双対変換とダイマー模型

双対変換とダイマー模型

QDM をゲージ理論の見方から解析する。古典的な背景場 $B(e)$ によって、

$$E(e) = \partial N(e) + B(e) \tag{1.1}$$

と表す。$N(e)$ は整数値を固有値にもつ演算子である。$B(e)$ は

$$\partial E(v) = \partial B(v) = \rho(v), \quad \rho = \sum v_A - \sum v_B \tag{1.2}$$

を満たす。$B(e)$ の設定には以下のような自由度がある。

$$B(e) \to B(e) - \partial S(e), \quad N(f) \to N(f) + S(f) \tag{1.3}$$

コサイクル $\tilde{\gamma}_i$ に対し、$(\tilde{\gamma}_i, B)$ は B の取り方によらない不変量となる。B はサイクルではないので、B はホモロジー類をなさないことに注意。

格子の双対変換をすると、$\partial \leftrightarrow \tilde{\partial}$ と置き換えることができる。すると $B(e)$ はゲージ場に対応し、$N(v)$ は物質場に対応する。また

$$\tilde{\partial} B(f) = \rho(f) \tag{1.4}$$

となり、ρ は電荷ではなく磁束になる。

双対変換とダイマー模型

$A(e)$ と $E(e)$ の間の正準交換関係から

$$[(\partial f, A), (e, E)] = \mathrm{i}(e, \partial f) \tag{1.5}$$

が成り立つ。$E = \partial N + B$ を代入し、Stokes の定理を用いると

$$[(f, \tilde{\partial} A), (\tilde{\partial} e, N)] = \mathrm{i}(f, \tilde{\partial} e) \tag{1.6}$$

となる。B が演算子でないことに注意。よって $N(f)$ と $F(f) := \tilde{\partial} A(f)$ の間に正準交換関係

$$[F(f), N(f')] = \mathrm{i}\delta_{f,f'} \tag{1.7}$$

が設定される。$N(f)$ は電磁場 $F(f)$ をシフトする演算子である。

双対変換とダイマー模型

QDM のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2k}\left(\|E\|^2 - \frac{|\mathcal{V}|}{2}\right) + 2\bar{J}\sum_f \cos\left(\tilde{\partial}A(f)\right) + \frac{V}{2}\|\tilde{\partial}E\|^2 - \frac{V|\mathcal{V}|}{2} \tag{1.8}$$

を双対な変数 $B(e), N(f), F(f)$ で表すと、

$$H = \frac{1}{2k}\left(\|\partial N + B\|^2 - \frac{|\mathcal{V}|}{2}\right) - 2\bar{J}\sum_v \cos F(v) + \frac{V}{2}\| - \Delta N + \tilde{\partial}B\|^2 - \frac{V|\mathcal{V}|}{2} \tag{1.9}$$

となる。ただし $\Delta = -(\partial + \tilde{\partial})^2 = -\partial\tilde{\partial} - \tilde{\partial}\partial$ である。また常に $k \to 0$ を仮定する。これらを比べると、以下のことに気づく。

(i) 運動項とポテンシャル項が入れ替わっている。

(ii) 変数が前者では $\mathrm{U}(1)$ で、後者では $\mathbb{Z}$ である。

(iii) 前者はゲージ $\mathrm{U}(1)$ 対称性をもつが、後者は $N \to N + n_0$ に対する対称性をもつ。

双対変換とダイマー模型

整数の自由度をもつ模型は多くの場合 discrete Gaussian (DS) 模型や Solid on Solid (SOS) 模型として議論される。例えば以下のハミルトニアンが典型的である。

$$H_{\mathrm{c}} = \frac{\gamma}{2}\|\tilde{\partial} N\|^2 \tag{1.10}$$

SOS 模型は多くの場合 2 つの相をもつ。相関関数

$$g_\alpha(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha N(\boldsymbol{r})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha N(\boldsymbol{r}')}\rangle, \quad G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \langle N(\boldsymbol{r}) - N(\boldsymbol{r}')\rangle \tag{1.11}$$

