# Lineare Algebra I - Vorlesungs-Script

Prof. Alberto Cattaneo

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Integralrechnung

**Ziel** mathematisch präzise Formulierung des "Flächeninhalts" unter dem Graphen einer Funktion

**Fragen**

- Welche Funktionen sind zulässig?
- Wie definiert man das Integra für diese Funktionen?

**Idee**

1. def. Integral für spezielle Funktionen (Treppenfunktionen)
2. betrachte Folgen von Treppenfunktionen und führe geeigneten Konvergenzbegriff ein (gleichmässige Konvergenz), $\rightarrow$ mögliche Limiten sind Regelfunktionen
3. falls $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ (Folge von Treppenfunktionen), setze $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, x := \lim\limits_{n\to\infty} \left( \int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, x \right)$

$$f_n \rightarrow f \text{folgt} \left( \int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, x \right)_{n\in\mathbb{N}} \text{konvergent}$$

$$f_n \& g_n \rightarrow f \text{zwei Folgen} \implies \lim_{n\to\infty} \left( \int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, x \right) = \lim_{n\to\infty} \left( \int_a^b g_n \right)$$

## 1.1 Treppenfunktionen

- $a < b, a, b \in \mathbb{R}$ $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ Zerlegung von $[a, b]$ $\Leftrightarrow a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$
- $\phi[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Treppenfunktion (auf $[a, b]$) $\Leftrightarrow \exists$ Zerlegung $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ von $[a, b]$ so dass $\phi|_{(x_{n-1}, x_n)}$ konstant $\forall k = 1, \cdots, n$

*Bemerkung* 1.
- keine Aussage über $\phi(x_0), \cdots, \phi(x_n)$
- nicht verboten zu feine Zerlegungen zu betrachten
- $\tau([a, b])$ (ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, $\phi, \psi$ Treppenfunktionen) Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$

**Definition 1.** Integral von Treppenfunktionen $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Teppenfunktion mit Zerlegung $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$

- $c_K$ = Funktionswert von $\phi$ auf $(x_{k-1}, x_k)$
- $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

$$\int_a^b \phi(x) \,\mathrm{d}\, x = \sum_{k=1}^{n} (c_k \cdot \Delta x_k)$$

**Lemma 1.** *Das Integral einer Treppenfunktion ist unabhängig von der gewählten Zerlegung*

**Beweis 1.**

$$Z = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \; \& \; Z' = \{y_0, y_1, \cdots, y_m\} \qquad \textit{Zerlegungen von}[a, b]$$
$$\phi|_{(x_{k-1}, x_k)} \; \& \; \phi|_{(y_{k-1}, y_k)} \qquad \textit{konstant}$$
$$\rightsquigarrow I(Z) \rightsquigarrow I(Z') \qquad \leftarrow \textit{Summen} \sum_{k=1}^{n} c_k \Delta x_k \; \& \; \sum_{k=1}^{m} c'_k \Delta y_k$$

**Frage** $I(Z) = I(Z')$

**Zeige** $I(Z) = I(Z \cup Z') = I(Z')$
*$Z \cup Z'$ entsteht aus $Z$ durch Hinzufügen von endlich vielen Punkten.*
*Angenommen $Z \cup Z' = Z \cup \{y\}, y \notin Z$. Leicht zu sehen: $I(Z) = I(Z \cup \{y\})$*

$I(Z) = I(Z \cup \{y\}) \xRightarrow{Ind} I(Z) = I(Z \cup \{y_1\}) = I(Z \cup \{y_1\} \cup \{y_2\}) = \cdots = I(Z \cup Z')$

**Lemma 2.**

$$\int_a^b \mathrm{d}\, x \tau([a,b]) \to \mathbb{C}$$

1. *$\int_a^b \mathrm{d}\, x$ ist linear, d.h.*

$$\forall \phi, \psi \in \tau([a,b]), \alpha, \beta, \in \mathbb{C} : \int_a^b \alpha\phi + \beta\psi \,\mathrm{d}\, x = \alpha \left( \int_a^b \phi \,\mathrm{d}\, x \right) + \beta \left( \int_a^b \phi \,\mathrm{d}\, x \right)$$

2.

$$\left| f_a^b \phi \,\mathrm{d}\, x \right| \leq \int_a^b |\phi| \,\mathrm{d}\, x \leq (b-a) \underbrace{\|\phi\|}_{Supremum}$$

3. *für $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x) \leq \psi(x)\ \forall x \in [a,b] \implies$*

$$\int_a^b \psi \,\mathrm{d}\, x \leq \int_a^b \psi \,\mathrm{d}\, x$$

**Beweis 2.** *$\phi$ und $\psi$ Treppenfunktionen mit Zerlegung $Z$ bzw. $Z'$ $\implies$ $Z \cup Z'$ Zerlegung für $\phi$ und $\psi$*

$$\int_a^b \alpha\phi + \beta\psi \,\mathrm{d}\, x = (\alpha\phi)|_{(x_{k-1}, x_k)} = \alpha(\phi|_{(x_{k-1}, x_k)})$$

*wobei $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.*
*Wert von $\phi$ auf $(x_{k-1}, x_k)$ $=: c_k$, Wert von $\psi$ auf $(x_{k-1}, x_k)$ $=: \mathrm{d}_k$*

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha c_k + \beta \,\mathrm{d}_k) \Delta x_k = \alpha(\sum_{i=1}^{n}) + \beta(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_k \, \Delta x_k) = \alpha \int_a^b \phi \,\mathrm{d}\, x + \beta \int_a^b \psi \,\mathrm{d}\, x$$

*Bemerkung* 2. $\int_a^b \mathrm{d}\, x : \tau([a,b]) \to \mathbb{C}$ linear, $\ker(\int_a^b \mathrm{d}\, x) \subset \tau([a,b])$ Untervektorraum

*Bemerkung* 3. lineares erzeugendes System von $\tau([a,b])$ $A \subset \mathbb{R}$

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\{1_{[c,d]}$ mit $a < c \leq d < b$ $\}$ erzeugendes System

## 1.2 Regelfunktionen

**Definition 2.** Regelfunktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Regelfunktionen (auf $[a,b]$) $\Leftrightarrow$

-
$$\forall y \in (a,b) : \exists \lim_{x \searrow y} f(x) \ \& \ \lim_{x \nearrow y} f(x)$$
$$(\text{nicht nötig: } \lim_{x \searrow y} f(x) = \lim_{x \nearrow y} f(x))$$

-
$$\exists \lim_{x \swarrow y} f(x) \ \& \ \exists \lim_{x \nearrow y} f(x)$$

*Bemerkung* 4.

$$\lim_{x\searrow y} f(x) = c :\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0 \exists\rho\ \forall 0 < x - y < \rho : |f(x) - c| < \varepsilon$$

$R([a,b])$ Menge aller Regelfunktionen auf $[a,b]$

$$R([a,b]) \text{ Vektorraum über} \mathbb{C}$$
$$T([a,b]) \subset R([a,b]) \text{Untervektorraum}$$

**Frage** $R([a,b])/T([a,b])$ Vektorraum über $\mathbb{C}$, Dimension?

**Beispiel 1.** jede stetige Funktion ist eine Regelfunktion

**Beispiel 2.** jede monotone Funktion auf $[a,b]$ ist eine Regelfunktion (sehe Seite 78)

*Bemerkung* 5.

$$f, g \in R([a,b]) \implies \lambda f_{\lambda\in\mathbb{C}}, f+g, |f|, f\cdot g, \max(f,g), \min(f,g)$$

sind in $R([a,b])$

**Definition 3.** gleichmässige Konvergenz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Funktionen auf $D \subset R, f$ Funktion auf $D$.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>konvergiert gleichmässig</u> gegen $f \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\|f - f_n\|}_{\sup_{x=D}|f(x)-f_n(x)|} = 0$

*Bemerkung* 6. falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmässig $\implies$ limes ist eindeutig

*Bemerkung* 7. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmässig gegen $f \implies f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in D$

$$(|f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x\in D} |f(x) - f_n(x)| \to 0)$$

*Bemerkung* 8. Die Umkehrung gilt NICHT $D = (0,1]$

$$f = 0, f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$
$$\forall x \in D : f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
$$\|f - f_n\| = \sup_{x\in D} |f(x) - f_n(x)| = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 1$$

### 1.2.1 Zusammenfassung

- $\tau([a,b])$ = Vektorraum der Treppenfunktionen auf $[a,b]$
- $\int : \tau[a;b] \to \mathbb{C}$ lineare Abbildung
- Eigenschaften:
  - lineare Abbildung
  - Monotonie: $f \leq g \implies \int_a^b f \cdot \mathrm{d}\,x \leq \int_a^b g \cdot \mathrm{d}\,x$
  - Beschränktheit: $\left|\int_a^b f \cdot \mathrm{d}\,x\right| \leq \int_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}\,x \leq (b{-}a)\,\|f\| = \sup_{x\in[a;b]} f$
- Regelfunktionen: $R([a,b])$ = Vektor nach der Regel $f \supset \tau([a;b])$
- gleichmässige Konvergenz $f_n \to f \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \|f_n - f\| \to 0$

### 1.2.2 Vorgehen

1. Jede Regelfunktion kann man gleichmässig durch Treppenfunktionen approximieren.
2. Damit kann man das Integral von Regelfunktionen definieren.
3. Regenregeln (insbesondere Hauptsatz)
4. Riemannsche Summen

