1　2022 年 (令和 4 年)

第 1 問

[1.1]

　奇数に対し、

$$\psi_{2l+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{(2l+1)\pi}{2a} x \right) \tag{1.1}$$

となる。偶数に対し、

$$\psi_{2l}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{l\pi}{a} x \right) \tag{1.2}$$

となる。ただし $l = 1, 2, ...$ である。エネルギーは、

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{2a} \right)^2 \tag{1.3}$$

[1.2]

　設問 [1.1] の結果から、$\psi_n(x)$ は $\hat{P}$ の固有状態であり、固有値は

$$\psi_{2l+1}(x) : 1, \quad \psi_{2l}(x) : -1 \tag{1.4}$$

[2.1]

$$\hat{M}\left(\psi_1(x)\psi_1(y)\right) = \psi_1(x)\psi_1(y), \quad \hat{M}\left(\psi_2(x)\psi_2(y)\right) = \psi_2(x)\psi_2(y), \tag{1.5}$$

より、$\Psi_{1,1}(x,y), \Psi_{2,2}(x,y)$ は $\hat{M}$ の固有状態で、固有値は 1。

[2.2]

$$|\Psi_{\pm}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi_{2,1}(x,y) \pm \Psi_{1,2}(x,y) \right) \tag{1.6}$$

は $\hat{M}$ の固有値 ± 1 の固有状態になっている。

[2.3]

$$\hat{M}\hat{L}\hat{M} = -\hat{L} \tag{1.7}$$

から、

$$\langle \Psi_\pm | \hat{L} | \Psi_\pm \rangle = -\langle \Psi_\pm | \hat{M}\hat{L}\hat{M} | \Psi_\pm \rangle = -\langle \Psi_\pm | \hat{L} | \Psi_\pm \rangle = 0 \tag{1.8}$$

[2.4]

$$\hat{C}_4 \Psi_{1,1}(x,y) = \psi_1(-y)\psi_1(x) = \psi_1(x)\psi_1(y) \tag{1.9}$$

から、$\Psi_{1,1}(x,y)$ は $\hat{C}_4$ の固有状態で固有値は 1。次に

$$\hat{C}_4 \Psi_{2,2}(x,y) = \psi_2(-y)\psi_2(x) = -\psi_2(x)\psi_2(y) \tag{1.10}$$

から、$\Psi_{2,2}(x,y)$ は $\hat{C}_4$ の固有状態で固有値は -1。

[2.5]

$$|\Psi'_\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\Psi_{2,1}(x,y) \pm \mathrm{i}\Psi_{1,2}(x,y)\big) \tag{1.11}$$

に対し、

$$\begin{aligned} \hat{C}_4 |\Psi'_\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\Psi_{2,1}(-y,x) \pm \mathrm{i}\Psi_{1,2}(-y,x)\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\pm\mathrm{i}\Psi_{2,1}(x,y) - \Psi_{1,2}(x,y)\big) \end{aligned} \tag{1.12}$$

となる。よって $|\Psi'_\pm\rangle$ は $\hat{C}_4$ の固有値 $\pm\mathrm{i}$ の固有状態になっている。

[2.6]

$$\begin{aligned} \langle \Psi'_\pm | \hat{L} | \Psi'_\pm \rangle &= \frac{\pm\mathrm{i}}{2}\big(\langle \Psi_{2,1} | \hat{L} | \Psi_{1,2} \rangle - \langle \Psi_{1,2} | \hat{L} | \Psi_{2,1} \rangle\big) \\ &= \mp \operatorname{Im}\langle \Psi_{2,1} | \hat{L} | \Psi_{1,2} \rangle \\ &= \mp 2 \operatorname{Im}(\langle \psi_2 | x | \psi_1 \rangle \langle \psi_1 | p | \psi_2 \rangle) \end{aligned} \tag{1.13}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_2 | x | \psi_1 \rangle &= \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} x \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{32}{9\pi^2} a, \qquad (1.14) \\
\langle \psi_1 | p | \psi_2 \rangle &= \frac{-\mathrm{i}\hbar\pi}{a^2} \int_{-a}^{a} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{-4\mathrm{i}\hbar}{3a} \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

