1　2016 年 (平成 28 年)

物理学 I

第 1 問

[1.1]

$$kv_0t_0 = \mu mg, \quad t_0 = \frac{\mu mg}{kv_0} \tag{1.1}$$

[1.2]

$$m\ddot{x}_B(t) = k(v_0(t+t_0) - 2x_B(t)) - \frac{2}{3}\mu mg = -2kx_B(t) + kv_0t + \frac{1}{3}kv_0t_0 \tag{1.2}$$

[1.3]

運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x_B(t) - \frac{v_0t}{2} - \frac{v_0t_0}{6}\right) = -2k\left(x_B(t) - \frac{v_0t}{2} - \frac{v_0t_0}{6}\right) \tag{1.3}$$

と書ける。よって $x_B(0) = \dot{x}_B(0) = 0$ から、$\omega = \sqrt{2k/m}$ とおくと

$$x_B(t) = \frac{v_0t}{2} + \frac{v_0t_0}{6} - \frac{v_0t_0}{6}\cos\omega t - \frac{v_0}{2\omega}\sin\omega t \tag{1.4}$$

となる。

[1.4]

$\omega t_0 \ll 1$ のとき、

$$\begin{aligned} x_B(t_0) &= \frac{v_0}{2}\left(t_0 - \frac{\sin\omega t_0}{\omega}\right) + \frac{v_0t_0}{6}(1 - \cos\omega t_0) \\ &= \frac{v_0t_0}{12}\omega^2t_0^2 \\ &= \frac{kv_0t_0^3}{6m} \end{aligned} \tag{1.5}$$

となる。$t = t_0$ での A, B 間の力は

$$kx_B(t_0) = \frac{\mu mg}{12}\omega^2t_0^2 \ll \mu mg \tag{1.6}$$

となり、A は静止している。

[2.1]

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2} = k_1 \left[1 - +3\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \tag{1.7}$$

より、$x=0$ まわりでばね定数 $-k_1$、$x=\pm l$ でばね定数 $2k_1$ の復元力が働く。ここから運動方程式を書き下すと、

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} q_A \\ q_B \\ q_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_0-2k_1 & k_0 & 0 \\ k_0 & -2k_0+k_1 & k_0 \\ 0 & k_0 & -k_0-2k_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_A \\ q_B \\ q_C \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

となる。次にこれを対角化するが、系の対称性 $A \leftrightarrow C$ に注意する。ここから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

という形を取る。1 つ目の固有値は $-k_0$ である。次に 2 つ目に対して、

$$\begin{pmatrix} -k_0-2k_1 & k_0 & 0 \\ k_0 & -2k_0+k_1 & k_0 \\ 0 & k_0 & -k_0-2k_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-k_0-2k_1)a+k_0b \\ 2k_0a+(-2k_0+k_1)b \\ (-k_0-2k_1)a+k_0b \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

から、ブロック対角行列

$$\begin{pmatrix} -k_0-2k_1 & k_0 \\ 2k_0 & -2k_0+k_1 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

の固有値を求めればよい。この固有値は

$$\lambda^2 - (-3k_0-k_1) + (-3k_0k_1-2k_1^2) = (\lambda-k_1)(\lambda+3k_0+2k_1) = 0 \tag{1.12}$$

から $\lambda = k_1, -3k_0-2k_1$ となる。以上により固有振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{k_0}{m}}, \quad \sqrt{\frac{3k_0+2k_1}{m}}, \tag{1.13}$$

第 2 問

物理学 II

第 1 問

[1]

ポテンシャルから境界条件

$$\psi(a/2) = \psi(-a/2) = 0 \tag{1.14}$$

が課される。一方、Schrödinger 方程式から

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx), \quad (A, B = \text{const.}) \tag{1.15}$$

となるので、規格化された固有関数は

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & (n = 1, 3, 5, ...) \\ \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & (n = 2, 4, 6, ...) \end{cases} \tag{1.16}$$

となる。エネルギー固有値は

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{1.17}$$

で与えられる。

[2]

あり得る波動関数は以下の 4 つ。

$$g(x_1)g(x_2) \tag{1.18}$$

$$e(x_1)e(x_2) \tag{1.19}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(g(x_1)e(x_2) + e(x_1)g(x_2)) \tag{1.20}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(g(x_1)e(x_2) - e(x_1)g(x_2)) \tag{1.21}$$

