

# 共形ブートストラップ

政岡凜太郎

2023 年 4 月 9 日

# 目次

<b>0</b>	<b>まえがき</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>場の理論</b>	<b>5</b>
1.1	Euclid 空間における場の理論 . . . . .	5
1.2	統計力学と量子論の関係 . . . . .	7
1.3	演算子形式 . . . . .	7
1.4	統計力学における演算子形式 . . . . .	9
1.5	真空状態 . . . . .	10
1.6	場の演算子と相関関数 . . . . .	11
1.7	T 積と $T^*$ 積 . . . . .	13
1.8	一般的な量子化 . . . . .	14
<b>2</b>	<b>くりこみ群</b>	<b>15</b>
2.1	連続極限の気持ち . . . . .	15
2.2	格子場の理論 . . . . .	17
2.3	くりこみ群 . . . . .	17
2.4	固定点と臨界現象 . . . . .	20
2.5	共形場理論 . . . . .	22
<b>3</b>	<b>共形不変性</b>	<b>24</b>
3.1	Euclid 群 . . . . .	24
3.2	共形変換群 . . . . .	25
3.3	積の順序についての注意 . . . . .	28
3.4	プライマリー場 . . . . .	29
3.5	ディセンダント場 . . . . .	32
3.6	共形 Casimir 演算子 . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Noether の定理</b>	<b>34</b>
4.1	Euler-Lagrange 方程式 . . . . .	34
4.2	Noether の定理 . . . . .	34
4.3	共形変換に対する Noether の定理 . . . . .	35
4.4	内部対称性の Noether カレント . . . . .	37
4.5	一般の場合の Noether カレント . . . . .	38
4.6	エネルギー運動量テンソルの改良 (対称化) . . . . .	39
4.7	エネルギー運動量テンソルの改良 (トレースレス化) . . . . .	41

4.8	特殊共形変換 . . . . .	43
4.9	エネルギー運動量テンソルの別定義 . . . . .	43
<b>5</b>	<b>場の理論における対称性</b>	<b>45</b>
5.1	Schwinger-Dyson 方程式 . . . . .	45
5.2	Ward-Takahashi 恒等式 . . . . .	46
5.3	トポロジカル演算子 . . . . .	47
5.4	積の順序についての注意 . . . . .	49
5.5	共形変換に対する Ward-Takahashi 恒等式 . . . . .	49
<b>6</b>	<b>相関関数</b>	<b>52</b>
6.1	相関関数への制限 . . . . .	52
6.2	2 点関数 . . . . .	52
6.3	3 点関数 . . . . .	54
6.4	4 点関数 . . . . .	54
6.5	テンソル演算子の相関関数 . . . . .	56
<b>7</b>	<b>動径量子化</b>	<b>57</b>
7.1	動径量子化 . . . . .	57
7.2	真空状態 . . . . .	57
7.3	シリンダー時空 . . . . .	58
7.4	シリンダー時空の演算子形式 . . . . .	59
7.5	状態・演算子対応 . . . . .	60
<b>8</b>	<b>ユニタリティ</b>	<b>63</b>
8.1	Euclid 空間における共役 . . . . .	63
8.2	動径量子化における共役 . . . . .	64
8.3	ユニタリティと鏡映正值性 . . . . .	66
8.4	ユニタリティバウンド . . . . .	67
8.5	スピンを持つ演算子のユニタリティバウンド . . . . .	68
<b>9</b>	<b>演算子積展開</b>	<b>69</b>
9.1	演算子積展開の導出 . . . . .	69
9.2	共形不変性との整合性 . . . . .	70
9.3	共形ブロック . . . . .	71
9.4	共形 Casimir 演算子による計算 . . . . .	72
<b>10</b>	<b>共形ブートストラップ</b>	<b>73</b>
10.1	交差対称性 (crossing symmetry) . . . . .	73

10.2	共形データに対する制限 . . . . .	74
10.3	半正定値計画問題 . . . . .	76

## 0 まえがき

臨界現象において、臨界指数という量がモデルや実験系によらない普遍的な値をとる、という普遍性 (universality) が知られている。微視的には全く異なる系が、巨視的な性質に注目する限りは同じ振る舞いを見せるというのは自然 (あるいは多体系) の神秘の 1 つである。

さて、くりこみ群の見方では、普遍性は臨界点にあるモデルが粗視化によって共形場理論に漸近していく振る舞いとして理解される。共形場理論は臨界点を無限に粗視化した極限として現れる理論であり、本質的に無限の自由度を含む場の理論である。これについて調べようとする、(一部を除いて) 相互作用する場の理論の非摂動的な解析に乗り出さないといけない。これはとてつもなく難しいことなのだが、共形場理論の場合には強力な助っ人がいて、それが名前にある通り共形不変性である。

共形ブートストラップ法は、微視的なモデルの構造を全く仮定せず、共形不変性 (と空間次元や対称性など基本的な情報) のみを仮定して、共形場理論の性質をどこまで探れるかという 1 つの試みである。結果はどうだったかと言うと、大きな成果として、3 次元 Ising 模型の臨界指数がモンテカルロ法を超える高精度で数値的に決定されている。つまり、共形不変性だけから臨界現象を解くことができるということである。そもそも臨界現象は普遍性をもつのだから、モデルによらない記述はあって当たり前、という考えもあるかもしれない。しかし、それが数値計算を使うとはいえ、具体的に計算可能であるのは驚くべきことである。

この記事では場の理論とくりこみ群についての基本的な事項から始め、共形場理論の導入し、共形ブートストラップの概略を説明する。記事を作成するにあたって、主に [8],[9] を参考にした。特に図に関しては [8] を大いに参考にした。詳細で正確な議論についてはこれらの文献を参照してもらえればいいと思う。また [7] も参考にした。

読者は物理学科の学部 3 年生から 4 年生を想定しており、統計力学と量子力学についての基本的な知識を仮定している。場の理論 (自由場や摂動論など) に関する知識があったほうがわかりやすいと思われるが、議論の本筋を理解するにあたっては必要ない。最後に、この記事は学部生の勉強ノートに過ぎず、内容の正確性は保証できないことを注意しておく。

### 記法等

- $\hbar = c = k_B = 1$  とする自然単位形を用い、物理量の次元は質量次元で表すことにする。
- $\sum_{\mu=1}^d A_{\mu} B^{\mu}$  を単に  $A_{\mu} B^{\mu}$  と書くアインシュタインの規約を用いる。
- 空間座標について、 $x$  は  $d$  次元の座標を表し、 $\mathbf{x}$  は  $d-1$  次元の座標を表すことにする。
- $x^2 := x_{\mu} x^{\mu}$ ,  $x \cdot y := x_{\mu} y^{\mu}$  という略記を断りなく用いる。

# 1 場の理論

この記事では主に経路積分表示による Euclid 化された場の理論を扱っている。なお、扱うのは Boson のみで、Grassmann 数を用いた Fermion の経路積分については説明しない。

## 1.1 Euclid 空間における場の理論

経路積分を用いて、古典統計力学系の連続極限として場の理論を導入しよう。場の理論の定式化にはいくつか方法があるが、経路積分の方法には

- 統計力学と量子論の対応関係が見やすい
- 理論の対称性が見やすい
- 古典極限をとりやすい

などの利点がある。

例えばの格子間隔  $a$  の格子点  $x = an, n \in \mathbb{Z}^d$  上にスピン変数  $s_n$  が定義されていたとする。系のエネルギーを  $E[s]$  とすると、分配関数は

$$Z = \sum_{[s]} e^{-\beta E[s]} \quad (1.1)$$

と書ける。ここで  $\sum_{[s]}$  は取りうるあらゆるスピンの配位についての和を表す。このような格子上で定義された模型において格子間隔  $a \rightarrow 0$  の極限をとることで、連続的な場の理論が得られる。このとき、何を保ちながら極限をとるのかを決めておく必要があるが、この問題については後で考える。

場  $\phi(x)$  を時空  $\mathbb{R}^d$  (Euclid 空間) 上で定義された実数値をとる関数とする。この仮定は議論を単純にするためで、一般には時空は多様体で、場も多様体に値をとる。分配関数は

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \quad (1.2)$$

と書かれる。 $\int \mathcal{D}\phi$  は経路積分、または汎関数積分と呼ばれ、連続的な関数  $\phi(x)$  のあらゆる配位についての積分を表す。測度  $\mathcal{D}\phi$  の形式的な定義は、連続的な総積  $\prod_x$  によって

$$\mathcal{D}\phi = \prod_x d\phi(x) \quad (1.3)$$

と書かれる。これは数学的に厳密ではないが、気にしないことにする。 $S$  は作用を表し、Lagrangian  $\mathcal{L}$  によって

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (1.4)$$

と定義される  $\phi$  の汎関数である。<sup>\*1</sup> 作用や Lagrangian という用語に違和感を感じたかもしれない。これは量子論の文脈での命名法である。場の理論は統計的場の理論と場の量子論の双方を統一的に扱う枠組みなので、同じ概念に2つの名前がついていることがよくある。同じこと統計力学風  
に書くならば、エネルギー  $E$  とその密度  $\mathcal{H}$  を用いて

$$S[\phi] = \beta E[\phi] = \beta \int d^d x \mathcal{H}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (1.5)$$

となる。

場の理論において、インプットは作用の具体形や対称性など系を指定する情報で、アウトプットは物理量の期待値である。物理量  $A(x)$  の期待値は、

$$\langle A(x) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi A(x) e^{-S[\phi]} \quad (1.6)$$

によって計算される。特に  $N$  点関数 ( $N$  点相関関数、 $N$  点 Green 関数) は以下のように定義される。

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) e^{-S[\phi]} \quad (1.7)$$

1 つ例を挙げておくと今後の議論がイメージしやすいと思うので、Ising モデルに対応する  $\phi^4$  理論を紹介する。Ising モデルの作用 (Hamiltonian) は、

$$S[\phi] = \beta E[\phi] = -\frac{K}{2} \sum_x \sum_{\mu=1}^d \sum_{\pm} \phi(x) \phi(x \pm a e_\mu), \quad (x/a \in \mathbb{Z}^d) \quad (1.8)$$

で与えられる。ここで、 $e_\mu$  は  $\mu$  番目の成分が1で他が0の単位ベクトルであり、 $\phi(x)$  は  $x/a \in \mathbb{Z}^d$  で定義された  $\pm 1$  に値を取るスピン変数である。

$\phi(x)$  を  $\mathbb{R}^d$  で定義された実数値をとる関数に格上げして、連続的な場に対する作用を構成しよう。格子間隔  $a$  が小さい場合に、作用は

$$-\frac{K}{2} \sum_x \sum_{\mu=1}^d \phi(x) (e^{a\partial_\mu} \phi(x) + e^{-a\partial_\mu} \phi(x)) \approx -\frac{K}{2} \sum_x (d\phi(x)^2 + a^2 \phi(x) \partial_\mu \partial^\mu \phi(x)) \quad (1.9)$$

と近似できる。また  $\phi(x)$  が  $\pm 1$  の値をとることを反映するために、ポテンシャル

$$V(\phi) \propto (\phi^2 - 1)^2 \quad (1.10)$$

を加えることにする。すると、

$$S[\phi] = \int d^d x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi(x)^4 \right) \quad (1.11)$$

<sup>\*1</sup> Lagrangian が空間に陽に依存する場合や、場の高次の微分項を含む場合を考えてもいい。ただし、微分は有限階までに抑えておかないと相互作用が非局所的になる。

という形の作用が得られる。<sup>\*2</sup> これを  $\phi^4$  理論と呼ぶ。

## 1.2 統計力学と量子論の関係

(1.2) は場を自由度とするの統計力学系の分配関数だったが、場の量子論でも同様に分配関数が

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_L[\phi]} \quad (1.12)$$

と定義される。統計力学との違いは指数関数の肩に  $i$  が乗るかだけである。期待値の定義も同様に

$$\langle A_L(x) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi A_L(x) e^{iS_L[\phi]} \quad (1.13)$$

と定義される。

量子論の経路積分は、Wick 回転 (Euclid 化) と呼ばれる操作によって統計力学の経路積分に変換できる。例えば自由スカラー場

$$S_L[\phi] = - \int d^d x \left( \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (1.14)$$

を考える。ただし、 $\eta$  は符号  $(-, +, \dots, +)$  をもつ Minkowski 計量である。ここで、虚時間  $t_E$  を実時間  $t$  に対して

$$t = -it_E, \quad \frac{\partial}{\partial t} = i \frac{\partial}{\partial t_E} \quad (1.15)$$

によって定義すると、 $iS_L[\phi]$  を以下のように Euclid 空間の作用  $S_E[\phi']$  に書き換えられる。

$$iS_L[\phi] = - \int dt_E d^{d-1} \mathbf{x} \left( \frac{1}{2} \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) =: -S_E[\phi] \quad (1.16)$$

このような操作を勝手に行っているのかと疑問に思われるかもしれない。しかし驚くべきことに、理論がいくつかの性質<sup>\*3</sup> を満たすときに、Euclid 空間の相関関数から Minkowski 時空の相関関数を再構成できることが公理的場の理論の枠組みで証明されている (再構築定理)。したがって統計的場の理論と場の量子論は Wick 回転によって相互に読み替えることができる。以降は基本的に Euclid 空間上の統計的場の理論を考えるが、Minkowski 時空上の場の量子論への翻訳は常に可能である。

## 1.3 演算子形式

場の理論には経路積分による定式化と等価な演算子による定式化がある。

<sup>\*2</sup> 運動項については部分積分をして  $-\phi \partial_\mu \partial^\mu \phi \rightarrow \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$  とした。係数についている  $1/2, 1/4!$  は慣習的なもののなので気にする必要はない。また  $m^2$  と書いているが、正でなくてもよい。

<sup>\*3</sup> Osterwalder-Schrader の公理系と呼ばれる性質で、中でも特に重要なのは鏡映正値性 (reflection positivity) である。これについては後で説明する。



まず、Euclid 空間の 1 つの方向を時間として特別視する。時刻  $t$  を固定して、空間に依存する場  $\varphi(\mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x})$  を考える。以降、 $\varphi$  は  $d-1$  次元空間に依存する場を表す文字として、 $\phi$  と区別して用いる。ここで、ありうる全ての場  $\varphi(\mathbf{x})$  をそれぞれ Hilbert 空間の基底  $|\varphi\rangle$  に対応づける。<sup>\*4</sup> ただし、 $|\varphi\rangle$  は

$$\int \mathcal{D}\varphi |\varphi\rangle\langle\varphi| = 1 \quad (1.17)$$

によって規格化されているものとする。

$t = t_i$  で  $\varphi_i(\mathbf{x})$  であった場が時間発展して、時刻  $t = t_f$  で  $\varphi_f(\mathbf{x})$  となる場合の確率的重みは

$$\langle\varphi_f|\hat{U}(t_f, t_i)|\varphi_i\rangle := \int_{\phi(t_i)=\varphi_i}^{\phi(t_f)=\varphi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \quad (1.18)$$

によって与えられる。この式は時間発展演算子  $\hat{U}(t_f, t_i)$  の定義となっている。右辺は

$$\int_{\phi(t_i)=\varphi_i}^{\phi(t_f)=\varphi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{D}\phi \delta[\phi(t_i) - \varphi_i] \delta[\phi(t_f) - \varphi_f] e^{-S[\phi]} \quad (1.19)$$

と定義される。ここで、デルタ汎関数  $\delta[\varphi]$  は  $\int \mathcal{D}\varphi \delta[\varphi] F[\varphi] = F[0]$  によって定義される超汎関数である。また始状態・終状態を一般の状態  $|\Psi_i\rangle, |\Psi_f\rangle$  にとった場合は

$$\langle\Psi_f|\hat{U}(t_f, t_i)|\Psi_i\rangle = \int \mathcal{D}\varphi_f \int \mathcal{D}\varphi_i \langle\Psi_f|\varphi_f\rangle\langle\varphi_f|\hat{U}(t_f, t_i)|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\Psi_i\rangle \quad (1.20)$$

と定義する。

Hamiltonian は、時間発展演算子の微分によって

$$\hat{H}(t) := -\frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, 0) \quad (1.21)$$

と定義される。

デルタ汎関数の性質から、

$$\int \mathcal{D}\phi = \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\phi \delta[\phi(t) - \varphi] \quad (1.22)$$

---

<sup>\*4</sup> 場の理論では状態空間は時間一定の超平面に付随するものである。ただし、それらは全て同型であるから全ての時刻の状態空間を同一視してしまってよい。

という変形ができることに注目すると、 $t_1 > t_2 > t_3$  に対して

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_1 | \hat{U}(t_1, t_3) | \varphi_3 \rangle &= \int \mathcal{D}\varphi_2 \int_{\phi(t_3)=\varphi_3}^{\phi(t_1)=\varphi_1} \mathcal{D}\phi \delta[\phi(t_2) - \varphi_2] e^{-S[\phi]} \\
&= \int \mathcal{D}\varphi_2 \int_{\phi_{12}(t_2)=\varphi_2}^{\phi_{12}(t_1)=\varphi_1} \mathcal{D}\phi_{12} \int_{\phi_{23}(t_3)=\varphi_3}^{\phi_{23}(t_2)=\varphi_2} \mathcal{D}\phi_{23} e^{-S_{12}[\phi_{12}] - S_{23}[\phi_{23}]} \\
&= \int \mathcal{D}\varphi_2 \langle \varphi_1 | \hat{U}(t_1, t_2) | \varphi_2 \rangle \langle \varphi_2 | \hat{U}(t_2, t_3) | \varphi_3 \rangle
\end{aligned} \tag{1.23}$$

が成り立つ。ここで、 $\phi_{12}(x), \phi_{23}(x)$  はそれぞれ  $t_1 \geq t \geq t_2, t_2 \geq t \geq t_3$  における  $\phi(x)$  である。また  $S_{ij}$  は  $t_i$  から  $t_j$  までの Lagrangian を積分した作用を表す。ここから時間発展演算子の加法性

$$\hat{U}(t_1, t_3) = \hat{U}(t_1, t_2) \hat{U}(t_2, t_3) \tag{1.24}$$

がわかる。

## 1.4 統計力学における演算子形式

場の理論の演算子形式を量子論の語彙を使って定義してきたが、統計力学の文脈で捉え直すことも重要だろう。

まず、時間発展演算子と転送行列の関係について見る。時間  $t$  が格子の一方向を表す座標に過ぎないことを思い出すと、この方向に周期境界条件を課すことは自然である。そこで、 $\phi(0, \mathbf{x}) = \phi(L, \mathbf{x})$  を課すと、分配関数は、

$$\begin{aligned}
Z &= \int_{\phi(0)=\phi(L)} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \\
&= \int \mathcal{D}\varphi \int_{\phi(0)=\phi(L)=\varphi} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \\
&= \int \mathcal{D}\varphi \langle \varphi | \hat{U}(L, 0) | \varphi \rangle = \text{Tr } \hat{U}(L, 0)
\end{aligned} \tag{1.25}$$

と書ける。特に Hamiltonian  $\hat{H}(t)$  が  $t$  に依存しない場合、

$$Z = \text{Tr } e^{-L\hat{H}} \tag{1.26}$$

と書ける。これは  $d$  次元の古典的な格子模型における転送行列に対応している。

次に、 $d-1$  次元の有限温度の場の量子論について見る。場  $\phi$  は  $d-1$  次元空間の座標  $\mathbf{x}$  と、虚時間  $\tau$  に依存しているとする。また虚時間は  $0 \leq \tau \leq \beta$  を満たし、 $\phi(\tau, \mathbf{x})$  は  $\tau$  方向に関して周期的境界条件

$$\phi(0, \mathbf{x}) = \phi(\beta, \mathbf{x}) \tag{1.27}$$

を満たすとする。分配関数は

$$Z = \int_{\phi(0)=\phi(\beta)} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} = \text{Tr } \hat{U}(\beta, 0) \quad (1.28)$$

と表される。Hamiltonian  $\hat{H}(\tau)$  が  $\tau$  に依存しない場合、

$$Z = \text{Tr } e^{-\beta \hat{H}} \quad (1.29)$$

となり、 $d-1$  次元の量子系の分配関数が得られる。<sup>\*5</sup>

## 1.5 真空状態

これまで有限時間の時間発展を扱ってきたが、ここからは無限の過去から無限の未来まで含む全時空を考えることにする。このとき、真空状態  $|0\rangle$  を考えるのが便利である。

真空状態  $|0\rangle$  は Hamiltonian  $\hat{H}$  の最小固有値をもつ固有状態として定義される。<sup>\*6</sup>  $|1\rangle$  を真空状態以外の固有状態として、

$$\hat{U}(t, 0)|0\rangle = |0\rangle, \quad \hat{U}(t, 0)|1\rangle = e^{-\lambda t}|1\rangle \quad (\lambda > 0) \quad (1.30)$$

とおく。ただし作用に定数を追加することで  $\hat{H}|0\rangle = 0$  となるようにしている。すると

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, 0)(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) &= c_0|0\rangle + c_1 e^{-\lambda t}|1\rangle \\ &\rightarrow c_0|0\rangle \quad (t \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (1.31)$$

となるので、十分長く時間発展した場合  $|0\rangle$  以外の寄与は消える。<sup>\*7</sup> したがって、分配関数や期待値の計算の際に真空状態を境界条件として設定しておくことで、計算を簡単にしながらバルクの物理量をうまく取り出せる。

Minkowski 時空の場合、時間発展演算子の固有値は  $e^{-iEt}$  という形をとるので、真空以外の寄与が無視できることを示すためにはもっと繊細な議論が必要になる。

先ほどは Hamiltonian の基底状態として  $|0\rangle$  を定義したが、十分長い時間発展が  $|0\rangle$  のみの寄与を取り出すことから、これを真空状態の定義とみなすことができる。すなわち、

$$\langle \varphi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \int_{\phi(t=-\infty)}^{\phi(t=0)=\varphi} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \quad (1.32)$$

<sup>\*5</sup> 以上の議論は  $L$  と  $\beta$  を置き換えると全く同じなので、 $d$  次元古典系と  $d-1$  次元量子系の間の対応関係が読み取れる。有限温度の場の量子論は  $L \rightarrow \infty$  としない有限サイズの統計力学に対応する。

<sup>\*6</sup> ここでは  $\hat{H}$  が時間に依存しない Hermite 演算子であると仮定している。また真空の縮退度は無視している。真空の縮退が起こるのは自発的に対称性が破れた場合である。例えば  $\mathbb{Z}_2$  対称性が破れて 2 つの真空  $|0 \uparrow\rangle, |0 \downarrow\rangle$  が現れたとする。このとき系の体積を無限大にした熱力学極限における期待値が、 $\langle 0 \uparrow | \dots | 0 \uparrow \rangle$  や  $\langle 0 \downarrow | \dots | 0 \downarrow \rangle$  など複数存在してしまう。つまり境界条件の取り方によって熱力学極限が変わってしまう。真空の縮退がないという仮定は、熱力学極限をとったときに経路積分が境界条件によらずに一つの値をとることを意味している。

<sup>\*7</sup> もちろん  $|0\rangle$  に直交した状態から始めれば  $|0\rangle$  の寄与は出てこないが、そのような境界条件は無視している。格子模型においてバルクの性質が見たい場合は、特別な境界条件を考える意味がないからである。一方場の量子論では無限の過去・未来の境界条件として粒子が励起している状態を考えることはよくある。その場合の境界条件は真空状態に生成消滅演算子を作用させて表現される。

と定義する。ここで  $1/\sqrt{Z}$  は  $\langle 0|0\rangle = 1$  とするための規格化因子である。作用に定数を足して  $\hat{H}|0\rangle = 0$  とした場合、 $1/\sqrt{Z}$  は必要ない。また真空状態の共役を同様に、

$$\langle 0|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \int_{\phi(t=0)=\varphi}^{t=\infty} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \quad (1.33)$$

と定義できる。

定義 (1.32) は  $t = 0$  におけるものだが、任意の時刻に容易に拡張できる。その場合、異なる時刻の真空は  $|0\rangle_t = \hat{U}(t, t')|0\rangle_{t'}$  という関係で結ばれるが、 $\hat{H}|0\rangle = 0$  とした場合は全ての時刻の真空は同じ状態となる。

真空状態および時間発展演算子を以下のような図式によって表すことにする。

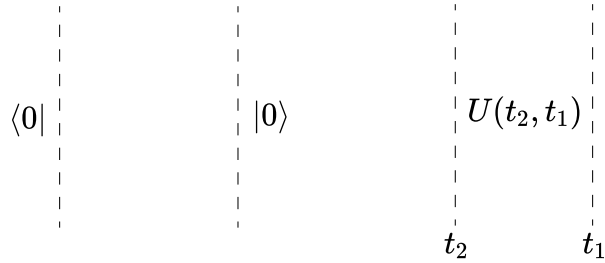


図 1: 真空状態と時間発展演算子の図式による表現

例えば  $\hat{U}(t_2, t_1)|0\rangle = |0\rangle$  という式は、

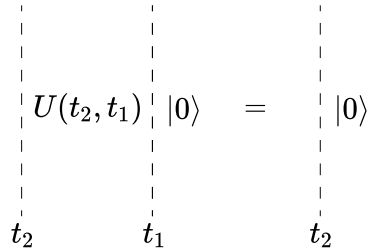


図 2: 図式による計算

と図示できる。

## 1.6 場の演算子と相関関数

Schrödinger 表示の場の演算子  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$  を  $|\varphi\rangle$  を固有状態にもつ演算子として、

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) := \int \mathcal{D}\varphi \varphi(\mathbf{x}) |\varphi\rangle \langle \varphi|, \quad \hat{\phi}(\mathbf{x}) |\varphi'\rangle = \varphi'(\mathbf{x}) \quad (1.34)$$

によって定義する。Heisenberg 表示での演算子は、

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = \hat{U}(0, t) \hat{\phi}(\mathbf{x}) \hat{U}(t, 0) \quad (1.35)$$

と定義される。ここで、 $t > t'$  に対して  $\hat{U}(t', t) = \hat{U}(t, t')^{-1}$  と定義している。Heisenberg 表示では演算子の始域、終域は全て時刻 0 の Hilbert 空間に揃えられている。これによって、Heisenberg 表示では異なる時刻の演算子でも足し引きが問題なく定義できる。