**Satz 1.** *Approximationssatz*

$$f \in Ra;b \Leftrightarrow \exists Folge \phi_n \in \tau[a;b] : \phi_n \to f gleichmässig$$

*ist per Definition äquivalent mit*

$$\exists Folge \phi_n \in \tau[a;b] : \|\phi_n - f\| \to 0$$

*wobei*

$$\|\phi_n - f\| = \sup_{x \in [a;b]} |\phi_n(x) - f(x)|$$

*Dieser Grenzwert ist wiederum äquivalent mit*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \phi \in \tau[a;b] : \|f - \phi\| \leq \varepsilon$$

*(eine $\varepsilon$-approximierende Treppenfunktion)*

**Beweis 3.** $\Rightarrow$ *d.h.* $f \in R \implies \exists \varepsilon$*-approx. Treppen. Widerspruchsbeweis:*

$$\begin{aligned} f &\in R[a;b] \\ \exists \varepsilon > 0 : f besitzt keine \varepsilon\text{-approx. Treppenfunktion} \end{aligned}$$

*Wir konstruieren eine Intervallschachtelung* $I_n = [a_n; b_n]$ *s.d.* $\forall_n f|_{I_n}$ *besitzt keine $\varepsilon$-approx.Treppenfunktion*

$$I_1 = [a;b]$$

*rekursiv:* $M = \frac{b_n - a_n}{2} + a_n$ *Mittelpunkt*

$$I_{n+1} := \begin{cases} [a_n; M] & falls f|_{[a_n;M]} keine \varepsilon\text{-approx. Treppenfunktion bestzt} \\ [M, b_n] & andernfalls \end{cases}$$

*Sei* $\xi \in I_n \forall n$

$$\begin{aligned} c_e &:= & \lim_{x \uparrow \xi} f(x) \\ c_r &:= & \lim_{x \downarrow \xi} f(x) \end{aligned}$$

$\implies$

$$\begin{aligned} \exists \delta : |f(x) - c_e| < \varepsilon : && x \in [\xi - \delta; \xi) \\ |f(x) - c_r| < \varepsilon : && x \in (\xi; \xi + \delta] \end{aligned}$$

*Auf* $[\xi - \delta; \xi + \delta]$ *definieren wir eine Treppenfunktion:*

$$\phi(x) := \begin{cases} c_e & \xi - \delta \leq x < \xi \\ f(\xi) & x = \xi \\ c_r & \xi + \delta \geq x > \xi \end{cases}$$

*Fall 1* $\implies$ $\phi$ *ist eine $\varepsilon$-approx. Treppenfunktion auf* $[\xi - \delta], [\delta + \delta]$*. Fall 2* $\implies$ $\phi$ *ist eine $\varepsilon$-approx. Treppenfunktion auf* $[\xi - \delta], [\delta + \delta]$*, alle* $I_n \subset [\xi + \delta; \xi + \delta]$
$\Psi$

**Beweis 4.** $\Leftarrow$ *f Regelfunktion* $\Leftarrow$ *f besitzt* $\varepsilon$*-approx. Treppenfunktion* $\forall \varepsilon > 0$. *Sei* $x_0 \in [a;b)$. *Zu zeigen:* $\exists \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \phi \in \tau[a;b] : \|f - \phi\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

*Sei* $\beta > x_0 : \phi$ *konstant auf* $(x_0, \beta)$

$$\begin{aligned} &\forall x, x' \in (x_0; \beta) \\ &|f(x) - f(x')| \leq && |f(x) - \phi(x)| + \left|\phi(x)^{(=\phi(x')} - f(x')\right| \\ &\leq && \|f - \phi\| + \|\phi - f\| < \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \beta$ : *Cauchyeigenschaft gilt auf* $(x_0; R) \implies \exists \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$. *Ähnlich:* $\exists \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \ \forall x_0 \in (a;b]$.

**Korollar 1.**

$$f \in R[a;b] \ \Leftrightarrow \ \exists Folge \Psi_b \in \tau[a;b] : \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k = f$$

*konvergiert konstant*

**Korollar 2.** *f Regelfunktion auf I* $\implies$ *f fast überall stetig. d.h.* $\exists A \subset I$ *s.d.*

- $f|_{I \setminus A}$ *stetig*
- *A höchstens abzählbar* $x \in [a;b]$

**Beweis 5.**

$$\begin{aligned} \Psi_k &\in \tau[I] \\ f = \sum &\phi_k normal \end{aligned}$$

*Ist* $\phi_k$ *stetig in* $x \forall k \implies f$ *stetig in* $x$.
*Ist x Unstetigkeitsstelle von f,* $\exists$*k:* $\phi_k$ *unstetig in x, höchstens abzählbare viele k.*

- *Eine Treppenfunktion hat endlich viele Unstetigkeitsstellen*

$\{$ *Unstetigkeitsstellen von f*$\}$ $\subset$ *(höchstens abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen)* $\implies$ *höchstens abzählbar*

$$I = \quad \overbrace{U_\alpha}^{\text{höchstens abzählbar}} \quad \overbrace{I_\alpha}^{\text{kompakt}}$$

**Satz 2.**

$$f \in R\left([a:b]\right) \implies f\, beschränkt\ auf [a;b]$$

**Beweis 6.**

$$\begin{aligned} &&& \varepsilon = 1 \\ &\exists \overbrace{\phi}^{\text{beschränkt}} && \in \tau\left([a;b]\right) : \|f - \phi\| \leq 1 \\ \implies \|f\| = \|f - \phi + \phi\| &\leq \|f - \phi\| + \|\phi\| =\leq 1 + \|\phi\| \end{aligned}$$

**Definition 4.** Integration von Regelfunktionen ... auch bekannt als "Regelintegral"
Sei $f \in R[a;b]$

$$\int_a^b f(x) f x : \lim_{n \to \infty} \int_a^b \phi_n(x) \,\mathrm{d}\, x$$

wobei $\phi_n$ eine approximierene Folge von Treppenfunktionen ist (d.h. $\|\phi_n - f\| \to 0$)

**zu zeigen:**

1. Die Folge $I_n := \int_a^b \phi_n(x)\,\mathrm{d}\,x$ konvergiert $\forall \, \|\phi_n - f\| \to 0$
2. Der Grenzwert ist von der Wahl der approximierenden Folge unabhängig

**Beweis 7.** *von 1*

$$|I_n - I_m| =^{Linearität} \left| \int_a^b (\phi_n(x) - \phi_m(x))\,\mathrm{d}\,x \right| \leq^{beschränkt} (b-a)\,\|\phi_n - \phi_m\|$$

$$\|\phi_n - f\| \to 0 \xRightarrow{Dreiecksungleichung} \forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \|\phi_n - \phi_m\| < \varepsilon \; \forall n, m > N$$

$\implies$ $I_n$ *Cauchyfolge* $\implies$ $I_n$ *konvergiert*

**Beweis 8.** *von 2 Seien* $\phi_n, \psi_n \in \tau[a;b]$

$$\|\phi_n - f\| \to 0$$
$$\|\psi_n - f\| \to 0$$

$$\{X_n\} = \psi_1, \phi_1, \psi_2, \phi_2, \psi_3, \phi_3, \cdots$$
$$X_n := \begin{cases} \phi_{\frac{n}{2}} & n gerade \\ \psi_{\frac{n+1}{2}} & n ungerade \end{cases}$$

$\implies$ $I_n(\phi)$ *und* $I_n(\psi)$ *Teilfolgen von* $I_n(X)$

$$\implies \|X_n - f\| \to 0$$
$$I_n(x) = \int x_n$$
$$I_n(\phi) = \int \phi_n$$
$$I_n(\psi) = \int \psi_n$$

$\implies$

$$\lim I_n(\phi) = \lim I_n(X) = \lim I_n(\psi)$$

**Beispiel 3.** Dirichlet eine Funktion, die keine Regelfunktion ist.

$$f : [0;1] \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f$ unstetig $\forall x$ intuitiv: $\int_0^1 f(x) f x = 0$

**Beispiel 4.** Riemann sog. modifizierte Dirichlet-Funktion

$$g : [0;1] \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p, q \text{teilerfremd}, q > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$g \in R[0;1]$ und $int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$

### 1.2.3 Eigenschaften

**Satz 3.**

$$\forall f, g \in R[a;b] \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} gelten$$

**Linearität**

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\, x = \alpha \int_a^b f \cdot \mathrm{d}\, x + \beta \int_a^b g \cdot \mathrm{d}\, x$$

**Beschränktheit**

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}\, x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}\, x \leq (b-a) \|f\|$$

**Monotonie**

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x \leq \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}\, x$$

*($f, g$ reellwertig $f(x) \leq g(x) \forall x$)*

**Satz 4.** *Additivität Sei $f \in R[a;b]$ und sei $c \in (a;b)$*

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_a^c f(x) \,\mathrm{d}\, x + \int_c^b f(x) \,\mathrm{d}\, x$$

