

# Fradkin 14 章

---

政岡凜太郎

July 19, 2024

14.1 Quantum Hall fluids on a torus

14.2 Hydrodynamic theory

14.3 Hierarchical state

14.4 Multi-component abelian fluids

14.6 Non-abelian quantum Hall states

14. 7 The spin-singlet Halperin states

14.8 Moore-Read states and their generalizations

## Fradkin 14 章

---

政岡凜太郎

July 19, 2024

14.1 Quantum Hall fluids on a torus

14.2 Hydrodynamic theory

14.3 Hierarchical state

14.4 Multi-component abelian fluids

14.6 Non-abelian quantum Hall states

14. 7 The spin-singlet Halperin states

14.8 Moore-Read states and their generalizations

このノートでは自然単位系を用いる。すなわち  $\hbar = c = \epsilon_0 = 1$  とする。またゲージ場  $A_\mu$  に電荷  $e$  を含める定義を採用する。このとき、 $A_\mu$  は長さの逆数の次元をもつ。形式的には  $e$  を 1 に置き換えればよい。同様に磁場や磁束も全て  $e$  倍したものを定義として用いる。このとき量子 Hall 系に対する磁気長は  $l_B = \sqrt{1/B}$  となり、磁束量子は  $\phi_0 = 2\pi$  となる。

## 14.1 Quantum Hall fluids on a torus

---

## 14.1 Quantum Hall fluids on a torus

トーラス  $\mathbb{T}^2(L)$  上で定義された  $N$  粒子の量子 Hall 系に対して、重心運動の自由度を分離することを考えてみよう。各粒子の位置  $x_i$  に対して、重心の位置  $X$  は

$$X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i + \frac{L}{N} n, \quad n \in (\mathbb{Z}_N)^2 \quad (1.1)$$

と表される。トーラス上では  $N$  で割る操作は  $(\mathbb{Z}_N)^2$  の不定性を生むことに注意。不定性をなくすために、 $X \in [0, L/N)^2$  を仮定する。ここで連続的に  $x_1$  を  $Le_\mu$  だけ動かすと、もとの配位に戻って来るが、 $X$  は

$$X \rightarrow X + \frac{L}{N} e_\mu \quad (1.2)$$

となる。したがって  $X \in \mathbb{T}^2(L/N)$  とするべきである。

しかし、このように定義した重心座標  $X$  と相対座標  $x'_i := x_i - X$  によって  $N$  粒子の配位を直積  $(X, \{x'_i\})$  のように表すことはできない。これは  $\{x'_i\}$  を固定したまま、 $X$  を連続的に  $(L/N)e_\mu$  だけ並進すると分かる。このとき  $(X, \{x'_i\})$  は不変になるはずだが、もとの座標系では

$$x_i \rightarrow x_i - \frac{L}{N} e_\mu \quad (1.3)$$

となる。したがって  $(X, \{x'_i\})$  は直積ではなく、 $L/N$  単位の並進によってひねられて貼り合わされている。つまり  $(X, \{x'_i\})$  は  $\mathbb{T}^2(L/N)$  を底空間、 $(\mathbb{Z}_N)^2$  を構造群とするファイバーバンドルになっている。

次に量子系を考えよう。状態空間の基底は  $|X\rangle|\{x_i - X\}\rangle$  と書ける。ただしこれはテンソル積ではなく、

$$T\left(\frac{L}{N}e_\mu\right)|X\rangle|\{x_i - X\}\rangle = |X\rangle T\left(-\frac{L}{N}e_\mu\right)|\{x_i - X\}\rangle \quad (1.4)$$

を満たす。ここで  $T$  は並進演算子である。 $|X\rangle$  を独立に扱うためには、相対運動の状態が  $T(-(L/N)e_\mu)$  の固有状態であると仮定すればよい。 $|\psi_k\rangle$  を  $T(-(L/N)e_\mu)$  に対して固有値  $\exp(2\pi i k_\mu/N)$  をもつ固有状態とすると、

$$T\left(\frac{L}{N}e_\mu\right)|X\rangle|\psi_k\rangle = |X\rangle e^{2\pi i k_\mu/N}|\psi_k\rangle \quad (1.5)$$

となる。よってこの場合  $|X\rangle$  はひねり境界条件に従うとすればよい。



## 14.1 Quantum Hall fluids on a torus

重心の運動量を表す演算子は  $P := \sum_{i=1}^N p_i$  で与えられる。また  $p'_i := p_i - P/N$  とおく。Landau ゲージまたは対称ゲージのもとで  $A(x)$  が  $x$  に対して線形であることに注意すると、

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2M} \sum_i (p_i - A(x_i))^2 + V(x'_1, \dots, x'_N) \\ &= \frac{1}{2M} \sum_i \left( \frac{P}{N} - A(X) + p'_i - A(x'_i) \right)^2 + V(x'_1, \dots, x'_N) \\ &= \frac{1}{2NM} (P - NA(X))^2 + H'(x'_1, \dots, x'_N, p'_1, \dots, p'_N) \end{aligned} \quad (1.6)$$

と書ける。ここで、相対運動を表すハミルトニアン  $H'$  は唯一の基底状態をもつとする。このとき基底状態の縮退度は重心運動のみによって決まる。占有率が  $\nu = 1/m$  のとき、Landau 準位の縮退度は  $\Phi/\phi_0 = mN$  で与えられる。重心の電荷は  $N$  なので、磁束量子は  $\phi_0/N$  で与えられる。また基底状態が  $(L/N)e_\mu$  の並進に対して固有値 1 をもつとすれば、重心  $(L/N)^2$  のトーラス上を動くので、全磁束は  $\Phi/N^2$  で与えられる。よって重心にとっての Landau 準位の縮退度は  $\Phi/(N\phi_0) = m$  である。ここから  $\nu = 1/m$  のときの縮退度は  $m$  となる。

- ・ トーラス上の Laughlin 波動関数は  $\theta$  関数で表され、縮退度に対応して  $m$  個の線形独立な波動関数が構成できるらしい。
- ・ non-Abelian の場合は重心系の情報だけから縮退度を求めるのは無理らしい。

## 14.1.1 Flux attachment on a torus

相互作用するフェルミオン系、またはボソン系を考える。ただし、ボソンの場合はハードコアの相互作用を仮定する。linking-number は電流  $j_\mu$  に対して

$$\nu_L[j] = \frac{1}{2\pi} \int d^3x j_\mu(x) b^\mu(x) \in \mathbb{Z} \quad (1.7)$$

で与えられる。ここで、 $b^\mu$  は  $\epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\nu b^\lambda = 2\pi j_\mu$  によって与えられる。粒子の世界線が交わらないとき、 $\nu_L[j]$  はトポロジカル不変量であるから、作用を  $S[j] \mapsto S[j] - 2\pi s \nu_L[j]$  としても等価な理論が得られるはずである。ここで  $s$  は任意の整数である。このとき、粒子の遷移振幅は

$$W = \sum_{[j]} e^{iS[j] - 2\pi i s \nu_L[j] + i\phi[j]} \quad (1.8)$$

と表される。ただし  $\phi[j]$  は粒子の統計性からくる位相因子である。経路積分に以下を挿入することで、補助場  $a, b$  を導入する。

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}b \prod_\mu \delta[\epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\nu b^\lambda - 2\pi j_\mu] \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}b \mathcal{D}a \exp\left(\frac{i}{2\pi} \int d^3x a^\mu [\epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\nu b^\lambda - 2\pi j_\mu]\right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

