1 Noether の定理

1.1 Euler-Lagrange 方程式

分配関数 $Z = \int \mathcal{D}\phi\, \mathrm{e}^{-S[\phi]}$ において主要な寄与は、$S[\phi]$ が最小となるような ϕ からの寄与である。これを $\phi_{\text{classical}}$ と書く。ここでパラメーター $\hbar$ を入れて、

$$Z = \int \mathcal{D}\phi\, \mathrm{e}^{-S[\phi]/\hbar} \tag{1.1}$$

と書き直す。統計力学の場合、温度 T が $\hbar$ に対応する。$\hbar \to 0$ の極限をとると、$\phi_{\text{classical}}$ の寄与のみが生き残る。これを古典極限という。

$\phi_{\text{classical}}$ が満たすべき方程式を求めよう。作用が局所的な Lagrangian $\mathcal{L}$ によって

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^d x\, \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \tag{1.2}$$

と書かれるとする。場を $\phi(x) \to \phi(x) + \delta\phi(x)$ と微小変化させたとき、作用の変化は

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \mathrm{d}^d x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \delta\phi \right) \\ &= \int \mathrm{d}^d x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta\phi + \int \mathrm{d}^d x\, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi \right)\end{aligned} \tag{1.3}$$

となる。第 2 項は表面項であり、境界で $\delta\phi = 0$ とおけば無視できる。このような任意の場 $\delta\phi$ に対して $\delta S = 0$ となるとき、

$$\boxed{\frac{\delta S}{\delta \phi} \coloneqq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0} \tag{1.4}$$

が成り立つ。この式を **Euler-Lagrange 方程式**、または単に運動方程式と呼ぶ。古典場 $\phi_{\text{classical}}(x)$ は作用の停留点になっているので、運動方程式を満たす。

1.2 Noether の定理

座標変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu(x)$ を考える。スカラー場 $\phi(x)$ の変換性を、

$$\phi'(x') - \phi(x) = 0 \tag{1.5}$$

によって定義すると、$\partial_\mu \phi(x)$ の変換性は、

$$\partial'_\mu \phi'(x') - \partial_\mu \phi(x) = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} - \delta^\nu_\mu \right) \partial_\nu \phi(x) = \partial_\mu \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi \tag{1.6}$$

と計算される。また変換による積分測度の変化は

$$\mathrm{d}^d x' = \det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\mathrm{d}^d x = (1 - \partial_\mu \varepsilon^\mu)\,\mathrm{d}^d x \tag{1.7}$$

となる。したがって作用の変化は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\Omega'} \mathrm{d}^d x'\,\mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) - \int_\Omega \mathrm{d}^d x\,\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) && (1.8)\\ &= \int_\Omega \mathrm{d}^d x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}\right)\partial_\mu \varepsilon^\nu && (1.9)\end{aligned}$$

第 1 項は $\partial_\mu \phi(x)$ による寄与で第 2 項は Jacobian による寄与である。したがって、

$$\delta S = \int \mathrm{d}^d x\, T^\mu{}_\nu \partial_\mu \varepsilon^\nu, \quad T^\mu{}_\nu \coloneqq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \tag{1.10}$$

と書ける。$T^\mu{}_\nu$ を **(正準) エネルギー運動量テンソル**と呼ぶ。$\partial_\mu T^\mu{}_\nu$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^\mu{}_\nu &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\nu \partial_\mu \phi - \partial_\nu \mathcal{L}\\ &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\nu \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\partial_\nu \phi\\ &= -\frac{\delta S}{\delta \phi}\partial_\nu \phi && (1.11)\end{aligned}$$

となる。したがって部分積分から、

$$\delta S = \int \mathrm{d}^d x \left[\frac{\delta S}{\delta \phi}\varepsilon^\nu \partial_\nu \phi + \partial_\mu (T^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu)\right] \tag{1.12}$$

と変形できる。特定の座標変換に対して $\delta S = 0$ となる場合、$\delta S/\delta \phi = 0$ のもとで

$$\partial_\mu (T^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu) = 0 \quad \text{(classical)} \tag{1.13}$$

