

# Lineare Algebra I - Vorlesungs-Script

Prof. Andrew Kresch

Basisjahr 08/09 Semester II

**Mitschrift:**

Simon Hafner

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Bilinearformen</b>	<b>1</b>
1.1	Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	3
1.2	Skalarprodukt über $\mathbb{C}^n$ . . . . .	4
1.3	Bilinearform . . . . .	5
1.4	Bilineare und quadratische Formen . . . . .	8
1.4.1	Polarisierungsformel . . . . .	8
1.5	Sesquilineare Form . . . . .	8
1.6	Volumen . . . . .	13
1.6.1	Spat . . . . .	13
1.7	Orthogonale und unitäre Endomorphismen . . . . .	16
1.8	Beschreibung von $SO(3)$ und $O(3)$ . . . . .	20
1.9	Selbstadjungierte Endomorphismen . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Klassifikation von Bilinearformen auf <math>\mathbb{R}^n \leftrightarrow</math> Signatur</b>	<b>28</b>

# 1 Bilinearformen

Das kanonische Skalarprodukt (oder: Standardskalarprodukt) von  $\mathbb{R}^n$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

falls  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)$  sind.

**Definition 1** (Konvention). eine  $1 \times 1$  Matrix wird mit Eintrag indentifiziert

$$(x) \in M(1 \times 1, K) \leftrightarrow x \in K$$

Dann können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= (x^t)(y) \\ x &= \begin{pmatrix} x_1, \vdots, x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1, \vdots, y_n \end{pmatrix} \\ (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1, \vdots, y_n \end{pmatrix} &= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \end{aligned}$$

*Bemerkung 1* ( $\langle, \rangle$  ist bilinear).

$$\begin{aligned} \langle x + x', y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, y + y' \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

symmetrisch:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

positiv definit:

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\text{für } \forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

*Bemerkung 2* (Hintergrund: euklidische Geometrie).

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

*Bemerkung 3* (Eigenschaften von  $\|\cdot\|$ ).

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0, \text{ mit } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Dann definieren wir den Abstand von  $x, y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} d(x, y) &\in \mathbb{R} \\ d(x, y) &:= \|y - x\| \end{aligned}$$

*Bemerkung 4.* Eigenschaften

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq 0, \text{ mit } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(y, x) &= d(x, y) \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \\ \text{für } x, y, z &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Wir sind motiviert, Strukturen zu definieren, basierend auf diesen Eigenschaften, so z.B.

- Bilineare Formen (symmetrisch, positiv definit)
- Norme
- Metriken

*Proof.*  $\|\cdot\|$  und  $d$ : die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq (?) (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: für  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind.

$\Leftrightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} - & - & - & x & - & - & - \\ - & - & - & y & - & - & - \end{pmatrix} \in M(2 \times n, \mathbb{R})$$

$A$  hat Rang  $\leq 1$

□

*Proof.*

$$\begin{aligned}A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{pmatrix} \in M(2 \times 2), \mathbb{R} \\ \det(A \cdot A^t) &= \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2\end{aligned}$$

Es gibt eine Gleichung von Determinanten:

$$\begin{aligned}A, B &\in M(k \times n, K) \\ \det(A \cdot B^t) &= \sum_{1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq n} \det(A^{s_1, \dots, s_k}) \det(B^{s_1, \dots, s_k}) \\ \text{wobei } A^{s_1, \dots, s_k} &:= (a_i, s_j)_{1 \leq i, j \leq k}, B^{s_1, \dots, s_k} = (b_i, s_j)_{1 \leq i, j \leq k}\end{aligned}$$

Beweis-Skizze: Reduktion zum Fall, dass die Zeilen von  $A$  und  $B$  Standardbasiselemente sind; direkte Berechnung in diesem Fall.

Es folgt:

$$\det(A \cdot A^t) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \det(A^{i,j})^2 \geq 0$$

und ist  $= 0 \Leftrightarrow$  alle  $2 \times 2$  Minoren von  $A$  sind 0  $\Leftrightarrow \text{rang}(A) \leq 1$

□

**Korollar 1.** Wir können definieren

$$\angle(x, y) := \cos^{-1} \underbrace{\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}}_{\in [-1, 1] \in \mathbb{R}} \in [0, \pi] \in \mathbb{R}$$

für

$$0 \neq x \in \mathbb{R}^n$$

$$0 \neq y \in \mathbb{R}^n$$

**Korollar 2.**  $x, y$  Vektoren,  $\theta$  Winkel zwischen den beiden

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2)$$

und deshalb:

$$\cos \theta = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2}{2 \|x\| \|y\|}$$

$\Rightarrow$  Winkel eines Dreiecks ist nur von den Seitenlängen abhängig.

**Beispiel 1.**

$$\angle(x, y) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

$$\underbrace{\{y \mid \langle x, y \rangle = 0\}}_{\text{Untervektorraum}} = 0 \cup \{0 \neq y \in \mathbb{R}^n \mid \angle(x, y) = \frac{\pi}{2}\}$$

Man nennt  $x$  und  $y$  senkrecht falls  $\langle x, y \rangle = 0$

*Fazit 1.*

$$\begin{array}{ll} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} & \text{bilinear form} \\ \|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} & \text{Norm} \\ d(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0} & \text{Metrik} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ d(x, y) &= \|y - x\| \\ \langle x, y \rangle &= \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2}{2} \end{aligned}$$

### 1.1 Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto & x \times y \end{array}$$

für  $y = (y_1, y_2, y_3)$  und  $y = (y_1, y_2, y_3)$  ist

$$x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

oder:

$$x \times y = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

wobei  $(e_1, e_2, e_3)$  die Standardbasis ist. Es ist deshalb klar, dass

$$0 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \langle x, x \times y \rangle$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \langle y, x \times y \rangle$$

$x \times y$  liegt auf der Gerade von Vektoren senkrecht zu  $x$  und  $y$ . weiter:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} &= \langle x \times y, x \times y \rangle \\ &= \|x \times y\|^2 = (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 \left(1 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^2 \|y\|^2}\right) \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 (1 - \cos^2 \angle(x, y)) = \|x\|^2 \|y\|^2 \sin^2 \angle(x, y) \end{aligned}$$

*Fazit 2.* Wenn das Ergebnis = 0, folgt daraus, dass  $x$  und  $y$  linear abhängig sind. Falls  $x$  und  $y$  linear unabhängig sind, dann folgt dass  $(x \times y, x, y)$  zu derselben Orientierungsklasse gehört wie  $(e_1, e_2, e_3)$ . Insgesamt bedeutet dies, dass  $x \times y$  folgende Eigenschaften hat:

- ist senkrecht zu  $x$  und  $y$
- ist  $0 \Leftrightarrow x$  und  $y$  sind linear abhängig
- hat Länge  $\|x\| \|y\| \sin \angle(x, y)$
- und hat die Richtung, die mit  $x$  und  $y$  die gleiche Orientierungsklasse wie die Standardbasis hat.

## 1.2 Skalarprodukt über $\mathbb{C}^n$

Sei  $z = (z_1, \dots, z_n)$  und  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$

*Bemerkung 5.* Der Ausdruck macht Sinn.

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &:= z_1 w_1 + \dots + z_n w_n \\ \langle z, z \rangle &:= z_1^2 + \dots + z_n^2 \end{aligned}$$

Dann kann die Länge nicht mehr interpretiert werden, z.B. für  $z = (1, i, 0, \dots, 0)$  haben wir  $\langle z, z \rangle = 1^2 + i^2 = 0$ . Isotropische Untervektorräume von  $\mathbb{C}^n$  werden nicht in diesem Kurs behandelt. ( $V \subset \mathbb{C}^n$  s.d.  $\langle v, w \rangle = 0 \forall v, w \in V$ ). Für die Physik, die Geometrie usw. ist eine Interpretation in Zusammenhang mit Länge wichtig, deshalb brauchen wir eine neue Definition.

**Definition 2** (Das kanonische Skalarprodukt). von  $\mathbb{C}^n$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_c : \mathbb{C}^n \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n \end{aligned}$$

*Eigenschaften 1* (von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$ ).

$$\begin{aligned} \langle z + z', w \rangle &= \langle z, w \rangle_c + \langle z', w \rangle_c \\ \langle \lambda z, w \rangle_c &= \lambda \langle z, w \rangle_c \\ \langle z, w + w' \rangle_c &= \langle z, w \rangle_c + \langle z, w' \rangle_c \\ \langle z, \lambda w \rangle_c &= \bar{\lambda} \langle z, w \rangle_c \end{aligned}$$

für  $z, z', w, w' \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  ist sesquilinear

$$\begin{aligned} \langle w, z \rangle_c &= \overline{\langle z, w \rangle_c} \text{ hermitisch} \\ \langle z, z \rangle_c &\in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ positiv definit} \\ \langle z, z \rangle_c = 0 &\Leftrightarrow z = 0 \end{aligned}$$

*Fazit 3.*  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  ist sesquilinear, hermitisch und positiv definit.

*Proof.* Bei Bedarf sonstwo nachschauen (Zu viele Zeichen und zu wenig Sinn). Es läuft auf eine Sammlung von Quadraten heraus.  $\square$

**Definition 3** (Norm von  $\mathbb{C}^n$ ).

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle_c}$$

*Bemerkung 6.* Sei  $w = (x'_1 + xy'_1, \dots, x'_n + iy'_n)$ . Dann:

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle_c &= (x_1 + iy_1)(x'_1 - iy'_1) + \dots + (x_n + iy_n)(x'_n - iy'_n) \\ &= (x_1 x'_1 + y_1 y'_1 + \dots + x_n x'_n + y_n y'_n) + i(x'_1 y_1 - x_1 y'_1 + \dots + x'_n y_n - x_n y'_n) \end{aligned}$$

Auf diese Weise ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  eine Erweiterung von reellen Skalarprodukt.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n} & \rightarrow & \mathbb{C}^n \mathbb{R}\text{-linear} \\ e_1 & \mapsto & (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 & \mapsto & (i, 0, \dots, 0) \\ \dots & & \\ e_{2n} & \mapsto & (0, \dots, 0, i) \end{array}$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_c = (\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ von } \mathbb{R}^{2n}) + i(\text{neues})$$

$\operatorname{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle_c = \langle \cdot, \cdot \rangle$  von  $\mathbb{R}^{2n}$  unter diesem Isomorphismus.

