物理工学専攻 H23 解答

政岡凜太郎

2023 年 8 月 21 日

第 1 問

[1]

- (i) 糸が伸びない・たるまないため張力は仕事をしない。
- (ii) 張力の方向が原点 O ではなく点 Q を向いているため

[2]

$$\boldsymbol{r} = a \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + (l_0 - a\varphi) \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} - a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} - (l_0 - a\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= -(l_0 - a\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} L = m\det(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) &= -m(l_0 - a\varphi)^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \det \begin{pmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= m(l_0 - a\varphi)^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{3}$$

[3]

$$\boldsymbol{v}^2 = (l_0 - a\varphi)^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = v_0^2 \tag{4}$$

より、

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0}{l_0 - a\varphi} \tag{5}$$

根号を取る際に $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t > 0$ から正符号を採用した。これを解くと、

$$\begin{aligned}
&(l_0 - a\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = v_0\,\mathrm{d}t \\
&\frac{1}{2}a\varphi^2 - l_0\varphi + v_0 t + C = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

$t = 0$ で $\varphi = 0$ となることから $C = 0$ であり、

$$\varphi = \frac{l_0}{a} - \sqrt{\frac{l_0^2}{a^2} - \frac{2v_0 t}{a}} \tag{7}$$

となる。ただし $t = 0$ のときに $\varphi = 0$ となるように第 2 項の符号を決めた。
次に、$l_0 - a\varphi = 0$ となる時刻 τ は

$$\frac{l_0^2}{a^2} - \frac{2v_0\tau}{a} = 0, \quad \tau = \frac{l_0^2}{2v_0 a} \tag{8}$$

で与えられる。
[4] 質点に働く力は張力のみなので、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} &= -v_0\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= -\frac{mv_0^2}{l_0 - a\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9}$$

[5] モーメントは

$$\begin{aligned}
N = \det(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{T}) &= -\frac{mv_0^2 a}{l_0 - a\varphi}\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= -\frac{mv_0^2 a}{l_0 - a\varphi}.
\end{aligned} \tag{10}$$

一方

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mv_0(l_0 - a\varphi)\right) = -mv_0 a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{mv_0^2 a}{l_0 - a\varphi} \tag{11}$$

となって、$N = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t$ が成り立つ。

第 2 問

[1.1] 散乱を受けてから t 経った後の電子の速度は

$$v = \frac{qE}{m}t \tag{12}$$

よって、

$$v_a = \frac{1}{2\tau}\int_0^{2\tau} \frac{qE}{m}t\,\mathrm{d}t = \frac{qE\tau}{m} \tag{13}$$

[1.2] 電流は、

$$IL = qv_a \cdot n\pi a^2 L \tag{14}$$

を満たすので、

$$I = \frac{\pi a^2 q^2 n\tau}{mL}V, \quad V = EL \tag{15}$$

となる。よって Ohm の法則が成り立つ。また

$$\frac{I}{\pi a^2} = \sigma E \tag{16}$$

から

$$\sigma = \frac{q^2 n\tau}{m} \tag{17}$$

[1.3] Joule 熱は

$$J = \sigma E^2 = \frac{q^2 n\tau}{m}E^2 \tag{18}$$

である。一方電子が単位時間、単位体積あたりに失うエネルギーは

$$n \cdot \frac{1}{2\tau} \cdot \frac{1}{2}m\left(\frac{qE}{m}2\tau\right)^2 = \frac{q^2 n\tau}{m}E^2 \tag{19}$$

となって、両者は一致する。

[2]

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{20}$$

から、

$$2\pi r H(r) = \pi r^2 |\boldsymbol{j}| \tag{21}$$

よって、

$$H(r) = \frac{1}{2} r |\boldsymbol{j}| = \frac{1}{2} \sigma r E \tag{22}$$

となる。よって、

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{2} \sigma r E^2 \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\theta = -\frac{1}{2} \sigma r E^2 \boldsymbol{e}_r \tag{23}$$