は $T < T_{\mathrm{R}}$, $T > T_{\mathrm{R}}$ においてそれぞれ以下のように振る舞う。

$$g_\alpha(R) \approx \begin{cases} M^2 + \mathrm{const.} \times \mathrm{e}^{-R/\xi(T)} & T < T_{\mathrm{R}} \quad \text{(smooth phase)} \\ \mathrm{const.} \times R^{-\eta(\alpha,T)} & T > T_{\mathrm{R}} \quad \text{(rough phase)} \end{cases} \tag{1.12}$$

$$G(R) \approx \begin{cases} m^2 + \mathrm{const.} \times \mathrm{e}^{-R/\xi(T)} & T < T_{\mathrm{R}} \quad \text{(smooth phase)} \\ \mathrm{const.} \times \ln(R/a_0) & T > T_{\mathrm{R}} \quad \text{(rough phase)} \end{cases} \tag{1.13}$$

量子ゆらぎを考慮に入れると状況は変わるらしい。（どう変わるの？）

以下では経路積分を使って議論する。虚時間で考えて、分配関数を以下のように Trotter 分解する。

$$Z = \lim_{N_\tau \to \infty} \mathrm{tr}\left(\left[\mathrm{e}^{-\mathit{\Delta}_\tau H_\mathrm{kin}} \mathrm{e}^{-\mathit{\Delta}_\tau H_\mathrm{pot}} \right]^{N_\tau} \right) \tag{1.14}$$

ここで $\beta = \mathit{\Delta}_\tau N_\tau$ とした。H_pot は $|\{N\}\rangle$ について対角的な部分であり、

$$\langle \{N_j\} | \mathrm{e}^{-\mathit{\Delta}_\tau H_\mathrm{kin}} \mathrm{e}^{-\mathit{\Delta}_\tau H_\mathrm{pot}} | \{N_{j+1}\} \rangle = \langle \{N_j\} | \mathrm{e}^{-\mathit{\Delta}_\tau H_\mathrm{kin}} | \{N_{j+1}\} \rangle \mathrm{e}^{-\mathit{\Delta}_\tau H_\mathrm{pot} \{N_{j+1}\}} \tag{1.15}$$

となる。ここで、

$$H_\mathrm{pot} \{N_j\} = \frac{1}{2k} \left(\| \partial N_j + B_j \|^2 - \frac{|\mathcal{V}|}{2} \right) + \frac{V}{2} \| - \Delta N_j + \tilde{\partial} B_j \|^2 - \frac{V|\mathcal{V}|}{2} \tag{1.16}$$

である。

一方

$$\langle \{N_j\} | \mathrm{e}^{-\Delta_\tau H_{\mathrm{kin}}} | \{N_{j+1}\} \rangle = \langle \{N_j\} | \mathrm{e}^{2\Delta_\tau \bar{J} \sum_f \cos F(f)} | \{N_{j+1}\} \rangle \tag{1.17}$$

である。ここで

$$\mathrm{e}^{z \cos p} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(z) \mathrm{e}^{\mathrm{i} l p} \tag{1.18}$$

を用いる。$I_l(z)$ はベッセル関数である。すると、

$$\begin{aligned} &\sum_{\{l(f)\}} \left(\prod_f I_{l(f)}(2\bar{J}\Delta_\tau) \right) \langle N_j | \mathrm{e}^{\mathrm{i} \sum_f l(f) F(f)} | N_{j+1} \rangle \\ &= \sum_{\{l\}} \left(\prod_f I_{l(f)}(2\bar{J}\Delta_\tau) \right) \langle N_j | N_{j+1} + l \rangle \\ &= \prod_f I_{N_j(f) - N_{j+1}(f)}(2\bar{J}\Delta_\tau) \end{aligned} \tag{1.19}$$

となる。

$$I_l(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{z} \mathrm{e}^{-l^2/2z} (1 + \mathcal{O}(z^{-1})) \tag{1.20}$$