が成り立つ。(classical) は運動方程式を課した上での等号であることを意味する。これを Noether の定理と呼び、$T^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu$ を **Noether カレント**と呼ぶ。また積分形で書いて

$$Q(\partial B) = 0 \quad \text{(classical)}, \quad Q(\Sigma) \coloneqq -\int_\Sigma \mathrm{d}^{d-1} S_\mu\, T^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu \tag{1.14}$$

となる。ここで ∂B は余次元 1 ($d-1$ 次元) の閉曲面である。$Q(\Sigma)$ を Σ 上の **Noether チャージ**と呼ぶ。同じ境界を持つ曲面 Σ_1, Σ_2 によって $\partial B = \Sigma_1 - \Sigma_2$ と表せるとき、

$$Q(\Sigma_1) = Q(\Sigma_2) \quad \text{(classical)} \tag{1.15}$$

が成り立つ。この式は曲面の境界を保つ連続的な変形に対し、Noether チャージが不変であることを意味している。

1.3 共形変換に対する Noether の定理

以下で具体的に共形変換に対する Noether の定理を見ていく。以下の議論は全て**無次元のスカラー場**に対する議論であり、後で一般化する際にいくつかの修正がされることを注意しておく。

並進

一様な並進 $\varepsilon^\mu(x) = a^\mu$ を考える。作用の変化は

$$\delta S = \int \mathrm{d}^d x\, T^\mu{}_\nu \partial_\mu a^\nu = 0 \tag{1.16}$$

となる。今の場合 $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ が x に陽に依存しないことを仮定しており、並進対称性は自動的に満たされている。

作用が座標変換 $x^\mu \to x^\mu - a^\mu$ に対して不変であるとき、Noether の定理から $\delta S \big/ \delta\phi = 0$ のもとで $a^\nu \partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$ が成り立つ。a^ν は任意であるから

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \quad \text{(classical)} \tag{1.17}$$

となる。並進に対応する Noether チャージは運動量 P_ν であり、

$$P_\nu(\partial B) \coloneqq -\int_{\partial B} \mathrm{d}^{d-1} x_\mu\, T^\mu{}_\nu(x) = 0 \tag{1.18}$$

が成り立つ。

回転

作用が回転対称性 (Lorentz 対称性) をもつとき、反対称テンソル $b^{\mu\nu} = -b^{\mu\nu}$ に対して座標変換

$$x^\mu \to x^\mu - b^{\nu\mu} x_\nu \tag{1.19}$$

は作用を不変に保つ。このとき、(1.10) から

$$\delta S = b^{\nu\rho} \int \mathrm{d}^d x\, T^\mu{}_\nu \partial_\mu x_\rho = \frac{1}{2} b^{\nu\rho} \int \mathrm{d}^d x\, (T_{\rho\nu} - T_{\nu\rho}) = 0 \tag{1.20}$$

が成り立つ。$b^{\nu\rho}$ は反対称ならば任意であり、積分領域も任意にとることができるので、

$$T_{\rho\nu} - T_{\nu\rho} = 0 \tag{1.21}$$

が成り立つ。つまり作用の回転対称性は、エネルギー運動量テンソルが対称テンソルとなることを意味する。また、Noether カレントは $b^{\nu\rho} x_\rho T^\mu{}_\nu$ となり、

$$\partial_\mu (x_\rho T^\mu{}_\nu - x_\nu T^\mu{}_\rho) = 0 \quad \text{(classical)} \tag{1.22}$$

が成り立つ。

スケール変換

次に、スケール変換

$$x^\mu \to (1-\lambda)x^\mu \tag{1.23}$$

に対して作用が不変であるとする。このとき、(1.10) から

$$\delta S = \lambda \int \mathrm{d}^d x\, T^\mu{}_\nu \partial_\mu x^\nu = \lambda \int \mathrm{d}^d x\, T^\mu{}_\mu = 0 \tag{1.24}$$

