物理学 I

第 1 問

[1]

運動項は

$$\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\boldsymbol{R}}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\boldsymbol{R}}+\frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\boldsymbol{R}}^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 \tag{0.1}$$

と変形できる。よって

$$M=m_1+m_2,\quad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{0.2}$$

と定義すると、

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2+\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2-U(\boldsymbol{r}) \tag{0.3}$$

となる。

[2]

$$\begin{aligned}L&=\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2-U(r)\\&=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi)^2-U(r)\\&=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2)-U(r)\end{aligned} \tag{0.4}$$

[3]

$$\begin{aligned}\mu\ddot{r}&=\mu r\dot{\phi}^2-\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\\&=\frac{l^2}{\mu r^3}-\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(U(r)+\frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2}\right)\end{aligned} \tag{0.5}$$

これは $U(r)$ に遠心力ポテンシャルを加えた運動方程式になっている。

[4]

$$\mu\dot{r}\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U(r) + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2}\right) \tag{0.6}$$

から、

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} \tag{0.7}$$

は時間変化しない。

[5]

$\boldsymbol{l}$ は $\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l}$ と垂直であり、$\boldsymbol{r}$ とも垂直である。よって、

$$\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{0.8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} &= \mu^2\dot{\boldsymbol{r}}^2\boldsymbol{r}^2 - \mu^2(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})^2 - \mu k r \\ &= \mu^2 r^4\dot{\phi}^2 - \mu k r \\ &= l^2 - \mu k r = A r\cos\alpha\end{aligned} \tag{0.9}$$

$$r = \frac{l^2}{\mu k + A\cos\alpha}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2}\left(1 + \frac{A}{\mu k}\cos\alpha\right) \tag{0.10}$$

第 2 問

[1.1]

Biot-Savart の法則から

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{aI}{(a^2+z^2)^{3/2}}a\,\mathrm{d}\theta \tag{0.11}$$

となる。よって、

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} \tag{0.12}$$

[**1.2**]

どの程度厳密にやるのかわからないが、N が十分大きいときは、

$$lB_z = \mu_0 NI, \quad B_z = \frac{\mu_0 NI}{l} \tag{0.13}$$

となる。

[**1.3**]

$$V = N \cdot \pi a^2 \cdot \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi \mu_0 N^2 a^2}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{0.14}$$

$$L = \frac{\pi \mu_0 N^2 a^2}{l} \tag{0.15}$$

[**2**]

コンデンサーの軸方向を z 軸とする。電場は、

$$\boldsymbol{E} = \frac{v_0}{d} \sin(\omega t) \boldsymbol{e}_z \tag{0.16}$$

と表される。また z 軸正方向から見て反時計回りの方向の磁場を $B(r,t)$ とおく。r は z 軸からの距離である。$B(r,t)$ を半径 r の円周上で積分すると、

$$2\pi r B(r,t) = \varepsilon_0 \mu_0 \pi r^2 \frac{\omega v_0}{d} \cos(\omega t) \tag{0.17}$$

となる。よって、

$$B(r,t) = \frac{\omega \varepsilon_0 \mu_0 v_0}{2d} r \cos(\omega t) \tag{0.18}$$

[**3.1**]

回路方程式は、

$$\frac{Q(t)}{C} = L \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = L \frac{\mathrm{d}^2 Q(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{0.19}$$

となる。よって Q, I の時間変化は単振動となり、

$$Q(t) = CV \cos(\omega t), \quad I(t) = -\omega CV \sin(\omega t), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{0.20}$$

で与えられる。

[3.2]

コノデンサーとソレノイドのエネルギーはそれぞれ

$$\frac{1}{2}CV^2\cos^2(\omega t),\quad \frac{1}{2}CV^2\sin^2(\omega t) \tag{0.21}$$

となる。全エネルギーは保存しており、コンデンサーとソレノイドの間でエネルギーが交互に移動していることが分かる。

[3.3]

全エネルギーは $QV/2 \to QV = CV^2$ に変化する。またキャパシタンスが $C \to C/2$ と変化するので、1/2 電流の振動数が $\sqrt{2}$ 倍になる。

