz 3. *Hadamard'sche Ungleichung*

$$Vol(v_1, \cdots, v_m) \leq \|v_1\| \cdots \|v_m\|$$

für $0 \neq v_i \in V$, $i = 1, \cdots, m$. *Mit Gleichheit genau dann wenn* $v_1, \cdots, v_m$ *orthogonal sind.*

Beweis 5. *Durch fallende Induktion nach*

$$\max \{|I| : I \subset \{1, \cdots, m\} \,|(v_i)_{i\in I} \text{ orthogonal}\}$$

Fall $\max\{\cdots\} = m$ *das bedeutet,* $v_1, \cdots, v_m$ *sind orthogonal. Dann:*

$$G(v_1, \cdots, v_m) = \det \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|v_m\|^2 \end{pmatrix} = \|v_1\|^2 \cdots \|v_m\|^2$$

Die ist der Induktionsanfang.
Sei $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r < m$. *Induktionsanahme: Ungleichung für den Fall*

$$\max \{|I| : (v_i)_{i\in I} \text{ orthogonal}\} > r$$

Sei $v_1, \cdots, v_m$, *so dass* $\max\{\cdots\} = r$. *o.B.d.A:* $v_1, \cdots, v_r$ *orthagonal. Wir schreiben:*

$$v_m = \underbrace{v_m - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_m, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i}_{\tilde{v_m} \in \operatorname{span}(v_1,\cdots,v_r)^\perp} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_m, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i}_{\tilde{\tilde{v}}_m \in \operatorname{span}(v_1,\cdots,v_r)}$$

$$< \tilde{v_m}, \tilde{\tilde{v_m}} = 0$$

- $v = \tilde{v} + \tilde{\tilde{v}}$
- $< \tilde{v}, \tilde{\tilde{v}} >= 0$
- $\|v\|^2 = \|\tilde{v}\|^2 + \|\tilde{\tilde{v}}\|^2$

Das ist eine <u>*Orthogonale Projektion*</u> *Wir haben*

$$G(v_1, \cdots, v_m) = G(v_1, \cdots, v_{m-1}, \tilde{v_m})$$

weil (Spalten- und Zeilenumforumgen. . .). Es folgt:

$$\begin{aligned} Vol(v_1, \cdots, v_m) = Vol(v_1, \cdots, v_{m-1}, \tilde{v_m}) &\leq \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \, \|\tilde{v_m}\| \\ &< \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \, \|\tilde{v_m}\| \end{aligned}$$

Definition 18. Gram-Schmidt-Orthagonalisierungsverfahren

$$\tilde{v_r} := v_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{< v_r, \tilde{v_i} >}{< \tilde{v_i}, \tilde{v_i} >} \tilde{v_i}, \text{für} 1, 2, \cdots$$

gegeben: eine Kollektion $(v_1, \cdots, v_n)$ oder abzählbar unendlich $(v_1, v_2, \cdots)$. Das Verfahren produziert $(\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \cdots)$, mit:

$$\begin{array}{lll} (\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \cdots & & = \quad (v_1, v_2, \cdots) \\ (\tilde{v_1}, \cdots, \tilde{v_m}) & & =(v_1, \cdots, v_m) \ \forall m \\ (\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \cdots) & \text{sind orthogonal} & \end{array}$$

Beispiel 12. $C([-1, 1], \mathbb{R})$ mit $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x) \,\mathrm{d}\, x$

$$(1, x, x^2, \cdots)$$

$$\xrightarrow{\text{GS}} \frac{< x^2, 1 >}{< 1, 1 >} = \frac{2/3}{2}$$

$$(1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5} \cdots)$$

Bis auf Normalisierung bekommen wir die Legendre-Polynome.

Fazit 4. $\begin{matrix} \text{Bilinearform} & \xrightarrow{\text{+ def, symm}} \\ \text{Sesquilinearform} & \xrightarrow{\text{+ def, hermitesch}} \end{matrix}$ Norm $\to$ Metrik Norm:

$$\begin{aligned} \|.\| : V &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \|x\| = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \, \|x\| \\ \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Metrik:

$$\begin{aligned} d : V \times V &\to \mathbb{R}_{\leq 0} \\ d(x,<) = 0 &\Leftrightarrow x = y \\ d(x,y) &= d(y,x) \\ d(x,z) &\leq d(y,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

Aber: nicht jede Metrik, nicht einmal jede transinvariante Metrik kommt von einer Norm.

