Lineare Algebra I - Vorlesungs-Script

Prof. Alberto Cattaneo

Inhaltsverzeichnis

1 Integralrechnung **1**
1.1 Treppenfunktionen . . . 1
1.2 Regelfunktionen . . . 2
1.2.1 Zusammenfassung . . . 3
1.2.2 Vorgehen . . . 4
1.2.3 Eigenschaften . . . 7
1.3 Fundamentalsatz der Analysis . . . 9
1.4 Integrationstechniken . . . 11
1.4.1 Partielle Integration . . . 12
1.4.2 Substitutionsregel . . . 12
1.4.3 Rationale Funktionen . . . 13
1.5 Reihenintegration . . . 14
1.6 Reimannsche Summen . . . 15
1.7 Das uneigentliche Integral . . . 16
1.8 Majorantenkriterium . . . 17

2 Kurven (Kapitel 12) **18**
2.1 Die Bogenlänge . . . 20
2.2 Parameterwechsel . . . 22
2.3 Sektorfläche einer ebenen Kurve . . . 23

3 Taylor [Kap 14] **27**
3.1 Lokale Extrema . . . 30
3.2 Taylorreihen . . . 31

4 Elemente der Topologie [Band 2, Kap 1] **32**

1 Integralrechnung

Ziel mathematisch präzise Formulierung des "Flächeninhalts" unter dem Graphen einer Funktion

Fragen

- Welche Funktionen sind zulässig?
- Wie definiert man das Integra für diese Funktionen?

Idee

1. def. Integral für spezielle Funktionen (Treppenfunktionen)
2. betrachte Folgen von Treppenfunktionen und führe geeigneten Konvergenzbegriff ein (gleichmässige Konvergenz), $\rightarrow$ mögliche Limiten sind Regelfunktionen
3. falls $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ (Folge von Treppenfunktionen), setze $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, x := \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, x\right)$

$$f_n \rightarrow f \text{folgt} \left(\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, x\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent}$$

$$f_n \& g_n \rightarrow f \text{zwei Folgen} \implies \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b g_n\right)$$

1.1 Treppenfunktionen

- $a < b, a, b \in \mathbb{R}$ $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ <u>Zerlegung</u> von $[a, b] \Leftrightarrow a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$
- $\phi[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ <u>Treppenfunktion</u> (auf $[a, b]$) $\Leftrightarrow \exists$ Zerlegung $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ von $[a, b]$ so dass $\phi|_{(x_{n-1}, x_n)}$ konstant $\forall k = 1, \cdots, n$

Bemerkung 1.
- keine Aussage über $\phi(x_0), \cdots, \phi(x_n)$
- nicht verboten zu feine Zerlegungen zu betrachten
- $\tau([a, b])$ (ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, ϕ, ψ Treppenfunktionen) Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$

Definition 1. Integral von Treppenfunktionen $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Teppenfunktion mit Zerlegung $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$

- c_K = Funktionswert von ϕ auf (x_{k-1}, x_k)
- $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

$$\int_a^b \phi(x) \,\mathrm{d}\, x = \sum_{k=1}^{n} (c_k \cdot \Delta x_k)$$

Lemma 1. *Das Integral einer Treppenfunktion ist unabhängig von der gewählten Zerlegung*

Beweis 1.

$$\begin{aligned}
Z = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \;\&\; Z' = \{y_0, y_1, \cdots, y_m\} &\qquad \textit{Zerlegungen von}[a,b] \\
\phi|_{(x_{k-1}, x_k)} \;\&\; \phi|_{(y_{k-1}, y_k)} &\qquad \textit{konstant} \\
\rightsquigarrow I(Z) \rightsquigarrow I(Z') &\qquad \leftarrow \textit{Summen} \sum_{k=1}^{n} c_k \Delta x_k \;\&\; \sum_{k=1}^{m} c'_k \Delta y_k
\end{aligned}$$

Frage $I(Z) = I(Z')$

Zeige $I(Z) = I(Z \cup Z') = I(Z')$
$Z \cup Z'$ entsteht aus Z durch Hinzufügen von endlich vielen Punkten.
Angenommen $Z \cup Z' = Z \cup \{y\}, y \notin Z$. Leicht zu sehen: $I(Z) = I(Z \cup \{y\})$

$I(Z) = I(Z \cup \{y\}) \overset{Ind}{\Longrightarrow} I(Z) = I(Z \cup \{y_1\}) = I(Z \cup \{y_1\} \cup \{y_2\}) = \cdots = I(Z \cup Z')$

Lemma 2.

$$\int_a^b \mathrm{d}\, x \tau([a,b]) \to \mathbb{C}$$

1. *$\int_a^b \mathrm{d}\, x$ ist linear, d.h.*

$$\forall \phi, \psi \in \tau([a,b]), \alpha, \beta, \in \mathbb{C} : \int_a^b \alpha\phi + \beta\psi \,\mathrm{d}\, x = \alpha \left(\int_a^b \phi \,\mathrm{d}\, x \right) + \beta \left(\int_a^b \phi \,\mathrm{d}\, x \right)$$

2.

$$\left| \textstyle\int_a^b \phi \,\mathrm{d}\, x \right| \leq \int_a^b |\phi| \,\mathrm{d}\, x \leq (b-a) \underbrace{\|\phi\|}_{Supremum}$$

3. *für $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x) \leq \psi(x)$ $\forall x \in [a,b] \implies$*

$$\int_a^b \psi \,\mathrm{d}\, x \leq \int_a^b \psi \,\mathrm{d}\, x$$

Beweis 2. *ϕ und ψ Treppenfunktionen mit Zerlegung Z bzw. Z' $\implies$ $Z \cup Z'$ Zerlegung für ϕ und ψ*

$$\int_a^b \alpha\phi + \beta\psi \,\mathrm{d}\, x = (\alpha\phi)|_{(x_{k-1}, x_k)} = \alpha(\phi|_{(x_{k-1}, x_k)})$$

wobei $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.
Wert von ϕ auf (x_{k-1}, x_k) =: c_k, Wert von ψ auf (x_{k-1}, x_k) =: d_k

$$\sum_{i=1}^n (\alpha c_k + \beta \,\mathrm{d}_k) \Delta x_k = \alpha(\sum_{i=1}^n) + \beta(\sum_{i=1}^n \mathrm{d}_k \,\Delta x_k) = \alpha \int_a^b \phi \,\mathrm{d}\, x + \beta \int_a^b \psi \,\mathrm{d}\, x$$

Bemerkung 2. $\int_a^b \mathrm{d}\, x : \tau([a,b]) \to \mathbb{C}$ linear, $\ker(\int_a^b \mathrm{d}\, x) \subset \tau([a,b])$ Untervektorraum

Bemerkung 3. lineares erzeugendes System von $\tau([a,b])$ $A \subset \mathbb{R}$

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\{1_{[c,d]}$ mit $a < c \leq d < b$ $\}$ erzeugendes System

1.2 Regelfunktionen

Definition 2. Regelfunktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ <u>Regelfunktionen</u> (auf $[a,b]$) $\Leftrightarrow$

•

$$\forall y \in (a,b) : \exists \lim_{x \searrow y} f(x) \;\&\; \lim_{x \nearrow y} f(x)$$
$$(\text{nicht nötig: } \lim_{x \searrow y} f(x) = \lim_{x \nearrow y} f(x))$$

•

$$\exists \lim_{x \swarrow y} f(x) \;\&\; \exists \lim_{x \nearrow y} f(x)$$

Bemerkung 4.

$$\lim_{x \searrow y} f(x) = c :\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \exists \rho \ \forall 0 < x - y < \rho : |f(x) - c| < \varepsilon$$

$\mathcal{R}([a,b])$ Menge aller Regelfunktionen auf $[a,b]$

$$\mathcal{R}([a,b]) \text{ Vektorraum über} \mathbb{C}$$
$$\mathcal{T}([a,b]) \subset \mathcal{R}([a,b]) \text{Untervektorraum}$$

Frage $\mathcal{R}([a,b])/\mathcal{T}([a,b])$ Vektorraum über $\mathbb{C}$, Dimension?

Beispiel 1. jede stetige Funktion ist eine Regelfunktion

Beispiel 2. jede monotone Funktion auf $[a,b]$ ist eine Regelfunktion (sehe Seite 78)

Bemerkung 5.

$$f, g \in \mathcal{R}([a,b]) \implies \lambda f_{\lambda \in \mathbb{C}}, f+g, |f|, f \cdot g, \max(f,g), \min(f,g)$$

sind in $\mathcal{R}([a,b])$

Definition 3. gleichmässige Konvergenz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von Funktionen auf $D \subset \mathcal{R}, f$ Funktion auf D.
$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ <u>konvergiert gleichmässig</u> gegen $f \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \underbrace{\|f - f_n\|}_{\sup_{x=D} |f(x) - f_n(x)|} = 0$

Bemerkung 6. falls $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmässig $\implies$ limes ist eindeutig

Bemerkung 7. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmässig gegen $f \implies f_n(x) \to f(x) \ \forall x \in D$

$$(|f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x \in D} |f(x) - f_n(x)| \to 0)$$

Bemerkung 8. Die Umkehrung gilt NICHT $D = (0,1]$

$$f = 0, f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$
$$\forall x \in D : f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$
$$\|f - f_n\| = \sup_{x \in D} |f(x) - f_n(x)| = 1$$
$$\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\| = 1$$

1.2.1 Zusammenfassung

- $\tau([a,b])$ = Vektorraum der Treppenfunktionen auf $[a,b]$
- $\int : \tau[a;b] \to \mathbb{C}$ lineare Abbildung
- Eigenschaften:
  - lineare Abbildung
  - Monotonie: $f \leq g \implies \int_a^b f \cdot \mathrm{d}\,x \leq \int_a^b g \cdot \mathrm{d}\,x$
  - Beschränktheit: $\left| \int_a^b f \cdot \mathrm{d}\,x \right| \leq \int_b^a |f(x)| \,\mathrm{d}\,x \leq (b{-}a) \|f\| = \sup_{x \in [a;b]} f$
- Regelfunktionen: $\mathcal{R}([a,b])$ = Vektor nach der Regel $f \supset \tau([a;b])$
- gleichmässige Konvergenz $f_n \to f \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \|f_n - f\| \to 0$

