1. G-injective MPS

1.1 定義

この節では有限群の表現論についての知識を前提とする。

定義 1.1. Intertwiner

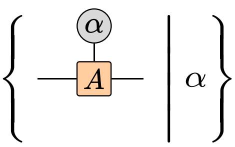
群 G のベクトル空間 $\mathcal{V}^\alpha, \mathcal{V}^\beta$ 上の表現 $D^\alpha : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{V}^\alpha)$ および $D^\beta : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{V}^\beta)$ に対して線形写像 $A : \mathcal{V}^\alpha \to \mathcal{V}^\beta$ が

$$AD^\alpha(g) = D^\beta(g)A \tag{1.1}$$

となるとき、A を intertwiner、または G-準同型と言い、$A \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{V}^\alpha, \mathcal{V}^\beta)$ と書く。

定義 1.2. G-injectivity

$A \in \mathrm{L}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ に対してユニタリ表現 $g \mapsto U_g$ が存在して

$$\mathrm{Span}\{A^s\}_s =$$


$$= \mathrm{Hom}_G(\mathcal{V}, \mathcal{V}) = \{X \mid \forall g \in G, [X, U_g] = 0\} \tag{1.2}$$

を満たすとき、A は G-injective であると言う。

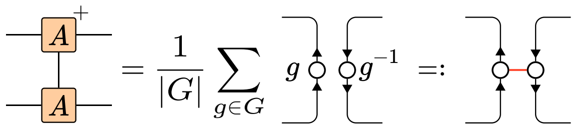
補題 1.1.

以下は同値

1. A が G-injective
2. A から定まる $\mathcal{P}(A) : \mathrm{L}(\mathcal{V}) \to \mathcal{H}$ に対して

$$\mathcal{P}(A)^+\mathcal{P}(A)(X) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} U_g X U_{g^{-1}}. \tag{1.3}$$

これは以下のように図示される。



(1.4)

ただし図式では U_g の代わりに g と書いた。

$\Pi := \mathcal{P}(A)^{-1}\mathcal{P}(A)$ が射影演算子であることは以下のように示される。

$$\Pi^2(X) = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g,h\in G} U_{gh} X U_{gh}^\dagger = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} U_g X U_g^\dagger = \Pi(X). \tag{1.5}$$

さらに

$$X = U_g X U_g^\dagger = \Pi(X), \tag{1.6}$$
$$U_g \Pi(X) U_g^\dagger = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} U_{gh} X U_{hg}^\dagger = \Pi(X) \tag{1.7}$$

から Π は $\mathrm{Hom}_G(\mathcal{V},\mathcal{V})$ への射影演算子だと分かる。一般に $\mathrm{im}(\mathcal{P}(A)^{+}\mathcal{P}(A)) = \mathrm{im}\,\mathcal{P}(A)^\dagger = \mathrm{Span}\{\bar{A}^s\}_s$ が成り立つことと、$\mathrm{Hom}_G(\mathcal{V},\mathcal{V})$ が複素共役について閉じていることから、1. と 2. の同値性が示される。

補題 1.2.

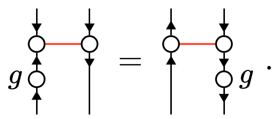
G-injectivity は連結によって保たれる。

Proof. G-injective なテンソル $A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ に対し

$$\mathrm{Span}\{A^s B^t\} = \mathrm{Hom}_G(\mathcal{V},\mathcal{V})\,\mathrm{Hom}_G(\mathcal{V},\mathcal{V}) = \mathrm{Hom}_G(\mathcal{V},\mathcal{V}). \tag{1.8}$$

□

補題 1.3.



(1.9)

Proof.

$$\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}U_gU_h\otimes U_{h^{-1}} = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}U_{gh}\otimes U_{h^{-1}g^{-1}}U_g$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}U_h\otimes U_{h^{-1}}U_g. \tag{1.10}$$

□

補題 1.4.