を代入すると、

$$\prod_f I_{N_j(f)-N_{j+1}(f)}(2\bar{J}\mathit{\Delta}_\tau) \propto \exp\left(\frac{1}{4\bar{J}\mathit{\Delta}_\tau} \sum_j \|N_{j+1} - N_j\|^2\right) \tag{1.21}$$

となる。よって分配関数を経路積分によって

$$Z = \lim_{\mathit{\Delta}_\tau \to 0} \sum_{\{N\}} \mathrm{e}^{-S\{N\}} \tag{1.22}$$

としたときの作用が

$$\begin{aligned} S\{N\} = &\frac{\mathit{\Delta}_\tau}{4\bar{J}} \sum_j \|\partial_0 N_j\|^2 \\ &+ \frac{\mathit{\Delta}_\tau}{2k} \sum_j \left(\|\partial N_j + B_j\|^2 - \frac{|\mathcal{V}|}{2}\right) \\ &+ \frac{V\mathit{\Delta}_\tau}{2} \sum_j \| - \Delta N_j + \tilde{\partial} B_j\|^2 \end{aligned} \tag{1.23}$$

と求まる。ここで $\partial_0 N_j := (N_{j+1} - N_j)/\mathit{\Delta}_\tau$ である。

量子ダイマー模型とモノポール気体

Poisson 和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int \mathrm{d}\phi\, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}m\phi} f(\phi) \tag{2.1}$$

によって、整数の変数 $N(v)$ を実数 $\phi(v)$ と整数 $m(v)$ に置き換えられる。すると

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{m\}} \int \mathcal{D}\phi \exp\left(2\pi\mathrm{i}(m,\phi) - S[\phi]\right) \\ &= \sum_{\{m\}} \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-S_B[\boldsymbol{B}] - S_\phi[\phi] - S_{\mathrm{int}}[\phi, m, \boldsymbol{B}]\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

と表せる。ここで、

$$S_\phi[\phi] = \mathit{\Delta}_\tau \sum_x \left(\frac{1}{4\bar{J}} (\partial_0 \phi(x))^2 + \frac{1}{2k} (\partial \phi(x))^2 + \frac{V}{2} (\Delta \phi(x))^2 \right) \tag{2.3}$$

$$S_{\mathrm{int}}[\phi, m, B] = \mathit{\Delta}_\tau \sum_x \phi(x) \left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathit{\Delta}_\tau} m(x) + \frac{1}{k} \tilde{\partial} B(x) - V \Delta \tilde{\partial} B(x) \right) \tag{2.4}$$

である。ただし $x = (x^0, \boldsymbol{x})$ とし、$x^0 = j\mathit{\Delta}_\tau$, $j = 1, \ldots, N_\tau$ である。また $\boldsymbol{x}$ は双対な正方格子の格子点を表すベクトルである。

作用は ϕ について 2 次形式になっているので、ϕ を integrate out することができる。まず、

$$S_\phi[\phi] = -\frac{\Delta_\tau}{2}\sum_x \phi(x)\left(\frac{1}{2\bar{J}}\partial_0^2 + \frac{1}{k}\Delta - V\Delta^2\right)\phi(x) \tag{2.5}$$

と表す。Green 関数 $G_0(x-x')$ は以下のように定義される。

$$-\left(\frac{1}{2\bar{J}}\partial_0^2 + \frac{1}{k}\Delta - V\Delta^2\right)G_0(x-x') = \delta_{x,x'} \tag{2.6}$$

連続極限をとって、Δ^2 の寄与を無視すると、Green 関数は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
G_0(x) &\approx \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\cdot x}}{q_0^2/2\bar{J} + (q_1^2+q_2^2)/k} \\
&= \frac{\sqrt{2\bar{J}}k}{4\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{2\bar{J}}q_0 x^0 + \mathrm{i}\sqrt{k}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}}{q^2} \\
&= \frac{k/4\pi}{\sqrt{x_0^2 + (k/2\bar{J})\boldsymbol{x}^2}}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