から、

$$
\langle \Psi'_{\pm} | \hat{L} | \Psi'_{\pm} \rangle = \pm \frac{256\hbar}{27\pi^2} \qquad (1.16)
$$

第 2 問

[1]

$$x = L\sin\theta, \quad y = a\cos\Omega t + L\cos\theta \tag{1.17}$$

[2]

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T\sin\theta \\ m\ddot{y} &= mg - T\cos\theta \end{aligned} \tag{1.18}$$

[3]

$$\ddot{x} = L(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta), \quad \ddot{y} = -a\Omega^2\cos\Omega t - L(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \tag{1.19}$$

[4]

問 [1] の結果から、運動方程式は

$$\begin{aligned} & mL(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = -T\sin\theta, \\ & -ma\Omega^2\cos\Omega t - mL(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = mg - T\cos\theta \end{aligned} \tag{1.20}$$

と書ける。よって θ に関する運動方程式は、

$$\ddot{\theta} + \frac{a\Omega^2}{L}\cos\Omega t\sin\theta = -\frac{g}{L}\sin\theta \tag{1.21}$$

[5]

θ が微小なとき、$\sin\theta \approx \theta$ として、

$$\ddot{\theta} + \frac{a\Omega^2}{L}\theta\cos\Omega t = -\frac{g}{L}\theta. \tag{1.22}$$

となる。$a = 0$ のとき、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta. \tag{1.23}$$

この解は $\theta_0(0) = A$, $\dot{\theta}_0(0) = 0$ のとき、

$$\theta_0(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right) \tag{1.24}$$

で与えられる。固有角振動数は、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}\,. \tag{1.25}$$

[6]

運動方程式において、a の 1 次の係数は以下のようになる。

$$\ddot{\theta}_1(t) + \frac{A\Omega^2}{L}\cos\Omega t\cos\omega_0 t = -\frac{g}{L}\theta_1(t) \tag{1.26}$$

[7]

運動方程式は

$$-\ddot{\theta}_1(t) - \omega_0^2\theta_1(t) = \frac{A\Omega^2}{2L}\left(\cos[(\Omega+\omega_0)t] + \cos[(\Omega-\omega_0)t]\right) \tag{1.27}$$

と書ける。これに

$$\theta_1(t) = u_1\cos[(\Omega+\omega_0)t] + u_2\cos[(\Omega-\omega_0)t] \tag{1.28}$$

を代入すると、$\cos[(\Omega\pm\omega_0)t]$ の係数から

$$[(\Omega+\omega_0)^2 - \omega_0^2]u_1 = \frac{A\Omega^2}{2L}, \quad [(\Omega-\omega_0)^2 - \omega_0^2]u_2 = \frac{A\Omega^2}{2L} \tag{1.29}$$

が成り立っていればよい。よって、

$$u_1 = \frac{A\Omega}{2L(\Omega+2\omega_0)}, \quad u_2 = \frac{A\Omega}{2L(\Omega-2\omega_0)}. \tag{1.30}$$

このような u_1, u_2 が存在する条件は、

$$\Omega \neq \pm 2\omega_0. \tag{1.31}$$

である。$\omega_0 = \sqrt{g/L}$ から、

$$u_1 = \frac{A\Omega}{2L(\Omega+2\sqrt{g/L})}, \quad u_2 = \frac{A\Omega}{2L(\Omega-2\sqrt{g/L})} \tag{1.32}$$

第 3 問

[1.1]

$$\pi R^2 L\,(2\pi m k_{\mathrm{B}} T)^{3/2} = h^3 L \tilde{Z}_1, \quad \tilde{Z}_1 = \frac{\pi R^2}{h^3}\,(2\pi m k_{\mathrm{B}} T)^{3/2} = \gamma R^2 (k_{\mathrm{B}} T)^{3/2} \tag{1.33}$$

[1.2]

$$Z_N = \frac{1}{N!}\frac{(\pi R^2 L)^N}{h^{3N}}\,(2\pi m k_{\mathrm{B}} T)^{3N/2} = \frac{L^N}{N!}\tilde{Z}_1^N \tag{1.34}$$

Stirling の公式から、

$$F \approx -N k_{\mathrm{B}} T \ln\left(L\tilde{Z}_1\right) + N k_{\mathrm{B}} T (\ln N - 1) \tag{1.35}$$