1.2.2 Vorgehen

1. Jede Regelfunktion kann man gleichmässig durch Treppenfunktionen approximieren.
2. Damit kann man das Integral von Regelfunktionen definieren.
3. Regenregeln (insbesondere Hauptsatz)
4. Riemannsche Summen

Satz 1. *Approximationssatz*

$$f \in \mathcal{R}a; b \Leftrightarrow \exists Folge \phi_n \in \tau[a;b] : \phi_n \to f\, gleichmässig$$

ist per Definition äquivalent mit

$$\exists Folge \phi_n \in \tau[a;b] : \|\phi_n - f\| \to 0$$

wobei

$$\|\phi_n - f\| = \sup_{x\in[a;b]} |\phi_n(x) - f(x)|$$

Dieser Grenzwert ist wiederum äquivalent mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \phi \in \tau[a;b] : \|f - \phi\| \leq \varepsilon$$

(eine ε-approximierende Treppenfunktion)

Beweis 3. $\Rightarrow$ *d.h.* $f \in \mathcal{R} \implies \exists \varepsilon$*-approx. Treppen. Widerspruchsbeweis:*

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{R}[a;b] \\ \exists \varepsilon > 0 : f\, besitzt\ keine \varepsilon\text{-}approx.\ Treppenfunktion \end{aligned}$$

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung $I_n = [a_n; b_n]$ *s.d.* $\forall_n f|_{I_n}$ *besitzt keine* ε*-approx.Treppenfunktion*

$$I_1 = [a;b]$$

rekursiv: $M = \frac{b_n - a_n}{2} + a_n$ *Mittelpunkt*

$$I_{n+1} := \begin{cases} [a_n; M] & falls f|_{[a_n;M]} keine \varepsilon\text{-}approx.\ Treppenfunktion\ bestzt \\ [M, b_n] & andernfalls \end{cases}$$

Sei $\xi \in I_n \forall n$

$$\begin{aligned} c_e &:= & \lim_{x\uparrow\xi} f(x) \\ c_r &:= & \lim_{x\downarrow\xi} f(x) \end{aligned}$$

$\implies$

$$\begin{aligned} \exists \delta : |f(x) - c_e| < \varepsilon : && x \in [\xi - \delta; \xi) \\ |f(x) - c_r| < \varepsilon : && x \in (\xi; \xi + \delta] \end{aligned}$$

Auf $[\xi - \delta; \xi + \delta]$ *definieren wir eine Treppenfunktion:*

$$\phi(x) := \begin{cases} c_e & \xi - \delta \leq x < \xi \\ f(\xi) & x = \xi \\ c_r & \xi + \delta \geq x > \xi \end{cases}$$

Fall 1 $\implies$ ϕ *ist eine* ε*-approx. Treppenfunktion auf* $[\xi - \delta], [\delta + \delta]$. *Fall 2* $\implies$ ϕ *ist eine* ε*-approx. Treppenfunktion auf* $[\xi - \delta], [\delta + \delta]$, *alle* $I_n \subset [\xi + \delta; \xi + \delta]$
Ψ

Beweis 4. $\Leftarrow$ *f Regelfunktion $\Leftarrow$ f besitzt ε-approx. Treppenfunktion $\forall \varepsilon > 0$. Sei $x_0 \in [a;b)$. Zu zeigen: $\exists \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \phi \in \tau[a;b] : \|f - \phi\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei $\beta > x_0 : \phi$ konstant auf (x_0, β)

$$\begin{aligned} &\forall x, x' \in (x_0; \beta) \\ &|f(x) - f(x')| \leq && |f(x) - \phi(x)| + \left|\phi(x)^{(=\phi(x')} - f(x')\right| \\ &\leq && \|f - \phi\| + \|\phi - f\| < \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \beta$: Cauchyeigenschaft gilt auf $(x_0; \mathcal{R}) \implies \exists \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$. Ähnlich: $\exists \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \ \forall x_0 \in (a;b]$.

Korollar 1.

$$f \in \mathcal{R}[a;b] \ \Leftrightarrow \ \exists Folge \Psi_b \in \tau[a;b] : \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k = f$$

konvergiert konstant

Korollar 2. *f Regelfunktion auf $I \implies f$ fast überall stetig. d.h. $\exists A \subset I$ s.d.*

- *$f|_{I \setminus A}$ stetig*
- *A höchstens abzählbar $x \in [a;b]$*

Beweis 5.

$$\begin{aligned} \Psi_k &\in \tau[I] \\ f = \sum &\phi_k normal \end{aligned}$$

Ist ϕ_k stetig in $x \forall k \implies f$ stetig in x.
Ist x Unstetigkeitsstelle von f, $\exists k$: ϕ_k unstetig in x, höchstens abzählbare viele k.

- *Eine Treppenfunktion hat endlich viele Unstetigkeitsstellen*

{ Unstetigkeitsstellen von f} $\subset$ (höchstens abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen) $\implies$ höchstens abzählbar

$$I = \quad \overbrace{U_\alpha}^{\text{höchstens abzählbar}} \quad \overbrace{I_\alpha}^{\text{kompakt}}$$

Satz 2.

$$f \in \mathcal{R}\left([a:b]\right) \implies f beschränkt \ auf [a;b]$$

Beweis 6.

$$\begin{aligned} &&\varepsilon = 1 \\ \exists \quad \overbrace{\phi}^{\underline{beschränkt}} \quad &\in \tau\left([a;b]\right) : \|f - \phi\| \leq 1 \\ \implies \|f\| = \|f - \phi + \phi\| \leq \|f - \phi\| + \|\phi\| &=\leq 1 + \|\phi\| \end{aligned}$$

Definition 4. Integration von Regelfunktionen ... auch bekannt als "Regelintegral"
Sei $f \in \mathcal{R}[a;b]$

$$\int_a^b f(x) fx : \lim_{n \to \infty} \int_a^b \phi_n(x) \,\mathrm{d}\, x$$

wobei ϕ_n eine approximierene Folge von Treppenfunktionen ist (d.h. $\|\phi_n - f\| \to 0$)

zu zeigen:

1. Die Folge $I_n := \int_a^b \phi_n(x)\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert $\forall \|\phi_n - f\| \to 0$
2. Der Grenzwert ist von der Wahl der approximierenden Folge unabhängig

Beweis 7. *von 1*

$$|I_n - I_m| =^{Linearität} \left| \int_a^b (\phi_n(x) - \phi_m(x))\,\mathrm{d}\,x \right| \leq^{beschränkt} (b-a)\,\|\phi_n - \phi_m\|$$

$$\|\phi_n - f\| \to 0 \xRightarrow{Dreiecksungleichung} \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \|\phi_n - \phi_m\| < \varepsilon\ \forall n, m > N$$

$\implies$ I_n *Cauchyfolge* $\implies$ I_n *konvergiert*

Beweis 8. *von 2 Seien* $\phi_n, \psi_n \in \tau[a;b]$

$$\|\phi_n - f\| \to 0$$
$$\|\psi_n - f\| \to 0$$

$$\{X_n\} = \psi_1, \phi_1, \psi_2, \phi_2, \psi_3, \phi_3, \cdots$$
$$X_n := \begin{cases} \phi_{\frac{n}{2}} & n gerade \\ \psi_{\frac{n+1}{2}} & n ungerade \end{cases}$$

$\implies$ $I_n(\phi)$ *und* $I_n(\psi)$ *Teilfolgen von* $I_n(X)$

$$\implies \|X_n - f\| \to 0$$
$$I_n(x) = \int x_n$$
$$I_n(\phi) = \int \phi_n$$
$$I_n(\psi) = \int \psi_n$$

$\implies$

$$\lim I_n(\phi) = \lim I_n(X) = \lim I_n(\psi)$$

Beispiel 3. Dirichlet eine Funktion, die keine Regelfunktion ist.

$$f : [0;1] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

f unstetig $\forall x$ intuitiv: $\int_0^1 f(x) f x = 0$

Beispiel 4. Riemann sog. modifizierte Dirichlet-Funktion

$$g : [0;1] \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p, q \text{teilerfremd}, q > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$g \in \mathcal{R}[0;1]$ und $int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$

1.2.3 Eigenschaften

Satz 3.

$$\forall f, g \in \mathcal{R}[a;b] \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} gelten$$

Linearität

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\,x = \alpha \int_a^b f \cdot \mathrm{d}\,x + \beta \int_a^b g \cdot \mathrm{d}\,x$$

Beschränktheit

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}\,x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}\,x \leq (b-a) \|f\|$$

Monotonie

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\,x \leq \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}\,x$$

(f, g reellwertig $f(x) \leq g(x) \forall x$)

Satz 4. *Additivität Sei $f \in \mathcal{R}[a;b]$ und sei $c \in (a;b)$*

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\,x = \int_a^c f(x) \,\mathrm{d}\,x + \int_c^b f(x) \,\mathrm{d}\,x$$

Beweis 9. *$f = \phi$ Treppenfunktion trivial*

$$f = \lim \phi_n \ gleichmässig$$

$$\begin{aligned} \phi_n \in \tau[a;c] \phi_n^l := & \qquad \phi_n|_{[a;b]} \in \tau[a;b] \\ \phi_n^r := & \qquad \phi_n|_{[b;c]} \in \tau[b;c] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^c \phi_n(x) \,\mathrm{d}\,x = \int_a^b \phi_n^l(x) \,\mathrm{d}\,x + \int_b^c \int_n^r (x) \,\mathrm{d}\,x \\ \|\phi_n - f\| \to 0 \\ \left\|\phi_n^l - f\right\|_{[a;b]} \leq \|\phi_n - f\| \geq \left\|\phi_b^+ f\right\|_{[b;c]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^c \phi_n(x) \,\mathrm{d}\,x = & \qquad \int_a^b \phi_n^l(x) \,\mathrm{d}\,x + & \qquad \int_b^c \int_n^r (x) \,\mathrm{d}\,x \\ = \int_a^c f \cdot \mathrm{d}\,x & \qquad = \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}\,x & \qquad = \int_b^c f(x) \,\mathrm{d}\,x \end{aligned}$$