Sei  $\omega := \operatorname{Im} \langle \cdot, \cdot \rangle_c$ :

$$\begin{array}{ccc} \omega : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & & \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{oder } \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

*Eigenschaften 2* (von  $\omega$  (Imaginärteil des kanonischen Skalarproduktes)). **bilinear**

**schiefsymmetrisch**  $\omega(w, z) = -\omega(z, w)$

$$\omega(z, z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^n \text{ (oder } \mathbb{R}^{2n})$$

### 1.3 Bilinearform

Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum.

**Definition 4** (Bilinearform). Eine bilineare Form auf  $V$  ist eine Abbildung

$$s : V \times V \rightarrow K$$

so dass:

$$\begin{array}{ccc} s(v + v', w) & = & s(v, w) + s(v', w) \\ s(\lambda v, w) & = & \lambda s(v, w) \\ s(v, w + w') & = & s(v, w) + s(v, w') \\ s(v, \lambda w) & = & \lambda s(v, w) \end{array}$$

$$\forall v, v', w, w' \in V, \lambda \in K$$

Und:  $s$  heisst symmetrisch, falls  $s(w, v) = s(v, w)$  und schiefsymmetrisch, falls  $s(w, v) = -s(v, w)$ .

**Beispiel 2.** •  $\langle \cdot, \cdot \rangle := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine symmetrische bilineare Form

- $\omega$  ist eine schiefsymmetrisch bilineare Form
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  nicht)
- $V = \{\text{stetige Abbildung } [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$  über  $\mathbb{R}$ :  $f, g \in V$

$$s(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

ist eine symmetrisch bilineare Form auf  $V$

Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, mit  $\dim_K V < \infty$ , und  $s : V \times V \rightarrow K$  eine bilineare Form.

**Definition 5.** Ist  $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$  eine Basis von  $V$ , so setzen wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n \times n, K)$$

die darstellende Matrix

**Korollar 3.** für  $x, y \in V$

$$\begin{aligned} x &= x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \\ y &= y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n \end{aligned}$$

und

$$M_B(s) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ d.h. } a_{ij} = s(v_i, v_j)$$

haben wir:

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \sum_{i, j=1}^n x_i y_j a_{ij} \\ &= (x_1 \cdots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x^t M_B(s) \cdot y \end{aligned}$$

**Proposition 1.** Sei  $V$  ein endlich-dim. Vektorraum über  $K$  mit Basis  $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge von Bilinearformen und  $M(n \times n, K)$ , gegeben durch

$$(s : V \times V \rightarrow K) \mapsto M_B(s)$$

**Beweis 1.** Wir schreiben einen Vektor  $x \in V$  als  $(x_1, \dots, x_n)$  falls  $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ . Ähnlich für  $y$ . Dann ist

$$\begin{aligned} A \in M(n \times n, K) &\mapsto V \times V \rightarrow K \\ (x, y) &\mapsto x^t \cdot A \cdot y \end{aligned}$$

inverses zu der obigen Abbildung.

**Bemerkung 7.** Sei  $(s : V \times V \rightarrow K)$  eine bilineare Form und  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  die darstellende Matrix. Wir erinnern uns an die Notation

$$\begin{aligned} \Phi_B : K^n &\rightarrow V \\ e_i &\mapsto v_i \end{aligned}$$

Dann:

$$K^n \times K^n \xrightarrow{\Phi_B \times \Phi_B} V \times V \xrightarrow{s} K$$

ist gegeben durch

$$(x, y) \mapsto t_x A \cdot y$$

Sei  $A = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$  eine andere Basis.

$$\begin{aligned} &K^n \xrightarrow{\Phi_A} V \\ \xrightarrow{T} &= \Phi_B^{-1} \circ \Phi_A \\ &K^n \xrightarrow{\Phi_B} \end{aligned}$$

**Proposition 2.** Transformationsformel Mit dieser Notation haben wir:

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot T$$



**Beweis 2.**

$$\begin{array}{ccc}
 K^n \times K^n & \xrightarrow{\Phi_B \times \Phi_B} & V \times V \xrightarrow{s} K \\
 (x, y) & \mapsto & t_x \cdot M_B(s) \cdot y
 \end{array}$$

Es folgt: (eine Bastelei...)

$$\begin{array}{ccc}
 K^n \times K^n & \xrightarrow{\Phi_A \times \Phi_A} & V \times V \xrightarrow{s} K \\
 T \times T & \xrightarrow{\quad} K^n \times K^n & \xrightarrow{\Phi_B \Phi_B} \uparrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 K^n \times K^n(x, y) & \mapsto & K(x^t M_a(s) \cdot y) = t_x^t M_B(s) T_y = (T_x)^t M_B(s) (T_y) \\
 & \mapsto K^n \times K^n(T_x, T_y) & \xrightarrow{(T_x)^t M_B(s) (T_y)} \uparrow
 \end{array}$$

Es folgt aus der oberen Proposition (Vor der Transf.):

$$T^t M_B(s) T = M_a(s)$$

**Beispiel 3.**  $V = K^n$ , mit Standardskalaprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Ist  $B = (e_1, \dots, e_n)$ , so ist

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = M_{\text{Standardbasis}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$$

Sei

$$\begin{array}{lcl}
 A = & (e_1, e_2 - e_1, & e_3 - e_2, \dots, e_n - e_{n-1}) \\
 =: & (u_1, u_2, & \dots, u_n
 \end{array}$$

Direkt aus der Definition:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 2 & i = j > 1 \\ -1 & |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

oder mit der Transformationsformel

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \cdots & & \\ \cdots & & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ und } T^t E_N T''$$

*Bemerkung 8.* Ist  $A$  die darstellende Matrix bezüglich einer Basis, so haben wir:

- symmetrisch  $\Leftrightarrow A = A^t$
- schiefsymmetrisch  $\Leftrightarrow A = -A^t$

Das stimmt überein mit (vgl. Übungsblatt 3):  $A \in M(n \times n)$  ist symmetrisch  $\Leftrightarrow A = A^t$ .  $A$  ist schiefsymmetrisch oder antisymmetrisch (oder alternierend wenn  $\text{char}(K) \neq 2$ )  $\Leftrightarrow A = -A^t$

## 1.4 Bilineare und quadratische Formen

Eine quadratische Form  $V \rightarrow K$  wird zu einer Bilinearform assoziiert. Falls  $\dim_K V < \infty$ : "quadratische Form" bedeutet  $q : V \rightarrow K$  bezüglich einem Koordinatensystem gegeben als homogenes quadratisches Polynom. Ist  $s : V \times V \rightarrow K$  eine bilineare Form, dann heisst

$$\begin{array}{ccc} q : V & & \rightarrow K \\ v & \mapsto & q(v) = s(v, v) \end{array}$$

die zu  $s$  gehörige quadratische Form.

**Beispiel 4.**  $\langle v, v \rangle = v_1^2 + \dots + v_n^2$  für  $v \in K^n$

Für  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  eine symmetrische Matrix mit  $s : V \times V \rightarrow K$ ,  $(x, y) \mapsto x^t A y$ , haben wir

$$\begin{aligned} s(x, x) &= x^t A x \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Ist  $\text{char}(K) \neq 2$ , so haben wir:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{symm. bilineare Formen in } K^n\} & \leftrightarrow & \{\text{quadr. Formen auf } K^n\} \\ s & \mapsto & q(v) := s(v, v) \\ & \leftrightarrow & (\text{Polarisierungsformel}) \end{array}$$

### 1.4.1 Polarisierungsformel

Ist  $s$  eine symmetrische Bilinearform und  $q$  die zu  $s$  gehörende quadratische Form über einem Vektorraum  $V$  über  $K$  mit  $\text{char}(K) \neq 2$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} s(v, w) &= \frac{1}{2} (q(v+w) - q(v) - q(w)) \\ &= \frac{1}{2} (q(v) + q(w) - q(v+w)) \\ &= \frac{1}{4} (q(v+w) - q(v-w)) \end{aligned}$$

## 1.5 Sesquilineare Form

**Definition 6.** Sei  $V$  ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung

$$s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

heisst sesquilinear falls:

$$\begin{aligned} s(v + v', w) &= s(v, w) + s(v', w) \\ s(\lambda v, w) &= \lambda s(v, w) \\ s(v, w + w') &= s(v, w) + s(v, w') \\ s(v, \lambda w) &= \bar{\lambda} s(v, w) \end{aligned}$$

für  $v, v', w, w' \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$

**Beispiel 5.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $\mathbb{C}^n$

$$s(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$\text{auf } V := \{\text{stetige Abb.}\}[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

**Definition 7.** Eine sesquilineare Form heisst hermitesch, falls

$$s(w, v) = s(v, w) \quad \forall v, w \in V$$

**Beispiel 6.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  auf  $\mathbb{C}^n$  ist hermitesch.

*Bemerkung 9.* Man spricht von hermiteschen Form, diese sind immer sesquilinear

**Definition 8.** Sei  $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ , und  $B := (v_i)_{1 \leq i \leq n}$  eine Basis. Ist  $s$  eine sesquilineare Form, so definieren wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

die darstellende Matrix. Sind  $z, w \in V$

$$z = z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n$$

$$w = w_1 v_1 + \cdots + w_n v_n$$

dann haben wir

$$s(z, w) = \sum_{i, j=1}^n z_i \bar{w}_j a_{ij} \text{ wobei } a_{ij} = s(v_i, v_j)$$

$$= (z_1 \cdots z_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{w}_n \end{pmatrix} = z^t M_B(s) \cdot \bar{w}$$

**Proposition 3.** Sei  $V$  ein endlich dim.  $\mathbb{C}$  Vektorraum und  $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Wir haben eine Bijektion

$$\{\text{sesquilineare Form auf } V\} \leftrightarrow M(n \times n, \mathbb{C})$$

Unter dieser Bijektion haben wir:

$$\{\text{hermitesche Formen}\} \leftrightarrow \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) : A^t = \bar{A}\}$$

Man sagt: eine Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  mit  $A^t = \bar{A}$  ist hermitesch.