となる。積分領域は任意にとることができるから、

$$T^\mu{}_\mu = 0 \tag{1.25}$$

が成り立つ。つまり系のスケール対称性はエネルギー運動量テンソルがトレースレスになることを意味する。また Noether カレントは $x^\nu T^\mu{}_\nu$ となる。Noether の定理から

$$\partial_\mu (x^\nu T^\mu{}_\nu) = 0 \quad \text{(classical)} \tag{1.26}$$

が成り立つ。

特殊共形変換

特殊共形変換 $x^\nu \to x^\nu - c_\rho(2x^\nu x^\rho - x^2\delta^{\nu\rho})$ に対し、作用の変化は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta S &= c_\rho \int \mathrm{d}^d x\, T^{\mu\nu}\partial_\mu (2x_\nu x^\rho - x^2 \delta^\rho_\nu) \\
&= 2c_\rho \int \mathrm{d}^d x \left(x^\rho T^\mu{}_\mu + x_\nu T^{\rho\nu} - x_\mu T^{\mu\rho} \right) \\
&= 2c_\rho \int \mathrm{d}^d x \left(x^\rho T^\mu{}_\mu + x_\mu (T^{\rho\mu} - T^{\mu\rho}) \right)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

作用が回転対称かつスケール不変ならば、エネルギー運動量テンソルは対称かつトレースレスとなるので、特殊共形変換に対して作用は不変である。したがって共形不変性が成り立つ。つまり無次元のスカラー場では、(回転対称性を仮定した上で) スケール不変性は共形不変性に拡大する。

1.4 一般の場合の Noether カレント

座標変換と内部空間の変換が同時に起こる場合を考える。n 成分の場 $\boldsymbol{\phi}$ を考え、微小な座標変換

$$x'^\mu - x^\mu = \varepsilon^\mu(x) \coloneqq \varepsilon^a(x) X_a x^\mu \tag{1.28}$$

とそれに伴う内部空間の微小変換

$$\boldsymbol{\phi}'(x') - \boldsymbol{\phi}(x) = G\boldsymbol{\phi}(x) \coloneqq \varepsilon^a(x) G_a(x) \boldsymbol{\phi}(x), \tag{1.29}$$

を考える。ただし、$X_a = X_a^\mu(x)\partial_\mu$ は微分演算子であり、G_a は $n\times n$ 行列である。$\partial_\mu\boldsymbol{\phi}(x)$ の変換性は

$$\partial'_\mu\boldsymbol{\phi}'(x') - \partial_\mu\boldsymbol{\phi}(x) = \partial_\mu\varepsilon^\nu\partial_\nu\boldsymbol{\phi}(x) + \partial_\mu(G\boldsymbol{\phi}(x)) \tag{1.30}$$

となる。G_a による作用の変化は、

$$\int \mathrm{d}^d x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{\phi}}\varepsilon^a G_a\boldsymbol{\phi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\boldsymbol{\phi}}\partial_\mu(\varepsilon^a G_a\boldsymbol{\phi})\right) = \int \mathrm{d}^d x\left(\frac{\delta S}{\delta\boldsymbol{\phi}}\varepsilon^a G_a\boldsymbol{\phi} + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\boldsymbol{\phi}}\varepsilon^a G_a\boldsymbol{\phi}\right)\right) \tag{1.31}$$

と計算される。これに (1.10) と同様の寄与を加えると、作用の変化は

$$\boxed{\delta S = \int \mathrm{d}^d x\left(T^\mu{}_\nu\partial_\mu\varepsilon^\nu + \frac{\delta S}{\delta\boldsymbol{\phi}}G\boldsymbol{\phi} + \partial_\mu j^\mu\right)} \tag{1.32}$$

となる。ここで、$T^\mu{}_\nu$ と j^μ を以下のように定義した。

$$T^\mu{}_\nu \coloneqq \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\boldsymbol{\phi}}\partial_\nu\boldsymbol{\phi} - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}, \quad j^\mu \coloneqq \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\boldsymbol{\phi}}G\boldsymbol{\phi} \tag{1.33}$$

(1.11) と同様に

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu\partial_\mu\varepsilon^\nu &= -\partial_\mu T^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu + \partial_\mu(T^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu) \\ &= \frac{\delta S}{\delta\boldsymbol{\phi}}\varepsilon^\nu\partial_\nu\boldsymbol{\phi} + \partial_\mu(T^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu) \end{aligned} \tag{1.34}$$