**Beweis 9.** $f = \phi$ *Treppenfunktion trivial*

$$f = \lim \phi_n \ gleichmässig$$

$$\begin{aligned} \phi_n \in \tau[a;c] \phi_n^l &:= & \phi_n|_{[a;b]} \in \tau[a;b] \\ \phi_n^r &:= & \phi_n|_{[b;c]} \in \tau[b;c] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^c \phi_n(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_a^b \phi_n^l(x) \,\mathrm{d}\, x + \int_b^c \int_n^r (x) \,\mathrm{d}\, x \\ \|\phi_n - f\| \to 0 \\ \left\|\phi_n^l - f\right\|_{[a;b]} \leq \|\phi_n - f\| \geq \left\|\phi_b^+ f\right\|_{[b;c]} \end{aligned}$$

$$\implies \begin{array}{ccc} \int_a^c \phi_n(x) \,\mathrm{d}\, x = & \int_a^b \phi_n^l(x) \,\mathrm{d}\, x + & \int_b^c \int_n^r (x) \,\mathrm{d}\, x \\ = \int_a^c f \cdot \mathrm{d}\, x & = \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}\, x & = \int_b^c f(x) \,\mathrm{d}\, x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \phi_n^l &\to f|_{[a;b]} \\ \phi_n^r &\to f|_{[b;c]} \end{aligned}$$

**Definition 5.** $f \in R[a;b]$, $b > a$

$$\int_b^a f(x) \,\mathrm{d}\, x := \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x$$

$$\int_a^a f(x) \,\mathrm{d}\, x := 0$$

**Satz 5.** $f \in RI() : \forall a, b, c \in I$

$$\int_a^c f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x + \int_b^c f(x) \,\mathrm{d}\, x$$

*Bemerkung* 9. **Linearität**

**Beschränktheit** :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x\right| \leq |b-a|\,\|f\|$$

**Monotonie**

$$f \leq g; b > a$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

*Bemerkung* 10. $f$ stetig $([a;b]) \implies \|f\| = \max|f|$
reellwertig $\overset{\text{ZWS}}{\implies}$ $f$ nimmt alle Werte zwischen 0 und $\max|f|$

$$\exists \xi \in [a;b]:$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = (b-a)f(\xi)$$

**Satz 6.** *Mittelwertsatz Sei $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ <u>stetig</u>. Sei $p : [a;b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion mit $p \geq 0$. Dann $\exists \xi \in [a;b]$ s.d.*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}\,x = f(\xi)\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}\,x$$

*Falls $\int p \neq 0$*

$$\frac{\int f(x)p(x)\,\mathrm{d}\,x}{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} = f(\xi) = \int_a^b f(x)\tilde{p}(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$\tilde{p}(x) = \frac{p(x)}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}\,x}$$
$$\implies \int_a^b \tilde{p}(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$$

**Beweis 10.** *$f$ besitzt ein Maximum $M$ und ein Minimum $m$*

$$m \leq f(x) \leq M \;\forall x \in [a;b]$$
$$mp(x) \leq f(x)p(x) \leq Mp(x)$$

$\overset{\text{Monotonie}}{\implies}$

$$\int_a^b mp(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \qquad int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}\,x \leq \qquad \int_a^b Mp(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$= m\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad\qquad = M\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$\implies \exists \mu \in [m;M]$:

$$\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}\,x = \mu\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}\,x$$

*ZWS* $\implies \exists \xi \in [a;b]$:

$$\mu = f(\xi)$$

**Satz 7.** *Sei $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion mit $f \geq 0$ und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = 0$. Dann ist $f(x_0) = 0$ an jeder Stetigkeitsstelle $x_0$. Ferner gilt: $f = 0$ fast überall.*

**Beweis 11.** *(Widerspruchsbeweis) Sei $x_0$ eine Stetigkeitsstelle mit $f(x_0) > 0$. $f$ stetig in $x_0 \implies \exists x_0 \in [a:b] \subset [a:b]$ s.d.*

$$f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) \ \forall x \in [\alpha:\beta]$$

*Sei*

$$\phi(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} f(x_0) & x \in [\alpha;\beta] \\ 0 & x \notin [\alpha;\beta] \end{cases}$$

*Treppenfunktion, deshalb Regelfunktion*

$$\implies f \geq \phi \implies \underbrace{\int_\alpha^\beta f(x) \,\mathrm{d}\, x}_{=0} \geq \int_\alpha^\beta \phi(x) \,\mathrm{d}\, x = \frac{\beta - \alpha}{2} f(x_0) > 0$$

$\Psi$

**Satz 8.** *$f$ Regelfunktion $\implies f$ besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen $\implies f = 0$ fast überall*

**Korollar 3.** *$f : [a;b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f \geq 0$, $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x = 0 \implies$*

$$f(x) = 0 \ \forall x \in [a;b]$$

## 1.3 Fundamentalsatz der Analysis

**Satz 9.** *Sei $f : I \to \mathbb{C}$ Regelfunktion und sei $a \in I$. Für jedes $x \in I$ definiert man*

$$F(x) := \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}\, t \ F : I \to \mathbb{C}$$

*Dann ist $F$ eine Stammfunktion zu $f$ (d.h. $F$ ist stetig und fast überall differenzierbar (und $F' = f$ fast überall)) mit*

$$F'_+(x_0) = f_+(x_0)$$
$$F'_-(x_0) = f_-(x_0)$$

$\forall x_0 \in I$

**Beweis 12.** *$\forall x_1, x_2 \in I$ gilt*

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t) \,\mathrm{d}\, t - int_a^{x_1} f(t) \,\mathrm{d}\, t =$$
$$= \int_a^{x_2} + \int_{x_1}^a = \int_{x_1}^{x_2} f(t) \,\mathrm{d}\, t$$

*Sei $\tau \subset I$ Teilintervall. $\forall x_1, x_2 \in \tau$*

$$|f(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) \,\mathrm{d}\, t \right| \leq^{\text{Bijektivität}} |x_2 - x_1| \, \|f\|_\tau$$

*$\implies F|_\tau$ Lipschitz-stetig $\implies F|_\tau$ stetig $\forall \tau \implies$ <u>$F$ stetig auf $I$.</u>*
*Wir berechnen $F'_+(x_0)$. $f$ Regelfunktion $\implies \exists f_+(x_0)$. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$*

$$|f(x) - f_+(x_0)| < \varepsilon \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

*Für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$*

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f_+(x_0) \right| =$$
$$\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) \,\mathrm{d}\, t - \frac{f_+(x_0)}{x - x_0} \int_{x_0}^x < Fehltdanichtwas? > \mathrm{d}\, t \right| =$$
$$\left| \frac{1}{x - x_0} \right| \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f_+(x_0)) \,\mathrm{d}\, t \leq \right.$$
$$\frac{1}{|x - x_0|} |x - x_0| \, \|f(x) - f_+(x_0)\|_{x_0;x} \leq \varepsilon$$

**Korollar 4.** *Sei $f : I \to \mathbb{C}$ Regelfunktion und sei $\Phi$ eine Stammfunktion zu $f$. Dann $\forall a, b \in I$*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi|_a^b$$

**Beweis 13.** *$\Phi$ und $F$ sind Stammfunktionen zu $f$, insbesondere $\Phi' = F'$ fast überall. Eindeutigkeitssatz $\implies \exists c$ konstant s.d.*

$$\Phi(x) = F(x) + c\ \forall x \in I$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) = F(b) - \underbrace{F(a)}_{=0} =$$
$$= (\Phi(b) - c) - (\Phi(a) - c) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

**Korollar 5.** *Jede Regelfunktion beseitzt eine Stammfunktion*

**Definition 6.** Eine Funktion heisst fast überall stetig differenzierbar, wenn sie die Stammfunktion zu einer Regelfunktion ist. (Wo sie nicht stetig differenzierbar ist, besitzt sie linke und Rechte Grenzwerte)

**Beispiel 5.**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

$f$ ist in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar. $f'$ besitzt linke und rechte Grenzwerte, in 0 nicht. Also keine Regelfunktion.

*Bemerkung* 11. Mit dem Lebesgne-Integral kann man solche Funktionen aus einem Integral erhalten.

*Eigenschaften* 1. Charakterisierung $f$ fast überall stetig differenzierbar auf $I$ $\implies \exists A \subset I$, $A$ höchstens abzählbar s.d.

1. $f$ ist auf $I \setminus A$ differenzierbar
2. $f'$ ist auf $I \setminus A$ stetig
3. $\forall x \in A$ existieren $f'_+(x)$ und $f'_-(x)$

**Definition 7.** unbestimmtes Integral Das unbestimmte Integral der Regelfunktion $f$ ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu $f$.

*Notation* 1. unbestimmtes Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

In Tabellen wird oft

$$\int x\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^2}{2}$$

geschrieben

**Beispiel 6.**

$$\int x\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^2}{2} + C$$

*Eigenschaften* 2.

$$\int x^a \,\mathrm{d}\,x = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$$
$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\,x = \ln|x|$$
$$\int e^{cx} \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{c} e^{cx}, \ c \neq 0$$
$$\int \sin x \cdot \mathrm{d}\,x = -\cos x$$
$$\int \cos x \cdot \mathrm{d}\,x = \sin x$$

**Satz 10.** *Seien $f_1$ und $f_2$ Regelfunktionen auf $I$*

$$f_1 = f_2 f.ü. \implies \int f_1 \,\mathrm{d}\,x = \int f_2 \,\mathrm{d}\,x$$

*Insbesondere $\forall a, b \in I$*

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f_2(x) \,\mathrm{d}\,x$$

**Beweis 14.** *Sei $F_1$ / $F_2$ Stammfunktion zu $f_1$ / $f_2$*

$$\implies F_1' = F_2' \ f.ü.$$
$$\implies F_1 = F_2 + C$$

*Bemerkung* 12. Anwendung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p, q \text{teilerfremd} \\ 0 & x \neq \mathbb{Q} \end{cases}$$
$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\,x = 0$$

**Definition 8.** Sit $f$ eine fast überall differenzierbare Funktion, so bezeichnet $f'$ irgendeine Regelfunktion, die fast überall gleich zur Ableitung von $f$ ist.