$\implies$

$$\begin{aligned} \phi_n^l \to f|_{[a;b]} \\ \phi_n^r \to f|_{[b;c]} \end{aligned}$$

Definition 5. $f \in \mathcal{R}[a;b]$, $b > a$

$$\int_b^a f(x) \,\mathrm{d}\,x := \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_a^a f(x) \,\mathrm{d}\,x := 0$$

Satz 5. $f \in \mathcal{R}I() : \forall a, b, c \in I$

$$\int_a^c f(x) \,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\,x + \int_b^c f(x) \,\mathrm{d}\,x$$

Bemerkung 9. **Linearität**

Beschränktheit :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x\right| \leq |b-a|\,\|f\|$$

Monotonie

$$f \leq g; b > a$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Bemerkung 10. f stetig $([a;b]) \implies \|f\| = \max|f|$
reellwertig $\overset{\text{ZWS}}{\implies}$ f nimmt alle Werte zwischen 0 und $\max|f|$

$$\exists \xi \in [a;b]:$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = (b-a)f(\xi)$$

Satz 6. *Mittelwertsatz Sei* $f : [a;b] \to \underline{\mathbb{R}}$ *$\underline{\text{stetig}}$. Sei* $p : [a;b] \to \mathbb{R} \in \mathcal{R}$ *mit* $p \geq 0$*. Dann* $\exists \xi \in [a;b]$ *s.d.*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}\,x = f(\xi)\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Falls $\int p \neq 0$

$$\frac{\int f(x)p(x)\,\mathrm{d}\,x}{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} = f(\xi) = \int_a^b f(x)\tilde{p}(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$\tilde{p}(x) = \frac{p(x)}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}\,x}$$
$$\implies \int_a^b \tilde{p}(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$$

Beweis 10. *f besitzt ein Maximum M und ein Minimum m*

$$m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a;b]$$
$$mp(x) \leq f(x)p(x) \leq Mp(x)$$

$\overset{\text{Monotonie}}{\Longrightarrow}$

$$\int_a^b mp(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \qquad int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \qquad \int_a^b Mp(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$= m\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad\qquad = M\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$\implies \exists \mu \in [m;M]$:

$$\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}\,x = \mu\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}\,x$$

ZWS $\implies \exists \xi \in [a;b]$:

$$\mu = f(\xi)$$

Satz 7. *Sei* $f : [a;b] \to \mathbb{R} \in \mathcal{R}$ *mit* $f \geq 0$ *und* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$*. Dann ist* $f(x_0) = 0$ *an jeder Stetigkeitsstelle* x_0*. Ferner gilt:* $f = 0$ *fast überall.*

Beweis 11. *(Widerspruchsbeweis) Sei x_0 eine Stetigkeitsstelle mit $f(x_0) > 0$. f stetig in $x_0 \implies \exists x_0 \in [a:b] \subset [a:b]$ s.d.*

$$f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) \ \forall x \in [\alpha : \beta]$$

Sei

$$\phi(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} f(x_0) & x \in [\alpha; \beta] \\ 0 & x \notin [\alpha; \beta] \end{cases}$$

Treppenfunktion, deshalb Regelfunktion

$$\implies f \geq \phi \implies \underbrace{\int_\alpha^\beta f(x) \,\mathrm{d}\, x}_{=0} \geq \int_\alpha^\beta \phi(x) \,\mathrm{d}\, x = \frac{\beta - \alpha}{2} f(x_0) > 0$$

Ψ

Satz 8. *$f \in \mathcal{R} \implies f$ besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen $\implies f = 0$ fast überall*

Korollar 3. *$f : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f \geq 0$, $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x = 0 \implies$*

$$f(x) = 0 \ \forall x \in [a; b]$$

1.3 Fundamentalsatz der Analysis

Satz 9. *Sei $f : I \to \mathbb{C} \in \mathcal{R}$ und sei $a \in I$. Für jedes $x \in I$ definiert man*

$$F(x) := \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}\, t \ F : I \to \mathbb{C}$$

Dann ist F eine Stammfunktion zu f (d.h. F ist stetig und fast überall differenzierbar (und $F' = f$ fast überall)) mit

$$F'_+(x_0) = f_+(x_0)$$
$$F'_-(x_0) = f_-(x_0)$$

$\forall x_0 \in I$

Beweis 12. *$\forall x_1, x_2 \in I$ gilt*

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t) \,\mathrm{d}\, t - int_a^{x_1} f(t) \,\mathrm{d}\, t =$$
$$= \int_a^{x_2} + \int_{x_1}^a = \int_{x_1}^{x_2} f(t) \,\mathrm{d}\, t$$

Sei $\tau \subset I$ Teilintervall. $\forall x_1, x_2 \in \tau$

$$|f(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) \,\mathrm{d}\, t \right| \leq^{Bijektivität} |x_2 - x_1| \, \|f\|_\tau$$

$\implies F|_\tau$ Lipschitz-stetig $\implies F|_\tau$ stetig $\forall \tau \implies \underline{F \text{ stetig auf } I}$.
Wir berechnen $F'_+(x_0)$. $f \in \mathcal{R} \implies \exists f_+(x_0)$. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$|f(x) - f_+(x_0)| < \varepsilon \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f_+(x_0) \right| =$$
$$\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) \,\mathrm{d}\, t - \frac{f_+(x_0)}{x - x_0} \int_{x_0}^x < Fehltdanichtwas? > \mathrm{d}\, t \right| =$$
$$\left| \frac{1}{x - x_0} \right| \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f_+(x_0)) \,\mathrm{d}\, t \leq \right.$$
$$\frac{1}{|x - x_0|} \, |x - x_0| \, \|f(x) - f_+(x_0)\|_{x_0; x} \leq \varepsilon$$

Korollar 4. *Sei $f : I \to \mathbb{C}\mathcal{R}$ und sei Φ eine Stammfunktion zu f. Dann $\forall a, b \in I$*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = && \Phi(b) - \Phi(a) \\ =: && \Phi|_a^b \end{aligned}$$

Beweis 13. *Φ und F sind Stammfunktionen zu f, insbesondere $\Phi' = F'$ fast überall. Eindeutigkeitssatz $\implies \exists c$ konstant s.d.*

$$\Phi(x) = F(x) + c \;\forall x \in I$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) = F(b) - \underbrace{F(a)}_{=0} = \\ = (\Phi(b) - c) - (\Phi(a) - c) = \Phi(b) - \Phi(a) \end{aligned}$$

Korollar 5. *Jede Regelfunktion beseitzt eine Stammfunktion*

Definition 6. Eine Funktion heisst fast überall stetig differenzierbar, wenn sie die Stammfunktion zu einer Regelfunktion ist. (Wo sie nicht stetig differenzierbar ist, besitzt sie linke und Rechte Grenzwerte)

Beispiel 5.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

f ist in $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ differenzierbar. f' besitzt linke und rechte Grenzwerte, in 0 nicht. Also keine Regelfunktion.

Bemerkung 11. Mit dem Lebesgne-Integral kann man solche Funktionen aus einem Integral erhalten.

Eigenschaften 1. Charakterisierung f fast überall stetig differenzierbar auf $I \implies \exists A \subset I$, A höchstens abzählbar s.d.

1. f ist auf $I \setminus A$ differenzierbar
2. f' ist auf $I \setminus A$ stetig
3. $\forall x \in A$ existieren $f'_+(x)$ und $f'_-(x)$

Definition 7. unbestimmtes Integral Das unbestimmte Integral der Regelfunktion f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu f.

Notation 1. unbestimmtes Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

In Tabellen wird oft

$$\int x\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^2}{2}$$

geschrieben

Beispiel 6.

$$\int x\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^2}{2} + C$$

Eigenschaften 2.

$$\int x^a \,\mathrm{d}\,x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$$
$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\,x = \ln|x|$$
$$\int e^{cx} \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{c}e^{cx},\ c \neq 0$$
$$\int \sin x \cdot \mathrm{d}\,x = -\cos x$$
$$\int \cos x \cdot \mathrm{d}\,x = \sin x$$

Satz 10. *Seien f_1 und f_2 Regelfunktionen auf I*

$$f_1 = f_2 f.ü. \implies \int f_1 \,\mathrm{d}\,x = \int f_2 \,\mathrm{d}\,x$$

Insbesondere $\forall a, b \in I$

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f_2(x) \,\mathrm{d}\,x$$

Beweis 14. *Sei F_1 / F_2 Stammfunktion zu f_1 / f_2*

$$\implies F_1' = F_2' \text{ f.ü.}$$
$$\implies F_1 = F_2 + C$$

Bemerkung 12. Anwendung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p, q \text{teilerfremd} \\ 0 & x \neq \mathbb{Q} \end{cases}$$
$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\,x = 0$$

Definition 8. Sit f eine fast überall differenzierbare Funktion, so bezeichnet f' irgendeine Regelfunktion, die fast überall gleich zur Ableitung von f ist.

Satz 11. *Hauptsatz Sei f eine fast überall stetig differenzierbare Funktion auf I. Dann*

$$\int f'(x) \,\mathrm{d}\,x = f$$
$$\int_a^b f'(x) = f(b) - f(a) \ a, b \in I$$

Notation 2. Leibnitz-Notation

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}\,x = f$$
$$\int df = f$$
$$\int_a^b df = \Delta F := f(b) - f(a)$$

1.4 Integrationstechniken

Eigenschaften 3. Integrationstechniken

1. Linearität
2. Partielle Integration
3. Substutionsregel

1.4.1 Partielle Integration

Satz 12. *Seien U und V fast überall stetig differenzierbar Funktionen auf I, so ist auch UV fast überall stetig differenzierbar und*

$$\int uv' \,\mathrm{d}\, x = uv - \int u'v \,\mathrm{d}\, x$$
$$\int_a^b uv' \,\mathrm{d}\, x = (uv)|_a^b - \int_a^b u'v \,\mathrm{d}\, x$$

Beweis 15. *u, v stetig und $u, v \in \mathcal{R} \implies u'v+uv' \in \mathcal{R}$. Fast überall: $u'v+uv' = (uv)'$ Kettenregel.*

$$\int (u'v + uv') \,\mathrm{d}\, x = \int (uv)' \,\mathrm{d}\, x = uv$$

Beispiel 7.

$$\int \ln x \,\mathrm{d}\, x = \int 1 \cdot \ln x \,\mathrm{d}\, x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} \ln x \,\mathrm{d}\, x =$$
$$= x \ln x - \int x \frac{\mathrm{d} \ln x}{\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}\, x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x = x \ln x - x$$

Beispiel 8.