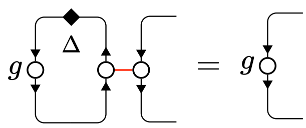
$\Delta\in \mathrm{L}(\mathcal{V})$ を以下のように定める。

$$\Delta = \sum_i \frac{d_i}{m_i}\Pi_i \tag{1.11}$$

ここで Π_i は既約表現 $D^i(g)$ に対応する部分空間への射影である。d_i は $D^i(g)$ の次元であり、m_i は多重度である。このとき

$$\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\mathrm{Tr}[U_gU_{h^{-1}}\Delta]U_h = U_g \tag{1.12}$$

となる。これを以下のように図示する。



(1.13)

Proof. 既約表現 $D^i(g)$ の指標を $\chi^i(g)$ と書く。Π_i は以下のように表示される。

$$\Pi_i = \frac{d_i}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^i(g)^*U_g \tag{1.14}$$

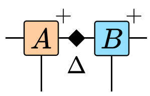
これを用いると、

$$\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\mathrm{Tr}[U_gU_{h^{-1}}\Delta]U_h = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\mathrm{Tr}[U_{h^{-1}}\Delta]U_hU_g$$
$$= \sum_i\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\frac{d_i}{m_i}\mathrm{Tr}[U_{h^{-1}}\Pi_i]U_hU_g$$
$$= \sum_i\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}d_i\chi^i(h)^*U_hU_g$$
$$= \sum_i\Pi_iU_g = U_g \tag{1.15}$$

□

補題 1.5.

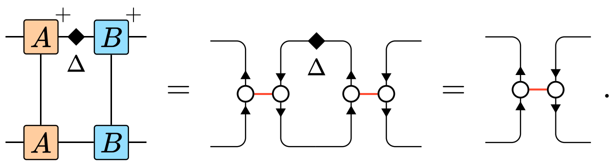
G-injective な A, B の連結に対して、以下は一般化逆行列になっている。擬逆行列とは限らない。



(1.16)

ここで Δ は補題 1.4 で定義される行列である。

Proof.



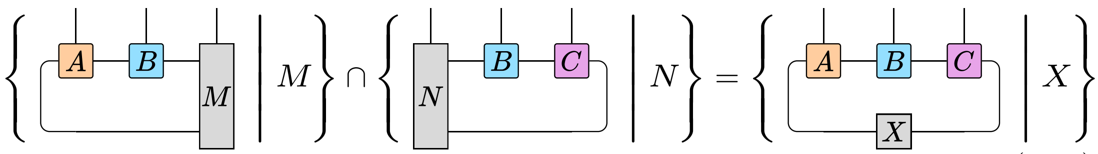
(1.17)

□

1.2 Parent Hamiltonian

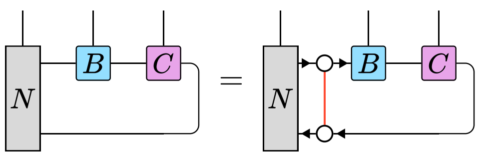
定理 1.1. Intersection property

$A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ を G-injective なテンソルとする。このとき、



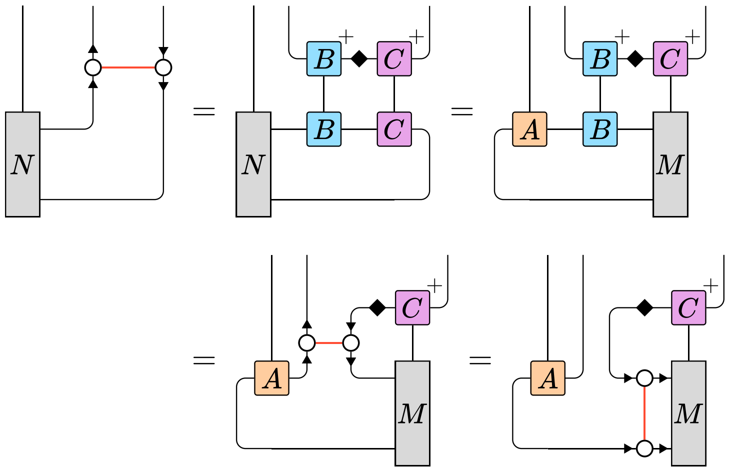
(1.18)

Proof. 右辺 $\subset$ 左辺は明らかなので左辺 $\subset$ 右辺を示す。左辺の元に対し、B, C が G-injective なことから



(1.19)

