

# Analysis I - Vorlesungs-Script

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>1</b>
1.1	Treppenfunktionen . . . . .	1
1.2	Regelfunktionen . . . . .	2
1.2.1	Zusammenfassung . . . . .	4
1.2.2	Vorgehen . . . . .	4
1.2.3	Eigenschaften . . . . .	7
1.3	Fundamentalsatz der Analysis . . . . .	10
1.4	Integrationstechniken . . . . .	13
1.4.1	Partielle Integration . . . . .	13
1.4.2	Substitutionsregel . . . . .	14
1.4.3	Rationale Funktionen . . . . .	15
1.5	Reihenintegration . . . . .	15
1.6	Reimannsche Summen . . . . .	17
1.7	Das uneigentliche Integral . . . . .	18
1.8	Majorantenkriterium . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Kurven (Kapitel 12)</b>	<b>20</b>

# 1 Integralrechnung

**Ziel** mathematisch präzise Formulierung des “Flächeninhalts” unter dem Graphen einer Funktion

## Fragen

- Welche Funktionen sind zulässig?
- Wie definiert man das Integral für diese Funktionen?

## Idee

1. def. Integral für spezielle Funktionen (Treppenfunktionen)
2. betrachte Folgen von Treppenfunktionen und führe geeigneten Konvergenzbegriff ein (gleichmässige Konvergenz),  $\rightarrow$  mögliche Limiten sind Relfunktionen
3. falls  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  (Folge von Treppenfunktionen), setze  $\int_a^b f \, dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f_n \, dx \right)$

$$f_n \rightarrow f \text{ folgt } \left( \int_a^b f_n \, dx \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergent}$$
$$f_n \& g_n \rightarrow f \text{ zwei Folgen } \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f_n \, dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b g_n \right)$$

## 1.1 Treppenfunktionen

- $a < b, a, b \in \mathbb{R} \quad \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  Zerlegung von  $[a, b] \Leftrightarrow a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$
- $\phi[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Treppenfunktion (auf  $[a, b]$ )  $\Leftrightarrow \exists$  Zerlegung  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  von  $[a, b]$  so dass  $\phi|_{(x_{k-1}, x_k)}$  konstant  $\forall k = 1, \dots, n$

*Bemerkung 1.* • keine Aussage über  $\phi(x_0), \dots, \phi(x_n)$

- nicht verboten zu feine Zerlegungen zu betrachten
- $\tau([a, b])$  (ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ ,  $\phi, \psi$  Treppenfunktionen) Menge aller Treppenfunktionen auf  $[a, b]$

**Definition 1.** Integral von Treppenfunktionen  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Teppenfunktion mit Zerlegung  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

- $c_k =$  Funktionswert von  $\phi$  auf  $(x_{k-1}, x_k)$
- $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

$$\int_a^b \phi(x) \, dx = \sum_{k=1}^n (c_k \cdot \Delta x_k)$$

**Lemma 1.** *Das Integral einer Treppenfunktion ist unabhängig von der gewählten Zerlegung*

**Beweis 1.**

$$\begin{array}{ll} Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \& Z' = \{y_0, y_1, \dots, y_m\} & \text{Zerlegungen von } [a, b] \\ \phi|_{(x_{k-1}, x_k)} \& \phi|_{(y_{k-1}, y_k)} & \text{konstant} \\ \rightsquigarrow I(Z) \rightsquigarrow I(Z') & \leftarrow \text{Summen } \sum_{k=1}^n c_k \Delta x_k \& \sum_{k=1}^m c'_k \Delta y_k \end{array}$$

**Frage**  $I(Z) = I(Z')$

**Zeige**  $I(Z) = I(Z \cup Z') = I(Z')$

$Z \cup Z'$  entsteht aus  $Z$  durch Hinzufügen von endlich vielen Punkten.

Angenommen  $Z \cup Z' = Z \cup \{y\}, y \notin Z$ . Leicht zu sehen:  $I(Z) = I(Z \cup \{y\})$

$$I(Z) = I(Z \cup \{y\}) \xrightarrow{\text{Ind}} I(Z) = I(Z \cup \{y_1\}) = I(Z \cup \{y_1\} \cup \{y_2\}) = \dots = I(Z \cup Z')$$

**Lemma 2.**

$$\int_a^b dx \tau([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$$

1.  $\int_a^b dx$  ist linear, d.h.

$$\forall \phi, \psi \in \tau([a, b]), \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \int_a^b \alpha \phi + \beta \psi dx = \alpha \left( \int_a^b \phi dx \right) + \beta \left( \int_a^b \psi dx \right)$$

2.

$$\left| \int_a^b \phi dx \right| \leq \int_a^b |\phi| dx \leq (b-a) \underbrace{\|\phi\|}_{\text{Supremum}}$$

3. für  $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\phi(x) \leq \psi(x) \forall x \in [a, b] \implies$

$$\int_a^b \phi dx \leq \int_a^b \psi dx$$

**Beweis 2.**  $\phi$  und  $\psi$  Treppenfunktionen mit Zerlegung  $Z$  bzw.  $Z' \implies Z \cup Z'$   
Zerlegung für  $\phi$  und  $\psi$

$$\int_a^b \alpha \phi + \beta \psi dx = (\alpha \phi)|_{(x_{k-1}, x_k)} = \alpha (\phi|_{(x_{k-1}, x_k)})$$

wobei  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ .