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}\, x = \int \cos x \cdot \cos x \,\mathrm{d}\, x = \int (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x) \cos x \,\mathrm{d}\, x =$$
$$= \sin x \cos x - \int \sin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x \,\mathrm{d}\, x = \sin x \cos x + \int \sin^2 x$$
$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) \,\mathrm{d}\, x = \sin x \cos x$$
$$\int (\cos^2 x + \sin^2 x) \,\mathrm{d}\, x = x$$
$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}\, x = \frac{\sin x \cos x + x}{2}$$

Beispiel 9.

$$\int \sqrt{1+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} \sqrt{1+x^2} \,\mathrm{d}\, x = x\sqrt{1+x^2} - \int x \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}\, x =$$
$$= x\sqrt{1+x^2} \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}\, x + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} \,\mathrm{d}\, x + \operatorname{arcsinh} x$$
$$\int \sqrt{1+x^2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsinh} x}{2}$$

1.4.2 Substitutionsregel

Satz 13. *Substitutionsregel Sei $f \in \mathcal{R}$ auf I, F eine Stammfunktion zu f, $t : [a; b] \to I$ stetig differenzierbar und streng monoton. Dann ist $F \circ t$ eine Stammfunktion zu*

$$(f \circ t)t' \text{ auf } [a; b]$$

und

$$\int_a^b f(t(x))t'(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_{t(a)}^{t(b)} f(t) \,\mathrm{d}\, t$$
$$(I = [t(a); t(b)] \text{ oder } [t(b); t(a)])$$

Notation 3.

$$f \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}\, x = \int f \,\mathrm{d}\, t$$

Beweis 16. *Kettenregel:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F \circ t) = (F' \circ t)t' \overset{f.ü.}{=} (f \circ t)t'$$

$$\int_a^b f(t(x))t'(x)\,\mathrm{d}\,x = int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F \circ t)\,\mathrm{d}\,x = F \circ t|_a^b = F(t(b)) - F(t(a))$$

$$\int_{t(a)}^{t(b)} f(t)\,\mathrm{d}\,t = F|_{t(a)}^{t(b)} = F(t(b)) - F(t(a))$$

Beispiel 10.

$$\int_a^b f(x+c)\,\mathrm{d}\,x \overset{t(x)=x+c}{=} \int_a^b f(x+c)t'\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= \int_{a+c}^{b+c} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Beispiel 11.

$$\int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}\,x \overset{t(x)=cx}{=} \frac{1}{c}\int_a^b f(cx)t'\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{c}\int^{cb} caf(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$c = -1$

$$\int_a^b f(-x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_{-a}^{-b} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-b}^{-a} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Korollar 6.

$$f(-x) = -f(x)$$

$$\int_{-a}^{a} f(x) = 0$$

Beweis 17.

$$\int_{-a}^{a} f(-x)\,\mathrm{d}\,x = -\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Beispiel 12.

$$\int \frac{t'(x)}{t(x)}\,\mathrm{d}\,x \overset{f=\frac{1}{t}}{=} \int f(t)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t = \ln|t|$$

1.4.3 Rationale Funktionen

→ Pratialbruchzerlegung

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x+a} = \ln|x+a|$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+2bx+c}\,\mathrm{d}\,x = \cdots$$

Wobei $x^2 + 2bx + c$ keine reelen Lösungen ergeben darf.

Satz 14. *Eine rationale Funktion kann man mittels rationaler Funktionen, des Logarithmus sowie des Arcustangens integrieren.*

1.5 Reihenintegration

Satz 15. *Sei f_n eine Folge Regelfunktionen auf $[a;b]$. Konvergiert die Reihe $\sum f_n$ normal, so ist*

$$f : \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

eine Regelfunktion und

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$(\int \sum = \sum \int)$$

Insbesondere gilt der Satz für Potenzreichen in ihren Konvergenzintervallen.

Beweis 18. $\forall \varepsilon > 0 \exists N$:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall p \geq N$

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{p} f_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$f_n \in \mathcal{R} \implies \sum_{n=1}^{p} f_n \in \mathcal{R} \implies \exists$ *Treppenfunktion* ϕ *mit*

$$\left\| \sum_{n=1}^{p} f_n - \phi \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\implies$

$$\|f - \phi\| \leq \left\| f - \sum_{n=1}^{p} f_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{p} f_n - \phi \right\| < \varepsilon$$

$\implies f \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x - \sum_{n=1}^{p} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}\,x \right| &\leq \\ \leq \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^{p} f_n(x) \right| \mathrm{d}\,x &\leq \\ \leq |b-a| \left\| f - \sum_{n=1}^{p} f_n \right\| &< \\ < |b-a| \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Beispiel 13.

$$\begin{aligned}\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}\,t &\overset{|x|<1}{=} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

1.6 Reimannsche Summen

- alte Definition des Regelintegrals (äquivalent)
- Approximationstechnik
- Man kann Resultate über Summen erweitern (z.B. Höldersche Ungleichung, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Definition 9. Zerlegung $[a;b]$ kompates Intervall
Eine Zerlegung von $[a;b]$ ist die Wahl $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ s.d.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} x_n = b$$

Notation 4. $Z := \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$

Definition 10. Feinheit der Zerlegung

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$$

Die Feinheit der Zerlegung ist $\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$

Definition 11. Die Riemannsche Summe von f bezüglich der Zerlegung Z und der Wahl von Stützstellen $\xi =: (\xi_1, \cdots, x_n)$

$$\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$$

ist die Summe

$$S(f;Z;\xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$$

Satz 16. *Sei $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion. Dann gilt folgendes:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$$

sd. für jede Zerlegung Z der Feinheit $\leq \delta$ und für jede Wahl Stützstellen ξ gilt

$$\left| S(f;Z;\xi) - \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x \right| < \varepsilon$$

Beweis 19. *(Idee)*

1. *Satz gilt, falls f eine Treppenfunktion ist. Beweis durch Indunktion nach der Anzahl Sprungstellen*
2. *$\exists \phi$ Treppenfunktion s.d.*

$$\|f - \phi\| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

1) $\implies \exists Z, \xi$

$$\left| S(\phi;Z;\xi) - \int_a^b \phi(x) \,\mathrm{d}\, x \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

3-Ecks Ungleichung

Korollar 7. *Sei $f : [a;b] \to \mathbb{C} \in \mathcal{R}$. Sei $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ Folge Zerlegungen von $[a;b]$ mit Feinheit $(Z_n) \to 0$. Für jede Wahl Stützstellen ξ_m aus Z_n*

$$\lim_{n\to\infty} S(f;Z_n;\xi_m) = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x$$

Definition 12. p-Norm Sei $f[a;b] \to \mathbb{C} \in \mathcal{R}$. Die p-Norm von f (mit $p \geq 1$)

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}\, x}$$

Satz 17. *Seien* $f, g : [a; b] \to \mathbb{C} \in \mathcal{R}$. *Seien* $p, q \geq 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Dann haben wir*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}\, x \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

Höldersche Ungleichung
Spezialfall: $p = q = 2$ *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

Beweis 20. *(Idee)*

1. *Man approximiert die 3 Integrale durch Riemannsche Summen*
2. *Man benützt die Höldersche Ungleichung für Summen*
3. *Man nimmt die Grenzwerte*

1.7 Das uneigentliche Integral

Satz 18. *Seien* $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty$$

Sei I *ein Intervall mit Randwerten* a *und* b *(z.B.* $I = [a; b]$, $I = [a; b)$*). Sei* f *eine Regelfunktion auf* I. *Wir wollen* $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x$ *definieren, wenn möglich.*

Fall 0

$$a, b \in \mathbb{R},\ I = [a; b]$$

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x \textit{Regelintegral}$$

Fall 1

$$b \in \bar{\mathbb{R}},\ I = [a; b)$$

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x = \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x) \,\mathrm{d}\, x$$

Falls der Grenzwert existiert.

Fall 2

$$a \in \bar{\mathbb{R}}, b \in \mathbb{R}, b > a, I = (a; b]$$

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x = \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^b f(x) \,\mathrm{d}\, x$$

Falls der Grenzwert existiert.

Fall 3

$$a, b \in \bar{\mathbb{R}}, a < b, I = (a; b)$$

$$\int_a^b F(x) \,\mathrm{d}\, x := \overbrace{\int_a^c f(x) \,\mathrm{d}\, x}^{\textit{Fall 2}} + \overbrace{\int_c^b f(x) \,\mathrm{d}\, x}^{\textit{Fall 1}}$$

Sei $c \in (a; b)$ *falls beide Integrale auf der rechten Seite existieren!*

Definition 13. Wert eines Integrals Existiert das uneigentliche Integral von f, so heisst $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x$ <u>konvergent</u> so heisst der Grenzwert <u>Wert</u> des Integrals

Definition 14. absolut konvergentes Integral Konvergiert das Integral von $|f|$, so heisst das Integrals <u>absolut konvergent</u>

Beispiel 14. $I = (0; +\infty)$

$$F_s(x) := \int \frac{1}{x^s} \,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} \ln x & s = 1 \\ \frac{x^{1-s}}{1-s} & s \neq 1 \end{cases}$$

$$F_s(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0 \;\Leftrightarrow\; s > 1, \text{divergiert sonst}$$

$$F_s(x) \xrightarrow{x\to 0} 0 \;\Leftrightarrow\; s < 1, \text{divergiert sonst}$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^s} \,\mathrm{d}\,x$$

existiert genau dann, wenn $a > 0$ und $s > 1$ und hat den Wert $\frac{a^{1-s}}{s-1}$

$$\int_0^a \frac{1}{x^s} \,\mathrm{d}\,x$$

existiert genau dann, wenn $s < 1$ und hat den Wert $\frac{a^{1-s}}{1-s}$

Beispiel 15. $e^{-x} \in R(\mathbb{R})$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \,\mathrm{d}\,x = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a e^{-x} \,\mathrm{d}\,x =$$
$$= \lim_{a\to+\infty} \left(e^{-x}\right)|_0^a = \lim_{a\to+\infty} \left[-e^{-a} + e^0\right] = 1$$