物理学 II

第 1 問

[1]

σ_x の固有ベクトルおよび固有値は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm 1\end{pmatrix},\quad \pm 1 \tag{0.22}$$

σ_y の固有ベクトルおよび固有値は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm \mathrm{i}\end{pmatrix},\quad \pm 1 \tag{0.23}$$

となる。

[2]

[2.1]

$p_y = p_z = 0,\ \boldsymbol{E} = (0,0,E)$ を代入すると、

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + H_{\mathrm{SO}} = \frac{p_x^2}{2m} - \frac{\gamma}{\hbar}p_x E\sigma_y \tag{0.24}$$

[2.2]

固有関数を

$$\psi_\pm = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}|y\pm\rangle \tag{0.25}$$

とおく。ただし、$|y\pm\rangle$ は $\boldsymbol{\sigma}_y$ の固有値 ± 1 の固有状態である。エネルギー固有値は、

$$E_{\pm} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \mp \gamma E k = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k \mp \frac{m\gamma E}{\hbar^2}\right)^2 - \frac{m\gamma^2 E^2}{2\hbar^2} \tag{0.26}$$

となる。

[2.3]

ハミルトニアンは、

$$H = \frac{p_x^2}{2m} - \frac{\gamma}{\hbar} p_x E \sigma_y + \frac{1}{2} g \mu_{\mathrm{B}} B \sigma_x \tag{0.27}$$

となる。固有エネルギーは

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \pm \sqrt{(\gamma E k)^2 + \left(\frac{g\mu_{\mathrm{B}} B}{2}\right)^2} \tag{0.28}$$

となる。ただし、ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ からの固有値が $\pm|\boldsymbol{v}|$ となることを用いた。設問 [2.3] と比べると、準位交差していた部分が上下のバンドに分かれている。

第 2 問

[1]

エネルギーが E であるような状態は、

$$E = \frac{1}{2} m (v_{x,1}^2 + v_{y,1}^2 + v_{x,2}^2 + v_{y,2}^2) \tag{0.29}$$

で与えられる。よって、ミクロカノニカル分布は 4 次元の速度の空間上での球面上の一様な分布となる。その半径は、$\sqrt{2E/m}$ で与えられる。

[2]

極座標を用いると、

$$\begin{aligned} S_{n+1}(r) &= \int_{-r}^{r} S_n(r\sin\theta) \frac{\mathrm{d}(r\cos\theta)}{\sin\theta} \\ &= \int_{-r}^{r} \mathrm{d}q \, \frac{r S_n(\sqrt{r^2 - q^2})}{\sqrt{r^2 - q^2}} \end{aligned} \tag{0.30}$$

となる。よって $S_1(r) = 2$ からはじめれば、与えられた公式が導かれる。

[3]

$$\int P(v_1)\,\mathrm{d}v_1 = \frac{1}{S_{2N}(r)}\int_{-r}^{r}\mathrm{d}v_1\,\frac{rS_{2N-1}(\sqrt{r^2-v_1^2})}{\sqrt{r^2-v_1^2}} \tag{0.31}$$

と書ける。ここで $r=\sqrt{2E/m}$ である。$N=2$ のとき、

$$P(v_1) \propto \frac{rS_3(\sqrt{2E/m-v_1^2})}{\sqrt{2E/m-v_1^2}} \propto \sqrt{\frac{2E}{m}-v_1^2} \tag{0.32}$$

[4]

$$P(v_1) \propto \frac{rS_{2N-1}(\sqrt{2E/m-v_1^2})}{\sqrt{2E/m-v_1^2}} \propto \left(\frac{2N\varepsilon}{m}-v_1^2\right)^{N-3/2} \tag{0.33}$$

[5]

$$P(v_1) \propto \left(1-\frac{mv_1^2}{2N\varepsilon}\right)^{N-3/2} \to \exp\left(-\frac{mv_1^2}{2\varepsilon}\right) \tag{0.34}$$

よって $N\to\infty$ で Maxwell 速度分布になる。

[6]

設問 [5] の結果を

$$P(v_1) \propto \exp\left(-\frac{mv_1^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) \tag{0.35}$$

