

1. G -injective PEPS

1.1 定義

主に [schuchPEPSGroundStates2010, sahinogluCharacterizingTopologicalOrder2021, simonTopologicalQuantum2023] に従って G -injective PEPS を導入する。これは Kitaev quantum double 模型 [kitaevFaulttolerantQuantumComputation1997] を記述するような PEPS である。ただし後で MPO による形式に拡張しやすいようにはじめから MPO を使って議論している。

定義 1.1. 半正則表現

ユニタリ表現 $g \mapsto U_g$ が全ての既約表現を含むとき、半正則 (semi-regular) であると言う。

定義 1.2. 正則表現

群環 $\mathbb{C}G$ における左作用 $L_g : h \mapsto gh$ によって与えられる表現 $g \mapsto L_g$ を正則表現 (regular representation) と呼ぶ。

補題 1.1.

ユニタリな半正則表現 $g \mapsto U_g$ に対し、 $\{U_g\}_{g \in G}$ は線形独立である。また補題?? で定義される $\Delta = \sum_i \frac{d_i}{m_i} \Pi_i$ に対して

$$\text{Tr}[U_g \Delta] = |G| \delta_{g,e} \quad (1.1)$$

が成り立つ。ここで e は G の単位元である。これを以下のように図示する。

$$\begin{array}{c} \text{---} \blacklozenge \text{---} \\ \text{---} \Delta \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} g \text{---} \end{array} = |G| \delta_{g,e} \quad (1.2)$$

Proof.

$$\text{Tr}[U_g \Delta] = \sum_i \frac{d_i}{m_i} \text{Tr}[U_g \Pi_i] = \sum_i d_i \chi^i(g) = |G| \delta_{g,e}. \quad (1.3)$$

ただし正則表現の指標が $\sum_i d_i \chi^i(g) = \delta(g)$ となることを用いた。もし $\sum_{g \in G} \mu_g U_g = 0$ ならば、

$$\frac{1}{|G|} \sum_g \mu_g \text{Tr}[U_g U_{h^{-1}} \Delta] = \mu_h = 0 \quad (1.4)$$

よって $\{U_g\}_{g \in G}$ は線形独立。 \square

定義 1.3. G -injective PEPS

正方格子上の PEPS を構成するテンソル $A \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{H}$ が有限群 G に対して G -injective であるとは、半正則なユニタリ表現 $U : g \rightarrow \text{GL}(\mathcal{V})$ が存在して

$$\text{Span}\{A^s\}_s = \left\{ X \left| \begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{X} \\ \downarrow \end{array} \right. = \begin{array}{c} \downarrow \circlearrowleft g \\ \boxed{X} \\ \downarrow \circlearrowright g^{-1} \end{array} \right\} \quad (1.5)$$

となること。右辺の元を G -invariant なテンソルと呼ぶことにする。より一般の格子についても、辺の向き付けを決めると同様に G -injectivity が定義される。

定理 1.1.

$A \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{H}$ と擬逆行列との積が

$$\sum_s A^s \otimes A_s^+ = \begin{array}{c} \downarrow \circlearrowleft + \\ \boxed{A} \\ \downarrow \circlearrowright \\ \downarrow \end{array} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \begin{array}{c} \downarrow \circlearrowleft g \\ \boxed{A} \\ \downarrow \circlearrowright g^{-1} \end{array}. \quad (1.6)$$

となることは G -injectivity と同値。

Proof. (1.6) 右辺を $\Pi \in \text{L}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^*)$ とおく。これが射影であることは以下のように分かる。

$$\frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} \begin{array}{c} \downarrow \circlearrowleft h \\ \downarrow \circlearrowleft g \\ \downarrow \circlearrowright g^{-1} h^{-1} \\ \downarrow \circlearrowright g^{-1} \\ \downarrow \circlearrowright h^{-1} \end{array} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \begin{array}{c} \downarrow \circlearrowleft g \\ \downarrow \circlearrowright g^{-1} \end{array}. \quad (1.7)$$

また

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \begin{array}{c} \downarrow \\ \circ \\ \downarrow h \\ \circ \\ \downarrow g \\ \circ \\ \downarrow g^{-1} \\ \circ \\ \downarrow h^{-1} \\ \circ \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow h \\ \circ \\ \rightarrow g \\ \circ \\ \rightarrow g^{-1} \\ \circ \\ \rightarrow h^{-1} \\ \circ \\ \rightarrow \end{array} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \begin{array}{c} \downarrow \\ \circ \\ \downarrow g \\ \circ \\ \downarrow g^{-1} \\ \circ \\ \downarrow \\ \circ \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow g \\ \circ \\ \rightarrow \\ \circ \\ \rightarrow g^{-1} \\ \circ \\ \rightarrow \\ \circ \\ \rightarrow \end{array} \quad (1.8)$$