Beispiel 16. $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \in R(\mathbb{R})$

$$\int f(x) \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

divergiert $x \to \pm\infty$. Deshalb existieren

$$\int_0^{+\infty} f(x) \,\mathrm{d}\,x \text{ und } \int_{-\infty}^0 f(x) \,\mathrm{d}\,x$$

nicht. Aber:

$$\int_{-R}^{R} f(x) \,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x) \,\mathrm{d}\,x = 0$$

Beispiel 17. Sei $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Sei $f = F' \in R(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ aber keine Regelfunktion auf $\mathbb{R}$ $x >$

$$\int_0^{\pi} f(x) \,\mathrm{d}\,x = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{x} f(x) \,\mathrm{d}\,x =$$
$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(x)|_{\varepsilon}^{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(F(x) - F(\varepsilon)\right) = F(x)$$

1.8 Majorantenkriterium

Satz 19. *Majorantenkriterium Seien f und g Regelfunktionen $[a; b)$ mit $|f| \leq g$. Existiert $\int_a^b g(x) \,\mathrm{d}\,x$, so existiert auch $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\,x$*

Beweis 21. *Sei*

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}\,x \\ G(u) &= \int_a^u g(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &\forall u,v \in [a;b) \\ |F(u)-F(v)| = \left|\int_b^u f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| &\leq |f_v^u\,|f(x)|\,\mathrm{d}\,x| \leq \\ \leq \left|\int_v^u g(x)\,\mathrm{d}\,x\right| &= |G(u)-G(v)| \end{aligned}$$

$G(u)$ $u \to 0$ *existiert* $\implies$ G *erfüllt das Cauchykriterium.* $\implies$ F *erfüöllt das Cauchykriterium* $\implies$ $\lim_{n\to b} F(u)$ *existiert*

2 Kurven (Kapitel 12)

$$\begin{aligned} \gamma : I \to &\qquad \mathbb{R}^n \\ \gamma : t \mapsto &\qquad (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \cdots, x_n(t)) \end{aligned}$$

$x_i : I \to \mathbb{R}$ Komponentenfunktionen

Definition 15. parametrisierte Kurve Eine parametrisierte Kurve (kurz: Kurve) ist eine Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, deren Komponentenfunktionen stetig sind.

Definition 16. differenzierbare Kurve Eine Kurve heisst differenzierbar, wenn jede Komponentenfunktion differenzierbar ist. Analog für stetig differenzierbar.

Definition 17. Spur Das Bild $\gamma(I) \in \mathbb{R}^n$ heisst die Spur von γ.

$$\mathrm{Spur}(\gamma)$$

Bemerkung 13. Eine Kurve ist eine Abbildung und ihre Spur ist eine Teilmenge

Beispiel 18. Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \gamma_k :& \mathbb{R} \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \\ & t \mapsto e^{ikt} \end{aligned}$$

$|\gamma(t)| = 1$ $\forall t$ Spur $\gamma_k = S^1$ $k > 0$: Gegenuhrzeigersinn
$k < 0$: Uhrzeigersinn

Beispiel 19. Schraubenlinie $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto (r\cos t, r\sin t, ht)$$

Definition 18. Tangentialvektor einer Kurve Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar.

$$\dot{\gamma} := (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots)$$

$\dot{\gamma}$ heisst der Tangentialvektor oder Geschwindigkeitsvektor zur Stelle t.

Definition 19. Geschwindigkeit einer Kurve $\|\dot{\gamma}(t)\|$ heisst Geschwindigkeit. Der Geschwindigkeitsvektor hängt vom Parameter ab, nicht von der Stelle in $\mathbb{R}^n$.

Definition 20. reguläre Kurve Eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heisst regulär an der Stelle $t_0 \in I$, wenn $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$. Sie heisst regulär, wenn sie an allen STellen regulär ist.

Beispiel 20. $\gamma(t) = (t^3, t^3), t \in \mathbb{R}$ Spur $\gamma = (y = x)$ $\dot{\gamma}(t) = (3t^2, 3t^2)$ $\dot{\gamma} = (0,0)$ nicht regulär! Aber der Punkt $(0,0)$ ist nicht singulär.

Definition 21. Tangentialeinheitsvektor Ist γ an der Stelle t_0 regulär, so definiert man

$$T\gamma(t_0) := \frac{\dot{\gamma}(t_0)}{\|\dot{\gamma}(t_0)\|}$$

als Tangentialeinheitsvektor. $\|T_\gamma\| = 1$

Definition 22. Parametrisierte Kurve Sei $f : J \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Der parametrisierte Graph von f ist die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma_f :& J \to \mathbb{R}^2 \\ & t \mapsto (t, f(t)) \end{aligned}$$

$\mathrm{Spur}(\gamma_f) = \mathrm{Graph}(f)$

$$\dot{\gamma_f}(t) = (1, f'(t)) \neq 0 \ \forall t$$

Eigenschaften 4. parametrisierter Graph Ein parametrisierter Graph ist regulär

Satz 20. *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ stetig differenzierbar. Wenn $\dot{x}(t)$ keine Nullstennen hat, gibt es eine stetig differenzierbare Funktion*

$$f : J \to \mathbb{R}^2$$

wobei

$$J := x(I)$$

s.d.

$$\mathrm{Graph}\, f = \mathrm{Spur}\, \gamma$$

Bemerkung 14. $\dot{y} \neq 0 \rightsquigarrow$ Graph von $x(y)$

Satz 21. *Sei $t_0 \in I$, $x_0 := x(t_0)$*

$$f'(x_0) = \frac{\dot{y(t_0)}}{\dot{x}(t_0)}$$

$$y = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

Ist γ w-mal stetig differenzierbar, so ist es f auch und

$$f'' \underbrace{(x_0)}_{=x(x_0)} \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

Beweis 22. $\dot{x} \neq 0 \implies x(t)$ *streng monoton* $\implies$ *invertierbar.* $\exists$ *Umkehrabbildung*

$$\begin{aligned} \tau : J \to I \\ \tau(x(t)) = t \ \forall t \end{aligned}$$

stetig differenzierbar

$$\tau = \frac{1}{\dot{x}}$$

$$\begin{aligned} \gamma(t) = (x(t), y(t)) &= (x(t), y(\tau(x(t)))) \\ &= (x(t), (y \circ \tau)(x(t))) \\ &= (x(t), f\,(x(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &:= y \circ \tau \\ \gamma_f &: x \mapsto (x, f(x)) \\ \operatorname{Spur} \gamma = \operatorname{Spur} \gamma_f &= \operatorname{Graph} f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \dot{y}t(t_0)\tau'(x_0) = \dot{y}(t_0)\frac{1}{\dot{x}(t_0)} \\ f'' &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dot{y}\right)\frac{1}{\dot{x}} + \dot{y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\dot{x}}\right) = \\ &= (\ddot{y}\tau')\frac{1}{\dot{x}} + \dot{y}\left(-\frac{1}{\dot{x}^2}\ddot{x}\tau'\right) = \\ &= \ddot{y}\frac{1}{\dot{x}}\frac{1}{\dot{x}} - \dot{y}\frac{1}{\dot{x}^2}\ddot{x}\frac{1}{\dot{x}} = \\ &= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} \end{aligned}$$

Eigenschaften 5.

$$\begin{aligned} \dot{x} \neq 0 &\rightsquigarrow y = f(x) \\ \dot{y} \neq 0 &\rightsquigarrow x = g(y) \\ \gamma \text{regulär} \implies &\forall t \exists \text{Umgebung } I \text{ von } t \text{ s.d.} \\ &\dot{x}(\tau) \neq 0\ \forall \tau \in I \\ &\dot{y}(\tau) \neq 0\ \forall \tau \in I \end{aligned}$$

2.1 Die Bogenlänge

Definition 23. Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$. Sei $Z = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ $t_i \in I$ $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ Länge des Sehnenpolygons.

$$S(Z) := \sum_{i=1}^{m} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Gilt $Z^* \supset Z$, dann $S(Z^*) \geq S(Z)$

$$Z_1 \subset Z^*, Z_2 \subset Z^* \implies S(Z^*) \geq \max\left(S(Z_1), S(Z_2)\right)$$

Idee: $s(\gamma) := \sup_Z S(2)$

Definition 24. rektifizierbare Kurve Eine Kurve γ heisst rektifizierbar, wenn die Menge der Längen aller einbeschriebenen Sehnenpolygone beschränkt ist.

Satz 22. *Sei $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^n$ fast überall stetig differenzierbar, (d.h. jede Komponente ist fast überall stetig differenzierbar). Dann ist γ rektifizierbar (1) und*

$$s(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}\, t \geq 0 \qquad (2)$$

Bemerkung 15. Ist γ_f der pramametrisierte Graph von f

$$\gamma_f(t) = (t, f(t))$$

so ist

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_f(t) &= (1, f'(t)) \\ \|\dot{\gamma}_f\| &= \sqrt{1 + f'^2} \\ s(\gamma_f) &= \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)} \,\mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

Notation 5. Sei $f = (f_1, \cdots, f_n)$ ein n-Tupel Funktionen

$$\int f(x) \,\mathrm{d}\, x := \left(\int f_1 \,\mathrm{d}\, x, \int f_2 \,\mathrm{d}\, x, \cdots, \int f_n \,\mathrm{d}\, x\right)$$

Lemma 3.
$$\left\| \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| \,\mathrm{d}\, x$$

Beweis

1. *Lemma gilt für Treppenfunktionen*
2. *Approximationssazu*

Beweis 23. *Sei* $Z = (t_0, \cdots, t_m)$ *eine Zerlegung von* $[a; b]$

$$\begin{aligned} S(Z) &= \sum_{i=1}^{m} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}\| \\ &= \sum \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) \,\mathrm{d}\, t \right\| \\ &\overset{Lemma}{\leq} \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}\| \,\mathrm{d}\, t \\ &= \int_a^b \|\dot{\gamma}\| \,\mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