Wert von  $\phi$  auf  $(x_{k-1}, x_k) =: c_k$ , Wert von  $\psi$  auf  $(x_{k-1}, x_k) =: d_k$

$$\sum_{i=1}^n (\alpha c_k + \beta d_k) \Delta x_k = \alpha \left( \sum_{i=1}^n \right) + \beta \left( \sum_{i=1}^n d_k \Delta x_k \right) = \alpha \int_a^b \phi dx + \beta \int_a^b \psi dx$$

**Bemerkung 2.**  $\int_a^b dx : \tau([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$  linear,  $\ker(\int_a^b dx) \subset \tau([a, b])$  Untervektorraum

**Bemerkung 3.** lineares erzeugendes System von  $\tau([a, b])$   $A \subset \mathbb{R}$

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\{1_{[c,d]} \text{ mit } a < c \leq d < b\}$  erzeugendes System

## 1.2 Regelfunktionen

**Definition 1.** Regelfunktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Regelfunktionen (auf  $[a, b]$ )  $\Leftrightarrow$

•

$$\forall y \in (a, b) : \exists \lim_{x \searrow y} f(x) \ \& \ \lim_{x \nearrow y} f(x)$$

$$(\text{nicht nötig: } \lim_{x \searrow y} f(x) = \lim_{x \nearrow y} f(x))$$

•

$$\exists \lim_{x \nearrow y} f(x) \ \& \ \exists \lim_{x \searrow y} f(x)$$

*Bemerkung 4.*

$$\lim_{x \searrow y} f(x) = c : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \rho \forall 0 < x - y < \rho : |f(x) - c| < \varepsilon$$

$R([a, b])$  Menge aller Regelfunktionen auf  $[a, b]$

$$\begin{aligned} R([a, b]) & \text{ Vektorraum über } \mathbb{C} \\ T([a, b]) & \subset R([a, b]) \text{ Untervektorraum} \end{aligned}$$

**Frage**  $R([a, b])/T([a, b])$  Vektorraum über  $\mathbb{C}$ , Dimension?

**Beispiel 1.** jede stetige Funktion ist eine Regelfunktion

**Beispiel 2.** jede monotone Funktion auf  $[a, b]$  ist eine Regelfunktion (siehe Seite 78)

*Bemerkung 5.*

$$f, g \in R([a, b]) \implies \lambda f_{\lambda \in \mathbb{C}}, f + g, |f|, f \cdot g, \max(f, g), \min(f, g)$$

sind in  $R([a, b])$

**Definition 2.** gleichmässige Konvergenz  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge von Funktionen auf  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $f$  Funktion auf  $D$ .

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichmässig gegen } f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\|f - f_n\|}_{\sup_{x \in D} |f(x) - f_n(x)|} = 0$$

*Bemerkung 6.* falls  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmässig  $\implies$  Limes ist eindeutig

*Bemerkung 7.*  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmässig gegen  $f \implies f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in D$

$$(|f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x \in D} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0)$$

*Bemerkung 8.* Die Umkehrung gilt NICHT  $D = (0, 1]$

$$\begin{aligned} f = 0, f_n(x) &= \begin{cases} 1 - nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \forall x \in D : f_n(x) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \|f - f_n\| &= \sup_{x \in D} |f(x) - f_n(x)| = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| &= 1 \end{aligned}$$

**1.2.1 Zusammenfassung**

- $\tau([a, b])$  = Vektorraum der Treppenfunktionen auf  $[a, b]$
- $\int : \tau[a; b] \rightarrow \mathbb{C}$  lineare Abbildung
- Eigenschaften:
  - lineare Abbildung
  - Monotonie:  $f \leq g \implies \int_a^b f \cdot dx \leq \int_a^b g \cdot dx$
  - Beschränktheit:  $\left| \int_a^b f \cdot dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot dx \leq (b-a) \|f\| = \sup_{x \in [a; b]} f$
- Regelfunktionen:  $R([a, b])$  = Vektor nach der Regel  $f \supset \tau([a; b])$
- gleichmässige Konvergenz  $f_n \rightarrow f \stackrel{\text{def}}{\iff} \|f_n - f\| \rightarrow 0$

**1.2.2 Vorgehen**

1. Jede Regelfunktion kann man gleichmässig durch Treppenfunktionen approximieren.
2. Damit kann man das Integral von Regelfunktionen definieren.
3. Regenregeln (insbesondere Hauptsatz)
4. Riemannsche Summen

**Satz 1.** *Approximationssatz*

$$f \in R[a; b] \Leftrightarrow \exists \text{ Folge } \phi_n \in \tau[a; b] : \phi_n \rightarrow f \text{ gleichmässig}$$

ist per Definition äquivalent mit

$$\exists \text{ Folge } \phi_n \in \tau[a; b] : \|\phi_n - f\| \rightarrow 0$$

wobei

$$\|\phi_n - f\| = \sup_{x \in [a; b]} |\phi_n(x) - f(x)|$$

Dieser Grenzwert ist wiederum äquivalent mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \phi \in \tau[a; b] : \|f - \phi\| \leq \varepsilon$$

(eine  $\varepsilon$ -approximierende Treppenfunktion)