と比較すると、

$$T=\frac{\varepsilon}{k_\mathrm{B}} \tag{0.36}$$

となる。(1 粒子あたりのエネルギーは $\varepsilon = 2\cdot k_\mathrm{B}T/2$ となり妥当。)

第 3 問

[1]

$$D(\boldsymbol{r}, t) = \frac{4\pi a^2 \sigma}{4\pi r^2} = \sigma \left(\frac{a}{r}\right)^2 \tag{0.37}$$

[2]

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{0.38}$$

[3]

$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \, \mathrm{d}S \tag{0.39}$$

[4]

C に囲まれる面の、原点 O から見た立体角は、

$$2\pi(1 - \cos\theta) \tag{0.40}$$

で与えられる。よって、

$$\mathit{\Delta}\mathit{\Psi} = 4\pi a^2 \sigma \cdot \mathit{\Delta}\left(\frac{1 - \cos\theta}{2}\right) = 2\pi a^2 \sigma \sin\theta \, \mathit{\Delta}\theta \tag{0.41}$$

となる。

$$v \, \mathit{\Delta} t = \mathit{\Delta}(d \cot\theta) = -\frac{d}{\sin^2\theta} \, \mathit{\Delta}\theta \tag{0.42}$$

より、

$$\mathit{\Delta}\mathit{\Psi} == -\frac{2\pi a^2 \sigma v}{d} \sin^3\theta \, \mathit{\Delta} t \, . \tag{0.43}$$

[5]

$$H = \frac{|\, \mathit{\Delta}\mathit{\Psi} / \mathit{\Delta} t \,|}{2\pi d} = \frac{a^2 \sigma v}{d^2} \sin^3\theta \tag{0.44}$$

[**6**]

$$u(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2}\mu_0 H(\boldsymbol{r}, t)^2 \tag{0.45}$$

[**7**]

$$\begin{aligned}
&\int u(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}^3 x \\
&= \frac{1}{2}\mu_0 a^4 \sigma^2 v^2 \cdot 2\pi \int_a^\infty r^2\,\mathrm{d}r \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\theta\,\frac{1}{(r\sin\theta)^4}\sin^6\theta \\
&= \pi\mu_0 a^4 \sigma^2 v^2 \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \int_{-1}^1 (1-c^2)\,\mathrm{d}c \\
&= \frac{4\pi a^3}{3}\mu_0 \sigma^2 v^2
\end{aligned} \tag{0.46}$$

[**8**]

微小球の運動に伴う全エネルギーは、

$$\frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{4\pi a^3}{3}\mu_0 \sigma^2 v^2 = \frac{1}{2}\left(m_0 + \frac{8\pi a^3 \mu_0 \sigma^2}{3}\right) v^2 \tag{0.47}$$

となる。

物理的意味: 電荷の自己エネルギーが質量に転化されている。もう少し説明すると、荷電していない半径 a の球を q だけ帯電させるためにかかるエネルギーは

$$\Delta E = \int_0^q \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 a}\,\mathrm{d}q' = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \tag{0.48}$$

となる。よって

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{\mu_0 q^2}{8\pi a} = 2\pi a^3 \mu_0 \sigma \tag{0.49}$$

係数は若干ずれているが、質量の増加量としてはむしろこの値の方が正しそう。

第 4 問

[1]

波数の大きさが k 以下になるような状態数は、

$$N \propto k^d \propto \omega^d \tag{0.50}$$

となる。よって、

$$D(\omega) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\omega} \propto \omega^{d-1}. \tag{0.51}$$

よって (a)3 次元の場合は $p = 2$、(b)2 次元の場合は $p = 1$ となる。

[2]

フォノンによるエネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty \frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_\mathrm{B}T} - 1} D(\omega)\,\mathrm{d}\omega \\ &\propto \int_0^\infty \frac{\omega^d\,\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_\mathrm{B}T} - 1} \\ &\propto T^{d+1} \end{aligned} \tag{0.52}$$

となる。よって、

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} \propto T^d. \tag{0.53}$$

すなわち (a)3 次元の場合 $q = 3$、(b)2 次元の場合 $q = 2$。