1. MPO-injective PEPS

MPO 代数のデータ

定義 1.1. Projector matrix product operators

$B \in \mathrm{L}(\mathcal{W}) \otimes \mathrm{L}(\mathcal{V}), \Delta \in \mathrm{L}(\mathcal{W})$ によって表される以下の MPO $P_L \in \mathrm{L}(\mathcal{V})^{\otimes L}$ を考える。

$$P_L = \mathrm{Tr}[\Delta \overbrace{B \cdots B}^{L}] = \sum_{\{i\},\{j\}} \mathrm{Tr}[\Delta B^{i_1 j_2} \cdots B^{i_L j_L}] |i_1, \dots, i_L\rangle\langle j_1, \dots, j_L| \quad (1.1)$$

ただし行列の積は $\mathcal{W}$ についてとった。P_L は射影であるとし、Δ を挿入する位置に依存しないとする。さらに、以下のブロック対角化が成り立つとする。

$$\mathcal{W} = \bigoplus_{a=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_a, \quad (1.2)$$

$$B^{ij} = \bigoplus_{a=1}^{\mathcal{N}} B_a^{ij} \quad B_a^{ij} \in \mathrm{L}(\mathcal{W}), \quad (1.3)$$

$$\Delta = \bigoplus_{a=1}^{\mathcal{N}} w_a \mathbb{1}_a, \quad w_a \in \mathbb{C}. \quad (1.4)$$

ここで B_a は injective なテンソルであるとする。すなわち、$\mathrm{Span}\{B_a^{ij}\}_{i,j} = \mathrm{L}(\mathcal{W}_a)$ である。さらに転送行列の最大固有値が 1 になるように規格化されているとする。P_L が Δ の位置に依らないことと、B_a の injectivity から Δ に対するブロック行列は $\mathbb{1}_a$ の定数倍に限られることに注意する。このような P_L を projector matrix product operator (PMPO) と呼ぶ。

定理 1.1. Fusion tensor

B を PMPO を構成するテンソルとし、$\{B_a\}_{a=1}^{\mathcal{N}}$ を injective なブロックとする。また $O_a^L := \mathrm{Tr}[\overbrace{B_a \cdots B_a}^{L}]$ とおき、$\{O_a^L\}_{a=1}^{\mathcal{N}}$ がなす行列代数が閉じているとする。このとき、$X_{ab,\mu}^c : \mathcal{W}_c \to \mathcal{W}_a \otimes \mathcal{W}_b$, $\mu = 1, \dots, N_{ab}^c$ が存在して

$$X_{ab,\mu}^{+c} \left(\sum_j B_a^{ij} \otimes B_b^{jk} \right) X_{ab,\mu}^c = B_c^{ik}. \quad (1.5)$$

が成り立つ。テンソル $X_{ab,\mu}^c$ を fusion tensor と呼ぶ。

Proof. $O_a^L O_b^L$ に対する標準形の存在からゲージ変換および非対角ブロックの削除によって

$$B_a^{ij} \otimes B_b^{jk} \mapsto \bigoplus_{c=1}^{\mathcal{N}} \bigoplus_{\mu=1}^{N_{ab}^c} \lambda_{ab,\mu}^c B_c^{ik}, \quad \lambda_{ab,\mu}^c \in \mathbb{C} \tag{1.6}$$

と表せる。ここから

$$O_a^L O_b^L = \sum_{c,\mu} (\lambda_{ab,\mu}^c)^L O_c^L \tag{1.7}$$

である。よって

$$P_L = P_L^2 = \sum_{a,b} w_a w_b O_a^L O_b^L = \sum_{a,b,c,\mu} (\lambda_{ab,\mu}^c)^L w_a w_b O_c^L \tag{1.8}$$

である。P_L が任意の L において射影であることから $\lambda_{ab,\mu}^c = 1$ が分かる。よって $\mathcal{W}_a \otimes \mathcal{W}_b$ と各ブロック $\mathcal{W}_c$ の間の変換 $X_{ab,\mu}^c, X_{ab,\mu}^{+c}$ が存在して (**??**) が成り立つ。 □

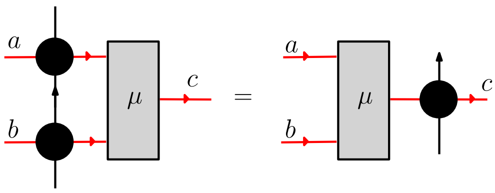
定義 1.2. Zipper condition

(**??**) から直ちに以下が成り立つ。

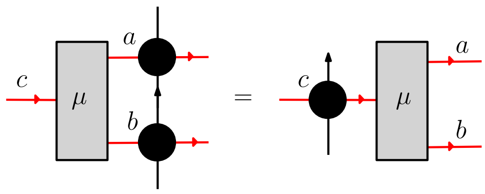
$$\left(\sum_j B_a^{ij} \otimes B_b^{jk} \right) X_{ab,\mu}^c = X_{ab,\mu}^c B_c^{ik}, \tag{1.9}$$

$$X_{ab,\mu}^{+c} \left(\sum_j B_a^{ij} \otimes B_b^{jk} \right) = B_c^{ik} X_{ab,\mu}^{+c} \tag{1.10}$$