である。ここで

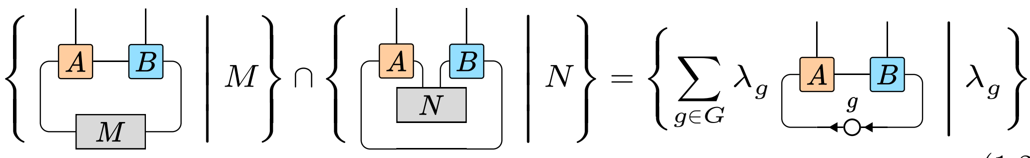


(1.20)

である。これを (1.19) に代入することで左辺 ⊂ 右辺を得る。 □

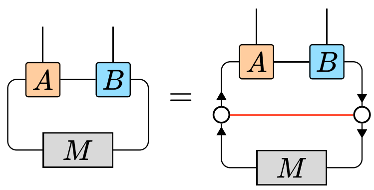
定理 1.2. Closure property

$A, B \in \mathrm{L}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ を G-injective なテンソルとする。



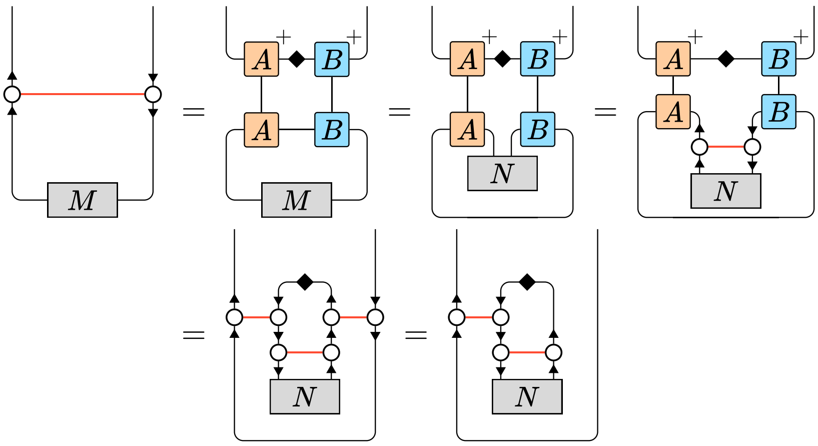
(1.21)

Proof. $M = N = \sum_{g\in G} \lambda_g U_g$ とおけるので右辺 ⊂ 左辺は明らか。次に左辺の元に対して、



(1.22)

が成り立つ。等式



(1.23)

を (1.22) に代入することで左辺 $\subset$ 右辺を得る。ここで 3 つ目の等号では A^s, B^s が intertwiner であることを用いた。また 5 つ目の等号では (1.9) を用いた。 $\square$

定理 1.3.

G-injective なテンソル $A \in \mathrm{L}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ に対する parent Hamiltonian の基底空間は $\mathrm{Span}\{\mathrm{Tr}[U_g \overbrace{A \cdots A}^{L}]\}_{g \in G}$ で与えられる。基底空間の次元は表現空間 $\mathcal{V}$ に含まれる多重度を除いた既約表現の数に一致する。

Proof. 基底空間が $\mathrm{Span}\{\mathrm{Tr}[U_g \overbrace{A \cdots A}^{L}]\}_{g \in G}$ になることの証明は、injective な場合と同様である。A が G-injective であることから intersection property により

$$\ker H = \left\{ \mathrm{Tr}[X \overbrace{A \cdots A}^{L}] \,\middle|\, X \in \mathrm{L}(\mathcal{V}) \right\} \cap \left\{ \mathrm{Tr}[AX \overbrace{A \cdots A}^{L-1}] \,\middle|\, X \in \mathrm{L}(\mathcal{V}) \right\} \tag{1.24}$$

となる。よって closure property から

$$\ker H = \left\{ \lambda_g \, \mathrm{Tr}[U_g \overbrace{A \cdots A}^{L}] \,\middle|\, \lambda_g \in \mathbb{C} \right\} \tag{1.25}$$

となる。次に縮退度を求める。A の G-injectivity から

$$\mathrm{Tr}[U_g \overbrace{A \cdots A}^{L}] = \mathrm{Tr}[U_g U_h \overbrace{A \cdots A}^{L} U_{h^{-1}}] = \mathrm{Tr}[U_{h^{-1}gh} \overbrace{A \cdots A}^{L}] \tag{1.26}$$