Bemerkung 14. Eine Norm kommt von einer +def, symm Bilinearform

$$\Leftrightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \ \forall x, y \in V$$

Definition 19. ausgeartete Bilinearform Eine Bilinearform $s : V \times V \to K$ ist ausgeartet (oder: entartet), falls eine oder beide der induzierten Abbildungen $V \to V^*$ <u>nicht</u> injektiv ist.

$$\begin{aligned} v &\mapsto (w \mapsto s(v,w)) \\ v &\mapsto (w \mapsto s(w,v)) \end{aligned}$$

Bemerkung 15. Falls $\dim_K V < \infty$, dann:

$v \mapsto (w \mapsto s(v,w))$ injektiv

$\Updownarrow$

$v \mapsto (w \mapsto s(w,v))$ injektiv

$\Updownarrow$

s ist nicht ausgeartet

$\Updownarrow$

die darstennelde Matrix ist invertierbar

$$\begin{aligned} s(v,w) &= v^t \cdot A \cdot w \\ &= \left(A^t \cdot v\right)^t \end{aligned}$$

¡++¿

Satz 4. *Sei V ein K-Vektorraum, $s : V \times V \to K$ eine symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Für $U \subset V$ Untervektorraum, schreiben wir noch*

$$U^\perp := \{v \in V : s(u,v) = 0 \ \forall u \in U\}$$

($s(v,u) = 0 \Leftrightarrow s(u,v) = 0$ weil s symm. bzw. schiefsymm.)

Proposition 5. *Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $s : V \times V \to K$ eine nicht ausgeartete symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:*

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

Beweis 6. *Sei* $(v_i)_{i=1,\cdots n}$ *eine Basis mit* $n := \dim V$*, und* A *die darstellende Matrix von* s *bzw.* (v_i)*. Wir haben dann:*

$$s(x,y) = x^t \cdot A \cdot y$$

und $A^t = \pm A$, $\det A \neq 0$

$$U^{\perp} = \left\{x \in V_i | x^t \cdot A \cdot y = 0 \ \forall y \in U\right\} \quad = \left\{x \in V_i | (x \cdot A)^t \cdot y = 0 \ \forall y \in U\right\}$$

Sei $F : V \to V$ *lin.Abb.* $\leftrightarrow A$*. Dann:*

$$F(U^{\perp}) = \left\{Ax | (Ax)^t y = 0 \ \forall y \in U\right\} \qquad = \left\{Ax | \tilde{x}^t y = 0 \ \forall y \in U\right\}$$

Es folgt: mit

$$B := \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_d \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$(u_1, \cdots, u_d)$ *Basis von* U*, dann ist* $F(U^{\perp}) = \operatorname{Ker} B$*. Jetzt:*

$$\dim U^{\perp} = \dim F(U^{\perp}) = \dim \operatorname{Ker} B = n - \dim U$$

Korollar 4. $\dim U < \infty$, $s : V \times V \to K$ *nicht ausgeartet, (schief-) symm.*

$$U \subset \Longrightarrow \left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$$

Bemerkung 16. Es ist nicht immer der Fall, dass $V = U \bigoplus U'$, weil es ist möglich, dass $U \cup U^{\perp} \neq 0$. 2 Extremfälle:

- U ist isotropisch ($s|_{U'}$ ist trivial) $\Leftrightarrow U \subset \underbrace{U^{\perp}}_{\dim V - \dim U}$
- $s|_U$ ist auch nicht ausgeartet $\Leftrightarrow U \cup U^{\perp} = 0 \Leftrightarrow V = U \bigoplus U^{\perp}$

Aus 1. ist klar:

$$\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V \ \forall \text{isotrop} U \subset V$$

1.7 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

$K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Definition 20. orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei $V, \langle , \rangle$ ein ortho. bzw. unitärer Vektorraum. Ein Endomprhismus $F : V \to V$ heisst orthogonal bzw. unitär falls

$$\langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \ \forall v, w \in V$$

Bemerkung 17. Das ist äquivalent zu

$$\|F(v)\| = \|v\| \ \ \forall v \in V$$

Eigenschaften 5. orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei F ein ortho. bzw. unitärer Endomorphismus. Dann:

- F ist injektiv
- Falls $\dim_K V < \infty$, F ist bijektiv, und F' ist auch ortho. bzw. unitär
- Für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ gilt $|\lambda| = 1$. Eigenvektor v:
$$\|v\| = \|F(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$$

Falls $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt

$$\langle v, w \rangle = v^t w \text{bzw} \qquad \langle v, w \rangle_c = v^t \bar{w}$$

Ist F zur Matrix A entsprechend, dann

$$\begin{aligned} \langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \Leftrightarrow & \qquad (Av)^t A w = v^t w \\ & \text{bzw.} (Av)^t \overline{Aw} = v^t w \\ \Leftrightarrow \ v^t A^t A w = v^t w \Leftrightarrow & \qquad A^t A = E_n \\ \text{bzw} \Leftrightarrow \ v^t A^t \bar{A} \bar{w} = v^t \bar{w} \Leftrightarrow & \qquad A^t \bar{A} = E_n \end{aligned}$$

Definition 21. ortho. bzw. unitäre Matrix $O(n) := A \in GL_n(\mathbb{R})$ heisst orthogonal falls $A^t A = E_n$
$U(n) := A \in GL_n(\mathbb{C})$ heisst unitär falls $A^t \bar{A} = E_n$

Not 1.