[3]

まず $S = 1$ となる固有状態は以下の 3 つがある。

$$|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2, \quad |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2) \tag{1.22}$$

次に $S=0$ となる固有状態は以下の 1 つだけである。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2-|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2) \tag{1.23}$$

これ以外の基底はない。

[4]

まず軌道が対称でスピンが反対称な固有状態として、以下の 3 つがある。

$$\Psi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}g(x_1)g(x_2)(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2-|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2), \tag{1.24}$$

$$\Psi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}e(x_1)e(x_2)(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2-|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2), \tag{1.25}$$

$$\Psi_3=\frac{1}{2}(g(x_1)e(x_2)+e(x_1)g(x_2))(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2-|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2). \tag{1.26}$$

それぞれのエネルギー固有値は、

$$E_1=\frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2},\quad E_2=\frac{4\hbar^2\pi^2}{ma^2},\quad E_3=\frac{5\hbar^2\pi}{2ma^2} \tag{1.27}$$

となる。次に軌道が反対称でスピンが対称な固有状態として、以下の 3 つがある。

$$\Psi_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(g(x_1)e(x_2)-e(x_1)g(x_2))|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2, \tag{1.28}$$

$$\Psi_5=\frac{1}{\sqrt{2}}(g(x_1)e(x_2)-e(x_1)g(x_2))|\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 \tag{1.29}$$

$$\Psi_6=\frac{1}{2}(g(x_1)e(x_2)-e(x_1)g(x_2))(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2+|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2) \tag{1.30}$$

それぞれのエネルギー固有値は、

$$E_4=E_5=E_6=\frac{5\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \tag{1.31}$$

となる。

[5]

$g(x)$ が偶関数、$e(x)$ が奇関数であることに注意すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}xg(x)^2\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}xe(x)^2\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}x^2e(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0 \tag{1.32}$$

が言える。このことに気をつけると、$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ は以下のように計算できる。

$$\langle \Psi_1 | (x_1 - x_2)^2 | \Psi_1 \rangle = 2A, \tag{1.33}$$
$$\langle \Psi_2 | (x_1 - x_2)^2 | \Psi_2 \rangle = 2B. \tag{1.34}$$

次に、

$$\begin{aligned}
&\langle \Psi_3 | (x_1 - x_2)^2 | \Psi_3 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, (x_1 - x_2)^2 (g(x_1)^2 e(x_2)^2 + 2g(x_1)e(x_1)g(x_2)e(x_2) + e(x_1)^2 g(x_2)^2) \\
&= \frac{1}{2}(A + B - 4C^2 + A + B) \\
&= A + B - 2C^2.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Ψ_4, Ψ_5, Ψ_6 についてはスピン部分が期待値に寄与しないので、

$$\begin{aligned}
&\langle \Psi_4 | (x_1 - x_2)^2 | \Psi_4 \rangle = \langle \Psi_5 | (x_1 - x_2)^2 | \Psi_5 \rangle = \langle \Psi_6 | (x_1 - x_2)^2 | \Psi_6 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, (x_1 - x_2)^2 (g(x_1)^2 e(x_2)^2 - 2g(x_1)e(x_1)g(x_2)e(x_2) + e(x_1)^2 g(x_2)^2) \\
&= A + B + 2C^2.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

[6]

1 次の摂動エネルギーは

$$\Delta E = \langle \Psi | V_0 x_1 x_2 | \Psi \rangle \tag{1.37}$$

と表される。これを各状態について求めると、

$$\begin{aligned}
&\langle \Psi_1 | V_0 x_1 x_2 | \Psi_1 \rangle = \langle \Psi_2 | V_0 x_1 x_2 | \Psi_2 \rangle = 0 \\
&\langle \Psi_3 | V_0 x_1 x_2 | \Psi_3 \rangle = V_0 C^2 \\
&\langle \Psi_4 | x_1 x_2 | \Psi_4 \rangle = \langle \Psi_5 | x_1 x_2 | \Psi_5 \rangle = \langle \Psi_6 | x_1 x_2 | \Psi_6 \rangle = -V_0 C^2
\end{aligned} \tag{1.38}$$