となる。$I/\pi a^2 = \sigma E$ から、

$$\boldsymbol{S} = -\frac{I^2}{2\pi^2 a^4 \sigma} r \boldsymbol{e}_r \tag{24}$$

[2.2] C に流入する Poynting ベクトルの総量は、

$$\frac{1}{2} \sigma r L^2 \cdot 2\pi r L = \pi r^2 L \sigma E^2 \tag{25}$$

一方、C 内での単位時間あたりの Joule 熱は、

$$\sigma E^2 = \pi r^2 L \tag{26}$$

よって両者は一致する。この系では流れ込んだエネルギーと同量のエネルギーが Joule 熱に変わる。したがって、Joule 熱を含めればエネルギー保存則が成り立っている。
[2.3]

$$j(r) = \sigma(r) E \tag{27}$$

$$I = \int_0^a \pi r j(r) \, \mathrm{d}r = \pi E \int_0^a r \sigma(r) \, \mathrm{d}r \tag{28}$$

より、

$$j(r) = \frac{\sigma(r) I}{\pi \int_0^a r \sigma(r) \, \mathrm{d}r} \tag{29}$$

次に、磁場は

$$H(r) = \frac{E}{2r} \int_0^r r' \sigma(r') \, \mathrm{d}r' \tag{30}$$

となるから、

$$|\boldsymbol{S}| = \frac{E^2}{2r}\int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r' \,. \tag{31}$$

C に流れ込むエネルギーの総量は、

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{S}|\cdot 2\pi L &= 2\pi L\cdot\frac{E^2}{2r}\int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r' \\ &= \pi L E^2\int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r' \end{aligned} \tag{32}$$

一方、Joule 熱は

$$L\cdot\pi\int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r' \tag{33}$$

となって両者は一致する。

第 1 問

[1] まず、

$$J_z = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{34}$$

である。また

$$J_+ = \sqrt{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad J_- = \sqrt{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{35}$$

より、

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad J_y = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \tag{36}$$

[2] Hamiltonian を行列表示すると、

$$H_{\mathrm{M}} = -\gamma\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{B} = -\gamma\begin{pmatrix}B & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -B\end{pmatrix} \tag{37}$$

となる。固有値は $0, \pm\gamma B$。

[3] x 軸方向に磁場 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{RF}} = (B_{\mathrm{RF}}\cos\omega t, 0, 0)$ を掛ける。ただし、$\hbar\omega = \gamma B$ とする。通常の相互作用表示の扱いだと、

$$
\begin{aligned}
H_I &= -\gamma B_{\mathrm{RF}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t J_z} J_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t J_z} \\
&= -\gamma B_{\mathrm{RF}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t\,\mathrm{ad}(J_z)} J_x \\
&= -\gamma B_{\mathrm{RF}} (\cos(\omega t) J_x + \sin(\omega t) J_y)
\end{aligned} \tag{38}
$$

だが、ここでは $\omega t \ll 1$ として、

$$
H_I \approx H_{\mathrm{RF}} = -\gamma B_{\mathrm{RF}} J_x \tag{39}
$$

と近似する。このとき相互作用表示の状態 $|\Psi(t)\rangle$ は、

$$
|\Psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_I t}|\Psi(0)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma B_{\mathrm{RF}} t J_x}|1_z\rangle \tag{40}
$$

となる。ここで

$$
\exp\left[\frac{\mathrm{i}\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta + 1 & \sqrt{2}\,\mathrm{i}\sin\theta & \cos\theta - 1 \\ \sqrt{2}\,\mathrm{i}\sin\theta & 2\cos\theta & \sqrt{2}\,\mathrm{i}\sin\theta \\ \cos\theta - 1 & \sqrt{2}\,\mathrm{i}\sin\theta & \cos\theta + 1 \end{pmatrix} \tag{41}
$$

より、

$$
|\Psi(t)\rangle = \frac{\cos(\gamma B_{\mathrm{RF}} t) + 1}{2}|1_z\rangle + \frac{\mathrm{i}\sin(\gamma B_{\mathrm{RF}} t)}{\sqrt{2}}|0_z\rangle + \frac{\cos(\gamma B_{\mathrm{RF}} t) - 1}{2}|{-1}_z\rangle \tag{42}
$$

[4]

$$
H_Q = A(3J_x^2 - J^2) = 3AJ_x^2 - 2A \tag{43}
$$

と書ける。ここで、

$$
J_x^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{44}
$$

から、

$$
\langle 1|H_Q|1\rangle = -\frac{1}{2}A, \quad \langle 0|H_Q|0\rangle = 2A, \quad \langle -1|H_Q|-1\rangle = -\frac{1}{2}A \tag{45}
$$

