Lineare Algebra I - Vorlesungs-Script

Prof. Andrew Kresh

Inhaltsverzeichnis

1 Bilinearformen

Das kanonische Skalarprodukt (oder: Standardskalarprodukt) von $\mathbb{R}^n$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} <,>: \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n && \to \mathbb{R} \\ (x,y) && \mapsto <x,y> \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben durch

$$<x,y> := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

falls $x = (x_1, \cdots, x_n)$ und $y = (y_1, \cdots, y_n)$ sind.

Definition 1 (Konvention)**.** eine $1x1$ Matrix wird mit Eintrag indentifiziert

$$(x) \in M(1 \times 1, K) \leftrightarrow x \in K$$

Dann können wir schreiben:

$$<x,y> = (x^t)(y)$$

$$x = \left(x_1, \vdots, x_n \right), y = \left(y_1, \vdots, \right)$$

$$(x_1, \cdots, x_n) \left(y_1, \vdots, y_n \right) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)$$

Bemerkung 1 ($<,>$ ist bilinear).

$$\begin{aligned} <x+x', y> &= <x,y> + <x',y> \\ <\lambda x, y> &= \lambda <x,y> \\ <x, y+y'> &= <x,y> + <x,y'> \\ <x, \lambda y> &= \lambda <x,y> \end{aligned}$$

symmetrisch:

$$<x,y> = <y,x>$$

positiv defininit:

$$\begin{aligned} <x,x> \geq && 0 \\ <x,x> = && \Longleftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\text{für} \forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

Bemerkung 2 (Hintergrund: euklidische Geometrie).

$$\|x\| = \quad = \sqrt{<x,x>} = \quad = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Bemerkung 3 (Eigenschaften von $\|.\|$).

$$\begin{aligned} \|x\| \geq 0, \text{mit } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Dann definieren wir den Abstand von $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$d(x,y) \in \mathbb{R}$$

$$d(x,y) := \|y - x\|$$

Bemerkung 4. Eigenschaften

$$\begin{aligned} d(x,y) \geq 0, \text{mit} d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(y,x) = d(x,y) \\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

$$\text{für} x, y, z \in \mathbb{R}^n$$

Wir sind motiviert, Struktiren zu definieren, basierend auf diesen Eigenschaften, so z.B.

- Bilineare Formen (symetrisch, positiv definit)
- Norme
- Metriken

Proof. $\|.\|$ und d: die Dreiecksungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = & \quad =< x+y, x+y > \\ = & \quad = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y > \leq (?) \, (\|x\| + \|y\|)^2 \\ & \quad \Leftrightarrow < x, y > \leq \|x\| \, \|y\| \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$< x, y >^2 \leq < x, x >< y, y >$$

mit Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

$$\Leftrightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} --- & x & --- \\ --- & y & --- \end{pmatrix} \in M(2 \times n, \mathbb{R})$$

A hat Rang ≤ 1 ∎

Proof.

$$\begin{aligned} A \cdot A^t = & \quad = \begin{pmatrix} < x, x > & < x, y > \\ < x, y > & < y, y > \end{pmatrix} \in M(2 \times 2), \mathbb{R} \\ \det(A \cdot A^t) = & \quad =< x, x >< y, y > - < x, y >^2 \end{aligned}$$

Es gibt eine Gleichung von Determinanten:

$$\begin{aligned} & A, B \in M(k \times n, K) \\ \det(A \cdot B^t) = & \sum_{1 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k \leq n} \det(A^{s_1, \cdots, s_k}) \det(B^{s_1, \cdots, s_k}) \\ \text{wobei } A^{s_1, \cdots, s_k} & := (a_i, s_j)_{1 \leq i,j \leq k}, B^{s_1, \cdots, s_k} = (b_i, s_j)_{1 \leq i,j \leq k} \end{aligned}$$

Beweis-Skizze: Reduktion zum Fall, dass die Zeilen von A und B Standardbasiselemente sind; direkte Berechnung in diesem Fall.
Es folgt:

$$\det(A \cdot A^t) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \det(A^{i,j})^2 \geq 0$$

und ist $= 0 \Leftrightarrow$ alle 2×2 Minoren von A sind $0 \Leftrightarrow rang(A) \leq 1$ ∎

Korollar 1. *Wir können definieren*

$$\angle(x, y) := \cos^{-1} \underbrace{\frac{< x, y}{\|x\| \, \|y\|}}_{\in [-1,1] \in \mathbb{R}} \in [0, \pi] \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} & \textit{für} \\ 0 \neq & \ x \in \mathbb{R}^n \\ 0 \neq & \ y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Korollar 2. *x, y Vektoren, θ Winkel zwischen den beiden*

$$< x, y >= \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2\right)$$

und deshalb:

$$\cos\theta = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2}{2\,\|x\|\,\|y\|}$$

$\Longrightarrow$ *Winkel eines Dreiecks ist nur von den Seitenlängen abhängig.*

Beispiel 1.

$$\angle(x, y) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow < x, y >= 0$$

$$\underbrace{\{y \mid < x, y >= 0\} = 0}_{\text{Untervektorraum}} \cup \{0 \neq y \in \mathbb{R}^n \mid \angle(x, y) = \frac{\pi}{2}\}$$

Man nennt x und y <u>senkrecht</u> falls $< x, y >= 0$

Fazit 1.

$$\begin{aligned} < .,. > \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n & \qquad \text{bilinear form} \\ \|.\| \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} & \qquad \text{Norm} \\ d(.,.) \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{>0} & \qquad \text{Metrik} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{< x, x >} \\ d(x,y) &= \|y - x\| \\ < x, y > &= \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2}{2} \end{aligned}$$

1.1 Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to & \qquad \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto & \qquad x \times y \end{aligned}$$

für $y = (y_1, y_2, y_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ ist

$$x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

oder:

$$x \times y = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

wobei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis ist. Es ist deshalb klar, dass

$$0 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = < x, x \times y >$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = < y, x \times y >$$

$x \times y$ liegt auf der Gerade von Vektoren senkrecht zu x und y. weiter:

$$\det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = < x \times y, x \times y >$$

$$\begin{aligned} &= \|x \times y\|^2 = (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 - < x, y >^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 \left(1 - \frac{< x, y >^2}{\|x\|^2 \|y\|^2}\right) \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 (1 - \cos^2 \angle(x,y) = \|x\|^2 \|y\|^2 \sin^2 \angle(x,y) \end{aligned}$$

Fazit 2. Wenn das Ergebnis $= 0$, folgt daraus, dass x und y linear abhängig sind. Falls x und y linear unabhängig sind, dann folgt dass $(x \times y, x, y)$ zu derselben Orientierungsklasse gehört wie (e_1, e_2, e_3). Insgesamt bedeutet dies, dass $x \times y$ folgende Eigenschaften hat:

- ist senkrecht zu x und y
- ist $0 \Leftrightarrow x$ und y sind linear abhängig
- hat Länge $\|x\| \|y\| \sin \angle(x,y)$
- und hat die Richtung, die mit x und y die gleiche Orientierungsklassse wie die Standardbasis hat.