ϕ を integrate out すると、分配関数は

$$Z \propto Z_{\mathrm{CG}} = \sum_{\{m\}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{x,x'} m(x) V_{\mathrm{eff}}(x-x') m(x') + 2\pi \mathrm{i} \sum_{x} m(x)\Psi(x)\right) \tag{2.8}$$

となる。ここで

$$V_{\mathrm{eff}}(x) = \frac{4\pi^2}{\Delta_\tau} G_0(x) \approx \frac{\pi k/\Delta_\tau}{\sqrt{(x^0)^2 + (k/2\bar{J})\boldsymbol{x}^2}} \tag{2.9}$$

$$\Psi(x) = \sum_{x'} G_0(x-x')\left(\frac{1}{k}\tilde{\partial}B(x') - V\Delta\tilde{\partial}B(x')\right) \tag{2.10}$$

である。

次に $m(x)$ を integrate out する。モノポールが希薄であると仮定して $m(x)=0,\pm 1$ のみを考える。さらに作用に

$$S_{\mathrm{core}} = u\sum_x m(x)^2 \tag{2.11}$$

を加える。m に関して和をとると、

$$\prod_x \sum_{m(x)=0,\pm 1} \mathrm{e}^{um(x)^2+2\pi \mathrm{i} m(x)\phi(x)} = \prod_x \left(1+z\cos\left(2\pi\phi(x)\right)\right) \tag{2.12}$$

となる。ここでモノポールのフガシティを $z=\mathrm{e}^{-2u}$ とおいた。ここから、背景磁束 B を無視すれば、有効理論の作用は sine-Gordon 模型

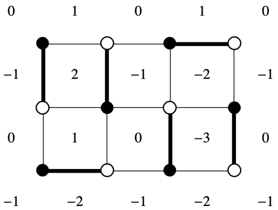
$$S = \int \mathrm{d}^D x \left[\frac{K}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - g\cos(2\pi\phi)\right] \tag{2.13}$$

になると推察できる。

量子 Lifshitz 模型

量子 Lifshitz 模型

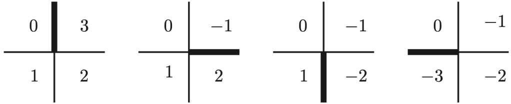
これからやりたいのは RK point の有効理論を調べることである。RK point の基底状態は古典ダイマー模型にマップできたので、まず古典ダイマー模型を見直すところから始める。ダイマー配位について高さ関数を定める。



これは以下のように決める。

- 白を右に見て占有されている辺を横切ると高さは $+3$
- 白を右に見て占有されていない横切ると高さは -1

ここで一つの白い頂点に対し、そのまわりの高さの平均は以下のようになる。



$h = \frac{3}{2}$ $h = \frac{1}{2}$ $h = -\frac{1}{2}$ $h = -\frac{3}{2}$

h の原点をずらすと、これらが $h = 0, 1, 2, 3$ に対応するようにできる。

高さ関数をコンパクト化して角度変数 φ を $\varphi = (\pi/2)h$ と定義する。ダイマーの密度と φ の対応は以下のようにして得られる。

$$n_x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}(-1)^{x+y}\partial_y\varphi = (-1)^x \cos\varphi \tag{3.1}$$

$$n_y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}(-1)^{x+y+1}\partial_x\varphi = -(-1)^y \sin\varphi \tag{3.2}$$

（Fradkin はこれらを足してしまっているが、怪しい。）

$\varphi(\boldsymbol{x})$ に対する有効理論は free boson であり、作用は

$$S[\varphi] = \int \mathrm{d}^2 x \, \frac{K}{2} (\nabla \varphi(\boldsymbol{x}))^2 \tag{3.3}$$

である。free boson に対して以下の演算子を考える。

$$V_n(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi(\boldsymbol{x})}, \quad \tilde{V}_m(\boldsymbol{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\vartheta(\boldsymbol{x})} \tag{3.4}$$