**Satz 11.** *Hauptsatz Sei $f$ eine fast überall stetig differenzierbare Funktion auf $I$. Dann*

$$\int f'(x) \,\mathrm{d}\,x = f$$
$$\int_a^b f'(x) = f(b) - f(a) \ a, b \in I$$

*Notation* 2. Leibnitz-Notation

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}\,x = f$$
$$\int df = f$$
$$\int_a^b df = \Delta F := f(b) - f(a)$$

## 1.4 Integrationstechniken

*Eigenschaften* 3. Integrationstechniken

1. Linearität
2. Partielle Integration
3. Substutionsregel

### 1.4.1 Partielle Integration

**Satz 12.** *Seien $U$ und $V$ fast überall stetig differenzierbar Funktionen auf $I$, so ist auch $UV$ fast überall stetig differenzierbar und*

$$\int uv' \,\mathrm{d}\, x = uv - \int u'v \,\mathrm{d}\, x$$
$$\int_a^b uv' \,\mathrm{d}\, x = (uv)|_a^b - \int_a^b u'v \,\mathrm{d}\, x$$

**Beweis 15.** *$u, v$ stetig und $u, v$ Regelfunktionen $\implies$ $u'v + uv'$ Regelfunktion. Fast überall: $u'v + uv' = (uv)'$ Kettenregel.*

$$\int (u'v + uv') \,\mathrm{d}\, x = \int (uv)' \,\mathrm{d}\, x = uv$$

**Beispiel 7.**

$$\int \ln x \,\mathrm{d}\, x = \int 1 \cdot \ln x \,\mathrm{d}\, x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} \ln x \,\mathrm{d}\, x =$$
$$= x \ln x - \int x \frac{\mathrm{d} \ln x}{\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}\, x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x = x \ln x - x$$

**Beispiel 8.**

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}\, x = \int \cos x \cdot \cos x \,\mathrm{d}\, x = \int (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x) \cos x \,\mathrm{d}\, x =$$
$$= \sin x \cos x - \int \sin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x \,\mathrm{d}\, x = \sin x \cos x + \int \sin^2 x$$
$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) \,\mathrm{d}\, x = \sin x \cos x$$
$$\int (\cos^2 x + \sin^2 x) \,\mathrm{d}\, x = x$$
$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}\, x = \frac{\sin x \cos x + x}{2}$$

**Beispiel 9.**

$$\int \sqrt{1+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} \sqrt{1+x^2} \,\mathrm{d}\, x = x\sqrt{1+x^2} - \int x \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}\, x =$$
$$= x\sqrt{1+x^2} \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}\, x + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} \,\mathrm{d}\, x + \operatorname{arcsinh} x$$
$$\int \sqrt{1+x^2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsinh} x}{2}$$

### 1.4.2 Substitutionsregel

**Satz 13.** *Substitutionsregel Sei $f$ Regelfunktion auf $I$, $F$ eine Stammfunktion zu $f$, $t : [a; b] \to I$ stetig differenzierbar und streng monoton. Dann ist $F \circ t$ eine Stammfunktion zu*

$$(f \circ t)t' \text{ auf } [a; b]$$

*und*

$$\int_a^b f(t(x))t'(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_{t(a)}^{t(b)} f(t) \,\mathrm{d}\, t$$
$$(I = [t(a); t(b)] \text{ oder } [t(b); t(a)])$$

*Notation* 3.

$$f \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}\, x = \int f \,\mathrm{d}\, t$$

**Beweis 16.** *Kettenregel:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F \circ t) = (F' \circ t)t' \overset{f.ü.}{=} (f \circ t)t'$$

$$\int_a^b f(t(x))t'(x) \,\mathrm{d}\, x = int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F \circ t) \,\mathrm{d}\, x = F \circ t|_a^b = F(t(b)) - F(t(a))$$

$$\int_{t(a)}^{t(b)} f(t) \,\mathrm{d}\, t = F|_{t(a)}^{t(b)} = F(t(b)) - F(t(a))$$

**Beispiel 10.**

$$\int_a^b f(x+c) \,\mathrm{d}\, x \overset{t(x)=x+c}{=} \int_a^b f(x+c)t' \,\mathrm{d}\, x =$$

$$= \int_{a+c}^{b+c} f(t) \,\mathrm{d}\, t$$

**Beispiel 11.**

$$\int_a^b f(cx) \,\mathrm{d}\, x \overset{t(x)=cx}{=} \frac{1}{c} \int_a^b f(cx)t' \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{c} \int^{cb} caf(t) \,\mathrm{d}\, t$$

$c = -1$

$$\int_a^b f(-x) \,\mathrm{d}\, x = -\int_{-a}^{-b} f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_{-b}^{-a} f(x) \,\mathrm{d}\, x$$

**Korollar 6.**

$$f(-x) = -f(x)$$

$$\int_{-a}^{a} f(x) = 0$$

**Beweis 17.**

$$\int_{-a}^{a} f(-x) \,\mathrm{d}\, x = -\int_{-a}^{a} f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int_{-a}^{a} f(x) \,\mathrm{d}\, x$$

**Beispiel 12.**

$$\int \frac{t'(x)}{t(x)} \,\mathrm{d}\, x \overset{f=\frac{1}{t}}{=} \int f(t) \,\mathrm{d}\, t =$$

$$= \int \frac{1}{t} \,\mathrm{d}\, t = \ln|t|$$

### 1.4.3 Rationale Funktionen

→ Pratialbruchzerlegung

$$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{x+a} = \ln|x+a|$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+2bx+c} \,\mathrm{d}\, x = \cdots$$

Wobei $x^2 + 2bx + c$ keine reelen Lösungen ergeben darf.

**Satz 14.** *Eine rationale Funktion kann man mittels rationaler Funktionen, des Logarithmus sowie des Arcustangens integrieren.*

## 1.5 Reihenintegration

**Satz 15.** *Sei $f_n$ eine Folge Regelfunktionen auf $[a;b]$. Konvergiert die Reihe $\sum f_n$ normal, so ist*

$$f : \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

*eine Regelfunktion und*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$(\int \sum = \sum \int)$$

*Insbesondere gilt der Satz für Potenzreichen in ihren Konvergenzintervallen.*

**Beweis 18.** $\forall \varepsilon > 0 \exists N$:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall p \geq N$

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{p} f_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$f_n$ Regelfunktion $\implies$ $\sum_{n=1}^{p} f_n$ Regelfunktion $\implies$ $\exists$ Treppenfunktion $\phi$ mit

$$\left\| \sum_{n=1}^{p} f_n - \phi \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\implies$

$$\|f - \phi\| \leq \left\| f - \sum_{n=1}^{p} f_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{p} f_n - \phi \right\| < \varepsilon$$

$\implies$ $f$ Regelfunktion

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x - \sum_{n=1}^{p} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}\,x \right| &\leq \\
\leq \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^{p} f_n(x) \right| \mathrm{d}\,x &\leq \\
\leq |b-a| \left\| f - \sum_{n=1}^{p} f_n \right\| &< \\
< |b-a| \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

**Beispiel 13.**

$$\begin{aligned}
\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}\,t &\overset{|x|<1}{=} \\
\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

## 1.6 Reimannsche Summen

- alte Definition des Regelintegrals (äquivalent)
- Approximationstechnik
- Man kann Resultate über Summen erweitern (z.B. Höldersche Ungleichung, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

**Definition 9.** Zerlegung $[a;b]$ kompates Intervall
Eine Zerlegung von $[a;b]$ ist die Wahl $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ s.d.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} x_n = b$$

*Notation* 4. $Z := \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$

**Definition 10.** Feinheit der Zerlegung

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$$

Die Feinheit der Zerlegung ist $\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$

**Definition 11.** Die Riemannsche Summe von $f$ bezüglich der Zerlegung $Z$ und der Wahl von Stützstellen $\xi =: (\xi_1, \cdots, x_n)$

$$\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$$

ist die Summe

$$S(f; Z; \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k$$

**Satz 16.** *Sei $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ eine Regelfunktion. Dann gilt folgendes:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$$

*sd. für jede Zerlegung $Z$ der Feinheit $\leq \delta$ und für jede Wahl Stützstellen $\xi$ gilt*

$$\left| S(f; Z; \xi) - \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\, x \right| < \varepsilon$$

**Beweis 19.** *(Idee)*

1. *Satz gilt, falls $f$ eine Treppenfunktion ist. Beweis durch Indunktion nach der Anzahl Sprungstellen*
2. *$\exists \phi$ Treppenfunktion s.d.*

$$\|f - \phi\| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

*1) $\implies \exists Z, \xi$*

$$\left| S(\phi; Z; \xi) - \int_a^b \phi(x)\, \mathrm{d}\, x \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