1.2 Skalarprodukt über $\mathbb{C}^n$

Sei $z = (z_1, \cdots, z_n)$ und $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$

Bemerkung 5. Der Ausdruck macht Sinn.

$$< z, w > := z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n$$
$$< z, z > := z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

Dann kann die Länge nicht mehr interpretiert werden, z.B. für $z = (1, i, 0, \cdots, 0)$ haben wir $< z, z >= 1^2 + i^2 = 0$. Isotropische Untervektorräume von $\mathbb{C}^n$ werden nicht in in diesem Kurs behandelt. ($V \subset \mathbb{C}^n$ s.d. $< v, w >= 0\ \forall v, w \in V$). Für die Physik, die Geometrie usw. ist eine Interpretation in Zusammenhang mit Länge wichtig, deshalb brauchen wir eine neue Definition.

Definition 2 (Das kanonische Skalarprodukt)**.** von $\mathbb{C}^n$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} < ., . >_c : \mathbb{C}^n\mathbb{C}^n &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z_1 \bar{w_1} + \cdots + z_n \bar{w_n} \end{aligned}$$

Eigenschaften 1 (von $< ., >_c$).

$$\begin{aligned} < z + z', w > = &\quad < z, w >_c + < z', w >_c \\ < \lambda z, w >_c = &\quad \lambda < z, w >_c \\ < z, w + w' >_c = &\quad < z, w >_c + < z, w' >_c \\ < z, \lambda w >_c = &\quad \bar{\lambda} < z, w >_c \end{aligned}$$

für $z, z', w, w' \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$< ., . >_c$ ist sesquilinear

$$\begin{aligned} < w, z >_c = &\quad \overline{< z, w >_c} \text{hermitisch} \\ < z, z >_c \in &\quad \mathbb{R}_{\geq 0} \text{positiv definit} \\ < z, z >= 0 \Leftrightarrow &\quad z = 0 \end{aligned}$$

Fazit 3. $< ., . >_c$ ist sesquilinear, hermitisch und positiv definit.

Proof. Bei Bedarf sonstwo nachschauen (Zu viele Zeichen und zu wenig Sinn). Es läuft auf eine Sammlung von Quadraten heraus. □

Definition 3 (Norm von $\mathbb{C}^n$)**.**

$$\|z\| = \sqrt{< z, z >_c}$$

Bemerkung 6. Sei $w = (x_1' + xy_1', \cdots, x_n' + iy_n')$. Dann:

$$\begin{aligned} < z, w >_c = (x_1 + iy_1)(x_1' - iy_1') + \cdots + (x_n + iy_n)(x_n' - iy_n') \\ = (x_1 x_1' + y_1 y_1' + \cdots + x_n x_n' + y_n y_n') + i(x_1' y_1 - x_1 y_1' + \cdots + x_n' x_y - x_n y_n') \end{aligned}$$

Auf diese Weise ist $< ., . >_c$ eine Erweiterung von reellen Skalarprodukt.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2n} \to &\quad \mathbb{C}^n \mathbb{R}\text{-linear} \\ e_1 \mapsto &\quad (1, 0, \cdots, 0) \\ e_2 \mapsto &\quad (i, 0, \cdots, 0 \\ \cdots & \\ e_{2n} \mapsto &\quad (0, \cdots, 0, i) \end{aligned}$$

$$< ., . >_c = \big(< ., . > \text{von} \mathbb{R}^{2n}\big) + i(\text{neues})$$

Re $< ., . >_c = < ., . >$ von $\mathbb{R}^{2n}$ unter diesem Isomorpismus.

Sei $\omega :=$ Im $< ., . >$:

$$\begin{aligned} \omega : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\to \mathbb{R} \\ \text{oder} \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to &\quad \mathbb{R} \end{aligned}$$

Eigenschaften 2 (von ω (Imaginärteil des kanonischen Skalarproduktes)). **bilinear**

schiefsymmetrisch $\omega(w, z) = -\omega(z, w)$

$\omega(z, z) = 0\ \forall z \in \mathbb{C}^n$ (oder $\mathbb{R}^{2n}$)

1.3 Bilinearform

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

Definition 4 (Bilinearform)**.** Eine bilineare Form auf V ist eine Abbildung

$$s : V \times V \to K$$

so dass:

$$\begin{aligned} s(v + v', w) = &\quad s(v, w) + s(v', w) \\ s(\lambda v, w) = &\quad \lambda s(v, w) \\ s(v, w + w') = &\quad s(v, w) + s(v, w') \\ s(v, \lambda w) = &\quad \lambda s(v, w) \end{aligned}$$

$\forall v, v', w, w' \in V, \lambda \in K$
Und: s heisst symmetrisch, falls $s(w, v) = s(v, w)$ und schiefsymmetrisch, falls $s(w, v) = -s(v, w)$.

Beispiel 2.

- $< ., . > := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine symmetrische bilineare Form
- ω ist eine schiefsymmetrisch bilineare Form
- ($< ., . >_c$ nicht)
- $V = \{$stetige Abbildung$[0, 1] \to \mathbb{R}\}$ über $\mathbb{R}$: $f, g \in V$

  $$s(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

  ist eine symmetrisch bilineare Form auf V

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, mit $\dim_K V < \infty$, und $s : V \times V \to K$ eine bilineare Form.

Definition 5. Ist $B = (v_i)_{1\le i\le n}$ eine Basis von V, so setzen wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1\le i,j\le n} \in M(n \times n, K)$$

die <u>darstellende Matrix</u>

Korollar 3. *für $x, y \in V$*

$$\begin{aligned} x &= x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \\ y &= y_1v_1, + \cdots + y_nv_n \end{aligned}$$

und

$$M_B(s) = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}, d.h. a_{ij} = s(v_i, v_j)$$

haben wir:

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_ja_{ij} \\ &= (x_1 \cdots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x^tM_B(s) \cdot y \end{aligned}$$

Proposition 1. *Sei V ein endlich-dim. Vektorraum über K mit Basis $B = (v_i)_{1\le i\le n}$. Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge von Bilinearformen und $M(n \times n, K)$, gegeben durch*

$$(s : V \times V \to K) \mapsto M_B(s)$$

Beweis 1. *Wir schreiben einen Vektor $x \in V$ als $(x_1, \cdots, x_n)$ falls $x = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Ähnlich für y. Dann ist*

$$\begin{aligned} A \in M(n \times n, K) \mapsto &V \times V \to K \\ (x, y) \mapsto &x^t \cdot A \cdot y \end{aligned}$$

inverses zu der obigen Abbildung.