相関関数を場の演算子によって表すことができる。1 点関数  $\langle \phi(t, \mathbf{x}) \rangle$  は、

$$\begin{aligned}
\langle \phi(t, \mathbf{x}) \rangle &= \frac{1}{Z} \int_{\phi(t_i)=\varphi_i}^{\phi(t_f)=\varphi_f} \mathcal{D}\phi \phi(t, \mathbf{x}) e^{-S[\phi]} \\
&= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(\mathbf{x}) \int_{\phi(t)=\varphi}^{\phi(t_f)=\varphi_f} \mathcal{D}\phi \int_{\phi(t_i)=\varphi_i}^{\phi(t)=\varphi} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \\
&= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\varphi \langle \varphi_f | \hat{U}(t_f, t) | \varphi \rangle \varphi(\mathbf{x}) \langle \varphi | \hat{U}(t, t_i) | \varphi_i \rangle \\
&= \frac{\langle \varphi_f | \hat{U}(t_f, t) \hat{\phi}(\mathbf{x}) \hat{U}(t, t_i) | \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_f | \hat{U}(t_f, t_i) | \varphi_i \rangle} \\
&= \frac{\langle \varphi_f(t_f) | \hat{\phi}(\mathbf{x}) | \varphi_i(t_i) \rangle}{\langle \varphi_f(t_f) | \varphi_i(t_i) \rangle} \tag{1.36}
\end{aligned}$$

と表せる。ただし、状態の Heisenberg 表示を

$$|\varphi(t)\rangle = \hat{U}(0, t) |\varphi\rangle \tag{1.37}$$

と定義した。<sup>\*8</sup>

無限大の領域での相関関数を考える場合、始状態・終状態を真空状態に変えれば良い。まず、 $\hat{H}|0\rangle = 0$  となるように作用の定数項を調節したとき、

$$Z = \langle 0 | \hat{U}(t_f, t_i) | 0 \rangle = 1 \tag{1.38}$$

となることに注意すると、

$$\langle \phi(x) \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle \tag{1.39}$$

となる。

同様に 2 点関数は、 $t_1 > t_2$  のとき、

$$\begin{aligned}
&\langle \phi(t_1, \mathbf{x}_1) \phi(t_2, \mathbf{x}_2) \rangle \\
&= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\varphi_1 \mathcal{D}\varphi_2 \varphi_1(\mathbf{x}_1) \varphi_2(\mathbf{x}_2) \int_{\phi(t_1)=\varphi_1}^{\phi(t_f)=\varphi_f} \mathcal{D}\phi \int_{\phi(t_2)=\varphi_2}^{\phi(t_1)=\varphi_1} \mathcal{D}\phi \int_{\phi(t_i)=\varphi_i}^{\phi(t_2)=\varphi_2} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \\
&= \frac{\langle \varphi_f(t_f) | \hat{\phi}(t_1, \mathbf{x}_1) \hat{\phi}(t_2, \mathbf{x}_2) | \varphi_i(t_i) \rangle}{\langle \varphi_f(t_f) | \varphi_i(t_i) \rangle} \tag{1.40}
\end{aligned}$$

と表せる。途中式は (1.36) と同じなので省略した。分子は以下のように図示できる。

---

<sup>\*8</sup> Heisenberg 表示の状態が時間に依存していて違和感があるが、 $|\varphi\rangle$  は Hamiltonian に従って時間発展しているわけではないので、時間に依存してもよい。

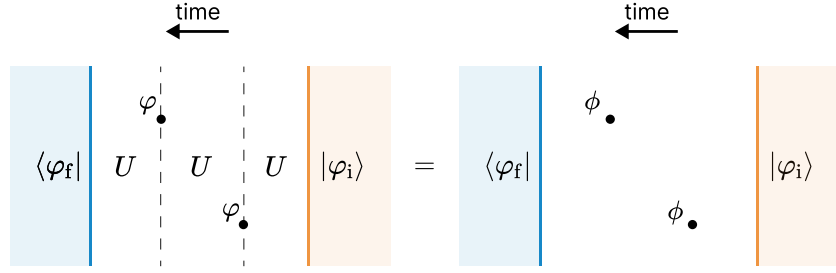


図 3: 2 点関数

$t_1 < t_2$  のときは  $\hat{\phi}(t_1, \mathbf{x}_1)$  と  $\hat{\phi}(t_2, \mathbf{x}_2)$  の順序を入れ替える必要があるので、

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = \frac{\langle \varphi_f(t_f) | T^* [\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | \varphi_i(t_i) \rangle}{\langle \varphi_f(t_f) | \varphi_i(t_i) \rangle} \quad (1.41)$$

となる。T\* 積は左側が未来、右側が過去になるように演算子を並べて積をとることを表す。始状態・終状態を真空にとると、

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = \langle 0 | T^* [\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle \quad (1.42)$$

となる。同様に、 $N$  点関数について以下が成り立つ。

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle = \langle 0 | T^* [\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_N)] | 0 \rangle. \quad (1.43)$$

## 1.7 T 積と T\* 積

T\* 積と類似の概念で T 積というがあるので以下で違いを説明しておく。T 積は、

$$T [\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] = \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \theta(t_1 - t_2) + \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_1) \theta(t_2 - t_1) \quad (1.44)$$

と定義される。一方 T\* 積は相関関数から定義される。演算子の時間微分が含まれていない場合、T 積と T\* 積は同じ結果を与える。

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle = \langle 0 | T^* [\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle = \langle 0 | T [\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle \quad (1.45)$$

時間微分が含まれる場合、T\* 積は相関関数から定義されるので、時間微分は期待値の外に出すことができ、

$$\begin{aligned} \langle 0 | T^* [\partial_0 \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle &= \frac{\partial}{\partial t_1} \langle 0 | T [\phi(x_1) \phi(x_2)] | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T [\partial_0 \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle + \langle 0 | [\hat{\phi}(x_1), \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle \delta(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (1.46)$$

となる。したがって T 積と T\* 積の間にはデルタ関数に比例する項の分の差があることがわかる。

## 1.8 一般的な量子化

演算子形式の場の理論では、時間一定の超平面で時空をスライスし、その断面に Hilbert 空間を対応づける。しかし、時空の切り方は一つではない。回転対称な理論では時間の方向の取り方は任意であるし、時空を超曲面で切ることができる。時空を超曲面でスライスした場合も時間発展演算子や場の演算子を同様に定義することが可能である。

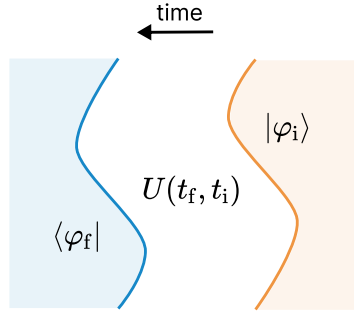


図 4: 一般的な量子化

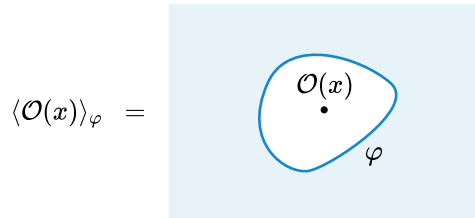
これは一般的すぎて机上の空論な感もあるが、共形場理論では動径量子化や N-S 量子化 (この記事では扱わない) など、平面で切らないような量子化で性質の良いものが存在する。

また一方向に進む時間という概念にこだわらなければ、より拡張された形で演算子を定義することができる。未来と過去に境界条件をつけて行列要素を定義する場合、演算子  $U(t_f, t) \mathcal{O}(x) U(t, t_i)$  は 2 つの時刻の Hilbert 空間  $\mathcal{H}_{t_f}, \mathcal{H}_{t_i}$  の間の線型写像であるが、これを

$$\mathcal{O}(x) : \mathcal{H}_{t_f} \otimes \mathcal{H}_{t_i} \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.47)$$

とみなすこともできる。この場合、 $\mathcal{O}(x)$  は境界条件に対して複素数を返す汎関数である。ここで、一般的な局所演算子  $\mathcal{O}(x)$  を、 $x$  を含む領域の境界上で定義された Hilbert 空間の元  $\varphi$  に対し、期待値  $\langle \mathcal{O}(x) \rangle_\varphi$  を返す汎関数と定義する。

$$\mathcal{O}(x) : \mathcal{H}(\partial B) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \langle \mathcal{O}(x) \rangle_\varphi, \quad (x \in B) \quad (1.48)$$



経路積分に対する局所場の挿入はこの意味で演算子である。また  $\forall \varphi, \langle \mathcal{O}(x) \rangle_\varphi = \langle \mathcal{O}'(x) \rangle_\varphi$  となる時、演算子の等式として  $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}'(x)$  と書くことにする。この書き方は以降の議論で頻繁に用いる。

## 2 くりこみ群

### 2.1 連続極限の気持ち

身の回りにあるマクロな多体系において、単位体積 (例えば  $1 \text{ cm}^3$ ) に含まれている原子の数は  $10^{23}$  程度の巨大な数である。場の理論の基本的な思想は、非常に多数の自由度の理想化として、無限の自由度を持つ系を考えることである。

$$10^{23} \approx \infty \quad (2.1)$$

簡単な例として、以下の作用で表される 1 次元の調和振動子系を考えてみる。

$$S = \int dt \left[ \frac{1}{2} m \sum_n \dot{\phi}_n^2 - \frac{1}{2} \kappa \sum_n (\phi_{n+1} - \phi_n)^2 \right] \quad (2.2)$$

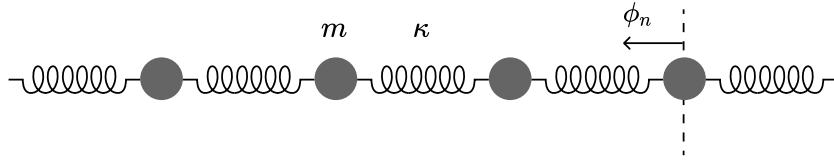


図 5: 調和振動子系

運動方程式を書くと

$$m \frac{d^2}{dt^2} \phi_n = \kappa (\phi_{n+1} + \phi_{n-1} - 2\phi_n) \quad (2.3)$$

である。解の形として  $\phi_n = e^{-i\omega t} e^{ikan}$  を仮定すると、以下の分散関係を得る。

$$-m\omega^2 = \kappa(e^{ika} + e^{-ika} - 2), \quad \omega = \sqrt{\frac{2\kappa}{m}(1 - \cos(ka))} \quad (2.4)$$

$ka \ll 1$  のときは

$$\omega \approx \sqrt{\frac{\kappa a^2}{m}} |k| =: v|k| \quad (2.5)$$

という線形な分散関係が得られる。ここで、 $\kappa, m, a$  といった微視的なモデルのパラメーターは全て音速  $v$  という一つのパラメーターにまとめられていることに注意する。

次に、巨視的な物理量を保つような連続極限を考える。具体的には密度  $\rho = m/a$  と張力  $T = \kappa a$  を保ちながら  $a \rightarrow 0$  とする。このとき  $\phi_n(t) = \sqrt{a} \phi(an, t)$  として、作用は

$$S = \int dt dx \left( \frac{1}{2} \rho (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} T (\partial_x \phi)^2 \right) \quad (2.6)$$



となる。また運動方程式は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (2.7)$$

となる。この理論は古典的ではあるが、場の理論の利点を反映している。連続化した理論は非加算無限個の自由度を含み、もとの理論よりもかえって自由度が増えている。しかし運動方程式の解は微分方程式を解くことで簡単に求まる。なぜ自由度を足したのに記述が簡単になるのかというと、連続化した理論はもとの理論の長波長 (低波数) の記述を無限の短波長 (高波数) まで外挿しているからである。<sup>\*9</sup> したがって短波長の情報を捨てていることになる。また一つの法則によってあらゆるスケールの物理が説明されているとも言え換えられる。

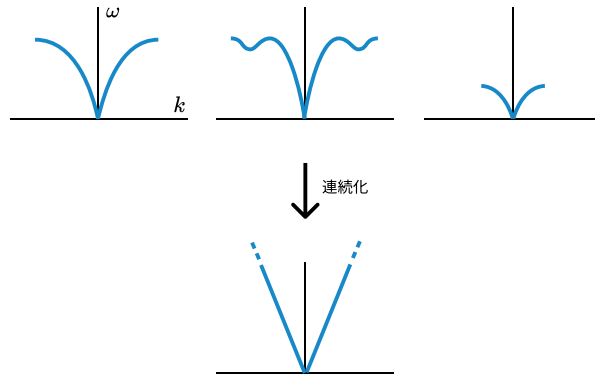


図 6: 理論の連続化の概念図

連続化した理論ともとの格子上の理論は、巨視的な物理を扱う限りは同じ結果を与える。しかし、は微視的なモデルの設定の仕方によらず、普遍的である。さらに言えば、現象論的に場の理論を扱う上で微視的なモデルについての情報は全く必要なく、空間次元や対称性といった基本的な情報といくつかの巨視的な観測量だけあれば十分である。

このことは素粒子物理学で場の量子論が非常に有効であることを説明する。標準理論の先のミクロな物理はまだ知られていない。超弦理論で記述される世界があるかもしれないし、時空に格子のような最小単位があるのかもしれない。しかし幸いにも、<sup>\*10</sup> 我々の身の回りの低エネルギーな現象はミクロな物理の詳細に関係なく場の量子論で記述できる。

一方凝縮系の物理では、系の微視的な構成要素は分かっているが、それらが複雑に相互作用する結果としてマクロなスケールで非自明な現象が現れる。このような場合にも、くりこまれた自由度

<sup>\*9</sup> ちなみに、このような文脈で以下のような言葉が使われることがあるが、全てほとんど同じ意味である。

微視的、短距離、短波長 ↔ 巨視的、長距離、長波長

高周波、紫外 (UV) ↔ 低周波、赤外 (IR)

高エネルギー ↔ 低エネルギー

<sup>\*10</sup> 場の理論を超えた物理を探索する人にとっては、むしろ不幸かもしれない。

に対する有効理論として場の理論は用いられる。また臨界現象ではスケール不変な振る舞いが現れ、これは本質的に場の理論によって理解される。

## 2.2 格子場の理論

前の章で場の理論を統計力学系の連続極限として形式的に定義したが、この意味は真面目に考える必要がある。まず時空上の格子点  $x^\mu = an^\mu$ ,  $n \in \mathbb{Z}^d$  の全てについてデルタ関数を挿入すると、分配関数は

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \int \prod_{n \in \mathbb{Z}^d} d\phi_n \delta(\phi(an) - \phi_n) e^{-S[\phi]} \quad (2.8)$$

と書ける。 $\mathcal{D}\phi$  による積分を先に行うと、格子場の作用を

$$e^{-S[a, \phi]} = \int \mathcal{D}\phi \prod_{n \in \mathbb{Z}^d} \delta(\phi(an) - \phi_n) e^{-S[\phi]} \quad (2.9)$$

と定義して、

$$Z = \int \prod_{n \in \mathbb{Z}^d} d\phi_n e^{-S[a, \phi]} \quad (2.10)$$

と書ける。 $S[a, \phi]$  は格子場の作用であり、 $a$  と離散的な場  $\phi_n$  に依存する関数である。

このように、連続理論が定義できればそれを部分的に積分することで格子場の理論が得られる。次に順序を逆にして、格子場の理論の  $a \rightarrow 0$  の極限として連続理論を定義してみよう。格子上で定義された近似的な作用  $S'[a, \phi]$  を考える。もし  $a \rightarrow 0$  の極限で  $S'[a, \phi]$  が  $S[a, \phi]$  と等価ならば、

$$Z = \lim_{a \rightarrow 0} \int \prod_{n \in \mathbb{Z}^d} d\phi_n e^{-S'[a, \phi]} \quad (2.11)$$

と書けるだろう。 $S'[a, \phi]$  としては、Ising モデルのように最近接格子間の相互作用のみを含むような単純なモデルを想定している。一般に厳密な格子場の作用  $S[a, \phi]$  はさまざまな距離の相互作用を含む。

近似的な作用の形を決めたとしても、 $a \rightarrow 0$  の極限をとるためには「巨視的な物理が変わらないように」作用の  $a$  依存性を決定しなければいけない。しかし、実は作用が場の 2 次形式で表されるような単純な場合 (自由場の理論) を除いて、「巨視的な物理が変わらないように」とは微視的には何を意味するかが非自明な問題となる。逆の視点から言えば、微視的なモデルが与えられていても、そこから巨視的な物理を導くのは非自明な問題である。これらを紐解く強力な手法がくりこみ群である。

## 2.3 くりこみ群

この記事はくりこみ群の解説ではないので、詳細な計算は述べずに概念的な話に終始する。物足りない方は [1] の 8 章や [5], [2] などを参照してほしい。

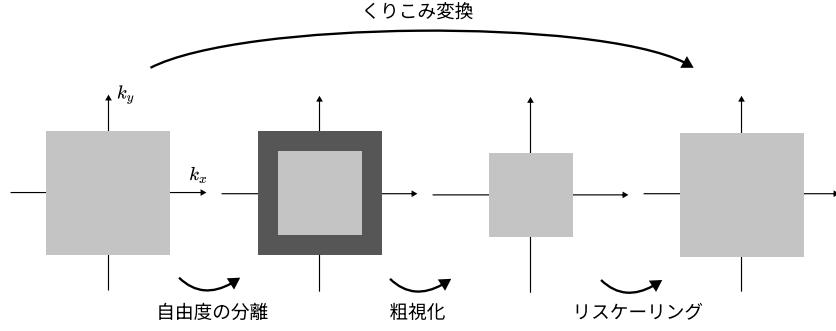


図 7: くりこみ変換の概念図

くりこみ群を解析計算で具体的に行う場合、運動量空間で考えることが多い。運動量にカットオフ  $\Lambda$  をつけた系の分配関数を

$$Z = \int_{|\mathbf{k}| < \Lambda} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \quad (2.12)$$

のように書く。ただし、 $\int_{|\mathbf{k}| < \Lambda}$  は  $\phi(x)$  が  $|\mathbf{k}| < \Lambda$  の Fourier 成分のみをもつことを表す。この式における経路積分の測度は形式的に

$$\mathcal{D}\phi = \prod_{|\mathbf{k}| < \Lambda} d\phi_{\mathbf{k}} \quad (2.13)$$

と表される。 $|\mathbf{k}|$  を通常の  $L^2$  ノルムではなく  $L^\infty$  ノルム ( $\max |k_i|$ ) とすると、 $|\mathbf{k}| < \Lambda$  は立方格子の Brillouin ゾーンを表し、格子場の理論が得られる。このとき  $\Lambda$  は  $\pi/a$  に対応する。以上のような正規化<sup>\*11</sup> は連続的な作用  $S[\phi]$  が与えられれば、短波長の Fourier 成分を手で取り除くことで直ちに行えることに注意する。

系を粗視化したときに有効的な作用がどのように変化するかを観察するのがくりこみ群の出発点である。実数  $\tau > 0$  に対し、場を波数が  $|\mathbf{k}| < e^{-\tau}\Lambda$  となる巨視的な成分  $\phi_s$  と  $e^{-\tau}\Lambda < |\mathbf{k}| < \Lambda$  となる微視的な成分  $\phi_f$  に分ける。<sup>\*12</sup> またそれに対応して、作用を

$$S[\phi] = S_s[\phi_s] + S_f[\phi_f] + S_c[\phi_s, \phi_f] \quad (2.14)$$

と分割する。あらわには書いていないが、これらの作用はカットオフ  $\Lambda, e^{-\tau}\Lambda$  に依存する。微視的な場についての積分を先に行うと、分配関数は

$$\begin{aligned} Z &= \int_{|\mathbf{k}| < e^{-\tau}\Lambda} \mathcal{D}\phi_s e^{-S_s[\phi_s]} \int_{e^{-\tau}\Lambda < |\mathbf{k}| < \Lambda} \mathcal{D}\phi_f e^{-S_c[\phi_s, \phi_f] - S_f[\phi_f]} \\ &= Z_f \int_{|\mathbf{k}| < e^{-\tau}\Lambda} \mathcal{D}\phi_s e^{-S_s[\phi_s]} \langle e^{-S_c[\phi_s, \phi_f]} \rangle_f \\ &= Z_f \int_{|\mathbf{k}| < e^{-\tau}\Lambda} \mathcal{D}\phi_s e^{-S_{\text{eff}}[\phi_s]} \end{aligned} \quad (2.15)$$

<sup>\*11</sup> いまの文脈では理論の離散化と思ってもらってもいい。正確には場の理論に現れる発散を抑えるための操作のことをいい、次元正規化を始め色々な方法がある。

<sup>\*12</sup> s と f は slow と fast の頭文字をとった。

と書ける。ここで、 $S_f$  についての期待値を

$$\langle A \rangle_f := \frac{1}{Z_f} \int_{e^{-\tau\Lambda} < |\mathbf{k}| < \Lambda} \mathcal{D}\phi_f A e^{-S_f[\phi_f]}, \quad Z_f := \int \mathcal{D}\phi_f e^{-S_f[\phi_f]} \quad (2.16)$$

と定義した。また、粗視化された作用を

$$e^{-S_{\text{eff}}[\phi_s]} := e^{-S_s[\phi_s]} \left\langle e^{S_c[\phi_s, \phi_f]} \right\rangle_f \quad (2.17)$$

と定義した。この式は、微視的な自由度を積分すると、それが単に消えるのではなく、巨視的な自由度との結合を通じてくりこまれて現れてくることを意味する。

次に、粗視化の前後で作用を比較しやすくするために、

$$\mathbf{k}' = e^\tau \mathbf{k}, \quad \phi' = e^{\Delta\phi\tau} \phi \quad (2.18)$$

と定義してリスケールを行う。 $\Delta\phi$  は  $\phi$  の質量次元であり、この設定の仕方には任意性があるが、通常は運動項  $\alpha \int d^d x (\partial\phi)^2$  が不変になるようにする。素朴には  $\Delta\phi = d/2 - 1$  だが、くりこみの効果によってここからのずれ (異常次元) が発生することがある。リスケール後の (2.15) は

$$Z \propto \int_{|\mathbf{k}'| < \Lambda} \mathcal{D}\phi' e^{-S_{\text{eff}}[e^{-\Delta\phi\tau}\phi']} =: \int_{|\mathbf{k}'| < \Lambda} \mathcal{D}\phi' e^{-R_\tau(S)[\phi']} \quad (2.19)$$

と書ける。これをもとの分配関数 (2.12) と比較すると、系の粗視化 + スケール変換が作用に対する変換

$$S[\phi] \rightarrow R_\tau(S)[\phi] \quad (\tau > 0) \quad (2.20)$$

とみなせることが分かる。これをくりこみ変換と呼ぶ。またくりこみ変換全体の集合のことをくりこみ群と呼ぶ。<sup>\*13</sup>

作用を基底  $O_i[\phi]$  の線型結合によって

$$S[\phi] = \sum_i g_i O_i[\phi] \quad (2.21)$$

と書くと、くりこみ変換は結合定数  $g_i$  についての変換となる。 $\tau$  が微小であるとき、 $R_\tau(S)[\phi]$  はもとの作用とほとんど同じであるから、 $\tau$  についての微分方程式

$$\frac{dg_i(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} R_\tau(g_i) = \beta_i(g) \quad (2.22)$$

を立てることができる。これをくりこみ群方程式と呼ぶ。また右辺をベータ関数と呼ぶ。

<sup>\*13</sup> くりこみ群は正確には群ではなく半群 (結合法則を満たす代数) である、と物理の文献にはよく書いてある。このような説明に関する注意として、まず恒等変換はくりこみ群に含めてやるのが自然なので、くりこみ群はモノイドだと言ふべきだと思う。またくりこみ群方程式を逆に解くことで、少なくとも形式的にはフローを遡ることができるので、(熱力学極限では) くりこみ変換に逆変換が存在する。ただしこの変換は粗視化とスケール変換によっては得られないので、くりこみ変換ではない。

## 2.4 固定点と臨界現象

くりこみ群の視点から、普遍的な長距離の物理が微視的なモデルからどのように現れるかという問題を改めて考えてみよう。

まずくりこみ群の舞台として、次元や対称性のもとでありうる全ての  $S[\phi]$  を集めた理論空間を考える。くりこみ群のフローとは、(2.22) が表す理論空間上の軌跡である。

物理的な系では、くりこみ変換を繰り返すと系に特徴的なスケールは全て積分されてしまってスケールを持たない理論に近づいていくと考えられる。このような理論はくりこみ変換によって不変な固定点である。すなわち、

$$R_\tau(g_i^*) = g_i^*, \quad \beta(g_i^*) = 0 \quad (2.23)$$

が成り立つ。後で改めて説明するが、この記事のテーマである共形場理論の正体とは、実はこの固定点である。

くりこみ変換によって相関距離は単調減少することに注目する。相関距離とは、相関関数が

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle \sim e^{-(x-y)/\xi} \quad (|x-y| \gg a, 1/\Lambda) \quad (2.24)$$

と表される時の  $\xi$  を指す。<sup>\*14</sup> 固定点では  $\xi$  は変化しないので、 $\xi = 0$  か  $\xi = \infty$  でなければならない。 $\xi = 0$  の場合、各点の自由度が独立しているため、空間に依存する場を考える意味がない。したがって、より興味深いのは  $\xi = \infty$  の固定点である。相関距離の発散は 2 次相転移の特徴だったので、この固定点は臨界点を表している。

固定点の近傍  $g = g^* + \delta g$  ではベータ関数は  $\delta g$  に比例する。すなわち

$$\beta_i(g^* + \delta g) =: -\gamma_{nm} \delta g_m \quad (2.27)$$

と書ける。これが対角化されているとして、

$$\gamma_{ij} \delta g_j = y_i \delta g_i \quad (2.28)$$

<sup>\*14</sup> なぜ一般に相関関数がこのような形で書けるか疑問に思うかもしれないので、簡単に導いておく。並進対称性と回転対称性を仮定して、2 つの場の座標がそれぞれ  $(t, \mathbf{0})$ ,  $(0, \mathbf{0})$  の場合を考える。このとき相関関数は Hamiltonian によって

$$\langle \phi(t, \mathbf{0})\phi(0, \mathbf{0}) \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}(t, \mathbf{0}) \hat{\phi}(0, \mathbf{0}) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}(0, \mathbf{0}) e^{-\hat{H}t} \hat{\phi}(0, \mathbf{0}) | 0 \rangle \quad (2.25)$$