ただし ϑ は Cauchy-Riemann の関係式によって

$$\partial_i \vartheta = \varepsilon_{ij} \partial_j \varphi \tag{3.5}$$

と定める。charge-density wave は $V_1(\boldsymbol{x})$ に対応づけられ、$1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$ の値を取る。columnar order parameter は $V_2(\boldsymbol{x})$ に対応づけられ、± 1 の値を取る。

厳密解によって、ダイマー密度の相関関数のべき依存性は $1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2$ となることが知られている。vertex operator の相関関数

$$\langle V_1(\boldsymbol{x}) V_{-1}(\boldsymbol{y}) \rangle = \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{2\Delta_1}}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{4\pi K} \tag{3.6}$$

と比較すると、自由なダイマー模型に対応する点として $K_{\mathrm{free}} = 1/4\pi$ を得る。

量子論に戻る。$\varphi(\boldsymbol{x}), \mathit{\Pi}(\boldsymbol{x})$ を正準共役な変数とする:

$$[\varphi(\boldsymbol{x}), \mathit{\Pi}(\boldsymbol{y})] = \mathrm{i}\delta^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{3.7}$$

QDM の有効理論のハミルトニアンとして、

$$H_0 = \int \mathrm{d}^2 x \left[\frac{1}{2} \mathit{\Pi}(\boldsymbol{x})^2 + \frac{A}{2} (\nabla \varphi(\boldsymbol{x}))^2 + \frac{\kappa^2}{2} (\nabla^2 \varphi(\boldsymbol{x}))^2 \right] \tag{3.8}$$

を考えよう。

1. $A > 0$ のときは秩序相に対応する。
2. $A = 0$ のときは量子臨界点に対応する。

それぞれについて見ていく。

まず $A>0$ のとき、$[T]=[L]$ である。ハミルトニアンを作用に直すと

$$S_0=\int \mathrm{d}^2x\,\mathrm{d}\tau\left[\frac{1}{2}(\partial_\tau\varphi(\boldsymbol{x}))^2+\frac{A}{2}(\nabla\varphi(\boldsymbol{x}))^2+\frac{\kappa^2}{2}(\nabla^2\varphi(\boldsymbol{x}))^2\right] \tag{3.9}$$

である。次元解析すると $[\varphi]=[L^{-1/2}]$ であり、$[(\nabla^2\varphi)^2]=[L^{-5}]$ は irelevant である。高さ関数の周期性から、この作用に

$$S_{\mathrm{int}}=\int \mathrm{d}^2x\,\mathrm{d}\tau\,g\cos(4\varphi) \tag{3.10}$$

という項を追加する。S_{int} は $A>0$ のとき relevant であり、作用に含める必要がある。くりこみによって g が大きくなるため、$A>0$ の相は g の強結合相によって記述される。有効理論の作用は

$$S_{\mathrm{eff}}=\int \mathrm{d}^2x\,\mathrm{d}\tau\left[\frac{1}{2}(\partial_\tau\varphi(\boldsymbol{x}))^2+\frac{1}{2}(\nabla\varphi(\boldsymbol{x}))^2+\frac{g}{\sqrt{A}}\cos(4\varphi(x))\right] \tag{3.11}$$

である。ただし $\tau\to\tau/\sqrt{A}$, $\boldsymbol{x}\to\sqrt{A}\boldsymbol{x}$ のようにスケールを取り直した。このとき φ は $\cos(4\varphi)$ の底の 1 つにあり、φ の揺らぎは gapped となって質量 $m_{\mathrm{eff}}^2\approx 16g/\sqrt{A}$ をもつ。この相は colomner order をもつ。

次に $A=0$ の場合を考える。この場合の作用は

$$S_{\mathrm{QLM}}=\int \mathrm{d}^2x\,\mathrm{d}\tau\left[\frac{1}{2}(\partial_\tau\varphi)^2+\frac{\kappa^2}{2}(\nabla^2\varphi)^2\right] \tag{3.12}$$