よって

$$\tilde{F} = -\nu k_{\mathrm{B}} T\left(\ln \tilde{Z}_1 - \ln \nu + 1\right) \tag{1.36}$$

[1.3]

$$P = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial F}{\partial R} = \frac{\nu k_{\mathrm{B}} T}{2\pi R \tilde{Z}_1(T,R)}\frac{\partial}{\partial R}\tilde{Z}_1(T,R) \tag{1.37}$$

問 [1.1] の結果から、

$$P = \frac{\nu k_{\mathrm{B}} T}{\pi R^2} \tag{1.38}$$

[2.1]

$$\begin{aligned}
&H_1 - \omega M_1 \\
&= \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - \omega(x p_y - y p_x) \\
&= \frac{1}{2m}(p_x + m\omega y)^2 + \frac{1}{2m}(p_y - m\omega x)^2 + \frac{1}{2m}p_z^2 - \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)
\end{aligned} \tag{1.39}$$

となる。この最小値は

$$-\frac{m\omega^2 R^2}{2}. \tag{1.40}$$

[2.2]

$$v_x(\boldsymbol{r}) = -\omega y, \quad v_y(\boldsymbol{r}) = \omega x. \tag{1.41}$$

[2.3]

$$2\pi \int_0^R \tilde{r} \exp\left(\frac{m\omega^2 \tilde{r}^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) \mathrm{d}\tilde{r} = \frac{2\pi k_\mathrm{B}T}{m\omega^2}\left[\exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) - 1\right] \tag{1.42}$$

から

$$\frac{1}{h^3 \tilde{Z}_1}(2\pi m k_\mathrm{B}T)^{3/2} \cdot \frac{2\pi k_\mathrm{B}T}{m\omega^2}\left[\exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) - 1\right] = 1 \tag{1.43}$$

となる。よって、

$$\tilde{Z}_1(T, R, \omega) = \frac{2\gamma(k_\mathrm{B}T)^{5/2}}{m\omega^2}\left[\exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) - 1\right] \tag{1.44}$$

[2.4]

$$\begin{aligned} P &= \frac{\nu k_\mathrm{B}T}{2\pi R}\frac{\partial}{\partial R}\ln \tilde{Z}_1(T, R, \omega) \\ &= \frac{\nu m\omega^2/2\pi}{1 - \exp(-m\omega^2 R^2/2k_\mathrm{B}T)} \end{aligned} \tag{1.45}$$

$T \to 0$ では

$$P = \frac{\nu m\omega^2}{2\pi}. \tag{1.46}$$

[2.5]

$\sqrt{x^2+y^2}=\tilde{r}$ とする。

$$
\begin{aligned}
I &= mN\int \mathrm{d}^3 p \int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}z\int_0^R 2\pi\,\mathrm{d}\tilde{r}\,\tilde{r}^3\rho(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) \\
&= mN\cdot\frac{k_\mathrm{B}T}{m\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\ln\tilde{Z}_1(T,R,\omega) \\
&= mN\cdot\left(-\frac{2k_\mathrm{B}T}{m\omega^2}+\frac{R^2}{1-\exp(-m\omega^2R^2/2k_\mathrm{B}T)}\right) \\
&= \frac{2N\varepsilon}{\omega^2(1-\exp(-\varepsilon/k_\mathrm{B}T))}-\frac{2Nk_\mathrm{B}T}{\omega^2} \qquad (1.47)
\end{aligned}
$$

[2.6]

$$
E=-N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\tilde{Z}_1=\frac{5}{2}Nk_\mathrm{B}T-\frac{N\varepsilon}{1-\exp(\varepsilon/k_\mathrm{B}T)} \qquad (1.48)
$$

また別解として、

$$
\begin{aligned}
E &= -\frac{1}{2}I(T)\omega^2+\frac{3}{2}Nk_\mathrm{B}T \\
&= \frac{5}{2}Nk_\mathrm{B}T-\frac{N\varepsilon}{1-\exp(-\varepsilon/k_\mathrm{B}T)} \qquad (1.49)
\end{aligned}
$$