と変形できるので、

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \mathrm{d}^d x\left[\frac{\delta S}{\delta\boldsymbol{\phi}}(\varepsilon^\nu\partial_\nu + G)\boldsymbol{\phi} + \partial_\mu(T^\mu{}_\nu\varepsilon^\nu + j^\mu)\right] \\ &\coloneqq \int \mathrm{d}^d x\left(\frac{\delta S}{\delta\boldsymbol{\phi}}\delta\boldsymbol{\phi} + \partial_\mu J^\mu\right) \\ &\coloneqq \int \mathrm{d}^d x\left(\frac{\delta S}{\delta\boldsymbol{\phi}}\varepsilon^a\delta\boldsymbol{\phi}_a + \partial_\mu(\varepsilon^a J_a^\mu)\right) \end{aligned} \tag{1.35}$$

となる。ここでグローバルな変換 $\varepsilon^a(x) = \varepsilon^a$ に対し、$\delta S = 0$ となると仮定すると、恒等式

$$\frac{\delta S}{\delta\boldsymbol{\phi}}\delta\boldsymbol{\phi}_a + \partial_\mu J_a^\mu = 0 \tag{1.36}$$

が得られる。ここから $\delta S/\delta\boldsymbol{\phi} = 0$ のもとで連続の式 $\partial_\mu J_a^\mu = 0$ が成り立つ。また定数とは限らない一般の $\varepsilon^a(x)$ に対し、作用の変化は

$$\boxed{\delta S = \int \mathrm{d}^d x\, J_a^\mu(x)\partial_\mu\varepsilon^a(x), \quad J_a^\mu(x) = T^\mu{}_\nu X_a^\nu + j_a^\mu} \tag{1.37}$$

と書ける。

1.5 エネルギー運動量テンソルの改良 (対称化)

回転 (Lorentz) 変換 $\varepsilon^\mu = b^{\mu\nu}x_\nu,\ b^{\nu\mu} = -b^{\mu\nu}$ に対し、

$$\boldsymbol{\phi}'(x') = \boldsymbol{\phi}(x) + \frac{1}{2}b^{\mu\nu}\mathcal{S}_{\mu\nu}\boldsymbol{\phi}(x) \tag{1.38}$$

と変換する n 成分場 $\boldsymbol{\phi}$ を考える。ただし、$\mathcal{S}_{\mu\nu}$ は $\mu\nu$ の入れ替えについて反対称な $n \times n$ 行列である。

$$x^\rho{}_{\mu\nu} = x_\nu\delta^\rho_\mu - x_\mu\delta^\rho_\nu, \tag{1.39}$$

とおくと、$\varepsilon^\rho = \frac{1}{2}b^{\mu\nu}x^\rho{}_{\mu\nu}$ と書けるから、以下のカレントが得られる。

$$\begin{aligned} J^\rho{}_{\mu\nu} &= T^\rho{}_\sigma x^\sigma{}_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\rho\boldsymbol{\phi}}\mathcal{S}_{\mu\nu}\boldsymbol{\phi} \\ &= x_\nu T^\rho{}_\mu - x_\mu T^\rho{}_\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\rho\boldsymbol{\phi}}\mathcal{S}_{\mu\nu}\boldsymbol{\phi} \end{aligned} \tag{1.40}$$

第 3 項を $s^\rho{}_{\mu\nu}$ とおくことにする。

$$s^\rho{}_{\mu\nu} \coloneqq \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\rho\boldsymbol{\phi}}\mathcal{S}_{\mu\nu}\boldsymbol{\phi}. \tag{1.41}$$

これはいままで j^μ_a と書いていたものと同じものである。

スピンを考慮すると、スカラー場のときと比べて (1.32) の第 2 項、第 3 項が加わっているためにエネルギー運動量テンソルは対称テンソルにはならない。そこで、エネルギー運動量テンソルを以下のように定義し直す。

$$\boxed{T^{\mathrm{B}}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \partial^\rho B_{\rho\mu\nu}, \quad B_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}(s_{\rho\mu\nu} + s_{\mu\nu\rho} - s_{\nu\rho\mu})} \tag{1.42}$$