ただし  $\mathcal{D}b$  はゲージ変換の自由度を除いたものとする。

## 14.1.1 Flux attachment on a torus

すると以下のラグランジアンを得る。

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}[a, b, j] = \frac{1}{2\pi} a \wedge db - a \wedge \star j - \frac{2s}{4\pi} b \wedge db \quad (1.10)$$

境界の寄与を無視すると  $a \wedge db = b \wedge da$  としてよい。 $b$  についての平方完成

$$\frac{1}{4\pi} (a \wedge db + b \wedge da - 2sb \wedge db) = -\frac{2s}{4\pi} \left(b - \frac{a}{2s}\right) \wedge d\left(b - \frac{a}{2s}\right) + \frac{1}{4\pi \times 2s} a \wedge da \quad (1.11)$$

から、 $b$  について integrate out することで

$$S_{\text{eff}}[a] = \frac{\theta}{2} \int a \wedge da, \quad \theta = \frac{1}{2\pi \times 2s} \quad (1.12)$$

が得られる。まとめると、

$$W = \sum_{[j]} \int \mathcal{D}a \exp \left( iS[j] + i\phi[j] + iS_{\text{eff}}[a] - i \int a \wedge \star j \right). \quad (1.13)$$

となる。ここでゲージ場  $a$  に対する Chern-Simons 項はゲージ不変ではないことに注意。[\(1.13\)](#) は flux attachment の具体的な表示になっている。ただし、結局  $S[j]$  が難しいため厳密性を保ったままこれ以上先には行けないと思われる。

## 14.1.1 Flux attachment on a torus

次に abelian な多成分の Chern-Simons 理論として最も一般的なものを考え、その性質を考える。物理的なゲージ場  $A_\mu$  と統計的なゲージ場  $a_\mu^I$ ,  $I = 1, \dots, n$  に対し、整数の成分をもつ行列  $K_{IJ}$  とベクトル  $t_I$  によって指定される以下のラグランジアンを考える。

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4\pi} K_{IJ} \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu^I \partial_\nu a_\lambda^J - \frac{1}{2\pi} t_I \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu^I \partial_\nu A_\lambda \quad (1.14)$$

行列  $K$  のことをそのままが  $K$  行列と呼ぶ。また  $t_I$  のことを電荷ベクトルと呼ぶ。まず占有率  $\nu$  を求める。古典的な運動方程式の期待値がゼロになることから、

$$\left\langle \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta a_\mu^I} \right\rangle = -\frac{1}{2\pi} \langle K_{IJ} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu a_\lambda^J \rangle - \frac{1}{2\pi} t_I \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda = 0 \quad (1.15)$$

である。各辺に  $t^T K^{-1}$  を左から掛けると、

$$\frac{t^T K^{-1} t}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda = -\frac{1}{2\pi} \langle t_I \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu a_\lambda^I \rangle = \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta A_\mu} = \langle J_\mu \rangle. \quad (1.16)$$

よって Hall コンダクタンスと占有率  $\nu$  は

$$\sigma_{xy} = \frac{t^T K^{-1} t}{2\pi}, \quad \nu = t^T K^{-1} t \quad (1.17)$$

である。ただし、 $\nu = 2\pi \langle J_0 \rangle / B$  を用いた。

## 14.1.1 Flux attachment on a torus

次に、ゲージ場  $a^I$  と整数の電荷  $l_I$  によって結合する準粒子励起の自由度を系に追加する。 $l_I$  を準粒子ベクトルと呼ぶ。このときラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4\pi} K_{IJ} \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu^I \partial_\nu a_\lambda^J - \frac{1}{2\pi} t_I \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu^I \partial_\nu A_\lambda - l_I j^\mu a_\mu^I \quad (1.18)$$

となる。運動方程式は、

$$\left\langle \frac{\delta S_{\text{eff}}[A, a^I]}{\delta a_\mu^I} \right\rangle = -\frac{1}{2\pi} \langle K_{IJ} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu a_\lambda^J \rangle - \frac{1}{2\pi} t_I \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda - l_I \langle j^\mu \rangle = 0. \quad (1.19)$$

各辺に  $t^T K^{-1}$  を左から掛けると、

$$\langle J_\mu \rangle = \frac{t^T K^{-1} t}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda + t^T K^{-1} l j^\mu. \quad (1.20)$$

第1項は外場による応答を表している。第2項は準粒子励起の寄与であり、電荷  $Q$  が

$$Q = t^T K^{-1} l \quad (1.21)$$

であることが読み取れる。

## 14.1.1 Flux attachment on a torus

次に準粒子の統計位相を見る。そのためには Wilson ループ

$$W(\Gamma, l) = \exp \left( i \oint_{\Gamma} l_I a^I \right) = \exp \left( i \int l_I a^I \wedge \delta(\Gamma) \right) \quad (1.22)$$

が絡み合った時の期待値を調べれば良い。ここでは古典的な計算を用いる。後で量子的な計算も扱う。Wilson ループは  $a^I$  と電荷  $l^I$  によって結合するデルタ関数的な電流とみなせる。一本の Wilson ループを作用に加えた状況を古典的に扱うと、統計的ゲージ場  $a^I$  が従う運動方程式は以下ようになる。

$$da^I = 2\pi(K^{-1}l)^I \delta(\Gamma) \quad (1.23)$$

このゲージ場のもとでのもう一本の Wilson ループの値は

$$\oint_{\partial\Sigma} l_I a^I = \int_{\Sigma} l_I da^I = 2\pi l^T K^{-1} l \int_{\Sigma} \delta(\Gamma) = 2\pi l^T K^{-1} l \cdot \text{Link}(\partial\Sigma, \Gamma) \quad (1.24)$$

となる。粒子の交換に対する位相はこの半分なので、

$$\delta = \pi l^T K^{-1} l \quad (1.25)$$

となる。結果は量子論的な計算でも同様である。

## 14.1.2 Chern-Simons on a torus

Chern-Simons 理論はトポロジカル場の量子論であり、基底状態の縮退度は空間のトポロジによって変化する。我々が考えたいのは基底状態なので、時間方向は  $\mathbb{R}$  とする。また空間を表す多様体を  $\mathcal{M}_g$  とし、その種数を  $g$  とする。まず、 $a_0^I$  を Lagrange 未定乗数とみなすことで、

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{M}_g) &= \int \mathcal{D}a_\mu \exp \left( \frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R} \times \mathcal{M}_g} d^3x K_{IJ} \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu^I \partial_\nu a_\lambda^J \right) \\ &= \int \mathcal{D}a_i \prod_I \delta[\epsilon_{ij} \partial_i a_j^I] \exp \left( \frac{i}{4\pi} \int dx_0 \int_{\mathcal{M}_g} d^2x K_{IJ} \epsilon^{ij} a_i^I \partial_0 a_j^J \right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

となる。<sup>1</sup>ただし、この分配関数はゲージ変換  $a_i^I \mapsto a_i^I + \partial_i \Lambda$  の自由度が入っているため、無限大の定数が掛かっている。これを取り除くためには、 $da^I = 0$  を満たすゲージ場の配位の中で、 $a^I \mapsto a^I + d\Lambda$  を同一視したときの同値類 = de Rahm コホモロジー類の自由度を調べればよい。 $\mathcal{M}$  に関する de Rahm コホモロジーを見ると、これは  $H^1(\mathcal{M}_g) = \mathbb{R}^{2g}$  で与えられる。