**Satz 1.** Transformationsformel Sei  $A = (u_1, \dots, u_n)$  eine andere Basis mit Transformationsmatrix  $T$ :

TODO: hier einfügen

Dann gilt:

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot \bar{T}$$

Mit  $g(v) := s(v, v)$  gilt die Polarisierungsformel

$$s(v, w) = \frac{1}{4} (q(v+w) - q(v-w) + iq(v+iw) - iq(v-iw))$$

**Definition 9.** Sei  $K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $s : V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform  $\begin{cases} \text{symmetrisch} & K = \mathbb{R} \\ \text{hermitesch} & K = \mathbb{C} \end{cases}$  heisst positiv definit, falls  $s(v, v) > 0$   $\forall 0 \neq v \in V$

**Beispiel 7.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist positiv definit auf  $\mathbb{R}^n$   
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  ist positiv definit auf  $\mathbb{C}^n$

**Definition 10.** Ein Skalarprodukt ist  $\begin{cases} \text{positiv definite symmetrische bilineare Form} & K = \mathbb{R} \\ \text{eine positiv definite hermitesche Form} & K = \mathbb{C} \end{cases}$

**Definition 11.** Skalarprodukt oft  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , Norm  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$

**Definition 12.** Euklidischer Vektorraum Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit Skalarprodukt

**Definition 13.** Unitärer Vektorraum Vektorraum über  $\mathbb{C}$  mit Skalarprodukt

**Beispiel 8.**

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \} \text{ mit } \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig} \} \text{ mit } \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

in beiden Fällen

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$$

“ $L^2$ -Norm”

*Bemerkung 10.* In einem beliebigen euklidischen bzw. unitären Vektorraum gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in V$$

mit = genau dann, wenn  $v$  und  $w$  linear abhängig sind.

**Beweis 3.** (Skizze) klar falls  $v = 0$  oder  $w = 0$ , also nehmen wir an, dass  $v \neq 0$  und  $w \neq 0$ . 1. Reduktion: zum Fall  $\|v\| = \|w\| = 1$ .

$$v_1 := \frac{v}{\|v\|} w_1 := \frac{w}{\|w\|}$$

$$\|v_1\| = 1 \quad \|w_1\| = 1$$

2. Reduktion: Es reicht aus, zu zeigen:  $\operatorname{Re} \langle v, w \rangle \leq 1 = \text{genau dann wenn } V = W$

$$\begin{aligned} |\langle v, w \rangle| &= \mu \langle v, w \rangle \quad \mu \in \mathbb{C}, |\mu| = 1 \\ &= \langle \mu v, w \rangle \in \mathbb{R}_{\geq} \\ &= \operatorname{Re} \langle v', w \rangle \quad \text{wobei } v' := \mu v \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung  $\leq$ , Gleichheit:  $v, w$  linear unabhängig  $\implies v', w$  linear unabhängig  $\implies v' \neq w$

Eigenschaften 3.

$$\begin{aligned} &= \text{falls} \\ \langle v - w, v - w \rangle &\geq 0 \quad v - w = 0 \\ \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle &\geq 0 \quad v = w \\ 1 - \langle v, v \rangle - \overline{\langle v, w \rangle} + 1 &\geq 0 \quad v = w \end{aligned}$$

**Beispiel 9.** Ist  $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  oder  $T : V \rightarrow \mathbb{C}^n$  ein Isomorphismus, dann ist  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ ) gegeben durch

$$s(x, y) = \langle T_x, T_y \rangle$$

bzw.

$$s(x, y) = \langle T_x, T_y \rangle_c$$

ein Skalarprodukt.

**Definition 14.** Sei  $V$  ein exklusiver, bzw. unitärer Vektorraum

- $v, w \in V$  heisst orthogonal, falls  $\langle v, w \rangle = 0$
- $U, W \subset V$  heissen orthogonal (geschrieben  $U \perp W$ ) falls  $U \perp W \quad \forall u \in U, w \in W$
- $U \subset W$  das orthogonale Komplement ist  $U^\perp = \{v \in V : u \perp v \forall u \in U\}$
- $v_1, \dots, v_n$  sind orthogonal, falls  $v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j$
- $v_1, \dots, v_n$  sind orthonormal, falls  $v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j$  und  $\|v_i\| = 1 \quad \forall i$
- $V$  ist orthogonale direkte Summe von Untervektorräumen  $V_1, \dots, V_r$  falls

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$$

$$V_i \perp V_j \quad \forall i \neq j$$

$$C([-1, 1], \mathbb{R}) := \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$$

dann ist  $C([-1, 1], \mathbb{R})$  die orthogonale direkte Summe von  $C([-1, 1], \mathbb{R})_{\text{gerade}}$  und  $C([-1, 1], \mathbb{R})_{\text{ungerade}}$ . gerade:  $f(-x) = f(x)$  und ungerade:  $f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{gerader Teil}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{ungerader Teil}}$$

$$g \text{ gerade, } h \text{ ungerade} \implies gh \text{ ungerade} \implies \langle g, h \rangle = \int_{-1}^1 g(x)h(x) = 0$$

*Bemerkung 11.* Ist  $v_1, \dots, v_n$  eine orthonormale Familie mit  $v_i \neq 0 \forall i$ , so gilt

1.  $(i)(v_1, \dots, v_n)$  ist linear unabhängig ( $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0 \implies c_i \langle v_i, v - i \rangle + \dots + c_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i \rangle = 0 \implies c_i \|v_i\|^2 = 0 \implies c_i = 0$ )
2.  $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right)$  ist orthonormal

**Satz 2.** Ist  $(v_1, \dots, v_n)$  eine orthonormale Basis von  $V$ , so gilt folgendes für beliebiges  $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v_i, v \rangle v_i$$

$$v = \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

$$\langle v, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= c_j \langle v_i, v_j \rangle = c_j$$

**Proposition 4.** Sei  $K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  und  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum über  $K$

1. Ist  $n := \dim_K V < \infty$  und  $(v_1, \dots, v_d)$  eine orthonormale Familie von Vektoren von  $V$ , so existieren  $v_{d+1}, \dots, v_n$ , so dass  $(v_1, \dots, v_n)$  eine orthonormale Basis von  $V$  ist.
2. Ist  $U \subset V$  ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so gilt  $V = U \oplus U^\perp$ , orthonormal direkte Summe.

**Beweis 4.** Es gibt triviale Fälle:  $d = n$  in 1.,  $U = 0$  in 2. Auch: der Fall ( $d = 0$ ) in 1.  $\Leftarrow d = 1$ :  $0 \neq v \in V$  beliebiger Vektor, wir nehmen  $b_1 = \frac{v}{\|v\|}$   
Beweis durch Induktion nach  $N$  mit Induktionsannahme 1. gilt für  $n \leq N$   
 $N = 1$  okay.

$$U : 1\text{-dimensional} \mid U^\perp : 2\text{-dim} \\ s(e_1, e_1) = 3 \mid = 24$$

**Plan:** Wir zeigen  $IA \implies 2.$  für  $\dim_K U \leq N$  und  $IA \implies 1.$  für  $n \leq N + 1$ .  
 $IA \xrightarrow{\dim U \leq N} \exists$  orthonormale Basis  $(u_1, \dots, u_d)$  von  $U$   $d := \dim U$ . Für beliebiges  $v \in V$  gilt:

$$v - \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i \in U^\perp$$

denn

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i, u_j \right\rangle = \langle v, u_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

Und: 1. für  $\dim V \leq N + 1$  folgt aus  $IA$  und 2. für  $U \leq N$

$$1 \leq d < n = \dim V \leq N + 1 \\ \implies 1 \leq d \leq N \text{ und } 1 \leq \dim V - d \leq N$$

Sei  $U := \text{span}(v_1, \dots, v_d)$  Aus 2. haben wir  $V = U \oplus U^\perp$  Nach  $IA$ ,  $\exists$  orthonormale Basis  $(v_{d+1}, \dots, v_n)$  von  $U^\perp$  Es folgt, dass  $(v_1, \dots, v_n)$  ist eine orthonormale Basis von  $V$ .

**Eigenschaften 4.** Praktisches Verfahren zu testen ob ein symmetrisch bilinear bzw. hermitesche Form ein Skalarprodukt ist (falls  $\dim_K V < \infty$ ). Verfahren:

- wählen  $U \subset V$  nicht trivialer Untervektorraum (z.B.  $U = \text{span}(v), 0 \neq v \in V$ )
- Berechnen  $U^\perp$
- Testen:
  - Ist  $V = U \oplus U^\perp$ ?
  - Ist die Einschränkung von der Form auf  $U$  ein Skalarprodukt?
  - Ist die Einschränkung von der Form auf  $U^\perp$  ein Skalarprodukt?