から $\text{im } \Pi$ の元は必ず G -invariant になる。一方 G -invariant な X に対して

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{X} \\ \uparrow \end{array} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in |G|} \begin{array}{c} \downarrow g \\ \circ \\ \downarrow \\ \circ \\ \downarrow g^{-1} \\ \circ \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow g \\ \circ \\ \rightarrow \boxed{X} \\ \circ \\ \rightarrow g^{-1} \\ \circ \\ \rightarrow \end{array} = \Pi X \quad (1.9)$$

である。よって $\text{im } \Pi$ は G -invariant なテンソルの空間に一致する。 $\sum_s A^s \otimes A_s^+$ は $\text{Span}\{\bar{A}^s\}_s$ への射影であり、 G -invariant なテンソルの空間が複素共役について閉じていることから (1.6) は G -injectivity と同値である。 \square

定義 1.4. MPO による表現

MPO B_{\pm} を以下のように定義する。

$$B_+ = \sum_{g \in G} U_g |g\rangle\langle g|, \quad B_- = \sum_{g \in G} U_{g^{-1}} |g\rangle\langle g| \quad (1.10)$$

これを以下のように図示する。

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{red arrow } g \rightarrow \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \circ \\ \uparrow g \\ \downarrow \end{array}, \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{red arrow } g \leftarrow \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \circ \\ \uparrow g^{-1} \\ \downarrow \end{array} \quad (1.11)$$

すると (1.6) は

$$\sum_s A^s \otimes A_s^+ = \frac{1}{|G|} \begin{array}{c} \downarrow \\ \circ \\ \downarrow \\ \circ \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \circ \\ \rightarrow \\ \circ \\ \rightarrow \end{array} \quad (1.12)$$

と表される。以降の議論では $1/|G|$ の係数を省略する。

定理 1.2. Pulling through equation

(1.11) で定義される MPO について、以下の等式が成り立つ。

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1.13 Left: A circle with a vertical red line labeled } g \text{ on the left. Arrows point in from the left and out to the right.} \\ \text{Diagram 1.13 Right: A circle with a red arc labeled } g \text{ on the bottom. Arrows point in from the left and out to the right.} \end{array} = \quad (1.13)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1.14 Left: A circle with a red arc labeled } g \text{ on the left. Arrows point in from the left and out to the right.} \\ \text{Diagram 1.14 Right: A circle with a red arc labeled } g \text{ on the top. Arrows point in from the left and out to the right.} \end{array} = \quad (1.14)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1.15 Left: A red arc labeled } g \text{ on the left.} \\ \text{Diagram 1.15 Right: A red arc labeled } g \text{ on the right.} \end{array} = \quad (1.15)$$

また向きを反転したり回転したりした式も同様に成り立つ。以上の式を pulling through equation と呼ぶ。図の赤い辺をストリングと呼ぶことにする。ストリングは pulling through equation によりトポロジカルな紐のように自由に動かすことができる。

補題 1.2.

G -injectivity は連結によって保存される。また G -injective な A と B の連結に対して以下は一般化逆行列である。

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1.16: A box labeled } A \text{ followed by a box labeled } B. \text{ Arrows enter and exit each box.} \end{array} \quad (1.16)$$

ここで Δ は補題??で定義される $\Delta = \bigoplus_i \frac{d_i}{m_i} \Pi_i$ である。

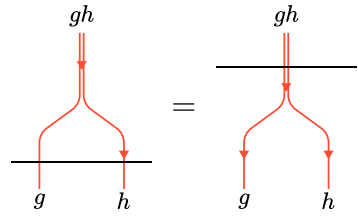
Proof. $\text{Span}\{A^s B^t\}$ が G -invariant なテンソルの空間に一致することを示せばよい。 AB に対して (1.16) を掛けると、

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1.17 Left: Box } A \text{ followed by box } B. \\ \text{Diagram 1.17 Middle: Two circles connected by a horizontal line. The left circle has a red arc labeled } g. \\ \text{Diagram 1.17 Right: A single large red loop with a horizontal line through the middle.} \end{array} = \quad (1.17)$$

ここで (1.2) を用いた。これは G -invariant な空間への射影になっているので、内側の添字を任意のテンソルと縮約することで任意の G -invariant なテンソルが構成できる。 \square

補題 1.3. Zipper condition

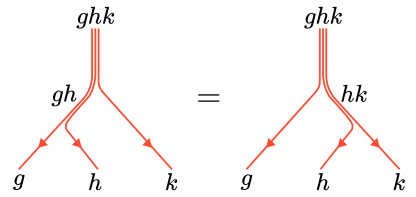
g, h のラベルがついたストリングを束ねることで gh のストリングとみなすことができる。これは以下の zipper condition によって保証される。


(1.18)

黒い辺の向きは両辺で同じ向きを取ればどちらでも良い。

補題 1.4. F -move

群の表現について結合則から、直ちに以下の等式が成り立つ。


(1.19)