これを以下に図示する。



(1.11)



(1.12)

この式を zipper condition と呼ぶ。ただし $X_{ab,\mu}^c$ については多重度の添字 μ だけ図示した。

定義 1.3. Fusion rule

行列代数 $\{O_a^L\}_{a=1}^{\mathcal{N}}$ は

$$O_a^L O_b^L = \sum_c N_{ab}^c O_c^L, \quad N_{ab}^c \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{1.13}$$

によって定まる。これを fusion rule と呼ぶ。また $a = 1, \dots, \mathcal{N}$ を fusion channel と呼び、N_{ab}^c を fusion 係数と呼ぶ。fusion 係数は $\sum_j B_a^{ij} \otimes B_b^{jk}$ を injective なブロックに分解したときの多重度によって与えられる。

Remark 1.1.

PMPO $P_L = \sum_a w_a O_a^L$ と fusion 係数 N_{ab}^c に対し、以下が成り立つ。

$$\sum_{a,b=1}^{\mathcal{N}} N_{ab}^c w_a w_b = w_c \tag{1.14}$$

Proof. $P_L^2 = P_L$ から

$$P_L^2 = \sum_{a,b} w_a w_b O_a O_b = \sum_{a,b,c} N_{ab}^c w_a w_b O_c = \sum_c w_c O_c = P_L. \tag{1.15}$$

□

定義 1.4. Duality

P_L が Hermitian であることを課す。このとき fusion channel a に対して $\bar{B}_a$ が injective であることから fusion channel a^* が一意に存在し、

$$\bar{w}_a = w_{a^*}, \quad O_a^{L\dagger} = O_{a^*}^L \tag{1.16}$$

となる。また

$$N_{ab}^c = N_{b^* a^*}^{c^*} \tag{1.17}$$

となる。$(a^*)^* = a$ であり、a^* を a に双対な fusion channel と呼ぶ。

定義 1.5. Frobenius Schur indicator

fusion channel a, a^* は以下のゲージ変換によって結ばれる。

$$\bar{B}_a^{ji} = Z_a^{-1} B_{a^*}^{ij} Z_a \tag{1.18}$$

ここで Z_a は

$$Z_a \bar{Z}_{a^*} = \bar{Z}_{a^*} Z_a = \varkappa_a \mathbb{1}, \quad \varkappa_a = \begin{cases} 1 & (a \neq a^*) \\ \pm 1 & (a = a^*) \end{cases} \tag{1.19}$$

を満たす。$\varkappa_a$ を Frobenius–Schur indicator と呼ぶ。

Proof. $O_a^{L\dagger} = O_{a^*}^L$ の両辺を標準形で表すと、標準形の一意性からゲージ変換 $Z_a : \mathcal{W}_a \to \mathcal{W}_{a^*}$ と $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\bar{B}_a^{ji} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} Z_a^{-1} B_{a^*}^{ij} Z_a \tag{1.20}$$

となる。(??) が L に依らずに成り立つことから $\theta = 0$ としてよい。これを 2 回用いると、

$$B_a^{ji} = \bar{Z}_a^{-1} \bar{B}_{a^*}^{ij} \bar{Z}_a = \bar{Z}_a^{-1} Z_{a^*}^{-1} B_a^{ji} Z_{a^*} \bar{Z}_a \tag{1.21}$$

となる。よって B_a の injectivity から $Z_{a^*} \bar{Z}_a = \gamma_a \mathbb{1} = \bar{Z}_a Z_{a^*}$ と表せる。ここで γ_a は複素数であり $\bar{\gamma}_{a^*} = \gamma_a$ を満たす。$a \neq a^*$ の場合、Z_a を定数倍して再定義することで $\gamma_a = \gamma_{a^*} = 1$ とできる。$a = a^*$ の場合、$Z_a \bar{Z}_a = \bar{Z}_a Z_a$ から γ_a は実数に限られる。Z_a を定数倍して再定義することで必ず $\gamma_a = \pm 1 =: \varkappa_a$ にできる。ただし符号を変えることはできない。 □

補題 1.1. 結合則 (associativity)

$(O_a^L O_b^L) O_c^L = O_a^L (O_b^L O_c^L)$ から fusion 係数は以下の結合則を満たす。

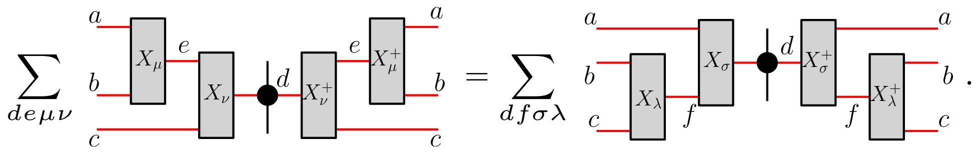
$$\sum_e N_{ab}^e N_{ec}^d = \sum_f N_{af}^d N_{bc}^f. \tag{1.22}$$