Bemerkung 7. Sei $(s : V \times V \to K)$ eine bilineare Forum und $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ die darstellende Matrix. Wir erinnern uns an die Notation

$$\begin{aligned} \Phi_B : &K^n \to V \\ e_1 &\mapsto v_i \end{aligned}$$

Dann:

$$K^n \times K^n \xrightarrow{\Phi_B \times \Phi_B} V \times V \xrightarrow{s} K$$

ist gegeben durch

$$(x, y) \mapsto t_xA \cdot y$$

Sei $A = (u_i)_{1\le i\le n}$ eine andere Basis.

$$K^n \xrightarrow{\Phi_A} V$$

$$\xrightarrow{T} = \Phi_B^{-1} \circ \Phi_A$$

$$K^n \xrightarrow{\Phi_B}$$

Proposition 2. *Transforationsformel Mit dieser Notation haben wir:*

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot T$$

Beweis 2.

$$\begin{array}{ccc} K^n \times K^n \xrightarrow{\Phi_B \times \Phi_B} V \times V \xrightarrow{s} & & K \\ (x, y) \mapsto & & t_x \cdot M_B(s) \cdot y \end{array}$$

Es folgt: (eine Bastelei. . .)

$$\begin{array}{ccc} K^n \times K^n \xrightarrow{\Phi_A \times \Phi_A} & V \times V \xrightarrow{s} & K \\ \xrightarrow{T \times T} K^n \times K^n & \xrightarrow{\Phi_B \Phi_B} \uparrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} K^n \times K^n (x, y) \mapsto & K(x^t M_a(s) \cdot y) = t_x^t M_B(s) T_y = (T_x)^t M_B(s)(T_y) \\ \quad \mapsto K^n \times K^n (T_x, T_y) & \xmapsto{(T_x)^t M_B(s)(T_y)} \uparrow \end{array}$$

Es folgt aus der oberen Proposition (Vor der Transf.):

$$T^t M_B(s) T = M_a(s)$$

Beispiel 3. $V = K^n$, mit Standardskalaprodukt $< ., . >$. Ist $B = (e_1, \cdots, e_n)$, so ist

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = M_{\text{Standardbasis}}(< ., . >)$$

Sei

$$\begin{aligned} A = & \quad (e_1, e_2 - e_1, & e_3 - e_2, \cdots, e_n - e_{n-1}) \\ =: & \quad (u_1, u_2, & \cdots, u_n \end{aligned}$$

Direkt aus der Definition:

$$< u_i, u_j > = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 2 & i = j > 1 \\ -1 & |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

oder mit der Transformationsformel

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \cdots & & \\ \cdots & & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{und} T^t E_N T''$$

Bemerkung 8. Ist A die darstellende Matrix bezügloich einer Basis, so haben wir:

- symmetrisch $\Leftrightarrow A = A^t$
- schiefsymmetrisch $\Leftrightarrow A = -A^t$

Das stimmt überein mit (vgl. Übungsblatt 3): $A \in M(n \times n)$ ist symmetrisch $\Leftrightarrow$ $A = A^t$. A ist schiefsymmetrisch oder antisymmetrisch (oder alternierend wenn $\text{char}(K) \neq 2$) $\Leftrightarrow A = -A^t$

1.4 Bilineare und quadratische Formen

Eine quadratische Form $V \to K$ wird zu einer Bilinearform assoziert. Falls $\dim_K V < \infty$: "quadratische Form" bedeutet $q : V \to K$ bezüglich einem Koordinatensystem gegeben als homogenes quadratisches Polynom. Ist $s : V \times V \to K$ eine bilineare Form, dann heisst

$$\begin{aligned} q :V &\to K \\ v &\mapsto q(v) = s(v,v) \end{aligned}$$

die zu s gehörige quadratische Form.

Beispiel 4. $< v, v >= v_1^2 + \cdots + v_n^2$ für $v \in K^n$
Für $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine symmetrische Matrix mit $s : V \times V \to K$, $(x, y) \mapsto x^t Ay$, haben wir

$$\begin{aligned} s(x,x) = & \ x^t Ax \\ = & \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \\ = & \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \\ = & \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Ist $\operatorname{char}(K) \neq 2$, so haben wir:

$$\begin{aligned} \{\text{symm. bilineare Formen in } K^n\} \leftrightarrow & \ \{\text{quadr. Formen auf} K^n\} \\ s \mapsto & \ q(v) := s(v,v) \\ \leftarrow\!\shortmid & \text{ (Polarisierungsformel)} \end{aligned}$$

1.4.1 Polarisierungsformel

Ist s eine symmetrische Bilinearform und q die zu s gehörende quadratische Form über einem Vektorraum V über K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$, dann gilt:

$$\begin{aligned} s(v,w) = & \ \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right) \\ = & \ \frac{1}{2}\left(q(v) + q(w) - q(v+w)\right) \\ = & \ \frac{1}{4}\left(q(v+w) - q(v-w)\right) \end{aligned}$$

1.5 Sesquilineare Form

Definition 6. Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung

$$s : V \times V \to \mathbb{C}$$

heisst sesquilinear falls:

$$\begin{aligned} s(v+v', w) = & \ s(v,w) + s(v',w) \\ s(\lambda v, w) = & \ \lambda s(v,w) \\ s(v, w+w') = & \ s(v,w) + s(v,w') \\ s(v, \lambda w) = & \ \bar{\lambda} s(v,w) \end{aligned}$$

für $v, v', w, w' \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Beispiel 5. $< .,. >$ auf $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} s(f,g) = & \int_0^1 f(x)g(x)dx \\ \text{auf} V := & \ \{\text{stetige Abb.}\}[0,1] \to \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

Definition 7. Eine sesquilineare Form heisst hermitesch, falls

$$s(w, v) = \overline{s(v, w)}\ \forall v, w \in V$$

Beispiel 6. $< ., . >_c$ auf $\mathbb{C}^n$ ist hermitesch.

Bemerkung 9. Man spricht von hermiteschen Form, diese sind immer sesquilinear

Definition 8. Sei $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, und $B := (V_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine Basis. Ist s eine sesquilineare Form, so definieren wir

$$M_B(s) := (s(v_i, v_j))_{1 \leq i \leq n}$$

die darstellende Matrix. Sind $z, w \in V$

$$\begin{aligned} z = && z_1 v_1 + \cdots + z_n v_n \\ w = && w_1 v_1 + \cdots + w_n v_n \end{aligned}$$

dann haben wir

$$\begin{aligned} s(z, w) = && \sum_{i,j=1}^{n} z_i \bar{w_j} a_{ij} \text{wobei} a_{ij} = s(v_i, v_j) \\ = && (z_1 \cdots z_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w_1} \\ \vdots \\ \bar{w_n} \end{pmatrix} = && z^t M_B(s) \cdot \bar{w} \end{aligned}$$

Proposition 3. *Sei V ein endlich dim. $\mathbb{C}$ Vektorraum und $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Wir haben eine Bijektion*

$$\{\textit{sesquilineare Form auf } V\} \leftrightarrow M(n \times n, \mathbb{C})$$

Unter dieser Bijektion haben wir:

$$\{\textit{hermitesche Formen}\} \leftrightarrow \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) : A^t = \bar{A}\}$$

Man sagt: eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $A^t = \bar{A}$ ist hermitesch.