1.2 Parent Hamiltonian

定理 1.3. Intersection property

(1.11) で定義される MPO について、以下の等式が成り立つ。

$$\left\{ \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Two circles with arrows, followed by a vertical line with four arrows} \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A vertical line with four arrows, followed by two circles with arrows} \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} \\
 = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Three circles with arrows} \end{array} \\ \hline \end{array} \right\}. \quad (1.20)$$

ただし、灰色のテンソルは任意のテンソルを表すとする。

Proof. 右辺 \subset 左辺は明らか。左辺の元について、

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A vertical line with four arrows, followed by two circles with arrows} \end{array} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A vertical line with four arrows, followed by two concentric circles with arrows} \end{array} \\ \hline \end{array} \\
 = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 3: A vertical line with four arrows, followed by two circles with arrows and a horizontal line connecting them} \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (1.21)$$

である。これに等式

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A vertical line with four arrows, followed by a horizontal line with arrows} \end{array} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A vertical line with four arrows, followed by two circles with arrows and a small square with a dot} \end{array} \\ \hline \end{array} \\
 = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Two circles with arrows, followed by a vertical line with four arrows and a small square with a dot} \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (1.22)$$

を代入することで左辺 \subset 右辺を得る。

□

定理 1.4. Closure property

(1.11) で定義される MPO について、以下の等式が成り立つ。

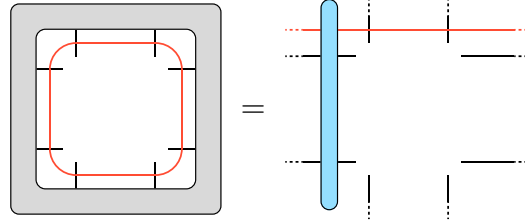
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Square MPO} \\ \text{with four red circles} \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{c} \text{H-shaped MPO} \\ \text{with four red circles} \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{c} \text{H-shaped MPO} \\ \text{with four red circles} \end{array} \right\} \\
 \cap \left\{ \begin{array}{c} \text{Cross-shaped MPO} \\ \text{with four red circles} \end{array} \right\} = \left\{ \sum_{\substack{g, h \in G \\ gh = hg}} \lambda_{g, h} \begin{array}{c} \text{Diagram with red circles and arrows } g, h \\ \text{and a summation symbol} \end{array} \lambda_{g, h} \right\} \quad (1.23)$$

ただし、灰色のテンソルは任意のテンソルを表すとする。また点線は周期境界条件を表す。

Proof. (1.23) で右辺 \subset 左辺は明らか。(1.23) の左辺の元について、以下の等式が成り立つ。

$$\begin{array}{c} \text{Square MPO} \\ \text{with four red circles} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Square MPO} \\ \text{with four red circles and black dots} \end{array} = \begin{array}{c} \text{H-shaped MPO} \\ \text{with four red circles and black dots} \end{array} = \begin{array}{c} \text{H-shaped MPO} \\ \text{with four red circles} \end{array} \\
 =: \begin{array}{c} \text{H-shaped MPO} \\ \text{with two red lines} \end{array} =: \begin{array}{c} \text{H-shaped MPO} \\ \text{with an orange bar} \end{array} \quad (1.24)$$

また同様の議論により



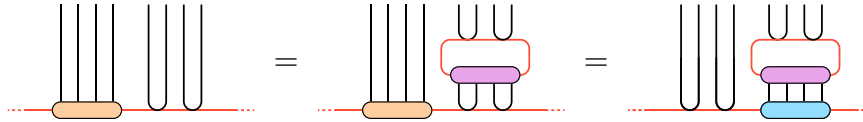
$$(1.25)$$

と表せる。これらを MPS の形で見やすくまとめると、



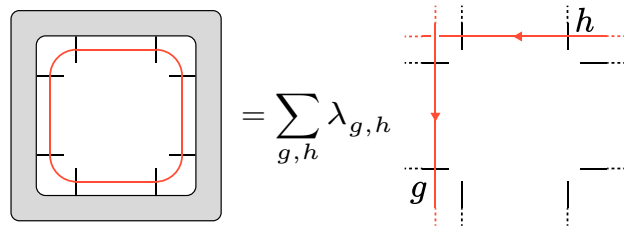
$$(1.26)$$

ここで B^2 の擬逆行列を挿入することで



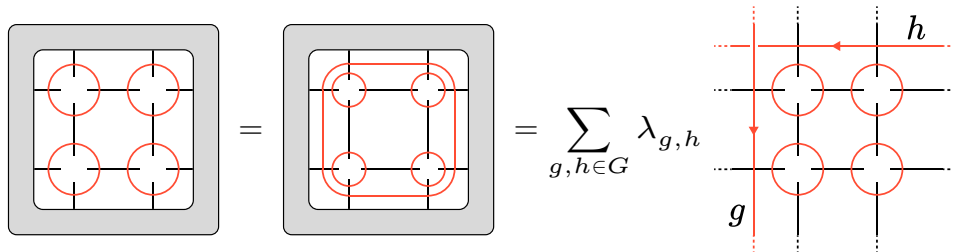
$$(1.27)$$

と表せる。よってもとの書き方では、



$$(1.28)$$

である。したがって、



$$(1.29)$$

が成り立つ。次に $gh \neq hg$ のとき $\lambda_{g,h} = 0$ となることを示す。(1.23) 左辺の元につい

て以下の等式が成り立つ。

Diagrammatic equation (1.30) showing the decomposition of a square with a red loop into a sum of terms involving a cross-like structure and a sum over group elements.

