1　2015 年 (平成 27 年)

物理学 I

第 1 問

[1]

　Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g l_1 \cos\theta_1 \tag{1.1}$$

なので、運動方程式は

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 = -m_1 g l_1 \sin\theta_1 \tag{1.2}$$

となる。$\theta_1 \ll 1$ の場合、

$$\ddot{\theta}_1 \approx -\frac{g}{l_1}\theta_1 \tag{1.3}$$

から運動は単振動となり、各周波数は $\omega_0 = \sqrt{g/l_1}$ で与えられる。

[2]

　単振動の復元力が重力から来ており、m_1 に比例するため、ω_0 は m_1 に依存しない。撃力を加えた場合、振幅が $1/m_1$ に比例する。

[3]

　$\phi = \theta_1 + \theta_2$ とおく。質点 1,2 の座標は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \sin\theta_1 \\ -l_1 \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\phi \\ -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\phi \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

となる。ここで θ_1, ϕ を微小に動かすことを考えると、

$$\mathrm{d}y_1 = l_1 \sin\theta_1 \,\mathrm{d}\theta_1 \tag{1.5}$$
$$\mathrm{d}x_2 = l_1 \cos\theta_1 \,\mathrm{d}\theta_1 + l_2 \cos\phi \,\mathrm{d}\phi \tag{1.6}$$
$$\mathrm{d}y_2 = l_1 \sin\theta_1 \,\mathrm{d}\theta_1 + l_2 \sin\phi \,\mathrm{d}\phi \tag{1.7}$$

となる。拘束力は仕事をしないことに注意して、力の釣り合いから、

$$F \mathrm{d}x_2 - m_1 g \,\mathrm{d}y_1 - m_2 g \,\mathrm{d}y_2 = 0 \tag{1.8}$$

となる。$\mathrm{d}\theta_1$, $\mathrm{d}\phi$ の係数から

$$Fl_1 \cos\theta_1 - (m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_1 = 0, \tag{1.9}$$
$$Fl_2 \cos\phi - m_2 g l_2 \sin\phi = 0. \tag{1.10}$$

よって、

$$\theta_1 = \arctan \frac{F}{(m_1 + m_2) g}, \quad \phi = \arctan \frac{F}{m_2 g} \tag{1.11}$$

となる。θ_2 については、

$$\theta_2 = \arctan \frac{F}{m_2 g} - \arctan \frac{F}{(m_1 + m_2) g} \tag{1.12}$$

である。

[4]

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m l^2 \left(\dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\phi}^2 + 2\cos(\theta_1 - \phi)\dot{\theta}_1 \dot{\phi}) \right) + mgl\left(\cos\theta_1 + (\cos\theta_1 + \cos\phi)\right) \\ &= \frac{1}{2} m l^2 \left(2\dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2\cos(\theta_1 - \phi)\dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right) + mgl(2\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned} \tag{1.13}$$

[5]

θ_1, ϕ について 2 次の項を無視すると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = 2ml^2 \ddot{\theta}_1 + ml^2 \ddot{\phi} \tag{1.14}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -2mgl\theta_1 \tag{1.15}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \ddot{\phi} + ml^2 \ddot{\theta}_1 \tag{1.16}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgl\phi \tag{1.17}$$

となる。よって、運動方程式は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} = -\frac{g}{l} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \phi \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

と書ける。θ_1, θ_2 についてまとめると、

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -\frac{g}{l} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

[6]

解として $\theta_i = A_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ と仮定すると、

$$\begin{pmatrix} 2\omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 + A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

となる。ただし $\omega_0 = g/l$ である。よって、非自明な解が存在するためには、

$$\omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0 \tag{1.21}$$

でなければならない。よって

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2 \pm \sqrt{2} \tag{1.22}$$

となる。よってこの系は基準振動

$$\omega = \omega_0 \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \tag{1.23}$$

をもつ。

第 2 問

$$B_x = B_0 \alpha z, \quad B_y = 0, \quad B_z = B_0(1+\alpha x) \tag{1.24}$$

[**1**]

$$\mathit{\Phi} = B_0 \int \mathrm{d}S\,(1+\alpha x) = \pi a^2 B_0 (1+\alpha X) \tag{1.25}$$

[**2**]

磁束の時間変化は

$$\frac{\mathrm{d}\mathit{\Phi}}{\mathrm{d}t} = \pi a^2 B_0 \alpha V = IR \tag{1.26}$$

となる。よって

$$I = \frac{\pi a^2 B_0 \alpha V}{R} \tag{1.27}$$

[**3**]