**Beweis 3.**  $\Rightarrow$  d.h.  $f \in R \implies \exists \varepsilon$ -approx. Treppen. Widerspruchsbeweis:

$$f \in R[a; b]$$

$$\exists \varepsilon > 0 : f \text{ besitzt keine } \varepsilon\text{-approx. Treppenfunktion}$$

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung  $I_n = [a_n; b_n]$  s.d.  $\forall_n f|_{I_n}$  besitzt keine  $\varepsilon$ -approx. Treppenfunktion

$$I_1 = [a; b]$$

rekursiv:  $M = \frac{b_n - a_n}{2} + a_n$  Mittelpunkt

$$I_{n+1} := \begin{cases} [a_n; M] & \text{falls } f|_{[a_n; M]} \text{ keine } \varepsilon\text{-approx. Treppenfunktion besitzt} \\ [M, b_n] & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Sei  $\xi \in I_n \forall n$

$$\begin{aligned} c_e &:= \lim_{x \uparrow \xi} f(x) \\ c_r &:= \lim_{x \downarrow \xi} f(x) \end{aligned}$$

$\implies$

$$\begin{aligned} \exists \delta : |f(x) - c_e| < \varepsilon : & \quad x \in [\xi - \delta; \xi) \\ |f(x) - c_r| < \varepsilon : & \quad x \in (\xi; \xi + \delta] \end{aligned}$$

Auf  $[\xi - \delta; \xi + \delta]$  definieren wir eine Treppenfunktion:

$$\phi(x) := \begin{cases} c_e & \xi - \delta \leq x < \xi \\ f(\xi) & x = \xi \\ c_r & \xi + \delta \leq x < \xi + \delta \end{cases}$$

Fall 1  $\implies \phi$  ist eine  $\varepsilon$ -approx. Treppenfunktion auf  $[\xi - \delta; \xi + \delta]$ . Fall 2  $\implies \phi$  ist eine  $\varepsilon$ -approx. Treppenfunktion auf  $[\xi - \delta; \xi + \delta]$ , alle  $I_n \subset [\xi - \delta; \xi + \delta]$   
 $\Psi$

**Beweis 4.**  $\Leftarrow f$  Regelfunktion  $\Leftarrow f$  besitzt  $\varepsilon$ -approx. Treppenfunktion  $\forall \varepsilon > 0$ .  
 Sei  $x_0 \in [a; b]$ . Zu zeigen:  $\exists \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \phi \in \tau[a; b] : \|f - \phi\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei  $\beta > x_0 : \phi$  konstant auf  $(x_0; \beta)$

$$\begin{aligned} \forall x, x' \in (x_0; \beta) \\ |f(x) - f(x')| &\leq |f(x) - \phi(x)| + |\phi(x) - \phi(x')| + |\phi(x') - f(x')| \\ &\leq \|f - \phi\| + \|\phi - f\| < \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \beta : \text{Cauchyeigenschaft gilt auf } (x_0; \beta) \implies \exists \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ . Ähnlich:  
 $\exists \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \forall x_0 \in (a; b]$ .

**Korollar 1.**

$$f \in R[a; b] \Leftrightarrow \exists \text{Folge } \Psi_b \in \tau[a; b] : \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k = f$$

konvergiert konstant

**Korollar 2.**  $f$  Regelfunktion auf  $I \implies f$  fast überall stetig. d.h.  $\exists A \subset I$  s.d.

- $f|_{I \setminus A}$  stetig
- $A$  höchstens abzählbar  $x \in [a; b]$

**Beweis 5.**

$$\begin{aligned} \Psi_k &\in \tau[I] \\ f &= \sum \phi_k \text{ normal} \end{aligned}$$

Ist  $\phi_k$  stetig in  $x \forall k \implies f$  stetig in  $x$ .

Ist  $x$  Unstetigkeitsstelle von  $f$ ,  $\exists k : \phi_k$  unstetig in  $x$ , höchstens abzählbare viele  $k$ .

- Eine Treppenfunktion hat endlich viele Unstetigkeitsstellen

$\{ \text{Unstetigkeitsstellen von } f \} \subset (\text{höchstens abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen}) \implies \text{höchstens abzählbar}$

$$I = \overbrace{U_\alpha}^{\text{höchstens abzählbar}} \overbrace{I_\alpha}^{\text{kompakt}}$$

**Satz 2.**

$$f \in R([a; b]) \implies f \text{ beschränkt auf } [a; b]$$

**Beweis 6.**

$$\varepsilon = 1$$

$$\begin{aligned} & \exists \overbrace{\phi}^{\text{beschränkt}} \in \tau([a; b]) : \|f - \phi\| \leq 1 \\ \implies \|f\| &= \|f - \phi + \phi\| \leq \|f - \phi\| + \|\phi\| \leq 1 + \|\phi\| \end{aligned}$$

**Definition 3.** Integration von Regelfunktionen ... auch bekannt als "Regelintegral"Sei  $f \in R[a; b]$ 

$$\int_a^b f(x) dx : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi_n(x) dx$$

wobei  $\phi_n$  eine approximierende Folge von Treppenfunktionen ist (d.h.  $\|\phi_n - f\| \rightarrow 0$ )**zu zeigen:**