となる。

第 2 問

[1]

$$Z_A = (Z_{A1})^N \tag{46}$$

$$Z_{A1} = \frac{L}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \exp\left(-\frac{\beta p^2}{2m}\right) = \sqrt{\frac{mk_\mathrm{B}T}{2\pi\hbar^2}}\,L \tag{47}$$

$$Z_A = \left(\frac{L}{\lambda}\right)^N \tag{48}$$

[2]

$$F(T, L) = -k_\mathrm{B}T \ln Z_A = k_\mathrm{B}NT \ln\left(\frac{L}{\lambda}\right) \tag{49}$$

[3]

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial N} = -k_\mathrm{B}T \ln\left(\frac{L}{\lambda}\right) \tag{50}$$

[4]

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_{A1} = \frac{k_\mathrm{B}T}{2} \tag{51}$$

$$\exp\left(\frac{\mu - E}{k_\mathrm{B}T}\right) = \frac{\lambda}{L}\mathrm{e}^{-1/2} \ll 1 \tag{52}$$

$$\frac{\lambda}{L} \ll 1 \tag{53}$$

であればよい。λ は長さの次元を持つ量で、ある温度における状態の典型的な波長を表す。

[5]

$$Z_B = \frac{1}{N!} Z_A(L - Nd) = \frac{1}{N!} \left(\frac{L - Nd}{\lambda} \right)^N \tag{54}$$

$$F = -Nk_{\mathrm{B}}T \left[\ln \left(\frac{L - Nd}{\lambda} \right) - \ln N + 1 \right] \tag{55}$$

状態方程式は、

$$P = -\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{Nk_{\mathrm{B}}T}{L - Nd} \tag{56}$$

となる。気体 A と違って $L \to Nd$ で圧力が発散するため、気体を Nd 以下に圧縮できない。

第 3 問

[1]

$$\frac{-n^2\omega^2}{c^2} + k_x^2 - \kappa_2^2 = 0 \tag{57}$$

$$\kappa_2 = \sqrt{k_x^2 - \frac{n^2\omega^2}{c^2}} \tag{58}$$

$$k_x > \frac{n^2\omega^2}{c^2} \tag{59}$$

[2]

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_1 = k_x E_{1,x} + k_1 E_{1,z} = 0 \tag{60}$$

また

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_1 = \omega \mu_0 \boldsymbol{H}_1 \tag{61}$$

から、

$$-k_x E_{1,z} + k_1 E_{1,x} = \omega \mu_0 H_{1,y} \tag{62}$$

となる。これらを連立して

$$\frac{k_x^2 + k_1^2}{k_1} E_{1,x} = \frac{n^2 \omega^2 / c^2}{k_1} E_{1,x} = \omega \mu_0 H_{1,y} \tag{63}$$

$$\frac{E_{1,x}}{H_{1,y}} = \frac{k_1 c^2 \mu_0}{n^2 \omega} = \frac{k_1}{\epsilon_1 \omega} \tag{64}$$

となる。つぎに同様の議論を媒質 2 について行えば、

$$\frac{E_{2,x}}{H_{2,y}} = \frac{k_2}{\epsilon_2 \omega} \tag{65}$$

となる。

[3]

$$\epsilon_1 \mu_0 \omega^2 = k_x^2 - \kappa_1^2, \quad \epsilon_2 \mu_0 \omega^2 = k_x^2 - \kappa_2^2, \tag{66}$$

また境界条件

$$E_{1,x} = E_{2,x}, \quad H_{1,x} = H_{2,x} \tag{67}$$

$$\frac{\kappa_1}{\epsilon_1 \omega} = \frac{\kappa_2}{\epsilon_2 \omega} \tag{68}$$

$$\frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2} = \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2} = \frac{k_x^2 - \epsilon_1 \mu_0 \omega^2}{k_x^2 - \epsilon_2 \mu_0 \omega^2} \tag{69}$$

よって、

$$
\begin{aligned}
k_x &= \sqrt{\frac{-\epsilon_1^2\mu_0\omega^2/\epsilon_2 + \epsilon_1\mu_0\omega^2}{-\epsilon_1^2/\epsilon_2^2 + 1}} \\
&= \sqrt{\frac{\epsilon_1\epsilon_2\mu_0\omega^2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}} \\
&= \sqrt{\frac{|\epsilon_2|\epsilon_0\mu_0\omega^2}{|\epsilon_2| - \epsilon_1}} \qquad (70)
\end{aligned}
$$

[4]

プリズムと金属の間の真空領域では、[1] から電場は z 方向について指数関数的に減衰し、振動する電場成分は取り除かれる。これによって [3] の電場を励起することができる。