Satz 1. *Transformationsformel Sei $A = (u_1, \cdots, u_n)$ eine andere Basis mit Transformationsmatrix T:*

TODO: hier einfügen

Dann gilt:

$$M_A(s) = T^t \cdot M_B(s) \cdot \bar{T}$$

Mit $g(v) := s(v, v)$ gilt die Polarisierungsformel

$$s(v, w) = \frac{1}{4} \left(q(v + w) - q(v - w) + iq(v + iw) - iq(v - iw) \right)$$

Definition 9. Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, V ein K-Vektorraum und $s : V \times V \to K$ eine Billinearform $\begin{cases} \text{symmetrisch} & K = \mathbb{R} \\ \text{hermitesch} & K = \mathbb{C} \end{cases}$ heisst positiv definit, falls $s(v; v) > 0$ $\forall 0 \neq v \in V$

Beispiel 7. $< ., . >$ ist positiv definit auf $\mathbb{R}^n$
$< ., . >_c$ ist psoitiv definit auf $\mathbb{C}^n$

Definition 10. Ein Skalarprodukt ist $\begin{cases} \text{positiv definite symetrische bilineare Form} & K = \mathbb{R} \\ \text{eine positiv definite hermetische Form} & K = \mathbb{C} \end{cases}$

Definition 11. Skalarprodukt oft $< ., . >$, Norm $\|v\| := \sqrt{< v, v >}$

Definition 12. Euklidischer Vektorraum Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt

Definition 13. Untärer Vektorraum Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt

Beispiel 8.

$$V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\text{stetig}\} \text{ mit } < f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$$
$$V = \{f : [0,1] \to \mathbb{C}\text{stetig}\} \text{ mit } < f, g >= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

in beiden Fällen

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx}$$

"L^2-Norm"

Bemerkung 10. In einem beliebigen euklidischen bzw. unitären Vektorraum gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichtung

$$|< v, w >| \leq \|v\| \, \|w\| \;\; \forall v, w \in V$$

mit = genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Beweis 3. *(Skizze) klar falls $v = 0$ oder $w = 0$, also nehmen wir an, dass $v \neq 0$ und $w \neq 0$ 1. Reduktion: zum Fall $\|v\| = \|w\| = 1$.*

$$v_1 := \frac{v}{\|v\|} w_1 := \frac{w}{\|w\|}$$
$$\|v_1\| = 1 \, \|w_1\| = 1$$

2. Reduktion: Es reicht aus, zu zeigen: $\text{Re} < v, w > \leq 1$ *= genau dann wenn $V = W$*

$$\begin{aligned} |< v, w >| &= \mu < v, w > \mu \in \mathbb{C}, |\mu| = 1 \\ &= < \mu v, w > \in \mathbb{R}_{\geq} \\ &= \text{Re} < v', w > \textit{wobei} v' := \mu v \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung $\leq$, Gleicheit: v, w linear unabhängig $\implies$ v', w linear unabhängig $\implies$ $v' \neq w$

Eigenschaften 3.

$$\begin{aligned} &= \text{falls} \\ < v - w, v - w > &\geq 0 v - w = 0 \\ < v, v > - < v, w > - < w, v > + < w, w > &\geq 0 v = w \\ 1 - < v, v > - \overline{< v, w >} + 1 &\geq 0 v = w \end{aligned}$$

Beispiel 9. Ist $T : V \to \mathbb{R}^n$ oder $T : V \to \mathbb{C}^n$ ein Isomorphismus, dann ist $s : V \times V \to \mathbb{R}$ (bzw. $s : V \times V \to \mathbb{C}$) gegeben durch

$$s(x, y) =< T_x, T_y >$$

bzw.

$$s(x, y) =< T_x, T_y >_c$$

ein Skalarprodukt.

Definition 14. Sei V ein exklusiver, bzw. unitärer Vektorraum

- $v, w \in V$ heisst orthogonal, falls $< v, w >= 0$
- $U, W \subset V$ heissen orthogonal (geschrieben $U \perp V$) falls $U \perp W$ $\forall u \in U$, $w \in W$

- $U \subset W$ das orthagonale Koplement ist $U^{\perp} = \{v \in V : u \perp v \forall u \in U\}$
- $v_1, \cdots, v_n$ sind orthogonal, falls $v_i \perp v_j \ \forall i \neq j$
- $v_1, \cdots, v_n$ sind orthonormal, falls $v_i \perp v_j \ \forall i \neq j$ und $\|v_i\| = 1 \ \forall i$
- V ist orthagonale direkte Summe von Untervektorräumen $V_1, \cdots, V_r$ falls

$$V = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_r$$
$$V_i \perp V_j \forall i \neq j$$

$$C([-1,1], \mathbb{R}) := \{f : [-1;1] \to \mathbb{R}\text{stetig}\}$$

dann ist $C([-1,1]\mathbb{R})$ die orthogonale direkte Summe von $C([-1,1]\mathbb{R})_{\text{gerade}}$ und $C([-1,1]\mathbb{R})_{\text{ungerade}}$. gerade: $f(-x) = f(x)$ und ungerade: $f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{gerader Teil}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{ungerader Teil}}$$

g gerade, h ungerade $\implies$ gh ungerade $\implies$ $< g, h >= \int_{-1}^{1} g(x)h(x) = 0$

Bemerkung 11. Ist $v_1, \cdots, v_n$ eine orthonormale Familie mit $v_i \neq 0 \forall i$, so gilt

1. $(i)(v_1, \cdots, v_n)$ ist linear unabhängig ($c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0 \implies c_i < v_i, v-i > + \cdots + c_i < v_i, v_i > + \cdots + c_n < v_n, v_i >= 0 \implies c_i \|v_i\|^2 = 0 \implies c_i = 0$)

2. $\left(\frac{v_1}{\|v_i\|}, \cdots, \frac{v_n}{\|v_i\|}\right)$ ist orthonormal

Satz 2. *Ist $(v_1, \cdots, v_n)$ eine orthonormale Basis von V, so gilt folgendes für beliebiges $v \in V$*

$$v = \sum_{i=1}^{n} < v_i, v_j > v_i$$

$$\begin{aligned} v = & \sum_{i=1}^{b} c_i v_i \\ < v, v_j > = & \sum_{i=1}^{n} c_i < v_i, v_j > \\ = & c_j < v_i, v_j > = c_j \end{aligned}$$

Proposition 4. *Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $(V, < .,. >)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum über K*

1. *Ist $n := \dim_K V < \infty$ und $(v_1, \cdots, v_d)$ eine orthonormale Familie von Vektoren von V, so existieren $v_{d+1}, \cdots, v_n$, so dass $(v_1, \cdots, v_n)$ eine orthonormale Basis von V ist.*

2. *Ist $U \subset V$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so gilt $V = U \bigoplus U^\perp$, orthonormal direkte Summe.*

Beweis 4. *Es gibt triviale Fälle: $d = n$ in 1., $U = 0$ in 2. Auch: der Fall $(d = 0)$ in 1. $\Leftarrow d = 1$: $0 \neq v \in V$ beliebiger Vektor, wir nehmen $b_1 = \frac{v}{\|v\|}$*
Beweis durch Induktion nach N mit Indunktionsannahme 1. gilt für $n \leq N$
$N = 1$ okay.