が成り立つ。よって同じ共役類 C_i の元に対して $\mathrm{Tr}[\overbrace{A\cdots A}^{L}\,U_g]$ は等しくなる。したがって

$$\mathrm{Span}\{\mathrm{Tr}[U_g\,\overbrace{A\cdots A}^{L}] \mid g\in G\} = \mathrm{Span}\left\{\sum_{g\in C_i}\mathrm{Tr}[U_g\,\overbrace{A\cdots A}^{L}]\;\middle|\; C_i\right\} \tag{1.27}$$

となる。共役類を添字にもつベクトルの基底として、指標 $\chi^i(C_j)^*$ を用いることができるので、

$$\begin{aligned}\mathrm{Span}\{\mathrm{Tr}[U_g\,\overbrace{A\cdots A}^{L}] \mid g\in G\} &= \mathrm{Span}\left\{\sum_j \bar{\chi}^i(C_j)\sum_{g\in C_j}\mathrm{Tr}[U_g\,\overbrace{A\cdots A}^{L}]\;\middle|\; i\right\}\\ &= \mathrm{Span}\left\{\mathrm{Tr}[\Pi_i\,\overbrace{A\cdots A}^{L}]\;\middle|\; i\right\}\end{aligned} \tag{1.28}$$

が成り立つ。ここで、Π_i は既約表現 D^i への射影であり、以下のように表される。

$$\Pi_i := \frac{d_i}{|G|}\sum_{g\in G}\bar{\chi}^i(g)U_g. \tag{1.29}$$

次に $\mathrm{Tr}[\Pi_i\,\overbrace{A\cdots A}^{L}]$ の線形独立性を示す。$\sum_i \mu_i\,\mathrm{Tr}[\Pi_i\,\overbrace{A\cdots A}^{L}] = 0$ とすると、$\overbrace{A\cdots A}^{L}$ の G-injectivity から

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_i \mu_i U_g \Pi_i U_{g^{-1}} = \sum_i \mu_i \Pi_i = 0 \Rightarrow \mu_i = 0. \tag{1.30}$$

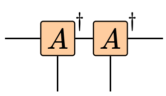
したがって、基底空間の次元は表現空間 $\mathcal{V}$ に含まれる多重度を除いた既約表現の数に一致する。 $\square$

定義 1.3. G-isometric MPS

G-injective なテンソル A に対し、表現 $g\mapsto U_g$ が正則であり、かつ $(A^+)^{ij}_s = \bar{A}^s_{ji}$ が成り立つとき、テンソル A は G-isometric であるという。

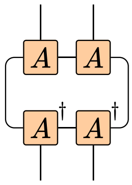
Remark 1.1.

正則表現に対して $\Delta = \sum_i \Pi_i = \mathbb{1}$ であることに注意すると、G-isometric なテンソルの擬逆行列は連結に対して保たれる。すなわち以下は AA の擬逆行列である。

 . (1.31)

Remark 1.2.

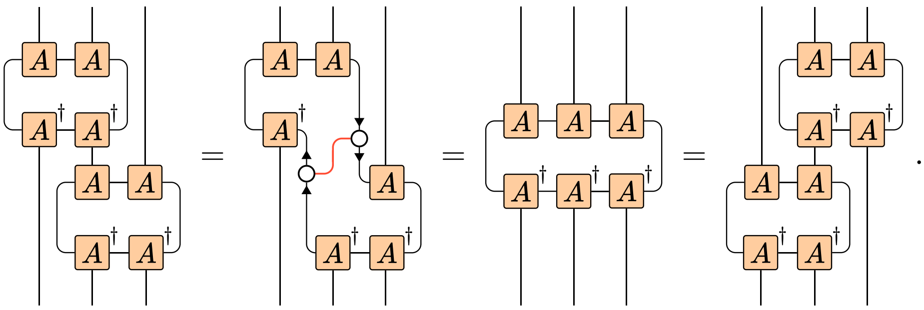
G-isometric なテンソルに対する parent Hamiltonian の局所項 h_i は以下のように書ける。

$h_i =$  $\otimes \mathbb{1}$ (1.32)

定理 1.4.

G-isometric なテンソルに対する parent Hamiltonian の各項は互いに交換する。

Proof.

 (1.33)

$\square$