$$\begin{aligned}
 & \text{Square with red loop} = \text{Square with red loop and black dots} = \text{Cross-like structure with red loops} = \text{Cross-like structure with red loops and black dots} \\
 & =: \text{Cross-like structure} =: \sum_{\substack{g_1, g_2, h_1, h_2 \\ h_2 g_1 h_1^{-1} g_2^{-1} = e}} \lambda_{g_1, g_2, h_1, h_2} \quad (1.30)
 \end{aligned}$$

半正則表現 $g \mapsto U_g$ において $\{U_g\}_{g \in G}$ が線形独立であることから $\{U_{g_1}^1 \otimes U_{g_2}^2 \otimes U_{h_1}^3 \otimes U_{h_2}^4\}_{g_1, g_2, h_1, h_2}$ は線形独立である。よって (1.28) と (1.30) を見比べることで $g_1 = g_2, h_1 = h_2$ かつ $gh \neq hg$ のとき $\lambda_{g, h} = 0$ が分かる。 \square

Remark 1.1.

$gh = hg$ のとき、

Diagrammatic equation (1.31) showing the commutation of strings g and h when they commute.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram with strings } g \text{ and } h = \text{Diagram with strings } g \text{ and } h = \text{Diagram with strings } g \text{ and } h. \quad (1.31)
 \end{aligned}$$

すなわち g と h のストリングを自由に動かすことができる。逆に $g \neq h$ の場合は 2 つのストリングの交点を動かそうとすると ghg^{-1} などが現れるため自由に動かすことができない。

Remark 1.2.

G -injective な PEPS に (g, h) のストリングを挿入した状態と (xgx^{-1}, xhx^{-1}) を挿入した状態は等しい。

$$(1.32)$$

定義 1.5. Parent Hamiltonian

$A \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{H}$ を正方格子上的 PEPS を構成する G -injective なテンソルとする。直交射影 h_i を以下を満たすように構成する。

$$\ker h_i = \left\{ \left[\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc} A & A \\ A & A \end{array}} \\ X \end{array} \right] \otimes \left(\bigotimes_j \mathcal{H}_j \right) \right\}. \quad (1.33)$$

ただし \bigotimes_j は 2×2 の領域に含まれない格子点に関してのテンソル積とする。Hamiltonian $H = \sum_i h_i$ を A に対する parent Hamiltonian と呼ぶ。

定理 1.5.

G -injective なテンソル A に対する parent Hamiltonian のトーラスにおける基底空間は

$$\text{Span} \left\{ \left[\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \begin{array}{cc} A & \cdots & A \end{array} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{array}{cc} A & \cdots & A \end{array} \\ \vdots & & \vdots \end{array} \right] \mid g, h \in G, gh = hg \right\} \quad (1.34)$$

である。また縮退度は $\{(g, h) \in G \times G \mid gh = hg\}$ を同値関係 $(g, h) \sim (xgx^{-1}, xhx^{-1})$ で割った類 (pair conjugacy class) の数に等しい。

Proof. intersection property, closure property から基底空間が (1.34) に一致することが分かる。次に

$$|\psi(A; g, h)\rangle := \text{diagram} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \text{diagram} \quad (1.35)$$

The first diagram shows a grid of boxes labeled A . A vertical red line passes through the first column, labeled g at the bottom. A horizontal red line passes through the first row, labeled h at the right. The second diagram shows a similar grid, but the vertical red line is labeled xgx^{-1} and the horizontal red line is labeled xhx^{-1} .

から $|\psi(A; g, h)\rangle = |\psi(A; ygy^{-1}, yhy^{-1})\rangle$ である。そこで $\{(g, h) \in G \times G \mid gh = hg\}$ を同値関係 $(g, h) \sim (xgx^{-1}, xhx^{-1})$ で割り、その同値類の代表元を $(g_1, h_1), \dots, (g_K, h_K)$ と書く。 $\sum_{k=1}^K \mu_k |\psi(A; g_k, h_k)\rangle = 0$ ならば、 A の一般化逆行列を掛けることで

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \mu_k \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \text{diagram} \\ &= \sum_{k=1}^K \mu_k \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (U_{xg_kx^{-1}})^{\otimes L} \otimes (U_{xh_kx^{-1}})^{\otimes L} = 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

The diagram in the first line shows a grid of boxes labeled A with a vertical red line labeled xg_kx^{-1} and a horizontal red line labeled xh_kx^{-1} .