これは Belinfante のエネルギー運動量テンソルと呼ばれる。また、改良された回転に対する Noether カレントを

$$\boxed{J^{\mathrm{B}}_{\rho\mu\nu} = x_\nu T^{\mathrm{B}}_{\rho\mu} - x_\mu T^{\mathrm{B}}_{\rho\nu}} \tag{1.43}$$

と定義する。$s_{\mu\nu\rho}$ の定義から $s_{\mu\rho\nu} = -s_{\mu\nu\rho}$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} B_{\mu\rho\nu} &= \frac{1}{2}(s_{\mu\rho\nu} + s_{\rho\nu\mu} - s_{\nu\mu\rho}) \\ &= \frac{1}{2}(-s_{\mu\nu\rho} - s_{\rho\mu\nu} + s_{\nu\rho\mu}) = -B_{\rho\mu\nu} \end{aligned} \tag{1.44}$$

が分かる。したがって、

$$\partial^\mu T^{\mathrm{B}}_{\mu\nu} = \partial^\mu T_{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\rho B_{\rho\mu\nu} = \partial^\mu T_{\mu\nu} \tag{1.45}$$

となる。ここから $\partial^\rho J^{\mathrm{B}}_{\rho\mu\nu}$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\partial^\rho J^{\mathrm{B}}_{\rho\mu\nu} &= T^{\mathrm{B}}_{\nu\mu} - T^{\mathrm{B}}_{\mu\nu} + x_\nu \partial^\rho T^{\mathrm{B}}_{\rho\nu} - x_\mu \partial^\rho T^{\mathrm{B}}_{\rho\mu} \\ &= T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu} + \partial^\rho s_{\rho\mu\nu} + x_\nu \partial^\rho T_{\rho\nu} - x_\mu \partial^\rho T_{\rho\mu} \\ &= \partial^\rho J_{\rho\mu\nu}\end{aligned} \tag{1.46}$$

となる。したがって $J_{\rho\mu\nu}$ の代わりに $J^{\mathrm{B}}_{\rho\mu\nu}$ を用いても問題ない。$T^{\mathrm{B}}_{\mu\nu}$ が対称テンソルとなることは、

$$\begin{aligned}T^{\mathrm{B}}_{\nu\mu} - T^{\mathrm{B}}_{\mu\nu} &= T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu} + \partial^\rho s_{\rho\mu\nu} \\ &= \partial^\rho J^\rho{}_{\mu\nu} - x_\nu \partial^\rho T_{\rho\nu} + x_\mu \partial^\rho T_{\rho\mu} \\ &= 0 \quad (\text{classical})\end{aligned} \tag{1.47}$$

から分かる。ただし最後の等式では運動方程式を課した。

例として、電磁場の Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{1.48}$$

を考える。ここで $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ である。Lagrangian は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) \partial^\mu A^\rho \partial^\nu A^\sigma \tag{1.49}$$

とも書ける。第 2 項のために A^μ を d 個の独立したスカラーとはみなせず、A^μ にベクトルとしての変換性を課さなければ、作用の回転対称性を満たすことができない。実際、エネルギー運動量テンソルを求めると、

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\rho} \partial_\nu A^\rho - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{1.50}$$

であり、対称になっていない。そこで、エネルギー運動量テンソルを改良する。結果だけ書くと、

$$T^{\mathrm{B}}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \partial^\rho (F_{\rho\mu} A_\nu) = -F_{\mu\rho} F^{\nu\rho} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} - A_\nu \partial^\rho F_{\rho\mu} \tag{1.51}$$

であり、運動方程式 $\partial^\rho F_{\rho\mu} = 0$ のもとで $T^{\mathrm{B}}_{\mu\nu}$ が対称テンソルになっていることが分かる。さらに、$d = 4$ では運動方程式のもとでトレースレスになる。後で議論するが、これは共形不変性を意味する。

1.6 エネルギー運動量テンソルの改良 (トレースレス化)

スケール変換 $\varepsilon^\mu = x^\mu$ に対し、

$$\phi'(x') = \phi(x) + \Delta\phi(x) \quad (\Delta \in \mathbb{R}) \tag{1.52}$$

と変換する場を考える。これは ϕ が質量次元 Δ をもつことを意味する (長さの質量次元は -1 である)。スケール変換に対する Noether カレントは

$$J^\mu = x^\nu T^\mu{}_\nu + V^\mu, \quad V^\mu = \Delta\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \tag{1.53}$$