となる。したがって、$\Psi_1, \ldots, \Psi_6$ のエネルギーは、

$$\frac{\hbar^2 \pi^2}{ma^2}, \frac{4\hbar^2 \pi^2}{ma^2}, \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} + V_0 C^2, \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} - V_0 C^2, \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} - V_0 C^2, \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} - V_0 C^2 \tag{1.39}$$

となる。

第 2 問

[1]

終点の座標 X は、

$$X = a(n^+ - n^-) \tag{1.40}$$

と表される。分子が取りうる状態の数は 2^n である。また $X = na$ のとき、分子が取りうる状態の数は $N!/n^+!n^-!$ である。

$$n^+ = \frac{N+n}{2}, \quad n^- = \frac{N-n}{2} \tag{1.41}$$

なので、$X = na$ となる確率 $P(n)$ は

$$P(n) = \frac{1}{2^n} \frac{N!}{((N+n)/2)!((N-n)/2)!} \tag{1.42}$$

で与えられる。分子のエントロピーは、

$$S = k_\mathrm{B} \ln 2^n = nk_\mathrm{B} \ln 2 \tag{1.43}$$

である。

[2]

終点を固定したとき、分子のエントロピーは

$$\begin{aligned} S &= k_\mathrm{B} \ln \left(\frac{N!}{n^+!n^-!} \right) \\ &\approx k_\mathrm{B}(N \ln N - n^+ \ln n^+ - n^- \ln n^-) \\ &= k_\mathrm{B} n^+ \ln \frac{N}{n^+} + k_\mathrm{B} n^- \ln \frac{N}{n^-} \end{aligned} \tag{1.44}$$

となる。全ての状態のエネルギーが等しいので、内部エネルギーは定数であり、エントロピーは温度依存しない。これらのことに注意すると、

$$\begin{aligned}\tau = \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_T &= -T\frac{\partial S}{\partial X} \\ &= -T\left(\frac{\partial n^+}{\partial X}\frac{\partial S}{\partial n^+} + \frac{\partial n^-}{\partial X}\frac{\partial S}{\partial n^-}\right) \\ &= -\frac{k_\mathrm{B}T}{2a}\left(\ln\frac{N}{n^+} - \ln\frac{N}{n^-}\right) \\ &= \frac{k_\mathrm{B}T}{2a}\ln\frac{n^+}{n^-} \\ &= \frac{k_\mathrm{B}T}{2a}\ln\frac{aN+X}{aN-X}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

また $X \ll Na$ のとき、

$$\tau = \frac{k_\mathrm{B}TX}{a^2N} \tag{1.46}$$

[3]

$\beta = 1/k_\mathrm{B}T$ とおく。分配関数は、

$$Z(\beta) = \sum_{n^-=0}^{N} \frac{N!}{n^-!(N-n^-)!} \mathrm{e}^{\beta\kappa(N-n^-)}\mathrm{e}^{-\beta\kappa n^-} = (\mathrm{e}^{\beta\kappa} + \mathrm{e}^{-\beta\kappa})^N \tag{1.47}$$

である。ここから $\langle E\rangle, \langle X\rangle$ は、

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z(\beta) = -N\kappa\tanh\frac{\kappa}{k_\mathrm{B}T} \\ \langle X\rangle &= -\frac{a}{\kappa}\langle E\rangle = Na\tanh\frac{\kappa}{k_\mathrm{B}T}\end{aligned} \tag{1.48}$$

と表される。次に $|\kappa| \ll k_\mathrm{B}T$ のとき、

$$\langle E\rangle = -\frac{N\kappa^2}{k_\mathrm{B}T}, \quad \langle X\rangle = \frac{Na\kappa}{k_\mathrm{B}T} \tag{1.49}$$

となる。

[4]

$\langle E^2\rangle = Z''(\beta)/Z(\beta)$ から、

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ln Z(\beta) = \frac{Z''(\beta)}{Z(\beta)} - \frac{Z'(\beta)^2}{Z(\beta)^2} = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 \tag{1.50}$$

となる。よって

$$\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{N\kappa^2}{\cosh^2(\kappa/k_{\mathrm{B}}T)} \tag{1.51}$$

となる。ここから

$$\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \frac{a^2}{\kappa^2}(\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2) = \frac{Na^2}{\cosh^2(\kappa/k_{\mathrm{B}}T)} \tag{1.52}$$