1. Die Folge  $I_n := \int_a^b \phi_n(x) dx$  konvergiert  $\forall \|\phi_n - f\| \rightarrow 0$
2. Der Grenzwert ist von der Wahl der approximierenden Folge unabhängig

**Beweis 7.** von 1

$$|I_n - I_m| \stackrel{\text{Linearität}}{=} \left| \int_a^b (\phi_n(x) - \phi_m(x)) dx \right| \leq^{\text{beschränkt}} (b-a) \|\phi_n - \phi_m\|$$

$$\|\phi_n - f\| \rightarrow 0 \stackrel{\text{Dreiecksungleichung}}{\implies} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \|\phi_n - \phi_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m > N$$

$$\implies I_n \text{ Cauchyfolge} \implies I_n \text{ konvergiert}$$

**Beweis 8.** von 2 Seien  $\phi_n, \psi_n \in \tau[a; b]$ 

$$\begin{aligned} \|\phi_n - f\| &\rightarrow 0 \\ \|\psi_n - f\| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\{X_n\} = \psi_1, \phi_1, \psi_2, \phi_2, \psi_3, \phi_3, \dots$$

$$X_n := \begin{cases} \phi_{\frac{n}{2}} & \text{n gerade} \\ \psi_{\frac{n+1}{2}} & \text{n ungerade} \end{cases}$$

$$\implies I_n(\phi) \text{ und } I_n(\psi) \text{ Teilfolgen von } I_n(X)$$

$$\implies \|X_n - f\| \rightarrow 0$$

$$I_n(x) = \int x_n$$

$$I_n(\phi) = \int \phi_n$$

$$I_n(\psi) = \int \psi_n$$

$$\implies$$

$$\lim I_n(\phi) = \lim I_n(X) = \lim I_n(\psi)$$



**Beispiel 3.** Dirichlet eine Funktion, die keine Regelfunktion ist.

$$f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f$  unstetig  $\forall x$  intuitiv:  $\int_0^1 f(x) dx = 0$

**Beispiel 4.** Riemann sog. modifizierte Dirichlet-Funktion

$$g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p, q \text{ teilerfremd}, q > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$g \in R[0; 1]$  und  $\int_a^b g(x) dx = 0$

### 1.2.3 Eigenschaften

**Satz 3.**

$$\forall f, g \in R[a; b] \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ gelten}$$

**Linearität**

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f \cdot dx + \beta \int_a^b g \cdot dx$$

**Beschränktheit**

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \|f\|$$

**Monotonie**

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$(f, g \text{ reellwertig } f(x) \leq g(x) \forall x)$

**Satz 4. Additivität** Sei  $f \in R[a; b]$  und sei  $c \in (a; b)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**Beweis 9.**  $f = \phi$  Treppenfunktion trivial

$$f = \lim \phi_n \text{ gleichmässig}$$

$$\begin{aligned} \phi_n \in \tau[a; c] \phi_n^l &:= & \phi_n|_{[a; b]} &\in \tau[a; b] \\ \phi_n^r &:= & \phi_n|_{[b; c]} &\in \tau[b; c] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^c \phi_n(x) \, dx &= \int_a^b \phi_n^l(x) \, dx + \int_b^c \phi_n^r(x) \, dx \\ \| \phi_n - f \| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\| \phi_n^l - f \|_{[a; b]} \leq \| \phi_n - f \| \geq \| \phi_n^r - f \|_{[b; c]}$$

$$\begin{aligned} \int_a^c \phi_n(x) \, dx &= \int_a^b \phi_n^l(x) \, dx + \int_b^c \phi_n^r(x) \, dx \\ &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx \\ &= \int_a^c f(x) \, dx \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \phi_n^l &\rightarrow f|_{[a; b]} \\ \phi_n^r &\rightarrow f|_{[b; c]} \end{aligned}$$

**Definition 4.**  $f \in R[a; b]$ ,  $b > a$

$$\begin{aligned} \int_b^a f(x) \, dx &:= - \int_a^b f(x) \, dx \\ \int_a^a f(x) \, dx &:= 0 \end{aligned}$$

**Satz 5.**  $f \in RI() : \forall a, b, c \in I$

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

*Bemerkung 9. Linearität*

**Beschränktheit :**

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \leq (b-a) \|f\|$$

**Monotonie**

$$\begin{aligned} f &\leq g; b > a \\ \int_a^b f(x) \, dx &\leq \int_a^b g(x) \, dx \end{aligned}$$

*Bemerkung 10.*  $f$  stetig ( $[a; b]$ )  $\Rightarrow \|f\| = \max |f|$   
 reellwertig  $\xRightarrow{\text{ZWS}} f$  nimmt alle Werte zwischen 0 und  $\max |f|$

$$\exists \xi \in [a; b] :$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b-a)f(\xi)$$

**Satz 6.** *Mittelwertsatz* Sei  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei  $p : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Regelfunktion mit  $p \geq 0$ . Dann  $\exists \xi \in [a; b]$  s.d.

$$\int_a^b f(x)p(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b p(x) \, dx$$

Falls  $\int p \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\int_a^b f(x)p(x) \, dx}{\int_a^b p(x) \, dx} &= f(\xi) = \int_a^b f(x)\tilde{p}(x) \, dx \\ \tilde{p}(x) &= \frac{p(x)}{\int_a^b p(x) \, dx} \\ \implies \int_a^b \tilde{p}(x) \, dx &= 1 \end{aligned}$$

