

# 1 場の理論における対称性

古典論における Noether の定理は運動方程式のもとで成り立つ。一方量子論<sup>\*1</sup> では運動方程式を満たさない場の配位を考慮に入れる必要がある。この章では場の理論における Noether の定理の対応物である Ward-Takahashi 恒等式を導き、共形不変性によって相関関数がどのように制限されるかを見る。

## 1.1 Schwinger-Dyson 方程式

まず運動方程式  $\delta S/\delta\phi = 0$  が量子論においてどのように補正を受けるのかを見る。場の微小変換

$$\phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (1.1)$$

を考える。 $\delta\phi(x)$  は  $\phi(x)$  に依存しない場とする。ここで経路積分に関する恒等式

$$\int \mathcal{D}\phi' F[\phi'] e^{-S[\phi']} = \int \mathcal{D}\phi F[\phi] e^{-S[\phi]} \quad (1.2)$$

に注目する。これは単純な積分変数の取り替えなので、常に成り立つ。左辺から右辺を引く。 $\delta\phi(x)$  が  $\phi(x)$  に依存しないことから  $d\phi'(x) = d\phi(x)$  であり、これを掛け合わせて  $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$  が成り立つので、

$$\int \mathcal{D}\phi \int d^d x \left( \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x) - \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} F[\phi] \delta\phi(x) \right) e^{-S[\phi]} = 0 \quad (1.3)$$

となる。ただし、積分領域の境界で  $\delta\phi(x) = 0$  として、表面項を無視した。両辺を分配関数で割ると、

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} F[\phi] \right\rangle = \left\langle \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \right\rangle \quad (1.4)$$

となる。特別な場合として、 $F[\phi] = \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)$  とした以下の式は Schwinger-Dyson 方程式と呼ばれる。

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \right\rangle = \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) \langle \phi(x_1) \cdots \cancel{\phi(x_j)} \cdots \phi(x_n) \rangle \quad (1.5)$$

つまり運動方程式  $\delta S/\delta\phi(x)$  は古典的にはゼロだが、量子論ではゼロではなく、演算子  $\phi(x')$  と同一点にあるときにデルタ関数  $\delta(x - x')$  に比例する寄与をもつ。これを接触項と呼ぶ。

ここで Noether の定理  $\partial_\mu J^\mu = 0$  が古典的な等式、すなわち運動方程式のもとでの等式であったことを思い出すと、量子論では接触項によって補正されることが分かる。

---

<sup>\*1</sup> ここでの量子論とは経路積分をするという意味である。統計的場の理論もこの意味では量子的である。

## 1.2 Ward-Takahashi 恒等式

微小な座標変換

$$x'^{\mu} - x^{\mu} = \varepsilon^{\mu}(x) = \varepsilon^a(x) X_a x^{\mu} \quad (1.6)$$

とそれに伴う内部空間の微小変換

$$\phi'(x') - \phi(x) = G\phi(x) = \varepsilon^a(x) G_a \phi(x), \quad (1.7)$$

を考える。ここで、 $X_a = X_a^{\mu} \partial_{\mu}$  は微分演算子であり、 $G_a$  は Lie 群の生成子である。また

$$\phi'(x) - \phi(x) =: \varepsilon^a \delta \phi_a(x) = \varepsilon^a(x) (X_a + G_a) \phi(x) \quad (1.8)$$

と書くことにする。グローバル変換  $\varepsilon^a(x) = \varepsilon^a$  に対して作用が不変であるとき、相関関数に課される制限を求める。

出発点は先ほどと同様で恒等式

$$\int \mathcal{D}\phi' F[\phi'] e^{-S[\phi']} = \int \mathcal{D}\phi F[\phi] e^{-S[\phi]} \quad (1.9)$$

である。左辺は

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\phi' F[\phi'] e^{-S[\phi']} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \left( F[\phi] + \int d^d x \varepsilon^a(x) \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \cdot \delta \phi_a(x) - F[\phi] \delta S[\phi] \right) e^{-S[\phi]} \end{aligned} \quad (1.10)$$

と変形できる。ここで、作用の変化は Noether カレント  $J_a^{\mu}$  によって

$$\delta S = \int d^d x J_a^{\mu}(x) \partial_{\mu} \varepsilon^a(x) = - \int d^d x \varepsilon^a(x) \partial_{\mu} J_a^{\mu}(x) \quad (1.11)$$

と書ける。ただし、積分領域の境界で  $\varepsilon^a(x) = 0$  とし、表面項を無視した。

ここで、経路積分測度について  $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$  が成り立つとする。この仮定の妥当性については後で改めて考える。すると、(1.2) は

$$\int d^d x \varepsilon^a(x) \int \mathcal{D}\phi \left( \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \cdot \delta \phi_a(x) + F[\phi] \partial_{\mu} J_a^{\mu}(x) \right) e^{-S[\phi]} = 0 \quad (1.12)$$