**Beispiel 10.**  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die entsprechende Bilinearform

$$(x, y) \mapsto t_x \cdot M \cdot y$$

$$\begin{aligned} U &= \text{span}(e_1) \\ U^\perp &= \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} \\ &= \text{span}((1, -3, 0), (0, 2, -1)) \end{aligned}$$

Die darstellende Matrix:

$$s|_{U^\perp} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
U &\cong \mathbb{R}^2 \\
W &= (e_1) \in \mathbb{R}^2 \\
W^\perp &= \{(x_1, x_2) | 24x_1 - 21x_2 = 0\} \\
&= (21, 24)
\end{aligned}$$

$W$  1-dim,  $W^\perp$  1-dim

$$\begin{aligned}
&(s|_{U^\perp})(e_1, e_2) = 24 \\
(21 \quad 24) \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix} (21 \quad 18) &= -216
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  kein Skalarprodukt

## 1.6 Volumen

**Definition 15.** Volumen  $\xleftrightarrow{\text{Skalarprodukt}}$   $\langle \cdot, \cdot \rangle$   $\rightsquigarrow$  Norm  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$   $\rightsquigarrow$  Metrik  $d(x, y) = \|y, x\|$   
 $K = \mathbb{R} \rightsquigarrow$  Volumen ( $\dim V < \infty$ )

### 1.6.1 Spat

**Definition 16.** Spat  $u_1, \dots, u_n$  orthonormale Basis. Dann ist der von  $(u_1, \dots, u_n)$  aufgespannte Spat definiert als (wobei  $c_i :=$  von  $(u_1, \dots, u_n)$  aufgespannten Spat)

$$\left\{ \sum_{i=1}^n c_i u_i \mid 0 \leq c_i \leq 1 \ \forall i \right\}$$

$\text{Vol}(\text{Spat}) := 1$

Falls  $v_1, \dots, v_n \in V$  beliebig sind, dann hat der von  $(v_1, \dots, v_n)$  aufgespannte Spat

$$\text{Vol} = \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| \quad v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$$

Sei  $b_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle$  und  $B := \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$  Wir haben  $b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}$ ,

also  $B = A \cdot A^t$ . Es folgt:

$$\text{Vol} = \sqrt{(\det A)^2} = \sqrt{\det B}$$

Vorteile:

- keine Wahl von orthonormaler Basis nötig
- auch sinnvoll für eine Kollektion  $v_1, \dots, v_m$  evtl.  $m \neq n$

**Beispiel 11.**  $m = 1$

$$\begin{aligned}
\det B &= \|v_1\|^2 \\
\sqrt{\det B} &= \|v_1\|
\end{aligned}$$

**Definition 17.** Grammsche Determinante Im  $m$ -dim Volumen  $:= \sqrt{G(v_1, \dots, v_m)}$  wobei

$$G(v_1, \dots, v_m) := \det (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq m}$$

die sogenannte Grammsche Determinante ist.

**Bemerkung 12.** Es gilt  $G(v_1, \dots, v_m) = 0 \Leftrightarrow v_1, \dots, v_m$  linear abhängig, weil

$$A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

mit

$$G(v_1, \dots, v_m) = \det(A, A^t) = \sum (m \times m \text{ Minor})$$

**Bemerkung 13.**

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) := \sqrt{G(v_1, \dots, v_m)}$$

ist 0 falls  $\exists i : v_i = 0$

sonst:

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) = \|v_1\| \cdots \|v_m\| \text{Vol}\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_m}{\|v_m\|}\right)$$

**Satz 3.** Hadamard'sche Ungleichung

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) \leq \|v_1\| \cdots \|v_m\|$$

für  $0 \neq v_i \in V$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Mit Gleichheit genau dann wenn  $v_1, \dots, v_m$  orthogonal sind.

**Beweis 5.** Durch fallende Induktion nach

$$\max\{|I| : I \subset \{1, \dots, m\} \mid (v_i)_{i \in I} \text{ orthogonal}\}$$

**Fall**  $\max\{\dots\} = m$  das bedeutet,  $v_1, \dots, v_m$  sind orthogonal. Dann:

$$G(v_1, \dots, v_m) = \det \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|v_m\|^2 \end{pmatrix} = \|v_1\|^2 \cdots \|v_m\|^2$$

Die ist der Induktionsanfang.

Sei  $r \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq r < m$ . Induktionsannahme: Ungleichung für den Fall

$$\max\{|I| : (v_i)_{i \in I} \text{ orthogonal}\} > r$$

Sei  $v_1, \dots, v_m$ , so dass  $\max\{\dots\} = r$ . o.B.d.A:  $v_1, \dots, v_r$  orthogonal. Wir schreiben:

$$\begin{aligned} v_m &= \underbrace{v_m - \sum_{i=1}^r \frac{\langle v_m, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i}_{\tilde{v}_m \in \text{span}(v_1, \dots, v_r)^\perp} + \underbrace{\sum_{i=1}^r \frac{\langle v_m, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i}_{\tilde{v}_m \in \text{span}(v_1, \dots, v_r)} \\ &< \tilde{v}_m, \tilde{v}_m = 0 \end{aligned}$$

- $v = \tilde{v} + \tilde{\tilde{v}}$
- $\langle \tilde{v}, \tilde{\tilde{v}} \rangle = 0$
- $\|v\|^2 = \|\tilde{v}\|^2 + \|\tilde{\tilde{v}}\|^2$

Das ist eine Orthogonale Projektion Wir haben

$$G(v_1, \dots, v_m) = G(v_1, \dots, v_{m-1}, \tilde{v}_m)$$

weil (Spalten- und Zeilenumformungen...). Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(v_1, \dots, v_m) &= \text{Vol}(v_1, \dots, v_{m-1}, \tilde{v}_m) \leq \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \|\tilde{v}_m\| \\ &< \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \|v_m\| \end{aligned}$$



**Definition 18.** Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

$$\tilde{v}_r := v_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\langle v_r, \tilde{v}_i \rangle}{\langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_i \rangle} \tilde{v}_i, \text{ für } 1, 2, \dots$$

gegeben: eine Kollektion  $(v_1, \dots, v_n)$  oder abzählbar unendlich  $(v_1, v_2, \dots)$ . Das Verfahren produziert  $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots)$ , mit:

$$\begin{aligned} (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots) &= (v_1, v_2, \dots) \\ (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m) &= (v_1, \dots, v_m) \quad \forall m \\ (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots) &\text{ sind orthogonal} \end{aligned}$$

**Beispiel 12.**  $C([-1, 1], \mathbb{R})$  mit  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$

$$\begin{aligned} (1, x, x^2, \dots) \\ \xrightarrow{\text{GS}} \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{2/3}{2} \\ (1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5} \dots) \end{aligned}$$

Bis auf Normalisierung bekommen wir die Legendre-Polynome.

*Fazit 4.*

Bilinearform	$\xrightarrow{+ \text{ def, symm}}$	Norm	$\rightarrow$	Metrik	Norm:
Sesquilinearform	$\xrightarrow{+ \text{ def, hermitesch}}$				

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \|x\| = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Metrik:

$$\begin{aligned} d : V \times V &\rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \\ d(x, <) = 0 &\Leftrightarrow x = y \\ d(x, y) &= d(y, x) \\ d(x, z) &\leq d(y, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Aber: nicht jede Metrik, nicht einmal jede transinvariante Metrik kommt von einer Norm.

*Bemerkung 14.* Eine Norm kommt von einer +def, symm Bilinearform

$$\Leftrightarrow \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in V$$

**Definition 19.** ausgeartete Bilinearform Eine Bilinearform  $s : V \times V \rightarrow K$  ist ausgeartet (oder: entartet), falls eine oder beide der induzierten Abbildungen  $V \rightarrow V^*$  nicht injektiv ist.

$$\begin{aligned} v &\mapsto (w \mapsto s(v, w)) \\ v &\mapsto (w \mapsto s(w, v)) \end{aligned}$$

*Bemerkung 15.* Falls  $\dim_K V < \infty$ , dann:

$$\begin{aligned} v &\mapsto (w \mapsto s(v, w)) && \text{injektiv} \\ \Downarrow & & & \\ v &\mapsto (w \mapsto s(w, v)) && \text{injektiv} \\ \Downarrow & & & \\ & s \text{ ist nicht ausgeartet} & & \\ \Downarrow & & & \\ & \text{die darstellende Matrix ist invertierbar} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s(v, w) &= v^t \cdot A \cdot w \\ &= (A^t \cdot v)^t\end{aligned}$$

i++j

**Satz 4.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $s : V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Für  $U \subset V$  Untervektorraum, schreiben wir noch

$$U^\perp := \{v \in V : s(u, v) = 0 \ \forall u \in U\}$$

( $s(v, u) = 0 \Leftrightarrow s(u, v) = 0$  weil  $s$  symm. bzw. schiefsymm.)

**Proposition 5.** Sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $s : V \times V \rightarrow K$  eine nicht ausgeartete symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Sei  $U \subset V$  ein Untervektorraum. Dann gilt:

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

**Beweis 6.** Sei  $(v_i)_{i=1, \dots, n}$  eine Basis mit  $n := \dim V$ , und  $A$  die darstellende Matrix von  $s$  bzw.  $(v_i)$ . Wir haben dann:

$$s(x, y) = x^t \cdot A \cdot y$$

und  $A^t = \pm A$ ,  $\det A \neq 0$

$$U^\perp = \{x \in V_i | x^t \cdot A \cdot y = 0 \ \forall y \in U\} = \{x \in V_i | (x \cdot A)^t \cdot y = 0 \ \forall y \in U\}$$

Sei  $F : V \rightarrow V$  lin. Abb.  $\leftrightarrow A$ . Dann:

$$F(U^\perp) = \{Ax | (Ax)^t y = 0 \ \forall y \in U\} = \{Ax | \tilde{x}^t y = 0 \ \forall y \in U\}$$

Es folgt: mit

$$B := \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_d \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$(u_1, \dots, u_d)$  Basis von  $U$ , dann ist  $F(U^\perp) = \text{Ker } B$ . Jetzt:

$$\dim U^\perp = \dim F(U^\perp) = \dim \text{Ker } B = n - \dim U$$

**Korollar 4.**  $\dim U < \infty$ ,  $s : V \times V \rightarrow K$  nicht ausgeartet, (schief-) symm.

$$U \subset \implies (U^\perp)^\perp = U$$

**Bemerkung 16.** Es ist nicht immer der Fall, dass  $V = U \oplus U'$ , weil es ist möglich, dass  $U \cup U^\perp \neq 0$ . 2 Extremfälle:

- $U$  ist isotropisch ( $s|_U$  ist trivial)  $\Leftrightarrow U \subset \underbrace{U^\perp}_{\dim V - \dim U}$
- $s|_U$  ist auch nicht ausgeartet  $\Leftrightarrow U \cup U^\perp = 0 \Leftrightarrow V = U \oplus U^\perp$

Aus 1. ist klar:

$$\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V \ \forall \text{ isotrop } U \subset V$$