*3-Ecks Ungleichung*

**Korollar 7.** *Sei $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ Regelfunktion. Sei $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ Folge Zerlegungen von $[a;b]$ mit Feinheit $(Z_n) \to 0$. Für jede Wahl Stützstellen $\xi_m$ aus $Z_n$*

$$\lim_{n \to \infty} S(f; Z_n; \xi_m) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\, x$$

**Definition 12.** $p$-Norm Seu $f[a;b] \to \mathbb{C}$ Regelfunktion. Die $p$-Norm von $f$ (mit $p \geq 1$)

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\, \mathrm{d}\, x}$$

**Satz 17.** *Seien $f, g : [a; b] \to \mathbb{C}$ Regelfunktionen. Seien $p, q \geq 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann haben wir*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}\, x \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

*Höldersche Ungleichung*
*Spezialfall: $p = q = 2$ Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

**Beweis 20.** *(Idee)*

1. *Man approximiert die 3 Integrale durch Riemannsche Summen*
2. *Man benützt die Höldersche Ungleichung für Summen*
3. *Man nimmt die Grenzwerte*

## 1.7 Das uneigentliche Integral

**Satz 18.** *Seien $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$*

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty$$

*Sei $I$ ein Intervall mit Randwerten $a$ und $b$ (z.B. $I = [a; b]$, $I = [a; b)$). Sei $f$ eine Regelfunktion auf $I$. Wir wollen $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x$ definieren, wenn möglich.*

**Fall 0**

$$a, b \in \mathbb{R},\ I = [a; b]$$

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x \mathit{Regelintegral}$$

**Fall 1**

$$b \in \bar{\mathbb{R}},\ I = [a; b)$$

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x = \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x) \,\mathrm{d}\, x$$

*Falls der Grenzwert existiert.*

**Fall 2**

$$a \in \bar{\mathbb{R}}, b \in \mathbb{R}, b > a, I = (a; b]$$

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x = \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^b f(x) \,\mathrm{d}\, x$$

*Falls der Grenzwert existiert.*

**Fall 3**

$$a, b \in \bar{\mathbb{R}}, a < b, I = (a; b)$$

$$\int_a^b F(x) \,\mathrm{d}\, x := \overbrace{\int_a^c f(x) \,\mathrm{d}\, x}^{\mathit{Fall\ 2}} + \overbrace{\int_c^b f(x) \,\mathrm{d}\, x}^{\mathit{Fall\ 1}}$$

*Sei $c \in (a; b)$ falls beide Integrale auf der rechten Seite existieren!*

**Definition 13.** Wert eines Integrals Existiert das uneigentliche Integral von $f$, so heisst $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x$ <u>konvergent</u> so heisst der Grenzwert <u>Wert</u> des Integrals

**Definition 14.** absolut konvergentes Integral Konvergiert das Integral von $|f|$, so heisst das Integrals <u>absolut konvergent</u>

**Beispiel 14.** $I = (0; +\infty)$

$$F_s(x) := \int \frac{1}{x^s} \, \mathrm{d}\, x = \begin{cases} \ln x & s = 1 \\ \frac{x^{1-s}}{1-s} & s \neq 1 \end{cases}$$

$$F_s(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0 \;\Leftrightarrow\; s > 1, \text{divergiert sonst}$$

$$F_s(x) \xrightarrow{x \to 0} 0 \;\Leftrightarrow\; s < 1, \text{divergiert sonst}$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^s} \, \mathrm{d}\, x$$

existiert genau dann, wenn $a > 0$ und $s > 1$ und hat den Wert $\frac{a^{1-s}}{s-1}$

$$\int_0^a \frac{1}{x^s} \, \mathrm{d}\, x$$

existiert genau dann, wenn $s < 1$ und hat den Wert $\frac{a^{1-s}}{1-s}$

**Beispiel 15.** $e^{-x} \in R(\mathbb{R})$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \, \mathrm{d}\, x = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a e^{-x} \, \mathrm{d}\, x =$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \left(e^{-x}\right)|_0^a = \lim_{a \to +\infty} \left[-e^{-a} + e^0\right] = 1$$

**Beispiel 16.** $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \in R(\mathbb{R})$

$$\int f(x) \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$$

divergiert $x \to \pm\infty$. Deshalb existieren

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}\, x \text{ und } \int_{-\infty}^0 f(x) \, \mathrm{d}\, x$$

nicht. Aber:

$$\int_{-R}^{R} f(x) \, \mathrm{d}\, x = 0$$

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x) \, \mathrm{d}\, x = 0$$

**Beispiel 17.** Sei $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Sei $f = F' \in R(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ aber keine Regelfunktion auf $\mathbb{R}$ $x >$

$$\int_0^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}\, x = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{x} f(x) \, \mathrm{d}\, x =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(x)|_{\varepsilon}^{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(F(x) - F(\varepsilon)\right) = F(x)$$

## 1.8 Majorantenkriterium

**Satz 19.** *Majorantenkriterium Seien $f$ und $g$ Regelfunktionen $[a; b)$ mit $|f| \leq g$. Existiert $\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}\, x$, so existiert auch $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}\, x$*

**Beweis 21.** *Sei*

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}\,x \\ G(u) &= \int_a^u g(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &\forall u, v \in [a; b) \\ |F(u) - F(v)| = \left|\int_b^u f(x)\,\mathrm{d}\,x\right| &\leq |f_v^u\,|f(x)|\,\mathrm{d}\,x| \leq \\ \leq \left|\int_v^u g(x)\,\mathrm{d}\,x\right| &= |G(u) - G(v)| \end{aligned}$$

*$G(u)$ $u \to 0$ existiert $\implies$ $G$ erfüllt das Cauchykriterium. $\implies$ $F$ erfüöllt das Cauchykriterium $\implies$ $\lim_{n\to b} F(u)$ existiert*

# 2 Kurven (Kapitel 12)

$$\begin{aligned} \gamma : I \to & \qquad \mathbb{R}^n \\ \gamma : t \mapsto & \qquad (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \cdots, x_n(t)) \end{aligned}$$

$x_i : I \to \mathbb{R}$ Komponentenfunktionen

**Definition 15.** parametrisierte Kurve Eine parametrisierte Kurve (kurz: Kurve) ist eine Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, deren Komponentenfunktionen stetig sind.

**Definition 16.** differenzierbare Kurve Eine Kurve heisst differenzierbar, wenn jede Komponentenfunktion differenzierbar ist. Analog für stetig differenzierbar.

**Definition 17.** Spur Das Bild $\gamma(I) \in \mathbb{R}^n$ heisst die Spur von $\gamma$.

$$\mathrm{Spur}(\gamma)$$

*Bemerkung* 13. Eine Kurve ist eine Abbildung und ihre Spur ist eine Teilmenge

**Beispiel 18.** Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \gamma_k :& \mathbb{R} \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \\ & t \mapsto e^{ikt} \end{aligned}$$

$|\gamma(t)| = 1\ \forall t$ $\mathrm{Spur}\,\gamma_k = S^1$ $k > 0$: Gegenuhrzeigersinn
$k < 0$: Uhrzeigersinn

**Beispiel 19.** Schraubenlinie $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto (r\cos t, r\sin t, ht)$$

**Definition 18.** Tangentialvektor einer Kurve Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar.

$$\dot\gamma := (\dot x_1(t), \dot x_2(t), \dots)$$

$\dot\gamma$ heisst der Tangentialvektor oder Geschwindigkeitsvektor zur Stelle $t$.

**Definition 19.** Geschwindigkeit einer Kurve $\|\dot\gamma(t)\|$ heisst Geschwindigkeit. Der Geschwindigkeitsvektor hängt vom Parameter ab, nicht von der Stelle in $\mathbb{R}^n$.

**Definition 20.** reguläre Kurve Eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heisst regulär an der Stelle $t_0 \in I$, wenn $\dot\gamma(t_0) \neq 0$. Sie heisst regulär, wenn sie an allen STellen regulär ist.

**Beispiel 20.** $\gamma(t) = (t^3, t^3), t \in \mathbb{R}$ $\mathrm{Spur}\,\gamma = (y = x)$ $\dot\gamma(t) = (3t^2, 3t^2)$ $\dot\gamma = (0, 0)$ nicht regulär! Aber der Punkt $(0, 0)$ ist nicht singulär.