---

<sup>1</sup>教科書に従ってここでは  $K$  行列の符号が逆になっている。符号は結論には影響しない。



## 14.1.2 Chern-Simons on a torus

de Rahm コホモロジー類の代表元を  $b_\alpha$  として、

$$a_i^I = \sum_{\alpha=1}^{2g} \bar{a}_\alpha^I b_{\alpha,i} \quad (1.27)$$

と表すことができる。すると分配関数は、

$$Z(\mathcal{M}) = \int \prod_{\alpha} \mathcal{D}\bar{a}_\alpha \exp \left( \frac{iK_{IJ}}{4\pi} \Omega_{\alpha\beta} \int dx_0 \bar{a}_\alpha^I \partial_0 \bar{a}_\beta^J \right), \quad \Omega_{\alpha\beta} := \int d^2x b_\alpha \wedge b_\beta \quad (1.28)$$

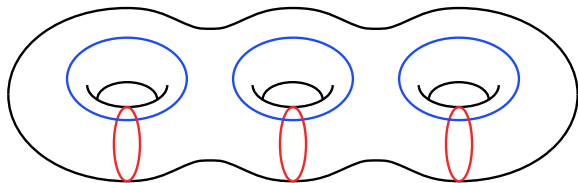
と表される。ここで、代表元  $b_\alpha$  としてデルタ関数形式  $\delta(\Gamma_\alpha)$  を用いることにする。 $\Gamma_\alpha$  は  $\mathcal{M}$  上の可縮でない閉曲線である。すると  $\Omega_{\alpha\beta}$  は曲線の交点数で与えられるので、

$$\Omega = \begin{pmatrix} i\sigma_y & & \\ & \ddots & \\ & & i\sigma_y \end{pmatrix}, \quad i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

とできる。このとき閉曲線の組ごとに作用への寄与が独立になるため、

$$Z(\mathcal{M}) = Z(\mathbb{T}^2)^g, \quad Z(\mathbb{T}^2) = \int \mathcal{D}\bar{a}_1 \mathcal{D}\bar{a}_2 \exp \left( \frac{iK_{IJ}}{4\pi} \int dx_0 (\bar{a}_1^I \partial_0 \bar{a}_2^J - \bar{a}_2^J \partial_0 \bar{a}_1^I) \right) \quad (1.30)$$

となる。よって以降はトーラスについて考える。



## 14.1.2 Chern-Simons on a torus

変数  $\bar{a}_0, \bar{a}_1$  の間の正準交換関係は

$$[\bar{a}_i^I, \bar{a}_j^J] = 2\pi i \epsilon_{ij} (K^{-1})^{IJ} \quad (1.31)$$

で与えられる。よって

$$\bar{a}_i^I = 2\pi i \epsilon_{ij} (K^{-1})^{IJ} \frac{\partial}{\partial \bar{a}_j^J} \quad (1.32)$$

である。ラージゲージ変換  $\bar{a}_i^I \mapsto \bar{a}_i^I + 2\pi$  に対する不変性から、共役な 2 つの変数がどちらもコンパクトであることに注意する。ここで Wilson ループを

$$W_i^I := e^{i\bar{a}_i^I} = \exp \left( i \oint_{\Gamma_i} a \right) \quad (1.33)$$

によって定義する。ただし  $\Gamma_i$  は  $\bar{a}_i^I$  が乗っている閉曲線に共役な閉曲線である。次に  $\bar{a}_i^I \mapsto \bar{a}_i^I + 2\pi$  というラージゲージ変換を引き起こす演算子として、

$$U_i^I := e^{i\epsilon^{ij} (K\bar{a}_j)^I} = e^{2\pi \partial / \partial \bar{a}_i} \quad (1.34)$$

を定義する。

## 14.1.2 Chern-Simons on a torus

演算子  $U_i^I$ ,  $W_i^I$  は以下の関係式を満たす。

$$W_1^I W_2^J = e^{-[\bar{a}_1^I, \bar{a}_2^J]} W_2^J W_1^I = e^{-2\pi i K_{IJ}^{-1}} W_2^J W_1^I, \quad (1.35)$$

$$U_1^I U_2^J = e^{[(K\bar{a}_2)^I, (K\bar{a}_1)^J]} U_2^J U_1^I = e^{-2\pi i K_{IJ}} U_2^J U_1^I = U_2^J U_1^I, \quad (1.36)$$

$$U_i^I W_j^J = e^{[i\epsilon^{ik}(K\bar{a}_k)^I, i\bar{a}_j^J]} W_j^J U_i^I = e^{-2\pi i \delta_{ij}} W_j^J U_i^I = W_j^J U_i^I \quad (1.37)$$

求めたいのは Hilbert 空間の次元であった。状態は  $\bar{a}_1^I$  に対する波動関数として表せる。 $2\pi$  の周期性から、運動量は離散的な整数値  $k_I \in \mathbb{Z}$  を取る。さらに

$$\bar{a}_2^I = -2\pi i (K^{-1})^{IJ} \frac{\partial}{\partial \bar{a}_1^J} = 2\pi (K^{-1})^{IJ} k_J \quad (1.38)$$

が  $2\pi$  の周期性をもつことから、 $k_I$  は

$$k_I \rightarrow k_I + K_{IJ} \quad (1.39)$$

について周期性をもつ。つまり、運動量は  $K$  の行ベクトルを格子ベクトルとするような周期性をもつ。単位格子の中にいる運動量の数は  $|\det K|$  で与えられるから、Hilbert 空間の次元は  $|\det K|$  である。一般の曲面に対する Hilbert 空間はトーラスの Hilbert 空間のテンソル積で表されるので、次元は  $|\det K|^g$  となる。

## 14.2 Hydrodynamic theory

---

## 14.2 Hydrodynamic theory

この節では有効理論の視点から Chern–Simons 理論の妥当性を見ていく。まず時空を  $S^1 \times \mathcal{M}$  とする。また物理的自由度として電流  $J_\mu$  を採用する。 $J_\mu$  は

$$J_0(x) = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i), \quad \mathbf{J}(x) = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \delta(x - x_i) \quad (2.1)$$

と書かれる。また保存則  $\partial_\mu J^\mu = 0$  が成り立つ。系の作用は  $S[J]$  と表され、電荷の任意の軌道について和をとることで分配関数が得られる。ここで保存則  $\partial_\mu J^\mu = 0$  を満たす場合は

$$J_\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\nu b^\lambda + \omega_\mu \quad (2.2)$$

と表せる。 $\omega$  は調和形式であり、 $d\omega = 0$ ,  $\delta\omega = 0$  を満たす。 $J_\mu$  の具体的表式 (2.1) から  $\omega$  は

$$\omega_0 = \frac{N}{|S^1||\mathcal{M}|}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

に限る。また  $b$  にゲージ変換  $b \mapsto b + d\Phi$  およびラージゲージ変換  $b \mapsto b + \Omega$  を行っても  $J$  は不変である。ただし  $\Omega$  は調和形式。よって  $S[J]$  に対応する  $S[b]$  はゲージ理論になっている。

## 14.2 Hydrodynamic theory

ゲージ理論のラグランジアンで最も素朴なのは Maxwell 項  $db \wedge \star db$  である。 $J_\mu$  は曲面上で積分すると電荷 (無次元量) を返すので、自然単位系における次元は 2 である。よってゲージ場  $b$  の次元は 1 である。すると Maxwell 項の次元は 4 である。しかし、時間反転対称な Maxwell 項は磁場中の電子系の有効理論にはなり得ない。以下の条件を満たすような作用を考えると Chern–Simons 作用のみであることが分かる。