となる。

第 3 問

[1]

電子の運動方程式は、

$$m\ddot{\boldsymbol{u}} = -e\boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}} - e\dot{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}} - m\omega_0^2\boldsymbol{u} \tag{1.53}$$

である。u_x, u_y についての方程式は

$$-m\omega^2 u_x = -eE_x + \mathrm{i}e\omega u_y B - m\omega_0^2 u_x \tag{1.54}$$
$$-m\omega^2 u_y = -eE_y - \mathrm{i}e\omega u_x B - m\omega_0^2 u_x \tag{1.55}$$

となる。

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(\omega^2-\omega_0^2) & \mathrm{i}e\omega \\ -\mathrm{i}e\omega & m(\omega^2-\omega_0^2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} eE_x \\ eE_y \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

から、u_x, u_y は、

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u_+ + u_-}{2} = \frac{em(\omega^2-\omega_0^2)E_x - \mathrm{i}e^2\omega BE_y}{m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2 - e^2\omega^2B^2}, \\ u_y &= \frac{u_+ - u_-}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}e^2\omega BE_x + em(\omega^2-\omega_0^2)E_y}{m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2 - e^2\omega^2B^2}. \end{aligned} \tag{1.57}$$

[2]

$\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}} - \boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}} = -ne\boldsymbol{u}/\varepsilon_0$ から、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 1 - \frac{ne^2m(\omega^2-\omega_0^2)/\varepsilon_0}{m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2 - e^2\omega^2B^2} \\ \gamma &= \frac{ne^3\omega B/\varepsilon_0}{m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2 - e^2\omega^2B^2} \end{aligned} \tag{1.58}$$

となる。

$$\begin{aligned} m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 - e^2\omega^2B^2 &= m^2\omega_0^4\left(\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{e^2B^2}{m^2}\right) \\ &\approx m^2\omega_0^4 > 0 \end{aligned} \tag{1.59}$$

から、

$$\varepsilon_{xx} > 1, \quad \gamma > 0 \tag{1.60}$$

である。

[**3**]

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0)=(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}-|\boldsymbol{k}|^2\boldsymbol{E}_0=-\mu_0\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}\omega^2\boldsymbol{E}_0 \tag{1.61}$$

よって、

$$(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}-|\boldsymbol{k}|^2\boldsymbol{E}_0+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0=0. \tag{1.62}$$

[**4**]

$$\begin{aligned}&-k_z^2E_{0,x}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2(\varepsilon_{xx}E_{0,x}+\mathrm{i}\gamma E_{0,y})=0\\&-k_z^2E_{0,y}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2(-\mathrm{i}\gamma E_{0,x}+\varepsilon_{xx}E_{0,x})=0\end{aligned} \tag{1.63}$$

から

$$E_{0,x}^2+E_{0,y}^2=0 \tag{1.64}$$

となる。よって $E_{0,y}/E_{0,x}=\pm\mathrm{i}$ であり、

$$k_\pm=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{xx}\pm\gamma} \tag{1.65}$$

となる。また、

$$E_{0,z}k_z^2-k_z^2E_{0,z}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_{z,z}E_{0,z}=0 \tag{1.66}$$

から $E_{0,z}=0$ となるので、

$$\boldsymbol{E}_{0\pm}=\frac{E}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\mp\mathrm{i}\\0\end{pmatrix} \tag{1.67}$$

[**5**]

$$\mathrm{Re}\,E_{+,x}(z=0,t)=\frac{E}{\sqrt{2}}\cos(\omega t), \tag{1.68}$$

$$\mathrm{Re}\,E_{+,y}(z=0,t)=-\frac{E}{\sqrt{2}}\sin(\omega t) \tag{1.69}$$

[6]

$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-}{\sqrt{2}} \tag{1.70}$$

から、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(l,t) &= \frac{\boldsymbol{E}_+}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_+ l - \omega t)} + \frac{\boldsymbol{E}_-}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_- l - \omega t)} \\ &= \left[\frac{\boldsymbol{E}_+}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_+ - k_-) l} + \frac{\boldsymbol{E}_-}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_+ - k_-) l} \right] \exp\left(\mathrm{i} \frac{k_+ + k_-}{2} l - \mathrm{i}\omega t \right) \\ &. \end{aligned} \tag{1.71}$$