**Definition 21.** Tangentialeinheitsvektor Ist $\gamma$ an der Stelle $t_0$ regulär, so definiert man

$$T\gamma(t_0) := \frac{\dot{\gamma}(t_0)}{\|\dot{\gamma}(t_0)\|}$$

als Tangentialeinheitsvektor. $\|T_\gamma\| = 1$

**Definition 22.** Parametrisierte Kurve Sei $f : J \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Der parametrisierte Graph von $f$ ist die Kurve

$$\begin{aligned}\gamma_f :& J \to \mathbb{R}^2\\ & t \mapsto (t, f(t))\end{aligned}$$

$\operatorname{Spur}(\gamma_f) = \operatorname{Graph}(f)$

$$\dot{\gamma_f}(t) = (1, f'(t)) \neq 0 \ \forall t$$

*Eigenschaften* 4. parametrisierter Graph Ein parametrisierter Graph ist regulär

**Satz 20.** *Sei* $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$*,* $t \mapsto (x(t), y(t))$ *stetig differenzierbar. Wenn* $\dot{x}(t)$ *keine Nullstennen hat, gibt es eine stetig differenzierbare Funktion*

$$f : J \to \mathbb{R}^2$$

*wobei*

$$J := x(I)$$

*s.d.*

$$\operatorname{Graph} f = \operatorname{Spur} \gamma$$

*Bemerkung* 14. $\dot{y} \neq 0 \rightsquigarrow$ Graph von $x(y)$

**Satz 21.** *Sei* $t_0 \in I$*,* $x_0 := x(t_0)$

$$f'(x_0) = \frac{\dot{y(t_0)}}{\dot{x}(t_0)}$$

$$y = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

*Ist* $\gamma$ *w-mal stetig differenzierbar, so ist es* $f$ *auch und*

$$f'' \underbrace{(x_0)}_{=x(x_0)} \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

**Beweis 22.** $\dot{x} \neq 0 \implies$ *$x(t)$ streng monoton* $\implies$ *invertierbar.* $\exists$ *Umkehrabbildung*

$$\begin{aligned}\tau : J \to I\\ \tau(x(t)) = t \ \forall t\end{aligned}$$

*stetig differenzierbar*

$$\tau = \frac{1}{\dot{x}}$$

$$\begin{aligned}\gamma(t) = (x(t), y(t)) &= (x(t), y(\tau(x(t))))\\ &= (x(t), (y \circ \tau)(x(t)))\\ &= (x(t), f(x(t)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &:= y \circ \tau \\ \gamma_f &: x \mapsto (x, f(x)) \\ \operatorname{Spur} \gamma = \operatorname{Spur} \gamma_f &= \operatorname{Graph} f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \dot{y}t(t_0)\tau'(x_0) = \dot{y}(t_0)\frac{1}{\dot{x}(t_0)} \\ f'' &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dot{y}\right)\frac{1}{\dot{x}} + \dot{y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\dot{x}}\right) = \\ &= (\ddot{y}\tau')\frac{1}{\dot{x}} + \dot{y}\left(-\frac{1}{\dot{x}^2}\ddot{x}\tau'\right) = \\ &= \ddot{y}\frac{1}{\dot{x}}\frac{1}{\dot{x}} - \dot{y}\frac{1}{\dot{x}^2}\ddot{x}\frac{1}{\dot{x}} = \\ &= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} \end{aligned}$$

*Eigenschaften* 5.

$$\begin{aligned} & \dot{x} \neq 0 \rightsquigarrow y = f(x) \\ & \dot{y} \neq 0 \rightsquigarrow x = g(y) \\ \gamma \text{regulär} \implies & \forall t \exists \text{Umgebung } I \text{ von } t \text{ s.d.} \\ & \dot{x}(\tau) \neq 0 \ \forall \tau \in I \\ & \dot{y}(\tau) \neq 0 \ \forall \tau \in I \end{aligned}$$

## 2.1 Die Bogenlänge

**Definition 23.** Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$. Sei $Z = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ $t_i \in I$ $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ Länge des Sehnenpolygons.

$$S(Z) := \sum_{i=1}^{m} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Gilt $Z^* \supset Z$, dann $S(Z^*) \geq S(Z)$

$$Z_1 \subset Z^*, Z_2 \subset Z^* \implies S(Z^*) \geq \max\left(S(Z_1), S(Z_2)\right)$$

Idee: $s(\gamma) := \sup_Z S(2)$

**Definition 24.** rektifizierbare Kurve Eine Kurve $\gamma$ heisst rektifizierbar, wenn die Menge der Längen aller einbeschriebenen Sehnenpolygone beschränkt ist.

**Satz 22.** *Sei $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^n$ fast überall stetig differenzierbar, (d.h. jede Komponente ist fast überall stetig differenzierbar). Dann ist $\gamma$ rektifizierbar (1) und*

$$s(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}\, t \geq 0 \tag{2}$$

*Bemerkung* 15. Ist $\gamma_f$ der pramametrisierte Graph von $f$

$$\gamma_f(t) = (t, f(t))$$

so ist

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_f(t) &= (1, f'(t)) \\ \|\dot{\gamma}_f\| &= \sqrt{1 + f'^2} \\ s(\gamma_f) &= \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)} \,\mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

*Notation* 5. Sei $f = (f_1, \cdots, f_n)$ ein $n$-Tupel Funktionen

$$\int f(x) \,\mathrm{d}\, x := \left(\int f_1 \,\mathrm{d}\, x, \int f_2 \,\mathrm{d}\, x, \cdots, \int f_n \,\mathrm{d}\, x\right)$$

**Lemma 3.**

$$\left\| \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| \,\mathrm{d}\, x$$

*Beweis*

1. *Lemma gilt für Treppenfunktionen*
2. *Approximationssazu*

**Beweis 23.** *Sei* $Z = (t_0, \cdots, t_m)$ *eine Zerlegung von* $[a; b]$

$$\begin{aligned} S(Z) &= \sum_{i=1}^{m} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}\| \\ &= \sum \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) \,\mathrm{d}\, t \right\| \\ &\overset{Lemma}{\leq} \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}\| \,\mathrm{d}\, t \\ &= \int_a^b \|\dot{\gamma}\| \,\mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

*(*$\|\dot{\gamma}\|$ *ist eine Regelfunktion) Diese Abschätzung gilt für alle Zerlegungen.* $\Longrightarrow$ $\gamma$ *rektifizierbar.*

$$s(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}\| \,\mathrm{d}\, t$$

*= für (2)*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists Z : S(Z) \geq f(\|\dot{\gamma}\| - \varepsilon$$

*Treppenfunktionen + Approximationssatz*

**Beispiel 21.** Länge des Kreisbogens

$$\begin{aligned} \gamma : &[0, \phi] \to \mathbb{R}^2 \\ &t \mapsto (r \cos t, r \sin t) = \gamma(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= (-r \sin t, r \cos t) \\ \|\dot{\gamma}(t)\|^2 &= r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t = r^2 \\ s(\gamma) &= \int_0^\phi r \,\mathrm{d}\, t = rt|_0^\phi = r\phi \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} \gamma : &[a; r] \to \mathbb{R}^2 \\ &x \mapsto \left( x, \sqrt{r^2 - x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &:= r \cos \phi \\ s(\gamma) &= \int_a^r \sqrt{1 + f'^2} \,\mathrm{d}\, x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + f'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} == \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} &= r \int_a^r \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ \xi = \frac{x}{r} = r \int_{\frac{a}{r}}^1 \frac{r \,\mathrm{d}\, \xi}{\sqrt{r^2 - r^2 \xi^2}} &= r \int_{\frac{a}{r}}^1 \frac{\mathrm{d}\, \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \\ = -r \arccos \xi|_{\frac{1}{r}}^1 = -r(\arccos 1 - \arccos \cos \phi) &= r\phi \end{aligned}$$

## 2.2 Parameterwechsel

**Definition 25.** $C^k$-Parametertransformation Sei $k = 0, 1, 2, \cdots, \infty$. Eine Abbildung $\sigma : I \to J$ heisst $C^k$-Parametertransforumation, wenn

1. $\sigma \in C^k(I; J)$
2. $\sigma$ ist umkehrbar
3. $\sigma^{-1} \in C^k(J; I)$

Sei

$$\begin{aligned} \gamma :& I \to \mathbb{R}^n \\ \underbrace{\beta}_{\gamma\circ\sigma^{-1}} :& J \to \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

**Beispiel 22.** Gegenbeispiel

$$\begin{aligned} \sigma :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto& x^3 \end{aligned}$$

$\sigma$ umkehrbar, $\sigma \in C^1$. $\sigma \notin C^1$ $\sigma$ ist eine $C^0$-Paramentertransformation, aber keine $C^0$-Parametertransforumation.

**Definition 26.** Umparametrisierung Sei

$$\begin{aligned} \gamma :& I \to \mathbb{R}^n \\ \underbrace{\beta}_{\gamma\circ\sigma^{-1}} :& J \to \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Ist $\gamma$ $C^k$-Kurve, $\sigma$ $C^k$ Parametertransformation, dann $\beta$ $C^k$-Kurve. $\beta$ heisst due Umparametrisierung von $\gamma$ mittels $\sigma$.

*Notation* 6.

$$\gamma : \underbrace{I}_{t\in} to \underbrace{\Sigma}_{\sigma\in}$$

**Beispiel 23.**

$$\begin{aligned} \gamma :& [0; \phi] \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto& (r\cos t, r\sin t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma :& [0; \phi] \to [a; 1] \\ t \mapsto& r\cos t =: x \end{aligned}$$

$$\beta(x) = \left(x; \sqrt{r^2 - x^2}\right)$$

orientierungsumkehrend

**Definition 27.** orientierungstreu/-umkehrend Eine Parametertransformation $\sigma : I \to J$ heisst orientierungstreu ($\dot{\sigma} > 0$), wenn sie streng monoton wächst oder orientierungsumkehrend,($\dot{\sigma} < 0$) wenn sie streng monoton fällt.