- ・ 時間反転対称性を破る
- ・ パリティを破る
- ・ 空間での回転対称性
- ・ ゲージ不変性
- ・ Maxwell 項より relevant

さらに準粒子励起を考えるとどのような有効理論になるだろうか。準粒子励起のカレントを  $j_\mu$  とする。 $j_\mu$  が統計的ゲージ場  $b_\mu$  のゲージ不変性に付随するカレントであるとき、相互作用項は  $qj^\mu b_\mu$  と表される。ただし  $q$  は整数である。よって有効理論のラグランジアンは

$$\mathcal{L}[b_\mu, j_\mu] = -\frac{m}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} b_\mu \partial_\nu b_\lambda - \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu b_\lambda + qj^\mu b_\mu \quad (2.4)$$

となる。

## 14.3 Hierarchical state

---



## 14.3 Hierarchical state

Laughlin 波動関数は占有率が  $\nu = 1/m$  の場合しか記述できない。 $\nu$  が  $1/m$  から微小にずれた場合の波動関数は、希薄な準粒子励起によって記述されていると考えられる。

Haldane は  $\nu$  をさらに動かして準粒子励起の密度を大きくしていくと、準粒子励起が Laughlin 波動関数に従って凝縮すると考えた。さらにその状態からの準粒子励起を考え、それが凝縮した状態を考え、というようにいくらでも続けることができる。このような状態を階層状態と呼ぶ。この描像では  $\nu$  は連分数で表され、顕著なプラトー  $\nu = 2/5, 3/7, \dots$  をある程度説明できる。

ここでは、Chern-Simons 理論と  $K$  行列の形式によって階層状態を議論する。作用は以下のように表される。

$$\mathcal{L}[b_\mu, A_\mu, j_\mu] = -\frac{m}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} b_\mu \partial_\nu b_\lambda - \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} A^\mu \partial^\nu b^\lambda + q b_\mu j^\mu + \mathcal{L}_{\text{qp-KE}} \quad (3.1)$$

ここで  $j^\mu$  に対して

$$j_\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \partial^\nu c^\lambda \quad (3.2)$$

によって統計的なゲージ場を導入する。 $\mathcal{L}_{\text{qp-KE}}$  の有効理論が  $c^\mu$  についての Chern-Simons 項になると仮定すると、

$$\mathcal{L}[b_\mu, A_\mu, c_\mu] = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \left( -\frac{m}{2} b_\mu \partial_\nu b_\lambda - A^\mu \partial_\nu b^\lambda - \frac{n}{2} c_\mu \partial_\nu c_\lambda + b_\mu \partial_\nu c_\lambda \right) \quad (3.3)$$

を得る。

## 14.3 Hierarchical state

$K$  行列で書くと、

$$K = \begin{pmatrix} p_1 & -1 \\ -1 & p_2 \end{pmatrix}, \quad t = (1, 0). \quad (3.4)$$

$K^{-1}$  を計算すると

$$K^{-1} = \frac{1}{p_1 p_2 - 1} \begin{pmatrix} p_2 & 1 \\ 1 & p_1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

であるから、一般論より

$$\nu = t^I K_{IJ}^{-1} t^J = \frac{p_2}{p_1 p_2 - 1} \quad (3.6)$$

となる。また基底状態の縮退度は

$$|\det K| = |p_1 p_2 - 1| \quad (3.7)$$

となる。電荷と統計角は以下の通り。

$$Q = -t^T K^{-1} l = -\frac{p_2 l_1 + l_2}{p_1 p_2 - 1}, \quad \delta = \pi l^T K^{-1} l = \pi \frac{p_2 l_1^2 + p_1 l_2^2 + 2l_1 l_2}{p_1 p_2 - 1}. \quad (3.8)$$

## 14.3 Hierarchical state

例えば  $\nu = 2/5$  の状態は

$$K = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad t = (1, 0) \quad (3.9)$$

によって記述される。基底状態は  $\det K = 5$  重縮退している。この理論には以下のような準粒子励起がある。

- $l = (0, 1)$ ,  $Q = 1/5$ ,  $\delta = 3\pi/5$
- $l = (1, 0)$ ,  $Q = 2/5$ ,  $\delta = 2\pi/5$

$(0, 2)$  は  $(1, 0)$  と同じ電荷と  $\text{mod } 2\pi$  で同じ統計角をもつ。このため  $(1, 0)$  は  $(0, 1)$  が 2 つ集まった複合粒子とみなせる。また  $l = (0, -5)$  は  $Q = -1$ ,  $\delta = \pi$  をもつことから、電子は準粒子励起が 5 つの複合粒子とみなせる。

他の興味深い例は  $\nu = 2/3$  の状態である。これは  $\nu = 1/3$  の Laughlin 状態と particle-hole conjugate の関係にあるが、2 階層の状態として以下の  $K$  行列で記述される。

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

## 14.3 Hierarchical state

$n-1$  個の統計ゲージ場をもつラグランジアン

$$\mathcal{L}^{(n-1)} = -\frac{1}{4\pi} K_{IJ}^{(n-1)} \epsilon^{\mu\nu\lambda} b_\mu^I \partial_\nu b_\lambda^J - \frac{1}{2\pi} t_I^{(n)} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu b_\lambda^I + l_I^{(n-1)} b_\mu^I j_{\text{qp}}^\mu \quad (3.11)$$

に対して、 $j^\mu$  をダイナミカルな自由度だと思う。新たな統計ゲージ場  $b^n$  を  $j_{\text{qp}}^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu b_\lambda^n / 2\pi$  によって導入する。準粒子励起が  $\nu_{\text{qp}} = 1/p_n$  の Laughlin 波動関数に従って凝縮するとき、 $b^n$  がレベル  $p_n$  の Chern-Simons 理論で記述される。ラグランジアンは

$$\mathcal{L}^{(n)} = -\frac{1}{4\pi} K_{IJ}^{(n)} \epsilon^{\mu\nu\lambda} b_\mu^I \partial_\nu b_\lambda^J - \frac{1}{2\pi} t_I^{(n-1)} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu b_\lambda^I \quad (3.12)$$

となる。ただし  $I = 1, \dots, n$  とし、 $K^{(n)}, t^{(n)}$  は

$$K^{(n)} = \begin{pmatrix} K^{(n-1)} & -l^{(n-1)} \\ -(l^{(n-1)})^T & p_n \end{pmatrix}, \quad t^{(n)} = \begin{pmatrix} t^{(n-1)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

によって与えられる。ここで  $b^1, \dots, b^n$  に結合する新たな励起  $j_{\text{qp}}'^\mu$  を系に加えると、以上の議論を繰り返してより高い階層の  $K$  行列が構成できる。

## 14.3 Hierarchical state

一般の階層状態は

$$K = \begin{pmatrix} p_1 & -1 & & \\ -1 & p_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & p_n \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

で与えられる。ただし  $p_1$  は奇数で  $p_2, \dots, p_n$  は偶数とする。このとき占有率は

$$\nu = \frac{1}{p_1 - \frac{1}{p_2 - \frac{1}{p_3 - \dots}}} \quad (3.15)$$

となる。

ここで全ての  $(K, t)$  は別々の量子 Hall 流体を表すわけではなく、同値なものが存在することを注意しておく。 $b^I$  に対する線形変換  $b \rightarrow W^T b$  によって  $(K, t)$  は

$$K \rightarrow W K W^T, \quad t \rightarrow W t \quad (3.16)$$

と変換する。また準粒子ベクトルは  $l \rightarrow W l$  となる。ここで準粒子の電荷が整数に量子化されていることから、 $W$  が同値な模型の間の変換であるためには  $\mathbb{Z}^n$  を  $\mathbb{Z}^n$  に移す必要がある。すなわち  $W \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$  となる。