## 1.7 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

$K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$

**Definition 20.** orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei  $V, \langle, \rangle$  ein ortho. bzw. unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus  $F : V \rightarrow V$  heisst orthogonal bzw. unitär falls

$$\langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \forall v, w \in V$$

*Bemerkung 17.* Das ist äquivalent zu

$$\|F(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in V$$

*Eigenschaften 5.* orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei  $F$  ein ortho. bzw. unitärer Endomorphismus. Dann:

- $F$  ist injektiv
- Falls  $\dim_K V < \infty$ ,  $F$  ist bijektiv, und  $F'$  ist auch ortho. bzw. unitär
- Für jeden Eigenwert  $\lambda \in K$  gilt  $|\lambda| = 1$ . Eigenvektor  $v$ :

$$\|v\| = \|F(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

Falls  $V = \mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{C}^n$  mit Standardskalarprodukt

$$\langle v, w \rangle = v^t w \text{ bzw. } \langle v, w \rangle_c = v^t \bar{w}$$

Ist  $F$  zur Matrix  $A$  entsprechend, dann

$$\begin{aligned} \langle F(v), F(w) \rangle &= \langle v, w \rangle \Leftrightarrow (Av)^t Aw = v^t w \\ &\text{bzw. } (Av)^t \bar{Aw} = v^t \bar{w} \\ \Leftrightarrow v^t A^t Aw &= v^t w \Leftrightarrow A^t A = E_n \\ \text{bzw. } \Leftrightarrow v^t A^t \bar{A} \bar{w} &= v^t \bar{w} \Leftrightarrow A^t \bar{A} = E_n \end{aligned}$$

**Definition 21.** ortho. bzw. unitäre Matrix  $O(n) := A \in GL_n(\mathbb{R})$  heisst orthogonal falls  $A^t A = E_n$

$U(n) := A \in GL_n(\mathbb{C})$  heisst unitär falls  $A^t \bar{A} = E_n$

Not 1.

$$\begin{aligned} O_n &:= \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | A \text{ orthogonal}\} \\ O_n &:= \{A \in GL_n(\mathbb{C}) | A \text{ unitär}\} \end{aligned}$$

Weil

$$A, B \in O(n) \implies (AB)^t (AB) = B^t A^t AB = B^t B = E_n \implies AB \in O(n)$$

haben wir  $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$  ist eine Untergruppe. Ähnlich:  $U(n) \subset GL_n(\mathbb{C})$  ist eine Untergruppe.

Not 2.

$$\begin{aligned} SO(n) &= O(n) \cap SL_n(\mathbb{R}) \\ SU(n) &= U(n) \cap SL_n(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

Not 3. ortho. bzw. unitärer Vektorraum

$$\begin{aligned} O(V) &= \{F \in GL(V) | \text{ortho.}\} \\ U(V) &= \{F \in GL(V) | \text{unitär}\} \end{aligned}$$

*Bemerkung 18.*

$$\begin{aligned} A \in O(n) &\implies \det A \in \{\pm 1\} \\ A \in U(n) &\implies \det A \in \{\pm z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \end{aligned}$$

*Eigenschaften 6.* Charakterisierungen von ortho. bzw. unitären Matrizen Äquivalente Charakterisierungen von orthogonalen bzw. unitären Matrizen  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ :

$A$  ist orthogonal  $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Leftrightarrow A^t A = E_n \Leftrightarrow A A^t = E_n \Leftrightarrow$  die Spalten von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$  die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^n$ .

Ähnlich:

$A$  ist unitär  $\Leftrightarrow A^{-1} = \bar{A}^t \Leftrightarrow A^t \bar{A} = E_n \Leftrightarrow \bar{A} A^t = E_n \Leftrightarrow$  die Spalten von  $A$

bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^n \Leftrightarrow$  die Zeilen von  $A$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^n$ .

Für  $n = 1$

$$\begin{aligned} O(1) &= \{\pm 1\} & U(1) &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cong S^1 \\ SO(1) &= \{1\} & SU(1) &= \{1\} \end{aligned}$$

Für  $n = 2$ :  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{aligned} O(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \\ SO(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1 \end{aligned}$$

$$(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1, (-\bar{w}, \bar{z}) \perp (z, w)$$

$$U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\lambda \bar{w} \\ w & \lambda \bar{z} \end{pmatrix} \mid (z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1 \right\} \cong S^3 \times S^1$$

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \mid (z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} \cong S^3$$

$SO(3)$  eine explizite Beschreibung ist möglich (später)

**Proposition 6.** Sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle, \rangle$ , und sei  $F : V \rightarrow V$  ein unitärer Endomorphismus. Dann besitzt  $V$  eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von  $F$ .

**Beweis 7.** Durch Induktion nach  $\dim V$ .  $\dim V = 0, 1$  trivial.  $\dim V \geq 2$  Weil  $\mathbb{C}$  algebraisch abgeschlossen ist, gibt es einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Sei  $v \in V$  ein Eigenvektor, mit  $\|v\| = 1$ . Weil  $F$  unitär ist, haben wir  $F(v^\perp) = v^\perp$ . Wir haben  $\dim v^\perp = \dim V - 1$

$$\begin{aligned} w \in v^\perp \langle v, w \rangle &\implies \langle v, w \rangle = 0 \\ \lambda \langle v, F(w) \rangle &= \langle \lambda v, F(w) \rangle = \langle F(v), F(w) \rangle = 0 \\ &\implies F(v^\perp) \subset v^\perp \end{aligned}$$

Aus der Induktionsannahme folgt, dass  $\exists$  Orthonormalbasis von  $v^\perp$  von Eigenvektoren von  $F$ . Zusammen mit  $v \overset{V=\text{span}}{\rightsquigarrow} \bigoplus v^\perp$  Orthonormalbasis von  $V$

**Korollar 5.** Sei  $A \in U(n)$ . Dann  $\exists S \in U(n)$ ,  $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$  so dass

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

**Proposition 7.** Sei  $V$  ein endlich dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle, \rangle$ , und sei  $F : V \rightarrow V$  ein orthogonaler Endomorphismus. Dann besitzt  $V$  eine Orthonormalbasis  $(v_1^+, \dots, v_r^+, v_1^-, \dots, v_s^-, w_1, w'_1, \dots, w_t, w'_t)$

- $F(v_i^+) = v_i^+$
- $F(v_i^-) = -v_i^-$
- $F(w_i) = (\cos \theta_i)w_i + (\sin \theta_i)w'_i$
- $F(w'_i) = (-\sin \theta_i)w_i + (\cos \theta_i)w'_i$

mit  $\theta_i \in \mathbb{R}$ ,  $0 < |\theta| < \phi$ ,  $i = 1, \dots, t$

**Beweis 8.** *Durch Induktion nach  $\dim V$ :  $\dim V = 0, 1, 2$  trivial.  $\dim > 2$  (nächstes mal)*

$\dim_{\mathbb{R}} V$   $\langle \cdot, \cdot \rangle$  Skalarprodukt  
 Fazit 5.  $F : V \rightarrow V$  orthogonaler Endomorphismus  
 $\implies \exists$  orthogonale Basis +1 oder -1 Eigenvektoren

$$F(\alpha w_i + \beta w'_i) = (\alpha \cos \Theta_i - \beta \sin \Theta_i) w_i + (\alpha \sin \Theta_i + \beta \cos \Theta_i) w'_i, \quad \Theta_i \in \mathbb{R}$$

**Beweis 9.** *Fortsetzung Durch Induktion nach  $\dim V$ , Induktionsanfang:  $\dim V \leq 2$   $\dim V = 2$  bezüglich beliebiger Basis  $(w_1, w'_1)$ .*

$$V : \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

Matrix 1:  $w_1, w_2$  ist wie oben, Matrix 2: charakteristisches Polynom  $t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \rightarrow (+1\text{-Eigenvektor}, -1\text{-Eigenvektor})$

1. Fall:  $\exists$  reeller Eigenwert

$$\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| = 1 \quad v \in V \quad F(v) = \lambda v$$

wir zeigen, dass  $F(v^\perp) = v^\perp$  genau wie im Fall eines unitären Endomorphismus

$$\dim(v^\perp) = \dim V - 1 \xrightarrow{IA} v^\perp : \text{orthonormale Basis}$$

$$V = (v) \bigoplus v^\perp$$

2. Fall:  $\nexists$  reeller Eigenwert

$$\implies P_F(t) = \prod_{i=1}^{(\dim V)/2} Q_i(t)$$

$Q_i(t)$  irreduzibles quadratisches Polynom. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgt:

$$\implies \exists \overbrace{v}^{\neq 0} \in V, \text{ mit } Q_i(F)v = 0$$

Sei  $0 \neq v_0 \in V$  beliebigen Vektor  $P_F(F)v_0 = 0$

$$Q_1(F)Q_2(F) \cdots + \frac{\dim V}{2}(F)v_0 = 0$$

$$\implies \exists j : Q_j(F)Q_{j+1}(F) \cdots + \frac{\dim V}{2}(F)v_0 = 0$$

$$\text{aber } Q_{j+1}(F) \cdots Q_{\dim V/2}(F)v_0 \neq 0$$

$$\implies \text{wir nehmen } i := j \text{ und } v := Q_{j+1}(F) \cdots Q_{\frac{\dim V}{2}}(F)v_0.$$

Beh:  $U := \text{span}(v, F(v))$  ist ein  $F$ -invarianten Vektorraum.  $Q_i(F)v = 0$

$\implies \exists a, b \in \mathbb{R}$  mit  $F(F(v)) = av + bF(v)$ . Es folgt:  $U^\perp$  ist auch  $F$ -invariant.  $V = U \bigoplus U^\perp \xrightarrow{IA}$  Basen von  $U$  und von  $U^\perp$  wie oben. Die Vereinigung dieser Basen ist wie erwünscht.