($\|\dot{\gamma}\| \in \mathcal{R}$ *Diese Abschätzung gilt für alle Zerlegungen.* $\implies \gamma$ *rektifizierbar.*

$$s(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}\| \,\mathrm{d}\, t$$

= für (2)

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists Z : S(Z) \geq f(\|\dot{\gamma}\| - \varepsilon$$

Treppenfunktionen + Approximationssatz

Beispiel 21. Länge des Kreisbogens

$$\begin{aligned} \gamma :& [0, \phi] \to \mathbb{R}^2 \\ & t \mapsto (r \cos t, r \sin t) = \gamma(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= (-r \sin t, r \cos t) \\ \|\dot{\gamma}(t)\|^2 &= r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t = r^2 \\ s(\gamma) &= \int_0^{\phi} r \,\mathrm{d}\, t = rt|_0^{\phi} = r\phi \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} \gamma :& [a; r] \to \mathbb{R}^2 \\ & x \mapsto \left(x, \sqrt{r^2 - x^2}\right) \end{aligned}$$

$$a := r \cos \phi$$

$$s(\gamma) = \int_a^r \sqrt{1 + f'^2} \,\mathrm{d}\, x$$

$$\sqrt{1 + f'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} == \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \int_a^r \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\xi = \frac{x}{r} = r \int_{\frac{a}{r}}^1 \frac{r \,\mathrm{d}\, \xi}{\sqrt{r^2 - r^2 \xi^2}} = r \int_{\frac{a}{r}}^1 \frac{\mathrm{d}\, \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$= -r \arccos \xi|_{\frac{1}{r}}^1 = -r(\arccos 1 - \arccos \cos \phi) = r\phi$$

2.2 Parameterwechsel

Definition 25. C^k-Parametertransformation Sei $k = 0, 1, 2, \cdots, \infty$. Eine Abbildung $\sigma : I \to J$ heisst C^k-Parametertransforumation, wenn

1. $\sigma \in C^k(I; J)$
2. σ ist umkehrbar
3. $\sigma^{-1} \in C^k(J; I)$

Sei

$$\begin{aligned} \gamma :& I \to \mathbb{R}^n \\ \underbrace{\beta}_{\gamma \circ \sigma^{-1}} :& J \to \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Beispiel 22. Gegenbeispiel

$$\begin{aligned} \sigma :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto& x^3 \end{aligned}$$

σ umkehrbar, $\sigma \in C^1$. $\sigma \notin C^1$ σ ist eine C^0-Paramentertransformation, aber keine C^0-Parametertransforumation.

Definition 26. Umparametrisierung Sei

$$\begin{aligned} \gamma :& I \to \mathbb{R}^n \\ \underbrace{\beta}_{\gamma \circ \sigma^{-1}} :& J \to \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Ist γ C^k-Kurve, σ C^k Parametertransformation, dann β C^k-Kurve. β heisst due Umparametrisierung von γ mittels σ.

Notation 6.

$$\gamma : \underbrace{I}_{t\in} to \underbrace{\Sigma}_{\sigma\in}$$

Beispiel 23.

$$\begin{aligned} \gamma :& [0; \phi] \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto& (r \cos t, r \sin t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma :& [0; \phi] \to [a; 1] \\ t \mapsto& r \cos t =: x \end{aligned}$$

$$\beta(x) = \left(x; \sqrt{r^2 - x^2} \right)$$

orientierungsumkehrend

Definition 27. orientierungstreu/-umkehrend Eine Parametertransformation $\sigma : I \to J$ heisst orientierungstreu ($\dot{\sigma} > 0$), wenn sie streng monoton wächst oder orientierungsumkehrend,($\dot{\sigma} < 0$) wenn sie streng monoton fällt.

Bemerkung 16. Ist γ reklifizierbar, so ist $\beta = \gamma \circ \sigma^{-1}$ und $S(\gamma) = S(\beta)$

Beweis 24. $S(0) = \sup S(2)$ *das hängt von der Parametrisierung nicht ab.*

Beweis 25.

$$S(\gamma) \int_a^b \|\dot{\gamma}\| \,\mathrm{d}\, t$$
$$\dot{\beta} = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\sigma}}$$
$$\sigma : [a;b] \to [c;d]$$
$$\int_a^b \|\dot{\gamma}\| \,\mathrm{d}\, t = \int_c^d \left\|\dot{\Gamma}\right\| \frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\dot{\sigma}} =$$
$$\begin{cases} \int_c^d \left\|\dot{\beta}\right\| \mathrm{d}\,\sigma & \dot{\sigma} > 0 (c > d) \\ -\int_c^d \left\|\dot{\beta}\right\| \mathrm{d}\,\sigma & \dot{\sigma} < 0 (|\dot{\sigma}| = -\dot{\sigma})(d > c) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \int_c^d \left\|\dot{\beta}\right\| \mathrm{d}\,\sigma & \dot{\sigma} > 0 (c > d) \\ \int_d^c \left\|\dot{\beta}\right\| \mathrm{d}\,\sigma & \dot{\sigma} < 0 (|\dot{\sigma}| = -\dot{\sigma})(d > c) \end{cases}$$
$$= S(\beta)$$

Definition 28. Umorientierung

$$\sigma : [a;b] \mapsto [-a;-b]$$
$$t \mapsto -t$$

Notation 7.

$$\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}^n$$
$$\gamma^- : [-a;-b] \to \mathbb{R}^n$$
$$\gamma^-(t) := \gamma(-t)$$

Definition 29. Umparametrisierung auf Bogenlänge Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ regulär und fast überall stetig differenzierbar. Sei $t_0 \in I$

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| \,\mathrm{d}\,\tau, t \in I$$

$$S : I \to J = S(I)$$
$$\dot{S}(T) = \|\dot{\varphi}(t)\| > 0$$

$\implies$ s orientierungstreu.

$$\beta := \gamma \circ s^{-1}$$
$$\beta'(s) = \dot{\gamma}(t(s)) \frac{1}{\ldots(t(s))} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}(t(s))$$
$$\|\beta'(s)\| = 1 \;\forall s \in J$$

2.3 Sektorfläche einer ebenen Kurve

Definition 30. Sektorfläche $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$. F_i = orientierte Fläche des i-ten Dreiecks.

$$F(Z) := \sum_i F_i$$

Lemma 4. *Seien* $(0,0), (x,y), (\tilde{x},\tilde{y})$ *die Ecken eines Dreiecks in* $\mathbb{R}^2$. *Die orientierte Fläche des Dreiecks ist*

$$F = \frac{1}{2}(x\tilde{y} - \tilde{x}y)$$
$$= (x,y) \times (\tilde{x},\tilde{y})$$
$$= \det\begin{pmatrix} x & \tilde{x} \\ y & \tilde{y} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & y \\ \tilde{x} & y \end{pmatrix}$$

Beweis 26.

$$\begin{aligned}
\rho &:= \|(x,y)\| \\
\tilde{\rho} &:= \|(\tilde{x},\tilde{y})\| \\
F &= \frac{1}{2}\rho h \\
h &= \tilde{\rho}\sin\psi \\
F &= \frac{1}{\rho}\tilde{\rho}\sin\psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= x+iy = \rho e^{i\phi} \\
w &= \tilde{x}+i\tilde{y} = \tilde{\rho}e^{i\tilde{\phi}} \\
\psi &= \tilde{\phi}-\phi \\
\bar{z}w &= \rho\tilde{\rho}e^{i(\tilde{\phi}-\psi)} \\
\operatorname{Im}(\bar{z}w) &= \rho\tilde{\rho}\sin\psi = 2F \\
\bar{z}w &= (x-iy)(\tilde{x}+i\tilde{y}) = \\
&= (x\tilde{x}+<\tilde{y}+i(x\tilde{y}-\tilde{x}y) \\
\operatorname{Im}\bar{z}w &= x\tilde{y}-\tilde{x}y
\end{aligned}$$

Notation 8.

$$\begin{aligned}
\Delta x &:= \tilde{x}-x \\
\Delta y &:= \tilde{y}-y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}\left[x(y+\Delta y)-(x+\Delta x)y\right] \\
F &= \frac{1}{2}\left(x\Delta y - y\Delta x\right)
\end{aligned}$$

Beweis 27. *Sei* $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}^2$ *Kurve,* $Z := \underbrace{t_0}_{=a} < t_1 < \cdots < \underbrace{t_n}_{=b}$ *Zerlegung.*

$(x;y_i) := \gamma(t_i)$

$$\begin{aligned}
\Delta x_i &:= x_i - x_{i-1} \\
\Delta y_i &:= y_i - y_{i-1}
\end{aligned}$$

$\implies$

$$\begin{aligned}
F_i &= \frac{x_{i-1}\Delta y_i - y_{i-1}\Delta x_i}{2} \\
F(Z) &:= \sum_{i=1}^{n} F_i
\end{aligned}$$

Definition 31. Der Fahrstrahl an die Kurve γ überstreicht den orientierten Flächeninhalt $F(\gamma)$, wenn

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ s.d. } \forall \text{Zerlegung} Z \text{des Fahrstrahls} \leq \delta$$

gilt

$$|F(Z) - F(\delta)| \leq \varepsilon$$

Satz 23. *Sektorformel von Leibniz Sei* $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}^2$ *fast überall stetig differenzierbar. Dann*

$$F(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}\,t$$

Beweis 28.