加えた仕事と Joule 熱が等しくなるので、

$$RI^2 = FV, \quad F = \frac{(\pi a^2 B_0 \alpha)^2 V}{R} \tag{1.28}$$

[**4**]

時計回りの電流を I とおく。Lorentz 力は、

$$\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} I\sin\theta \\ -I\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 b(t)(1+\alpha x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I\cos\theta B_0 b(t)(1+\alpha x) \\ -I\sin\theta B_0 b(t)(1+\alpha x) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

から、

$$a\int_0^{2\pi} \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\theta = -\pi a^2 B_0 \alpha b(t) I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

である。よって

$$I = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi a^2 B_0}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[b(t)(1+\alpha X)] \tag{1.31}$$

から、運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{(\pi a^2 B_0)^2\alpha}{R}b(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[b(t)(1+\alpha X)] \tag{1.32}$$

となる。

$$\lambda = \frac{(\pi a^2 B_0 \alpha)^2}{mR} \tag{1.33}$$

[5]

X を

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \tag{1.34}$$

と展開する。$X(0) = 0,\ X'(0) = 0$ から $a_0 = a_1 = 0$。また運動方程式

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\lambda t}{\tau^2}\left[1 + \alpha X + \alpha t\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right] \tag{1.35}$$

の t^0 の係数から、

$$2\alpha a_2 = 0 \tag{1.36}$$

よって $a_0 = a_1 = a_2 = 0$。

[6]

運動方程式の t^1 の係数から

$$6\alpha a_3 = -\frac{\lambda(1+\alpha a_0)}{\tau^2} \tag{1.37}$$

よって $a_0 = 0$ から

$$a_3 = -\frac{\lambda}{6\alpha\tau^2} \tag{1.38}$$

となる。$X = a_3 t^3$ という近似のもとで、

$$V_0 = X'(\tau) = 3a_3\tau^2 = -\frac{\lambda}{2\alpha} \tag{1.39}$$

[7]

$t \geq \tau$ での運動方程式は

$$\alpha \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} = -\lambda\alpha \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \tag{1.40}$$

であるから、$X(\tau) = X_0, X'(\tau) = V_0$ を初期条件として、

$$X'(\tau + t) = V_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad X(\tau + t) = X_0 + \frac{V_0}{\lambda}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) \tag{1.41}$$

となる。よって

$$X(t \to \infty) = X_0 + \frac{V_0}{\lambda} = -\frac{\lambda\tau}{6\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \tag{1.42}$$

物理学 II

第 1 問

[1]

$$[\hat{N},\hat{a}]=[\hat{a}^\dagger,\hat{a}]\hat{a}=-\hat{a} \tag{1.43}$$

である。$\hat{N}$ の固有値 $n+1$ の固有状態 $|n+1\rangle$ に対し、

$$\hat{N}(\hat{a}|n+1\rangle)=(\hat{a}\hat{N}-\hat{a})|n+1\rangle=n\hat{a}|n+1\rangle \tag{1.44}$$

から $\hat{a}|n+1\rangle$ は $\hat{N}$ の固有値 n の固有状態になる。また、

$$\|\hat{a}|n+1\rangle\|=\langle n+1|\hat{N}|n+1\rangle=n+1 \tag{1.45}$$

となるから、

$$\hat{a}|n+1\rangle=\sqrt{n+1}\,|n\rangle \tag{1.46}$$

と書ける。また、

$$\|\hat{a}|0\rangle\|=\langle 0|\hat{N}|0\rangle=0 \tag{1.47}$$

から $\hat{a}|0\rangle=0$。

[2]

$$\hat{a}|\Psi(\alpha)\rangle=\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}}|n-1\rangle=\alpha|\Psi(\alpha)\rangle \tag{1.48}$$

[3]

$$\langle\hat{N}\rangle=|\alpha|^2,\quad\langle\hat{H}\rangle=\hbar\omega\left(|\alpha|^2+\frac{1}{2}\right) \tag{1.49}$$

[4]

$$\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle\hat{a}+\hat{a}^\dagger\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\alpha+\alpha^*), \tag{1.50}$$

$$\langle\hat{p}\rangle = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\langle\hat{a}-\hat{a}^\dagger\rangle = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(\alpha-\alpha^*), \tag{1.51}$$

$$\langle\hat{x}^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\hat{a}^2+2\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^{\dagger 2}+1\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}((\alpha+\alpha^*)^2+1), \tag{1.52}$$

$$\langle\hat{p}^2\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\langle\hat{a}^2-2\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^{\dagger 2}-1\rangle = -\frac{\hbar}{2m\omega}((\alpha-\alpha^*)^2-1). \tag{1.53}$$