を得る。すると半正則表現に対して $\{U_g\}_{g \in G}$ が線形独立であることから、 $\mu_k = 0$ である。よって $\{|\psi(A; g_k, h_k)\rangle\}_{k=1}^K$ は線形独立である。 \square

補題 1.5. Burnside の補題

群 G が集合 X に作用しているとき、軌道の数

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\{x \in X \mid gx = x\}| \quad (1.37)$$

で与えられる。

系 1.1.

$\{(g, h) \in G \times G \mid gh = hg\}$ に対する pair conjugacy class の数は以下で与えられる。

$$\frac{1}{|G|} |\{(g, h, k) \in G \times G \times G \mid gh = hg, hk = kh, kg = gk\}| \quad (1.38)$$

定義 1.6. G -isometric tensor

G -injective なテンソル $A \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{H}$ に対し、表現 $g \mapsto U_g$ が正則であり、かつ $A^+ = A^\dagger$ すなわち

$$\begin{array}{c} k \\ | \\ i - \boxed{A}^+ - j \\ | \\ l \end{array} \begin{array}{c} s \\ | \\ l \end{array} = \begin{array}{c} l \\ | \\ j - \boxed{A} - i \\ | \\ k \end{array} \begin{array}{c} s \\ | \\ k \end{array} \quad (1.39)$$

が成り立つとき、テンソル A は G -isometric であるという。

補題 1.6.

$$\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \boxed{A} \\ | \\ \diagdown \end{array} \cong \begin{array}{c} \uparrow \\ \circlearrowleft \\ \downarrow \end{array} . \quad (1.40)$$

ただし \cong は両辺が physical space への isometric な変換によって移り合うことを指す。ここから任意の G -isometric PEPS の代わりに右辺の MPO を用いることができる。

Proof. $A^+ = A^\dagger$ が isometric なことから明らか。

□

補題 1.7.

G -isometric な PEPS に対して、parent Hamiltonian の局所項は以下のように表される。

$$h_i = \begin{array}{cc} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (1.41)$$

またこの局所項は互いに可換である。

Proof. h_i の可換性は以下のように示される。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & & \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ & & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ & & & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \end{array} . \quad (1.42)$$

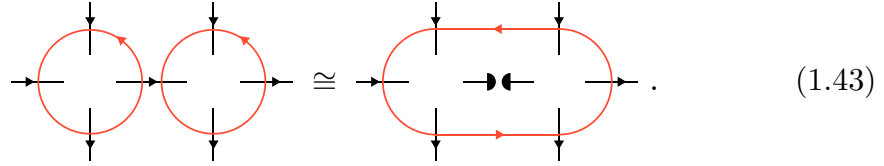
h_i が 1 サイトで重なり合う場合にも同様の議論で可換性が示せる。 \square

系 1.2.

G -isometric な PEPS の parent Hamiltonian に対し、局所項 h_i を同時対角化できるので、parent Hamiltonian は gapped である。

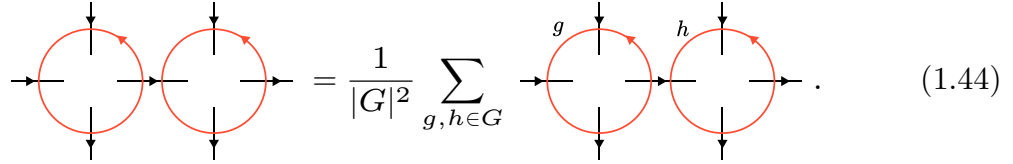
1.3 トポロジカルエンタングルメントエントロピー

補題 1.8.



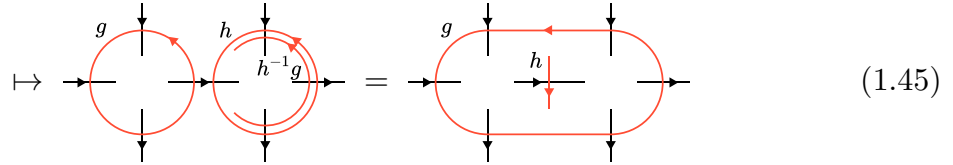
$$(1.43)$$

Proof. $g, h \in G$ を以下のように定める。



$$(1.44)$$

内側の 2 つの physical index を測定することで $h^{-1}g$ が得られる。この結果を以下の作用を与える conditional なユニタリ演算子を構成できる。



$$(1.45)$$

このユニタリ演算子は g, h に依存しないことに注意。すると h は内側のテンソルにしか現れないため

$$\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \sum_{x \in G} |x\rangle \otimes |hx\rangle = |G\rangle \otimes |G\rangle, \quad |G\rangle := \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g \in G} |g\rangle \quad (1.46)$$

と表せる。 □

補題 1.9.