と表せる。ただし、 $\hat{H}|0\rangle = 0$  となるように Hamiltonian を定義した。ここから相関関数は転送行列  $e^{-\hat{H}t}$  の対角成分の 1 つを見ていることになる。 $t$  が十分大きければ転送行列の固有値のうち主要なものからの寄与だけが残ると考えられるので、それを  $1/\xi$  とおくと、

$$\langle \phi(t, \mathbf{0})\phi(0, \mathbf{0}) \rangle \sim e^{-t/\xi} \quad (2.26)$$

となり、(2.24) が得られる。座標はくりこみ変換によって  $x \rightarrow x' = e^{-\tau}x$  と変換されるので、 $x/\xi = x'/(e^{-\tau}\xi)$  となり、相関距離は  $\xi \rightarrow e^{-\tau}\xi$  と変換される。よって単調減少する。 $\phi$  のリスケーリングは相関関数を定数倍するだけで、 $\xi$  には寄与しない。

と書く。ここで  $\gamma_{ij}$  が実数固有値を持つと仮定した。<sup>\*15</sup>  $y_i$  は  $g_i$  の質量次元を表しており、したがって  $O_i[\phi]$  の質量次元は  $-y_i$  である。 $O_i[\phi] = \int d^d x \mathcal{O}_i(x)$  と表される場合、 $\mathcal{O}_i(x)$  の質量次元は  $\Delta_i = d - y_i$  となる。すると、固有ベクトルは符号によって以下の 3 つに分類される。

- **relevant** な変数/相互作用:  $y_i > 0, \Delta_i < d$
- **irrelevant** な変数/相互作用:  $y_i < 0, \Delta_i > d$
- **marginal** な変数/相互作用:  $y_i = 0, \Delta_i = d$

relevant な変数はくりこみ変換を繰り返すことで大きくなっていき、理論はこの方向について固定点から離れていく。irrelevant な変数はくりこみ変換を繰り返すことで小さくなっていき、理論はこの方向について固定点に近づいていく。marginal な変数は線形近似の範囲では一定となるが、高次の項を考えると大きくなる場合も小さくなる場合もある。

relevant な変数を持たない固定点を**安定固定点**と呼ぶ。また relevant な変数を 1 つでも持つ固定点を**不安定固定点**と呼ぶ。

ある点から出発してくりこみ変換を無限に繰り返していくと、やがて固定点に流れ着くと考えられる。特定の変数が発散してしまうこともありえるが、その場合無限遠に固定点が存在すると考える。<sup>\*16</sup> すると、最終的にどの固定点に行き着くかによって理論空間をいくつかの領域に分割することができる。<sup>\*17</sup>

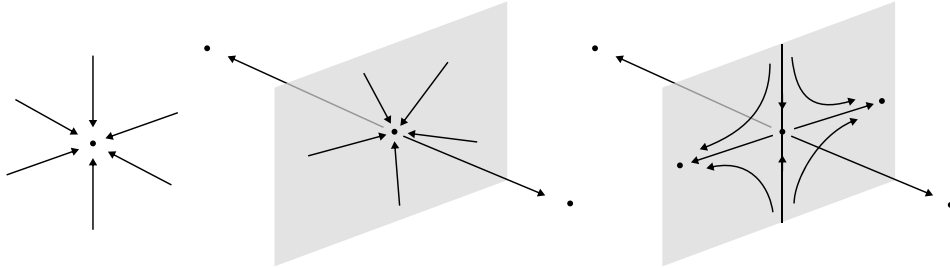


図 8: relevant な変数を 0 個、1 個、2 個もつ固定点

もっともありふれたものは余次元 0 の多様体である。この中心にある固定点はまわりの全ての点を引き寄せ、relevant な変数をもたない安定固定点である。

次にこの領域の境界を考える。これは余次元 1 の多様体であり臨界面と呼ばれる。臨界面上のフローは臨界面から出ることはない。(少しでも臨界面からはみ出すと、固定点に吸い込まれてしまう。) したがって臨界面にも固定点が現れ、それは relevant な変数を 1 つもつ。

さらに、臨界面上のフローが 2 つの固定点に流れていくとしよう。この間にはどちらの固定点に

<sup>\*15</sup> この仮定の妥当性について私はよく知らない。

<sup>\*16</sup> 無限遠の固定点のまわりではくりこみ変換の線形化はできない。その場合は最も強く発散する項が不変になるように場をリスケールする。この代償として、運動項がくりこみ変換で変化ようになる。運動項を含め、もともと有限だった結合定数は全て 0 になる。

<sup>\*17</sup> 周期的な軌道に収束したり (リミットサイクル)、カオス的な挙動を示したりする可能性は考慮していない。

も流れない余次元 2 の臨界面が存在する。この上にも固定点が現れ、それは relevant な変数を 2 つもつ。このように、臨界面とその上の固定点を次々に考えることができる。

ここで、1 個のパラメーターをもった統計力学系を考えてみる。これは理論空間の中で 1 次元の多様体をなす。これが余次元 1 の臨界面と交点を持ったとしよう。この交点は転移点となり得る。なぜならば、この点の前後で系を粗視化したときの振る舞いが不連続に変化するからである。同様に、2 個のパラメーターを調節することで起こる転移点は、余次元 2 の臨界面との交点に対応する。

転移点からのフローは固定点に収束する。さらに、転移点の近傍も固定点の近傍に流れていく。微視的なモデルを多少改変したとしても、臨界面との交点は同じ固定点に流れていく。このことは臨界現象が普遍性をもつことを意味する。同じ固定点に流れ着く転移点は同じ**普遍類 (universality class)** に属するという。代表的な例では、気液相転移の臨界点と 3 次元 Ising モデルはどちらも  $\mathbb{Z}_2$  対称性<sup>\*18</sup> をもつ Ising 普遍類に属することが知られている。

## 2.5 共形場理論

くりこみ群の固定点は、くりこみ変換に対する不変性という意味でのスケール不変性をもつ。しかし、ほとんどの物理的な固定点では、スケール不変性よりも強い共形不変性があることが知られている。<sup>\*19</sup> ざっくり言うと、場所ごとに倍率が異なってもいいスケール変換が共形変換であり、それについての不変性が共形不変性である。これについては次章で詳しく議論する。共形不変性をもつ場の理論を**共形場理論 (conformal field theory, CFT)** と呼ぶ。臨界点にある統計力学系を無限に粗視化すると、臨界面上の固定点として共形場理論が得られる。

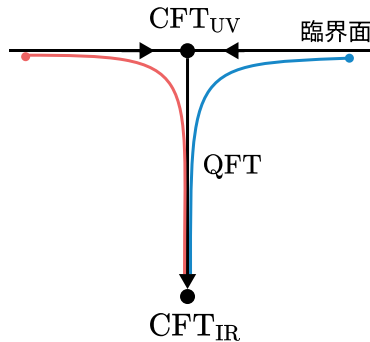


図 9: 臨界面の近傍が粗視化によって普遍的な場の理論に漸近していく様子。

臨界点から微小にずれた系でははじめは臨界面上の固定点に近づくが、段々と relevant な変数の寄与が無視できなくなり、安定固定点に流される。このときのフローは不安定固定点から出発して relevant な方向へ流れ、安定固定点に流れ着くようなフローに漸近していく。このフローは巨視

<sup>\*18</sup> 恒等変換と符号の反転  $\phi \rightarrow -\phi$  からなる群のこと。

<sup>\*19</sup> 厳密な結果では 2 次元三角格子上の臨界パーコレーションの共形不変性が Smirnov によって証明されている。詳しい話は田崎さんの解説記事 (<https://www.gakushuin.ac.jp/~881791/pdf/suuriPercolation.pdf>) にある。Smirnov はさらに 2 次元臨界 Ising モデルの共形不変性を証明して Fields 賞を受賞している。



的には格子模型と同じ物理を記述するが、いくら拡大して(=フローを遡って)も固定点から逸れていくことはなく、モデルの微細な構造は見えてこない。これはまさに我々が場の理論に求める性質である。したがって、(連続極限がとれる)場の理論は紫外の CFT から赤外の CFT へのくりこみ群のフローであると言える。

ここまでの議論をまとめると、共形場理論のモチベーションとして以下の 2 つがある。<sup>\*20</sup>

- 共形場理論は臨界点にある系を無限に粗視化し、本質を取り出したモデルである。
- 共形場理論に relevant な摂動を加えてくりこみ変換で下流に流してやることで、一般の場の理論が得られる。

---

<sup>\*20</sup> あくまで初学者の私がこれらをモチベーションに勉強したというだけである。



### 3 共形不変性

この章では共形変換を具体的に定義して、共形変換に対して良い変換性を示すプライマリー場を導入する。以降の議論では常に平坦な時空の計量は Euclid 計量  $\delta_{\mu\nu}$  とするが、これを全て Minkowski 計量  $\eta_{\mu\nu}$  に置き換えてもほとんど同じ議論が可能である。

#### 3.1 Euclid 群

共形変換群を定義する前に、その部分群である Euclid 群について見ておく。これは並進と回転から構成される群である。

$d$  次元空間における線素は計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  を用いて、

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (3.1)$$

と表せる。座標変換  $x \rightarrow x'$  に対し、 $ds'^2 = ds^2$  を課すことで、計量の変換  $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x')$  が得られる。微小変換  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu(x)$  に対し、この変換は

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) = g_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu \varepsilon_\nu(x) + \partial_\nu \varepsilon_\mu(x) \quad (3.2)$$

で与えられる。

以降は Euclid 空間を考え、 $g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu}$  と固定する。計量を不変に保つような座標変換は群をなし、(特殊)Euclid 群と呼ばれる。微小変換が Euclid 群に属する条件は、(3.2) から Killing 方程式

$$\delta g_{\mu\nu} = \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = 0 \quad (3.3)$$

を満たすことである。この方程式を解いてみよう。(3.3) に  $\partial_\rho$  を作用させると、

$$\partial_\mu \partial_\rho \varepsilon_\nu + \partial_\nu \partial_\rho \varepsilon_\mu = -2\partial_\mu \partial_\nu \varepsilon_\rho = 0 \quad (3.4)$$

となる。ただし 1 つ目の等号で (3.3) を利用した。このことから  $\varepsilon_\mu$  は高々  $x$  の一次式である。すなわち、

$$\varepsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu \quad (3.5)$$

と表せる。これを (3.3) に代入することで、 $b_{\mu\nu}$  が反対称であることがわかる。ここで、 $x^\mu - \varepsilon^\mu(x) = (1 - \varepsilon^\nu(x) \partial_\nu) x^\mu$  と書くことで、 $\varepsilon^\nu(x) \partial_\nu$  を座標変換の生成子とみなせる。並進と回転を生成する微分演算子は

$$p_\mu := \partial_\mu, \quad (3.6)$$

$$m_{\mu\nu} := -x_\mu \partial_\nu + x_\nu \partial_\mu \quad (3.7)$$

と定義される。これらの間の交換関係を計算すると、

$$[p_\mu, p_\nu] = 0, \quad (3.8)$$

$$[p_\mu, m_{\nu\rho}] = -\delta_{\mu\nu}p_\rho + \delta_{\mu\rho}p_\nu, \quad (3.9)$$

$$[m_{\mu\nu}, m_{\rho\sigma}] = -\delta_{\nu\rho}m_{\mu\sigma} + \delta_{\mu\rho}m_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\sigma}m_{\mu\rho} - \delta_{\mu\sigma}m_{\nu\rho} \quad (3.10)$$

となる。単純計算なので過程は載せないが、(3.9),(3.10)において基本的な関係式は

$$[p_1, m_{23}] = [m_{12}, m_{34}] = 0, \quad (3.11)$$

$$[p_1, m_{12}] = -p_2, \quad (3.12)$$

$$[m_{12}, m_{23}] = -m_{13} \quad (3.13)$$

であり、これを  $m_{\mu\nu}$  の添字の反対称性に注意して拡張すれば (3.9),(3.10) が得られる。Euclid 群の一般の元は有限のパラメーター  $a^\mu, b^{\mu\nu}$  と指数関数を用いて

$$\exp\left(-a^\mu p_\mu - \frac{1}{2}b^{\mu\nu}m_{\mu\nu}\right) \quad (3.14)$$

と表される。

### 3.2 共形変換群

ここで条件を緩めて、計量が

$$g'_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu} \quad (3.15)$$

と変換する座標変換  $x \rightarrow x'$  を考える。これを共形変換とよぶ。ここで、

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \Omega(x) R_\nu{}^\mu(x), \quad R_\nu{}^\mu \in \text{SO}(d) \quad (3.16)$$

と表すことができる。したがって共形変換は局所的な角度を保つ変換である。

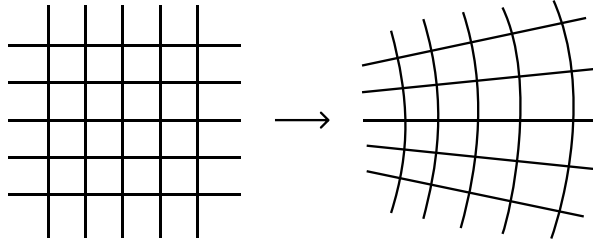


図 10: 共形変換

微小な共形変換  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$  に対し、

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \lambda(x) g_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

と書ける。ただし  $\lambda(x)$  は任意の関数である。両辺のトレースをとると、

$$\lambda(x) = \frac{2}{d} \partial_\mu \varepsilon^\mu \quad (3.18)$$

となる。これを元の式に代入して以下の共形 Killing 方程式を得る。

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d} \delta_{\mu\nu} \partial_\rho \varepsilon^\rho \quad (3.19)$$

以下でこれを解こう。過程が気にならない方は (3.28) に飛んでしまって構わない。(3.17) の両辺を  $\partial_\rho$  で微分し、(3.17) を用いると、

$$\begin{aligned} \partial_\rho \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\rho \partial_\nu \varepsilon_\mu \\ = -2\partial_\mu \partial_\nu \varepsilon_\rho + \partial_\mu \lambda(x) \delta_{\nu\rho} + \partial_\nu \lambda(x) \delta_{\mu\rho} = \partial_\rho \lambda(x) \delta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.20)$$

となる。さらに  $\mu, \nu$  を縮約して、

$$-2\partial_\mu \partial^\mu \varepsilon_\rho = (d-2)\partial_\rho \lambda(x) \quad (3.21)$$

を得る。この式を、(3.20) の両辺を  $\partial^\rho$  で微分した式に代入すると、

$$\partial^\rho \partial_\rho \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial^\rho \partial_\rho \partial_\nu \varepsilon_\mu = (2-d)\partial_\mu \partial_\nu \lambda(x) = \partial^\rho \partial_\rho \lambda(x) \delta_{\mu\nu}. \quad (3.22)$$

また  $\mu, \nu$  を縮約して、

$$(1-d)\partial_\mu \partial^\mu \lambda(x) = 0. \quad (3.23)$$

$d > 2$  の場合、<sup>\*21</sup> (3.22)、(3.23) から  $\partial_\mu \partial_\nu \lambda(x) = 0$  を得る。したがって  $\lambda(x)$  は高々 1 次である。また (3.18) から  $\varepsilon_\mu(x)$  は高々 2 次であり、

$$\varepsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho \quad (3.24)$$

とおける。ここで  $c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$  とする。これを (3.19) に代入すると、1 次の項に関して、

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d} b^\rho{}_\rho \delta_{\mu\nu} \quad (3.25)$$

が得られる。ここから、 $b_{\mu\nu}$  の対称成分が、 $\delta_{\mu\nu}$  に比例することが分かる。したがって、 $b_{\mu\nu}$  の対称成分が生成する変換は  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = (1-\lambda)x^\mu$  と書ける。これはスケール変換になっている。

また (3.17) から、2 次の項に関して、

$$2c_{\nu\rho\mu} + 2c_{\mu\rho\nu} = \frac{2}{d} \delta_{\mu\nu} c^\sigma{}_\sigma \quad (3.26)$$

---

<sup>\*21</sup>  $d = 2$  の場合、(3.22) の条件が緩むことで共形対称性は無限個の生成子を持つ。また  $d = 1$  の場合は (3.22), (3.23) のどちらも消える。これは 1 次元で角度が定義されないことに対応している。

となる。ここから

$$c_{\mu\nu\rho} = -c_\mu\delta_{\nu\rho} + c_\nu\delta_{\rho\mu} + c_\rho\delta_{\mu\nu}, \quad c_\mu = \frac{1}{d}c^\sigma{}_\sigma{}_\mu \quad (3.27)$$

となる。 $c_{\mu\nu\rho}$  が生成する座標変換は、 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - 2(x^\nu c_\nu)x^\mu + c^\mu x^2$  であり、以上により (3.19) の解は

$$\varepsilon^\mu = a^\mu + b^{\mu\nu}x_\nu + \lambda x^\mu + c^\nu(2x_\nu x^\mu - x^2\delta_\nu^\mu) \quad (3.28)$$

と書ける。ただし  $a^\mu, b^{\mu\nu}, \lambda, c^\mu$  は微小なパラメーターであり、 $b^{\nu\mu} = -b^{\mu\nu}$  である。ここから共形変換を生成する微分演算子を

$$p_\mu := \partial_\mu, \quad (3.29)$$

$$m_{\mu\nu} := -x_\mu\partial_\nu + x_\nu\partial_\mu, \quad (3.30)$$

$$d := x \cdot \partial, \quad (3.31)$$

$$k_\mu := 2x_\mu(x \cdot \partial) - x^2\partial_\mu \quad (3.32)$$

と定義できる。 $p_\mu, m_{\mu\nu}$  は Euclid 群の生成子と同一であり、新たにスケール変換の生成子  $d$  と特殊共形変換の生成子  $k_\mu$  が追加されている。

$p_\mu, m_{\mu\nu}, d$  が生成する有限の共形変換はそれぞれ並進、回転、スケール変換であり、分かりやすい。 $k_\mu$  が生成する有限の変換は特殊共形変換であり、

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu - x^2 c^\mu}{1 - 2c \cdot x + c^2 x^2} \quad (3.33)$$

という形になる。この変換は反転変換、並進変換、反転変換の組み合わせで構成される。

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2} \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2} - c^\mu \rightarrow \frac{x^\mu/x^2 - c^\mu}{(x/x^2 - c)^2} = \frac{x^\mu - x^2 c^\mu}{1 - 2c \cdot x + c^2 x^2} \quad (3.34)$$

特殊共形変換がパラメーター  $c^\mu$  について加法性を満たすことは、反転変換を 2 回繰り返すと元に戻ることから、並進変換の加法性より明らかである。また  $c^\mu$  が微小だとして展開すると、

$$x'^\mu = x^\mu + 2(c \cdot x)x^\mu - x^2 c^\mu = (1 + c \cdot k)x^\mu \quad (3.35)$$

となるから、(3.33) は確かに  $k_\mu$  で生成される変換になっている。特殊共形変換が反転変換、並進変換、反転変換の合成で構成されることを微小変換に適用すると、生成子の間の関係

$$k_\mu = -I p_\mu I \quad (3.36)$$

が分かる。ただし  $I$  は反転を表す。

$p_\mu, m_{\mu\nu}, \mathcal{d}, \kappa_\mu$  の満たす交換関係を計算すると、以下のようになる。

$$[p_\mu, p_\nu] = [\mathcal{d}, m_{\mu\nu}] = [\kappa_\mu, \kappa_\nu] = 0, \quad (3.37)$$

$$[m_{\mu\nu}, m_{\rho\sigma}] = -\delta_{\nu\rho} m_{\mu\sigma} + \delta_{\mu\rho} m_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\sigma} m_{\mu\rho} - \delta_{\mu\sigma} m_{\nu\rho}, \quad (3.38)$$

$$[\mathcal{d}, p_\mu] = -p_\mu, \quad (3.39)$$

$$[p_\mu, m_{\nu\rho}] = -\delta_{\mu\nu} p_\rho + \delta_{\mu\rho} p_\nu, \quad (3.40)$$

$$[\mathcal{d}, \kappa_\mu] = \kappa_\mu, \quad (3.41)$$

$$[\kappa_\mu, m_{\nu\rho}] = -\delta_{\mu\nu} \kappa_\rho + \delta_{\mu\rho} \kappa_\nu, \quad (3.42)$$

$$[\kappa_\mu, p_\nu] = 2m_{\mu\nu} - 2\delta_{\mu\nu} \mathcal{d} \quad (3.43)$$

このように定義される Lie 代数を ( $d$  次元) 共形代数と呼ぶ。 $d = 2$  の場合、共形変換の生成子は無限次元に拡大するが、 $p_\mu, m_{\mu\nu}, \mathcal{d}, \kappa_\mu$  はその中で部分代数 (大域的共形代数) をなす。

詳細な計算過程は省くが、いくつか補足をしておく。まず  $[\mathcal{d}, m_{\mu\nu}] = 0$  はスケール変換と回転が可換であることを意味しており、直観的には明らかである。 $\kappa_\mu$  についての交換関係は

$$\kappa_\mu = -Ip_\mu I, \quad m_{\mu\nu} = Im_{\mu\nu}I, \quad \mathcal{d} = -IdI \quad (3.44)$$

を用いると  $p_\mu$  についての交換関係に帰着できる。例えば、

$$[\kappa_\mu, \kappa_\nu] = [Ip_\mu I, Ip_\nu I] = I[p_\mu, p_\nu]I = 0 \quad (3.45)$$

である。 $[\kappa_\mu, p_\nu]$  についてはこのトリックが使えないので真面目な計算を載せておく。

$$\begin{aligned} [\kappa_\mu, p_\nu] &= [2x_\mu(x \cdot \partial) - x^2 \partial_\mu, \partial_\nu] \\ &= -2\delta_{\mu\nu}(x \cdot \partial) - 2x_\mu \partial_\nu + 2x_\nu \partial_\mu \\ &= 2m_{\mu\nu} - 2\delta_{\mu\nu} \mathcal{d} \end{aligned} \quad (3.46)$$

### 3.3 積の順序についての注意

微分演算子の積の順序について注意をしておく。例として

$$e^{-b \cdot m} x^\mu =: R^\mu{}_\nu(b) x^\nu, \quad \left( b \cdot m = \frac{1}{2} b^{\mu\nu} m_{\mu\nu} \right) \quad (3.47)$$

とくと、

$$\begin{aligned} e^{-b' \cdot m} e^{-b \cdot m} x^\mu &= R^\mu{}_\nu(b) e^{-b' \cdot m} x^\nu \\ &= R^\mu{}_\nu(b) R^\nu{}_\rho(b') x^\rho \end{aligned} \quad (3.48)$$

となる。すなわち、微分演算子の順序と座標変換の順序は逆である。このことは回転変換以外についても成り立つ。一般の微分演算子  $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$  について、座標変換の合成

$$x'' = e^{\mathcal{Q}'(x')} x' = e^{\mathcal{Q}'(x')} e^{\mathcal{Q}(x)} x \quad (3.49)$$

を考える。ここで  $Q, Q'$  が一般に座標  $x$  に依存することに注意する。 $Q'$  の引数を  $x$  に直すと、

$$Q'(x') = e^{Q(x)} Q'(x) e^{-Q(x)} \quad (3.50)$$

となるので

$$x'' = e^{Q(x)} e^{Q'(x)} e^{-Q(x)} x' = e^{Q(x)} e^{Q'(x)} x \quad (3.51)$$

となる。したがって座標変換の合成を微分演算子で表現する場合は積を逆順にしなければならない。

これはややこしいので、座標変換の合成と同じ順序に従う共形変換の生成子  $P_\mu, M_{\mu\nu}, D, K_\mu$  を定義する。これらの生成子の積は微分演算子の逆順の積に対応とする。例えば、

$$P_\mu K_\nu \leftrightarrow \hbar p_\nu p_\mu \quad (3.52)$$

とする。したがって符号を反転した以下の交換関係が成り立つ。

$$[P_\mu, P_\nu] = [D, M_{\mu\nu}] = [K_\mu, K_\nu] = 0, \quad (3.53)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \delta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} + \delta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho}, \quad (3.54)$$

$$[D, P_\mu] = P_\mu, \quad (3.55)$$

$$[P_\mu, M_{\nu\rho}] = \delta_{\mu\nu} P_\rho - \delta_{\mu\rho} P_\nu, \quad (3.56)$$

$$[D, K_\mu] = -K_\mu, \quad (3.57)$$

$$[K_\mu, M_{\nu\rho}] = \delta_{\mu\nu} K_\rho - \delta_{\mu\rho} K_\nu, \quad (3.58)$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2\delta_{\mu\nu} D - 2M_{\mu\nu} \quad (3.59)$$

以降の議論でも共形変換の生成子は頻繁に用いるが、筆記体は微分演算子を意味し、イタリックの生成子とは積の順序が逆なので、注意してほしい。

### 3.4 プライマリー場

座標変換  $x \rightarrow x'$  によって計量が

$$g'_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu} \quad (3.60)$$

となったとき、場  $\mathcal{O}(x)$  の変換性が

$$\mathcal{O}'(x') = \Omega(x)^\Delta \mathcal{O}(x) \quad (3.61)$$

で与えられるならば、 $\mathcal{O}(x)$  を共形次元  $\Delta$  のプライマリー場と呼ぶ。空間の添字をもつ場の場合、

$$\mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_l}(x) dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_l} \quad (3.62)$$

を共形次元  $\Delta$  のプライマリー場とみなせる。すなわち場の変換性は

$$\begin{aligned} \mathcal{O}'_{\mu_1 \dots \mu_l}(x') &= \Omega(x)^{\Delta-l} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\mu_l}} \mathcal{O}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x) \\ &= \Omega(x)^\Delta R_{\mu_1}^{\nu_1}(x) \dots R_{\mu_l}^{\nu_l}(x) \mathcal{O}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x) \end{aligned} \quad (3.63)$$