と書ける。 $\varepsilon^a(x)$  は任意なので、 $\int d^d x \varepsilon^a(x)$  を除くことができる。さらに両辺を分配関数で割ると、

$$\langle \partial_{\mu} J_a^{\mu}(x) F[\phi] \rangle = - \left\langle \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \cdot \delta \phi_a(x) \right\rangle \quad (1.13)$$

となる。ここで、 $F[\phi] = \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_N(x_N)$  とすることで、対称性によって相関関数に課される条件が得られる。ただし、 $\mathcal{O}_n(x_n)$  は  $\phi(x_n), \partial_{\mu} \phi(x_n), \dots$  の関数として表される局所場である。<sup>\*2</sup> また

$$\frac{\delta \mathcal{O}_n(x_n)}{\delta \phi(x)} \cdot \delta \phi_a(x) =: \delta(x - x_n) \mathcal{Q}_a \mathcal{O}_n(x) \quad (1.14)$$

<sup>\*2</sup> 同一点の場の積をとると一般に相関関数が発散してしまうので、複合場は無限大の定数を差し引いて定義される。

と定義すると

$$\langle \partial_\mu J_a^\mu(x) \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_N(x_N) \rangle = - \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{Q}_a \mathcal{O}_n(x) \cdots \mathcal{O}_N(x_N) \rangle \quad (1.15)$$

が得られる。この式を Ward-Takahashi 恒等式と呼ぶ。

次に、保留しておいた経路積分測度の変換について考える。例えば  $\delta\phi_a(x) = G_a\phi(x)$  のとき、素朴には

$$\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi \prod_x \det(1 + \varepsilon^a G_a)^{\rho d^d x} \approx \mathcal{D}\phi \exp \int d^d x \rho \varepsilon^a \text{tr} G_a \quad (1.16)$$

と書ける。ここで  $\rho$  は自由度の密度であり、格子正則化の場合は格子間隔  $a$  によって  $\rho = 1/a^d$  と書ける。もし右辺の指数関数の中身が 0 になるならば、経路積分測度は不変である。このためには  $\text{tr} G_a = 0$  が成り立てば良いが、場の理論では  $\rho \rightarrow \infty$  とするために  $\infty \cdot 0$  となって不定になってしまう。したがって、極限を真面目に議論する必要がある。もしその結果  $\mathcal{D}\phi' \neq \mathcal{D}\phi$  となったならば、量子異常 (アノマリー、対称性の量子的破れ) が存在すると言う。<sup>\*3</sup> このとき

$$\langle \partial_\mu J_a^\mu \rangle \neq 0 \quad (1.17)$$

となる。つまり古典的には保存するカレントが量子的には保存しなくなる。平坦な時空の共形変換を考える上では量子異常は考えなくてよいので、<sup>\*4</sup> これ以上深入りはしないことにする。

### 1.3 トポロジカル演算子

時空上の領域  $B$  に対し、その境界  $\partial B$  の上での Noether チャージを

$$Q_a(\partial B) := - \int_{\partial B} dS_\mu J_a^\mu(x) = - \int_B d^d x \partial_\mu J_a^\mu(x) \quad (1.18)$$

と定義する。Ward-Takahashi 恒等式から  $B$  の内部に演算子が含まれていない場合、 $Q_a(\partial B)$  の期待値は 0 である。

$$\left\langle Q_a(\partial B) \prod_{n: x_n \notin B} \mathcal{O}_n(x_n) \right\rangle = \begin{array}{c} Q_a(\partial B) \\ \bullet \\ \cdot \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{red blob} \\ \bullet \end{array} = 0. \quad (1.19)$$

<sup>\*3</sup> 経路積分の Jacobian から量子異常を導く方法は Fujikawa の方法と呼ばれる。詳しくは [1] を参照してほしい。

<sup>\*4</sup> 並進対称性や回転対称性はこれらを保つ正則化が構成できるので、極限の過程で常に経路積分測度を不変にできる。スケール変換の場合、経路積分測度を不変にするためには単純な座標変換ではなく、くりこみ変換を考える必要がある。このとき一般に異常次元が発生して古典的な次元に対するスケール不変性が破れるため、この意味でスケール不変性に量子異常があると言うことがある。ただし、その場合も固定点では量子的なスケール不変性が成り立っている。特殊共形変換の場合は経路積分測度を不変にするために一般化されたくりこみ変換を考える。これは特殊共形変換と粗視化を組み合わせたものである。また、曲がった時空における共形対称性 (正確には Weyl 対称性) は量子的に破れること (Weyl アノマリー) があるが、平坦な時空では考える必要がないらしい。