定義 1.6. F 行列

F 行列 $(F_d^{abc})_{e\mu\nu}^{f\lambda\sigma}$ が存在して以下が成り立つ。

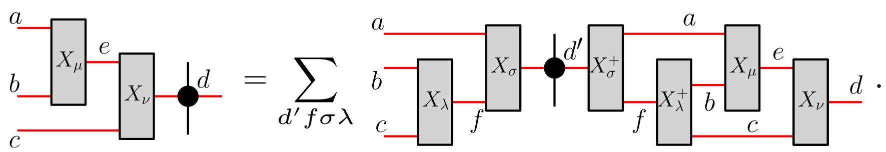
$$(X_{ab,\mu}^e \otimes \mathbb{1}_c) X_{ec,\nu}^d = \sum_{f=1}^{\mathcal{N}} \sum_{\lambda=1}^{N_{bc}^f} \sum_{\sigma=1}^{N_{af}^d} (F_d^{abc})_{e\mu\nu}^{f\lambda\sigma} (\mathbb{1}_a \otimes X_{bc,\lambda}^f) X_{af,\sigma}^d. \tag{1.23}$$

Proof. zipper condition を 2 通りの順序で用いることで以下の等式が成り立つ。



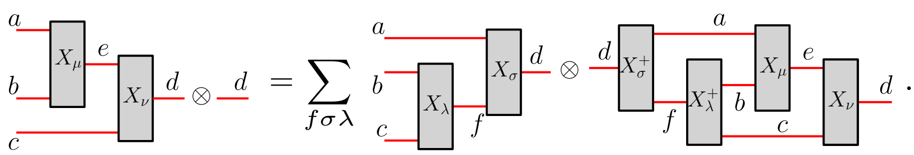
(1.24)

両辺に右から fusion テンソルを掛けると



(1.25)

よって $B_d, B_{d'}$ の injectivity から



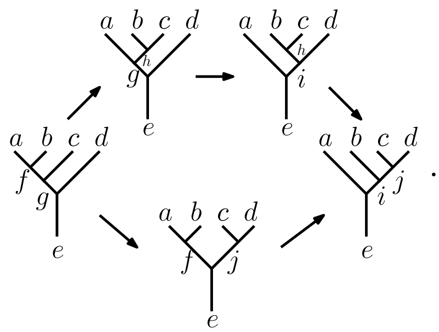
(1.26)

よって右辺の 2 個目の因子を $(F^{abc}_d)^{f\lambda\sigma}_{e\mu\nu}\mathbb{1}_d$ と書くことができ、(**??**) が示される。 □

定義 1.7. Pentagon equation

$$\sum_{h,\sigma\lambda\omega}(F^{abc}_g)^{f\mu\nu}_{h\sigma\lambda}(F^{ahd}_e)^{g\lambda\rho}_{i\omega\kappa}(F^{bcd}_i)^{h\sigma\omega}_{j\lambda\delta}=\sum_{\sigma}(F^{fcd}_e)^{g\nu\rho}_{j\gamma\sigma}(F^{abj}_e)^{f\mu\sigma}_{i\delta\kappa}. \quad (1.27)$$

Proof.



(1.28)

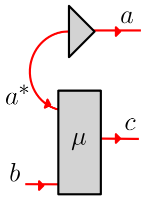
□

Remark 1.2.

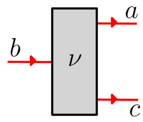
$$N^c_{ab}=N^{a^*}_{bc^*}=N^{b^*}_{c^*a}=N^{c^*}_{b^*a^*}=N^a_{cb^*}=N^b_{a^*c}. \quad (1.29)$$

1.1 Unitarity

定義 1.8. Pivotal property

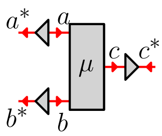


$$= \sum_{\nu} (A^c_{ab})_{\mu\nu} \tag{1.30}$$

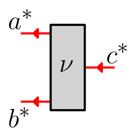


ここで A^c_{ab} は $(A^c_{ab})^\dagger A^c_{ab} = \frac{w_c}{w_b}\mathbb{1}$ を満たす行列である。また b の足を曲げることで同様に ${A'}^c_{ab}$ が定義される。

補題 1.2.

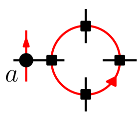


$$= \sum_{\nu} (C^c_{ab})_{\mu\nu} \tag{1.31}$$

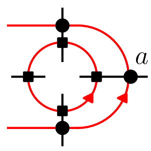


ここで $C^c_{ab} = A^c_{a^*b} \bar{A'}^b_{a^*c^*} A^{a^*}_{b^*c^*}$ である。

定理 1.2. Pulling through equation

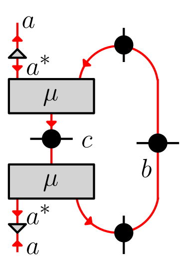


$$= \tag{1.32}$$

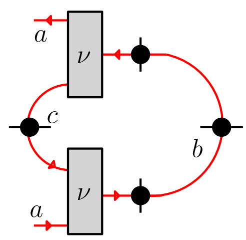


Proof.

$$\sum_{bc\mu} w_b$$



$$= \sum_{bc\nu} w_c \tag{1.33}$$



□