Plan: *Wir zeigen IA $\implies$ 2. für $\dim_K U \leq N$ und IA $\implies$ 1. für $n \leq N + 1$.*
IA $\xrightarrow{\dim U \leq N}$ $\exists$ orthonormale Basis $(u_1, \cdots, u_d)$ von U $d := \dim U$. Für beliebiges $v \in V$ gilt:

$$v - \sum_{i=1}^{n} < v_i, v_j > u_i \in U^\perp$$

denn

$$\left\langle v - \sum_{i=1}^{n} < v_i, u_i > u_i, u_j \right\rangle =< v, u_j > - \sum_{i=1}^{n} < v, u_j >< u_i, u_j >= 0$$

Und: 1. für $\dim V \leq N + 1$ folgt aus IA und 2. für $U \leq N$

$$\begin{aligned} 1 \leq d < n = \dim V \geq N + 1 \\ \implies 1 \leq d \leq N und 1 \leq \dim V - d \geq N \end{aligned}$$

Sei $U := span(v_1, \cdots, v_d)$ Aus 2. haben wir $V = U \bigoplus U^\perp$ Nach IA, $\exists$ orthonormale Basis $(v_{d+1}, \cdots, v_n)$ von $U^\perp$ Es folgt, dass $(v_1, \cdots, v_n)$ ist eine orthonormale Basis von V.

Eigenschaften 4. Praktisches Verfahren zu testen ob ein symmetrisch bilineare bzw. hermetische Form ein Skalaprodukt ist (falls $\dim_K V < \infty$). Verfahren:

$$\begin{array}{c|c} U: \text{1-dimensional} & U^{\perp}\text{: 2-dim} \\ s(e_1, e_1) = 3 & =24 \end{array}$$

- wählen $U \subset V$ nicht trivialer Untervektorraum (z.B. $U = span(v), 0 \neq v \in V$)
- Berechnen $U^{\perp}$
- Testen:
  - Ist $V = U \bigoplus U^{\perp}$?
  - Ist die Einschränkung von der Form auf U ein Skalarprodukt?
  - Ist die Einschränkung von der Form auf $U^{\perp}$ ein Skalarprodukt?

Beispiel 10. $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die entsprechende Bilinearform

$$(x, y) \mapsto t_x \cdot M \cdot y$$

$$\begin{aligned} U &= & (e_1) \\ U^{\perp} &= & \{(x_1, x_2, x_3 : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\} \\ &= & ((1, -3, 0), (0, 2, -1)) \end{aligned}$$

Die darstellende Matrix:

$$s|_{U^{\perp}} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} U &\cong & \mathbb{R}^2 \\ W &= & (e_1) \in \mathbb{R}^2 \\ W^{\perp} &= & \{(x_1, x_2) | 24x_1 - 21x_2 = 0\} \\ &= & (21, 24) \end{aligned}$$

W 1-dim, $W^{\perp}$ 1-dim

$$(s|_{U^{\perp}})(e_1, e_2) = 24$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & -21 \\ -21 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 18 \end{pmatrix} = -216$$

$\Longrightarrow$ kein Skalarprodukt

1.6 Volumen

Definition 15. Volumen $\begin{array}{ccccc} \text{Skalarprodukt} & \rightsquigarrow & \text{Norm} & \rightsquigarrow & \text{Metrik} \\ <.,.> & & \|v\| := \sqrt{<v, v>} & & d(x, y) = \|y, x\| \end{array}$

$K = \mathbb{R} \rightsquigarrow$ Volumen $(\dim V < \infty)$

1.6.1 Spat

Definition 16. Spat $u_1, \cdots, u_n$ orthonormale Basis. Dann ist der von $(u_1, \cdots, u_n)$ aufgespannte Spat definiert als (wobei $c_i :=$ von $(u_1, \cdots, u_n)$ aufgespannten Spat)

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i u_i | 0 \leq c_i \leq 1 \ \forall i \right\}$$

Vol(Spat):=1
Falls $v_1, \cdots, v_n \in V$ beliebig sind, dann hat der von $(v_1, \cdots, v_n)$ aufgespannte Spat

$$\text{Vol} = \left| \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| \quad v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i$$

Sei $b_ij :=< v_i, v_j >$ und $B := \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ Wir haben $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$, also $B = A \cdot A^t$. Es folgt:

$$\text{Vol} = \sqrt{(\det A)^2} = \sqrt{\det B}$$

Vorteile:

- keine Wahl von orthonormaler Basis nötig
- auch sinnvoll für eine Kollektion $v_1, \cdots, v_m$ evzl. $m \neq n$

Beispiel 11. $m = 1$

$$\begin{aligned} \det B &= \|v_1\|^2 \\ \sqrt{\det B} &= \|v_1\| \end{aligned}$$

Definition 17. Grammsche Determinante Im m-dim Volumen $:= \sqrt{G(v_1, \cdots, v_m)}$ wobei

$$G(v_1, \cdots, v_m) := \det \left(< v_i, v_j > \right)_{1 \leq i,j \leq m}$$

die sogenannte Grammsche Determinante ist.

Bemerkung 12. Es gilt $G(v_1, \cdots, v_m) = 0 \Leftrightarrow v_1, \cdots, v_m$ lineare abhängig, weil

$$A = (a_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$$

mit

$$G(v_1, \cdots, v_m) = \det(A, A^t) = \sum (m \times m \text{Minor})$$

Bemerkung 13.

$$\text{Vol}(v_1, \cdots, v_m) := \sqrt{G(v_1, \cdots, v_m)}$$

ist 0 falls $\exists i : v_i = 0$
sonst:

$$\text{Vol}(v_1, \cdots, v_m) = \|v_1\| \cdots \|v_m\| \, \text{Vol}(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \cdots, \frac{v_m}{\|v_m\|}$$

Satz 3. *Hadamard'sche Ungleichung*

$$Vol(v_1, \cdots, v_m) \leq \|v_1\| \cdots \|v_m\|$$

für $0 \neq v_i \in V$, $i = 1, \cdots, m$. *Mit Gleichheit genau dann wenn* $v_1, \cdots, v_m$ *orthogonal sind.*

Beweis 5. *Durch fallende Induktion nach*

$$\max\{|I| : I \subset \{1, \cdots, m\} \,|(v_i)_{i \in I} \text{ orthogonal}\}$$

Fall $\max\{\cdots\} = m$ *das bedeutet,* $v_1, \cdots, v_m$ *sind orthogonal. Dann:*

$$G(v_1, \cdots, v_m) = \det \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|v_m\|^2 \end{pmatrix} = \|v_1\|^2 \cdots \|v_m\|^2$$