よって、

$$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{E}_+}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_+ - k_-) l/2} + \frac{\boldsymbol{E}_-}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_+ - k_-) l/2} = \begin{pmatrix} E \cos((k_+ - k_-) l/2) \\ E \sin((k_+ - k_-) l/2) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.72}$$

偏向面の回転角は、

$$\theta = \frac{(k_+ - k_-) l}{2} \tag{1.73}$$

[7]

反射する光に対しては $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}} \to -\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}$ として同様の議論をすれば、回転角が求まる。このとき $\gamma \to -\gamma,\ k_\pm \to k_\mp$ となることと、回転角の符号の取り方が逆になることに注意すると、反射するときの回転角は θ に等しい。よって全体の回転角は、

$$2\theta = (k_+ - k_-) l \tag{1.74}$$

第 4 問

[**1**]

$$E = eV = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \tag{1.75}$$

よって

$$V = \frac{h^2}{2me\lambda^2} = 1.5 \times 10^4\,\mathrm{V} \tag{1.76}$$

[**2**]

$$A(\boldsymbol{K}) = f \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}aK_x n_x} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}aK_y n_y} \tag{1.77}$$

よって

$$L(K, N) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}aKn} \tag{1.78}$$

とすれば、

$$A(\boldsymbol{K}, N_x, N_y) = f L(K_x, N_x) L(K_y, N_y) \tag{1.79}$$

と表せる。

$$\begin{aligned} &L(K,1) = 1, \\ &L(K,2) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}aK/2}\cos(aK/2), \\ &L(K,3) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}aK}\left(1 + 2\cos(aK)\right) \end{aligned} \tag{1.80}$$

[**3**]

$$\boldsymbol{a}_1 = a\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = a\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \tag{1.81}$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{2\pi}{a}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \frac{2\pi}{a}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.82}$$

散乱の条件は、

$$\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k} = m_1 \boldsymbol{b}_1 + m_2 \boldsymbol{b}_2 + c\boldsymbol{e}_z, \quad |\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k}'| \tag{1.83}$$

である。散乱角 θ は、

$$|m_1 \boldsymbol{b}_1 + m_2 \boldsymbol{b}_2| = 2|\boldsymbol{k}| \sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi} \sin\theta \tag{1.84}$$

によって定義される。よって

$$\theta = \sin^{-1} \frac{\lambda |m_1 \boldsymbol{b}_1 + m_2 \boldsymbol{b}_2|}{4\pi} \tag{1.85}$$

となる。$|m_1 \boldsymbol{b}_1 + m_2 \boldsymbol{b}_2|$ は小さい順から

$$\frac{4\pi}{\sqrt{3}\,a}, \frac{4\pi}{a}, \frac{8\pi}{\sqrt{3}\,a}, \dots \tag{1.86}$$

となるので、

$$\theta_1 = \sin^{-1} \frac{\lambda}{\sqrt{3}\,a}, \quad \theta_2 = \sin^{-1} \frac{\lambda}{a}, \quad \theta_1 = \sin^{-1} \frac{2\lambda}{\sqrt{3}\,a} \tag{1.87}$$

図示は省略する。逆格子点を原点からの距離ごとに図示すれば良い。

[4]

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{K}) = f\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot(2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)/3}\right) L(K_x, N_x) L(K_y, N_y) \tag{1.88}$$

ここで

$$\frac{2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2}{3} \cdot (m_1 \boldsymbol{b}_1 + m_2 \boldsymbol{b}_2) = \frac{2\pi}{3}(2m_1 + m_2) \tag{1.89}$$

から、相対的な強度は

$$\left|1 + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot(2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)/3}\right|^2 = 5 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}(2m_1 + m_2)\right) \tag{1.90}$$

となる。よって

$$\cos 0 = 1, \quad \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} \tag{1.91}$$

から $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ のピークの強度比は $3:9:3 = 1:3:1$ となる。

[5]

各層からの散乱光が打ち消し合うため。このときピークが現れる c が離散化される。積層面を傾けていくことはビームを傾けることと等価であり、このとき c が変化していくが、c が離散化された値に横切るときにピークが復活する。