Факторизация чисел Ро-методом Полларда

Кузнецова Арина 6373

Ро-алгоритм Полларда

В 1975 году Поллард опубликовал статью, в которой он, основываясь на алгоритме обнаружения циклов Флойда, изложил идею алгоритма факторизации чисел, работающего за время, пропорциональное N^(¼).

С его помощью было разложено на множители число Ферма F_8 = 2^(256) + 1.

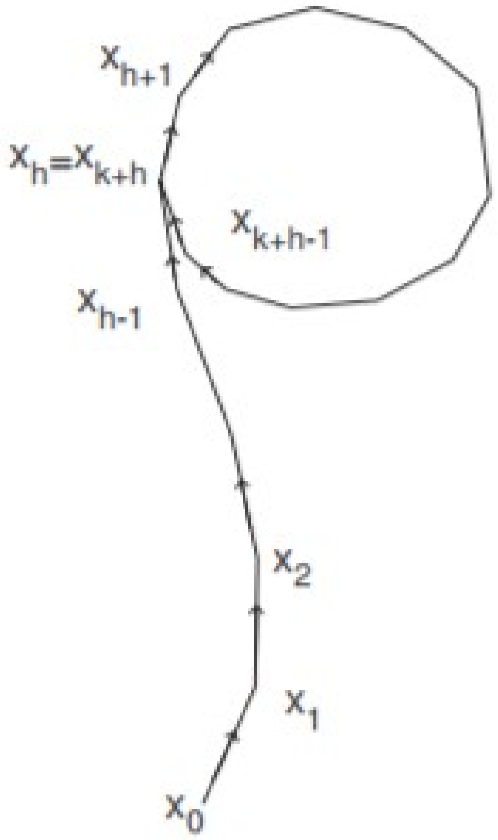
Оригинальная версия алгоритма

Возьмем некоторое случайное отображение

$f : Z_n \to Z_n$, которое сгенерирует некоторую случайную последовательность x0, x1, x2, . . . где $x_i = f(x_{i-1})$. Обычно берётся многочлен f(x) = x*x + 1.

Функция f имеет не более, чем n значений, поэтому последовательность зациклится.

$x_{k+h} = x_h$



Оригинальная версия алгоритма

Рассмотрим теперь алгоритм подробнее.

При выбранном многочлене $F(x) = x*x + 1 \pmod{n}$ рассматриваем

$x_i = f(x_{i-1})$. Причём i - индекс элемента перед зацикливанием последовательности.

И для всех $j<i$ вычисляем НОД $d = gcd(|x_i-x_j|, n)$.

Если $n> d > 1$, то d – нетривиальный делитель n.

Если n/d - составное число, то применяем данный алгоритм ещё раз уже к числу n/d. И так продолжаем до тех пор, пока не получим разложение только из простых чисел.

Особенности использования алгоритма

Следует отметить, что рассматриваемый алгоритм в значительной степени случаен, его эффективность сильно и непредсказуемо зависит от выбора многочлена и начального элемента в последовательности.

Метод эффективен для нахождения небольших простых делителей числа n. Делители большего размера тоже могут быть обнаружены, однако лишь с некоторой вероятностью.

Тест на простоту чисел Миллера-Рабина

Для реализации факторизации чисел любого метода нужен тест на простоту чисел.

Я выбрала вероятностный тест Миллера-Рабина, так как при проверке k чисел на условия простоты вероятность того, что составное число будет принято за простое, будет меньше (¼)^k. В своей программе я проверяла 3 случайных числа, так в этом случае достигается достаточно удовлетворительная вероятность 0.015625.

Тест на простоту чисел Миллера-Рабина

Для проверки числа n (причём n>2) на простоту, во-первых, оно представляется в виде n-1 = t * 2^(s), где t -нечётно.

Дальше проверяются следующие утверждения.

Если n - простое, то для любого a из Z_n (a < n) выполняются:

1) a^t = 1 (mod n)

2) Существует такое r, что при 0<= r < s : a^(t*(2^s)) = -1 (mod n)

Если хотя бы одно из этих условий соблюдается, то число a является свидетелем простоты числа n.

Делая проверку на 3 случайных числах, мы повышаем вероятность того, что число n не псевдопростое.

Использование модуля факторизации числа Ро-методом Полларда

В репозитории с программой лежит отдельный файл factRhoPollard.cpp с примером использования разработанного мной модуля. Также я выделила в него те функции, которые я дополнительного прописывала для реализации поставленного метода. На гитхабе не отображается кириллица, но при копировании репозитория всё должно быть нормально. Но, на всякий случай, размещаю тут, что делают конкретные функции:

1)возведение в степень

LNum power(LNum const&, LNum const&);

2)проверка на простоту числа с помощью теста Миллера-Рабина

bool isPrimeNum(LNum const&);

Использование модуля факторизации числа Ро-методом Полларда

(как это всё выглядит)