これを複素関数論における Cauchy の積分定理のように使って、 $\partial B$  を連続的に自由に変形することができる。ここから  $Q_a(\partial B_n)$  をトポロジカル演算子と呼ぶ。例えば、以下のような変形が可能である。

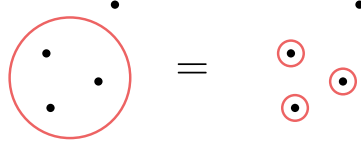


図 1: トポロジカル演算子の変形

$B$  を  $x$  まわりの微小な閉曲面とすると、Ward-Takahashi 恒等式を  $B$  の内部で積分することで、

$$Q_a(\partial B)\mathcal{O}(x) = Q_a\mathcal{O}(x) \quad (1.20)$$

を得る。ただし、これは任意の境界条件で期待値を取った時に成り立つという意味である。以降は  $\partial B$  を省略して  $Q_a\mathcal{O}(x)$  と書いたとき、 $Q_a$  は  $x$  まわりの微小な閉曲面でのトポロジカル演算子を表すとする。

同じことを通常の量子化<sup>\*5</sup> の枠組みでも見ておく。Ward-Takahashi 恒等式を領域  $t + \delta t \geq t' \geq t - \delta t$  上で積分する。この領域の内部に一つの局所演算子  $\mathcal{O}(x)$  のみがあったとすると、

$$Q_a(\partial B)\mathcal{O}(x) = Q_a(t + \delta t)\mathcal{O}(x) - Q_a(t - \delta t)\mathcal{O}(x) = -Q_a\mathcal{O}(x) \quad (1.21)$$

と書ける。ここで、

$$Q_a(t) = - \int d^{d-1}\mathbf{x} J_a^0(t, \mathbf{x}) \quad (1.22)$$

と定義した。これを時間順序に直すことで演算子の等式

$$\hat{Q}_a(t + \delta t)\hat{\mathcal{O}}(x) - \hat{\mathcal{O}}(x)\hat{Q}_a(t - \delta t) = Q_a\hat{\mathcal{O}}(x) \quad (1.23)$$

を得る。ここで  $\hat{\mathcal{O}}(x) = 1$  とおくと、 $\hat{Q}_a(t)$  が  $t$  によらないことが分かるから、

$$\hat{Q}_a(\partial B)\hat{\mathcal{O}}(x) = [\hat{Q}_a, \hat{\mathcal{O}}(x)] = Q_a\hat{\mathcal{O}}(x) \quad (1.24)$$

と書ける。トポロジカル演算子は交換関係  $[\hat{Q}_a, \hat{\mathcal{O}}(x)]$  の量子化の方法によらない定義を与えていると言える。

<sup>\*5</sup> 時間一定面の Hilbert 空間に対する演算子形式のことを言っている。後で説明する動径量子化と対比するならば時間量子化だが、これもまた紛らわしい言い方だろう。

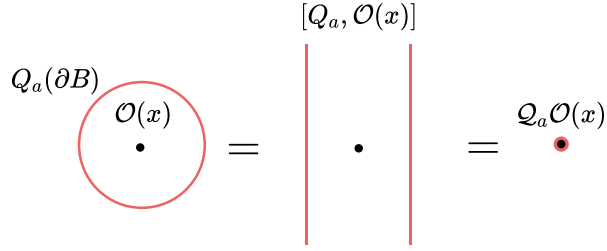


図 2: 交換関係のトポロジカルな定義

$\hat{Q}_a$  を Hamiltonian とすれば、(1.24) は Euclid 空間における Heisenberg の運動方程式

$$[\hat{H}, \hat{O}(t, \mathbf{x})] = \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}(t, \mathbf{x}) \quad (1.25)$$

となる。またこれを積分することで、

$$\hat{O}(t, \mathbf{x}) = e^{\hat{H}t} \hat{O}(0, \mathbf{x}) e^{-\hat{H}t} \quad (1.26)$$