**Korollar 6.** Sei  $A \in O(n)$ . Dann gibt es ein  $S \in O(n)$  und  $r, s, t \in \mathbb{N}$ ,  $\Theta_1, \dots, \Theta_t \in \mathbb{R}$  mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & & & & 0 \\ & -E_s & & & \\ & & D_{\Theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & D_{\Theta_t} \end{pmatrix}$$

wobei

$$D_\Theta := \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

**Beispiel 13.**

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \in U(n)$$

$$\begin{aligned} A(z_1, \dots, z_n) &= (z_2, \dots, z_n, z_1) \\ A(1, S, S^2, \dots, S^{n-1}) &= (S, S^2, \dots, S^{n-1}, 1) \\ S &:= e^{2\pi i/n} \quad S^n = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (1, S, S^2, \dots, S^{n-1})$  ist Eigenvektor zum Eigenwert  $S$ . Ähnlich: für  $0 \leq j \leq n-1$  haben wir  $(1, S^j, S^{2j}, \dots, S^{(n-1)j})$  ist Eigenvektor zum Eigenwert  $S^j$ .  $1, S, S^2, \dots, S^{n-1}$  sind paarweise verschieden  $\Rightarrow (1, S^j, S^{2j}, \dots, S^{(n-1)j})$  ist eine Basis von Eigenvektoren. Normalisierung:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{n}} (1, S^j, S^{2j}, \dots, S^{(n-1)j}) \right)_{j=0,1,\dots,n-1}$$

ist eine orthonormale Basis von Eigenvektoren

$(K = \mathbb{C})$  unitärer Endomorphismus von  $V$   
**Fazit 6.**  $(K = \mathbb{R})$  orthogonaler Endomorphismus von  $V$   
 $\Rightarrow V = \bigoplus_{\text{Eigenwerte } \lambda} \text{Eig}(F; \lambda)$  orthogonale direkte Summe

**Beispiel 14.**

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{4}{5} & \frac{36}{65} \\ \frac{4}{13} & -\frac{3}{5} & \frac{48}{65} \\ \frac{12}{13} & 0 & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \in O(3)$$

$\det A = 1$  2 komplex konjugierte + 1 reeller oder 3 reelle Eigenwerte  $\Rightarrow +1$  ist ein Eigenwert.  $\dots \rightsquigarrow$  Eigenvektor  $(6, 3, 4)$  zum Eigenwert 1.  $\rightarrow v$  mit  $\|v\| = 1$   
 $v = \frac{1}{\sqrt{61}}(6, 3, 4) \quad v^\perp = \text{span}((1, -2, 0), (2, 0, -3)) \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}}$

$$(1, -2, 0), \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, -3\right)$$

Normalisieren:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0), \sqrt{1/305}(8, 4, -15)$$

Und wir berechnen

$$S := \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{61}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{305}} \\ \frac{3}{\sqrt{61}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{305}} \\ \frac{4}{\sqrt{61}} & 0 & -\frac{15}{\sqrt{305}} \end{pmatrix}$$

bekommen wir

$$\underbrace{S^{-1}}_{=S^t} AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{57}{65} & \frac{4\sqrt{61}}{65} \\ 0 & -\frac{4\sqrt{61}}{65} & -\frac{57}{65} \end{pmatrix}$$

**1.8 Beschreibung von  $SO(3)$  und  $O(3)$** 

**Eigenschaften 7.** Sei  $A \in SO(3)$ . Dann: entweder es gibt 1 reelle und 2 komplex konjugierte Eigenwerte oder 3 reelle Eigenwerte.  $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$ . Eigenwerte  $+1(\times 3) \Leftrightarrow A = E_3$  oder  $-1(\times 2) / +1$ . Wenn  $\nrightarrow A = E^3$ , dann ist  $\dim \text{Eig}(A, 1) = 1$ .

$$A : \text{Eig}(A, 1)^\perp \rightarrow \text{Eig}(A, 1)^\perp$$

ist eine Drehung durch einen Winkel  $\Theta \in (0, 2\pi)$ . Bezüglich Basis  $(v_1, v_2, v_3)$ ,  $v_1 \in \text{Eig}(A, 1)$ ,  $\|v_1\| = 1$  sieht  $A$  aus wie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & -\sin \Theta \\ 0 & \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$$

*Eigenschaften 8.* Sei  $A \in O(3)$  Falls  $\det A = 1$ , haben wir  $A \in SO(3)$

Falls  $\det A = -1$ , haben wir  $-A \in SO(3)$

Dann bekommen wir die folgende Beschreibung von  $A \in O(3)$  mit  $\det A = -1$ :

- $A = -E_3$
- oder  $\dim \text{Eig}(A, -1) = 1$   
 $v_1 \in \text{Eig}(A, -1)$ ,  $\|v_1\| = 1$   
 $A : \text{Eig}(A, -1)^\perp \rightarrow \text{Eig}(A, -1)^\perp$  ist eine Drehung um den Winkel  $\Theta - \pi \in (-\pi, \pi)$  (Spiegelung oder Spiegelung mit Drehung)

## 1.9 Selbstadjungierte Endomorphismen

$V, \langle, \rangle$ ,  $K$ -Vektorraum mit Skalarprodukt. ( $K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ). Ist  $F : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus, so heisst  $F^* : V \rightarrow V$  adjugierter Endomorphismus falls

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F^*(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$$

**Definition 22.**  $F : V \rightarrow V$  ist adjugiert falls

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$$

*Eigenschaften 9.* Falls  $V = \mathbb{R}^n$  mit Standardskalarprodukt, so zu  $F$  ist eine assoziierte Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ , dann ist  $A^t$  zu  $F^*$  assoziiert. Falls  $V = \mathbb{C}^n$ , dann ist

$$\begin{aligned} F &\leftrightarrow A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \\ F^* &\leftrightarrow \bar{A}^t \in M(n \times n, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

**Beweis 10.**

$$\langle Av, w \rangle = (Av)^t \bar{w} = v^t A^t \bar{w} = v^t \bar{A}^t w = \langle v, \bar{A}^t w \rangle$$

*Bemerkung 19.*  $F^*$  ist eindeutig falls für  $\tilde{F}^*$  gilt

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, \tilde{F}^*(w) \rangle$$

dann ist

$$0 = \langle v, \tilde{F}^*(w) - F^*(w) \rangle$$

$\implies$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \tilde{F}^*(w) - F^*(w), \tilde{F}^*(w) - F^*(w) \rangle \\ &= \|\tilde{F}^*(w) - F^*(w)\|^2 \\ &\implies \tilde{F}^*(w) = F^*(w) \end{aligned}$$

*Fazit 7.* Im Fall  $V = \mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  mit Standardskalarprodukt ist ein selbstadjungierter Endomorphismus durch eine symmetrische bzw. hermitesche Matrix gegeben.

**Lemma 1.** Jeder Eigenwert eines selbstadjungierten Endomorphismus ist reell.

**Beweis 11.** Ist  $F(v) = \lambda v$  mit  $v \neq 0$ , so gilt

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle F(v), v \rangle = \langle v, F(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \implies \lambda = \bar{\lambda}$$

**Bemerkung 20.** Prä-Hilbertraum bezeichnet einen  $K$ -Vektorraum ( $K=\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) mit Skalarprodukt. Euklidische bzw. unitäre Vektorräume sind endlichdimensional,

**Proposition 8.** Sei  $V$  ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und  $F : V \rightarrow V$  ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine orthonormale Basis von Eigenvektoren.

**Beweis 12.** Falls  $V$  ein unitärer Vektorraum ist: durch Induktion nach  $\dim V$ ,  $\exists$  Eigenwert  $\lambda$ , Eigenvektor  $v$ , oBdA haben wir  $\|v\| = 1$ . Wir behaupten:

$$F(v^\perp) \in v^\perp$$

$$\langle v, w \rangle = 0 \implies \langle v, F(w) \rangle = \langle F(v), w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = 0$$

IA  $\implies \exists$  orthonormale Basis von  $v^\perp$ . Dies, zusammen mit  $v$ , gibt eine Basis von  $V$ . Fall eines euklidischen Vektorraums: Das gleiche Argumente ist gültig, sobald wir wissen, dass  $F$  einen Eigenwert besitzt. Man wählt eine Basis von  $V$ , so:

$$F \leftrightarrow A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \quad [n = \dim V]$$

mit  $A = A^t$ . Wir betrachten  $A$  als komplexe Matrix, so dass

$$A = \bar{A} \implies \bar{A}^t = A^t = A \implies A \text{ ist hermetisch}$$

Sei  $\lambda$  ein (komplexer) Eigenwert von  $A$ . Weil  $A$  hermetisch ist, haben wir  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wir haben

$$\det(A - \lambda E_n) = 0$$

Dann:

$$\det(F - \lambda \text{id}_V) = 0$$

also  $\lambda$  ist Eigenwert von  $F$ .

**Korollar 7.** Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch. Dann  $\exists S \in O(n)$  mit

$$S^t A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  hermetisch. Dann  $\exists S \in U(n)$  mit

$$\bar{S}^t A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

**Korollar 8.** Sei  $F : V \rightarrow V$  wie in der Proposition oben. Dann ist  $V$  die orthogonale direkte Summe von diesen Eigenräumen:

$$V = \bigoplus_{\text{Eigenwerte } \lambda} \text{Eig}(F; \lambda)$$

**Fazit 8.**  $\rightsquigarrow$  Praktisches Verfahren:  $A$  symmetrisch bzw. hermetische Matrix

$\hookrightarrow$  berechnen  $\text{Eig}(A; \lambda)$

$\hookrightarrow$  wählen von jedem eine orthonormale Basis

**Beispiel 15.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3+3i \\ 3 & 5 & -3-3i \\ 3-3i & -3+3i & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(tE_3 - A) = (t-5)^2(t-2) + \dots = t^3 - 12t^2 + 256 = (t+4)(t-8)^2$$

$$\text{Eig}(A; -4) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3+3i \\ 3 & 9 & -3-3i \\ 3-3i & -3+3i & 6 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1+i \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Eig}(A; 8) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3+3i \\ 3 & -3 & -3+3i \\ 3-3i & -3+3i & -6 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix} \right\} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$



bzw.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

Wir bekommen:

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 0 & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$$

dann:

$$\bar{S}^t A S = \text{diag}(-4, 8, 8)$$

*Bemerkung 21.* Das Resultat von der Proposition oben im Fall eines euklidischen Vektorraums ist klar, auch aus geometrischem Grund.

symm. Matrizen  $\setminus \mathbb{R} \rightsquigarrow$  quadratische Formen

(Prop aktuelle-7)  $S^t A S$  aus der Transformationsformel.