Die ist der Induktionsanfang.
Sei $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r < m$. *Induktionsanahme: Ungleichung für den Fall*

$$\max\{|I| : (v_i)_{i \in I} \text{ orthogonal}\} > r$$

Sei $v_1, \cdots, v_m$, *so dass* $\max\{\cdots\} = r$. *o.B.d.A:* $v_1, \cdots, v_r$ *orthagonal. Wir schreiben:*

$$v_m = \underbrace{v_m - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_m, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i}_{\tilde{v}_m \in \text{span}(v_1, \cdots, v_r)^\perp} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_m, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i}_{\tilde{\tilde{v}}_m \in \text{span}(v_1, \cdots, v_r)}$$

$$< \tilde{v_m}, \tilde{\tilde{v_m}} = 0$$

- $v = \tilde{v} + \tilde{\tilde{v}}$
- $< \tilde{v}, \tilde{\tilde{v}} >= 0$
- $\|v\|^2 = \|\tilde{v}\|^2 + \left\|\tilde{\tilde{v}}\right\|^2$

Das ist eine <u>*Orthogonale Projektion*</u> *Wir haben*

$$G(v_1, \cdots, v_m) = G(v_1, \cdots, v_{m-1}, \tilde{v_m})$$

weil (Spalten- und Zeilenumforumgen...). Es folgt:

$$\begin{aligned} Vol(v_1, \cdots, v_m) = Vol(v_1, \cdots, v_{m-1}, \tilde{v_m}) &\leq \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \, \|\tilde{v_m}\| \\ &< \|v_1\| \cdots \|v_{m-1}\| \, \|\tilde{v_m}\| \end{aligned}$$

Definition 18. Gram-Schmidt-Orthagonalisierungsverfahren

$$\tilde{v_r} := v_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{< v_r, \tilde{v_i} >}{< \tilde{v_i}, \tilde{v_i} >} \tilde{v_i}, \text{für} 1, 2, \cdots$$

gegeben: eine Kollektion $(v_1, \cdots, v_n)$ oder abzählbar unendlich $(v_1, v_2, \cdots)$. Das Verfahren produziert $(\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \cdots)$, mit:

$$\begin{array}{lll} (\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \cdots & = & (v_1, v_2, \cdots) \\ (\tilde{v_1}, \cdots, \tilde{v_m}) & = & (v_1, \cdots, v_m) \ \forall m \\ (\tilde{v_1}, \tilde{v_2}, \cdots) & \text{sind orthogonal} & \end{array}$$

Beispiel 12. $C([-1,1], \mathbb{R})$ mit $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, \mathrm{d}\, x$

$$(1, x, x^2, \cdots)$$

$$\xrightarrow{\text{GS}} \frac{< x^2, 1 >}{< 1, 1 >} = \frac{2/3}{2}$$

$$(1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5} \cdots)$$

Bis auf Normalisierung bekommen wir die Legendre-Polynome.

Fazit 4. $\begin{matrix}\text{Bilinearform} \\ \text{Sesquilinearform}\end{matrix} \begin{matrix}\xrightarrow{\text{+ def, symm}} \\ \xrightarrow{\text{+ def, hermitesch}}\end{matrix}$ Norm $\to$ Metrik Norm:

$$\begin{aligned}
\|.\| &: V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\
\|x\| = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\
\|\lambda x\| &= |\lambda| \, \|x\| \\
\|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

Metrik:

$$\begin{aligned}
d &: V \times V \to \mathbb{R}_{\leq 0} \\
d(x, <) = 0 &\Leftrightarrow x = y \\
d(x, y) &= d(y, x) \\
d(x, z) &\leq d(y, y) + d(y, z)
\end{aligned}$$

Aber: nicht jede Metrik, nicht einmal jede transinvariante Metrik kommt von einer Norm.

Bemerkung 14. Eine Norm kommt von einer +def, symm Bilinearform

$$\Leftrightarrow \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \ \forall x, y \in V$$

Definition 19. ausgeartete Bilinearform Eine Bilinearform $s : V \times V \to K$ ist ausgeartet (oder: entartet), falls eine oder beide der induzierten Abbildungen $V \to V^*$ nicht injektiv ist.

$$\begin{aligned}
v &\mapsto (w \mapsto s(v, w)) \\
v &\mapsto (w \mapsto s(w, v))
\end{aligned}$$

Bemerkung 15. Falls $\dim_K V < \infty$, dann:

$v \mapsto (w \mapsto s(v, w))$ injektiv

$\Updownarrow$

$v \mapsto (w \mapsto s(w, v))$ injektiv

$\Updownarrow$

s ist nicht ausgeartet

$\Updownarrow$

die darstennelde Matrix ist invertierbar

$$\begin{aligned}
s(v, w) &= v^t \cdot A \cdot w \\
&= \left(A^t \cdot v\right)^t
\end{aligned}$$

¡++¿

Satz 4. *Sei V ein K-Vektorraum, $s : V \times V \to K$ eine symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Für $U \subset V$ Untervektorraum, schreiben wir noch*

$$U^\perp := \{v \in V : s(u, v) = 0 \ \forall u \in U\}$$

($s(v, u) = 0 \Leftrightarrow s(u, v) = 0$ weil s symm. bzw. schiefsymm.)

Proposition 5. *Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $s : V \times V \to K$ eine nicht ausgeartete symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform. Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:*

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

Beweis 6. *Sei* $(v_i)_{i=1,\cdots n}$ *eine Basis mit* $n := \dim V$, *und* A *die darstellende Matrix von* s *bzw.* (v_i). *Wir haben dann:*

$$s(x,y) = x^t \cdot A \cdot y$$

und $A^t = \pm A$, $\det A \neq 0$

$$U^\perp = \left\{x \in V_i | x^t \cdot A \cdot y = 0 \ \forall y \in U\right\} \quad = \left\{x \in V_i | (x \cdot A)^t \cdot y = 0 \ \forall y \in U\right\}$$

Sei $F : V \to V$ *lin.Abb.* $\leftrightarrow A$. *Dann:*

$$F(U^\perp) = \left\{Ax | (Ax)^t y = 0 \ \forall y \in U\right\} \qquad = \left\{Ax | \tilde{x}^t y = 0 \ \forall y \in U\right\}$$

Es folgt: mit

$$B := \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_d \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$(u_1, \cdots, u_d)$ *Basis von* U, *dann ist* $F(U^\perp) = \operatorname{Ker} B$. *Jetzt:*

$$\dim U^\perp = \dim F(U^\perp) = \dim \operatorname{Ker} B = n - \dim U$$

Korollar 4. $\dim U < \infty$, $s : V \times V \to K$ *nicht ausgeartet, (schief-) symm.*

$$U \subset \Longrightarrow \left(U^\perp\right)^\perp = U$$

Bemerkung 16. Es ist nicht immer der Fall, dass $V = U \bigoplus U'$, weil es ist möglich, dass $U \cup U^{\perp} \neq 0$. 2 Extremfälle:

- U ist isotropisch ($s|_{U'}$ ist trivial) $\Leftrightarrow U \subset \underbrace{U^{\perp}}_{\dim V - \dim U}$
- $s|_U$ ist auch nicht ausgeartet $\Leftrightarrow U \cup U^{\perp} = 0 \Leftrightarrow V = U \bigoplus U^{\perp}$

Aus 1. ist klar:
$$\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V \ \forall \text{isotrop} U \subset V$$

1.7 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

$K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Definition 20. orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei $V, \langle , \rangle$ ein ortho. bzw. unitärer Vektorraum. Ein Endomprhismus $F : V \to V$ heisst orthogonal bzw. unitär falls
$$\langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \ \forall v, w \in V$$