$g \mapsto L_g$ を左正則表現とすると

$$(L_g)^{\otimes N} \cong L_g \otimes (\mathbb{1}_{\mathbb{C}G})^{\otimes (N-1)}. \quad (1.47)$$

ここで $\mathbb{1}_{\mathbb{C}G} := \sum_{g \in G} |g\rangle \langle g|$ である。

Proof. $(L_g)^N$ に対する指標は

$$\chi(g) = (|G| \delta_{g,e})^N = |G|^N \delta_{g,e}. \quad (1.48)$$

よって $(L^g)^N$ は $|G|^{N-1}$ 個の正則表現の直和として表される。これは $L_g \otimes (\mathbb{1}_{CG})^{\otimes(N-1)}$ とユニタリ同値。 \square

定理 1.6. 粗視化に対する安定性

G -isometric なテンソルの連結に対し、

$$\begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \end{array} \cong \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \\ | \quad | \end{array} \otimes \begin{array}{c} | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \end{array} \otimes \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \end{array}. \quad (1.49)$$

よって局所的な自由度を取り除くことで G -isometric なテンソルは粗視化に対して不変となる。

Proof. 補題 1.8 と同様の議論により

$$\begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \end{array} \cong \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \uparrow \quad \uparrow \end{array}. \quad (1.50)$$

よって $L_g \otimes L_g \cong L_g \otimes \mathbb{1}_{CG}$ から (1.49) を得る。 \square

定理 1.7. トポロジカルエンタングルメントエントロピー

G -isometric PEPS に対するエンタングルメントエントロピーは

$$S_\alpha = \log |G| \cdot |\partial D| - \log |G| \quad (1.51)$$

となる。ここで $|\partial D|$ は対象となる領域の境界の長さである。

Proof. トーラス上の 2×2 の PEPS を左上の領域 S とそれ以外の領域 E に分けてエンタングルメントエントロピーを計算する。他の形状についても同様である。 E に対するユ

ニタリ演算子によって以下のように状態を書き直す。

$$\text{Diagram 1} \cong \text{Diagram 2} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \text{Diagram 3} \quad (1.52)$$

ここで E に対する測定によって xgx^{-1}, xhx^{-1} が分かるので、conditional なユニタリ演算子によって以下のように状態を変更できる。

$$\text{Diagram 1} \cong \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \text{Diagram 2} \quad (1.53)$$

よってエンタングルメントエントロピーは密度行列

$$\rho = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} L_g^{\otimes |\partial D|} \cong \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} L_g \otimes (\mathbb{1}_{\mathbb{C}G})^{\otimes (|\partial D|-1)} \quad (1.54)$$

に対して計算すれば良い。

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} L_g = |G\rangle\langle G|, \quad |G\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g \in G} |g\rangle \quad (1.55)$$

より、Rényi α -エントロピーは

$$S_\alpha = \log |G| (|\partial D| - 1) \quad (1.56)$$

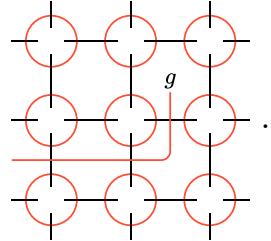
となる。 ρ が射影なことから Rényi α -エントロピーは α によらないことに注意。 \square

1.4 エニオン励起とその分類

G -injective な PEPS についてもエニオン励起を考えることは可能であるが、簡単のため、以下では G -isometric な PEPS を考える。

定義 1.7. 磁気的な励起

G -isometric な PEPS $|\psi(A)\rangle$ に対して端点のあるストリングを追加する:

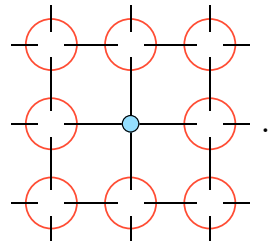


$$(1.57)$$

端点を動かさなければストリングは自由に動かすことができるので、parent Hamiltonian に対して端点以外でのエネルギーコストは発生しない。この状態は磁気的な励起 (magnetic excitation) と呼ばれる。端のない領域では磁気的な励起は必ず複数個の組で現れる。また $g \mapsto xgx^{-1}$ に対して状態は不変なので、磁気的な励起は G の共約類 C_i によってラベルされる。

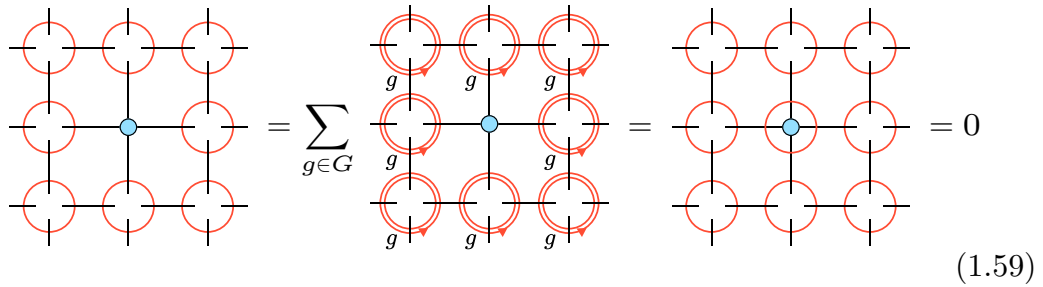
定義 1.8. 電気的な励起

G -isometric な PEPS $|\psi(A)\rangle$ に対して 1 つのテンソル A を $B \in \text{Span}\{A^s\}^\perp$ に置き換える:



$$(1.58)$$

$|\psi(A)\rangle$ の physical space への局所的な作用によってこの状態を構成することはできない。よってこの状態は非局所的な点状励起を表し、電気的な励起 (electric excitation) と呼ばれる。この励起は周期境界条件において必ず複数個の組で現れる。端のない領域で励起が一つだけ存在すると