よって、

$$\mathit{\Delta}x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,, \quad \mathit{\Delta}p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \tag{1.54}$$

であり、

$$\mathit{\Delta}x\,\mathit{\Delta}p = \frac{\hbar}{2} \tag{1.55}$$

[5]

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{N}\omega t-\mathrm{i}\omega t/2} \tag{1.56}$$

から、

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}|\mathit{\Psi}(\alpha_0)\rangle &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\mathrm{e}^{-|\alpha_0|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}|n\rangle \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|\mathit{\Psi}(\alpha_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})\rangle.\end{aligned} \tag{1.57}$$

よって、

$$\alpha(t) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\theta)} \tag{1.58}$$

[6]

$$\langle\hat{x}\rangle_t = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\mathrm{Re}\,\alpha(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,A\cos(\omega t-\theta), \tag{1.59}$$

$$\langle\hat{p}\rangle_t = \sqrt{2m\hbar\omega}\,\mathrm{Im}\,\alpha(t) = -\sqrt{2m\hbar\omega}\,A\sin(\omega t-\theta) \tag{1.60}$$

これは調和振動子の古典的運動に一致するので、準古典的状態と呼ぶのは妥当である。

第 2 問

[1]

Maxwell の関係式から

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P^{-1} = \frac{TV\alpha}{C_P} \tag{1.61}$$

[2]

各領域のエンタルピーの微小変化は

$$\mathrm{d}H_i = T\mathrm{d}S_i + V\mathrm{d}P_i\,, \quad i = 1, 2. \tag{1.62}$$

である。高圧領域と低圧領域のどちらでも $\mathrm{d}P_i = 0$ であり、断熱過程であることから $\mathrm{d}S_1 + \mathrm{d}S_2 = 0$ なので、

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}H_1 + \mathrm{d}H_2 = 0 \tag{1.63}$$

となる。

[3]

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H &= -\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P^{-1} \\ &= -\frac{1}{C_P}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T + T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T\right] \\ &- \frac{1}{C_P}\left[V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right] \\ &= \frac{V(\alpha T - 1)}{C_P}\end{aligned} \tag{1.64}$$

$C_P > 0,\ V > 0$ から、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{V(\alpha T - 1)}{C_P} < \frac{TV\alpha}{C_P} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \tag{1.65}$$

理想気体の場合、

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T} \tag{1.66}$$

から、Joule-Thomson 係数は、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = 0 \tag{1.67}$$

[4]

PVを b/Vについて 1 次まで展開すると、

$$PV = \frac{RT}{1-b/V} - \frac{a}{V} = RT + \left(RT - \frac{a}{b}\right)\frac{b}{V} \tag{1.68}$$

よって

$$B(T) = 1 - \frac{a}{bRT}. \tag{1.69}$$

ボイル温度は $B(T)=0$ となる温度である。このとき $PV = RT + \mathcal{O}(b^2/V^2)$ となり、気体は理想気体に近くなる。

[5]

$$V \approx \frac{RT}{P} + \left(1 - \frac{a}{bRT}\right)b \tag{1.70}$$

と近似すると、

$$\begin{aligned}\alpha T = \frac{T}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P &= \frac{RT}{PV} + \frac{a}{RTV} \\ &\approx 1 - \left(1 - \frac{a}{bRT}\right)\frac{b}{V} + \frac{a}{RTV}.\end{aligned} \tag{1.71}$$

よって、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_P}\left(\frac{2a}{RT} - b\right) \tag{1.72}$$

この符号が変化する温度は、

$$T_{\mathrm{inv}} = \frac{2a}{Rb} \tag{1.73}$$

[6]

a の寄与を無視すると、体積 V で排除体積 b がある気体は、体積が $V-b$ の理想気体として考えられる。このとき体積の膨張 $V_1 \to V_2$，$V_2 > V_1$ に対して

$$\frac{V_2 - b}{V_1 - b} \tag{1.74}$$

は b の増加関数である。すなわち、理想気体で考えると b が大きくなるほど激しい膨張をすることになる。それに対応して温度は低くなる。

第 3 問

[**1**]

Lorentz 力を無視すると、

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\omega_0^2 \boldsymbol{x} - \frac{e}{m}\boldsymbol{E} \tag{1.75}$$

[**2**]