であり、これを量子 Lifschitz 模型と呼ぶことにする。次元解析をすると $[T]=[L^2]$ であり、$[\varphi]=[1]$ である。摂動として、S_{int} の他に marginal な項

$$S_4=\int \mathrm{d}^2x\,\mathrm{d}\tau\,g_4\,(\nabla\varphi)^4 \tag{3.13}$$

を考えることができる。これは marginaly irelevant ではあるが、$A<0$ の場合に秩序相を安定化する。古典的に安定な φ の配位が $\nabla\varphi=\boldsymbol{Q}$ のようにシフトするので、

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{x} \tag{3.14}$$

となる。$\boldsymbol{Q}$ は colomnar state の傾きを表している。$S_{\mathrm{QLM}}+S_4+S_{\mathrm{int}}$ を最小化するように $\boldsymbol{Q}$ を決定すると

$$|\boldsymbol{Q}|=\sqrt{\frac{|A|}{4g_4}} \tag{3.15}$$

となる。

量子 Lifshitz 模型

摂動を加えない場合はくりこみに対して不安定であるが、この場合は臨界点として重要である。量子 Lifshitz 模型のハミルトニアンをゲージ理論の言葉で表現すると、

$$H_{\mathrm{QLM-gauge}} = \frac{\kappa^2}{2}\|\tilde{\partial}E\|^2 + \frac{1}{2}\|\tilde{\partial}A\|^2 = \int \left(\frac{\kappa^2}{2}\mathrm{d}E \wedge \star\mathrm{d}E + \frac{1}{2}\mathrm{d}A \wedge \star\mathrm{d}A \right) \tag{3.16}$$

となる。E, A は正準交換関係 $[E(e), A(e')] = \mathrm{i}(e, e')$ を満たし、状態はゲージ不変性 $\partial E(v)|\mathrm{Phys}\rangle = 0$ を満たすとする。ここで双対な理論に移り、$\partial \leftrightarrow \tilde{\partial}$ とする。

$$E(e) = \tilde{\partial}\varphi(e), \quad \mathit{\Pi}(v) = \partial A(v) \tag{3.17}$$

とすると、ゲージ不変性 $\tilde{\partial}E = 0$ は直ちに成り立つ。また $\varphi(v), \mathit{\Pi}(v)$ の間の交換関係は

$$[\varphi(v), \mathit{\Pi}(v')] = \mathrm{i}(v, v') \tag{3.18}$$

となる。ハミルトニアンを $\varphi, \mathit{\Pi}$ を使って表示すると、

$$H_{\mathrm{QLM-gauge}} = \frac{1}{2}\|\mathit{\Pi}\|^2 + \frac{\kappa^2}{2}\|\Delta\varphi\|^2 = \int \left(\frac{1}{2}\mathit{\Pi} \wedge \star\mathit{\Pi} + \frac{\kappa^2}{2}\Delta\varphi \wedge \star\Delta\varphi \right) \tag{3.19}$$

である。

量子 Lifshitz 模型

電荷演算子は

$$O_n(v) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\gamma_v, E)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\partial\gamma_v, \varphi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi(v)} \tag{3.20}$$

である。磁荷演算子は

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\tilde{\gamma}_v, A)} \tag{3.21}$$

である。磁荷があるときのゲージ不変性は $\tilde{\partial} E = mv$ であり、

$$E = \tilde{\partial}\varphi + \mathcal{B}, \quad \tilde{\partial}\mathcal{B} = mv \tag{3.22}$$

と表せる。するとハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{QLM-gauge}} = \frac{1}{2}\|\mathit{\Pi}\|^2 + \frac{\kappa^2}{2}\|\Delta\varphi + \partial\mathcal{B}\|^2 \tag{3.23}$$