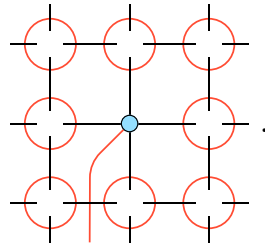


$$(1.59)$$

から必ずゼロになってしまう。

定義 1.9. ダイオン励起

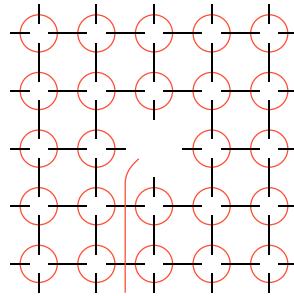
電気的な励起と磁気的な励起を組み合わせたものをダイオン励起 (dyonic excitation) と呼ぶ。



(1.60)

定義 1.10. Tube algebra

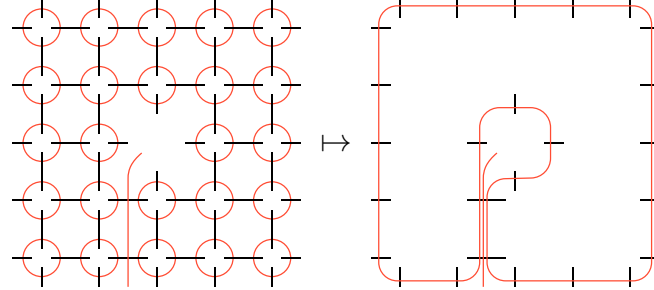
励起は果たしてこれだけだろうか。また励起を系統的に分類することはできるだろうか。この疑問に答えるために、円筒状の領域における G -isometric PEPS の parent Hamiltonian の基底空間を考える。Closure property と同様の議論によって基底状態は



(1.61)

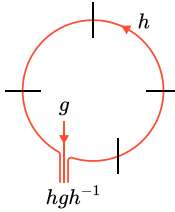
と表される。ただし、任意の境界条件をとることが許される。よって、励起が有限の領域の中に存在し、外部の parent Hamiltonian によって検出できないならば、

それはダイオン励起の形に限られる。次に、(1.61) に擬逆行列を掛けて



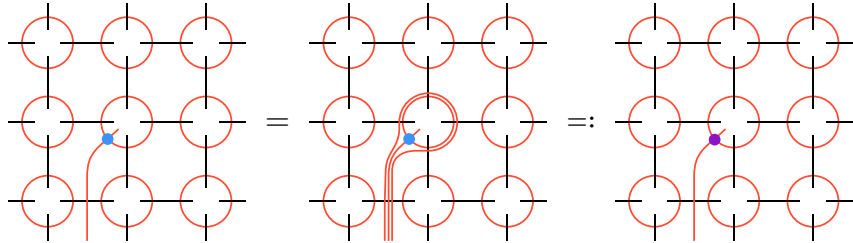
$$(1.62)$$

とすると、内側の境界条件は以下の MPO を通じてしか physical space に影響を及ぼせないことが分かる。



$$A_{g,h} := \text{diagram} \quad (1.63)$$

よってある頂点を $A_{g,h}$ の線形結合で置き換えることでエニオン励起を構成できる。ただし、以下のように $A_{g,h}$ を作用させて変形することが可能なためこの表現は一意ではない。



$$(1.64)$$

よって $\{A_{g,h}\}_{g,h}$ から生成される行列代数に注目する必要がある。これを tube algebra と呼ぶ。重要な性質として、 $\text{Span}\{A_{g,h}\}_{g,h}$ は積について閉じている:

$$A_{g',h'} A_{g,h} = \delta_{g',hgh^{-1}} A_{g,h'h}. \quad (1.65)$$

したがって tube algebra は $\text{Span}\{A_{g,h}\}_{g,h}$ に等しい。ここで構造定数が MPO の長さに依らないことから、tube algebra は円筒状領域の取り方に依らない。また群元の逆を取ると共役転置が得られるので、 $\text{Span}\{A_{g,h}\}_{g,h}$ は C^* 代数となる。