で与えられる。

微小な共形変換  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu$  に対するプライマリ場の変換性を求めよう。ただし

$$\varepsilon^\mu = a^\mu + b^{\mu\nu}x_\nu + \lambda x^\mu + 2(c \cdot x)x^\mu - c^\mu x^2 \quad (3.64)$$

であり、 $b_{\mu\nu}$  は反対称とする。過程が気にならない方は (3.71) に飛んでしまっても構わない。(3.19) から

$$\Omega(x)^2 \delta_{\mu\nu} = \left(1 + \frac{2}{d} \partial \cdot \varepsilon\right) \delta_{\mu\nu} = (1 + 2(\lambda + 2c \cdot x)) \delta_{\mu\nu} \quad (3.65)$$

となるので、

$$\Omega(x)^\Delta = 1 + \lambda \Delta + 2(c \cdot x) \Delta \quad (3.66)$$

が分かる。また

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'^\mu} &= \delta_{\mu\nu} + \partial_\mu \varepsilon_\nu \\ &= (1 + \lambda + 2c \cdot x) \delta_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} + 2(c_\mu x_\nu - c_\nu x_\mu) \\ &= \Omega(x) R^\nu_\mu(x) \end{aligned} \quad (3.67)$$

より

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}(x) &= \delta_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} + 2(c_\mu x_\nu - c_\nu x_\mu) \\ &= \delta_{\mu\nu} + (b_{\rho\sigma} - 2c_\sigma x_\rho)(\delta^\rho_\nu \delta^\sigma_\mu - \delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu) \end{aligned} \quad (3.68)$$

となるので、

$$R_{\mu_1\nu_1}(x) \cdots R_{\mu_l\nu_l}(x) = \delta_{\mu_1\nu_1} \cdots \delta_{\mu_l\nu_l} + (b_{\rho\sigma} - 2c_\sigma x_\rho) \sum_i (\delta^\rho_{\nu_i} \delta^\sigma_{\mu_i} - \delta^\rho_{\mu_i} \delta^\sigma_{\nu_i}) \prod_{j \neq i} \delta_{\mu_j\nu_j} \quad (3.69)$$

と書ける。また

$$\begin{aligned} \mathcal{O}'_{\mu_1 \dots \mu_l}(x) - \mathcal{O}'_{\mu_1 \dots \mu_l}(x') \\ = \varepsilon \cdot \partial \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_l}(x) = \left( a^\mu \mathcal{P}_\mu + \frac{1}{2} b^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu} + \lambda \mathcal{D} + c^\mu \mathcal{K}_\mu \right) \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_l}(x) \end{aligned} \quad (3.70)$$

である。以上の式を (3.63) に代入することにより、

$$\mathcal{O}'_{\mu_1 \dots \mu_l}(x) = \left( a^\mu \mathcal{P}_\mu + \frac{1}{2} b^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu} + \lambda \mathcal{D} + c^\mu \mathcal{K}_\mu \right) \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_l}(x) \quad (3.71)$$

と書ける。ここで、

$$\mathcal{P}_\mu := \partial_\mu \quad (3.72)$$

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} := -x_\mu \partial_\nu + x_\nu \partial_\mu + \mathcal{S}_{\mu\nu} \quad (3.73)$$

$$\mathcal{D} := x \cdot \partial + \Delta \quad (3.74)$$

$$\mathcal{K}_\mu := 2x_\mu(x \cdot \partial) - x^2 \partial_\mu + 2x_\mu \Delta - 2x^\nu \mathcal{S}_{\mu\nu} \quad (3.75)$$

と定義した。また

$$(\mathcal{S}_{\mu\nu})_{\mu_1\cdots\mu_l\nu_1\cdots\nu_l}\mathcal{O}^{\nu_1\cdots\nu_l} := \sum_{j=1}^l (\delta_{\nu_j}^{\mu} \delta_{\mu_j}^{\nu} - \delta_{\mu_j}^{\mu} \delta_{\nu_j}^{\nu}) \mathcal{O}_{\mu_1\cdots\nu_j\cdots\mu_l} \quad (3.76)$$

である。共形変換の生成子  $P_\mu, M_{\mu\nu}, D, K_\mu$  はプライマリー場に対し、

$$P_\mu \mathcal{O}(x) = \mathcal{P}_\mu \mathcal{O}(x), \quad (3.77)$$

$$M_{\mu\nu} \mathcal{O}(x) = \mathcal{M}_{\mu\nu} \mathcal{O}(x) \quad (3.78)$$

$$D \mathcal{O}(x) = \mathcal{D} \mathcal{O}(x), \quad (3.79)$$

$$K_\mu \mathcal{O}(x) = \mathcal{K}_\mu \mathcal{O}(x) \quad (3.80)$$

を満たす。(3.73), (3.74), (3.75) において  $x = 0$  とおくと、

$$M_{\mu\nu} \mathcal{O}(0) = \mathcal{S}_{\mu\nu} \mathcal{O}(0), \quad (3.81)$$

$$D \mathcal{O}(0) = \Delta \mathcal{O}(0), \quad (3.82)$$

$$K_\mu \mathcal{O}(0) = 0 \quad (3.83)$$

が得られる。特に (3.83) はプライマリー場の定義とすることもできる。

この定義が元の定義を再現することを以下で示す。 $P_\mu = \partial_\mu$  は常に成り立つので、<sup>\*22</sup>  $P_\mu \mathcal{O}(x) = \partial_\mu \mathcal{O}(x)$  であり、

$$\mathcal{O}(x) = e^{x \cdot P} \mathcal{O}(0) \quad (3.84)$$

と書ける。Baker-Campbell-Hausdorff の公式

$$e^A B e^{-A} = e^{[A, \cdot]} B = B + [A, B] + \frac{1}{2} [A, [A, B]] + \cdots \quad (3.85)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} \mathcal{O}(x) &= M_{\mu\nu} e^{x \cdot P} \mathcal{O}(0) \\ &= e^{x \cdot P} (e^{-x \cdot P} M_{\mu\nu} e^{x \cdot P}) \mathcal{O}(0) \\ &= e^{x \cdot P} (M_{\mu\nu} - x_\mu P_\nu + x_\nu P_\mu) \mathcal{O}(0) \\ &= (\mathcal{S}_{\mu\nu} - x_\mu \partial_\nu + x_\nu \partial_\mu) \mathcal{O}(x) \end{aligned} \quad (3.86)$$

となるので、(3.73) が得られる。同様に

$$e^{-x \cdot P} D e^{x \cdot P} = D + x \cdot P \quad (3.87)$$

$$e^{-x \cdot P} K_\mu e^{x \cdot P} = K_\mu + 2x_\mu D - 2x^\nu M_{\mu\nu} + 2x_\mu (x \cdot P) - x^2 P_\mu \quad (3.88)$$

を用い、(3.83) を課すことで (3.74), (3.75) が得られる。微小変換に対する変換性から有限変換に対する変換性を構成できるので、(3.83) は (3.61) と等価である。

---

<sup>\*22</sup> 並進によって内部空間の変換が引き起こされるような変な場は基本的に考えない。



### 3.5 ディセシダント場

プライマリー場  $\mathcal{O}(x)$  を微分して得られる場  $P_\mu \mathcal{O}(x), P_\mu P_\nu \mathcal{O}(x), \dots$  をディセシダント場と呼ぶ。

$$\begin{aligned} K_\mu P_\nu \mathcal{O}(0) &= [K_\mu, P_\nu] \mathcal{O}(0) + P_\nu K_\mu \mathcal{O}(0) \\ &= (2\Delta \delta_{\mu\nu} - 2\mathcal{S}_{\mu\nu}) \mathcal{O}(0) \end{aligned} \quad (3.89)$$

が消えないことから、一般に  $P_\mu \mathcal{O}(x)$  はプライマリー場ではない。さらに、

$$\begin{aligned} DP_\mu \mathcal{O}(x) &= (P_\mu D + [D, P_\mu]) \mathcal{O}(x) \\ &= P_\mu (D + 1) \mathcal{O}(x) \\ &= (x \cdot \partial + \Delta + 1) (P_\mu \mathcal{O}(x)) \end{aligned} \quad (3.90)$$

から、 $P_\mu \mathcal{O}(x)$  は共形次元が 1 上がっていることが分かる。 $P_\mu$  を  $n$  回掛けたディセシダント場の共形次元は  $\Delta + n$  となり、これをレベル  $n$  のディセシダント場という。同様に、

$$\begin{aligned} DK_\mu \mathcal{O}(x) &= (K_\mu D + [D, K_\mu]) \mathcal{O}(x) \\ &= K_\mu (D - 1) \mathcal{O}(x) \\ &= (x \cdot \partial + \Delta - 1) (K_\mu \mathcal{O}(x)) \end{aligned} \quad (3.91)$$

から  $K_\mu$  は共形次元を 1 下げることが分かる。しかし後で議論するように、ユニタリな場の理論では共形次元に下限が存在するので、 $K_\mu$  を作用させていくと必ず  $K_\mu \mathcal{O}(0) = 0$  となる場が現れる。これはプライマリー場に他ならない。つまりプライマリー場は最低ウェイト状態であり、一般の場はプライマリー場に  $P_\mu$  を作用させて構成できる。プライマリー場  $\mathcal{O}(x)$  と、その微分で得られるディセシダント場をまとめて共形族 (conformal family) と呼ぶ。

### 3.6 共形 Casimir 演算子

$d$  次元共形代数は  $d + 2$  次元 Lorentz 代数  $\mathfrak{so}(1, d + 1)$  に同型であることが知られている。<sup>\*23</sup> 実際、

$$L_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}, \quad L_{-1\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \quad L_{-10} = D, \quad L_{0\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu) \quad (3.92)$$

によって  $L_{ab}$  ( $a, b = -1, 0, \dots, d$ ) を定義し、 $L_{ba} = -L_{ab}$  を課すと、共形代数の交換関係は

$$[L_{ab}, L_{cd}] = -\eta_{bc} L_{ad} + \eta_{ac} L_{bd} + \eta_{bd} L_{ac} - \eta_{bc} L_{ab} \quad (3.93)$$

という形にまとめられる。ここで  $\eta$  は符号  $(-, +, \dots, +)$  をもつ Minkowski 計量である。これは  $d + 2$  次元 Lorentz 代数  $\mathfrak{so}(1, d + 1)$  に同型である。ここから共形 Casimir 演算子

$$L^2 = \frac{1}{2} L_{ab} L^{ab} = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} - D^2 + \frac{1}{2} (P_\mu K^\mu + K^\mu P_\mu) \quad (3.94)$$

<sup>\*23</sup>  $d$  次元 Minkowski 時空における共形代数は  $\mathfrak{so}(2, d)$  と同型である。

は共形代数の全ての演算子と交換する。ここで、

$$L^2 = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} - D(D-d) + P_\mu K^\mu \quad (3.95)$$

と変形できる。これをプライマリー場に作用させると、

$$L^2 \mathcal{O}(0) = \left( \frac{1}{2} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - \Delta(\Delta-d) \right) \mathcal{O}(0) \quad (3.96)$$

となる。 $\mathcal{O}(0)$  をスピン  $l$  のテンソル<sup>\*24</sup> とすれば、 $\frac{1}{2} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \mathcal{O}(0) = -l(l+d-2) \mathcal{O}(0)$  となることが知られている<sup>\*25</sup> ので、

$$L^2 \mathcal{O}(0) = -\lambda_{\Delta,l} \mathcal{O}(0), \quad \lambda_{\Delta,l} = l(l+d-2) + \Delta(\Delta-d) \quad (3.100)$$

となる。さらに、共形 Casimir 演算子が  $P_\mu$  と交換することから、任意のディセダント場はプライマリー場と同じ固有値を持つ。

---

<sup>\*24</sup>  $l$  階の対称トレースレステンソルのこと。この記事ではそのようなテンソルのみを扱う。

<sup>\*25</sup> これを確かめる簡便な方法は Laplacian の極座標表示

$$\partial^2 = \frac{1}{r^2} \left[ \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + dr \frac{\partial}{\partial r} + m^2 \right] \quad (3.97)$$

を用いる方法である。

$$\partial^2 \frac{1}{|y-x|^{d-2}} = 0 \quad (3.98)$$

に注目し、 $1/|y-x|^{d-2}$  を  $|x|/|y| =: r/|y|$  のべきによって展開する。 $r^l$  に比例する項は  $C_l(\mathbf{n})r^l$  と書け、これに対し

$$-r^{l-2} m^2 C_l(\mathbf{n}) = C_l(\mathbf{n}) \partial^2 r^l = l(l+d-2) C_l(\mathbf{n}) r^{l-2} \quad (3.99)$$

が成り立つ。ちなみに  $C_l(\mathbf{n})$  は Gegenbauer 多項式と呼ばれる特殊関数になる。 $r^l$  の係数はスピン  $l$  の表現に対応しており、この表現に対する Casimir 演算子の固有値は  $-l(l+d-2)$  である。

## 4 Noether の定理

### 4.1 Euler-Lagrange 方程式

作用が局所的な Lagrangian  $\mathcal{L}$  によって

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (4.1)$$

と書かれるとする。場を  $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x)$  と微小変化させたとき、作用の変化は

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^d x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \delta\phi \right) \\ &= \int d^d x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta\phi + \int d^d x \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。第 2 項は表面項であり、境界で  $\delta\phi = 0$  とおけば無視できる。このような任意の場  $\delta\phi$  に対して  $\delta S = 0$  となるとき、

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0 \quad (4.3)$$

が成り立つ。この式を **Euler-Lagrange 方程式**、または単に運動方程式と呼ぶ。変分原理によって、古典場  $\phi(x)$  は運動方程式を満たす。

### 4.2 Noether の定理

座標変換  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu(x)$  を考える。スカラー場  $\phi(x)$  の変換性を、

$$\phi'(x') - \phi(x) = 0 \quad (4.4)$$

によって定義すると、 $\partial_\mu \phi(x)$  の変換性は、

$$\partial'_\mu \phi'(x') - \partial_\mu \phi(x) = \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} - \delta_\mu^\nu \right) \partial_\nu \phi(x) = \partial_\mu \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi \quad (4.5)$$

と計算される。また変換による積分測度の変化は

$$d^d x' = \det \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right) d^d x = (1 - \partial_\mu \varepsilon^\mu) d^d x \quad (4.6)$$

となる。したがって作用の変化は以下のように与えられる。

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^d x' \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) - \int_{\Omega} d^d x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (4.7)$$

$$= \int_{\Omega} d^d x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \phi - \delta_\mu^\mu \mathcal{L} \right) \partial_\mu \varepsilon^\mu \quad (4.8)$$

第 1 項は  $\partial_\mu \phi(x)$  による寄与で第 2 項は Jacobian による寄与である。したがって、

$$\delta S = \int d^d x T^\mu{}_\nu \partial_\mu \varepsilon^\nu, \quad T^\mu{}_\nu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad (4.9)$$

と書ける。 $T^\mu{}_\nu$  を (正準) エネルギー運動量テンソルと呼ぶ。 $\partial_\mu T^\mu{}_\nu$  を計算すると、

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^\mu{}_\nu &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\nu \partial_\mu \phi - \partial_\nu \mathcal{L} \\ &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial_\nu \phi \\ &= -\frac{\delta S}{\delta \phi} \partial_\nu \phi \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる。したがって部分積分から、

$$\delta S = \int d^d x \left[ \frac{\delta S}{\delta \phi} \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi + \partial_\mu (T^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu) \right] \quad (4.11)$$

と変形できる。特定の座標変換に対して  $\delta S = 0$  となる場合、 $\delta S / \delta \phi = 0$  のもとで

$$\partial_\mu (T^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu) = 0 \quad (\text{classical}) \quad (4.12)$$

が成り立つ。(classical) は運動方程式を課した上での等号であることを意味する。これを Noether の定理と呼び、 $T^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu$  を **Noether カレント** と呼ぶ。また積分形で書いて

$$Q(\partial B) = 0 \quad (\text{classical}), \quad Q(\Sigma) := - \int_\Sigma d^{d-1} S_\mu T^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu \quad (4.13)$$

となる。ここで  $\partial B$  は余次元 1 ( $d-1$  次元) の閉曲面である。 $Q(\Sigma)$  を  $\Sigma$  上の **Noether チャージ** と呼ぶ。同じ境界を持つ曲面  $\Sigma_1, \Sigma_2$  によって  $\partial B = \Sigma_1 - \Sigma_2$  と表せるとき、

$$Q(\Sigma_1) = Q(\Sigma_2) \quad (\text{classical}) \quad (4.14)$$

が成り立つ。この式は曲面の境界を保つ連続的な変形に対し、Noether チャージが不変であることを意味している。

### 4.3 共形変換に対する Noether の定理

以下で具体的に共形変換に対する Noether の定理を見ていく。以下の議論は全て無次元のスカラー場に対する議論であり、後で一般化する際にいくつかの修正がされることを注意しておく。

## 並進

一様な並進  $\varepsilon^\mu(x) = a^\mu$  を考える。作用の変化は

$$\delta S = \int d^d x T^\mu{}_\nu \partial_\mu a^\nu = 0 \quad (4.15)$$

となる。今の場合  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$  が  $x$  に陽に依存しないことを仮定しており、並進対称性は自動的に満たされている。

作用が座標変換  $x^\mu \rightarrow x^\mu - a^\mu$  に対して不変であるとき、Noether の定理から  $\delta S / \delta \phi = 0$  のもとで  $a^\nu \partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$  が成り立つ。 $a^\nu$  は任意であるから

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \quad (\text{classical}) \quad (4.16)$$

となる。並進に対応する Noether チャージは運動量  $P_\nu$  であり、

$$P_\nu(\partial B) := - \int_{\partial B} d^{d-1} x_\mu T^\mu{}_\nu(x) = 0 \quad (4.17)$$

が成り立つ。

## 回転

作用が回転対称性 (Lorentz 対称性) をもつとき、反対称テンソル  $b^{\mu\nu} = -b^{\nu\mu}$  に対して座標変換

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - b^{\nu\mu} x_\nu \quad (4.18)$$

は作用を不変に保つ。このとき、(4.9) から

$$\delta S = b^{\nu\rho} \int d^d x T^\mu{}_\nu \partial_\mu x_\rho = \frac{1}{2} b^{\nu\rho} \int d^d x (T_{\rho\nu} - T_{\nu\rho}) = 0 \quad (4.19)$$

が成り立つ。 $b^{\nu\rho}$  は反対称ならば任意であり、積分領域も任意にとることができるので、

$$T_{\rho\nu} - T_{\nu\rho} = 0 \quad (4.20)$$

が成り立つ。つまり作用の回転対称性は、エネルギー運動量テンソルが対称テンソルとなることを意味する。また、Noether カレントは  $b^{\nu\rho} x_\rho T^\mu{}_\nu$  となり、

$$\partial_\mu (x_\rho T^\mu{}_\nu - x_\nu T^\mu{}_\rho) = 0 \quad (\text{classical}) \quad (4.21)$$

が成り立つ。

## スケール変換

次に、スケール変換

$$x^\mu \rightarrow (1 - \lambda) x^\mu \quad (4.22)$$

に対して作用が不変であるとする。このとき、(4.9) から

$$\delta S = \lambda \int d^d x T^\mu{}_\nu \partial_\mu x^\nu = \lambda \int d^d x T^\mu{}_\mu = 0 \quad (4.23)$$

となる。積分領域は任意にとることができるから、

$$T^\mu{}_\mu = 0 \quad (4.24)$$

が成り立つ。つまり系のスケール対称性はエネルギー運動量テンソルがトレースレスになることを意味する。また Noether カレントは  $x^\nu T^\mu{}_\nu$  となる。Noether の定理から

$$\partial_\mu (x^\nu T^\mu{}_\nu) = 0 \quad (\text{classical}) \quad (4.25)$$

が成り立つ。

### 特殊共形変換

特殊共形変換  $x^\nu \rightarrow x^\nu - c_\rho (2x^\nu x^\rho - x^2 \delta^\nu{}_\rho)$  に対し、作用の変化は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \delta S &= c_\rho \int d^d x T^{\mu\nu} \partial_\mu (2x_\nu x^\rho - x^2 \delta^\rho_\nu) \\ &= 2c_\rho \int d^d x (x^\rho T^\mu{}_\mu + x_\nu T^{\rho\nu} - x_\mu T^{\mu\rho}) \\ &= 2c_\rho \int d^d x (x^\rho T^\mu{}_\mu + x_\mu (T^{\rho\mu} - T^{\mu\rho})) \end{aligned} \quad (4.26)$$

作用が回転対称かつスケール不変ならば、エネルギー運動量テンソルは対称かつトレースレスとなるので、特殊共形変換に対して作用は不変である。したがって共形不変性が成り立つ。つまり無次元のスカラー場では、(回転対称性を仮定した上で) スケール不変性は共形不変性に拡大する。

## 4.4 内部対称性の Noether カレント

内部空間の対称性についても見ておく。 $n$  成分の場  $\phi(x)$  に対する微小変換

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \varepsilon^a(x) G_a \phi(x) \quad (4.27)$$

を考える。ここで  $G_a$  は  $n \times n$  行列であり、内部対称性を表す Lie 代数の生成子である。例えば、2 成分複素場  $(\phi_1, \phi_2)$  の  $SU(2)$  対称性を考える場合、Pauli 行列  $\sigma_a$  を用いて

$$\phi'(x) = \phi(x) + \varepsilon^a(x) i \sigma_a \phi(x) \quad (a = 1, 2, 3) \quad (4.28)$$

とすればよい。作用の変化は、

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^d x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \varepsilon^a G_a \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu (\varepsilon^a G_a \phi) \right) \\ &= \int d^d x \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \varepsilon^a G_a \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \varepsilon^a G_a \phi \right) \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

によって与えられる。ここで、 $\varepsilon^a(x)$  が空間に依存しない定数であるとし、このとき任意の積分領域に対し  $\delta S = 0$  であると仮定する。これは系のグローバル対称性を意味する。すると、 $\varepsilon^a(x) = \varepsilon^a$  を積分の外に出すことができ、

$$\delta S = \varepsilon^a \int d^d x \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} G_a \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} G_a \phi \right) \right) = 0 \quad (4.30)$$

となる。積分領域は任意にとれるので、恒等式として、

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} G_a \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} G_a \phi \right) = 0 \quad (4.31)$$

が成り立つ。したがって、運動方程式  $\delta S / \delta \phi = 0$  のもとで連続の式

$$\partial_\mu j_a^\mu(x) = 0, \quad j_a^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} G_a \phi \quad (4.32)$$

が成り立つ。 $j_a^\mu(x)$  を Noether カレントと呼ぶ。恒等式 (4.31) を用いると、 $\varepsilon^a(x)$  が定数とは限らない場合は

$$\delta S = \int d^d x j_a^\mu(x) \partial_\mu \varepsilon^a(x) \quad (4.33)$$

と書ける。

## 4.5 一般の場合の Noether カレント

座標変換と内部空間の変換が同時に起こる場合を考える。 $n$  成分の場合  $\phi$  を考え、微小な座標変換

$$x'^\mu - x^\mu = \varepsilon^\mu(x) := \varepsilon^a(x) X_a x^\mu \quad (4.34)$$

とそれに伴う内部空間の微小変換

$$\phi'(x') - \phi(x) = G\phi(x) := \varepsilon^a(x) G_a(x)\phi(x), \quad (4.35)$$

を考える。ただし、 $X_a = X_a^\mu(x) \partial_\mu$  は微分演算子であり、 $G_a$  は  $n \times n$  行列である。 $\partial_\mu \phi(x)$  の変換性は

$$\partial'_\mu \phi'(x') - \partial_\mu \phi(x) = \partial_\mu \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi(x) + \partial_\mu (G\phi(x)) \quad (4.36)$$

となる。Jacobian の寄与も考慮すると、(4.9), (4.29) から作用の変化は、

$$\delta S = \int d^d x \left( T^\mu{}_\nu \partial_\mu \varepsilon^\nu + \frac{\delta S}{\delta \phi} G\phi + \partial_\mu j^\mu \right) \quad (4.37)$$

となる。ここで、 $T^\mu{}_\nu$  と  $j^\mu$  を以下のように定義した。

$$T^\mu{}_\nu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}, \quad j^\mu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} G\phi \quad (4.38)$$

(4.10) と同様に

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\nu \partial_\mu \varepsilon^\nu &= -\partial_\mu T^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu + \partial_\mu (T^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu) \\ &= \frac{\delta S}{\delta \phi} \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi + \partial_\mu (T^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu) \end{aligned} \quad (4.39)$$

と変形できるので、

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^d x \left[ \frac{\delta S}{\delta \phi} (\varepsilon^\nu \partial_\nu + G) \phi + \partial_\mu (T^\mu{}_\nu \varepsilon^\nu + j^\mu) \right] \\ &:= \int d^d x \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \delta \phi + \partial_\mu J^\mu \right) \\ &:= \int d^d x \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \varepsilon^a \delta \phi_a + \partial_\mu (\varepsilon^a J_a^\mu) \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

となる。ここでグローバルな変換  $\varepsilon^a(x) = \varepsilon^a$  に対し、 $\delta S = 0$  となると仮定すると、恒等式

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} \delta \phi_a + \partial_\mu J_a^\mu = 0 \quad (4.41)$$

が得られる。ここから  $\delta S / \delta \phi = 0$  のもとで連続の式  $\partial_\mu J_a^\mu = 0$  が成り立つ。また定数とは限らない一般の  $\varepsilon^a(x)$  に対し、作用の変化は

$$\delta S = \int d^d x J_a^\mu(x) \partial_\mu \varepsilon^a(x), \quad J_a^\mu(x) = T^\mu{}_\nu X_a^\nu + j_a^\mu \quad (4.42)$$

と書ける。

## 4.6 エネルギー運動量テンソルの改良 (対称化)

回転 (Lorentz) 変換  $\varepsilon^\mu = b^{\mu\nu} x_\nu$ ,  $b^{\nu\mu} = -b^{\mu\nu}$  に対し、

$$\phi'(x') = \phi(x) + \frac{1}{2} b^{\mu\nu} S_{\mu\nu} \phi(x) \quad (4.43)$$

と変換する  $n$  成分場  $\phi$  を考える。ただし、 $S_{\mu\nu}$  は  $\mu\nu$  の入れ替えについて反対称な  $n \times n$  行列である。

$$x^\rho{}_{\mu\nu} = x_\nu \delta_\mu^\rho - x_\mu \delta_\nu^\rho, \quad (4.44)$$