が得られる。

#### 1.4 積の順序についての注意

2 回の微小な変換の  $x \rightarrow x + \varepsilon^a X_a \rightarrow x + \varepsilon^a X_a + \varepsilon'^b X_b$  に対して Ward-Takahashi 恒等式の議論を繰り返すと

$$Q_a Q_b \mathcal{O}(x) = Q_b Q_a \mathcal{O}(x) \quad (1.27)$$

となる。ここで、トポロジカル演算子の積をとるときは左が外側で右が内側にあると約束する。ここで、 $Q_a, Q_b$  微分演算子であり、変換の合成の順序と積の順序が逆であることに注意する。したがってトポロジカル演算子と微分演算子の順序は逆であり、交換関係は符号が反転する。

$$[Q_a, Q_b] \mathcal{O}(x) = -[Q_a, Q_b] \mathcal{O}(x) \quad (1.28)$$

#### 1.5 共形変換に対する Ward-Takahashi 恒等式

##### 並進

以下では、具体的に共形変換に対応する Noether チャージを構成しよう。並進対称性の場合、Ward-Takahashi 恒等式は、

$$\langle \partial_\mu T^\mu_\nu(x) \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_N \rangle = - \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \langle \mathcal{O}_1 \cdots \partial_\nu \mathcal{O}_n \cdots \mathcal{O}_N \rangle \quad (1.29)$$

となる。Noether チャージは 4 元運動量であり、

$$P_\mu = - \int dS_\nu T^\nu{}_\mu \quad (1.30)$$

と定義される。Ward-Takahashi 恒等式から

$$P_\mu \mathcal{O}(x) = \partial_\mu \mathcal{O}(x) \quad (1.31)$$

が成り立つ。また

$$\mathcal{O}(x) = e^{x \cdot P} \mathcal{O}(0) \quad (1.32)$$

と書ける。同じことを演算子形式で書くと、

$$\hat{\mathcal{O}}(x) = e^{[x \cdot \hat{P}, \cdot]} \hat{\mathcal{O}}(0) = e^{x \cdot \hat{P}} \hat{\mathcal{O}}(0) e^{-x \cdot \hat{P}} \quad (1.33)$$

となる。

## 回転

次に回転変換  $x^\mu \rightarrow x^\mu - b^{\mu\nu} x_\nu$ ,  $b^{\nu\mu} = -b^{\mu\nu}$  に対し、Ward-Takahashi 恒等式は

$$\begin{aligned} & \langle \partial_\rho (x^\nu T^{\rho\mu} - x^\mu T^{\rho\nu}) \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_N \rangle \\ &= - \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \langle \mathcal{O}_1 \cdots (x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu + S^{\mu\nu}) \mathcal{O}_n \cdots \mathcal{O}_N \rangle \end{aligned} \quad (1.34)$$

となる。 $S^{\mu\nu}$  は  $\mathfrak{so}(d)$  の表現で、 $\mathcal{O}_n(x)$  がスピンをもつ多成分の場の場合に必要である。トポロジカルな演算子は

$$M^{\mu\nu} := - \int dS_\rho (x^\nu T^{\rho\mu} - x^\mu T^{\rho\nu}) \quad (1.35)$$

と定義される。ここで  $T^{\rho\mu}$  は対称に改良されたエネルギー運動量テンソルとする。(1.36) を積分することで、

$$M^{\mu\nu} \mathcal{O}(x) = (x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu + S^{\mu\nu}) \mathcal{O}(x) \quad (1.36)$$

が成り立つ。また (1.31) から

$$\langle (T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}) \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_N \rangle = - \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \langle \mathcal{O}_1 \cdots S^{\mu\nu} \mathcal{O}_n \cdots \mathcal{O}_N \rangle \quad (1.37)$$

と書ける。つまり、 $T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}$  は古典的にはゼロだが、量子的には接触項による補正が加わる。

## スケール変換

次にスケール変換  $x^\mu \rightarrow (1 - \lambda)x^\mu$  に対し、Ward-Takahashi 恒等式は

$$\begin{aligned} & \langle \partial_\mu (x_\nu T^{\mu\nu}(x)) \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_N \rangle \\ &= - \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \langle \mathcal{O}_1 \cdots (x \cdot \partial + \Delta_n) \mathcal{O}_n \cdots \mathcal{O}_N \rangle \end{aligned} \quad (1.38)$$

となる。 $\Delta_n$  は一般に行列になり得るが、実数固有値によって対角化可能であることを仮定する。ここではすでに対角化されているとして  $\Delta_n$  を実数とおく。トポロジカルな演算子は

$$D = - \int dS_\mu x^\nu T^{\mu\nu} \quad (1.39)$$

と定義される。ここで  $T^{\mu\nu}$  はトレースレスに改良されたエネルギー運動量テンソルとする。(1.40) を積分すると、

$$D\mathcal{O}(x) = (x \cdot \partial + \Delta)\mathcal{O}(x) \quad (1.40)$$

が成り立つ。また (1.31) から

$$\langle T_\mu^\mu(x) \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_N(x_N) \rangle = - \sum_{n=1}^N \Delta_n \delta(x - x_n) \langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_N(x_N) \rangle \quad (1.41)$$

である。つまり、 $T_\mu^\mu$  は古典的にはゼロだが、量子的には接触項による補正が加わる。