定義 1.11. 中心幂等元

任意の有限次元 C^* 代数はユニタリ変換によって $\bigoplus_i L(\mathbb{C}^{r_i}) \otimes \mathbb{1}_{m_i}$ と直和分解できる。tube algebra を直和分解したとき、それぞれの直和因子は以下の性質を満たす中心冪等元 (central idempotent) $\mathcal{P}_i \in \text{Span}\{A_{g,h}\}_{g,h}$ によってラベルされる。

$$\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \delta_{ij} \mathcal{P}_i, \quad \mathcal{P}_i^\dagger = \mathcal{P}_i, \quad \mathcal{P}_i A_{g,h} = A_{g,h} \mathcal{P}_i. \quad (1.66)$$

ただし、 \mathcal{P}_i はそれ以上は中心冪等元の和によって分解できないとする。このとき中心冪等元はミニマルであると言う。具体的には $\bigoplus_i \mathbb{L}(\mathbb{C}^{r_i}) \otimes \mathbb{1}_{m_i}$ に対して $\mathcal{P}_i = \mathbb{1}_{r_i} \otimes \mathbb{1}_{m_i}$ である。(1.64) の変形から、tube algebra の作用によって移り合う励起は同一視されるので、エニオンはミニマルな中心冪等元 \mathcal{P}_i でラベルされる。

定理 1.8.

(1.63) の定義は不便なので、改めて定義する。まず、 G の共役類 C に対する代表元を $g_C \in G$ と書く。ここで任意の $g \in C$ に対し $pgp^{-1} = g_C$ となるような $p \in G$ が存在する。これを用いて、

[illegible]

と定義し直す。ただし MPO の他の部分は計算に関係ないので省略してしまった。ここで頂点における整合性を満たすために z は g_C と交換する必要がある。このとき、**tube algebra** の中心冪等元は

$$\mathcal{P}_{C,R} := \frac{d_R}{|Z(g_C)|} \sum_{z \in Z(g_C)} \bar{\chi}^R(z) \sum_p A(C, z; p, p) \quad (1.68)$$

で与えられる。ただし $Z(g_C) := \{h \in G \mid g_C h = h g_C\}$ は g_C に対する中心化群である。また χ^R は中心化群 $Z(g_C)$ の既約表現 $\Gamma^R(z)$ に対する指標であり、 d_R は $\Gamma^R(z)$ の次元である。 C は磁荷、 R は電荷を表す。

Proof. $A(C, z; p'p)$ の積は以下の図式で与えられる。

$$(1.69)$$

ただしこれ以外の積は全てゼロになる。異なる共役類についての積がゼロになることから、tube algebra は共役類 C についてブロック対角化されている。さらに、各ブロックは g_C の中心化群 $Z(g_C) := \{h \in G \mid g_C h = h g_C\}$ の正則表現 L_z を用いて

$$A(C, z; p, p') \cong L_z \otimes |p\rangle\langle p'| \quad (1.70)$$

と書ける。 $|p\rangle\langle p'|$ は $L(\mathbb{C}^{|C|})$ を成すのでブロック対角化は出来ない。次に $Z(g_C)$ は既約表現ごとブロック対角化が可能である。よって既約表現 Γ^R への射影を構成することで、

$$\begin{aligned} & \frac{d_R}{|Z(g_C)|} \sum_{z \in Z(g_C)} \bar{\chi}^R(z) L_z \otimes \sum_p |p\rangle\langle p| \\ & \cong \frac{d_R}{|Z(g_C)|} \sum_{z \in Z(g_C)} \bar{\chi}^R(z) \sum_p A(C, z; p, p) \end{aligned} \quad (1.71)$$

が中心冪等元となることが分かる。ここで $\chi^R(z) := \text{Tr}[\Gamma^R(z)]$ は指標であり、 d_R は Γ^R の次元である。またこれ以上の分解は不可能である。 $Z(g_C)$ の既約表現への分解は一般に多重度を含むが、 L_z の線形結合によって同値な表現を区別する射影を作ることは出来ないので、これを考慮する必要はない。 \square

定理 1.9. Topological spin

磁荷 C 、電荷 R をもつエニオンに対して

$$(1.72)$$

ここで $e^{2\pi i h_{C,R}} = \Gamma^R(g_C)$ である。ただし g_C は共役類 C の代表元、 Γ^R は中心化群 $Z(g_C)$ の既約表現である。

Proof. トポロジカルスピンは以下の演算子の作用から求まる。

$$A(C, g_C; e, e) = \begin{array}{c} g_C \\ \downarrow \\ g_C \cdots \leftarrow \text{---} \rightarrow \cdots \\ \uparrow \\ g_C \end{array} \quad (1.73)$$

ここで $Z(g_C)$ の既約表現 Γ^R に対して

$$\forall z \in Z(g_C), \Gamma^R(g_C) \Gamma^R(z) = \Gamma^R(z) \Gamma^R(g_C) \quad (1.74)$$

が成り立つ。よって Schur の補題から $\Gamma^R(g_C) \propto \mathbb{1}$ である。さらに $g_C^n = e$ となる n が存在することから $h_{C,R} \in [0, 1)$ が存在して $\Gamma^R(g_C) = e^{2\pi i h_{C,R}} \mathbb{1}$ である。 \square

定理 1.10. Braiding