とおくと、 $\varepsilon^\rho = \frac{1}{2} b^{\mu\nu} x^\rho{}_{\mu\nu}$  と書けるから、以下のカレントが得られる。

$$\begin{aligned} J^\rho{}_{\mu\nu} &= T^\rho{}_\sigma x^\sigma{}_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \phi} S_{\mu\nu} \phi \\ &= x_\nu T^\rho{}_\mu - x_\mu T^\rho{}_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \phi} S_{\mu\nu} \phi \end{aligned} \quad (4.45)$$



第3項を  $s^\rho{}_{\mu\nu}$  とおくことにする。

$$s^\rho{}_{\mu\nu} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \phi} s_{\mu\nu} \phi. \quad (4.46)$$

これはいままで  $j_a^\mu$  と書いていたものと同じものである。

スピンを考慮すると、スカラー場のときと比べて (4.37) の第2項、第3項が加わっているためにエネルギー運動量テンソルは対称テンソルにはならない。そこで、エネルギー運動量テンソルを以下のように定義し直す。

$$T_{\mu\nu}^B = T_{\mu\nu} - \partial^\rho B_{\rho\mu\nu}, \quad B_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}(s_{\rho\mu\nu} + s_{\mu\nu\rho} - s_{\nu\rho\mu}) \quad (4.47)$$

これは Belinfante のエネルギー運動量テンソルと呼ばれる。また、改良された回転に対する Noether カレントを

$$J_{\rho\mu\nu}^B = x_\nu T_{\rho\mu}^B - x_\mu T_{\rho\nu}^B \quad (4.48)$$

と定義する。 $s_{\mu\nu\rho}$  の定義から  $s_{\mu\rho\nu} = -s_{\mu\nu\rho}$  が成り立つので、

$$\begin{aligned} B_{\mu\rho\nu} &= \frac{1}{2}(s_{\mu\rho\nu} + s_{\rho\nu\mu} - s_{\nu\mu\rho}) \\ &= \frac{1}{2}(-s_{\mu\nu\rho} - s_{\rho\mu\nu} + s_{\nu\rho\mu}) = -B_{\rho\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.49)$$

が分かる。したがって、

$$\partial^\mu T_{\mu\nu}^B = \partial^\mu T_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\rho B_{\rho\mu\nu} = \partial^\mu T_{\mu\nu} \quad (4.50)$$

となる。ここから  $\partial^\rho J_{\rho\mu\nu}^B$  を計算すると、

$$\begin{aligned} \partial^\rho J_{\rho\mu\nu}^B &= T_{\nu\mu}^B - T_{\mu\nu}^B + x_\nu \partial^\rho T_{\rho\nu}^B - x_\mu \partial^\rho T_{\rho\mu}^B \\ &= T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu} + \partial^\rho s_{\rho\mu\nu} + x_\nu \partial^\rho T_{\rho\nu} - x_\mu \partial^\rho T_{\rho\mu} \\ &= \partial^\rho J_{\rho\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.51)$$

となる。したがって  $J_{\rho\mu\nu}$  の代わりに  $J_{\rho\mu\nu}^B$  を用いても問題ない。 $T_{\mu\nu}^B$  が対称テンソルとなることは、

$$\begin{aligned} T_{\nu\mu}^B - T_{\mu\nu}^B &= T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu} + \partial^\rho s_{\rho\mu\nu} \\ &= \partial^\rho J_{\rho\mu\nu}^B - x_\nu \partial^\rho T_{\rho\nu} + x_\mu \partial^\rho T_{\rho\mu} \\ &= 0 \quad (\text{classical}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

から分かる。ただし最後の等式では運動方程式を課した。

例として、電磁場の Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.53)$$

を考える。ここで  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  である。Lagrangian は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho})\partial^\mu A^\rho \partial^\nu A^\sigma \quad (4.54)$$

とも書ける。第2項のために  $A^\mu$  を  $d$  個の独立したスカラーとはみなせず、 $A^\mu$  にベクトルとしての変換性を課さなければ、作用の回転対称性を満たすことができない。実際、エネルギー運動量テンソルを求めると、

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\rho}\partial_\nu A^\rho - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L} \quad (4.55)$$

であり、対称になっていない。そこで、エネルギー運動量テンソルを改良する。結果だけ書くと、

$$T_{\mu\nu}^B = T_{\mu\nu} - \partial^\rho(F_{\rho\mu}A_\nu) = -F_{\mu\rho}F^{\nu\rho} - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L} - A_\nu\partial^\rho F_{\rho\mu} \quad (4.56)$$

であり、運動方程式  $\partial^\rho F_{\rho\mu} = 0$  のもとで  $T_{\mu\nu}^B$  が対称テンソルになっていることが分かる。さらに、 $d = 4$  では運動方程式のもとでトレースレスになる。後で議論するが、これは共形不変性を意味する。

#### 4.7 エネルギー運動量テンソルの改良 (トレースレス化)

スケール変換  $\varepsilon^\mu = x^\mu$  に対し、

$$\phi'(x') = \phi(x) + \Delta\phi(x) \quad (\Delta \in \mathbb{R}) \quad (4.57)$$

と変換する場を考える。これは  $\phi$  が質量次元  $\Delta$  をもつことを意味する (長さの質量次元は  $-1$  である)。スケール変換に対する Noether カレントは

$$J^\mu = x^\nu T^\mu{}_\nu + V^\mu, \quad V^\mu = \Delta\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \quad (4.58)$$

と定義される。 $V^\mu$  は virial カレントと呼ばれる。 $\Delta \neq 0$  のとき、運動方程式のもとで

$$T^\mu{}_\mu = -\partial_\mu V^\mu \quad (\text{classical}) \quad (4.59)$$

となり、エネルギー運動量テンソルがトレースレスにならないことがわかる。

そこで、エネルギー運動量テンソルを改良してトレースレスにすることを考える。 $T_{\mu\nu}$  を以下のように改良しよう。ただし、これは既に対称テンソルに改良されているとする。

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} &+ \frac{1}{d-2}(\partial_\mu \partial_\rho L^\rho{}_\nu + \partial_\nu \partial_\rho L^\rho{}_\mu - \partial_\rho \partial^\rho L_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma L^{\rho\sigma}) \\ &+ \frac{1}{(d-2)(d-1)}(\delta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho L^\sigma{}_\sigma - \partial_\mu \partial_\nu L^\sigma{}_\sigma) \end{aligned} \quad (4.60)$$

$L_{\mu\nu}$  は

$$\partial^\mu \partial^\nu L_{\mu\nu} = -\partial_\mu V^\mu = T^\mu{}_\mu \quad (\text{classical}) \quad (4.61)$$

を満たすような対称テンソルである。このような  $L_{\mu\nu}$  が必ず存在するとは限らないが、ここでは  $L_{\mu\nu}$  が見つかったとする。また改良された Noether カレントは

$$\tilde{J}^\mu = x^\nu \tilde{T}_\nu^\mu \quad (4.62)$$

と定義される。

(4.60) は複雑な形をしていて面食らうかもしれないが、これでうまくいくことは簡単に確認できる。 $\tilde{T}_{\mu\nu}$  は対称テンソルであり、 $\partial_\mu \tilde{T}_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu$  を満たす。さらに、

$$\tilde{T}_\mu^\mu = T_\mu^\mu + \partial_\mu V^\mu \quad (4.63)$$

となる。したがって、

$$\partial_\mu \tilde{J}^\mu = \tilde{T}_\mu^\mu + x_\nu \partial_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu J^\mu \quad (4.64)$$

となる。また、

$$\tilde{T}_\mu^\mu = \partial_\mu J^\mu - x^\nu \partial_\mu T_\nu^\mu = 0 \quad (\text{classical}) \quad (4.65)$$

が成り立つ。ただし最後の等式では運動方程式を課した。特に  $L_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} L$  と書ける時、

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{1}{(d-1)} (\partial_\mu \partial_\nu - \delta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho) L \quad (4.66)$$

となる。

例として、スカラー場の Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi) \quad (4.67)$$

を考える。 $S = \int d^d x \mathcal{L}$  が無次元量となるためには、 $\phi(x)$  の質量次元は  $\Delta = (d-2)/2$  でなければならない。また、 $U(\phi)$  の質量次元が  $d$  になるためには

$$U(\phi) = \lambda \phi^{d/\Delta} = \lambda \phi^{2d/(d-2)} \quad (4.68)$$

でなければならない。ただし、 $d=2$  の場合は  $\phi$  が無次元となるために、 $U(\phi)$  は任意関数となる。 $d \neq 2$  の場合、運動方程式は

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = -\frac{d}{\Delta} \lambda \phi^{\frac{d}{\Delta}-1} = -\frac{2d}{d-2} \lambda \phi^{\frac{d+2}{d-2}} \quad (4.69)$$

となる。ここで、エネルギー運動量テンソル

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi} \partial_\nu \phi - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi + \delta_{\mu\nu} U(\phi) \end{aligned} \quad (4.70)$$

は明らかにトレースレスではない。(いまはスピン 0 の場を考えているので、対称テンソルにはなっている。) これを改良しよう。

$$V^\mu = \Delta\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = \Delta\phi \partial^\mu \phi \quad (4.71)$$

から、 $L_{\mu\nu}$  は

$$\partial^\mu \partial^\nu L_{\mu\nu} = -\partial_\mu V^\mu = \Delta \partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi) = \frac{\Delta}{2} \partial^\mu \partial^\nu (\delta_{\mu\nu} \phi^2) \quad (4.72)$$

を満たす。したがって、 $L_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \Delta \phi^2 / 2 = \delta_{\mu\nu} (d-2) \phi^2 / 4$  とおけるので、(4.66) から

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} + \frac{d-2}{4(d-1)} (\partial_\mu \partial_\nu - \delta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho) \phi^2 \\ &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi + \delta_{\mu\nu} U(\phi) + \frac{d-2}{4(d-1)} (\delta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho - \partial_\mu \partial_\nu) \phi^2 \end{aligned} \quad (4.73)$$

となる。運動方程式を用いると、これがトレースレスであることを示せる。

## 4.8 特殊共形変換

特殊共形変換に対する場の変換性はプライマリー場に制限しなければ複雑な形となる。多くの理論は作用に微分項を含むため、特殊共形変換に対する Noether カレントを直接構成するのは大変である。しかし、改良されたエネルギー運動量テンソルを用いると、

$$J^\mu{}_\nu := \tilde{T}^{\mu\rho} (2x_\nu x_\rho - x^2 \delta_{\nu\rho}) = 2x_\nu x_\rho \tilde{T}^{\mu\rho} - x^2 \tilde{T}^\mu{}_\nu \quad (4.74)$$

と簡単に定義できる。この微分を計算すると、

$$\partial_\mu J^\mu{}_\nu = 2x_\nu \tilde{T}^\mu{}_\mu + 2x^\mu (\tilde{T}_{\nu\mu} - \tilde{T}_{\mu\nu}) = 0 \quad (\text{classical}) \quad (4.75)$$

が成り立つので、保存則が成り立つ。ここから特殊共形変換についての対称性が分かる。ここで、回転対称性とスケール不変性から自動的に共形不変性が導かれるように見えるが、そうではない。そもそも、エネルギー運動量テンソルをトレースレスに改良する際に、

$$T_\mu{}^\mu = \partial^\mu \partial^\nu L_{\mu\nu} \quad (\text{classical}) \quad (4.76)$$

となる  $L_{\mu\nu}$  が存在することを仮定していた。この仮定はスケール不変性が共形不変性に拡大するための十分条件となっている。

## 4.9 エネルギー運動量テンソルの別定義

Euclid 不変な理論に対し、改良されたエネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  は添字の交換について対称であるから、座標変換  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu$  に対し、

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^d x T_{\mu\nu} (\partial^\mu \varepsilon^\nu + \partial^\nu \varepsilon^\mu) = \frac{1}{2} \int d^d x T_{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (4.77)$$

と書ける。 $\delta g_{\mu\nu}$  は  $x \rightarrow x'$  をパラメーターの読み替えだと思ったときの計量  $g_{\mu\nu}$  の変化である。ここで、作用を一般の計量  $g_{\mu\nu}$  まで拡張して

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \rightarrow S[g, \phi] = \int d^d x \sqrt{g} \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \phi, \partial_\mu \phi) \quad (4.78)$$

と変更する。ここで  $\sqrt{g} := \sqrt{\det g_{\mu\nu}}$  である。すると、一般座標変換に対して不変となるような作用を構成でき、

$$\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \int d^d x \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = 0 \quad (4.79)$$

が成り立つ。ここから

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (4.80)$$

が得られる。この式をエネルギー運動量テンソルの定義とすることができる。

ここで、作用  $S[g, \phi]$  に Ricci テンソル  $R_{\mu\nu}$  に比例する項を加えても平坦な計量の理論は不変であることに注目する。つまり、作用を

$$S \rightarrow S + \int d^d x \sqrt{g} R_{\mu\nu}(x) \tilde{L}^{\mu\nu}(x) \quad (4.81)$$

と変えてもよい。この自由度を用いてエネルギー運動量テンソルを改良することができる。実はこれが (4.60) がやっていることである。もしエネルギー運動量テンソルがトレースレスに改良できたとすると、共形変換に対し、

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2} \int d^d x T_{\mu\nu} (\partial^\mu \varepsilon^\nu + \partial^\nu \varepsilon^\mu) \\ &= \frac{1}{d} \int d^d x T^\mu_\mu \partial_\rho \varepsilon^\rho = 0 \end{aligned} \quad (4.82)$$

となる。2 個目の等号では共形 Killing 方程式を用いた。したがって共形不変性が成り立つ。

## 5 場の理論における対称性

古典論における Noether の定理は運動方程式のもとで成り立つ。一方量子論<sup>\*26</sup> では運動方程式を満たさない場の配位を考慮に入れる必要がある。この章では場の理論における Noether の定理の対応物である Ward-Takahashi 恒等式を導き、共形不変性によって相関関数がどのように制限されるかを見る。

### 5.1 Schwinger-Dyson 方程式

まず運動方程式  $\delta S/\delta\phi = 0$  が量子論においてどのように補正を受けるのかを見る。場の微小変換

$$\phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (5.1)$$

を考える。 $\delta\phi(x)$  は  $\phi(x)$  に依存しない場とする。ここで経路積分に関する恒等式

$$\int \mathcal{D}\phi' F[\phi'] e^{-S[\phi']} = \int \mathcal{D}\phi F[\phi] e^{-S[\phi]} \quad (5.2)$$

に注目する。これは単純な積分変数の取り替えなので、常に成り立つ。左辺から右辺を引く。 $\delta\phi(x)$  が  $\phi(x)$  に依存しないことから  $d\phi'(x) = d\phi(x)$  であり、これを掛け合わせて  $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$  が成り立つので、

$$\int \mathcal{D}\phi \int d^d x \left( \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) - \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} F[\phi] \delta\phi(x) \right) e^{-S[\phi]} = 0 \quad (5.3)$$

となる。ただし、積分領域の境界で  $\delta\phi(x) = 0$  として、表面項を無視した。両辺を分配関数で割ると、

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} F[\phi] \right\rangle = \left\langle \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \right\rangle \quad (5.4)$$

となる。特別な場合として、 $F[\phi] = \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)$  とした以下の式は Schwinger-Dyson 方程式と呼ばれる。

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \right\rangle = \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \langle \phi(x_1) \cdots \cancel{\phi(x_j)} \cdots \phi(x_n) \rangle \quad (5.5)$$

つまり運動方程式  $\delta S/\delta\phi(x)$  は古典的にはゼロだが、量子論ではゼロではなく、演算子  $\phi(x')$  と同一点にあるときにデルタ関数  $\delta(x - x')$  に比例する寄与をもつ。これを接触項と呼ぶ。

ここで Noether の定理  $\partial_\mu J^\mu = 0$  が古典的な等式、すなわち運動方程式のもとでの等式であったことを思い出すと、量子論では接触項によって補正されることが分かる。

<sup>\*26</sup> ここでの量子論とは経路積分をするという意味である。統計的場の理論もこの意味では量子的である。

## 5.2 Ward-Takahashi 恒等式

微小な座標変換

$$x'^{\mu} - x^{\mu} = \varepsilon^{\mu}(x) = \varepsilon^a(x) X_a x^{\mu} \quad (5.6)$$

とそれに伴う内部空間の微小変換

$$\phi'(x') - \phi(x) = G\phi(x) = \varepsilon^a(x) G_a \phi(x), \quad (5.7)$$

を考える。ここで、 $X_a = X_a^{\mu} \partial_{\mu}$  は微分演算子であり、 $G_a$  は Lie 群の生成子である。また

$$\phi'(x) - \phi(x) =: \varepsilon^a \delta \phi_a(x) = \varepsilon^a(x) (X_a + G_a) \phi(x) \quad (5.8)$$

と書くことにする。グローバル変換  $\varepsilon^a(x) = \varepsilon^a$  に対して作用が不変であるとき、相関関数に課される制限を求める。

出発点は先ほどと同様で恒等式

$$\int \mathcal{D}\phi' F[\phi'] e^{-S[\phi']} = \int \mathcal{D}\phi F[\phi] e^{-S[\phi]} \quad (5.9)$$

である。左辺は

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\phi' F[\phi'] e^{-S[\phi']} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \left( F[\phi] + \int d^d x \varepsilon^a(x) \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \cdot \delta \phi_a(x) - F[\phi] \delta S[\phi] \right) e^{-S[\phi]} \end{aligned} \quad (5.10)$$

と変形できる。ここで、作用の変化は Noether カレント  $J_a^{\mu}$  によって

$$\delta S = \int d^d x J_a^{\mu}(x) \partial_{\mu} \varepsilon^a(x) = - \int d^d x \varepsilon^a(x) \partial_{\mu} J_a^{\mu}(x) \quad (5.11)$$

と書ける。ただし、積分領域の境界で  $\varepsilon^a(x) = 0$  とし、表面項を無視した。

ここで、経路積分測度について  $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$  が成り立つとする。この仮定の妥当性については後で改めて考える。すると、(5.2) は

$$\int d^d x \varepsilon^a(x) \int \mathcal{D}\phi \left( \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \cdot \delta \phi_a(x) + F[\phi] \partial_{\mu} J_a^{\mu}(x) \right) e^{-S[\phi]} = 0 \quad (5.12)$$

と書ける。 $\varepsilon^a(x)$  は任意なので、 $\int d^d x \varepsilon^a(x)$  を除くことができる。さらに両辺を分配関数で割ると、

$$\langle \partial_{\mu} J_a^{\mu}(x) F[\phi] \rangle = - \left\langle \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \cdot \delta \phi_a(x) \right\rangle \quad (5.13)$$

となる。ここで、 $F[\phi] = \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_N(x_N)$  とすることで、対称性によって相関関数に課される条件が得られる。ただし、 $\mathcal{O}_n(x_n)$  は  $\phi(x_n), \partial_{\mu} \phi(x_n), \dots$  の関数として表される局所場である。<sup>\*27</sup> また

$$\frac{\delta \mathcal{O}_n(x_n)}{\delta \phi(x)} \cdot \delta \phi_a(x) =: \delta(x - x_n) \mathcal{Q}_a \mathcal{O}_n(x) \quad (5.14)$$

<sup>\*27</sup> 同一点の場の積をとると一般に相関関数が発散してしまうので、複合場は無限大の定数を差し引いて定義される。

と定義すると

$$\langle \partial_\mu J_a^\mu(x) \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_N(x_N) \rangle = - \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{Q}_a \mathcal{O}_n(x) \cdots \mathcal{O}_N(x_N) \rangle \quad (5.15)$$

が得られる。この式を Ward-Takahashi 恒等式と呼ぶ。

次に、保留しておいた経路積分測度の変換について考える。例えば  $\delta\phi_a(x) = G_a\phi(x)$  のとき、素朴には

$$\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi \prod_x \det(1 + \varepsilon^a G_a)^{\rho d^d x} \approx \mathcal{D}\phi \exp \int d^d x \rho \varepsilon^a \text{tr} G_a \quad (5.16)$$

と書ける。ここで  $\rho$  は自由度の密度であり、格子正則化の場合は格子間隔  $a$  によって  $\rho = 1/a^d$  と書ける。もし右辺の指数関数の中身が 0 になるならば、経路積分測度は不変である。このためには  $\text{tr} G_a = 0$  が成り立てば良いが、場の理論では  $\rho \rightarrow \infty$  とするために  $\infty \cdot 0$  となって不定になってしまう。したがって、極限を真面目に議論する必要がある。もしその結果  $\mathcal{D}\phi' \neq \mathcal{D}\phi$  となったならば、量子異常 (アノマリー、対称性の量子的破れ) が存在すると言う。<sup>\*28</sup> このとき

$$\langle \partial_\mu J_a^\mu \rangle \neq 0 \quad (5.17)$$

となる。つまり古典的には保存するカレントが量子的には保存しなくなる。平坦な時空の共形変換を考える上では量子異常は考えなくてよいので、<sup>\*29</sup> これ以上深入りはしないことにする。

### 5.3 トポロジカル演算子

時空上の領域  $B$  に対し、その境界  $\partial B$  の上での Noether チャージを

$$Q_a(\partial B) := - \int_{\partial B} dS_\mu J_a^\mu(x) = - \int_B d^d x \partial_\mu J_a^\mu(x) \quad (5.18)$$

と定義する。Ward-Takahashi 恒等式から  $B$  の内部に演算子が含まれていない場合、 $Q_a(\partial B)$  の期待値は 0 である。

$$\left\langle Q_a(\partial B) \prod_{n: x_n \notin B} \mathcal{O}_n(x_n) \right\rangle = \begin{matrix} Q_a(\partial B) \\ \bullet \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \bullet \\ \text{red blob} \end{matrix} = 0. \quad (5.19)$$

<sup>\*28</sup> 経路積分の Jacobian から量子異常を導く方法は Fujikawa の方法と呼ばれる。詳しくは [10] を参照してほしい。

<sup>\*29</sup> 並進対称性や回転対称性はこれらを保つ正則化が構成できるので、極限の過程で常に経路積分測度を不変にできる。スケール変換の場合、経路積分測度を不変にするためには単純な座標変換ではなく、くりこみ変換を考える必要がある。このとき一般に異常次元が発生して古典的な次元に対するスケール不変性が破れるため、この意味でスケール不変性に量子異常があると言うことがある。ただし、その場合も固定点では量子的なスケール不変性が成り立っている。特殊共形変換の場合は経路積分測度を不変にするために一般化されたくりこみ変換を考える。これは特殊共形変換と粗視化を組み合わせたものである。また、曲がった時空における共形対称性 (正確には Weyl 対称性) は量子的に破れること (Weyl アノマリー) があるが、平坦な時空では考える必要がないらしい。



これを複素関数論における Cauchy の積分定理のように使って、 $\partial B$  を連続的に自由に変形することができる。ここから  $Q_a(\partial B_n)$  をトポロジカル演算子と呼ぶ。例えば、以下のような変形が可能である。

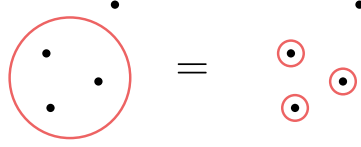


図 11: トポロジカル演算子の変形

$B$  を  $x$  まわりの微小な閉曲面とすると、Ward-Takahashi 恒等式を  $B$  の内部で積分することで、

$$Q_a(\partial B)\mathcal{O}(x) = Q_a\mathcal{O}(x) \quad (5.20)$$

を得る。ただし、これは任意の境界条件で期待値を取った時に成り立つという意味である。以降は  $\partial B$  を省略して  $Q_a\mathcal{O}(x)$  と書いたとき、 $Q_a$  は  $x$  まわりの微小な閉曲面でのトポロジカル演算子を表すとする。

同じことを通常量子化<sup>\*30</sup>の枠組みでも見ておく。Ward-Takahashi 恒等式を領域  $t + \delta t \geq t' \geq t - \delta t$  上で積分する。この領域の内部に一つの局所演算子  $\mathcal{O}(x)$  のみがあったとすると、

$$Q_a(\partial B)\mathcal{O}(x) = Q_a(t + \delta t)\mathcal{O}(x) - Q_a(t - \delta t)\mathcal{O}(x) = -Q_a\mathcal{O}(x) \quad (5.21)$$

と書ける。ここで、

$$Q_a(t) = - \int d^{d-1}\mathbf{x} J_a^0(t, \mathbf{x}) \quad (5.22)$$

と定義した。これを時間順序に直すことで演算子の等式

$$\hat{Q}_a(t + \delta t)\hat{\mathcal{O}}(x) - \hat{\mathcal{O}}(x)\hat{Q}_a(t - \delta t) = Q_a\hat{\mathcal{O}}(x) \quad (5.23)$$

を得る。ここで  $\hat{\mathcal{O}}(x) = 1$  とおくと、 $\hat{Q}_a(t)$  が  $t$  によらないことが分かるから、

$$\hat{Q}_a(\partial B)\hat{\mathcal{O}}(x) = [\hat{Q}_a, \hat{\mathcal{O}}(x)] = Q_a\hat{\mathcal{O}}(x) \quad (5.24)$$

と書ける。トポロジカル演算子は交換関係  $[\hat{Q}_a, \hat{\mathcal{O}}(x)]$  の量子化の方法によらない定義を与えていると言える。

<sup>\*30</sup> 時間一定面の Hilbert 空間に対する演算子形式のことを言っている。後で説明する動径量子化と対比するならば時間量子化だが、これもまた紛らわしい言い方だろう。