と定義される。V^μ は virial カレントと呼ばれる。$\varDelta \neq 0$ のとき、運動方程式のもとで

$$T^{\mu}{}_{\mu} = -\partial_\mu V^\mu \quad \text{(classical)} \tag{1.54}$$

となり、エネルギー運動量テンソルがトレースレスにならないことがわかる。

そこで、エネルギー運動量テンソルを改良してトレースレスにすることを考える。$T_{\mu\nu}$ を以下のように改良しよう。ただし、これは既に対称テンソルに改良されているとする。

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} &+ \frac{1}{d-2}(\partial_\mu\partial_\rho L^\rho_\nu + \partial_\nu\partial_\rho L^\rho_\mu - \partial_\rho\partial^\rho L_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma L^{\rho\sigma}) \\ &+ \frac{1}{(d-2)(d-1)}(\delta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial^\rho L^\sigma_\sigma - \partial_\mu\partial_\nu L^\sigma_\sigma)\end{aligned} \tag{1.55}$$

$L_{\mu\nu}$ は

$$\partial^\mu\partial^\nu L_{\mu\nu} = -\partial_\mu V^\mu = T^\mu_\mu \quad \text{(classical)} \tag{1.56}$$

を満たすような対称テンソルである。このような $L_{\mu\nu}$ が必ず存在するとは限らないが、ここでは $L_{\mu\nu}$ が見つかったとする。また改良された Noether カレントは

$$\tilde{J}^\mu = x^\nu \tilde{T}^\mu_\nu \tag{1.57}$$

と定義される。

(1.55) は複雑な形をしていて面食らうかもしれないが、これでうまくいくことは簡単に確認できる。$\tilde{T}_{\mu\nu}$ は対称テンソルであり、$\partial_\mu \tilde{T}^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu$ を満たす。さらに、

$$\tilde{T}^\mu_\mu = T^\mu_\mu + \partial_\mu V^\mu \tag{1.58}$$

となる。したがって、

$$\partial_\mu \tilde{J}^\mu = \tilde{T}^\mu_\mu + x_\nu \partial_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu J^\mu \tag{1.59}$$

となる。また、

$$\tilde{T}^\mu_\mu = \partial_\mu J^\mu - x^\nu \partial_\mu T^\mu_\nu = 0 \quad \text{(classical)} \tag{1.60}$$

が成り立つ。ただし最後の等式では運動方程式を課した。特に $L_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} L$ と書ける時、

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{1}{(d-1)}(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial^\rho)L \tag{1.61}$$

となる。

例として、スカラー場の Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - U(\phi) \tag{1.62}$$

を考える。$S = \int \mathrm{d}^d x \mathcal{L}$ が無次元量となるためには、$\phi(x)$ の質量次元は $\Delta = (d-2)/2$ でなければならない。また、$U(\phi)$ の質量次元が d になるためには

$$U(\phi) = \lambda\phi^{d/\Delta} = \lambda\phi^{2d/(d-2)} \tag{1.63}$$

でなければならない。ただし、$d = 2$ の場合は ϕ が無次元となるために、$U(\phi)$ は任意関数となる。$d \neq 2$ の場合、運動方程式は

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi = -\frac{d}{\Delta}\lambda\phi^{\frac{d}{\Delta}-1} = -\frac{2d}{d-2}\lambda\phi^{\frac{d+2}{d-2}} \tag{1.64}$$

となる。ここで、エネルギー運動量テンソル

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\phi}\partial_\nu\phi - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L} \\ &= \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial_\nu\phi + \delta_{\mu\nu}U(\phi) \end{aligned} \tag{1.65}$$

は明らかにトレースレスではない。(いまはスピン 0 の場を考えているので、対称テンソルにはなっている。) これを改良しよう。

$$V^\mu = \Delta\phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} = \Delta\phi\partial^\mu\phi \tag{1.66}$$

から、$L_{\mu\nu}$ は

$$\partial^\mu\partial^\nu L_{\mu\nu} = -\partial_\mu V^\mu = \Delta\partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi) = \frac{\Delta}{2}\partial^\mu\partial^\nu(\delta_{\mu\nu}\phi^2) \tag{1.67}$$