*Bemerkung* 16. Ist $\gamma$ reklifizierbar, so ist $\beta = \gamma \circ \sigma^{-1}$ und $S(\gamma) = S(\beta)$

**Beweis 24.** $S(0) = \sup S(2)$ *das hängt von der Parametrisierung nicht ab.*

**Beweis 25.**

$$
\begin{aligned}
S(\gamma) \int_a^b \|\dot{\gamma}\| \,\mathrm{d}\, t \\
\dot{\beta} = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\sigma}} \\
\sigma : [a;b] \to [c;d] \\
\int_a^b \|\dot{\gamma}\| \,\mathrm{d}\, t = \int_c^d \left\|\dot{\Gamma}\right\| \frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\dot{\sigma}} = \\
\begin{cases} \int_c^d \left\|\dot{\beta}\right\| \mathrm{d}\,\sigma & \dot{\sigma} > 0 (c > d) \\ -\int_c^d \left\|\dot{\beta}\right\| \mathrm{d}\,\sigma & \dot{\sigma} < 0 (|\dot{\sigma}| = -\dot{\sigma})(d > c) \end{cases} \\
\begin{cases} \int_c^d \left\|\dot{\beta}\right\| \mathrm{d}\,\sigma & \dot{\sigma} > 0 (c > d) \\ \int_d^c \left\|\dot{\beta}\right\| \mathrm{d}\,\sigma & \dot{\sigma} < 0 (|\dot{\sigma}| = -\dot{\sigma})(d > c) \end{cases} \\
= S(\beta)
\end{aligned}
$$

**Definition 28.** Umorientierung

$$
\begin{aligned}
\sigma :& [a;b] \mapsto [-a;-b] \\
& t \mapsto -t
\end{aligned}
$$

*Notation* 7.

$$
\begin{aligned}
\gamma &: [a;b] \to \mathbb{R}^n \\
\gamma^- &: [-a;-b] \to \mathbb{R}^n \\
\gamma^-(t) &:= \gamma(-t)
\end{aligned}
$$

**Definition 29.** Umparametrisierung auf Bogenlänge Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ regulär und fast überall stetig differenzierbar. Sei $t_0 \in I$

$$
S(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| \,\mathrm{d}\,\tau, t \in I
$$

$$
\begin{aligned}
S : I \to J = S(I) \\
\dot{S}(T) = \|\dot{\varphi}(t)\| > 0
\end{aligned}
$$

$\implies$ $s$ orientierungstreu.

$$
\begin{aligned}
\beta := \gamma \circ s^{-1} \\
\beta'(s) = \dot{\gamma}(t(s)) \frac{1}{\ldots(t(s))} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}(t(s)) \\
\|\beta'(s)\| = 1 \; \forall s \in J
\end{aligned}
$$

## 2.3 Sektorfläche einer ebenen Kurve

**Definition 30.** Sektorfläche $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$. $F_i$ = orientierte Fläche des $i$-ten Dreiecks.

$$
F(Z) := \sum_i F_i
$$

**Lemma 4.** *Seien $(0,0), (x,y), (\tilde{x}, \tilde{y})$ die Ecken eines Dreiecks in $\mathbb{R}^2$. Die orientierte Fläche des Dreiecks ist*

$$
\begin{aligned}
F = \frac{1}{2} (x\tilde{y} - \tilde{x}y) \\
= (x,y) \times (\tilde{x}, \tilde{y}) \\
= \det \begin{pmatrix} x & \tilde{x} \\ y & \tilde{y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & y \\ \tilde{x} & y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

**Beweis 26.**

$$\begin{aligned}\rho &:= \|(x,y)\| \\ \tilde{\rho} &:= \|(\tilde{x},\tilde{y})\| \\ F &= \frac{1}{2}\rho h \\ h &= \tilde{\rho}\sin\psi \\ F &= \frac{1}{\rho}\tilde{\rho}\sin\psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z &= x + iy = \rho e^{i\phi} \\ w &= \tilde{x} + i\tilde{y} = \tilde{\rho} e^{i\tilde{\phi}} \\ \psi &= \tilde{\phi} - \phi \\ \bar{z}w &= \rho\tilde{\rho}e^{i(\tilde{\phi}-\psi)} \\ \operatorname{Im}(\bar{z}w) &= \rho\tilde{\rho}\sin\psi = 2F \\ \bar{z}w &= (x - iy)(\tilde{x} + i\tilde{y}) = \\ &= (x\tilde{x} + < \tilde{y} + i(x\tilde{y} - \tilde{x}y) \\ \operatorname{Im}\bar{z}w &= x\tilde{y} - \tilde{x}y\end{aligned}$$

*Notation* 8.

$$\begin{aligned}\Delta x &:= \tilde{x} - x \\ \Delta y &:= \tilde{y} - y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{2}\left[x(y + \Delta y) - (x + \Delta x)y\right] \\ F &= \frac{1}{2}\left(x\Delta y - y\Delta x\right)\end{aligned}$$

**Beweis 27.** *Sei* $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^2$ *Kurve,* $Z := \underbrace{t_0}_{=a} < t_1 < \cdots < \underbrace{t_n}_{=b}$ *Zerlegung.*

$(x; y_i) := \gamma(t_i)$

$$\begin{aligned}\Delta x_i &:= x_i - x_{i-1} \\ \Delta y_i &:= y_i - y_{i-1}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}F_i &= \frac{x_{i-1}\Delta y_i - y_{i-1}\Delta x_i}{2} \\ F(Z) &:= \sum_{i=1}^{n} F_i\end{aligned}$$

**Definition 31.** Der Fahrstrahl an die Kurve $\gamma$ überstreicht den orientierten Flächeninhalt $F(\gamma)$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall \text{Zerlegung} Z \text{des Fahrstrahls} \leq \delta$$

gilt

$$|F(Z) - F(\delta)| \leq \varepsilon$$

**Satz 23.** *Sektorformel von Leibniz Sei* $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^2$ *fast überall stetig differenzierbar. Dann*

$$F(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}\,t$$

**Beweis 28.**

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{x}(t)\,\mathrm{d}\,t$$
$$\Delta y_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{y}(t)\,\mathrm{d}\,t$$
$$2F_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_{i-1}\dot{y} - y_{i-1}\dot{x})\,\mathrm{d}\,t$$
$$\left|2F_i - \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}\,t\right| =$$
$$= \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} [(x_{i-1} - x)\dot{y} - (y_{i-1} - y)\dot{x}]\,\mathrm{d}\,t\right| \leq$$
$$\leq \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (x_{i-1} - x)\dot{y}\,\mathrm{d}\,t\right| + \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (y_i - y)\dot{x}\,\mathrm{d}\,t\right|$$

*$\gamma$ fast überall stetig differenzierbar $\implies$ $\gamma$ stetig und fast überall differenzierbar*
*$\xRightarrow{\text{verallgemeinerter Schrankensatz}}$ $\exists L : |\dot{x}| < L, |\dot{y}| < L$ fast überall und*

$$|x(t) - x_{i-1}| =$$
$$|x(t) - x(t_{i-1})| \leq L(t - t_{i-1})$$
$$|y(t) - y_{i-1})| \leq L(t - t_{i-1})$$
$$J_i \leq 2L^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1})\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= 2L^2 \frac{1}{2}(t - t_{i-1})^2|_{t_{i-1}}^{t_i} =$$
$$= L^2(t_i - t_{i-1})^2$$

*Ist die Feinheit $\leq \delta$, so ist $t_i - t_{i-1} \leq \delta$*

$$J_i \leq L^2\delta(t_i - t_{i-1})$$

$$\left|F(Z) - \frac{1}{2}\int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}\,t\right| =$$
$$= \left|\sum_{i=1}^n F_i(Z) - \sum \frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i} (x\dot{y} - \dot{x}y)\,\mathrm{d}\,t\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}\sum_{i-1}^n J_i \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n L^2\delta(t_i - t_{i-1}) =$$
$$= \frac{1}{2}L^2\delta(t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + \cdots) =$$
$$= \frac{1}{2}L^2\delta(b - a) \leq \varepsilon$$

*für*

$$\delta = \frac{2\varepsilon}{L^2(b-a)}$$

**Beispiel 24.**

$$\gamma : [0, \phi] \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$$

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= (-r\sin t, r\cos t, r\cos t)\\ F = \frac{1}{2}\int_0^{\phi} &(r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t)\,\mathrm{d}\,t = \\ &= \frac{r^2}{2}\int_0^{\phi}\mathrm{d}\,t = \frac{r^2\phi}{2}\\ \phi &= 2\phi \implies \pi r^2\end{aligned}$$

*Eigenschaften* 6. Sektorformel

1. Additivität: $c \in (a;b)$

$$F(\gamma) = F\left(\gamma_{|_{[a;c]}}\right) + F\left(\gamma_{|_{[c;b]}}\right)$$

2. Orientierungsumkehrung

$$F(\gamma^-) = -F(\gamma)$$

$$\gamma(t) := \gamma(-t)$$

3.

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ex + fy \\ gx + hy \end{pmatrix}$$

$$(A\gamma)(t) = A\gamma(t)$$
$$d(A\gamma) = A\dot{\gamma}$$
$$x\dot{y} - y\dot{x} = \det\begin{pmatrix}\gamma & | & \dot{\gamma}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y}\end{pmatrix}$$
$$F(\gamma) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}\gamma & | & \dot{\gamma}\end{pmatrix}\mathrm{d}\,t$$
$$\det\begin{pmatrix}A\gamma & | & A\dot{\gamma}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}A(\gamma & | & \dot{\gamma})\end{pmatrix} = \det A \det\begin{pmatrix}\gamma & | & \dot{\gamma}\end{pmatrix}$$
$$F(A\gamma) = \det A \cdot F(\gamma)$$
$$\text{insbesondere}$$
$$\det A = 1(\text{d.h. } A \in SL(2;\mathbb{R}))$$
$$F(A\gamma) = F(\gamma)$$

**Definition 32.** Geschlossene Kurve Eine Kurve $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ heisst geschlossen, wenn

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

gilt.