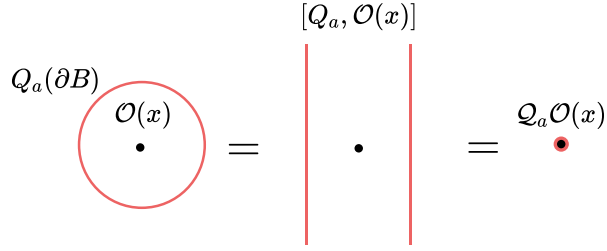


図 12: 交換関係のトポロジカルな定義

$\hat{Q}_a$  を Hamiltonian とすれば、(5.24) は Euclid 空間における Heisenberg の運動方程式

$$[\hat{H}, \hat{O}(t, \mathbf{x})] = \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}(t, \mathbf{x}) \quad (5.25)$$

となる。またこれを積分することで、

$$\hat{O}(t, \mathbf{x}) = e^{\hat{H}t} \hat{O}(0, \mathbf{x}) e^{-\hat{H}t} \quad (5.26)$$

が得られる。

#### 5.4 積の順序についての注意

$Q_a$  を繰り返し作用させるとき、順序に注意が必要である。積分形の Ward-Takahashi 恒等式

$$Q_a \mathcal{O}(x) = \mathcal{Q}_a \mathcal{O}(x) \quad (5.27)$$

の両辺に対し、 $\varepsilon_b \cdot \partial$  による微小変換を考える。Ward-Takahashi 恒等式の議論を再び用いると、

$$-\partial_\mu J_b^\mu(x') Q_a \mathcal{O}(x) = \delta(x' - x) \mathcal{Q}_b(Q_a \mathcal{O}(x)) \quad (5.28)$$

が得られる。ただし、 $x'$  は  $Q_a$  の内部にあるとする。 $x'$  を  $x$  まわりの微小な領域上で積分すると、

$$Q_a \mathcal{Q}_b \mathcal{O}(x) = \mathcal{Q}_b \mathcal{Q}_a \mathcal{O}(x) \quad (5.29)$$

となる。ここで、トポロジカル演算子の積をとるときは左が外側で右が内側にあると約束する。したがって場に対する変換と微分演算の順序は逆であり、交換関係は符号が反転する。

$$[Q_a, Q_b] \mathcal{O}(x) = -[Q_a, \mathcal{Q}_b] \mathcal{O}(x) \quad (5.30)$$

#### 5.5 共形変換に対する Ward-Takahashi 恒等式

##### 並進

以下では、具体的に共形変換に対応する Noether チャージを構成しよう。並進対称性の場合、Ward-Takahashi 恒等式は、

$$\langle \partial_\mu T^\mu{}_\nu(x) \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_N \rangle = - \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \langle \mathcal{O}_1 \cdots \partial_\nu \mathcal{O}_n \cdots \mathcal{O}_N \rangle \quad (5.31)$$

となる。Noether チャージは 4 元運動量であり、

$$P_\mu = - \int dS_\nu T^\nu{}_\mu \quad (5.32)$$

と定義される。Ward-Takahashi 恒等式から

$$P_\mu \mathcal{O}(x) = \partial_\mu \mathcal{O}(x) \quad (5.33)$$

が成り立つ。また

$$\mathcal{O}(x) = e^{x \cdot P} \mathcal{O}(0) \quad (5.34)$$

と書ける。同じことを演算子形式で書くと、

$$\hat{\mathcal{O}}(x) = e^{[x \cdot \hat{P}, \cdot]} \hat{\mathcal{O}}(0) = e^{x \cdot \hat{P}} \hat{\mathcal{O}}(0) e^{-x \cdot \hat{P}} \quad (5.35)$$

となる。

## 回転

次に回転変換  $x^\mu \rightarrow x^\mu - b^{\mu\nu} x_\nu$ ,  $b^{\nu\mu} = -b^{\mu\nu}$  に対し、Ward-Takahashi 恒等式は

$$\begin{aligned} & \langle \partial_\rho (x^\nu T^{\rho\mu} - x^\mu T^{\rho\nu}) \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_N \rangle \\ &= - \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \langle \mathcal{O}_1 \cdots (x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu + S^{\mu\nu}) \mathcal{O}_n \cdots \mathcal{O}_N \rangle \end{aligned} \quad (5.36)$$

となる。 $S^{\mu\nu}$  は  $\mathfrak{so}(d)$  の表現で、 $\mathcal{O}_n(x)$  がスピンをもつ多成分の場の場合に必要である。トポロジカルな演算子は

$$M^{\mu\nu} := - \int dS_\rho (x^\nu T^{\rho\mu} - x^\mu T^{\rho\nu}) \quad (5.37)$$

と定義される。ここで  $T^{\rho\mu}$  は対称に改良されたエネルギー運動量テンソルとする。(5.36) を積分することで、

$$M^{\mu\nu} \mathcal{O}(x) = (x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu + S^{\mu\nu}) \mathcal{O}(x) \quad (5.38)$$

が成り立つ。また (5.31) から

$$\langle (T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}) \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_N \rangle = - \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \langle \mathcal{O}_1 \cdots S^{\mu\nu} \mathcal{O}_n \cdots \mathcal{O}_N \rangle \quad (5.39)$$

と書ける。つまり、 $T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}$  は古典的にはゼロだが、量子的には接触項による補正が加わる。

### スケール変換

次にスケール変換  $x^\mu \rightarrow (1 - \lambda)x^\mu$  に対し、Ward-Takahashi 恒等式は

$$\begin{aligned} & \langle \partial_\mu (x_\nu T^{\mu\nu}(x)) \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_N \rangle \\ &= - \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \langle \mathcal{O}_1 \cdots (x \cdot \partial + \Delta_n) \mathcal{O}_n \cdots \mathcal{O}_N \rangle \end{aligned} \quad (5.40)$$

となる。 $\Delta_n$  は一般に行列になり得るが、実数固有値によって対角化可能であることを仮定する。ここではすでに対角化されているとして  $\Delta_n$  を実数とおく。トポロジカルな演算子は

$$D = - \int dS_\mu x^\nu T^{\mu\nu} \quad (5.41)$$

と定義される。ここで  $T^{\mu\nu}$  はトレースレスに改良されたエネルギー運動量テンソルとする。(5.40) を積分すると、

$$D\mathcal{O}(x) = (x \cdot \partial + \Delta)\mathcal{O}(x) \quad (5.42)$$

が成り立つ。また (5.31) から

$$\langle T_\mu^\mu(x) \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_N(x_N) \rangle = - \sum_{n=1}^N \Delta_n \delta(x - x_n) \langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_N(x_N) \rangle \quad (5.43)$$

である。つまり、 $T_\mu^\mu$  は古典的にはゼロだが、量子的には接触項による補正が加わる。

## 6 相関関数

### 6.1 相関関数への制限

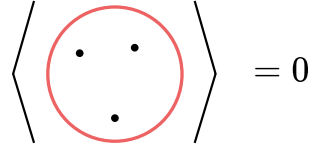
共形変換対称性が相関関数に与える制限を求める。作用と経路積分測度が共形変換に対して不変であるとき、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_N(x_N) \rangle = \langle \mathcal{O}'_1(x'_1) \cdots \mathcal{O}'_N(x'_N) \rangle \quad (6.1)$$

が成り立つ。これは全空間で積分した Ward-Takahashi 恒等式

$$\left\langle Q_a \left( \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_N(x_N) \right) \right\rangle = \sum_{n=1}^N \langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{Q}_a \mathcal{O}_n(x) \cdots \mathcal{O}_N(x_N) \rangle = 0 \quad (6.2)$$

から導くこともできる。これは以下のように図示される。



$$\left\langle \left( \text{circle with 3 dots} \right) \right\rangle = 0$$

図 13: トポロジカル演算子が全ての演算子を囲む場合、期待値はゼロになる。

ここで  $\mathcal{O}_n$  をスカラープライマリー場とし、

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}(x) \quad (6.3)$$

に対して、

$$\mathcal{O}'_n(x'_n) = \Omega(x_n)^{\Delta_n} \mathcal{O}_n(x_n) \quad (6.4)$$

となるとする。このとき、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_N(x_N) \rangle = \Omega(x_1)^{-\Delta_1} \cdots \Omega(x_N)^{-\Delta_N} \langle \mathcal{O}_1(x'_1) \cdots \mathcal{O}_N(x'_N) \rangle \quad (6.5)$$

となる。

### 6.2 2点関数

まずスカラープライマリー場の2点関数を考える。並進対称性、回転対称性から

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \rangle &= \langle \mathcal{O}_1(x_1 - x_2) \mathcal{O}_2(0) \rangle \\ &= \langle \mathcal{O}_1(|x_1 - x_2|e) \mathcal{O}_2(0) \rangle \end{aligned} \quad (6.6)$$

と書ける。ただし、 $e = (1, 0, 0, \dots)$  とした。つまり相関関数は  $|x_1 - x_2|$  のみに依存する。さらに  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  の共形次元をそれぞれ  $\Delta_1, \Delta_2$  とおくと、(6.5) から定数  $C_{12}$  によって

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} \quad (6.7)$$

と書ける。これで相関関数の座標依存性が決定されてしまった。

さらに特殊共形変換を考えてみる。

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \frac{x^\mu + x^2 c^\mu}{1 + 2c \cdot x + c^2 x^2} \quad (6.8)$$

に対し、計量は

$$g'_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}, \quad \Omega(x) = 1 - 2c \cdot x + c^2 x^2 \quad (6.9)$$

となる。これは特殊共形変換を反転と並進の合成として

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2} \rightarrow \frac{x^\mu}{x^2} - c^\mu \rightarrow \frac{x^\mu/x^2 - c^\mu}{(x/x^2 - c)^2} \quad (6.10)$$

と表した時、2 回の反転によってスケールが  $1/x^2(x/x^2 - c)^2$  倍されることによる。したがって、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \rangle = \frac{1}{\Omega_1^{\Delta_1} \Omega_2^{\Delta_2}} \langle \mathcal{O}_1(x'_1) \mathcal{O}_2(x'_2) \rangle \quad (6.11)$$

となる。ここで  $\Omega_j = 1 - 2c \cdot x_j + c^2 x_j^2$  と定義した。さらに、反転変換について

$$\left( \frac{x_1}{x_1^2} - \frac{x_2}{x_2^2} \right)^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1^2 x_2^2} \quad (6.12)$$

が成り立つことから

$$(x'_1 - x'_2)^2 = \frac{(x_1/x_1^2 - x_2/x_2^2)^2}{(x_1/x_1^2 - c)^2 (x_2/x_2^2 - c)^2} = \frac{(x_1 - x_2)^2}{\Omega_1 \Omega_2} \quad (6.13)$$

となるので、(6.11) は

$$\frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \frac{(\Omega_1 \Omega_2)^{(\Delta_1 + \Delta_2)/2}}{\Omega_1^{\Delta_1} \Omega_2^{\Delta_2}} \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} \quad (6.14)$$

となる。これが成り立つのは  $\Delta_1 = \Delta_2$  のときのみである。したがって、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \rangle = \frac{C_{12} \delta_{\Delta_1 \Delta_2}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta_1}} \quad (6.15)$$

となる。すなわち共形不変性の帰結として、共形次元が異なる場の相関関数は 0 である。

### 6.3 3 点関数

次に 3 点関数  $\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3) \rangle$  を考える。並進対称性と回転対称性から相関関数は  $x_{ij} = |x_i - x_j|$  の関数となる。またスケール不変性から、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3) \rangle = \sum_{a,b,c} \frac{C_{123}^{abc}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{31}^c} \quad (6.16)$$

と書ける。ただし、 $a, b, c$  は  $a + b + c = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$  満たすとする。次に特殊共形変換を考えると、

$$\frac{C_{123}^{abc}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{31}^c} = \frac{(\Omega_1 \Omega_2)^{a/2} (\Omega_2 \Omega_3)^{b/2} (\Omega_3 \Omega_1)^{c/2}}{\Omega_1^{\Delta_1} \Omega_2^{\Delta_2} \Omega_3^{\Delta_3}} \frac{C_{123}^{abc}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{31}^c} \quad (6.17)$$

となる。ここから、

$$a + b = 2\Delta_2, \quad b + c = 2\Delta_3, \quad c + a = 2\Delta_1 \quad (6.18)$$

が分かる。これを解いて、

$$a = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3, \quad b = \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1, \quad c = \Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2 \quad (6.19)$$

となるので、3 点関数は定数  $f_{123}$  によって

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3) \rangle = \frac{f_{123}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} x_{31}^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}} \quad (6.20)$$

と書ける。

### 6.4 4 点関数

次に 4 点関数  $\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4) \rangle$  を考える。並進対称性と回転対称性から相関関数は  $x_{ij} = |x_i - x_j|$  の関数となる。またスケール不変性から、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4) \rangle = \sum_{a,b,c,d,e,f} \frac{C_{1234}^{abcdeef}}{x_{12}^a x_{13}^b x_{14}^c x_{23}^d x_{24}^e x_{34}^f} \quad (6.21)$$

と書ける。ただし、 $a + b + c + d + e + f = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$  が成り立つとする。しかし 3 点関数の場合と異なり特殊共形変換に対する変換性から  $a, b, c, d, e, f$  を求めることはできない。実際、複比 (crossratio)

$$u = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}, \quad v = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2} \quad (6.22)$$

が共形変換で不変な量となっており、 $u, v$  のどのようなべきも許されるからである。 $u, v$  は明らかに並進・回転・スケール変換について不変であり、特殊共形変換についても

$$u \rightarrow \frac{(\Omega_1 \Omega_3)(\Omega_2 \Omega_4)}{(\Omega_1 \Omega_2)(\Omega_3 \Omega_4)} u = u, \quad v \rightarrow \frac{(\Omega_1 \Omega_3)(\Omega_2 \Omega_4)}{(\Omega_1 \Omega_4)(\Omega_2 \Omega_3)} v = v \quad (6.23)$$

から不変であることが分かる。また、他に共形変換で保たれる量がないことは、以下のようにして分かる。

- 特殊共形変換によって  $x_4$  を無限遠点に移す。
- 並進によって  $x_1$  を原点に移す。
- 回転とスケール変換によって  $x_3$  を  $(1, 0, 0, \dots)$  に移す。
- $x_3$  を不変に保つ回転によって  $x_2$  を  $(x, y, 0, 0, \dots)$  に移す。

すると、自由度は 2 つのパラメーター  $x, y$  のみである。したがって、共形不変な独立なパラメーターが 2 つだけであることが分かる。 $z = x + iy$  とおくと、 $u, v$  は

$$u = x_{12}^2 = z\bar{z}, \quad v = x_{23}^2 = (1-z)(1-\bar{z}) \quad (6.24)$$

と書ける。

(6.21) において、 $u, v$  のべきを括り出してまとめると、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_4(x_4) \rangle = \sum_{a,b,c,e} \frac{C_{1234}^{abce}(u, v)}{x_{12}^a x_{13}^b x_{14}^c x_{24}^e} \quad (6.25)$$

と書ける。特殊共形変換に対する変換性から、

$$a + b + c = 2\Delta_1, \quad a + e = 2\Delta_2, \quad b = 2\Delta_3, \quad c + e = 2\Delta_4 \quad (6.26)$$

となるので、これを解いて

$$a = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4, \quad b = 2\Delta_3, \quad c = \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 + \Delta_4, \quad d = -\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 \quad (6.27)$$

を得る。したがって、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_4(x_4) \rangle = \frac{C(u, v)}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4} x_{13}^{2\Delta_3} x_{14}^{\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 + \Delta_4} x_{24}^{-\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4}} \quad (6.28)$$

と書ける。さらに慣例に従って、以下のように書き直す。

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_4(x_4) \rangle = \frac{g(u, v)}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2} x_{34}^{\Delta_3 + \Delta_4}} \left( \frac{x_{24}}{x_{14}} \right)^{\Delta_1 - \Delta_2} \left( \frac{x_{14}}{x_{13}} \right)^{\Delta_3 - \Delta_4} \quad (6.29)$$

$g(u, v) = u^{\Delta_3 + \Delta_4} C(u, v)$  は任意の関数である。特に同一のスカラープライマリ場の 4 点関数は

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_4) \rangle = \frac{g(u, v)}{x_{12}^{2\Delta_\phi} x_{34}^{2\Delta_\phi}} \quad (6.30)$$

と書ける。



## 6.5 テンソル演算子の相関関数

テンソルプライマリー演算子の相関関数も、共形不変性によって制限を受ける。ここでは結果だけを述べることにする。1 階のテンソルプライマリー演算子の 2 点関数は、

$$\langle \mathcal{O}^\mu(x) \mathcal{O}_\nu(y) \rangle = C_{\mathcal{O}} \frac{I^\mu_\nu(x-y)}{|x-y|^{2\Delta}}, \quad (6.31)$$

$$I^\mu_\nu(x) = \delta^\mu_\nu - 2 \frac{x^\mu x_\nu}{x^2} \quad (6.32)$$

と計算される。またスピン  $l$  <sup>\*31</sup> のテンソルに対しては、

$$\langle \mathcal{O}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x) \mathcal{O}_{\nu_1 \dots \nu_l}(0) \rangle = C_{\mathcal{O}} \left( \frac{I^{\mu_1}_{\nu_1}(x) \dots I^{\mu_l}_{\nu_l}(x)}{x^{2\Delta}} + \text{perms} - \text{traces} \right) \quad (6.33)$$

となる。perms は  $\mu$  の添字を入れ替えた項を表しており、traces は  $\delta^{\mu_i \mu_j} \delta_{\nu_i \nu_j}$  に比例するようなトレース部分を表す。次に 3 点関数については

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \mathcal{O}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_3) \rangle = \frac{f \phi_1 \phi_2 \mathcal{O}(Z^{\mu_1} \dots Z^{\mu_l} - \text{traces})}{x_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + l} x_{23}^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 - l} x_{31}^{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2 - l}}, \quad (6.34)$$

$$Z^\mu := \frac{x_{13}^\mu}{x_{13}^2} - \frac{x_{23}^\mu}{x_{23}^2} \quad (6.35)$$

となる。これらを導出するために空間埋め込み法を用いるのが便利である。詳しくは、[9] の 10 章や [3] を参照してほしい。

---

<sup>\*31</sup>  $l$  階の対称トレースレステンソルのこと

## 7 動径量子化

演算子形式の場の理論では、時間一定の超平面で時空をスライスし、その断面に Hilbert 空間を対応づける。しかし、時空の切り方一つではない。回転対称な理論では時間の方向の取り方は任意であるし、時空を曲面で切ることもできる。好き勝手な切り方では良い性質は期待できないが、共形場理論におけるうまい切断面として、超球面がある。このようにして得られる動径量子化は状態・演算子対応や演算子積展開といった共形場理論における強力な道具と密接に関係しているので、以降で詳しく見ていくことにする。

### 7.1 動径量子化

時空上に特別な原点を 1 つ定め、座標を原点からの距離  $r$  と方向を表す単位ベクトル  $\mathbf{n}$  によって表すことにする。 $r$  を固定し、角度方向に依存する場  $\phi(r, \mathbf{n}) = \varphi(\mathbf{n})$  を考え、ありうる全ての場をそれぞれ Hilbert 空間の基底  $|\varphi\rangle$  に対応づける。また時間発展演算子を

$$\langle \varphi_f | \hat{U}(r_f, r_i) | \varphi_i \rangle := \int_{\phi(r_i)=\varphi_i}^{\phi(r_f)=\varphi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \quad (7.1)$$

と定義する。このような演算子形式を**動径量子化 (radial quantization)** と呼ぶ。

### 7.2 真空状態

動径量子化において、単位球面上の真空状態  $|0\rangle$  は

$$\langle \varphi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \int_{r=0}^{\phi(r=1)=\varphi} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \quad (7.2)$$

と定義される。一方  $\langle 0 |$  は

$$\langle 0 | \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \int_{\phi(r=1)=\varphi}^{r=\infty} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \quad (7.3)$$

と定義される。 $\sqrt{Z}$  は規格化定数であり、作用に定数を足すことで無視できる。

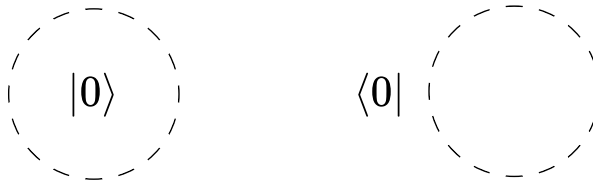


図 14: 動径量子化における真空状態

共形場理論では、トポロジカル演算子の性質から

$$\hat{P}_\mu|0\rangle = \hat{M}_{\mu\nu}|0\rangle = \hat{D}|0\rangle = \hat{K}_\mu|0\rangle = 0 \quad (7.4)$$

が成り立つ。同様に

$$\langle 0|\hat{P}_\mu = \langle 0|\hat{M}_{\mu\nu} = \langle 0|\hat{D} = \langle 0|\hat{K}_\mu = 0 \quad (7.5)$$

が成り立つ。これは以下のように図示できる。

$$\begin{array}{cc} K_\mu, M_{\mu\nu}, D, K_\mu & K_\mu, M_{\mu\nu}, D, K_\mu \\ \cdot \quad \bigcirc \quad |0\rangle \quad \cdot & \langle 0| \quad \bigcirc \quad \cdot \quad \cdot \\ & \cdot \end{array} = 0$$

図 15: 真空の対称性

一つ目の式はトポロジカル演算子を 1 点に収縮できることから明らかである。また二つ目の式は期待値に含まれる全ての演算子を一齐に座標変換しても相関関数が変わらないことから分かる。

### 7.3 シリンダー時空

動径量子化では  $r$  ごとに動径一定面 (超球面) の大きさが異なるため、 $r$  の異なる Hilbert 空間の次元が等しくならず、同一視できないという問題が発生する。例えば格子正則化した場合を考えると、 $r \leq |x| \leq r + \delta r$  となるような格子点の数は  $r$  によって異なるので、転送行列を作ろうとすると正方行列ではなくなってしまう。これを正方行列にしたいならば、 $r$  ごとに自由度を適当に積分して間引いてやらないといけない。

そのために、 $\tau = \log r$  として、 $(\tau, \mathbf{n})$  で表されるシリンダー時空に移ることにする。線素を  $\tau$  を使って表すと、

$$ds_{\mathbb{R}^d}^2 = dr^2 + r^2 ds_{S^{d-1}}^2 = e^{2\tau}(d\tau^2 + ds_{S^{d-1}}^2) = e^{2\tau} ds_{\mathbb{R} \times S^{d-1}}^2 \quad (7.6)$$

となるので、Euclid 空間  $\mathbb{R}^d$  からシリンダー時空  $\mathbb{R} \times S^{d-1}$  への変換は共形変換になっている。ここで  $ds_{S^{d-1}}^2$  は極座標の線素を表す。

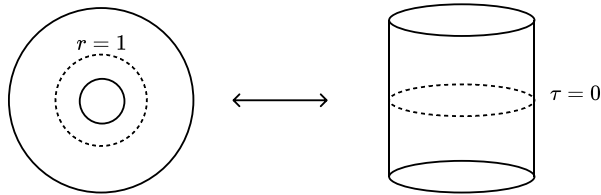


図 16: シリンダー時空

Euclid 空間の経路積分からシリンダー時空の経路積分に移ることで、動径ごとの自由度の数が揃えられるため、性質の良い演算子形式が期待できる。ただし、そのためには場所ごとに倍率の異なるくりこみ変換を行う必要があり、したがって共形不変性が必要なことに注意する。

理論のスケール不変性から

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_N(x_N) \rangle = \frac{1}{r_1^{\Delta_1}} \cdots \frac{1}{r_N^{\Delta_N}} f(\{n_i\}, \{\tau_i - \tau_j\}) \quad (7.7)$$

と表せるので、シリンダー時空上で定義される場  $\mathcal{O}_{\text{cyl.}}(\tau, \mathbf{n})$  を、

$$\mathcal{O}_{\text{cyl.}}(\tau, \mathbf{n}) = r^\Delta \mathcal{O}(x) = e^{\Delta\tau} \mathcal{O}(x) \quad (7.8)$$

とする。シリンダー時空への変換では局所的には  $x \rightarrow x/r$  というくりこみ変換をしているので、このように場を定義しなおすのは妥当である。すると相関関数は

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = \frac{1}{r_1^{\Delta_1}} \cdots \frac{1}{r_n^{\Delta_n}} \langle \mathcal{O}_1^{\text{cyl.}}(x_1) \cdots \mathcal{O}_n^{\text{cyl.}}(x_n) \rangle \quad (7.9)$$

となる。したがって、シリンダー時空の相関関数は Euclid 空間の相関関数を無次元化したものになっている。

## 7.4 シリンダー時空の演算子形式

シリンダー時空では素朴に定義される (7.1) は修正を受ける。まず、 $\tau$  を固定して超球面上の場  $\phi_{\text{cyl.}}(\tau, \mathbf{n}) = \varphi(\mathbf{n})$  を考え、これを  $|\varphi\rangle$  に対応づける。ここで、 $\phi_{\text{cyl.}}(\tau, \mathbf{n}) = e^{\Delta\phi\tau} \phi(x)$  である。シリンダー時空における時間発展演算子は

$$\langle \varphi_f | \hat{U}(\tau_f, \tau_i) | \varphi_i \rangle := \int_{\phi_{\text{cyl.}}(\tau_i)=\varphi_i}^{\phi_{\text{cyl.}}(\tau_f)=\varphi_f} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} \quad (7.10)$$

と定義される。境界条件はシリンダー時空の場  $\phi_{\text{cyl.}}(\tau, \mathbf{n}) = e^{\Delta\phi\tau} \phi(x)$  に対して課されていることに注意する。規格化条件

$$\int \mathcal{D}\varphi |\varphi\rangle \langle \varphi| = 1 \quad (7.11)$$

を課することで時間発展演算子の加法性

$$\hat{U}(\tau_1, \tau_3) = \hat{U}(\tau_1, \tau_2) \hat{U}(\tau_2, \tau_3) \quad (7.12)$$

が分かる。場  $\mathcal{O}(\tau, \mathbf{n})$  の質量次元が  $\Delta$  であるとき、期待値は

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{\text{cyl.}}(\tau, \mathbf{n}) \rangle &= e^{\Delta\tau} \int \mathcal{D}\varphi \langle 0 | \varphi \rangle \mathcal{O}[e^{-\Delta\phi\tau} \varphi(\mathbf{n})] \langle \varphi | 0 \rangle \\ &= \int \mathcal{D}\varphi \langle 0 | \varphi \rangle \mathcal{O}[\varphi(\mathbf{n})] \langle \varphi | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{U}(0, \tau) \hat{\mathcal{O}}(\mathbf{n}) \hat{U}(\tau, 0) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (7.13)$$