$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | A \text{ orthogonal}\}$$
$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) | A \text{ unitär}\}$$

Weil

$$A, B \in O(n) \implies (AB)^t (AB) = B^t A^t AB = B^t B = E_n \implies AB \in O(n)$$

haben wir $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$ ist eine Untergruppe. Ähnlich: $U(n) \subset GL_n(\mathbb{C})$ ist eine Untergruppe.

Not 2.

$$SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$$
$$SU(n) = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$$

Not 3. ortho. bzw. unitärer Vektorraum

$$O(V) = \{F \in GL(V)|\text{ortho.}\}$$

$$U(V) = \{F \in GL(V)|\text{unitär}\}$$

Bemerkung 18.

$$A \in O(n) \implies \det A \in \{\pm 1\}$$
$$A \in U(n) \implies \det A \in \{\pm z \in \mathbb{C} : |Z| = 1\}$$

Eigenschaften 6. Charakterisierungen von ortho. bzw. unitären Matrizen Äquivalente Charakterisierungen von orthogonalen bzw. unitären Matrizen $A \in GL_n(\mathbb{R})$:
A ist orthogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Leftrightarrow A^t A = E_n \Leftrightarrow AA^t = E_n \Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.
Ähnlich:
A ist unitär $\Leftrightarrow A^{-1} = \bar{A}^t \Leftrightarrow A^t \bar{A} = E_n \Leftrightarrow \bar{A} A^t = E_n \Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n \Leftrightarrow$ die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$.
Für $n = 1$

$$O(1) = \{\pm 1\} \qquad U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cong S^1$$
$$SO(1) = \{1\} \qquad SU(1) = \{1\}$$

Für $n = 2$: $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 + b^2 = 1$

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} |\theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} |\theta \in \mathbb{R} \right\}$$
$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} |\theta \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1$$

$(z, w) \in \mathbb{C}^2$, $|z|^2 + |w|^2 = 1$, $(-\bar{w}, \bar{z}) \perp (z, w)$

$$U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\lambda\bar{w} \\ w & \lambda\bar{z} \end{pmatrix} |(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1 \right\} \cong S^3 \times S^1$$

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} |(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \cong S^3$$

$SO(3)$ eine explizite Beschreibung ist möglich (später)

Proposition 6. *Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$, und sei $F : V \to V$ ein unitärer Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von F.*

Beweis 7. *Durch Indunktion nach* $\dim V$. $\dim V = 0, 1$ *trivial.* $\dim V \geq 2$ *Weil $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Sei $v \in V$ ein Eigenvektor, mit $\|v\| = 1$. Weil F untär ist, haben wir $F(v^\perp) = v^\perp$. Wir haben* $\dim v^\perp = \dim V - 1$

$$w \in v^\perp \langle v, w \rangle \implies \langle v, w \rangle = 0$$
$$\lambda \langle v, F(w) \rangle = \langle \lambda v, F(w) \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle = 0$$
$$\implies F(v^\perp) \subset v^\perp$$

Aus der Induktionsannahme folgt, dass $\exists$ Orthonormalbasis von $v^\perp$ von Eigenvektoren von F. Zusammen mit $v \overset{V = \text{span} \bigoplus v^\perp}{\rightsquigarrow}$ Orthonormalbasis von V

Korollar 5. *Sei $A \in U(n)$. Dann $\exists S \in U(n)$, $\theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R}$ so dass*

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

Proposition 7. *Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$, und sei $F : V \to V$ ein orthogonaler Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis $\left(v_1^+, \cdots, v_r^+, v_1^-, \cdots, v_s^-, w_1, w_1', \cdots, w_t, w_t'\right)$*

- $F(v_i^+) = v_i^+$
- $F(v_i^-) = -v_i^-$
- $F(w_i) = (\cos\theta_i)w_i + (\sin\theta_i)w_i'$
- $F(w_i') = (-\sin\theta w_i) + (\cos\theta_i)w_i'$

mit $\theta_i \in \mathbb{R}$, $0 < |\theta| < \phi$, $i = 1, \cdots, t$

Beweis 8. *Durch Induktion nach* $\dim V$*:* $\dim V = 0, 1, 2$ *trivial.* $\dim > 2$ *(nächstes mal)*