## 14.4 Multi-component abelian fluids

---

## 14.4 Multi-component abelian fluids

この節では 2 成分の量子 Hall 流体を考える。このような状況は 2 層の 2 次元電子系、または偏向していない 1 層の電子系で起こり得る。Halperin は Laughlin 波動関数に似た以下の波動関数を提案した。

$$\begin{aligned} \Psi_{m_1, m_2, n}(z_1, \dots, z_{N/2}, w_1, \dots, w_{N/2}) \\ = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{m_1} \prod_{i < j} (w_i - w_j)^{m_2} \prod_{i \leq j} (z_i - w_j)^n \exp \left( -\frac{1}{4l_0^2} \sum_{i=1}^{N/2} (|z_i|^2 + |w_i|^2) \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここで  $z_i$  と  $w_i$  はそれぞれの成分における電子の位置を表す。電子の統計性から、 $m_1$  と  $m_2$  は奇数、 $n$  は偶数である必要がある。状態 (4.1) を  $(m_1, m_2, n)$  Halperin 状態と呼ぶ。2 成分の電流  $J_I^\mu$  のそれぞれに対し、統計的ゲージ場を

$$J_I^\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu b_\lambda^I \quad (4.2)$$

によって導入する。 $b_\mu^I$  に対する有効理論は Chern-Simons 理論

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4\pi} K_{IJ} \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu^I \partial_\nu a_\lambda^J - \frac{1}{2\pi} t_I \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu a_\nu^I \quad (4.3)$$

で記述されるだろう。

## 14.4 Multi-component abelian fluids

Halperin 状態を複合粒子描像で考えると、 $K$  行列と電荷ベクトルは

$$K = \begin{pmatrix} m_1 & n \\ n & m_2 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

とするのが妥当である。基底状態の縮退度は  $|m_1 m_2 - n^2|$  で与えられる。

$$K^{-1} = \frac{1}{m_1 m_2 - n^2} \begin{pmatrix} m_2 & -n \\ -n & m_1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

から、それぞれの成分の電子に対する占有率は

$$\nu_1 = \frac{m_2 - n}{m_1 m_2 - n^2}, \quad \nu_2 = \frac{m_1 - n}{m_1 m_2 - n^2} \quad (4.6)$$

となる。合計の占有率は

$$\nu = \frac{m_1 + m_2 - 2n}{m_1 m_2 - n^2} \quad (4.7)$$

である。また準粒子励起の電荷と統計位相は

$$Q(l_1, l_2) = \frac{(m_2 - n)l_1 + (m_1 - n)l_2}{m_1 m_2 - n^2}, \quad \delta(l_1, l_2) = \pi \frac{m_2 l_1^2 + m_1 l_2^2 - 2n l_1 l_2}{m_1 m_2 - n^2} \quad (4.8)$$

と表される。



## 14.4 Multi-component abelian fluids

特別な場合として  $(m, m, n)$  Halperin 状態を考えると、占有率は

$$\nu = \frac{2}{m+n} \quad (4.9)$$

となる。基本的な準粒子励起  $l = (1, 0)$  or  $(0, 1)$  に対して

$$Q = \pm \frac{1}{m+n}, \quad \delta = \pi \frac{m}{m^2 - n^2} \quad (4.10)$$

である。ここで

$$b_{\pm}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_1^{\mu} \pm b_2^{\mu}) \quad (4.11)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{m+n}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} b_+^{\mu} \partial^{\nu} b_+^{\lambda} - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} A^{\mu} \partial^{\nu} b_+^{\lambda} \\ & + \frac{m-n}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} b_-^{\mu} \partial^{\nu} b_-^{\lambda} \\ & + j_{\mu}^{\text{qp}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(l_1 + l_2) b_+^{\mu} + \frac{1}{\sqrt{2}}(l_1 - l_2) b_-^{\mu} \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

である。よってゲージ場は電荷をもつモード  $b_+^{\mu}$  と中性なモード  $b_-^{\mu}$  に分けられる。ただし準粒子励起は  $\pm$  の両方の量子数をもつ。

## 14.6 Non-abelian quantum Hall states

---

## 14.6 Non-abelian quantum Hall states

エニオンの位置の交換は組み紐の群の表現として表せる。今までは abelian な表現を考えてきたが、以降は non-abelian な表現に対応するエニオンを考える。

有効理論としては non-abelian なゲージ場に対する Chern-Simons 理論が現れる。

(2 + 1) 次元の Chern-Simons 理論は 2 次元の共形場理論と深い関係をもつことが知られている。大雑把には

$$Z(A, \bar{A}) = \sum_{\alpha} \bar{\Psi}_{\alpha}(\bar{A}) \Psi_{\alpha}(A) \quad (5.1)$$

という形。 $Z(A, \bar{A})$  は CFT の外場付きの分配関数。 $\Psi_{\alpha}(A)$  は Chern-Simons 理論の基底状態であり、かつ CFT の conformal block になっている。波動関数は時空の境界条件を定めた経路積分によって表せるから、Chern-Simons の境界に CFT が住んでいるとみなせる。

さらに、Laughlin 状態などの試行状態も CFT と関係づけることができる。これは試行状態の系統的な導出を可能にする。

## 14.6.1 Conformal field theory and quantum Hall wave functions

Laughlin 状態

$$\Psi_m(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \exp \left( - \sum_{i=1}^N \frac{|z_i|^2}{4l_0^2} \right) \quad (5.2)$$

を改めて考察する。注目すべき点はこの波動関数が電子間のポテンシャルの情報を含んでいないことである。Laughlin 状態はポテンシャルに依存して決まるものではなく、波動関数の長距離での性質を記述する普遍的な性質を記述するものである。普遍的な性質を理解する上で 2D CFT による記述がわかりやすい。唐突だが 2 次元 Euclid 空間上で定義されたカイラルボソン  $\varphi(z)$  を考えると、Laughlin 状態は

$$\Psi_m(z_1, \dots, z_N) = \left\langle \left( \prod_{i=1}^N e^{i\sqrt{m}\varphi(z_i)} \right) \exp \left( -i \int d^2z' \sqrt{m} \rho_0 \varphi(z') \right) \right\rangle \quad (5.3)$$

と書ける。 $\varphi(z)/\sqrt{m}$  が何らかの位相の自由度であるとし、 $\varphi(z)$  と  $\varphi(z) + 2\pi\sqrt{m}$  を同一視する。プラズマアナロジーの文脈では Laughlin 状態は一様な背景電荷の中にある電子系を表していたが、今の場合電荷が vertex operator に対応している。

## 14.6.1 Conformal field theory and quantum Hall wave functions

フリーボソンについての復習をしておく。作用は

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (5.4)$$

とする。相関関数は

$$\langle \phi(z, \bar{z}) \phi(w, \bar{w}) \rangle = -\ln |z - w|^2 \quad (5.5)$$

である。vertex operator の相関関数は

$$\langle e^{i\alpha\phi(z, \bar{z})} e^{i\beta\phi(w, \bar{w})} \rangle = \begin{cases} 0 & (\alpha + \beta \neq 0) \\ |z - w|^{2\alpha\beta} & (\alpha + \beta = 0) \end{cases} \quad (5.6)$$