**Beweis 10.**  $f$  besitzt ein Maximum  $M$  und ein Minimum  $m$

$$\begin{aligned} m &\leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b] \\ mp(x) &\leq f(x)p(x) \leq Mp(x) \end{aligned}$$

Monotonie

$$\begin{aligned} \int_a^b mp(x) \, dx &\leq \int_a^b f(x)p(x) \, dx \leq \int_a^b Mp(x) \, dx \\ &= m \int_a^b p(x) \, dx &= M \int_a^b p(x) \, dx \end{aligned}$$

$$\implies \exists \mu \in [m; M]:$$

$$\int_a^b f(x)p(x) \, dx = \mu \int_a^b p(x) \, dx$$

$$\text{ZWS} \implies \exists \xi \in [a; b]:$$

$$\mu = f(\xi)$$

**Satz 7.** Sei  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  Regelfunktion mit  $f \geq 0$  und  $\int_a^b f(x) \, dx = 0$ . Dann ist  $f(x_0) = 0$  an jeder Stetigkeitsstelle  $x_0$ . Ferner gilt:  $f = 0$  fast überall.

**Beweis 11.** (Widerspruchsbeweis) Sei  $x_0$  eine Stetigkeitsstelle mit  $f(x_0) > 0$ .  $f$  stetig in  $x_0 \implies \exists x_0 \in [a; b] \subset [a; b]$  s.d.

$$f(x) > \frac{1}{2}f(x_0) \quad \forall x \in [\alpha; \beta]$$

Sei

$$\phi(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}f(x_0) & x \in [\alpha; \beta] \\ 0 & x \notin [\alpha; \beta] \end{cases}$$

Treppenfunktion, deshalb Regelfunktion

$$\implies f \geq \phi \implies \underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx}_{=0} \geq \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x) \, dx = \frac{\beta - \alpha}{2} f(x_0) > 0$$

$\Psi$

**Satz 8.**  $f$  Regelfunktion  $\implies f$  besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen  $\implies f = 0$  fast überall

**Korollar 3.**  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f \geq 0$ ,  $\int_a^b f(x) \, dx = 0 \implies$

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$$

### 1.3 Fundamentalsatz der Analysis

**Satz 1.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  Regelfunktion und sei  $a \in I$ . Für jedes  $x \in I$  definiert man

$$F(x) := \int_a^x f(t) \, dt \quad F : I \rightarrow \mathbb{C}$$

Dann ist  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$  (d.h.  $F$  ist stetig und fast überall differenzierbar (und  $F' = f$  fast überall)) mit

$$\begin{aligned} F'_+(x_0) &= f_+(x_0) \\ F'_-(x_0) &= f_-(x_0) \end{aligned}$$

$\forall x_0 \in I$

**Beweis 12.**  $\forall x_1, x_2 \in I$  gilt

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_a^{x_2} f(t) \, dt - \int_a^{x_1} f(t) \, dt = \\ &= \int_a^{x_2} + \int_{x_1}^a = \int_{x_1}^{x_2} f(t) \, dt \end{aligned}$$

Sei  $\tau \subset I$  Teilintervall.  $\forall x_1, x_2 \in \tau$

$$|f(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) \, dt \right| \stackrel{\text{Bijektivität}}{\leq} |x_2 - x_1| \|f\|_\tau$$

$\implies F|_\tau$  Lipschitz-stetig  $\implies F|_\tau$  stetig  $\forall \tau \implies F$  stetig auf  $I$ .  
Wir berechnen  $F'_+(x_0)$ .  $f$  Regelfunktion  $\implies \exists f_+(x_0)$ .  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$|f(x) - f_+(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Für  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$\begin{aligned} &\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f_+(x_0) \right| = \\ &\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) \, dt - \frac{f_+(x_0)}{x - x_0} \int_{x_0}^x 1 \, dt \right| < \text{Fehltdanichtwas?} > \\ &\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f_+(x_0)) \, dt \right| \leq \\ &\frac{1}{|x - x_0|} |x - x_0| \|f(x) - f_+(x_0)\|_{x_0;x} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

**Korollar 1.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  Regelfunktion und sei  $\Phi$  eine Stammfunktion zu  $f$ . Dann  $\forall a, b \in I$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= \Phi(b) - \Phi(a) \\ &=: \Phi|_a^b \end{aligned}$$

**Beweis 13.**  $\Phi$  und  $F$  sind Stammfunktionen zu  $f$ , insbesondere  $\Phi' = F' = f$  fast überall. Eindeutigkeitssatz  $\implies \exists c$  konstant s.d.

$$\Phi(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= F(b) - \underbrace{F(a)}_{=0} = \\ &= (\Phi(b) - c) - (\Phi(a) - c) = \Phi(b) - \Phi(a) \end{aligned}$$

**Korollar 2.** Jede Regelfunktion besitzt eine Stammfunktion

**Definition 1.** Eine Funktion heisst fast überall stetig differenzierbar, wenn sie die Stammfunktion zu einer Regelfunktion ist. (Wo sie nicht stetig differenzierbar ist, besitzt sie linke und Rechte Grenzwerte)

**Beispiel 5.**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

$f$  ist in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  differenzierbar.  $f'$  besitzt linke und rechte Grenzwerte, in 0 nicht. Also keine Regelfunktion.