を満たす。したがって、$L_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\Delta\phi^2/2 = \delta_{\mu\nu}(d-2)\phi^2/4$ とおけるので、(1.61) から

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} + \frac{d-2}{4(d-1)}(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial^\rho)\phi^2 \\ &= \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi + \delta_{\mu\nu}U(\phi) + \frac{d-2}{4(d-1)}(\delta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial^\rho - \partial_\mu\partial_\nu)\phi^2 \end{aligned} \tag{1.68}$$

となる。運動方程式を用いると、これがトレースレスであることを示せる。

1.7 特殊共形変換

特殊共形変換に対する場の変換性はプライマリー場に制限しなければ複雑な形となる。多くの理論は作用に微分項を含むため、特殊共形変換に対する Noether カレントを直接構成するのは大変である。しかし、改良されたエネルギー運動量テンソルを用いると、

$$J^\mu{}_\nu := \tilde{T}^{\mu\rho}(2x_\nu x_\rho - x^2\delta_{\nu\rho}) = 2x_\nu x_\rho\tilde{T}^{\mu\rho} - x^2\tilde{T}^\mu_\nu \tag{1.69}$$

と簡単に定義できる。この微分を計算すると、

$$\partial_\mu J^\mu{}_\nu = 2x_\nu\tilde{T}^\mu_\mu + 2x^\mu(\tilde{T}_{\nu\mu} - \tilde{T}_{\mu\nu}) = 0 \quad \text{(classical)} \tag{1.70}$$

が成り立つので、保存則が成り立つ。ここから特殊共形変換についての対称性が分かる。ここで、回転対称性とスケール不変性から自動的に共形不変性が導かれるように見えるが、そうではない。そもそも、エネルギー運動量テンソルをトレースレスに改良する際に、

$$T^\mu_\mu = \partial^\mu \partial^\nu L_{\mu\nu} \quad \text{(classical)} \tag{1.71}$$

となる $L_{\mu\nu}$ が存在することを仮定していた。この仮定はスケール不変性が共形不変性に拡大するための十分条件となっている。

1.8 エネルギー運動量テンソルの別定義

Euclid 不変な理論に対し、改良されたエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は添字の交換について対称であるから、座標変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu$ に対し、

$$\delta S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d x\, T_{\mu\nu}(\partial^\mu \varepsilon^\nu + \partial^\nu \varepsilon^\mu) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d x\, T_{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{1.72}$$

と書ける。ここで、作用を一般の計量 $g_{\mu\nu}$ まで拡張して

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^d x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \to S[g, \phi] = \int \mathrm{d}^d x \sqrt{g}\, \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \phi, \partial_\mu \phi) \tag{1.73}$$

と変更する。ここで $\sqrt{g} \coloneqq \sqrt{\det g_{\mu\nu}}$ である。すると、一般座標変換に対して不変となるような作用を構成でき、

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d x \sqrt{g}\, T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \int \mathrm{d}^d x\, \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} = 0 \tag{1.74}$$

が成り立つ。ここから

$$\boxed{T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}} \tag{1.75}$$

が得られる。この式をエネルギー運動量テンソルの定義とすることができる。

ここで、作用 $S[g, \phi]$ に Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ に比例する項を加えても平坦な計量の理論は不変であることに注目する。つまり、作用を

$$S \to S + \int \mathrm{d}^d x \sqrt{g}\, R_{\mu\nu}(x)\tilde{L}^{\mu\nu}(x) \tag{1.76}$$

と変えてもよい。この自由度を用いてエネルギー運動量テンソルを改良することができる。実はこれが (1.55) がやっていることである。もしエネルギー運動量テンソルがトレースレスに改良できたとすると、共形変換に対し、

$$\delta S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d x\, T_{\mu\nu}(\partial^\mu \varepsilon^\nu + \partial^\nu \varepsilon^\mu) = \frac{1}{d}\int \mathrm{d}^d x\, T^\mu_\mu \partial_\rho \varepsilon^\rho = 0 \tag{1.77}$$

となる。2 個目の等号では共形 Killing 方程式を用いた。したがって共形不変性が成り立つ。