と計算しても良い。比熱は

$$
C_\omega=\frac{5}{2}Nk_\mathrm{B}-\frac{N\varepsilon^2}{k_\mathrm{B}T^2}\frac{\exp(-\varepsilon/k_\mathrm{B}T)}{(1-\exp(-\varepsilon/k_\mathrm{B}T))^2} \qquad (1.50)
$$

となる。高温極限では、

$$
C_\omega=\frac{5}{2}Nk_\mathrm{B}-\frac{N\varepsilon^2}{k_\mathrm{B}T^2}\frac{1}{(\varepsilon/k_\mathrm{B}T)^2}=\frac{5}{2}Nk_\mathrm{B}-Nk_\mathrm{B}=\frac{3}{2}Nk_\mathrm{B}. \qquad (1.51)
$$

低温極限では、

$$
C_\omega=\frac{5}{2}Nk_\mathrm{B}. \qquad (1.52)
$$

第 4 問

[1.1]

外部電場に対し、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \phi = -2(a+b+c) = 0 \tag{1.53}$$

となる。よって $a+b+c=0$。

[1.2]

$$m\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = -q\nabla\phi(\boldsymbol{r}(t)) + q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{B} \tag{1.54}$$

[1.3]

z 方向の運動方程式は、

$$m\ddot{z} = -2cqz \tag{1.55}$$

となる。この角振動数は、

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2cq}{m}}\,. \tag{1.56}$$

[1.4]

$u = x + \mathrm{i}y$ とおくと、運動方程式は

$$m\ddot{u} = qcu - \mathrm{i}qB\dot{u} \tag{1.57}$$

と書ける。

[1.5]

xy 平面内の運動を解く。$u \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ とおくと、

$$m\omega^2 - qB\omega + qc = 0 \tag{1.58}$$

よって

$$\omega = \frac{qB \pm \sqrt{q^2B^2 - 4mqc}}{2m} \tag{1.59}$$

となる。束縛運動になるための条件は、

$$qB^2 - 4mc > 0. \tag{1.60}$$

[2.1]

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -2q\alpha x \cos\omega t \tag{1.61}$$

τ についての方程式に直すと

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{4}{\omega^2}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{8q\alpha}{m\omega^2}x\cos 2\tau \tag{1.62}$$

となる。よって

$$\lambda = \frac{4q\alpha}{m\omega^2} \tag{1.63}$$

[2.2]

$$x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cos[(2n+\Omega)\tau] \tag{1.64}$$

とおく。

$$2\lambda\cos 2\tau \cos[(2n+\Omega)\tau] = \lambda\cos[(2(n+1)+\Omega)\tau] + \lambda\cos[(2(n-1)+\Omega)\tau] \tag{1.65}$$

から、C_n が満たすべき漸化式は、

$$-(2n+\Omega)^2 C_n + \lambda(C_{n-1} + C_{n+1}) = 0 \tag{1.66}$$

である。

[2.3]

$0 < \lambda \ll 1$ のとき、C_{-1}, C_0, C_1 以外の寄与を無視すると、

$$C_1 = \frac{\lambda}{(\Omega+2)^2}C_0, \quad C_0 = \frac{\lambda}{\Omega^2}(C_{-1}+C_1), \quad C_{-1} = \frac{\lambda}{(\Omega-2)^2}C_0 \tag{1.67}$$

となる。よって、

$$\frac{C_{\pm 1}}{C_0} = \frac{\lambda}{(\Omega \pm 2)^2} \tag{1.68}$$

となる。$\Omega = \delta\lambda$ から、

$$\frac{C_{\pm 1}}{C_0} = \frac{\lambda}{4}, \quad \varepsilon = \frac{1}{4}. \tag{1.69}$$

この結果を代入すると、

$$1 = \frac{\lambda}{\Omega^2}(C_{-1} + C_1) = \frac{\lambda^2}{2\Omega^2} \tag{1.70}$$

となる。よって

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{1.71}$$

となる。

[2.4]

問 [2.3] の結果から、

$$\begin{aligned} x(\tau) &= C_0 \left(\cos\frac{\lambda\tau}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda}{4}\cos\left[\left(2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)t\right] + \frac{\lambda}{4}\cos\left[\left(2 - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)t\right]\right) \\ &= C_0 \left(1 + \frac{\lambda}{2}\cos 2\tau\right)\cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}t\right) \end{aligned} \tag{1.72}$$