1　相関関数

1.1　相関関数への制限

共形変換対称性が相関関数に与える制限を求める。作用と経路積分測度が共形変換に対して不変であるとき、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_N(x_N)\rangle = \left\langle \mathcal{O}'_1(x'_1)\cdots\mathcal{O}'_N(x'_N)\right\rangle \tag{1.1}$$

が成り立つ。これは全空間で積分した Ward-Takahashi 恒等式

$$\left\langle Q_a\Big(\mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_N(x_N)\Big)\right\rangle = \sum_{n=1}^{N}\langle \mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{Q}_a\mathcal{O}_n(x)\cdots\mathcal{O}_N(x_N)\rangle = 0 \tag{1.2}$$

から導くこともできる。これは以下のように図示される。

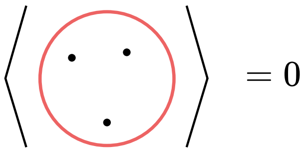

図 1: トポロジカル演算子が全ての演算子を囲む場合、期待値はゼロになる。

ここで $\mathcal{O}_n$ をスカラープライマリー場とし、

$$g_{\mu\nu}(x)\to g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}(x) \tag{1.3}$$

に対して、

$$\mathcal{O}'_n(x'_n) = \Omega(x_n)^{\Delta_n}\mathcal{O}_n(x_n) \tag{1.4}$$

となるとする。このとき、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle = \Omega(x_1)^{-\Delta_1}\cdots\Omega(x_N)^{-\Delta_N}\left\langle \mathcal{O}_1(x'_1)\cdots\mathcal{O}_N(x'_N)\right\rangle \tag{1.5}$$

となる。

1.2　2 点関数

まずスカラープライマリー場の 2 点相関関数を考える。並進対称性、回転対称性から

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\rangle &= \langle \mathcal{O}_1(x_1-x_2)\mathcal{O}_2(0)\rangle\\ &= \langle \mathcal{O}_1(|x_1-x_2|e)\mathcal{O}_2(0)\rangle\end{aligned} \tag{1.6}$$

と書ける。ただし、$e = (1, 0, 0, \dots)$ とした。つまり相関関数は $|x_1 - x_2|$ のみに依存する。さらに $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ の共形次元をそれぞれ Δ_1, Δ_2 とおくと、(1.5) から定数 C_{12} によって

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\rangle = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} \tag{1.7}$$

と書ける。これで相関関数の座標依存性が決定されてしまった。

さらに特殊共形変換を考えてみる。

$$x^\mu \to x'^\mu = \frac{x^\mu + x^2 c^\mu}{1 + 2c\cdot x + c^2 x^2} \tag{1.8}$$

に対し、計量は

$$g'_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}, \quad \Omega(x) = 1 - 2c\cdot x + c^2 x^2 \tag{1.9}$$

となる。これは特殊共形変換を反転と並進の合成として

$$x^\mu \to \frac{x^\mu}{x^2} \to \frac{x^\mu}{x^2} - c^\mu \to \frac{x^\mu/x^2 - c^\mu}{(x/x^2 - c)^2} \tag{1.10}$$

と表した時、2 回の反転によってスケールが $1/x^2(x/x^2 - c)^2$ 倍されることによる。したがって、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\rangle = \frac{1}{\Omega_1^{\Delta_1}\Omega_2^{\Delta_2}} \langle \mathcal{O}_1(x'_1)\mathcal{O}_2(x'_2)\rangle \tag{1.11}$$

となる。ここで $\Omega_j = 1 - 2c\cdot x_j + c^2 x_j^2$ と定義した。さらに、反転変換について

$$\left(\frac{x_1}{x_1^2} - \frac{x_2}{x_2^2}\right)^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1^2 x_2^2} \tag{1.12}$$

が成り立つことから

$$(x'_1 - x'_2)^2 = \frac{(x_1/x_1^2 - x_2/x_2^2)^2}{(x_1/x_1^2 - c)^2(x_2/x_2^2 - c)^2} = \frac{(x_1 - x_2)^2}{\Omega_1\Omega_2} \tag{1.13}$$