となる。カイラルボソンは  $\phi(z, \bar{z}) = \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})$  と分けて正則部分を取り出すことで得られる。相関関数は以下の通り。

$$\langle \varphi(z) \varphi(w) \rangle = -\ln(z - w) \quad (5.7)$$

$$\langle e^{i\alpha\varphi(z)} e^{i\beta\varphi(w)} \rangle = \begin{cases} 0 & (\alpha + \beta \neq 0) \\ (z - w)^{\alpha\beta} & (\alpha + \beta = 0) \end{cases} \quad (5.8)$$

## 14.6.1 Conformal field theory and quantum Hall wave functions

(5.3) が成り立つことを確認しよう。多点 ( $\infty$  点) の相関関数を求めなければならないが、Wick の定理

$$\left\langle \prod_i e^{A_i} \right\rangle = \exp \left( \sum_{i < j} \langle A_i A_j \rangle \right) \quad (5.9)$$

を使えばうまくいく。ここで  $A_i$  は生成消滅演算子の線形結合で表される演算子。証明は省略する。これを適用すると、

$$\begin{aligned} & \left\langle \left( \prod_{i=1}^N e^{i\sqrt{m}\varphi(z_i)} \right) \exp \left( -i \int d^2 z' \sqrt{m} \rho_0 \varphi(z') \right) \right\rangle \\ &= \exp \left( -m \sum_{i < j} \langle \varphi(z_i) \varphi(z_j) \rangle + m \sum_i \int d^2 z' \rho_0 \langle \varphi(z_i) \varphi(z') \rangle + \text{const.} \right) \\ &= \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \exp \left( -m \sum_i \int d^2 z' \rho_0 \ln(z_i - z') + \text{const.} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

## 14.6.1 Conformal field theory and quantum Hall wave functions

まず  $\ln(z_i - z_j)$  の虚部を無視して  $\ln|z_i - z_j|$  についての積分

$$-m \int d^2 z' \rho_0 \ln|z_i - z'| \quad (5.11)$$

を考える。これは電荷密度が  $\rho_0$  で分布するときに位置  $z_i$  での静電ポテンシャルを求める問題に等価である。ここで  $\rho_0$  が半径  $R$  の円盤上で一様に分布しているとしよう。(この仮定は Laughlin 状態の性質から妥当である。) すると位置  $z_i$  における電場の大きさは

$$m\pi\rho_0|z_i|^2 \cdot \frac{1}{|z_i|} = \pi\rho_0|z_i| \quad (5.12)$$

で与えられる。よってこれを積分することで

$$-m \int d^2 z' \rho_0 \ln|z_i - z'| = -\frac{1}{2}\pi m\rho_0|z_i|^2 + \text{const.} \quad (5.13)$$

となる。 $\rho_0 = 1/2\pi m l_0^2$  を代入すると (5.3) を再現する。

$\ln(z_i - z_j)$  の虚部についての積分は至る所に分岐点を含むため ill-defined である。そこで波動関数について至る所で特異ゲージ変換を行ったと考えて位相を単純に無視すると、対称ゲージにおける波動関数が得られる。

## 14.6.1 Conformal field theory and quantum Hall wave functions

CFT による定式化の強力な点は準粒子励起を系統的に扱えることである。点状の準粒子励起に対し、準粒子励起から十分離れた点での波動関数は依然として CFT で表されるので、準粒子が波動関数にもたらす変化は CFT における何らかの演算子で表されるだろう。したがって CFT における演算子の分類 = スペクトル分解によって準粒子励起を分類することができる。さらに、プライマリー演算子  $O(w)$  に対応する励起  $|\Psi_O(w)\rangle$  があれば  $w^n \partial_w |\Psi_O(w)\rangle$  によってディセダント演算子に対応する励起が構成されるので、プライマリー演算子のみを考えればよい。電子は vertex operator  $V_m(z) := e^{i\sqrt{m}\varphi(z)}$  に対応するので、準粒子として

$$V_1(z) := e^{i\varphi(z)/\sqrt{m}} \quad (5.14)$$

を考える。すると同様の議論によって

$$\begin{aligned} & \Psi_m^+(w_1, \dots, w_M, z_1, \dots, z_N) \\ &= \left\langle \prod_{i=1}^M e^{i\varphi(w_i)/\sqrt{m}} \prod_{i=1}^N e^{i\sqrt{m}\varphi(z_i)} \exp \left( - \int d^2 z' \sqrt{m} \rho_0 \varphi(z') \right) \right\rangle \\ &= \prod_{i < j} (w_i - w_j)^{1/m} \prod_{i,j} (z_i - w_j) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \exp \left( - \frac{1}{4l_0^2} \sum_{i=1}^N |z_i|^2 - \frac{1}{4ml_0^2} \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

が得られる。



## 14.6.1 Conformal field theory and quantum Hall wave functions

準粒子励起の位置  $w_i, w_j$  を連続的に動かして反時計回りに入れ替えると、位相  $e^{i\pi/m}$  を獲得する。この操作は組み紐に対応付けられるから、粒子の交換は状態空間に作用する組み紐群の表現になっている。今の場合、準粒子の位置を定めると状態が一意に定まるため、可換な一次元表現しかあり得ない。

組み紐群の表現はモノドロミ行列として実現される。モノドロミ行列は、正則関数によって張られる線形空間作用する行列で、正則関数を閉曲線に沿って解析接続することで得られる。モノドロミ行列は一般に基本群の表現となるので、変数  $\{w_i\}$  についてのモノドロミ行列は組み紐群の表現になっている。

## 14.6.1 Conformal field theory and quantum Hall wave functions

次に準粒子励起を近づけることで、複合粒子を作ることを考えよう。CFT の文脈ではこれは演算子積展開 (OPE) そのものである。vertex operator  $V_p(z) = e^{ip\varphi(z)/\sqrt{m}}$  の OPE は

$$V_p(z)V_q(w) \sim |z-w|^{2pq/m}V_{p+q}(w) + \cdots \quad (5.16)$$

で与えられる。 $\varphi/\sqrt{m}$  が周期  $2\pi$  でコンパクト化されていることから、 $p, q \in \mathbb{Z}$  である。ここで準粒子を  $m$  個集めると電子またはホールになるため、電子・ホールの寄与を除けば  $p$  と  $q$  を fuse すると  $[p+q]_m$  になる。となる。ここで  $[p]_m$  は  $p \bmod m$  を表す。これは  $V_m = 1$  とおくことに対応する。このとき compactified boson は有理共形場理論 (RCFT) になる。RCFT とは有限個のプライマリー場をもつ CFT のこと。

## 14.6.1 Conformal field theory and quantum Hall wave functions

カイラルボソンには vertex operator の他にもプライマリー場  $\partial\varphi(z)$  がある。これは内部空間の並進対称性に付随するカレントとみなせ、 $J(z) := i\partial\varphi(z)/\sqrt{m}$  と書くことにする。 $J(z)$  と  $V_p(w)$  の OPE は

$$J(z)V_p(w) \sim \frac{p}{m} \frac{V_p(w)}{z-w} + \dots \quad (5.17)$$

となる。これは  $V_p$  の電荷が  $p/m$  であることを意味している。ただし、これは仮想的な位相の自由度  $\varphi(z)$  に結合する電荷であり、物理的な電荷は vertex operator からではなく背景から提供されることに注意。電荷の大きさが物理的な準粒子励起の電荷と一致することは  $\varphi(z)$  と physical なゲージ場との関係を示唆する。