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}(t)\,\mathrm{d}\,t$$
$$\Delta y_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{y}(t)\,\mathrm{d}\,t$$
$$2F_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_{i-1}\dot{y} - y_{i-1}\dot{x})\,\mathrm{d}\,t$$
$$\left|2F_i - \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}\,t\right| =$$
$$= \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} [(x_{i-1} - x)\dot{y} - (y_{i-1} - y)\dot{x}]\,\mathrm{d}\,t\right| \leq$$
$$\leq \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_{i-1} - x)\dot{y}\,\mathrm{d}\,t\right| + \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (y_i - y)\dot{x}\,\mathrm{d}\,t\right|$$

γ fast überall stetig differenzierbar $\Longrightarrow$ γ stetig und fast überall differenzierbar
$\xRightarrow{\text{verallgemeinerter Schrankensatz}}$ *$\exists L : |\dot{x}| < L, |\dot{y}| < L$ fast überall und*

$$|x(t) - x_{i-1}| =$$
$$|x(t) - x(t_{i-1})| \leq L(t - t_{i-1})$$
$$|y(t) - y_{i-1})| \leq L(t - t_{i-1})$$
$$J_i \leq 2L^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1})\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= 2L^2 \frac{1}{2}(t - t_{i-1})^2|_{t_{i-1}}^{t_i} =$$
$$= L^2(t_i - t_{i-1})^2$$

Ist die Feinheit $\leq \delta$, so ist $t_i - t_{i-1} \leq \delta$

$$J_i \leq L^2\delta(t_i - t_{i-1})$$

$$\left|F(Z) - \frac{1}{2}\int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}\,t\right| =$$
$$= \left|\sum_{i=1}^n F_i(Z) - \sum \frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i} (x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}\,t\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}\sum_{i-1}^n J_i \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n L^2\delta(t_i - t_{i-1}) =$$
$$= \frac{1}{2}L^2\delta(t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + \cdots) =$$
$$= \frac{1}{2}L^2\delta(b - a) \leq \varepsilon$$

für

$$\delta = \frac{2\varepsilon}{L^2(b-a)}$$

Beispiel 24.

$$\gamma : [0, \phi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma} &= (-r\sin t, r\cos t, r\cos t)\\
F = \frac{1}{2}\int_0^{\phi} (r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t)\,\mathrm{d}\,t &= \\
&= \frac{r^2}{2}\int_0^{\phi}\mathrm{d}\,t = \frac{r^2\phi}{2}\\
\phi = 2\phi &\implies \pi r^2
\end{aligned}$$

Eigenschaften 6. Sektorformel

1. Additivität: $c \in (a; b)$

$$F(\gamma) = F\left(\gamma|_{[a;c]}\right) + F\left(\gamma|_{[c;b]}\right)$$

2. Orientierungsumkehrung

$$F(\gamma^-) = -F(\gamma)$$

$$\gamma(t) := \gamma(-t)$$

3.

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} e & f\\ g & h\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ex + fy\\ gx + hy\end{pmatrix}$$

$$(A\gamma)(t) = A\gamma(t)$$
$$d(A\gamma) = A\dot{\gamma}$$
$$x\dot{y} - y\dot{x} = \det\begin{pmatrix}\gamma & | & \dot{\gamma}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & \dot{x}\\ y & \dot{y}\end{pmatrix}$$
$$F(\gamma) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}\gamma & | & \dot{\gamma}\end{pmatrix}\mathrm{d}\,t$$
$$\det\begin{pmatrix}A\gamma & | & A\dot{\gamma}\end{pmatrix} = \det\left(A\begin{pmatrix}\gamma & | & \dot{\gamma}\end{pmatrix}\right) = \det A \det\begin{pmatrix}\gamma & | & \dot{\gamma}\end{pmatrix}$$
$$F(A\gamma) = \det A \cdot F(\gamma)$$
$$\text{insbesondere}$$
$$\det A = 1 (\text{d.h. } A \in SL(2; \mathbb{R}))$$
$$F(A\gamma) = F(\gamma)$$

Definition 32. Geschlossene Kurve Eine Kurve $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^n$ heisst geschlossen, wenn

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

gilt.

Definition 33. umschlossener orienterierter Flächeninhalt Sei $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^n$ geschlossen und so dass $F(\gamma)$ existiert, so heisst $F(\gamma)$ der umschlossene orienterierte Flächeninhalt.

Bemerkung 17. $\gamma(a) = \gamma(b)$

$$\int_a^b \mathrm{d}(xy)\,\mathrm{d}\,t = (xy)|_a^b = 0$$
$$F(\gamma) = \int_a^b x\dot{y}\,\mathrm{d}\,t = -\int_a^b \dot{x}y\,\mathrm{d}\,t$$

(wenn γ geschlossen)

Bemerkung 18. Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} (x,y) &\in \mathbb{R}^2 \\ \rho e^{i\phi} &= x + iy =: z \in \mathbb{C} \\ \gamma : [a;b] &\to \mathbb{R}^2 \\ \dot{z} &= \dot{\rho} e^{i\phi} + i\rho\dot{\phi} e^{i\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t \mapsto &(x(t), y(t)) \\ t \mapsto &z(t) \\ t \mapsto &\rho(t) e^{i\phi(t)} \end{aligned}$$

Man erlaubt $\rho(t) < 0$

Bemerkung 19. Länge

$$\begin{aligned} L = \int_a^b \|\dot{\gamma}\| \,\mathrm{d}\, t &= \int_a^b \sqrt{\dot{\bar{z}}\dot{z}} \,\mathrm{d}\, t \\ \bar{z} = \rho e^{i-\phi},\ \dot{\bar{z}} &= \dot{\rho} e^{-i\phi} - i\rho\dot{\phi} e^{-i\phi} \\ z = x + iy,\ \bar{z} &= x - iy, \\ \dot{z} = \dot{x} + iy,\ \dot{\bar{z}} &= \dot{x} - i\dot{y} \\ \bar{z}\dot{z} &= (x\dot{x} + y\dot{y}) + i(x\dot{y} - \dot{x}y) \\ &= \frac{1}{2} \int \operatorname{Im}(\bar{z}\dot{z}) \,\mathrm{d}\, t \\ \bar{z}\dot{z} = \rho e^{-i\phi} \left(\dot{\rho} e^{i\phi} + \rho\dot{\phi} e^{i\phi} \right) &= \rho\dot{\phi} + i\rho^2\dot{\phi} = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2 \dot{\phi} \,\mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

Beispiel 25.

$$\begin{aligned} y : [0; 2\pi] &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ \phi &\mapsto a\cos(3\phi) e^{i\phi} \end{aligned}$$

$$\rho(\phi) = a\cos(3\phi)$$

ρ kann auch negativ sein

$$\begin{aligned} F(\gamma) &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \cos^2(3\phi) \,\mathrm{d}\,\phi = \\ &= \frac{\cancel{3}}{2} \int^{2\pi} a^2 \cos^2(\phi) \frac{\mathrm{d}\,\phi}{\cancel{3}} = \\ \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}{2} \,\mathrm{d}\,\phi &= \frac{a^2}{4} 2\pi = \frac{a^2\pi}{2} \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \end{aligned}$$

3 Taylor [Kap 14]

Wir wollen eine Funktion durch Polynom approximieren.

Definition 34. Sei $f : I \to \mathbb{C}$ n-mal differenzierbar. Das n-te Taylorpolynom von f im Punkt $a \in I$ ist das Polynom $T(x)$ des Grades $\leq n$ mit

$$\begin{aligned} T(a) &= f(a) \\ T'(a) &= f'(a) \\ T''(a) &= f''(a) \\ \cdots T^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

Notation 9. $I_n f(x;a)$

Beispiel 26. $n = 1$

$$T_1 f(x;a) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Bemerkung 20. Sei $I_n f(x;a)$ das n-te Taylorpolynom von f

$$T(x) = I_n f(x;a) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

$$f(a)T'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k (x-a)^{k-1}$$

$$f(a)T''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k (x-a)^{k-2}$$

$$f(a)T'''(x) = \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2) a_k (x-a)^{k-3}$$

$$\cdots$$

$$T(a) = a_0$$

$$T'(a) = a_1$$

$$T''(a) = 2a_2$$

$$T'''(a) = 3 \cdot 2a_3$$

Übung $l \leq n$ (Induktion)

$$T^{(l)}_{(x)} = \sum_{k=l}^{n} k(k-1)(k-2)\cdots(k-l+1) a_k (x-a)^{k-l}$$

$$T^{(l)}(a) = l! a_l = f^{(l)}(a)$$

$$a_l = \frac{f^{(l)}(a)}{l!}$$

Eigenschaften 7.

$$T_n f(x;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Definition 35. Fehler

$$R_{n+1}(x;a) := f(x) - T_n f(x;a)$$

Lemma 5.

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_{n+1}(x;a)}{(x-a)^n} = 0$$

$$R_2 = f(x) - T_1 f(x,a)$$

$$T_1 f(x;a) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$R_2 = \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} \xrightarrow{f\, differenzierbar} 0$$

Beweis 29. $T = T_n f$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T(x)}{(x-a)^n} =$$

$$(L'Hopital) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - T'(x)}{n(x-a)^{n-1}} =$$

$$(L'Hopital) = \lim_{x \to a} \frac{f''(x) - T''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} = \cdots$$

$$\cdots = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x) - T^{(n)}(x)}{n!} = 0$$

denn $f^{(n)}(a) = T^{(n)}(a)$

Korollar 8. *Qualitative Taylorformel Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig und n-mal differenzierbar. Dann*

$$\exists r; I \to \mathbb{C}$$

stetig mit

$$r(a) = 0$$

s.d.

$$f(x) = I_n f(x; a) + (x - a)^n r(x)$$

Beweis 30.

$$r(x) := \frac{f(x) - I_n f(x; a)}{(x - a)^n}$$

$x \neq a$ stetig auf $I \setminus \{a\}$

$$\lim_{x \to a} r(x)$$

Wir erweiter r auf I mit $r(a) = 0$

Notation 10. Landan-Symbol Seien f und g komplexe Funktionen in einer punktierten Umgebung von a. Man schreibt

$$f = \circ(g), x \to a$$

falls

$$\lim_{x \to a} \frac{f(a)}{f(x)} = 0$$

Gilt zusätzlich

$$\lim_{x \to a} g(x) = 0$$

so sagt man: f geht für $x \to a$ schneller gegen 0 als g.
$f : I \to \mathbb{C}$, $a \in I$ n-mal differenzierbar:

$$f(x) = T_n f(x; a) + \circ\left((x - a)^n\right), x \to a$$

Beispiel 27. $T_4(x; 0)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x 0 \\ f'(x) &= \cos x 1 \\ f(x) &= -\sin x 0 \\ f'(x) &= -\cos x - 1 \\ f(x) &= \sin x 0 \end{aligned}$$

$$T_4 f(x; 0) = x - \frac{1}{3!} x^3$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^4)$$