となるので、(1.11) は

$$\frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} = \frac{(\Omega_1\Omega_2)^{(\Delta_1+\Delta_2)/2}}{\Omega_1^{\Delta_1}\Omega_2^{\Delta_2}} \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} \tag{1.14}$$

となる。これが成り立つのは $\Delta_1 = \Delta_2$ のときのみである。したがって、

$$\boxed{\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\rangle = \frac{C_{12}\delta_{\Delta_1\Delta_2}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta_1}}} \tag{1.15}$$

となる。すなわち共形不変性の帰結として、共形次元が異なる場の相関関数は 0 である。

1.3　3 点関数

次に 3 点相関関数 $\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\rangle$ を考える。並進対称性と回転対称性から相関関数は $x_{ij} = |x_i - x_j|$ の関数となる。またスケール不変性から、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\rangle = \sum_{a,b,c} \frac{C_{123}^{abc}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{31}^c} \tag{1.16}$$

と書ける。ただし、a, b, c は $a+b+c = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ 満たすとする。次に特殊共形変換を考えると、

$$\frac{C_{123}^{abc}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{31}^c} = \frac{(\Omega_1\Omega_2)^{a/2}(\Omega_2\Omega_3)^{b/2}(\Omega_3\Omega_1)^{c/2}}{\Omega_1^{\Delta_1}\Omega_2^{\Delta_2}\Omega_3^{\Delta_3}} \frac{C_{123}^{abc}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{31}^c} \tag{1.17}$$

となる。ここから、

$$a + b = 2\Delta_2, \quad b + c = 2\Delta_3, \quad c + a = 2\Delta_1 \tag{1.18}$$

が分かる。これを解いて、

$$a = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3, \quad b = \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1, \quad c = \Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2 \tag{1.19}$$

となるので、3 点相関関数は定数 f_{123} によって

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\rangle = \frac{f_{123}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} x_{31}^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}} \tag{1.20}$$

と書ける。

1.4　4 点関数

次に 4 点相関関数 $\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4)\rangle$ を考える。並進対称性と回転対称性から相関関数は $x_{ij} = |x_i - x_j|$ の関数となる。またスケール不変性から、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\mathcal{O}_3(x_3)\mathcal{O}_4(x_4)\rangle = \sum_{a,b,c,d,e,f} \frac{C_{1234}^{abcdeef}}{x_{12}^a x_{13}^b x_{14}^c x_{23}^d x_{24}^e x_{34}^f} \tag{1.21}$$

と書ける。ただし、$a+b+c+d+e+f = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$ が成り立つとする。しかし 3 点関数の場合と異なり特殊共形変換に対する変換性から a, b, c, d, e, f を求めることはできない。実際、複比 (crossratio)

$$u = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}, \quad v = \frac{x_{14}^2 x_{23}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2} \tag{1.22}$$

が共形変換で不変な量となっており、u,v のどのようなべきも許されるからである。u,v は明らかに並進・回転・スケール変換について不変であり、特殊共形変換についても

$$u \to \frac{(\Omega_1\Omega_3)(\Omega_2\Omega_4)}{(\Omega_1\Omega_2)(\Omega_3\Omega_4)}u = u, \quad v \to \frac{(\Omega_1\Omega_3)(\Omega_2\Omega_4)}{(\Omega_1\Omega_4)(\Omega_2\Omega_3)}v = v \tag{1.23}$$

から不変であることが分かる。また、他に共形変換で保たれる量がないことは、以下のようにして分かる。

- 特殊共形変換によって x_4 を無限遠点に移す。
- 並進によって x_1 を原点に移す。
- 回転とスケール変換によって x_3 を $(1,0,0,\dots)$ に移す。
- x_3 を不変に保つ回転によって x_2 を $(x,y,0,0,\dots)$ に移す。