## 14.6.2 Conformal blocks

non-abelian な量子 Hall 系を導入する前に、non-abelian な統計性について説明しておく。 $N$  粒子の波動関数を  $\psi_{p;i_1,\dots,i_N}(z_1,\dots,z_N)$  と書く。ここで  $i_1,\dots,i_N$  は各粒子に割り当てられた量子数を表す。また  $p$  は系全体で定義されるような量子数を表す。ここで連続的に粒子の位置を交換したとき、

$$\begin{aligned} & \psi_{p;i_1,\dots,i_s,\dots,i_r,\dots,i_N}(z_1,\dots,z_s,\dots,z_r,\dots,z_N) \\ &= \sum_q B_{pq}[i_1,\dots,i_N] \psi_{p;i_1,\dots,i_r,\dots,i_s,\dots,i_N}(z_1,\dots,z_r,\dots,z_s,\dots,z_N) \end{aligned} \quad (5.18)$$

となり、 $B_{pq}$  が組み紐群の多次元表現になっている解き、粒子は non-abelian fractional statistics をもつという。

ここでも我々は CFT による枠組みを用いることにする。このとき組み紐群の表現は共形ブロックのモノドロミー群によって得られる。

相関関数について、

$$\langle O_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots O_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \sum_p C_p \mathcal{F}_p(\{z\}) \bar{\mathcal{F}}_p(\{\bar{z}\}) \quad (5.19)$$

のように正則部分と反正則部分への分解を行ったとき、 $\mathcal{F}_p(\{z_i\})$  を共形ブロックと呼ぶ。次にもう少し丁寧に共形ブロックについて説明する。

## 14.6.2 Conformal blocks

まず CFT の相関関数についての復習。プライマリー場  $\phi_i$  と書く。1 点関数は  $\phi_0 = 1$  として  $\langle \phi_i \rangle = \delta_{i0}$  である。次に 2 点関数は

$$\langle \phi_i(z_1, \bar{z}_1) \phi_j(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{g_{ij}}{z_{12}^{h_i+h_j} \bar{z}_{12}^{\bar{h}_i+\bar{h}_j}} \quad (5.20)$$

となる。ここで  $(h_i, \bar{h}_i)$  は演算子  $\phi_i$  の共形ウェイト。場を線形結合によって再定義することで常に  $g_{ij} = \delta_{ij}$  とできる。3 点関数は

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \rangle = C_{123} \frac{1}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3} z_{23}^{h_2+h_3-h_1} z_{31}^{h_3+h_1-h_2}} \times \text{c.c.} \quad (5.21)$$

既に演算子のスケールを決めてしまったので  $C_{123}$  に冗長な自由度はない。4 点関数は

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \phi_4(z_4, \bar{z}_4) \rangle = f(\eta, \bar{\eta}) \prod_{i < j}^4 (z_{ij}^{h/3-h_i-h_j} \bar{z}_{ij}^{\bar{h}/3-\bar{h}_i-\bar{h}_j}). \quad (5.22)$$

ここで  $\eta := z_{12}z_{34}/z_{13}z_{24}$  は交差比で、 $f(\eta, \bar{\eta})$  は任意の関数である。3 点関数までは正則部分と反正則部分の積に分かれるが、4 点関数はそうっていない。

## 14.6.2 Conformal blocks

次に OPE について。プライマリー場  $\phi_1, \phi_2$  の OPE は

$$\begin{aligned} & \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \\ &= \sum_p C_{12}^p \left( z_{12}^{h_p - h_1 - h_2} \sum_{\{k\}} \beta_{12p}^{\{k\}} z_{12}^{k_1 + \dots + k_N} \text{ad } L_{-k_1} \dots \text{ad } L_{-k_N} \times \text{c.c.} \right) \phi_p(z_2, \bar{z}_2) \quad (5.23) \end{aligned}$$

となる。係数  $C_{12}^p$  は (5.21) の係数に一致する。さらに 3 点関数の微分から係数  $\beta_{12p}^{\{k\}}$  を求めることができる。よってディセンダントに対する係数は共形不変性から一意に定まっている。

CFT の状態空間はプライマリー状態とそのディセンダントによって張られる。一つのプライマリー状態とそのディセンダントをまとめて共形族 (Verma module) という。プライマリー場  $\phi_p$  から構成される共形族への射影を  $\Pi_p$  と書くと、OPE による計算は相関関数に  $\sum_p \Pi_p$  を挿入する操作と捉えられる。4 点関数を OPE を用いて計算すると

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle = \sum_p \langle \phi_1 \phi_2 \Pi_p \phi_3 \phi_4 \rangle = \sum_p C_p \mathcal{F}_p(\{z\}) \bar{\mathcal{F}}_p(\{\bar{z}\}) \quad (5.24)$$

と書ける。正則部分と反正則部分に分かれることは OPE の具体形 (5.23) から分かる。(おもとは Virasoro 代数が正則部分と反正則部分のテンソル積で表されること。)  $\mathcal{F}_p(\{z_i\})$  を共形ブロックと呼ぶ。

## 14.6.2 Conformal blocks

OPE 係数  $C_{ijk}$  は CFT の相関関数についての詳細な情報を含むが、完全な記述は複雑であるから、 $C_{ijk}$  がゼロか否かだけを気にしたものを fusion rule とよぶ。プライマリー場を  $\phi_i$  とすると、フュージョンルールは

$$\phi_i \star \phi_j = \sum_k N_{ij}^k \phi_k \quad (5.25)$$

と書かれる。 $\phi_i$  と  $\phi_j$  の OPE に  $\phi_k$  で指定される共形族が現れれば  $N_{ij}^k = 1$  であり、そうでなければ  $N_{ij}^k = 0$  である。 $N_{ij}^k > 2$  は同じ共形ウェイトをもつ等価なプライマリー演算子が複数出てくる場合。フュージョンルールは

$$\phi_i \star \phi_j = \phi_j \star \phi_i, \quad \phi_i \star (\phi_j \star \phi_k) = (\phi_i \star \phi_j) \star \phi_k \quad (5.26)$$

を満たす。対応して、

$$N_{ij}^k = N_{ji}^k, \quad \sum_l N_{il}^m N_{jk}^l = \sum_n N_{ij}^n N_{nk}^m \quad (5.27)$$

となる。

$n$  点関数について OPE を繰り返すことで

$$\begin{aligned}\langle \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_n} \rangle &= \sum_{\{p\}} \langle \phi_{i_1} \phi_{i_2} \Pi_{p_1} \phi_{i_3} \Pi_{p_2} \phi_{i_4} \cdots \phi_{i_{n-2}} \Pi_{p_{n-3}} \phi_{i_{n-1}} \phi_{i_n} \rangle \\ &= \sum_{\{p\}} C_{\{p\}} \mathcal{F}_{\{p\}}(\{z\}) \bar{\mathcal{F}}_{\{p\}}(\{\bar{z}\})\end{aligned}\tag{5.28}$$

と表せる。 $\mathcal{F}_{\{p\}}(\{z\})$  が共形ブロック。

理由はさておき、我々は  $\mathcal{F}_{\{p\}}(\{z_i\})$  をエニオンの波動関数に同定しようとしている。そのときエニオンの状態空間の次元は  $\mathcal{F}_{\{p\}}(\{z_i\})$  の個数である。一般の CFT ではプライマリー場が無限に存在するため共形ブロックも無限に存在するが、RCFT では状態空間に非自明な拘束条件が加わることでプライマリー場が有限個に限られる。