となる。

量子 Lifshitz 模型

ここで Schrödinger 汎函数 $\Psi[\varphi] := \langle[\varphi]|\Psi\rangle$ を用いて考える。ハミルトニアンの作用は

$$
\begin{aligned}
H\Psi[\varphi] &= \int \mathrm{d}^2x \left[-\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta\varphi(\boldsymbol{x})^2} + \frac{\kappa^2}{2}(\nabla^2\varphi(\boldsymbol{x}))^2\right]\Psi[\varphi] = E\Psi[\varphi] \\
&= \int \mathrm{d}^2x\, \frac{1}{2}\left\{Q[\varphi], Q^\dagger[\varphi]\right\}\Psi[\varphi]
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

と書ける。ただし $Q^\dagger[\varphi], Q[\varphi]$ は生成消滅演算子であり、

$$
Q[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{\delta}{\delta\varphi(\boldsymbol{x})} + \kappa\nabla^2\varphi(\boldsymbol{x})\right] \tag{3.25}
$$

と定義される。基底状態は、汎函数微分方程式 $Q\Psi_0[\varphi] = 0$ を解くことで

$$
\Psi_0[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{Z_0}}\exp\left(-\int \mathrm{d}^2x\, \frac{\kappa}{2}(\nabla\varphi(\boldsymbol{x}))^2\right) \tag{3.26}
$$

と求まる。ただし、

$$
Z_0 = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(-\int \mathrm{d}^2x\, \kappa(\nabla\varphi(\boldsymbol{x}))^2\right) \tag{3.27}
$$

である。これは $K = 2\kappa$ の free boson の分配関数になっている。

電荷演算子の相関関数は

$$\langle \Psi_0 | O_{n_1}(\boldsymbol{x}_1) \cdots O_{n_N}(\boldsymbol{x}_N) | \Psi_0 \rangle = \langle V_{n_1}(\boldsymbol{x}_1) \cdots V_{n_N}(\boldsymbol{x}_N) \rangle_{\text{free boson}} \tag{3.28}$$

となって、$K = 2\kappa$ の free boson における vertex operator の相関関数に帰着する。
vertex operator の OPE は

$$V_{n_1}(\boldsymbol{x}_1) V_{n_2}(\boldsymbol{x}_2) \sim |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^{n_1 n_2 / 4\pi\kappa} V_{n_1+n_2}(\boldsymbol{x}_2) + \cdots \tag{3.29}$$

であるから、これを繰り返し適用していけば相関関数は求まる。特に、

$$\langle V_{-n}(\boldsymbol{x}_1) V_n(\boldsymbol{x}_2) \rangle = |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^{-n^2/4\pi\kappa} \tag{3.30}$$

であるから、電荷演算子 O_n のスケーリング次元が

$$\varDelta_n = n^2 8\pi\kappa \tag{3.31}$$

となることが分かる。

次に磁荷演算子について考える。これは

$$\tilde{O}_m(f) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}m(\tilde{\gamma}_f, A)} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\alpha_f, \mathit{\Pi})} \tag{3.32}$$

と表される。ただし、

$$\tilde{\partial}\tilde{\gamma}_f = f, \quad \tilde{\partial}\alpha_v = m\tilde{\gamma}_v \tag{3.33}$$

である。よって α_v は $\tilde{\partial}^2\alpha_v = mv$ の解である。連続の言葉で書くと

$$\mathrm{d}^2\alpha_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = m\delta^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \tag{3.34}$$

となる。一見すると左辺は 0 になるが、$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha_{\boldsymbol{x}}}$ が一価になることのみを要請すれば、

$$\alpha_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = m\arg(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \tag{3.35}$$

という解がある。$\mathit{\Pi}$ は φ に共役な演算子だったので、磁荷演算子は

$$\tilde{O}_m(\boldsymbol{x})|[\varphi]\rangle = |[\varphi - \alpha_{\boldsymbol{x}}]\rangle \tag{3.36}$$