すると、自由度は 2 つのパラメーター x,y のみである。したがって、共形不変な独立なパラメーターが 2 つだけであることが分かる。$z = x+iy$ とおくと、u,v は

$$u = x_{12}^2 = z\bar{z}, \quad v = x_{23}^2 = (1-z)(1-\bar{z}) \tag{1.24}$$

と書ける。

(1.21) において、u,v のべきを括り出してまとめると、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_4(x_4)\rangle = \sum_{a,b,c,e} \frac{C_{1234}^{abce}(u,v)}{x_{12}^a x_{13}^b x_{14}^c x_{24}^e} \tag{1.25}$$

と書ける。特殊共形変換に対する変換性から、

$$a+b+c = 2\Delta_1, \quad a+e = 2\Delta_2, \quad b = 2\Delta_3, \quad c+e = 2\Delta_4 \tag{1.26}$$

となるので、これを解いて

$$a = \Delta_1+\Delta_2-\Delta_3-\Delta_4, \quad b = 2\Delta_3, \quad c = \Delta_1-\Delta_2-\Delta_3+\Delta_4, \quad d = -\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4 \tag{1.27}$$

を得る。したがって、

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_4(x_4)\rangle = \frac{C(u,v)}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3-\Delta_4} x_{13}^{2\Delta_3} x_{14}^{\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3+\Delta_4} x_{24}^{-\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4}} \tag{1.28}$$

と書ける。さらに慣例に従って、以下のように書き直す。

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_4(x_4)\rangle = \frac{g(u,v)}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2} x_{34}^{\Delta_3+\Delta_4}} \left(\frac{x_{24}}{x_{14}}\right)^{\Delta_1-\Delta_2} \left(\frac{x_{14}}{x_{13}}\right)^{\Delta_3-\Delta_4} \tag{1.29}$$

$g(u,v) = u^{\Delta_3+\Delta_4}C(u,v)$ は任意の関数である。特に同一のスカラープライマリー場の 4 点関数は

$$\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_4)\rangle = \frac{g(u,v)}{x_{12}^{2\Delta_\phi} x_{34}^{2\Delta_\phi}} \tag{1.30}$$

と書ける。

1.5　テンソル演算子の相関関数

テンソルプライマリー演算子の相関関数も、共形不変性によって制限を受ける。ここでは結果だけを述べることにする。1 階のテンソルプライマリー演算子の 2 点関数は、

$$\langle \mathcal{O}^{\mu}(x)\mathcal{O}_{\nu}(y)\rangle = C_{\mathcal{O}}\frac{I^{\mu}{}_{\nu}(x-y)}{|x-y|^{2\Delta}}, \tag{1.31}$$

$$I^{\mu}{}_{\nu}(x) = \delta^{\mu}_{\nu} - 2\frac{x^{\mu}x_{\nu}}{x^2} \tag{1.32}$$

と計算される。またスピン l [*1]のテンソルに対しては、

$$\left\langle \mathcal{O}^{\mu_1\cdots\mu_l}(x)\mathcal{O}_{\nu_1\cdots\nu_l}(0)\right\rangle = C_{\mathcal{O}}\left(\frac{I^{\mu_1}{}_{\nu_1}(x)\cdots I^{\mu_l}{}_{\nu_l}(x)}{x^{2\Delta}} + \text{perms} - \text{traces}\right) \tag{1.33}$$

となる。perms は μ の添字を入れ替えた項を表しており、traces は $\delta^{\mu_i\mu_j}, \delta_{\nu_i\nu_j}$ に比例するようなトレース部分を表す。次に 3 点関数については

$$\langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\mathcal{O}^{\mu_1\cdots\mu_l}(x_3)\rangle = \frac{f_{\phi_1\phi_2\mathcal{O}}(Z^{\mu_1}\cdots Z^{\mu_l} - \text{traces})}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3+l}x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1-l}x_{31}^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2-l}}, \tag{1.34}$$

$$Z^{\mu} := \frac{x_{13}^{\mu}}{x_{13}^2} - \frac{x_{23}^{\mu}}{x_{23}^2} \tag{1.35}$$

となる。これらを導出するために空間埋め込み法を用いるのが便利である。

1.6　空間埋め込み法

[*1] l 階の対称トレースレステンソルのこと