共形ブロックの個数を数えるだけならば、OPE を使わなくともフュージョンルールで十分である。

$$\dim \mathcal{H} = \sum_{\{p\}} N_{i_1 i_2}^{p_1} N_{p_1 i_3}^{p_2} N_{p_2 i_4}^{p_3} \cdots N_{p_{n-2} i_n}^{p_{n-1}} \quad (5.29)$$

同様の計算によって一般のトポロジーの空間における共形ブロックの個数を数えることができる。相関関数に  $\Pi_p$  を挿入する操作は空間のパンツ分解と考えられる。共形族の添字  $p$  について縮約をとる操作は空間を張り合わせることに対応している。よって例えばトーラス上の 1 点の共形ブロックの数は

$$\dim \mathcal{H} = \sum_p N_{ip}^p \quad (5.30)$$

となる。曲面にハンドルをくっつける操作は  $\sum_i (\cdots)_i \sum_p N_{ip}^p$  によって行えるので、任意の曲面に対してフュージョンルールだけから  $n$  点の共形ブロックの個数が数えられる。

## 14.6.2 Conformal blocks

共形場理論による定式化によってトーラス上の量子 Hall 流体を考えてみよう。そのためにトーラス上の CFT を考える。トーラスの周期を  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  としよう。 $\omega_2/\omega_1 = \tau$  をモジュラーパラメーターという。トーラスの自由度は  $\tau$  のみである。(さらにモジュラー不変性から  $SL(2, \mathbb{Z})$  の同値関係が入る。) 一般性を失わずに  $\omega_1 = L \in \mathbb{R}$  とおく。

$H$  をシリンダー時空におけるハミルトニアン、 $P$  を運動量演算子とする。 $\omega_2$  軸方向のハミルトニアンは

$$\frac{\text{Im } \tau}{|\tau|} H_0 - \frac{\text{Re } \tau}{|\tau|} i P \quad (5.31)$$

となる。 $H = (2\pi/L)(L_0 + \bar{L}_0 - c/12)$ ,  $P = (2\pi i/L)(L_0 - \bar{L}_0)$  を代入すると分配関数は

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} \exp(-H \text{Im } \tau + i P \text{Re } \tau) \\ &= \text{Tr} \exp\left(-\pi(\tau - \bar{\tau})\left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12}\right) - \pi(\tau + \bar{\tau})(L_0 - \bar{L}_0)\right) \\ &= \text{Tr} \exp\left(-2\pi\tau\left(L_0 - \frac{c}{24}\right) + 2\pi\bar{\tau}\left(\bar{L}_0 - \frac{c}{24}\right)\right) \\ &= \text{Tr } q^{i(L_0 - c/24)} \text{Tr } \bar{q}^{i(\bar{L}_0 - c/24)}, \quad (q = e^{2\pi i \tau}). \end{aligned} \quad (5.32)$$

共形族  $i$  に対する指標を

$$\chi_i := \text{Tr}(\Pi_i q^{iL_0 - c/24}), \quad \bar{\chi}_i := \text{Tr}(\Pi_i \bar{q}^{i\bar{L}_0 - c/24}) \quad (5.33)$$

で定義する。ただしトレースはそれぞれ正則な空間と反正則な空間でととする。分配関数は  $Z = \sum_i \chi_i \bar{\chi}_i$  と表される。以降は正則部分のみを考える。

次にトールスはモジュラー変換

$$T : \tau \mapsto \tau + 1, \quad S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau} \quad (5.34)$$

についての不変性をもつ。モジュラー変換に対する指標の変換性は

$$T : \chi_i \mapsto \exp \left[ 2\pi i \left( h_i - \frac{c}{24} \right) \right] \chi_i, \quad S : \chi_i \mapsto \sum_j S_i^j \chi_j \quad (5.35)$$

と表される。 $T$  についての変換は指標の定義から自明である。 $S_i^j$  はモジュラー  $S$  行列と呼ばれる。モジュラー  $S$  行列はフュージョン行列を対角化することが知られている。具体的には

$$N_{ij}^k = \sum_n \frac{S_j^n S_i^n (S^{-1})_n^k}{S_0^n} \quad (5.36)$$

で、これは Verlinde 公式と呼ばれる。

## 14. 7 The spin-singlet Halperin states

---

## 14. 7 The spin-singlet Halperin states

スピン一重項 Halperin  $(n+1, n+1, n)$  状態も CFT の相関関数として表せる。波動関数

$$\Psi_{(n+1, n+1, n)}(\{z_i^\uparrow\}, \{z_i^\downarrow\}) = \prod_{i < j} (z_i^\uparrow - z_j^\uparrow)^{n+1} (z_i^\downarrow - z_j^\downarrow)^{n+1} \prod_{i, j} (z_i^\uparrow - z_j^\downarrow)^n \\ \times \exp \left( -\frac{1}{4l_0^2} \sum_i (|z_i^\uparrow|^2 + |z_i^\downarrow|^2) \right) \quad (6.1)$$

を semion の Laughlin 状態

$$\Psi_m^{(\pi/2)}(\{z_i^\uparrow\}, \{z_i^\downarrow\}) = \prod_{i < j} (z_i^\uparrow - z_j^\uparrow)^{n+1/2} (z_i^\downarrow - z_j^\downarrow)^{n+1/2} (z_i^\uparrow - z_j^\downarrow)^{n+1/2} \quad (6.2)$$

$$\times \exp \left( -\frac{1}{4l_0^2} \sum_i (|z_i^\uparrow|^2 + |z_i^\downarrow|^2) \right) \quad (6.3)$$

と因子

$$\Psi_{\text{singlet}}(\{z_i^\uparrow\}, \{z_i^\downarrow\}) = \prod_{i < j} \frac{(z_i^\uparrow - z_j^\uparrow)^{1/2} (z_i^\downarrow - z_j^\downarrow)^{1/2}}{(z_i^\uparrow - z_j^\downarrow)^{1/2}} \quad (6.4)$$

に分ける。まず

$$\Psi_m^{(\pi/2)}(\{z_i^\uparrow\}, \{z_i^\downarrow\}) = \left\langle \prod_{i=1}^N e^{i\sqrt{n+\frac{1}{2}}\varphi(z_i)} \exp \left( -\int d^2z' \sqrt{n+\frac{1}{2}} \rho_0 \varphi(z') \right) \right\rangle_{\text{U}(1)_k} \quad (6.5)$$

また

$$\Psi_{\text{singlet}}(\{z_i^\uparrow\}, \{z_i^\downarrow\}) = \langle V_{+1/2}(z_1^\uparrow) \cdots V_{+1/2}(z_{N/2}^\uparrow) V_{-1/2}(z_1^\downarrow) \cdots V_{-1/2}(z_{N/2}^\downarrow) \rangle \quad (6.6)$$

である。ただし  $V^\pm$  は WZW 理論における primary spin-1/2 multiplet である。(なにそれ)

## 14.8 Moore-Read states and their generalizations

---

## 14.8 Moore-Read states and their generalizations

$$\Psi_{\text{MR}}(z_1, \dots, z_N) = \text{Pf} \left( \frac{1}{z_i - z_j} \right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^n \exp \left( -\frac{1}{4l_0^2} \sum_i |z_i|^2 \right) \quad (7.1)$$