*Bemerkung 11.* Mit dem Lebesgue-Integral kann man solche Funktionen aus einem Integral erhalten.

*Eigenschaften 1.* Charakterisierung  $f$  fast überall stetig differenzierbar auf  $I \implies \exists A \subset I$ ,  $A$  höchstens abzählbar s.d.

1.  $f$  ist auf  $I \setminus A$  differenzierbar
2.  $f'$  ist auf  $I \setminus A$  stetig
3.  $\forall x \in A$  existieren  $f'_+(x)$  und  $f'_-(x)$

**Definition 2.** unbestimmtes Integral Das unbestimmte Integral der Regelfunktion  $f$  ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu  $f$ .

*Notation 1.* unbestimmtes Integral

$$\int f(x) \, dx$$

In Tabellen wird oft

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2}$$

geschrieben

**Beispiel 6.**

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$$

*Eigenschaften 2.*

$$\begin{aligned} \int x^a \, dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \\ \int \frac{1}{x} \, dx &= \ln |x| \\ \int e^{cx} \, dx &= \frac{1}{c} e^{cx}, \quad c \neq 0 \\ \int \sin x \cdot dx &= -\cos x \\ \int \cos x \cdot dx &= \sin x \end{aligned}$$

**Satz 2.** Seien  $f_1$  und  $f_2$  Regelfunktionen auf  $I$

$$f_1 = f_2 f. \ddot{u}. \implies \int f_1 \, dx = \int f_2 \, dx$$

Insbesondere  $\forall a, b \in I$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f_2(x) \, dx$$

**Beweis 14.** Sei  $F_1 / F_2$  Stammfunktion zu  $f_1 / f_2$

$$\begin{aligned} \implies F'_1 &= F'_2 f. \ddot{u}. \\ \implies F_1 &= F_2 + C \end{aligned}$$

*Bemerkung 12.* Anwendung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p, q \text{ teilerfremd} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
$$\int_a^b f(x) \, dx = 0$$

**Definition 3.** Sei  $f$  eine fast überall differenzierbare Funktion, so bezeichnet  $f'$  irgendeine Regelfunktion, die fast überall gleich zur Ableitung von  $f$  ist.

**Satz 3.** Hauptsatz Sei  $f$  eine fast überall stetig differenzierbare Funktion auf  $I$ . Dann

$$\int f'(x) \, dx = f$$
$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a) \quad a, b \in I$$

Notation 2. Leibnitz-Notation

$$f' = \frac{df}{dx}$$
$$\int \frac{df}{dx} \, dx = f$$
$$\int df = f$$
$$\int_a^b df = \Delta F := f(b) - f(a)$$

## 1.4 Integrationstechniken

Eigenschaften 3. Integrationstechniken

1. Linearität
2. Partielle Integration
3. Substitutionsregel

### 1.4.1 Partielle Integration

**Satz 1.** Seien  $U$  und  $V$  fast überall stetig differenzierbar Funktionen auf  $I$ , so ist auch  $UV$  fast überall stetig differenzierbar und

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$
$$\int_a^b uv' \, dx = (uv)|_a^b - \int_a^b u'v \, dx$$

**Beweis 15.**  $u, v$  stetig und  $u, v$  Regelfunktionen  $\implies u'v + uv'$  Regelfunktion.  
Fast überall:  $u'v + uv' = (uv)'$  Kettenregel.

$$\int (u'v + uv') \, dx = \int (uv)' \, dx = uv$$

**Beispiel 7.**

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = \int \frac{dx}{x} \ln x \, dx =$$
$$= x \ln x - \int x \frac{d \ln x}{dx} \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x$$

**Beispiel 8.**

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos x \, dx = \int \left( \frac{d}{dx} \sin x \right) \cos x \, dx =$$
$$= \sin x \cos x - \int \sin x \frac{d}{dx} \cos x \, dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x$$
$$\int (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = \sin x \cos x$$
$$\int (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = x$$
$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2}$$

**Beispiel 9.**

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2} &= \int \frac{dx}{dx} \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int x \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} dx = \\
&= x\sqrt{1+x^2} \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \\
&= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \operatorname{arcsinh} x \\
\int \sqrt{1+x^2} dx &= \frac{x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsinh} x}{2}
\end{aligned}$$

**1.4.2 Substitutionsregel**

**Satz 2.** *Substitutionsregel* Sei  $f$  Regelfunktion auf  $I$ ,  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$ ,  $t: [a; b] \rightarrow I$  stetig differenzierbar und streng monoton. Dann ist  $F \circ t$  eine Stammfunktion zu

$$(f \circ t)t' \text{ auf } [a; b]$$

und

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t(x))t'(x) dx &= \int_{t(a)}^{t(b)} f(t) dt \\
(I = [t(a); t(b)] \text{ oder } [t(b); t(a)])
\end{aligned}$$

Notation 3.

$$f \frac{dt}{dx} dx = \int f dt$$

**Beweis 16.** Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(F \circ t) &= (F' \circ t)t' \stackrel{f.\ddot{u.}}{=} (f \circ t)t' \\
\int_a^b f(t(x))t'(x) dx &= \int_a^b \frac{d}{dx}(F \circ t) dx = F \circ t \Big|_a^b = F(t(b)) - F(t(a)) \\
&= \int_{t(a)}^{t(b)} f(t) dt = F \Big|_{t(a)}^{t(b)} = F(t(b)) - F(t(a))
\end{aligned}$$