$\boldsymbol{P} = -eN\boldsymbol{x}$ から、

$$\ddot{\boldsymbol{P}} = -\omega_0^2 \boldsymbol{P} + \frac{e^2 N}{m}\boldsymbol{E} \tag{1.76}$$

[**3**]

$$P = \frac{e^2 N}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E \tag{1.77}$$

[**4**]

$$\varepsilon E = \left(\varepsilon_0 + \frac{e^2 N}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) E \tag{1.78}$$

$$k^2 = \left(\varepsilon_0 + \frac{e^2 N}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \mu_0 \omega^2 \tag{1.79}$$

[**5**]

$$\frac{k}{\omega} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)} \tag{1.80}$$

根号の中身は ω_0 および

$$\omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}} \tag{1.81}$$

を境に符号を変えるので、$0 < \omega < \omega_0$, $\omega_1 < \omega$ では

$$k = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)}\,\omega, \tag{1.82}$$

となり、$\omega_0 < \omega < \omega_1$ では

$$k = \mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \left(\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m(\omega^2 - \omega_0^2)} - 1\right)} \tag{1.83}$$

となる。グラフには発散があるが、粘性項を無視する近似をしているので、仕方ない。

[6]

Lorentz 力を無視すると、

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -e\boldsymbol{E} \tag{1.84}$$

[7]

[5] の結果で $\omega_0 = 0$ とすると、

$$\frac{k}{\omega} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega^2}\right)} \tag{1.85}$$

よって

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}} \tag{1.86}$$

とすると、$\omega < \omega_p$ のときに k は虚数になる。

[8]

誘電体に対しては電磁波は透過する。金属に対しては電磁波は完全に反射し、金属内の電磁場は指数関数的に減衰する。

第 4 問

[1.1]

$$N(\varepsilon) = \frac{L^3}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}\prod_i \sqrt{\frac{2m_i\varepsilon}{\hbar^2}} \tag{1.87}$$

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{L^3}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\sqrt{2m_1m_2m_3\varepsilon}}{2\pi^2\hbar^3} \tag{1.88}$$

[1.2]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -eB/m_2 & 0 \\ eB/m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \tag{1.89}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \sqrt{m_2}\,k_x \\ \sqrt{m_1}\,k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \frac{eB}{\sqrt{m_1m_2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{m_2}\,k_x \\ \sqrt{m_1}\,k_y \\ k_z \end{pmatrix} \tag{1.90}$$

$$\omega_c = \frac{eB}{\sqrt{m_1m_2}} \tag{1.91}$$

$$\sqrt{m_2}\,k_x = \sqrt{m_2}\,k_0\cos(\omega_c t) \tag{1.92}$$

より、

$$k_y = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\,k_{0x}\sin(\omega_c t), \quad k_z = k_{0z} \tag{1.93}$$

[1.3]

[1.4]

$$(x, y) = \frac{\hbar k_{0x}}{\sqrt{m_1}\,\omega_c}\left(\frac{1}{\sqrt{m_1}}\sin(\omega_c t), \frac{1}{\sqrt{m_2}}\left(1-\cos(\omega_c t)\right)\right) \tag{1.94}$$

$$z = \frac{\hbar k_{0z}}{m_3} t \tag{1.95}$$

$$\epsilon(\boldsymbol{k}) = \pm\gamma\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{1.96}$$

[2.1]

$$N = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\epsilon}{\gamma}\right)^3 \tag{1.97}$$

$$\rho(\epsilon) = \frac{4\pi}{\gamma^3}\epsilon^2 \tag{1.98}$$

[2.2]

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\hbar}\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\boldsymbol{k}} = \pm\frac{\gamma}{\hbar}\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} \tag{1.99}$$

$$\hbar\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = \mp\frac{\gamma e}{\hbar}\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{k}|} \tag{1.100}$$

$|\boldsymbol{k}| = k_0 = \mathrm{const.}$ となる解を求めると、

$$k := k_x + \mathrm{i}k_y = k_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c t}, \quad \omega_c = \pm\frac{\gamma e B}{\hbar^2 k_0} \tag{1.101}$$

[2.3]

$w = x + \mathrm{i}y$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{\gamma}{\hbar}\frac{k}{|k|} = \pm\frac{\gamma}{\hbar}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c t} \tag{1.102}$$

$$w = \mp\frac{\mathrm{i}\gamma}{\hbar\omega_c}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c t} - 1) = -\frac{\hbar k_0}{eB}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c t} - 1) \tag{1.103}$$