... und man kann auch einen alternativen Beweis in diesem Fall geben.

$$A \in M(n \times n, \mathbb{R}), A^t = A \rightsquigarrow q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, q(v) := v^t A v$$

(Faktum aus der Analysis)

$$\exists x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1 \text{ mit } q(x) \geq q(x') \quad \forall x' \in \mathbb{R}^n, \|x'\| = 1$$

Dann für  $v \in \mathbb{R}^n, v \perp x$  haben wir  $Av \perp x$ . In der Tat haben wir

$$(Av - q(x)v) \perp x \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

denn

$$\langle Av - q(x)v, v \rangle + 2\lambda \langle Av - q(x)v, x \rangle = (v + \lambda x)^t (A - q(x)E_n)(v + \lambda x) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(Details im Buch, 5.6.4)

*Bemerkung 22.*  $F$  selbstadjugiert,  $\dim V < \infty \implies \exists$  orthonormale Basis von Eigenvektoren  $\implies$

$$V = \bigoplus_{\lambda} \text{Eig}(F; \lambda)$$

orthogonale direkte Summe  $\rightsquigarrow$  orthogonale Projektion

$$P_{\lambda} V \rightarrow \text{Eig}(F, \lambda)$$

Dann können wir schreiben

$$F = \sum_{\text{Eigenwerte } \lambda} \lambda P_{\lambda}$$

$$= \{\text{Eigenwerte von } F\} = \text{"Spektrum"}$$

Geschrieben mit Matrizen:

$$A \in (n \times n, \mathbb{R}) \text{ symmetrisch} \implies \exists S \in O(n)$$

so dass  $S^{-1} A S$  eine Diagonalmatrix ist.

Interpretation: der zu  $A$  assoziierte Endomorphismus ist Diagonalisierbar.

$S^t A S$  ist eine Diagonalmatrix

Interpretation:  $A \leftrightarrow s: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Bilinearform.

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leftrightarrow (x, y) \mapsto x^t \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) y$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i$$

**Fragen**

- Zu einer symmetrischen Bilinearform gibt es eine bestimmte Normalform?
- Wie kann man das praktisch berechnen?

**Proposition 9.** *Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen* Sei  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch und  $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die entsprechende symmetrische Bilinearform. Dann:

1. Ist  $B = (w_1, \dots, w_n)$  eine orthonormale Basis von Eigenvektoren von  $A$ , so ist  $M_B(s) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte von  $A$  sind.
2. Es gibt eine Basis  $B'$  mit

$$M_{B'}(s) = \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Blockdiagonalmatrix, wobei

$$\begin{aligned} k &= \#\{i | \lambda_i > 0\} \\ l &= \#\{i | \lambda_i < 0\} \end{aligned}$$

**Beweis 13.** 1.  $\Leftrightarrow \exists S \in O(n)$  mit  $S^t A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$2. \Leftrightarrow \exists T \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ mit } T^t A T = \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

oder wir

$$\begin{aligned} \lambda_1, \dots, \lambda_k &> 0 \\ \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+l} &< 0 \\ \lambda_{k+l+1} &= \dots = \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

Wir nehmen  $B' = (w'_1, \dots, w'_n)$  mit

$$w'_i = \begin{cases} \frac{w_i}{\sqrt{|\lambda_i|}} & i \leq k+l \\ w_i & i > k+l \end{cases}$$

$$(w'_i)^t A w'_i = \frac{1}{|\lambda_i|} w_i^t A w_i = \frac{1}{|\lambda_i|} \lambda_i \text{ für } i \leq k+l$$

*Bemerkung 23.*

$$T^t A T = \underbrace{\begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Sylvester-Form}}$$

... Erklärung zum Namen "Hauptachsentransformation" ...

**Korollar 9.** Sei  $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform mit entsprechender Matrix  $A$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1.  $s$  ist positiv definit
2. Alle Eigenwerte von  $A$  sind positiv
3. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms haben alternierende Vorzeichen

Vorzeichenregel von Descartes

**Beispiel 16.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(tE_3 - A) = t^3 - ut^2 + 15t \underbrace{+ 3}$$

$$P_A(-1) = -21 \quad P_A(0) = 3 \implies \exists \lambda : -1 < \lambda < 0$$

**Beweis 14.**  $s$  ist äquivalent zu

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda x_i y_i$$

$$\implies s \text{ positiv definit} \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall i$$

**Bemerkung 24.** Weitere Begriffe  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrische Bilinearform

positiv definit	positiv semidefinit
negativ definit	negativ semidefinit
indefinit:	$\exists x \in V : s(x, x) > 0$ und $y \in V : s(y, y) < 0$

Tabelle 1: Weitere Begriffe

**Bemerkung 25.** Ausartungsraum Ausartungsraum von einer Bilinearform  $s : V \times V \rightarrow K$  auf einem Vektorraum über einem beliebigen Körper  $K$  ist:

$$U := \{v \in V \mid s(v, w) = 0 \quad \forall w \in V\}$$

und ist ein Untervektorraum. Falls  $s$  symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist, bekommen wir eine induzierte Bilinearform  $\bar{s} : V/U \times V/U \rightarrow K$ , gegeben durch

$$v + U, w + U \mapsto s(v, w)$$

und  $\bar{s}$  ist nicht ausgeartet.

$$\begin{aligned} v' &= v + u, \quad u \in U \\ w' &= w + \tilde{u}, \quad \tilde{u} \in U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(v', w') &= s(v, w) + s(u, w) + s(v, \tilde{u}) + s(u, \tilde{u}) = \\ &= s(v, w) + \underbrace{s(u, w)}_{=0} \pm \underbrace{s(\tilde{u}, v)}_{=0} + \underbrace{s(u, \tilde{u})}_{=0} \end{aligned}$$

$$s(v, w) = 0 \implies v \in U \implies v + U$$

ist Nullvektor von  $V/U$

**Korollar 10.** Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  und  $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform. dann gibt es eine orthogonale Zerlegung

$$\mathbb{R}^n = W_+ \oplus W_i \oplus W_0$$

mit

$$s|_{W_+} > 0, \quad s|_{W_-} < 0$$

und  $W_0 =$  Ausartungsraum von  $s$

**Proposition 10.** *Trägheitsgesetz/Signatur von Sylvester* Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform. Sei

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$$

eine Zerlegung als orthogonale direkte Summe, mit  $s|_{V_+} > 0$ ,  $s|_{V_-} < 0$  und  $V_0 = \text{Ausartungsraum von } s$ . Dann sind

$$r_+ := \dim(V_+), \quad r_- = \dim(V_-) \quad \text{und} \quad r_0 := \dim(V_0)$$

Invarianten von  $s$ , charakterisiert durch

$$r_+ = \max \{ \dim W \mid W \subset V \text{ Untervektorraum, } s|_W > 0 \}$$

$$r_- = \max \{ \dim W \mid W \subset V \text{ Untervektorraum, } s|_W < 0 \}$$

Die Invarianten  $(r_+, r_-, r_0)$  heisst Trägheitsindex oder Signatur von  $s$

*Bemerkung 26.* Ist  $A$  eine  $n \times n$  symmetrische reelle Matrix, heisst Signatur die Signatur von der zu  $A$  entsprechender Bilinearform.

*Bemerkung 27.* Auch  $r_+ - r_-$  heisst Signatur.

Dimension	$\dim V = r_+ + r_- + r_0$	
Rang	$r_+ + r_-$	$\leftrightarrow (r_+, r_-, r_0)$
Signatur in diesen Sinn	$r_+ - r_-$	

**Beweis 15.** *Reduktionsschritt:* Es genügt, das Resultat zu beweisen, im Fall dass  $s$  nicht ausgeartet ist.

$$V \rightarrow \bar{V} = V/V_0$$

$$V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$$

$$\bar{V} = \bar{V}_+ \oplus \bar{V}_-$$

wobei  $\bar{V}_\pm = \text{Bild von } V_\pm$ . Bew.  $\bar{V} = \bar{V}_+ + \bar{V}_-$  direkte Summe

$$\Leftrightarrow \bar{V}_+ \cap \bar{V}_- = 0$$

$$\bar{v} \leftrightarrow v \in V_+ \oplus V_0$$

und

$$v \in V_- \oplus V_0$$

$\Leftrightarrow v \in V_0$  Behauptung:  $\bar{s}$  induzierte Bilinearform auf  $\bar{V}$

$$\max \{ \dim W \mid s|_W > 0 \} = \max \{ \dim U \mid U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U > 0 \}$$

und

$$\max \{ \dim W \mid s|_W < 0 \} = \max \{ \dim U \mid U \subset \bar{V}, \bar{s}|_U < 0 \}$$

Ist  $W \subset V$ ,  $s|_W > 0$ , und  $\bar{W} := \text{Bild von } W$ , so haben wir

$$\dim \bar{W} = \dim W$$

und

$$\bar{s}|_{\bar{W}} > 0$$

*Dimensionsformel:*

$$\dim \bar{W} = \dim W - \underbrace{\dim(W \cap V_0)}_{=0} = \dim W$$

und

$$\bar{s}(\bar{v}, \bar{v}) = s(v, v)$$

wobei  $v \in W \mapsto v \in \bar{W}$  Umgekehrt ist

$$U \subset \bar{V}, \quad \bar{s}|_U > 0, \quad \dim U = d$$

wählen Basis  $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_d)$  von  $\bar{U}$ , mit  $v_i \mapsto \bar{v}_i \forall i$  dann haben wir  $W := \text{span}(v_1, \dots, v_d)$  hat die Eigenschaft

$$\dim W = d \quad s|_W > 0, \quad \text{Im}(W) = U$$

*Beweis im Fall  $s$  nicht ausgeartet:*

*Behauptung: Ist*

$$W_+ \subset V, s|_{W_+} > 0, \quad W_- \subset V, s|_{W_-} < 0$$

*so haben wir*

$$W_+ \cap W_- = 0$$

*Es folgt:*

$$\dim W_- + \dim W_+ \leq \dim V$$

*mit Gleichheit  $\Leftrightarrow V = W_+ \oplus W_-$*

*Deshalb*

$$r_+ + r_- \leq \dim V$$

*Und wir haben = aus dem Korollar*

*(alternativer Beweis ohne Quotientenvektorräume siehe Buch)*

*Bemerkung 28. Praktische Fragen:*

- Wie berechnet man die Signatur einer symmetrischen Bilinearform?
- Wie findet man eine Basis, so dass die darstellende Matrix in Sylvesterform ist?