**Definition 33.** umschlossener orienterierter Flächeninhalt Sei $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}^n$ geschlossen und so dass $F(\gamma)$ existiert, so heisst $F(\gamma)$ der umschlossene orienterierte Flächeninhalt.

*Bemerkung* 17. $\gamma(a) = \gamma(b)$

$$\int_a^b \mathrm{d}(xy)\,\mathrm{d}\,t = (xy)|_a^b = 0$$
$$F(\gamma) = \int_a^b x\dot{y}\,\mathrm{d}\,t = -\int_a^b \dot{x}y\,\mathrm{d}\,t$$

(wenn $\gamma$ geschlossen)

*Bemerkung* 18. Polarkoordinaten

$$
\begin{aligned}
(x, y) &\in \mathbb{R}^2 \\
\rho e^{i\phi} &= x + iy =: z \in \mathbb{C} \\
\gamma : [a; b] &\to \mathbb{R}^2 \\
\dot{z} &= \dot{\rho} e^{i\phi} + i\rho\dot{\phi} e^{i\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t \mapsto& (x(t), y(t)) \\
t \mapsto& z(t) \\
t \mapsto& \rho(t) e^{i\phi(t)}
\end{aligned}
$$

Man erlaubt $\rho(t) < 0$

*Bemerkung* 19. Länge

$$
\begin{aligned}
L = \int_a^b \|\dot{\gamma}\| \,\mathrm{d}\, t &= \int_a^b \sqrt{\dot{\bar{z}}\dot{z}} \,\mathrm{d}\, t \\
\bar{z} = \rho e^{i-\phi},\ \dot{\bar{z}} &= \dot{\rho} e^{-i\phi} - i\rho\dot{\phi} e^{-i\phi} \\
z = x + iy,\ \bar{z} &= x - iy, \\
\dot{z} = \dot{x} + iy,\ \dot{\bar{z}} &= \dot{x} - i\dot{y} \\
\bar{z}\dot{z} &= (x\dot{x} + y\dot{y}) + i(x\dot{y} - \dot{x}y) \\
&= \frac{1}{2} \int \mathrm{Im}(\bar{z}\dot{z}) \,\mathrm{d}\, t \\
\bar{z}\dot{z} = \rho e^{-i\phi} \left( \dot{\rho} e^{i\phi} + \rho\dot{\phi} e^{i\phi} \right) &= \rho\dot{\phi} + i\rho^2\dot{\phi} = \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b \rho^2 \dot{\phi} \,\mathrm{d}\, t
\end{aligned}
$$

**Beispiel 25.**

$$
\begin{aligned}
y : [0; 2\pi] &\mapsto \mathbb{R}^2 \\
\phi &\mapsto a\cos(3\phi) e^{i\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\rho(\phi) = a\cos(3\phi)
$$

$\rho$ kann auch negativ sein

$$
\begin{aligned}
F(\gamma) &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \cos^2(3\phi) \,\mathrm{d}\,\phi = \\
&= \frac{\cancel{3}}{2} \int^{2\pi} a^2 \cos^2(\phi) \frac{\mathrm{d}\,\phi}{\cancel{3}} = \\
\frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} &\frac{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}{2} \,\mathrm{d}\,\phi = \frac{a^2}{4} 2\pi = \frac{a^2\pi}{2} \\
\int_0^{2\pi} \cos^2 &= \int_0^{2\pi} \sin^2
\end{aligned}
$$

# 3 Taylor [Kap 14]

Wir wollen eine Funktion durch Polynom approximieren.

**Definition 34.** Sei $f : I \to \mathbb{C}$ $n$-mal differenzierbar. Das $n$-te Taylorpolynom von $f$ im Punkt $a \in I$ ist das Polynom $T(x)$ des Grades $\leq n$ mit

$$
\begin{aligned}
T(a) &= f(a) \\
T'(a) &= f'(a) \\
T''(a) &= f''(a) \\
\cdots T^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a)
\end{aligned}
$$

*Notation* 9. $I_n f(x;a)$

**Beispiel 26.** $n = 1$

$$T_1 f(x;a) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

*Bemerkung* 20. Sei $I_n f(x;a)$ das $n$-te Taylorpolynom von $f$

$$T(x) = I_n f(x;a) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$$

$$f(a)T'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k (x-a)^{k-1}$$
$$f(a)T''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k (x-a)^{k-2}$$
$$f(a)T'''(x) = \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2) a_k (x-a)^{k-3}$$
$$\cdots$$
$$T(a) = a_0$$
$$T'(a) = a_1$$
$$T''(a) = 2a_2$$
$$T'''(a) = 3 \cdot 2a_3$$

Übung $l \leq n$ (Induktion)

$$T^{(l)}_{(x)} = \sum_{k=l}^{n} k(k-1)(k-2)\cdots(k-l+1) a_k (x-a)^{k-l}$$
$$T^{(l)}(a) = l! a_l = f^{(l)}(a)$$
$$a_l = \frac{f^{(l)}(a)}{l!}$$

*Eigenschaften* 7.

$$T_n f(x;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

**Definition 35.** Fehler

$$R_{n+1}(x;a) := f(x) - T_n f(x;a)$$

**Lemma 5.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_{n+1}(x;a)}{(x-a)^n} = 0$$

$$R_2 = f(x) - T_1 f(x,a)$$
$$T_1 f(x;a) = f(a) + f'(a)(x-a)$$
$$R_2 = \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} \xrightarrow{f\,differenzierbar} 0$$

**Beweis 29.** $T = T_n f$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T(x)}{(x-a)^n} =$$
$$(L'Hopital) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - T'(x)}{n(x-a)^{n-1}} =$$
$$(L'Hopital) = \lim_{x \to a} \frac{f''(x) - T''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} = \cdots$$
$$\cdots = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x) - T^{(n)}(x)}{n!} = 0$$

*denn* $f^{(n)}(a) = T^{(n)}(a)$

**Korollar 8.** *Qualitative Taylorformel Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig und $n$-mal differenzierbar. Dann*

$$\exists r; I \to \mathbb{C}$$

*stetig mit*

$$r(a) = 0$$

*s.d.*

$$f(x) = I_n f(x; a) + (x - a)^n r(x)$$

**Beweis 30.**

$$r(x) := \frac{f(x) - I_n f(x; a)}{(x - a)^n}$$

*$x \neq a$ stetig auf $I \setminus \{a\}$*

$$\lim_{x \to a} r(x)$$

*Wir erweiter $r$ auf $I$ mit $r(a) = 0$*

*Notation* 10. Landan-Symbol Seien $f$ und $g$ komplexe Funktionen in einer punktierten Umgebung von $a$. Man schreibt

$$f = \circ(g), x \to a$$

falls

$$\lim_{x \to a} \frac{f(a)}{f(x)} = 0$$

Gilt zusätzlich

$$\lim_{x \to a} g(x) = 0$$

so sagt man: $f$ geht für $x \to a$ schneller gegen 0 als $g$.
$f : I \to \mathbb{C}$, $a \in I$ $n$-mal differenzierbar:

$$f(x) = T_n f(x; a) + \circ\left((x - a)^n\right), x \to a$$

**Beispiel 27.** $T_4(x; 0)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x 0 \\ f'(x) &= \cos x 1 \\ f(x) &= -\sin x 0 \\ f'(x) &= -\cos x - 1 \\ f(x) &= \sin x 0 \end{aligned}$$

$$T_4 f(x; 0) = x - \frac{1}{3!} x^3$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^4)$$

**Beispiel 28.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-x^3}{6} + \circ(x^4)}{x^3} = \\ &= -\frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3} + \lim_{x \to 0} \frac{x \circ (x^4)}{x^4} = \\ &= -\frac{1}{6} + 0 \cdot 0 = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

**Satz 24.** *Integralform von $R_{n+1}$ Sei $f \in \Phi^{n+1}(I, \mathbb{C})$ ($\Phi$ differnzierbare Funktion). Dann*

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}\, t$$

**Beweis 31.** *Durch Induktion*

$n = 0$

$$\begin{aligned} R_1(x) &= f(x) - T_0 f(x; a) \\ T_0 f(x; a) &= f(a) \\ R_1(x) &= f(x) - f(a) \\ \frac{1}{1!} \int_a^x f'(t) \,\mathrm{d}\, t &= f(x) - f(a) \end{aligned}$$

$n + 1$

$$\begin{aligned} f - T_{n-1} f = R_n &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) \,\mathrm{d}\, t \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{(x-t)^n}{-n} f^{(n)}(t) \,\mathrm{d}\, t \\ &= -\frac{1}{n!} \left[ (x-1)^n f^{(n)}(t) \right] \Big|_a^x + \frac{1}{n!} \int (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \,\mathrm{d}\, t \\ &= \frac{1}{n!} (x-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \,\mathrm{d}\, t \\ \implies f - T_n f &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \,\mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

**Korollar 9.** *Lagrange-Form für $R_{n+1}$ Sei $f \in \Phi^{n+1}(I; \mathbb{R})$ $a \in I$.*

$$\forall x \in I \ \exists \xi \in I : R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$