Beispiel 28.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-x^3}{6} + \circ(x^4)}{x^3} = \\ &= -\frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3} + \lim_{x \to 0} \frac{x \circ (x^4)}{x^4} = \\ &= -\frac{1}{6} + 0 \cdot 0 = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Satz 24. *Integralform von R_{n+1} Sei $f \in \Phi^{n+1}(I, \mathbb{C})$ (Φ differnzierbare Funktion). Dann*

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}\, t$$

Beweis 31. *Durch Induktion*

$n = 0$

$$R_1(x) = f(x) - T_0 f(x;a)$$
$$T_0 f(x;a) = f(a)$$
$$R_1(x) = f(x) - f(a)$$
$$\frac{1}{1!}\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t = f(x) - f(a)$$

$n + 1$

$$\begin{aligned}
f - T_{n-1}f = R_n &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{(x-t)^n}{-n} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= -\frac{1}{n!}\left[(x-1)^n f^{(n)}(t)\right]\Big|_a^x + \frac{1}{n!}\int (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t \\
&\implies f - T_n f = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}$$

Korollar 9. *Lagrange-Form für R_{n+1} Sei $f \in \Phi^{n+1}(I;\mathbb{R})$ $a \in I$.*

$$\forall x \in I\ \exists \xi \in I : R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Beispiel 29.

$$f = \sin x$$
$$T_n f(x;0) = x - \frac{x^3}{6}$$
$$f^{(5)}(x) = \cos x$$
$$\exists \xi : \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{5!}\cos \xi x^5$$

Beweis 32. $f \in \mathcal{R}^{n+1}(I : \mathbb{C})$

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t = \sigma \int_a^x p(t) f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t = \cdots$$
$$(t) := \frac{|x-t|^n}{n!} \geq 0$$
$$\sigma = \begin{cases} 1 & a < x \\ (-1)^n & a > x \end{cases}$$
$$\ldots \overset{MWS}{=} \sigma f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}\,t$$
$$\int_a^x p(t)\,\mathrm{d}\,t = \sigma\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,\mathrm{d}\,t = \sigma\frac{1}{(n+1)!}(x-t)|_a^x = \sigma\frac{(x-a)^{n-1}}{(n+1)!}$$
$$R_{n+1}\underbrace{\sigma^2}_{=1} f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

3.1 Lokale Extrema

Satz 25. *Sei $f \in \mathcal{R}^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Sei $a \in I$ und es gelte*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$$
$$f^{(n+1)}(a) \neq 0$$

Dann

1. *n gerade $\implies$ f hat in a kein Extrema*
2. *n ungerade, $f^{(n+1)}(a) > 0 \implies f$ hat in a ein strenges lokale Minimumm*
3. *n ungerade, $f^{(n+1)}(a) < 0 \implies f$ hat in a ein strenges lokale Maximum*

Hint: Beweis anschauen > auswendig lernen

Beweis 33. $T_n f(x;a) = f(a)$

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n f(x;a) + R_{n+1}(x) \\ &= f(a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} \textit{stetig} \implies & \qquad \exists \textit{Umgebung von } a f^{(n+1)} \neq 0 \\ f^{(n+1)}(a) \neq 0 & \end{aligned}$$

Man ersetze $\neq$ durch $<$ und $>$.
n gerade $\implies$ $(n+1)$ ungerade. Das Vorzeichen $(x-a)^{n+1}$ verändert ishc
n ungerade $\implies$ $(n+1)$ gerade $(x-a)^{n+1}$ positiv

3.2 Taylorreihen

Definition 36. Taylorreihe Sei $f \in \mathcal{R}^\infty(I, \mathbb{C})$. Man definiert

$$Tf(x;a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Taylorreihe von f im Punkt a

Bemerkung 21.
1. Es kann passieren, dass die Reihe nicht konvergiert
2. Es kann auch passieren, dass die Reihe in einer Umgebung von a konvegiert, aber nicht gegen f!

Beispiel 30.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & f^{(k)}(0) = 0 \ \forall k \\ \implies & Tf(x;0) = 0 \neq f(x) \end{aligned}$$

Definition 37. Konvergiert Tf gegen f in einer Umgebung U von a, so sagt man:

$$\underline{f \text{ besitzt in } U \text{ eine Taylorentwicklung mit } a \text{ als Entwicklungspunkt.}}$$

oder

$$\underline{f \text{ ist reell analytisch in } U}$$

Beweis 34. *Ist $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_l(x-a)^k$ mit $|x-a| < R$ (Konvergenzradius)*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum &= \sum \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ f^{(k)}(a) &= k! a_k \\ \implies Tf &= \sum a_k (x-a)^k \end{aligned}$$

Definition 38. Sei $f : \overbrace{U}^{\in \mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ Sei $a \in U$. Man sagt, f ist analytisch in $a \in U$ wenn $\exists r > 0$ mit $K_r(a) \subset U$ und $\exists$ Potenzreihe $\sum a_k z^k$ mit Konvergenradius $> r$ s.d.

$$f(z) = \sum a_k (z-a)^k \ \forall z \in K_r(a)$$

Struktur	Definitionsbereich	Zielmenge
stetige Funktionen	$U \subset \mathbb{R}, \mathbb{C}$	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$
differenzierbare Funktionen	$I \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$
itengierbare Funktionen	$I \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$
Kurven	$I \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^n$
stetige Abbildungen	$U \in \mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$	$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$
		Grenzwerte in $\mathbb{R}^m$
differenzierbare Funktionen	$U \in \mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$
		partielle Ableitung
differenzierbare Abbildungen	$U \in \mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$
integrierbare Abbildungen	$U \in \mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

Tabelle 1: Übersicht über Funktionen / Abbildungen

4 Elemente der Topologie [Band 2, Kap 1]

Konvergenz, Abgeschlossenheit, Stetigkeit, Häufungspunkte

Definition 39. euklidische Norm Die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Eigenschaften 8.

$$\|x\| > 0 \ \forall x \neq 0, \ \|0\| = 0 \tag{1}$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{2}$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

Definition 40. euklidischer Abstand Der euklidische Abstand zweier Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d(a, b) = \|b - a\|$$

Definition 41. offene Kugel Die offene Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt a und Radius $r > 0$ ist die Menge

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{R} : d(x, a) \leq r\}$$

Definition 42. Konvergenz Eine Folge (x_k) in $\mathbb{R}^n$ heisst konvergent, wenn $\exists a \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, a) = 0$$
$$x_k \in \mathbb{R}^n \ \forall k$$
$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kn})$$
$$x_{ki} \in \mathbb{R}$$

Ist das der Fall, so schreibt man

$$\lim_{k \to \infty} x_k = a$$

Bemerkung 22. (geometrisch)

$$x_k \to a \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0$$

$k_\varepsilon(a)$ fast alle Folgenglieder enthält

Lemma 6.

$$\underset{\textit{Konvergenz}}{x_k \to a \in \mathbb{R}^n} \ \Leftrightarrow \ \underset{\textit{komponentenweise Konvergenz}}{x_{ki} \to a_i \ \forall i = (a_1, \cdots, a_n)}$$

Beweis 35. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \forall i \ \ |x_{ki} - a_i| \leq \|x_k - a\| \to 0 \\ \implies x_{ki} \to a_i \ \forall i \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned} \|x_k - a\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_{ki} - a_i| \to 0 \\ \implies \|x_k - a\| \to 0 \end{aligned}$$

Definition 43. Eine Folge $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ heisst:

beschränkt wenn $\exists r > 0$ mit $x_k \in K_r(0) \ \forall k$

Cauchyfolge wenn $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$

$$\|x_k - x_l\| < \varepsilon \ \forall k, l > N$$

Satz 26. *Bolzano-Weierstrass*

1. *Jede beschränkte Folge besitz eine konvergente Teilfolge*
2. *Jede Cauchyfolge konvergiert*

Beweis 36. 1. *durch Indunktion nach* n
$n = 1$ *Beweis in* $\mathbb{R}$
Annahme: Beweis gilt in $\mathbb{R}^n$ (x_k) *beschränkt in* $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \implies (x_{k1}, \cdots, x_{kn}) \textit{ beschränkt in } \mathbb{R} \\ \implies \exists l_k : (x_{k_l 1}, \cdots, x_{k_l n}) \textit{ konvergiert} \\ x_{k_l n+1} \textit{ beschränkt in } \mathbb{R} \\ \implies \exists l_m : x_{k_{l_m} n+1} \textit{ konvergiert} \\ \implies (x_{k_{l_m}}) \textit{ konvergiert} \end{aligned}$$

2.

$$|x_{ki} - x_{li}| \leq \|x_k - x_l\| \ \ \forall i$$

(x_k) *Cauchy* $\implies$ x_{ki} *Cauchy* $\forall i$ $\implies$ x_{ki} *konvergiert* $\implies$ x_k *konvergiert*

Definition 44. Umgebungen

- Die offene Kugel $K_\varepsilon(a), \varepsilon > 0$ heisst ε-Umgebung von $a \in \mathbb{R}^n$
- Eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ heisst Umgebung von $a \in \mathbb{R}^n$, wenn sie eine ε-Umgebung enthält.

Eigenschaften 9. Umgebungen

1. Seien U, V Umgebungen von $a \implies U \cap V$ und $U \cup V$ sind Umgebungen von a
2. U Umgebung von a; $V \subset U \implies V$ Umgebung von a
3. Hausdorffsche Trennungseigenschaft: $\forall a \neq b \ \exists U$ von a und $\exists V$ von b mit $U \cap V = \varnothing$

Beispiel 31. $U = K_\varepsilon(a)$, $V = K_\varepsilon(b)$ $\varepsilon = \frac{1}{3}\|b - a\|$
Zu beweisen mit der Dreiecksungleichung

Definition 45. offene Menge Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst hoffen, wenn sie eine Umgebung von $\forall x \in U$ ist. D.h.

$$\forall x < inU \ \exists \varepsilon > 0 : \ K_\varepsilon(x) \subset U$$

Beispiel 32.

1. $\mathbb{R}^n$ ist offen
2. $\varnothing \in \mathbb{R}^n$ ist offen
3. $K_r(a)$ $(r > 0,\ a \in \mathbb{R}^n)$ ist offen

Bemerkung 23. Rechenregeln

1. Der Durchschnitt endlich vieler offener Menge ist offen.
2. Die Vereinigung beliebig vieler offener Menge ist offen.