Bemerkung 17. Das ist äquivalent zu
$$\|F(v)\| = \|v\| \ \ \forall v \in V$$

Eigenschaften 5. orthogonaler bzw. unitärer Endomorphismus Sei F ein ortho. bzw. unitärer Endomorphismus. Dann:

- F ist injektiv
- Falls $\dim_K V < \infty$, F ist bijektiv, und F' ist auch ortho. bzw. unitär
- Für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ gilt $|\lambda| = 1$. Eigenvektor v:
$$\|v\| = \|F(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$$

Falls $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit Standardskalarprodukt
$$\langle v, w \rangle = v^t w \text{bzw} \qquad \langle v, w \rangle_c = v^t \bar{w}$$

Ist F zur Matrix A entsprechend, dann
$$\begin{aligned} \langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \Leftrightarrow & \qquad (Av)^t Aw = v^t w \\ & \quad \text{bzw.} (Av)^t \overline{Aw} = v^t w \\ \Leftrightarrow \ v^t A^t A w = v^t w \Leftrightarrow & \qquad A^t A = E_n \\ \text{bzw} \Leftrightarrow \ v^t A^t \bar{A} \bar{w} = v^t \bar{w} \Leftrightarrow & \qquad A^t \bar{A} = E_n \end{aligned}$$

Definition 21. ortho. bzw. unitäre Matrix $O(n) := A \in GL_n(\mathbb{R})$ heisst orthogonal falls $A^t A = E_n$
$U(n) := A \in GL_n(\mathbb{C})$ heisst unitär falls $A^t \bar{A} = E_n$

Not 1.
$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | A \text{ orthogonal}\}$$
$$O_n := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) | A \text{ unitär}\}$$

Weil
$$A, B \in O(n) \implies (AB)^t (AB) = B^t A^t AB = B^t B = E_n \implies AB \in O(n)$$

haben wir $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$ ist eine Untergruppe. Ähnlich: $U(n) \subset GL_n(\mathbb{C})$ ist eine Untergruppe.

Not 2.
$$SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$$
$$SU(n) = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$$

Not 3. ortho. bzw. unitärer Vektorraum

$$O(V) = \{F \in GL(V)|\text{ortho.}\}$$

$$U(V) = \{F \in GL(V)|\text{unitär}\}$$

Bemerkung 18.

$$A \in O(n) \implies \det A \in \{\pm 1\}$$
$$A \in U(n) \implies \det A \in \{\pm z \in \mathbb{C} : |Z| = 1\}$$

Eigenschaften 6. Charakterisierungen von ortho. bzw. unitären Matrizen Äquivalente Charakterisierungen von orthogonalen bzw. unitären Matrizen $A \in GL_n(\mathbb{R})$:
A ist orthogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Leftrightarrow A^tA = E_n \Leftrightarrow AA^t = E_n \Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.
Ähnlich:
A ist unitär $\Leftrightarrow A^{-1} = \bar{A}^t \Leftrightarrow A^t\bar{A} = E_n \Leftrightarrow \bar{A}A^t = E_n \Leftrightarrow$ die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n \Leftrightarrow$ die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$.
Für $n = 1$

$$O(1) = \{\pm 1\} \qquad U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cong S^1$$
$$SO(1) = \{1\} \qquad SU(1) = \{1\}$$

Für $n = 2$: $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 + b^2 = 1$

$$O(2) = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} |\theta \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} |\theta \in \mathbb{R}\right\}$$
$$SO(2) = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} |\theta \in \mathbb{R}\right\} \cong S^1$$

$(z, w) \in \mathbb{C}^2$, $|z|^2 + |w|^2 = 1$, $(-\bar{w}, \bar{z}) \perp (z, w)$

$$U(2) = \left\{\begin{pmatrix} z & -\lambda\bar{w} \\ w & \lambda\bar{z} \end{pmatrix} |(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\right\} \cong S^3 \times S^1$$

$$SU(2) = \left\{\begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} |(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1\right\} \cong S^3$$

$SO(3)$ eine explizite Beschreibung ist möglich (später)

Proposition 6. *Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle,\rangle$, und sei $F : V \to V$ ein unitärer Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von F.*

Beweis 7. *Durch Indunktion nach* $\dim V$. $\dim V = 0, 1$ *trivial.* $\dim V \geq 2$ *Weil $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, gibt es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Sei $v \in V$ ein Eigenvektor, mit $\|v\| = 1$. Weil F untär ist, haben wir $F(v^\perp) = v^\perp$. Wir haben* $\dim v^\perp = \dim V - 1$

$$w \in v^\perp \langle v, w\rangle \implies \langle v, w\rangle = 0$$
$$\lambda \langle v, F(w)\rangle = \langle \lambda v, F(w)\rangle = \langle F(v), F(w)\rangle = 0$$
$$\implies F(v^\perp) \subset v^\perp$$

Aus der Induktionsannahme folgt, dass $\exists$ Orthonormalbasis von $v^\perp$ von Eigenvektoren von F. Zusammen mit $v \overset{V=\text{span}\bigoplus v^\perp}{\rightsquigarrow}$ Orthonormalbasis von V

Korollar 5. *Sei $A \in U(n)$. Dann $\exists S \in U(n)$, $\theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R}$ so dass*

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

Proposition 7. *Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$, und sei $F : V \to V$ ein orthogonaler Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis $\left(v_1^+, \cdots, v_r^+, v_1^-, \cdots, v_s^-, w_1, w_1', \cdots, w_t, w_t'\right)$*

- $F(v_i^+) = v_i^+$
- $F(v_i^-) = -v_i^-$
- $F(w_i) = (\cos\theta_i)w_i + (\sin\theta_i)w_i'$
- $F(w_i') = (-\sin\theta w_i) + (\cos\theta_i)w_i'$

mit $\theta_i \in \mathbb{R}$, $0 < |\theta| < \phi$, $i = 1, \cdots, t$

Beweis 8. *Durch Induktion nach* $\dim V$*:* $\dim V = 0, 1, 2$ *trivial.* $\dim > 2$ *(nächstes mal)*

Fazit 5. $F : V \to V$ orthogonaler Endomorphismus $\dim_{\mathbb{R}} V$ $\langle ., . \rangle$ Skalarprodukt
$\implies \exists$ orthogonale Basis +1 oder -1 Eigenvektoren

$$F(\alpha w_i + \beta w_i') = (\alpha \cos \Theta_i - \beta \sin \Theta_i)\, w_i + (\alpha \sin \Theta_i \beta \cos \Theta_i)\, w_i',\ \Theta_i \in \mathbb{R}$$

Beweis 9. *Fortsetzung Durch Induktion nach* $\dim V$, *Induktionsanfang:* $\dim V \leq 2$ $\dim V = 2$ *bezüglich beliebiger Basis* (w_1, w_1').

$$V : \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \textit{oder} \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Matrix 1: w_1, w_2 *ist wie oben, Matrix 2: chaakteristisches Polynom* $t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \to$ *(+1-Eigenvektor, -1-Eigenvektor)*

