分割と母関数

分割数

自然数 N を非増加の自然数列 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ によって

$$N = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \tag{1.1}$$

と表せるとき、$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ を N の分割と呼ぶ。N に対してあり得る分割の総数を $p(N)$ と書き、N の分割数という。

小さい N に対して、

$$\begin{aligned} p(1) &= 1, \\ p(2) &= 2, \\ p(3) &= 3, \\ p(4) &= 5. \end{aligned}$$

ボソン系の分配関数と分割数

エネルギー準位が $\epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon, \ldots$ であるような、相互作用しないボソン系を考えよう。具体的には、以下のハミルトニアンを考える。

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} k\epsilon n_k \tag{1.2}$$

n_k は準位 k にいるボソンの粒子数である。系の大分配関数は、

$$q = e^{-\beta\epsilon} \tag{1.3}$$

とおくことで、

$$\Xi(\beta, 0) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} q^{kn_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} \tag{1.4}$$

と表される。ただし、化学ポテンシャルは 0 とした。

ボソン系の分配関数と分割数

ここで、系のエネルギーを $E = N\epsilon$ と固定すると、系が取りうる状態の数は N の分割数 $p(N)$ に一致する。したがって、

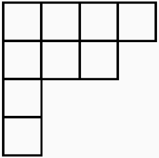
$$\Xi(\beta, 0) = \sum_{N=1}^{\infty} p(N) q^N \tag{1.5}$$

と書ける。ここから、分割数の母関数に対する恒等式

$$\sum_{N=1}^{\infty} p(N) q^N = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k} \tag{1.6}$$

を得る。

例えば $9 = 4 + 3 + 1 + 1$ であるが、これを以下のような箱を並べた図形で表す。



このような図形を Young 図形と呼ぶ。

Euler の分割恒等式

7 を異なる自然数で分割すると、

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 4 + 2 + 1 \tag{1.7}$$

の 5 通りである。これをストリクトな分割と呼ぶ。一方 7 を奇数のみで分割すると、

$$7 = 5 + 2 \cdot 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 3 + 4 \cdot 1 = 7 \cdot 1 \tag{1.8}$$

で、この場合も 5 通りである。一般の N に対し、異なる自然数による分割の数を $p_{\mathrm{str}}(N)$、奇数による分割の数を $p_{\mathrm{odd}}(N)$ とおく。実は任意の N に対して

$$p_{\mathrm{str}}(N) = p_{\mathrm{odd}}(N) \tag{1.9}$$

が成り立つ。これを Euler の分割恒等式と呼ぶ。

Euler の分割恒等式

Euler の分割恒等式は、分割の間の全単射を構成することで証明される。

$$(7) \leftrightarrow (7)$$

$$(6, 1) \leftrightarrow (3, 3, 1)$$

$$(4, 2, 1) \leftrightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

母関数の恒等式

Euler の分割恒等式を母関数の世界から見てみる。

ストリクトな分割は、エネルギー準位が $\epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon, \ldots$ であるようなフェルミ系に、粒子を配置することと等価である。この系の分配関数は

$$\Xi_{\mathrm{F}}(\beta, 0) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0,1} q^{kn_k} = \prod_{k=1}^{\infty}(1+q^k) \tag{1.10}$$

となる。ただし $q = e^{-\beta\epsilon}$ である。したがって、

$$\sum_{N=1}^{\infty} p_{\mathrm{str}}(N) q^N = \prod_{k=0}^{\infty}(1+q^k) \tag{1.11}$$

が成り立つ。

母関数の恒等式

奇数による分割は、エネルギー準位が $\epsilon, 3\epsilon, 5\epsilon, \ldots$ であるようなボース系に、粒子を配置することと等価である。この系の分配関数は $q = e^{-\beta\epsilon}$ として、

$$\Xi_{\mathrm{B}}(\beta, 0) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} q^{(2k-1)n_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2k-1}} \tag{1.12}$$

と計算できるから、

$$\sum_{N=1}^{\infty} p_{\mathrm{odd}}(N) q^N = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2k-1}} \tag{1.13}$$

が成り立つ。

(1.11) と (1.13) を見比べると、

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^k) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2k-1}} \tag{1.14}$$

を得る。これは以下のように直接示すことができる。

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^k) &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-q^{2k}}{1-q^k} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-q^{2k}}{(1-q^{2k})(1-q^{2k-1})} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2k-1}} \end{aligned} \tag{1.15}$$