Jacobi の三重積

マヤ図形

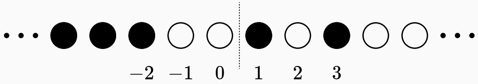
整数に $\bullet, \circ$ のいずれかを対応づけるような写像

$$M : \mathbb{Z} \to \{\bullet, \circ\} \tag{2.1}$$

であって、$k \gg 0$ で

$$M(-k) = \bullet, \quad M(k) = \circ \tag{2.2}$$

を満たすものをマヤ図形と呼ぶ。これを以下のように図示する。



$k > 0$ の領域にある $\bullet$ を電子と呼び、$k \leq 0$ の領域にある $\circ$ をホールと呼ぶ。

電荷とエネルギー

マヤ図形 M の電荷を

$$Q(M) = (\text{電子の総数}) - (\text{ホールの総数}) \tag{2.3}$$

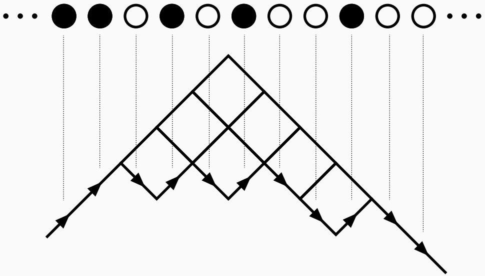
と定義する。

電子が $k > 0$ にいるとき、その電子のエネルギーを k と定義する。またホールが $k \leq 0$ にいるとき、そのホールのエネルギーを $-k$ と定義する。マヤ図形のエネルギーを

$$E(M) = (\text{電子のエネルギーの総和}) + (\text{ホールのエネルギーの総和}) \tag{2.4}$$

によって定義する。

Young 図形とマヤ図形の対応関係

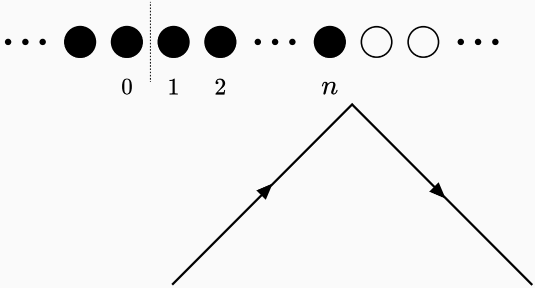


上図のように、マヤ図形に Young 図形を対応付けることができる。また Young 図形から原点の自由度を除いてマヤ図形を決定することができる。

このようにして、マヤ図形の集合 $\mathcal{M}$ と、整数とヤング図形の集合の直積集合 $\mathbb{Z} \times Y$ との間の全単射が得られる。

Young 図形とマヤ図形の対応関係

基底状態を以下のように設定する。

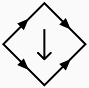


基底状態の電荷を n とすると、エネルギーは $n(n+1)/2$ である。

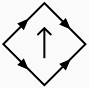
Young 図形とマヤ図形の対応関係

基底状態に以下で定義する操作 $a^\dagger_{k+1}a_k$ を繰り返すことで、任意のマヤ図形および Young 図形を構成できる。

$$a^\dagger_{k+1}a_k : \ \bullet\circ \longrightarrow \circ\bullet \ ,$$



$$a^\dagger_{k}a_{k+1} : \ \circ\bullet \longrightarrow \bullet\circ \ ,$$



基底状態に $a^\dagger_{k+1}a_k$ を N 回掛けた場合にあり得るマヤ図形の数は、大きさ N の Young 図形の数 $p(N)$ に一致する。

マヤ図形に対する母関数を考える。Young 図形とマヤ図形の対応関係から、マヤ図形を (N, Q) によってラベル付けすると、

$$\sum_{M \in \mathcal{M}} q^{E(M)} z^{Q(M)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{N=0}^{\infty} p(N) q^{E_0 + N} z^n \tag{2.5}$$

となる。ただし $E_0 = n(n+1)/2$ である。一方、$k \in \mathbb{Z}$ に • があるか ◦ があるかによってマヤ図形をラベル付けすると、

$$\sum_{M \in \mathcal{M}} q^{E(M)} z^{Q(M)} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^k z^{-1}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k z) \tag{2.6}$$

となる。

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{N=0}^{\infty}p(N)q^{E_0+N}z^n=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^k}\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n(n+1)/2}z^n \tag{2.7}$$

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+q^kz^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^kz)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^{k-1}z^{-1})(1+q^kz) \tag{2.8}$$

2 つを等号で結ぶことで、

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n(n+1)/2}z^n=\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1+q^kz)(1+q^{k-1}z^{-1}) \tag{2.9}$$

となって、Jacobi の三重積が証明された。