1. *Fall:* $\exists$ *reeller Eigenwert*

   $$\lambda \in \mathbb{R},\ |\lambda| = 1\ v \in V\ F(v) = \lambda v$$

   wir zeigen, dass $F(v^{\perp}) = v^{\perp}$ *genau wie im Fall einees unitären Endomorphismus*

   $$\dim(v^{\perp}) = \dim V - 1 \overset{IA}{\rightsquigarrow} v^{\perp} : \textit{orthonormale Basis}$$
   $$V = (v) \bigoplus v^{\perp}$$

2. *Fall:* $\nexists$ *reeller Eigenwert*

   $$\implies P_F(t) = \prod_{i=1}^{(\dim V)/2} Q_i(t)$$

   $Q_i(t)$ *irreduzibles quadratisches Polynom. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgt:*

   $$\implies \exists \overbrace{v}^{\neq 0} \in V,\ imit Q_i(F)v = 0$$

   Sei $0 \neq v_0 \in V$ *beliebigen Vektor* $P_F(F)v_0 = 0$

   $$Q_1(F)Q_2(F) \cdots +_{\frac{\dim V}{2}} (F)v_0 = 0$$
   $$\implies \exists j : Q_j(F)Q_{j+1}(F) \cdots +_{\frac{\dim V}{2}} (F)v_0 = 0$$
   $$\textit{aber } Q_{j+1}(F) \cdots Q_{\dim V} 2(F)v_0 \neq 0$$

   $\implies$ *wir nehmen* $i := j$ *und* $v := Q_{j+1}(F) \cdots Q_{\frac{\dim V}{2}(F)v_0}$.
   Beh: $U := \operatorname{span}(v, F(v))$ *ist ein* F*-invariante Vektorraum.* $Q_i(F)_v = 0$ $\implies$ $\exists a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $F(F(v)) = av + bF(V)$. *Es folgt:* $U^{\perp}$ *ist auch* F*-invariant.* $V = U \bigoplus U^{\perp} \overset{IA}{\rightsquigarrow}$ *Basen von* U *und von* $U^{\perp}$ *wie oben. Die Vereinigung dieser Basen ist wie erwünscht.*

Korollar 6. *Sei* $A \in O(n)$. *Dann gibt es ein* $S \in O(n)$ *und* $r, s, t \in \mathbb{N}$, $\Theta_1, \cdots, \Theta_t \in \mathbb{R}$ *mit*

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & & & & 0 \\ & -E_s & & & \\ & & D_{\Theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & D_{\Theta_t} \end{pmatrix}$$

wobei

$$D_{\Theta} := \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Beispiel 13.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \in U(n)$$

$$A(z_1, \cdots, z_n) = (z_2, \cdots, z_n, z_1)$$
$$A(1, S, S^2, \cdots, S^{n-1}) = (S, S^2, \cdots, S^{n-1}, 1)$$
$$S := e^{2\pi i/n} \quad S^n = 1$$

$\implies$ $(1, S, S^2, \cdots, S^{n-1})$ ist Eigenvektor zum Eigenwert S. Ähnlich: für $0 \leq j \leq n-1$ haben wir $(1, S^j, S^{2j}, \cdots, S^{(n-1)j})$ ist Eigenvektor zum Eigenwert S^j. $1, S, S^2, \cdots, S^{n-1}$ sind paarweise verschieden $\implies$ $(1, S^j, S^{2j}, \cdots, S^{(n-1)j})$ ist eine Basis von Eigenvektoren. Normalisierung:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(1, S^j, S^{2j}, \cdots, S^{(n-1)j}\right)\right)_{j=0,1,\cdots,n-1}$$

ist eine orthonormale Basis von Eigenvektoren

Fazit 6. $(K = \mathbb{C})$ unitärer Endomorpismus von V
$(K = \mathbb{R})$ orthogonaler Endormophismus von V
$\implies V = \bigoplus_{\text{Eigenwerte}\lambda} \operatorname{eig}(F; \lambda)$ orthogonale direkte Summe

Beispiel 14.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{4}{5} & \frac{36}{65} \\ \frac{4}{13} & -\frac{3}{5} & \frac{48}{65} \\ \frac{12}{13} & 0 & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \in O(3)$$

$\det A = 1$ 2 komplex konjugierte + 1 reller oder 3 reelle Eigenwerte $\implies$ $+1$ ist ein Eigenwert. ... $\rightsquigarrow$ Eigenvektor $(6, 3, 4)$ zum Eigenwert 1. $\rightarrow$ v mit $\|v\| = 1$
$v = \frac{1}{\sqrt{61}}(6, 3, 4)$ — $v^\perp = \operatorname{span}((1, -2, 0), (2, 0, -3)) \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}}$

$$(1, -2, 0), (\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, -3)$$

Normalisieren:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0), \sqrt{1}\sqrt{305}(8, 4, -15)$$

Und wir berechnen

$$S := \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{61}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{305}} \\ \frac{3}{\sqrt{61}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{305}} \\ \frac{4}{\sqrt{61}} & 0 & -\frac{15}{\sqrt{305}} \end{pmatrix}$$

bekommen wir

$$\underbrace{S^{-1}}_{=S^t} AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{57}{65} & \frac{4\sqrt{61}}{65} \\ 0 & -\frac{4\sqrt{61}}{65} & -\frac{57}{65} \end{pmatrix}$$

1.8 Beschreibung von $SO(3)$ und $O(3)$

Eigenschaften 7. Sei $A \in SO(3)$. Dann: entweder es gibt 1 reelle und 2 komplex konjugierte Eigenwerte oder 3 reelle Eigenwerte. $\lambda \in \mathbb{C} \implies \lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$. Eigenwerte $+1(\times 3) \Leftrightarrow A = E_3$ oder $-1(\times 2)$ / $+1$. Wenn $\not\Leftarrow A = E^3$, dann ist $\dim \operatorname{eig}(A, 1) = 1$.

$$A : \operatorname{eig}(A, 1)^\perp \to \operatorname{eig}(A, 1)^\perp$$

ist eine Drehung durch einen Winkel $\Theta \in (0, 2\phi)$. Bezüglich Basis (v_1, v_2, v_3), $v_1 \in \operatorname{eig}(A, 1)$, $\|v_1\| = 1$ sieht A aus wie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Eigenschaften 8. Sei $A \in O(3)$ Falls $\det A = 1$, haben wir $A \in SO(3)$
Falls $\det A = -1$, haben wir $-A \in SO(3)$
Dann bekommen wir die folgende Beschreibung von $A \in O(3)$ mit $\det A = -1$:

- $A = -E_3$
- oder $\dim \operatorname{eig}(A, -1) = 1$
  $v_1 \in \operatorname{eig}(A, -1)$, $\|v_1\| = 1$
  $A : \operatorname{eig}(A, -1)^\perp \to \operatorname{eig}(A, -1)^\perp$ ist eine Drehung um den Winkel $\Theta - \pi \in (-\pi, \pi)$ (Spiegelung oder Spiegelung mit Drehung)