In Matrixen:  $A \in (n \times n, \mathbb{R})$  symm.

- Signatur?
- Finden  $T \in GL_n(\mathbb{R})$  mit  $T^t A T$  in Sylvesterform

Antwort:

Aus der Hauptachsentransformation:

$$\exists S \in O(n), \quad S^t A S = S^{-1} A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$\Rightarrow$  Signatur

$$r_+ = \# \{i | \lambda_i > 0\}$$

$$r_- = \# \{i | \lambda_i < 0\}$$

$$r_0 = \dim \text{Ker}(A)$$

$$S \xrightarrow{\text{Normieren der Spaltenvektoren}} S'$$

mit  $S'^t A S'$  in Sylvesterform.

Alternatives, oft leichteres Verfahren:

- $\text{Ker}(A) = \text{Ausartungsraum}$  berechnen
- Vektoren wählen, wobei  $q(v) = s(v, v)$  verschieden von Null ist.  $\rightsquigarrow q(v) \in \{\pm 1\} \rightsquigarrow v^\perp$

**Beispiel 17.** Sylvesterform

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = t^3 - 8t^2 + 3t = t(t - (4 + \sqrt{13}))(t - (4 - \sqrt{13}))$$

Signaturen  $(2, 0, 1)$  Mit Halbachsentransformation

$$\begin{array}{lll} \text{Eigenwert } 0 & \rightsquigarrow & \text{Eigenvektor } (1, -1, 1) \\ \text{Eigenwert } 4 + \sqrt{13} & \rightsquigarrow & \text{Eigenvektor } (1, 4 - \sqrt{13}, -3 + \sqrt{13}) \\ \text{Eigenwert } 4 - \sqrt{13} & \rightsquigarrow & \text{Eigenvektor } (1, 4 + \sqrt{13}, -3 - \sqrt{13}) \end{array}$$

Normieren...

$S'$  ausrechnen... (ne danke)

haben wir

$$S'^t = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 18.** Alternativ

$$e_2 : q(e_2) = e_2^t A e_2 = 1$$

$$e_2^\perp = \{(x, y, z) | 2x + y + z = 0\}$$

$$(-1, 2, 0) A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Ker}(A) = \text{span} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } T \text{ haben wir } T^t A T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

## 2 Klassifikation von Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n \leftrightarrow$ Signatur

Seien euklidische  $(V, \langle, \rangle)$  und symmetrische Bilinearform  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , so können wir die Bilinearform durch die Hauptachsentransformation verstehen. Seien ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  und die symmetrische Bilinearform  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist  $s$  durch die Signatur  $(r_+, r_-, r_0)$  klassifiziert.

*Eigenschaften 10.*  $\dim V = 2$

$$\begin{array}{ll} \text{Signatur } (2, 0, 0) & q(v) := s(v, v) \text{ Quadratische Schale (positiv)} \\ (0, 2, 0) & \text{Quadratische Schale (negativ)} \\ (1, 1, 0) & \text{Sattelpunkt} \\ (0, 2, 0) & \text{Quadratisches halbes Rohr (positiv)} \\ (1, 0, 1) & \text{Quadratisches halbes Rohr (negativ)} \end{array}$$

*Eigenschaften 11.*  $\dim V = 3 \{q(v) = 1\}$

$$\begin{array}{ll} (3, 0, 0) & \text{Sphäre} \\ (2, 1, 0) & \text{einschaliges Hyperboloid} \\ (1, 2, 0) & \text{zweischaliges Hyperboloid} \\ (0, 3, 0) & \emptyset \end{array} \quad + \text{ F\"alle } s \text{ entartet}$$

Der Fall von Bilinearformen über Vektorräumen über  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K}$  beliebiger Körper.

**Proposition 11.** *Orthogonalisierungssatz* Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper mit  $\text{char}(K) \neq 2$ . Sei  $s$  eine symmetrische Bilinearform über  $V$ . Dann gibt es eine Basis  $B$  von  $V$ , so dass die  $M_B(s)$  eine Diagonalmatrix ist.

**Beweis 16.** Reduktionsschritt zum Fall  $s$  nicht ausgeartet. Sei  $U =$  Ausartungsraum.  $\bar{V} := V/U$  und  $\bar{s} :=$  induzierte Bilinearform. Wählen wir ein Komplement  $W \subset V$  zu  $U$ , so haben wir

$$\begin{aligned} V &= U \oplus W \\ W &\xrightarrow{\text{Isomorphismus}} \bar{V} \\ s|_W &\text{ nicht ausgeartet} \end{aligned}$$

Wir können deshalb behaupten, dass  $s$  nicht ausgeartet ist. Dann beweisen wir dies Aussage durch Induktion nach  $\dim V$ .  $\dim V \leq 1$  trivial. Induktionsschritt:

$$s \text{ nicht ausgeartet} \xrightarrow{\dim(\mathbb{K}) \neq 2} \exists v \in V : s(v, v) \neq 0$$

Sei  $V' := V^\perp$ . Wir haben  $\dim V' = \dim V - 1$ , weil  $s$  nicht ausgeartet ist.

$IA \rightsquigarrow$  Basis  $B'$  von  $V'$  mit  $\underbrace{M_B(s|_{V'})}_{\text{auch nicht ausgeartet}}$  diagonal. Dann:

$$B \& v \rightsquigarrow B \text{ mit } M_B(s) \text{ eine Diagonalmatrix}$$

**Korollar 11.** Ist  $\text{char } K \neq 2$ , so gibt es zu einer symmetrischen Matrix  $A \in (n \times n, \mathbb{K})$  ein  $S \in GL_n(\mathbb{K})$  so dass  $S^t A S$  eine Diagonalmatrix ist.

**Beispiel 19.**  $\mathbb{K}$  beliebig,  $\text{char } (\mathbb{K}) \neq 2$   $V = K^2$

$$s(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s(v_1, v_1) = 2$$

$$v_1^\perp = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$s(v_2, v_2) = -2$$

$$B := (v_1, v_2)$$

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$S \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  Standardbasis. Mit  $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  haben wir

$$S^t A S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**Bemerkung 29.** offen bleibt die Frage: Sind symmetrische Bilinearformen  $s$  und  $s'$  auf  $V$  gegeben ( $\dim_{\mathbb{K}} < \infty$ ), können wir entscheiden ob  $s$  und  $s'$  äquivalent sind?

Oder, in Matrizen: Sind symmetrische  $A, A' \in (n \times n, \mathbb{K})$  gegeben, können wir entscheiden, ob es ein  $S \in GL_N(\mathbb{K})$  gibt, so dass  $S^t A S = A'$ ?

Die Antwort hängt von  $\mathbb{K}$  ab.

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  durch die Signatur
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  durch die Rang
- andere  $\mathbb{K}$ ?

Im Allgemeinen:

- Rang
- Reduktion zum Fall einer nichtausgearteten Form

Wir behaupten:  $s$  ist nicht ausgeartet  $\Leftrightarrow$  eine darstellende Matrix  $A$  ist invertierbar.

$$\det(A) \in \mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$$

ist eine Invariante von  $s$ , wegen der Transformationsform.

$$T \in GL_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow T^t A T$$

ist eine andere darstellende Matrix. Und

$$\det(T^t A T) = \det(T^t) \det(A) \det(T) = (\det T)^2 \det(A)$$

**Definition 23.** Diskriminante Sei  $s : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  eine symmetrische Bilinearform (mit  $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ ). Die Diskriminante von  $s$  ist 0 falls  $s$  ausgeartet ist, sonst ist die Klasse von  $\det(A)$  in  $\mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$ , wobei  $A$  eine darstellende Matrix von  $s$  ist. Die Diskriminante ist eine Invariante von  $s$

- Rang
- Diskriminante

*Bemerkung 30.* Noch offen: sind  $s, s'$  nicht ausgeartet, mit derselben Diskriminante, zu entscheiden, ob  $s$  und  $s'$  äquivalent sind.

**Beispiel 20.**  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ , z.B.  $V = \mathbb{Q}^2$ ,  $s$  Standardskalarprodukt  $s(x, y) = x_1, x_1 + x_2 y_2$  und  $s'$  symmetrische Bilinearform mit  $\text{disc}(s) = -1$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Basiswechsel}} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

mit  $aa' = b^2, b \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow a = \frac{b^2}{a'} = a' \left( \frac{b}{a'} \right)^2$$

$a = 2$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a = 3$

$$s' \leftrightarrow q'(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2$$

Beh:

$$q'(x) \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{Q}^2$$

Konsequenz:  $s'$  ist nicht äquivalent zu  $s$ . Ist  $3x_1^2 + 3x_2^2 = 1$  so schreiben wir  $x_1 = \frac{r_1}{s_1}, x_2 = \frac{r_2}{s_2}, r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Q}, s_1, s_2 \neq 0$

$$3r_1^2 s_2^2 + 3r_2^2 s_1^2 = s_1^2 s_2^2$$

$$\text{oder } 3r^2 + 3s^2 = t^2 \text{ wobei } r = r_1 s_2, s = r_2 s_1, \overbrace{t}^{\neq 0} = s_1 s_2 \quad (1)$$

$$3^{\text{ungerade}}(3k_1 + 1) + 3^{\text{ungerade}}(3k_2 + 1) \\ \Rightarrow \text{Widerspruch zu (1)}$$