**Beispiel 10.**

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x+c) dx &\stackrel{t(x)=x+c}{=} \int_a^b f(x+c)t' dx = \\
&= \int_{a+c}^{b+c} f(t) dt
\end{aligned}$$

**Beispiel 11.**

$$\int_a^b f(cx) dx \stackrel{t(x)=cx}{=} \frac{1}{c} \int_a^b f(cx)t' dx = \frac{1}{c} \int^{cb}_{ca} cf(t) dt$$

$c = -1$

$$\int_a^b f(-x) dx = - \int_{-a}^{-b} f(x) dx = \int_{-b}^{-a} f(x) dx$$

**Korollar 1.**

$$\begin{aligned}
f(-x) &= -f(x) \\
\int_{-a}^a f(x) &= 0
\end{aligned}$$

**Beweis 17.**

$$\int_{-a}^a f(-x) dx = - \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f(x) dx$$



**Beispiel 12.**

$$\begin{aligned}\int \frac{t'(x)}{t(x)} dx &\stackrel{f=\frac{1}{t}}{=} \int f(t) dt = \\ &= \int \frac{1}{t} dt = \ln |t|\end{aligned}$$

**1.4.3 Rationale Funktionen**

→ Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x+a} &= \ln |x+a| \\ \int \frac{Bx+C}{x^2+2bx+c} dx &= \dots\end{aligned}$$

Wobei  $x^2 + 2bx + c$  keine reellen Lösungen ergeben darf.

**Satz 3.** Eine rationale Funktion kann man mittels rationaler Funktionen, des Logarithmus sowie des Arcustangens integrieren.

**1.5 Reihenintegration**

**Satz 1.** Sei  $f_n$  eine Folge Regelfunktionen auf  $[a; b]$ . Konvergiert die Reihe  $\sum f_n$  normal, so ist

$$f : \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

eine Regelfunktion und

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx \\ (\int \sum &= \sum \int)\end{aligned}$$

Insbesondere gilt der Satz für Potenzreihen in ihren Konvergenzintervallen.

**Beweis 18.**  $\forall \varepsilon > 0 \exists N:$

$$\sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall p \geq N$$

$$\left\| f - \sum_{n=1}^p f_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$f_n$  Regelfunktion  $\implies \sum_{n=1}^p f_n$  Regelfunktion  $\implies \exists$  Treppenfunktion  $\phi$  mit

$$\left\| \sum_{n=1}^p f_n - \phi \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\implies$

$$\|f - \phi\| \leq \left\| f - \sum_{n=1}^p f_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^p f_n - \phi \right\| < \varepsilon$$

$\Rightarrow f$  Regelfunktion

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \, dx - \sum_{n=1}^p \int_a^b f_n(x) \, dx \right| &\leq \\ &\leq \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^p f_n(x) \right| \, dx \leq \\ &\leq |b-a| \left\| f - \sum_{n=1}^p f_n \right\| < \\ &< |b-a| \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

**Beispiel 13.**

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \, dt \stackrel{|x| \leq 1}{=} \\ &\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

## 1.6 Reimannsche Summen

- alte Definition des Regelintegrals (äquivalent)
- Approximationstechnik
- Man kann Resultate über Summen erweitern (z.B. Höldersche Ungleichung, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

**Definition 1.** Zerlegung  $[a; b]$  kompaktes Intervall

Eine Zerlegung von  $[a; b]$  ist die Wahl  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  s.d.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

*Notation 4.*  $Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

**Definition 2.** Feinheit der Zerlegung

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$$

Die Feinheit der Zerlegung ist  $\max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$

**Definition 3.** Die Riemannsche Summe von  $f$  bezüglich der Zerlegung  $Z$  und der Wahl von Stützstellen  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

ist die Summe

$$S(f; Z; \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

**Satz 1.** Sei  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Regelfunktion. Dann gilt folgendes:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$

sd. für jede Zerlegung  $Z$  der Feinheit  $\leq \delta$  und für jede Wahl Stützstellen  $\xi$  gilt

$$\left| S(f; Z; \xi) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

**Beweis 19.** (Idee)

1. Satz gilt, falls  $f$  eine Treppenfunktion ist. Beweis durch Induktion nach der Anzahl Sprungstellen
2.  $\exists \phi$  Treppenfunktion s.d.

$$\|f - \phi\| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

$$1) \implies \exists Z, \xi$$

$$\left| S(\phi; Z; \xi) - \int_a^b \phi(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

3-Ecks Ungleichung

**Korollar 1.** Sei  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$  Regelfunktion. Sei  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$  Folge Zerlegungen von  $[a; b]$  mit Feinheit  $(Z_n) \rightarrow 0$ . Für jede Wahl Stützstellen  $\xi_m$  aus  $Z_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f; Z_n; \xi_m) = \int_a^b f(x) dx$$

**Definition 4.**  $p$ -Norm Sei  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$  Regelfunktion. Die  $p$ -Norm von  $f$  (mit  $p \geq 1$ )

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}$$

**Satz 2.** Seien  $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$  Regelfunktionen. Seien  $p, q \geq 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann haben wir

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Höldersche Ungleichung

Spezialfall:  $p = q = 2$  Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

**Beweis 20.** (Idee)

1. Man approximiert die 3 Integrale durch Riemannsche Summen
2. Man benützt die Höldersche Ungleichung für Summen
3. Man nimmt die Grenzwerte

## 1.7 Das uneigentliche Integral

**Satz 1.** Seien  $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty$$

Sei  $I$  ein Intervall mit Randwerten  $a$  und  $b$  (z.B.  $I = [a; b]$ ,  $I = [a; b)$ ). Sei  $f$  eine Regelfunktion auf  $I$ . Wir wollen  $\int_a^b f(x) \, dx$  definieren, wenn möglich.