となる。したがって、 $\mathcal{O}_{\text{cyl.}}(\tau, \mathbf{n}) = e^{\Delta\tau} \mathcal{O}(x)$  は Heisenberg 表示

$$\hat{\mathcal{O}}(\tau, \mathbf{n}) = \hat{U}(0, \tau) \hat{\mathcal{O}}(\mathbf{n}) \hat{U}(\tau, 0) \quad (7.14)$$

に対応することが分かる。以降の議論でハットのついた演算子は全て無次元化されており、 $\hat{\mathcal{O}}(\tau, \mathbf{n})$  は  $\mathcal{O}(\tau, \mathbf{n})$  ではなく  $\mathcal{O}_{\text{cyl.}}(\tau, \mathbf{n})$  に対応するので注意してほしい。

ここで、Ward-Takahashi 恒等式から

$$\mathcal{O}_{\text{cyl.}}(\tau, \mathbf{n}) = e^{\Delta\tau} e^{\tau \partial/\partial\tau} \mathcal{O}(0, \mathbf{n}) = e^{\tau D} \mathcal{O}(0, \mathbf{n}) \quad (7.15)$$

が成り立つので、

$$\hat{\mathcal{O}}(\tau, \mathbf{n}) = e^{\tau \hat{D}} \hat{\mathcal{O}}(0, \mathbf{n}) e^{-\tau \hat{D}} \quad (7.16)$$

となる。ただし、 $\hat{D}$  は

$$\hat{D} = - \int d\Omega n_\mu n^\nu \hat{T}^\mu{}_\nu \quad (7.17)$$

と定義される。 $d\Omega$  は極座標の測度であり、 $n_\mu = x_\mu/r$  である。(7.14) と (7.16) を比較して、

$$\frac{d}{d\tau} \hat{U}(\tau, 0) = -\hat{D} \quad (7.18)$$

が得られる。したがって  $\hat{D}$  は動径量子化において Hamiltonian の役割をもつ。

## 7.5 状態・演算子対応

スケール不変性をもつ場の理論では、 $d-1$  次元球面上で定義された状態と、その中心にある局所演算子が 1 対 1 対応するという良い性質がある。これを以下で示すが、議論は次の図にまとめられる。

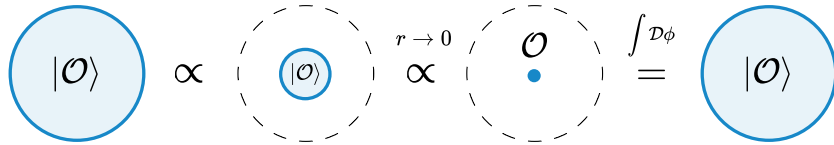


図 17: 状態・演算子対応

まず、状態から対応する局所演算子を構成する。演算子は任意の境界条件に対して相関関数が計算できれば定義できる。 $D$  の固有値  $\Delta$  の固有状態  $|\mathcal{O}\rangle$  が  $\tau = 0$  で定義されているとする。もし  $\tau_1 > 0$  に演算子  $\mathcal{O}_1$  が挿入された場合、相関関数は

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}(0) \rangle := \langle 0 | \hat{\mathcal{O}}_1(\tau_1, \mathbf{n}_1) | \mathcal{O} \rangle = \int \mathcal{D}\phi \langle \phi | \mathcal{O} \rangle \int_{\phi_{\text{cyl.}}(0)=\phi}^{\tau=\infty} \mathcal{D}\phi \mathcal{O}_1(\tau_1, \mathbf{n}_1) e^{-S[\phi]} \quad (7.19)$$

と計算できる。一方この式で  $\tau_1 < 0$  としようとしても、経路積分は  $\tau < 0$  の領域を含まないため、うまく定義できない。しかし、

$$|\mathcal{O}\rangle = \hat{U}(0, \tau) \hat{U}(\tau, 0) |\mathcal{O}\rangle = e^{-\Delta\tau} \hat{U}(0, \tau) |\mathcal{O}\rangle = e^{-\Delta\tau} |\mathcal{O}(\tau)\rangle \quad (7.20)$$

と変形し、 $\tau \rightarrow -\infty$  とすることで  $\tau < 0$  にも演算子を挿入できる。したがって、 $|\mathcal{O}\rangle$  に対応する演算子  $\mathcal{O}(0)$  は

$$\langle \dots \mathcal{O}(0) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{-\Delta\tau} \langle 0 | \dots | \mathcal{O}(\tau) \rangle \quad (7.21)$$

によって定義される。

一般の  $\mathcal{O}(x)$  については  $x$  を原点とする動径量子化を考えると同様に定義できる。状態の積も以下のように問題なく定義できる。

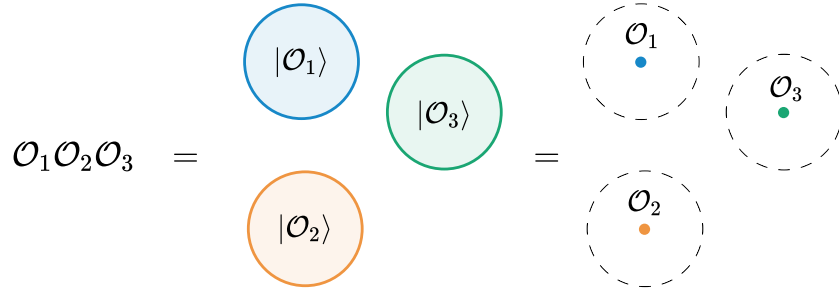


図 18: 状態  $\Rightarrow$  演算子

スケール不変性がない場合はそれぞれの状態を重ねることができず、状態は剛体のような演算子として振る舞う。スケール不変性があると、境界をいくらでも縮めることができるので、状態を局所演算子に対応づけられる。

次に、局所演算子から対応する状態を構成する。演算子  $\mathcal{O}(x=0)$  に対し、状態  $|\mathcal{O}\rangle$  は  $r < 1$  の経路積分を行った後の境界として得られる。すなわち、

$$\langle \phi | \mathcal{O} \rangle = \int_{\tau=-\infty}^{\phi(\tau=0)=\phi} \mathcal{O}(x=0) e^{-S[\phi]} \quad (7.22)$$

と定義する。 $\mathcal{O}(x)$  に対応する状態は  $x$  を中心とする動径量子化で同様に構成することができる。

状態・演算子対応によって、プライマリー場に対応するプライマリー状態を構成することができる。プライマリー場は

$$K_\mu \mathcal{O}(0) = 0, \quad M_{\mu\nu} \mathcal{O}(0) = -S_{\mu\nu} \mathcal{O}(0), \quad D \mathcal{O}(0) = \Delta \mathcal{O}(0) \quad (7.23)$$

を満たすので、これに対応する状態  $|\mathcal{O}\rangle$  は

$$\hat{K}_\mu |\mathcal{O}\rangle = 0, \quad \hat{M}_{\mu\nu} |\mathcal{O}\rangle = -S_{\mu\nu} |\mathcal{O}\rangle, \quad \hat{D} |\mathcal{O}\rangle = \Delta |\mathcal{O}\rangle \quad (7.24)$$

を満たす。またディセダント演算子に対応するディセダント状態は

$$\hat{P}_\mu|\mathcal{O}\rangle, \hat{P}_\mu\hat{P}_\nu|\mathcal{O}\rangle, \dots \quad (7.25)$$

のように構成される。

## 8 ユニタリティ

### 8.1 Euclid 空間における共役

量子論において重要な性質として Hermite 性があるが、これが Euclid 空間においてどのように現れるのかを見る。まず Hamiltonian について、Hermite 性

$$\hat{H}^\dagger = \hat{H} \quad (8.1)$$

が成り立つことを仮定する。これは量子論では時間発展がユニタリであることを意味し、統計力学では転送行列が Hermite であることを意味する。Minkowski 時空では、Heisenberg 表示の演算子は

$$\hat{\mathcal{O}}_L(t_L, \mathbf{x}) = e^{i\hat{H}t_L} \hat{\mathcal{O}}_L(0, \mathbf{x}) e^{-i\hat{H}t_L} \quad (8.2)$$

と定義される。この式は Minkowski 時空における Ward-Takahashi 恒等式

$$\eta_{\mu\nu} \partial^\mu J_\alpha^\nu \mathcal{O}_L(x) = i Q_\alpha \mathcal{O}_L(x), \quad (8.3)$$

から導くことができる。ここで  $\eta_{\mu\nu}$  は符号  $(-, +, \dots, +)$  をもつ Minkowski 計量である。 $\mathcal{O}_L(0, \mathbf{x})$  が Hermite 演算子であるとき、

$$\hat{\mathcal{O}}_L(t_L, \mathbf{x})^\dagger = e^{i\hat{H}t_L} \hat{\mathcal{O}}_L(0, \mathbf{x}) e^{-i\hat{H}t_L} = \hat{\mathcal{O}}_L(t_L, \mathbf{x}) \quad (8.4)$$

が成り立つ。これは量子論で親しんでいる内容である。次に、これを Wick 回転した式は

$$\hat{\mathcal{O}}_E(t_E, \mathbf{x}) = e^{\hat{H}t_E} \hat{\mathcal{O}}_L(0, \mathbf{x}) e^{-\hat{H}t_E} \quad (8.5)$$

となる。ここで  $\mathcal{O}_L(0, \mathbf{x})$  と書いて添字 E ではなく L をつけているが、Schrödinger 表示の演算子が Wick 回転によって不変であることを課して  $\hat{\mathcal{O}}_E(t_E, \mathbf{x})$  を定義している。この共役は  $\hat{\mathcal{O}}_L(0, \mathbf{x})$  が Hermite なとき

$$\hat{\mathcal{O}}_E(t_E, \mathbf{x})^\dagger = \hat{\mathcal{O}}_E(-t_E, \mathbf{x}) \quad (8.6)$$

となる。この式が Euclid 空間における (Heisenberg 表示の演算子に対する) Hermite 性の定義である。ただし、時間成分の添字をもつ演算子の場合は

$$\mathcal{O}_E^0(0, \mathbf{x}) = -i \mathcal{O}_L^0(0, \mathbf{x}) \quad (8.7)$$

と定義する。これにより、(8.6) の符号が変わる。同様に、時間の添字が  $n$  個ある場合は  $(-i)^n$  を掛ける。したがって、テンソル演算子に対し、

$$\mathcal{O}_E^{\mu_1 \dots \mu_l}(t, \mathbf{x})^\dagger = \mathcal{O}_E^{\mu_1 \nu_1} \dots \mathcal{O}_E^{\mu_l \nu_l} \mathcal{O}_E^{\nu_1 \dots \nu_l}(-t, \mathbf{x}) \quad (8.8)$$

$$\Theta^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - 2\delta_0^\mu \delta_\nu^0 \quad (8.9)$$



が成り立つ。

同様に、状態に対する共役を構成する。Heisenberg 表示の状態は

$$|\varphi(t)\rangle = \hat{U}(0, t)|\varphi\rangle = e^{\hat{H}t}|\varphi\rangle, \quad \langle\varphi(t)| = \langle\varphi|\hat{U}(t, 0) = \langle\varphi|e^{-\hat{H}t} \quad (8.10)$$

と定義される。 $|\varphi(t)\rangle$  の共役をとると

$$|\varphi(t)\rangle^\dagger = \langle\varphi|e^{\hat{H}t} = \langle\varphi(-t)| \quad (8.11)$$

となる。この場合も共役は (Heisenberg 表示において) 時間反転を伴う。したがって Hermite 演算子  $\hat{\mathcal{O}}(t, \mathbf{x})$  に対し、

$$\langle\varphi_f(t_f)|\hat{\mathcal{O}}(t, \mathbf{x})|\varphi_i(t_i)\rangle^* = \langle\varphi_i(-t_i)|\hat{\mathcal{O}}(-t, \mathbf{x})|\varphi_f(-t_f)\rangle \quad (8.12)$$

が成り立つ。

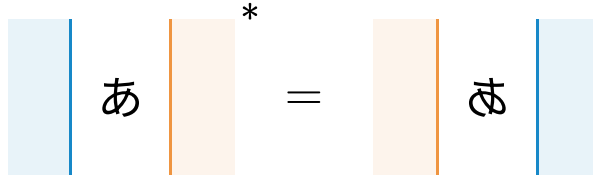


図 19: Euclid 空間における共役

## 8.2 動径量子化における共役

次に動径量子化での共役を考える。共役は Hilbert 空間に付随する概念なので、量子化の方法 (Hilbert 空間の取り方) に依存することに注意する。動径量子化の共役と正準量子化の共役は別の操作であり、同じ記号  $\dagger$  を用いるが、文脈によって区別してほしい。

動径量子化ではスケール変換の生成子  $\hat{D}$  が Hamiltonian に対応するので、

$$\hat{D}^\dagger = \hat{D} \quad (8.13)$$

を仮定する。これは  $\hat{H}$  の Hermite 性より幾分か非自明であるが、シリンダー時空での時間発展のユニタリ性を意味している。またこの仮定は共形次元が実数となることを保証する。シリンダー時空の演算子の Hermite 性は

$$\hat{\mathcal{O}}(\tau, \mathbf{n})^\dagger = \hat{\mathcal{O}}(-\tau, \mathbf{n}), \quad \hat{\mathcal{O}}(x)^\dagger = \hat{\mathcal{O}}\left(\frac{x}{r^2}\right) \quad (8.14)$$

と定義される。右辺は  $\mathcal{O}(x)$  に対し反転  $I: x^\mu \rightarrow x^\mu/r^2$  を作用させたものになっている。テンソル演算子の場合、 $\tau$  成分の添字に対して符号を反転させて、

$$\hat{\mathcal{O}}^{\mu_1 \cdots \mu_l}(x)^\dagger = I^{\mu_1}_{\nu_1}(x) \cdots I^{\mu_l}_{\nu_l}(x) \hat{\mathcal{O}}^{\nu_1 \cdots \nu_l}\left(\frac{x}{r^2}\right), \quad (8.15)$$

$$I^\mu_{\nu}(x) = \delta^\mu_{\nu} - 2n^\mu n_\nu = \delta^\mu_{\nu} - \frac{2x^\mu x_\nu}{r^2} \quad (8.16)$$

となる。

次に、トポロジカル演算子の共役を調べる。半径  $r$  の超球面上で積分された運動量は

$$P_\mu = -r^{d-1} \int d\Omega n_\nu T^\nu_\mu(x) \quad (8.17)$$

と書かれる。ここで  $d\Omega$  は極座標の測度を表す。これを演算子にする場合、

$$P_\mu \rightarrow r^{-1} \hat{P}_\mu, \quad T^\nu_\mu \rightarrow r^{-d} \hat{T}^\nu_\mu \quad (8.18)$$

として

$$\hat{P}_\mu = - \int d\Omega n_\nu \hat{T}^\nu_\mu(n) \quad (8.19)$$

となる。ここで  $x^\mu = rn^\mu$  とおいている。同様の議論から

$$\hat{K}_\mu = \int d\Omega n_\nu (\delta_{\mu\rho} - 2n_\mu n_\rho) \hat{T}^{\nu\rho}_c(rn) \quad (8.20)$$

となる。 $\hat{P}_\mu$  の共役をとると、(8.15) を用いて

$$\hat{P}_\mu^\dagger = \int d\Omega n_\nu (\delta_{\mu\rho} - 2n_\mu n_\rho) \hat{T}^{\nu\rho}_c\left(\frac{n}{r}\right) = \hat{K}^\mu \quad (8.21)$$

を得る。角運動量演算子に対しては、

$$\hat{M}_{\mu\nu} = - \int d\Omega n_\rho (n_\nu \hat{T}^\rho_\mu - n_\mu \hat{T}^\rho_\nu) \quad (8.22)$$

から、

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\mu\nu}^\dagger &= \int d\Omega n_\rho (-n_\nu \hat{T}^\rho_\sigma (\delta_\mu^\sigma - 2n^\sigma n_\mu) + n_\mu \hat{T}^\rho_\sigma (\delta_\nu^\sigma - 2n^\sigma n_\nu)) \\ &= -\hat{M}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (8.23)$$

となる。以上をまとめて、

$$\hat{P}_\mu^\dagger = \hat{K}_\mu, \quad \hat{K}_\mu^\dagger = \hat{P}_\mu, \quad \hat{M}_{\mu\nu}^\dagger = -\hat{M}_{\mu\nu} \quad (8.24)$$

となる。これらの式は以下の方法によっても導出可能である。<sup>\*32</sup>

$$P_\mu^\dagger := -IP_\mu I = K_\mu, \quad M_{\mu\nu}^\dagger := -IM_{\mu\nu} I = -M_{\mu\nu} \quad (8.25)$$

$I$  は反転変換を表す。また、(8.24) は交換関係

$$[D, P_\mu] = P_\mu, \quad [D, K_\mu] = K_\mu \quad (8.26)$$

と整合する。

### 8.3 ユニタリティと鏡映正值性

我々が通常興味のある場の量子論は、ユニタリな理論である。これは状態空間が正定値の内積をもつと言い換えられる。Euclid 空間の場の理論においてユニタリティに対応する概念は鏡映正值性 (reflection positivity) と呼ばれる性質である。Euclid 空間での状態を

$$\hat{\mathcal{O}}_1(-t_1) \cdots \hat{\mathcal{O}}_n(-t_n)|0\rangle, \quad (-t_1 > \cdots > -t_n) \quad (8.27)$$

と書くと、その共役は

$$\langle 0|\hat{\mathcal{O}}_n(t_n) \cdots \hat{\mathcal{O}}_1(t_1) \quad (8.28)$$

で与えられる。ただし (8.6) を仮定した。状態空間の正定値性は

$$\langle 0|\hat{\mathcal{O}}_n(t_n) \cdots \hat{\mathcal{O}}_1(t_1)\hat{\mathcal{O}}_1(-t_1) \cdots \hat{\mathcal{O}}_n(-t_n)|0\rangle \geq 0 \quad (8.29)$$

と書ける。相関関数で書くと

$$\langle \mathcal{O}_n(t_n) \cdots \mathcal{O}_1(t_1)\mathcal{O}_1(-t_1) \cdots \mathcal{O}_n(-t_n) \rangle \geq 0 \quad (8.30)$$

となる。この性質を**鏡映正值性 (reflection positivity)** という。

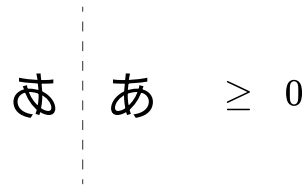


図 20: 鏡映正值性

動径量子化についての鏡映正值性は

$$\langle \mathcal{O}_n(\tau_n) \cdots \mathcal{O}_1(\tau_1)\mathcal{O}_1(-\tau_1) \cdots \mathcal{O}_n(-\tau_n) \rangle \geq 0 \quad (8.31)$$

となる。

<sup>\*32</sup> 動径量子化の共役が反転を表すことから生成子の両側に  $I$  を掛ける。負号がつくのは量子力学で  $\partial/\partial x^\dagger = -\partial/\partial x$  とするのと同じ理由で、部分積分をすることによる。

## 8.4 ユニタリティバウンド

用いる交換関係を以下に載せておく。

$$\begin{aligned} [K_\mu, P_\nu] &= 2\delta_{\mu\nu}D - 2M_{\mu\nu} \\ [D, P_\mu] &= P_\mu \\ [M_{\nu\rho}, P_\sigma] &= -\delta_{\nu\sigma}P_\rho + \delta_{\rho\sigma}P_\nu \end{aligned}$$

動径量子化におけるユニタリティ (鏡映正値性) を仮定して共形次元に対する制限を導く。まず、スカラープライマリー状態  $|\mathcal{O}\rangle$  に対し、

$$\langle \mathcal{O} | \mathcal{O} \rangle \geq 0 \quad (8.32)$$

が成り立つ。次にレベル 1 のディセンダント状態について考える。交換関係を用いると、

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O} | K_\mu P_\nu | \mathcal{O} \rangle &= \langle \mathcal{O} | (P_\nu K_\mu + 2\delta_{\mu\nu}D - 2M_{\mu\nu}) | \mathcal{O} \rangle \\ &= 2\Delta\delta_{\mu\nu}\langle \mathcal{O} | \mathcal{O} \rangle \end{aligned} \quad (8.33)$$

となり、ユニタリティから  $\Delta \geq 0$  が分かる。次にレベル 2 のディセンダント状態について

$$\langle \mathcal{O} | K_\mu K_\nu P_\rho P_\sigma | \mathcal{O} \rangle = \langle \mathcal{O} | K_\mu P_\rho K_\nu P_\sigma | \mathcal{O} \rangle + 2\langle \mathcal{O} | K_\mu (\delta_{\nu\rho}D - M_{\nu\rho}) P_\sigma | \mathcal{O} \rangle \quad (8.34)$$

となる。各項は

$$\langle \mathcal{O} | K_\mu P_\rho K_\nu P_\sigma | \mathcal{O} \rangle = 4\Delta^2\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} \quad (8.35)$$

$$2\delta_{\nu\rho}\langle \mathcal{O} | K_\mu D P_\sigma | \mathcal{O} \rangle = 4(\Delta^2 + \Delta)\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \quad (8.36)$$

$$-2\langle \mathcal{O} | K_\mu M_{\nu\rho} P_\sigma | \mathcal{O} \rangle = 4\Delta\delta_{\nu\sigma}\delta_{\mu\rho} - 4\Delta\delta_{\rho\sigma}\delta_{\mu\nu} \quad (8.37)$$

と計算されるので、

$$\langle \mathcal{O} | K_\mu K_\nu P_\rho P_\sigma | \mathcal{O} \rangle = 4\Delta(\Delta + 1)(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) - 4\Delta\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} \quad (8.38)$$

を得る。 $P_\mu P_\nu | \mathcal{O} \rangle$  を回転に対する既約表現に分解して考えるのが最も一般的な議論だが、ここでは  $P^2 | \mathcal{O} \rangle$  についてのユニタリティバウンドを考える。これは  $\mu = \nu, \rho = \sigma$  として縮約をとれば良いので、

$$8\Delta(\Delta + 1)d - 4\Delta d^2 \geq 0 \quad (8.39)$$

が得られる。 $\Delta \geq 0, d > 0$  から

$$\Delta \geq \frac{d}{2} - 1 \quad (8.40)$$

となる。同様の議論をもっと高いレベルのディセンダントで行うこともできるが、これ以上厳しい条件は出てこないことが知られている。

## 8.5 スピンを持つ演算子のユニタリティバウンド

スピンを持つ演算子についてもユニタリティから共形次元に対する不等式を導くことができる。  
まず、プライマリー状態の規格化を

$$\langle \mathcal{O}^a | \mathcal{O}_b \rangle = \delta_b^a \quad (8.41)$$

とする。レベル 1 のディセンドントについて、

$$\langle \mathcal{O}^a | K_\mu P_\nu | \mathcal{O}_b \rangle = 2\Delta \delta_{\mu\nu} \delta_b^a - 2(\mathcal{S}_{\mu\nu})_a^b \quad (8.42)$$

となる。ユニタリティから右辺の行列の固有値は全て非負になる必要があるので、

$$\Delta \geq \text{max-eigenvalue}((\mathcal{S}_{\mu\nu})_a^b) \quad (8.43)$$

が言える。ここで、

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{\mu\nu})_a^b &= \frac{1}{2}(L^{\alpha\beta})_{\mu\nu}(\mathcal{S}_{\alpha\beta})_a^b, \\ (L^{\alpha\beta})_{\mu\nu} &= \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta \end{aligned} \quad (8.44)$$

と書く。 $\alpha\beta = A$  と書き、 $(L^A)_{\mu\nu}, (\mathcal{S}_A)_a^b$  を表現空間  $V, R_\mathcal{O}$  に対する  $M^A$  の表現とみなすと、

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= L^A \mathcal{S}_A = \frac{1}{2}((L + \mathcal{S})^2 - L^2 - \mathcal{S}^2) \\ &= \frac{1}{2}(-\text{Cas}(V \otimes R_\mathcal{O}) + \text{Cas}(V) + \text{Cas}(R_\mathcal{O})) \end{aligned} \quad (8.45)$$

と書ける。つまり、 $\mathcal{S}$  を Casimir 演算子のみで表すことができる。

以降はスピン  $l$  のトレースレス演算子の場合を考える。このとき  $R_\mathcal{O}$  はスピン  $l$  の既約表現となり、 $R_\mathcal{O} = V_l$  と書くことにする。 $V \otimes V_l$  は

$$V \otimes V_l = V_{l-1} \oplus \cdots \quad (l > 0) \quad (8.46)$$

と既約分解できる。最もスピンの小さい空間のみが最大固有値に寄与するので、

$$\begin{aligned} \Delta &\geq \frac{1}{2}(-\text{Cas}(V_{l-1}) + \text{Cas}(V_l) + \text{Cas}(V)) \\ &= \frac{1}{2}(-(l-1)(l+d-3) + l(l+d-2) + (d-1)) \end{aligned} \quad (8.47)$$

と書ける。ここで、 $d$  次元空間のスピン  $l$  の状態に対する Casimir 演算子の固有値が  $\text{Cas}(V_l) = l(l+d-2)$  であることを用いた。整理して

$$\Delta \geq l + d - 2 \quad (8.48)$$

となる。もっと高いレベルのディセンドントで同様の議論が可能だが、これ以上厳しい条件は出てこないことが知られている。

## 9 演算子積展開

この章では**演算子積展開 (operator product expansion, OPE)**を導入する。これは相関関数を計算するための便利な道具であるとともに、理論を特徴づけるデータとしての役割をもつ。この章は [9],[8] に加えて [6] の 2 章を参考にした。