という作用になっている。これは特異ゲージ変換とみなせる。

磁荷がある場合の Schrödinger 汎函数は、

$$\Psi_{m,\boldsymbol{x}}[\varphi] = \langle[\varphi]|\tilde{O}_m(\boldsymbol{x})|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \exp\left(-\frac{\kappa}{2}\|\tilde{\partial}\varphi - m\tilde{\gamma}_{\boldsymbol{x}}\|^2\right) \tag{3.37}$$

となる。すると、$\tilde{\gamma}_{\boldsymbol{x}}$ がゲージ場に見えてくる。磁荷演算子の相関関数は

$$\langle\Psi_0|\tilde{O}_{m_1}(\boldsymbol{x})\cdots\tilde{O}_{m_M}(\boldsymbol{x}_M)|\Psi_0\rangle = \frac{1}{Z_0}\int\mathcal{D}\varphi\exp\left(-\kappa\int\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\,(\nabla\varphi-\boldsymbol{A})^2\right) \tag{3.38}$$

となる。ここでベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は

$$\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 2\pi\sum_{l=1}^{M} m_l\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_l) \tag{3.39}$$

を満たす。磁荷演算子のスケーリング次元を求めるためには、シリンダー時空において、compactified free boson の巻きつき数 m の基底状態のエネルギーを求めればよい。詳細は省くが[1]

$$\tilde{\Delta}_m = 2\pi\kappa m^2 \tag{3.40}$$

となる。

[1]Yellow book (6.94) で $n=0, g=2\kappa$ とすると、$\tilde{\Delta}_m = (L_0+\bar{L}_0)|0\rangle$ から求まる。

Green 関数は

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\tau-\tau') = \langle\varphi(\boldsymbol{x},\tau)\varphi(\boldsymbol{x}',\tau')\rangle = \int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}}{(2\pi)^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\tau-\tau')-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{\omega^2+\kappa^2(\boldsymbol{q}^2)^2} \tag{3.41}$$

となる。これを正則化して、

$$G_{\mathrm{reg}}(\boldsymbol{x},\tau) := G(\boldsymbol{x},\tau)-G(\boldsymbol{a},0) := -\frac{1}{8\pi\kappa}\left[\ln\left(\frac{\boldsymbol{x}^2}{a^2}\right)+\mathit{\Gamma}\left(0,\frac{\boldsymbol{x}^2}{4\kappa|\tau|}\right)\right] \tag{3.42}$$

とする。(確かめてない。) $\mathit{\Gamma}(0,z)$ は

$$\mathit{\Gamma}(0,z) = \int_z^\infty\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{e}^{-s} \tag{3.43}$$

と定義される。漸近的な振る舞いは

$$G_{\mathrm{reg}}(\boldsymbol{x},\tau) = \begin{cases}-(1/4\pi\kappa)\ln(|\boldsymbol{x}|/a) & |t|\to 0\\ -(1/8\pi\kappa)\ln(4\kappa|\tau|/a^2\gamma) & |\boldsymbol{x}|\to a\end{cases} \tag{3.44}$$

となる。ここで $\ln\gamma = 0.577$ は Euler 定数。

vertex operator が正確には正規積をとったものであることに注意すると、Wick の定理から

$$\langle O_n(\boldsymbol{x},\tau)^\dagger O_n(\boldsymbol{x}',\tau')\rangle = \mathrm{e}^{n^2 G_{\mathrm{reg}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\tau-\tau')} \tag{3.45}$$

が成り立つ。よって、$|\tau-\tau'|\to 0$ のとき

$$\langle O_n(\boldsymbol{x},0)^\dagger O_n(\boldsymbol{x}',0)\rangle = \left(\frac{a}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)^{n^2/(4\pi\kappa)} \tag{3.46}$$

となる。また $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\to a$ のとき

$$\langle O_n(\mathbf{0},\tau)^\dagger O_n(\mathbf{0},\tau')\rangle = \left(\frac{a^2\gamma}{4\kappa|\tau-\tau'|}\right)^{n^2/(8\pi\kappa)} \tag{3.47}$$

となる。