**Fall 0**

$$a, b \in \mathbb{R}, I = [a; b]$$

$$\int_a^b f(x) \, dx \text{ Regelintegral}$$

**Fall 1**

$$b \in \bar{\mathbb{R}}, I = [a; b)$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x) \, dx$$

Falls der Grenzwert existiert.

**Fall 2**

$$a \in \bar{\mathbb{R}}, b \in \mathbb{R}, b > a, I = (a; b]$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^b f(x) \, dx$$

Falls der Grenzwert existiert.

**Fall 3**

$$a, b \in \bar{\mathbb{R}}, a < b, I = (a; b)$$

$$\int_a^b f(x) \, dx := \overbrace{\int_a^c f(x) \, dx}^{\text{Fall 2}} + \overbrace{\int_c^b f(x) \, dx}^{\text{Fall 1}}$$

Sei  $c \in (a; b)$  falls beide Integrale auf der rechten Seite existieren!

**Definition 1.** Wert eines Integrals Existiert das uneigentliche Integral von  $f$ , so heisst  $\int_a^b f(x) \, dx$  konvergent so heisst der Grenzwert Wert des Integrals

**Definition 2.** absolut konvergentes Integral Konvergiert das Integral von  $|f|$ , so heisst das Integrals absolut konvergent

**Beispiel 14.**  $I = (0; +\infty)$

$$F_s(x) := \int \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \ln x & s = 1 \\ \frac{x^{1-s}}{1-s} & s \neq 1 \end{cases}$$

$$F_s(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow s > 1, \text{divergiert sonst}$$

$$F_s(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \Leftrightarrow s < 1, \text{divergiert sonst}$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx$$

existiert genau dann, wenn  $a > 0$  und  $s > 1$  und hat den Wert  $\frac{a^{1-s}}{s-1}$

$$\int_0^a \frac{1}{x^s} dx$$

existiert genau dann, wenn  $s < 1$  und hat den Wert  $\frac{a^{1-s}}{1-s}$

**Beispiel 15.**  $e^{-x} \in R(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-x} dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} (e^{-x})|_0^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} [-e^{-a} + e^0] = 1 \end{aligned}$$

**Beispiel 16.**  $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \in R(\mathbb{R})$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

divergiert  $x \rightarrow \pm\infty$ . Deshalb existieren

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ und } \int_{-\infty}^0 f(x) dx$$

nicht. Aber:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R f(x) dx &= 0 \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

**Beispiel 17.** Sei  $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ . Sei  $f = F' \in R(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  aber keine Regelfunktion auf  $\mathbb{R}$   $x >$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^\pi f(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(x)|_\varepsilon^\pi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F(x) - F(\varepsilon)) = F(x) \end{aligned}$$

## 1.8 Majorantenkriterium

**Satz 1.** *Majorantenkriterium* Seien  $f$  und  $g$  Regelfunktionen  $[a; b]$  mit  $|f| \leq g$ . Existiert  $\int_a^b g(x) dx$ , so existiert auch  $\int_a^b f(x) dx$

**Beweis 21.** *Sei*

$$F(u) = \int_a^u f(x) \, dx$$

$$G(u) = \int_a^u g(x) \, dx$$

$$\forall u, v \in [a; b)$$

$$\begin{aligned} |F(u) - F(v)| &= \left| \int_b^u f(x) \, dx \right| \leq \int_v^u |f(x)| \, dx \leq \\ &\leq \left| \int_v^u g(x) \, dx \right| = |G(u) - G(v)| \end{aligned}$$

$G(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$  existiert  $\implies G$  erfüllt das Cauchy Kriterium.  $\implies F$  erfüllt das Cauchy Kriterium  $\implies \lim_{n \rightarrow b} F(u)$  existiert

## 2 Kurven (Kapitel 12)

$$\begin{array}{ll} \gamma : I \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ \gamma : t \mapsto & (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)) \end{array}$$

$x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  Komponentenfunktionen

**Definition 1.** parametrisierte Kurve Eine parametrisierte Kurve (kurz: Kurve) ist eine Abbildung  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , deren Komponentenfunktionen stetig sind.

**Definition 2.** differenzierbare Kurve Eine Kurve heisst differenzierbar, wenn jede Komponentenfunktion differenzierbar ist. Analog für stetig differenzierbar.

**Definition 3.** Spur Das Bild  $\gamma(I) \in \mathbb{R}^n$  heisst die Spur von  $\gamma$ .

$$\text{Spur}(\gamma)$$

*Bemerkung 13.* Eine Kurve ist eine Abbildung und ihre Spur ist eine Teilmenge