### 9.1 演算子積展開の導出

演算子積展開の発想は、電磁気学における多重極展開に近いところがある。空間的に分布している電荷を遠くから見た際に、それを 1 点にある電荷、電気双極子、電気四重極子、... の足し合わせとして表現することができる。同様に、原点付近に分布する局所演算子の積  $\mathcal{O}_{i_1}(x_1) \cdots \mathcal{O}_{i_n}(x_n)$  を考えると、これは原点の演算子の足し合わせによって、

$$\mathcal{O}_{i_1}(x_1) \cdots \mathcal{O}_{i_n}(x_n) = \sum_i C_i \mathcal{O}_i(0) \quad (9.1)$$

と表せるだろう。以下でこれをもう少し具体的に構成する。次の図は議論を要約した概念図である。

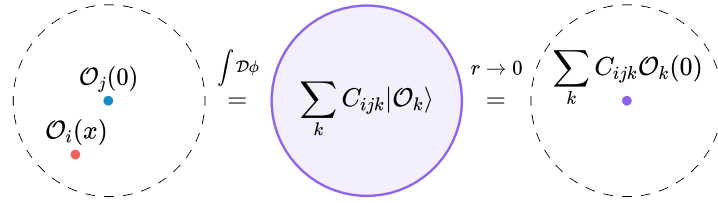


図 21: 演算子積展開

局所演算子の積  $\mathcal{O}_i(x)\mathcal{O}_j(0)$  が与えられたとして、状態・演算子対応から状態  $\mathcal{O}_i(x)|\mathcal{O}_j\rangle$  が得られる。これを共形代数の規約表現に分解し、プライマリー状態とそのディセendantに関する和として表すと、

$$= |\mathcal{O}_i(x)\mathcal{O}_j(0)\rangle = \mathcal{O}_i(x)|\mathcal{O}_j\rangle = \sum_{k:\text{primary}} C_{ijk}(x,P)|\mathcal{O}_k\rangle \quad (9.2)$$

と表せる。 $C_{ijk}(x,P)$  は  $P^\mu$  に関して多項式である。状態・演算子対応から、これは演算子についての等式として、

$$\mathcal{O}_i(x)\mathcal{O}_j(0) = \sum_{k:\text{primary}} C_{ijk}(x,\partial)\mathcal{O}_k(0) \quad (9.3)$$

と表せ、演算子積展開が導かれる。一般の場の理論では演算子積展開の収束性は保証されていないが、共形場理論では半径  $|x|$  の中に他の演算子が挿入されていない場合は収束する。簡単な例として、 $\mathcal{O}_j(0) = 1$  の場合は

$$\mathcal{O}_i(x) \cdot 1 = e^{x \cdot \partial} \mathcal{O}_i(0) \quad (9.4)$$

となるので、 $C_{ii}(x, \partial) = e^{x \cdot \partial}$  が分かる。

(9.3) を繰り返し用いることで、 $N$  点の演算子の積を 1 点の演算子の和に置き換えることができる。つまり、 $N$  点関数を 1 点関数の和として表すことができる。1 点関数は

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle = \begin{cases} 1 & \mathcal{O} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9.5)$$

なので、演算子積展開の 1 に比例する部分が相関関数を与える。したがって演算子積展開が分かっているならば、共形場理論における任意の相関関数が計算可能である。

## 9.2 共形不変性との整合性

共形不変性を課すことで、演算子積展開の係数がどのように制限を受けるかをみる。このためには共形不変性のもとでの相関関数と、演算子積展開で計算した相関関数を比較すればよい。

2 点関数は、

$$\langle \mathcal{O}_i(x) \mathcal{O}_j(0) \rangle = C_{ij1}(x, \partial) 1 = \frac{C_{ij} \delta_{\Delta_i \Delta_j}}{|x|^{2\Delta_i}} \quad (9.6)$$

と書ける。したがって、 $C_{ij1}(x)$  は 2 点関数そのものであり、その  $x$  依存性は共形次元が与えられていれば定数  $C_{ij}$  を除いて決定される。

次に、3 点関数は演算子積展開によって

$$\langle \mathcal{O}_i(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \mathcal{O}_k(x_3) \rangle = \sum_{k'} C_{ijk'}(x_{12}, \partial_2) \langle \mathcal{O}_{k'}(x_2) \mathcal{O}_k(x_3) \rangle \quad (9.7)$$

と書ける。 $\langle \mathcal{O}_{k'}(x_2) \mathcal{O}_k(x_3) \rangle = \delta_{kk'} x_{23}^{-2\Delta_k}$  となる基底を選択すると、

$$\frac{f_{ijk}}{x_{12}^{\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k} x_{23}^{\Delta_j + \Delta_k - \Delta_i} x_{31}^{\Delta_k + \Delta_i - \Delta_j}} = C_{ijk}(x_{12}, \partial_2) x_{23}^{-2\Delta_k} \quad (9.8)$$

となる。この式から  $C_{ijk}(x_{12}, \partial_2)$  は定数  $f_{ijk}$  を除いて完全に決定される。ここでは簡単のため  $\Delta_i = \Delta_j = \Delta_\phi, \Delta_k = \Delta$  の場合を考える。 $x_{12} = x, x_{23} = y$  と書くと、

$$f_{ijk} |x|^{\Delta - 2\Delta_\phi} |y|^{-\Delta} |x - y|^{-\Delta} = C_{ijk}(x, \partial_y) y^{-2\Delta} \quad (9.9)$$

となる。左辺を  $x/|y|$  によって展開し、右辺と比較することで

$$C_{ijk}(x, \partial) = f_{ijk} |x|^{\Delta - 2\Delta_\phi} \left( 1 + \frac{1}{2} x \cdot \partial + \alpha x^\mu x^\nu \partial_\mu \partial_\nu + \beta x^2 \partial^2 + \dots \right) \quad (9.10)$$

と書けることが分かる。 $\alpha, \beta$  は定数である。<sup>\*33</sup> したがって、演算子積展開の係数は  $C_{ijk}(x, \partial) = f_{ijk} C(x, \partial)$  のように、モデルに依存する  $f_{ijk}$  と共形不変性のみから決まる  $C(x, \partial)$  に分けることができる。

<sup>\*33</sup> 少し計算すると、以下の値が得られる。

$$\alpha = \frac{\Delta + 2}{8(\Delta + 1)}, \quad \beta = -\frac{\Delta}{16(\Delta + 1 - d/2)(\Delta + 1)} \quad (9.11)$$

以上の議論から、理論に現れる演算子の共形次元  $\Delta_i$  と 3 点関数の係数  $f_{ijk}$  から、任意の相関関数を構成できることが分かる。これをもって、 $\Delta_i$  と  $f_{ijk}$  を共形場理論を指定する**共形データ**と言う。

### 9.3 共形ブロック

スカラープライマリー演算子の 4 点関数について考える。共形不変性から

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \rangle = \frac{g(u, v)}{x_{12}^{2\Delta_\phi} x_{34}^{2\Delta_\phi}} \quad (9.12)$$

と書ける。 $u, v$  は複比である。一方  $\phi(x_1) \cdot \phi(x_2), \phi(x_3) \cdot \phi(x_4)$  に演算子積展開を適用すると、

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \rangle &= \sum_{\mathcal{O}, \mathcal{O}'} f_{\phi\phi\mathcal{O}} f_{\phi\phi\mathcal{O}'} C_a(x_{12}, \partial_2) C_b(x_{34}, \partial_4) \langle \mathcal{O}^a(x_2) \mathcal{O}'^b(x_4) \rangle \\ &= \sum_{\mathcal{O}} f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2 C_{12a}(x_{12}, \partial_2) C_b(x_{34}, \partial_4) \frac{I^{ab}}{x_{24}^{2\Delta_{\mathcal{O}}}} \\ &=: \frac{\sum_{\mathcal{O}} f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2 g_{\Delta_{\mathcal{O}}, l_{\mathcal{O}}}(u, v)}{x_{12}^{2\Delta_\phi} x_{34}^{2\Delta_\phi}} \end{aligned} \quad (9.13)$$

となる。ここで最後の式では (9.12) に合わせるために、 $g_{\Delta_{\mathcal{O}}, l_{\mathcal{O}}}(u, v)$  を定義した。具体的には

$$g_{\Delta, l}(u, v) = x_{12}^{2\Delta_\phi} x_{34}^{2\Delta_\phi} C_a(x_{12}, \partial_2) C_b(x_{34}, \partial_4) \frac{I^{ab}}{x_{24}^{2\Delta}} \quad (9.14)$$

である。これを共形ブロックと呼ぶ。 $\mathcal{O}$  がスカラーの場合、 $x_{12}, x_{34} \rightarrow 0$  としたときの最低次の近似で

$$x_{12}^{2\Delta_\phi} x_{34}^{2\Delta_\phi} C(x_{12}, \partial_2) C(x_{34}, \partial_4) \frac{1}{x_{24}^{2\Delta}} = \frac{x_{12}^{\Delta} x_{34}^{\Delta}}{x_{24}^{2\Delta}} + \dots = u^{\Delta/2} (1 + \dots) \quad (9.15)$$

と書ける。高次の項まで具体的に計算するのは大変だが、共形ブロックは演算子積展開の係数に依存せず、**共形不変性だけで決まる量**である。4 点関数の係数  $g(u, v)$  は共形ブロックによって以下のように表せる。

$$g(u, v) = \sum_{\mathcal{O}} f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2 g_{\Delta_{\mathcal{O}}, l_{\mathcal{O}}}(u, v) \quad (9.16)$$

これを共形ブロック展開という。この時点では共形ブロックが  $u, v$  に依存することは明らかでないが、次のように表示すると明らかである。

$$\frac{f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2}{x_{12}^{2\Delta_\phi} x_{34}^{2\Delta_\phi}} g_{\Delta_{\mathcal{O}}, l_{\mathcal{O}}} = \sum_n \langle \phi(x_3)\phi(x_4) | \mathcal{O}, n \rangle \langle \mathcal{O}, n | \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle \quad (9.17)$$

ここで、 $|x_{3,4}| \geq |x_{1,2}|$  を仮定している。また  $|\mathcal{O}, n\rangle$  は  $\mathcal{O}$  のディセンダントを規格直交化した基底であり、 $\sum_n |\mathcal{O}, n\rangle \langle \mathcal{O}, n|$  は  $\mathcal{O}$  から生成される共形族への射映演算子を表す。射映演算子は共形変換



の全ての生成子と交換し、右辺は4点関数と同様の変換性を示すため、共形ブロックは  $u, v$  のみに依存すると分かる。

#### 9.4 共形 Casimir 演算子による計算

共形ブロックを求める方法はいくつかあるが、ここでは共形 Casimir 演算子による方法を紹介する。ただし、以降の議論でこの節の結果を用いることはない。この節で伝えたいことは、共形ブロックを具体的に求めることができるという点である。

共形 Casimir 演算子は、共形次元  $\Delta$ 、スピン  $l$  の状態に対して以下の固有値を持つ。

$$\mathcal{C}|\mathcal{O}\rangle = -\lambda_{\Delta,l}|\mathcal{O}\rangle, \quad \lambda_{\Delta,l} = \Delta(\Delta - d) + l(l + d - 2) \quad (9.18)$$

これを  $|\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle := \phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle$  に作用させると、

$$\mathcal{C}|\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle = \mathcal{D}_{1,2}|\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle, \quad \mathcal{D}_{1,2} := -\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{ab,1} + \mathcal{L}_{ab,2})(\mathcal{L}^{ab,1} + \mathcal{L}^{ab,2}) \quad (9.19)$$

となる。したがって、4点関数に対し、

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{1,2} \left( \sum_n \langle \phi(x_3)\phi(x_4)|\mathcal{O}, n \rangle \langle \mathcal{O}, n | \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle \right) \\ &= \sum_n \langle \phi(x_3)\phi(x_4)|\mathcal{O}, n \rangle \langle \mathcal{O}, n | \mathcal{C}|\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle \\ &= \lambda_{\Delta_{\mathcal{O}}, l_{\mathcal{O}}} \sum_n \langle \phi(x_3)\phi(x_4)|\mathcal{O}, n \rangle \langle \mathcal{O}, n | \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle \end{aligned} \quad (9.20)$$

となる。 $\mathcal{D}_{1,2}$  を複比  $u, v$  についての微分演算子  $\mathcal{D}$  に直せば、共形ブロックについての微分方程式

$$\mathcal{D}g_{\Delta,l}(u, v) = \lambda_{\Delta,l}g_{\Delta,l}(u, v) \quad (9.21)$$

が得られる。 $\mathcal{D}$  は

$$u = z\bar{z}, \quad v = (1-z)(1-\bar{z}) \quad (9.22)$$

で定められる  $z$  座標を用いて、以下のように表される [4]。

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= 2(z^2(1-z)\partial_z^2 - z^2\partial_{\bar{z}}^2) + 2(\bar{z}^2(1-\bar{z})\partial_{\bar{z}}^2 - \bar{z}^2\partial_z^2) \\ &\quad + 2(d-2)\frac{z\bar{z}}{z-\bar{z}}((1-z)\partial_z - (1-\bar{z})\partial_{\bar{z}}) \end{aligned} \quad (9.23)$$

$$g_{\Delta,l}^{(2d)}(u, v) = k_{\Delta+l}(z)k_{\Delta-l}(\bar{z}) \quad (9.24)$$

## 10 共形ブートストラップ

この章では共形ブートストラップについて概略を説明する。技術的な部分については [8],[9] を参照してほしい。

この方法はモデルの具体的な Hamiltonian を指定せずに、演算子積展開から導かれる相関関数の自己無撞着性によって、共形データを決定する試みである。

### 10.1 交差対称性 (crossing symmetry)

相関関数を演算子積展開によって計算する時、演算子積展開を適用する順序には任意性がある。異なる順序の計算は全て同じ結果を与えなければならない。この条件を**交差対称性 (crossing symmetry)**と呼ぶ。

まず、3 点関数の交差対称性

$$\mathcal{O}_1 \cdot (\mathcal{O}_2 \cdot \mathcal{O}_3) = \mathcal{O}_1 \cdot (\mathcal{O}_3 \cdot \mathcal{O}_2) = \mathcal{O}_2 \cdot (\mathcal{O}_1 \cdot \mathcal{O}_3) = \dots \quad (10.1)$$

から、演算子積展開の係数  $f_{ijk}$  に対して、

$$f_{ijk} = f_{ikj} = f_{jik} \quad (10.2)$$

が成り立つ。つまり  $f_{ijk}$  は完全対称である。これは  $\mathcal{O}_i$  が期待値の中で可換なことから自明な関係式である。

次に、4 点関数の交差対称性を考える。3 点関数と 4 点関数についての交差対称性から、任意の  $n$  点関数についての交差対称性が導かれるので、これ以上の条件は必要ない。簡単のために同一スカラープライマリー場の 4 点関数  $\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \rangle$  を考え、以下の 2 つの順序で計算する。

$$\langle (\phi(x_1) \cdot \phi(x_2)) \cdot (\phi(x_3) \cdot \phi(x_4)) \rangle = \langle (\phi(x_1) \cdot \phi(x_4)) \cdot (\phi(x_2) \cdot \phi(x_3)) \rangle \quad (10.3)$$

共形ブロックを用いると、4 点関数は

$$\langle (\phi(x_1) \cdot \phi(x_2)) \cdot (\phi(x_3) \cdot \phi(x_4)) \rangle = \frac{g(u, v)}{x_{12}^{2\Delta_\phi} x_{34}^{2\Delta_\phi}}, \quad g(u, v) = \sum_{\mathcal{O}} f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2 g_{\Delta_{\mathcal{O}}, l_{\mathcal{O}}}(u, v) \quad (10.4)$$

と書けるので、交差対称性から

$$\frac{g(u, v)}{x_{12}^{2\Delta_\phi} x_{34}^{2\Delta_\phi}} = \frac{g(v, u)}{x_{23}^{2\Delta_\phi} x_{14}^{2\Delta_\phi}} \quad (10.5)$$

が得られる。この式は以下のようなダイアグラムで表される。

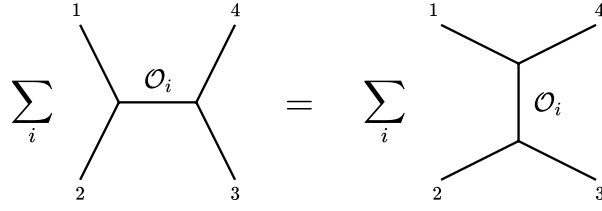


図 22: 交差対称性を表すダイアグラム。左は  $(\phi(x_1) \cdot \phi(x_2)) \cdot (\phi(x_3) \cdot \phi(x_4))$  の順序で、右は  $(\phi(x_1) \cdot \phi(x_4)) \cdot (\phi(x_2) \cdot \phi(x_3))$  の順序で演算子積展開を適用することを表す。

また複比

$$u = z\bar{z} = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}, \quad v = (1-z)(1-\bar{z}) = \frac{x_{23}^2 x_{14}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2} \quad (10.6)$$

を用いると、

$$v^{\Delta_\phi} g(u, v) = u^{\Delta_\phi} g(v, u) \quad (10.7)$$

が成り立つ。これを共形ブロックを使って書くと、

$$\sum_{\mathcal{O}} f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2 F_{\Delta_{\mathcal{O}}, l_{\mathcal{O}}}^{\Delta_\phi}(u, v) = 0, \quad F_{\Delta, l}^{\Delta_\phi}(u, v) := (v^{\Delta_\phi} g_{\Delta, l}(u, v) - u^{\Delta_\phi} g_{\Delta, l}(v, u)) \quad (10.8)$$

となる。この式を**交差方程式 (crossing equation)**と呼ぶ。4点関数の交差対称性はもう一つあり、 $x_1$  と  $x_2$  を入れ替えることで

$$g(u, v) = g(u/v, 1/v) \quad (10.9)$$

が成り立つ。ただしこれは演算子積展開の順序交換  $\mathcal{O}_1 \cdot \mathcal{O}_2 \leftrightarrow \mathcal{O}_2 \cdot \mathcal{O}_1$  についての対称性であり、自明な関係式である。任意の置換に対する交差対称性は以上の2つの関係式から構成できる。

## 10.2 共形データに対する制限

(10.8) は2変数の関数空間における無限次元の拘束条件となっている。解析的に(10.8)から情報を引き出す試みもあるが、この節では厳密に解くことを諦め、不等式として共形データに対する制限を求めることにする。

まず、 $f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2 \geq 0$  に注目する。<sup>\*34</sup> (10.8) は

$$\sum_{\Delta, l} p_{\Delta, l} \vec{F}_{\Delta, l}^{\Delta_\phi} = 0, \quad p_{\Delta, l} \geq 0 \quad (10.11)$$

<sup>\*34</sup> これを示すために実時間のシリンダー時空上での3点関数を考える。space-like に離れた3点に対し、演算子が可換であることを用いると、

$$\langle 0 | \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \mathcal{O}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_3) | 0 \rangle^* = \langle 0 | \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \mathcal{O}^{\mu_1 \dots \mu_l}(x_3) | 0 \rangle \quad (10.10)$$

となる。したがって  $f_{\phi_1 \phi_2 \mathcal{O}}^* = f_{\phi_1 \phi_2 \mathcal{O}}$  が言える。ただし場の演算子が Hermite 演算子であることを仮定した。

という形で書ける。ここで  $F_{\Delta\phi, l\phi}^{\Delta\phi}(u, v)$  を  $u, v$  についての関数空間におけるベクトルとみなし、 $\vec{F}_{\Delta\phi, l\phi}^{\Delta\phi}$  と書いた。これは無限次元のベクトルだが、有限次元の部分空間に射映しても、以下の議論は問題なく成り立つ。

次に、演算子積展開に現れる  $\Delta, l$  を仮定する。つまり、 $f_{\phi\phi\phi}^2 > 0$  となる  $\phi$  の共形次元およびスピンを仮定する。このような  $\Delta, l$  に対し線型汎関数  $\alpha$  で

$$\alpha(\vec{F}_{\Delta, l}^{\Delta\phi}) \geq 0 \quad (10.12)$$

となるものがあつたとしよう。ただし、左辺が正になるような  $\Delta, l$  が少なくとも 1 つ存在するとする。このとき、

$$\sum_{\Delta, l} p_{\Delta, l} \alpha(\vec{F}_{\Delta, l}^{\Delta\phi}) > 0 \quad (10.13)$$

が成り立つ。これは (10.11) と矛盾するので、仮定が排除される。

具体例として、2 次元の共形場理論で、共形次元が  $\Delta_\phi = 1/8$  となるスカラープライマリ場  $\phi$  を有する理論を考える [8]。  $\vec{F}$  を以下の写像によって 2 次元の部分空間に射映する。

$$\vec{v}(F) = \left( H\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right) - H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), H\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right) - H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 \quad (10.14)$$

ここで、

$$H(z, \bar{z}) = \frac{F(u, v)}{u^{\Delta_\phi} - v^{\Delta_\phi}}, \quad u = z\bar{z}, \quad v = (1-z)(1-\bar{z}) \quad (10.15)$$

である。図 23 は、ありうる全ての  $l, \Delta$  に対し、 $\vec{v}(F_{\Delta, l}^{\Delta\phi})$  をプロットしたものである。まず恒等演算子に対し、 $F_{0,0}^{\Delta\phi}(u, v) = u^{\Delta_\phi} - v^{\Delta_\phi}$  となることから、 $\vec{v}(F_{0,0}^{\Delta\phi}) = (0, 0)$  となる。  $l$  が奇数となる演算子はスカラー演算子の 4 点関数の計算では現れないので無視している。また  $l \rightarrow \infty$  としたとき、軌道は図の  $y$  軸に近づいていくことが読み取れる。

2 次元空間を原点を通る直線で 2 つに分けた時、演算子積展開に現れる全ての演算子が片側に分布してしまうと、ベクトル  $\vec{u}$  が存在して

$$\alpha(F_{\Delta, l}^{\Delta\phi}) := \vec{u} \cdot \vec{v}(F_{\Delta, l}^{\Delta\phi}) > 0 \quad (10.16)$$

となってしまう。このとき交差対称性を満たすことはできない。ここでスピン 0 の演算子に注目すると、交差対称性を満たすためには  $\Delta \in [0.161, 1.04]$  となるような演算子が演算子積展開に現れなければならないことが分かる。

この制限がどこまで強いものなのかを、厳密解と比較して考えてみる。2 次元 Ising 模型は実スカラー場  $\sigma$  をもち、その共形次元は  $\Delta_\sigma = 1/8$  である。  $\sigma \times \sigma$  の演算子積展開に現れるもっとも次元の低いスカラー場はエネルギー演算子  $\varepsilon$  であり、その共形次元は  $\Delta_\varepsilon = 1$  である。つまり、 $\Delta_{\text{scalar}} \leq 1.04$  は実際の理論に対して 4% 程度の精度で上限を与えていることが分かる。

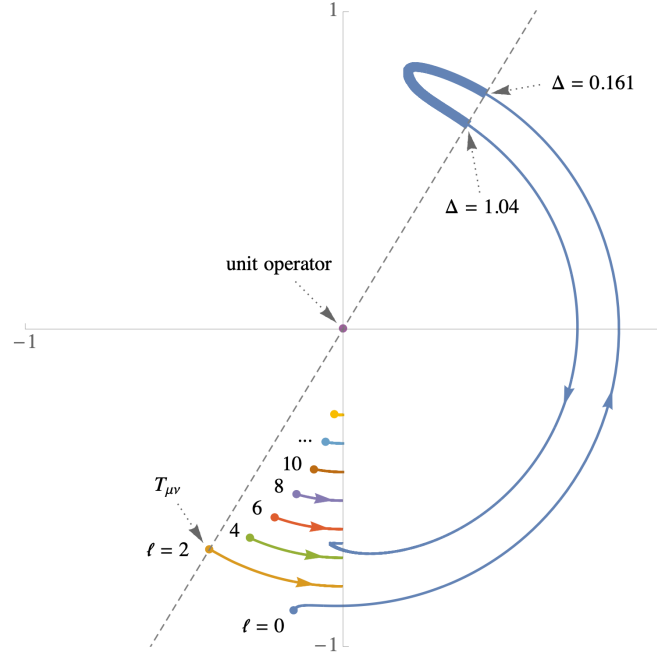


図 23: [8] より引用。それぞれの軌跡はスピン  $l$  の演算子に対し、 $\Delta$  を  $\Delta_{\min} = l + d - 2 = l$  から始めて連続的に大きくしていった場合の  $\vec{v}(F_{\Delta,l}^{\Delta\phi})$  を表す。

### 10.3 半正定値計画問題

## References

- [1] Alexander Altland and Ben D Simons. *Condensed matter field theory*. Cambridge university press, 2010. URL: <http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes/altland.pdf>.
- [2] John Cardy. *Scaling and renormalization in statistical physics*. Vol. 5. Cambridge university press, 1996.
- [3] Miguel S. Costa et al. “Spinning conformal correlators”. In: *Journal of High Energy Physics* 2011.11 (Nov. 2011). DOI: [10.1007/jhep11\(2011\)071](https://doi.org/10.1007/jhep11(2011)071). URL: <https://doi.org/10.1007%2Fjhep11%282011%29071>.
- [4] F.A. Dolan and H. Osborn. “Conformal partial waves and the operator product expansion”. In: *Nuclear Physics B* 678.1-2 (Feb. 2004), pp. 491–507. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2003.11.016](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2003.11.016). URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.nuclphysb.2003.11.016>.
- [5] Nigel Goldenfeld. *Lectures on phase transitions and the renormalization group*. CRC Press, 2018.

- [6] Joseph Gerard Polchinski. *String theory, volume I: An introduction to the bosonic string*. Cambridge university press Cambridge, 1998.
- [7] Slava Rychkov. *EPFL Lectures on Conformal Field Theory in  $D \geq 3$  Dimensions*. Springer International Publishing, 2017. DOI: [10 . 1007 / 978 - 3 - 319 - 43626 - 5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-43626-5). URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-43626-5>.
- [8] David Simmons-Duffin. *TASI Lectures on the Conformal Bootstrap*. 2016. arXiv: [1602.07982 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1602.07982).
- [9] 中山優. 高次元共形場理論への招待 : 3次元臨界 *Ising* 模型を解く. SGC ライブラリ. サイエンス社, 2019.
- [10] 藤川和男. 経路積分と対称性の量子的破れ. 新物理学選書. 岩波書店, 2001.