

## 1 2017 年 (平成 29 年)

### 第 1 問

[1.1]

エネルギー保存

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos \theta = mgR \quad (1.1)$$

から、

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos \theta)} \quad (1.2)$$

[1.2]

動径方向の運動方程式を考えると、重力と遠心力のつりあいから、

$$mg \cos \theta_{c1} = \frac{mv^2}{R} = 2mg(1 - \cos \theta_{c1}) \quad (1.3)$$

したがって、

$$\cos \theta_{c1} = \frac{2}{3} \quad (1.4)$$

このとき、

$$v_{c1} = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \quad (1.5)$$

[2.1]

$$I = 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^r r'^2 dr' \rho(r' \sin \theta)^2 \quad (1.6)$$

$$\rho = \frac{3m}{4\pi r^3} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{3mr^2}{2} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta \int_0^1 x^4 dx \\ &= \frac{3mr^2}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{2}{5}mr^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

### [2.2]

剛体球の回転角を  $\phi$  とおく。球全体が剛体に沿って  $\theta$  回転し、さらに球が滑らないことによる回転を考慮すると、

$$\phi = \theta + \frac{R}{r}\theta \quad (1.9)$$

となる。時間微分を取ると、 $v = (R + r)\dot{\theta}$  に注意して、

$$\omega = \left(1 + \frac{R}{r}\right) \dot{\theta} = \frac{v}{r} \quad (1.10)$$

を得る。

### [2.3]

エネルギー保存則は、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(R + r)\cos\theta = mg(R + r). \quad (1.11)$$

これに [2.1],[2.2] の結果を代入すると、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2 = mg(R + r)(1 - \cos\theta) \quad (1.12)$$

よって、

$$v^2 = \frac{10}{7}g(R + r)(1 - \cos\theta) \quad (1.13)$$

である。動径方向の運動方程式を考えると、重力と遠心力のつりあいから、

$$mg\cos\theta_{c2} = \frac{mv^2}{R + r} = \frac{10}{7}mg(1 - \cos\theta_{c2}) \quad (1.14)$$

よって、

$$\cos\theta_{c2} = \frac{10}{17} \quad (1.15)$$

となる。

### [2.4]

回転運動にエネルギーが移動する分、剛体球の速度が小さくなり、結果として遠心力が小さくなるので、 $\theta_{c2}$  は  $\theta_{c1}$  と異なる。

[3.1]

$$v_0 = \frac{P}{m}, \quad \omega_0 = \frac{P(h-r)}{I} = \frac{5}{2} \frac{P(h-r)}{mr^2} \quad (1.16)$$

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r} \quad (1.17)$$

$$\frac{5}{2} \frac{P(h-r)}{mr^2} = \frac{P}{mr} \quad (1.18)$$

$$h = \frac{7}{5}r \quad (1.19)$$

[3.2]

エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(R+r)\cos\theta = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 + mg(R+r) \quad (1.20)$$

から、

$$v^2 = \frac{10}{7}g(R+r)(1-\cos\theta) + \frac{P^2}{m^2} \quad (1.21)$$

となる。また動径方向の運動方程式から、

$$m\cos\theta_{c3} = \frac{mv_{c3}^2}{R+r} = \frac{10}{7}mg(1-\cos\theta_{c3}) + \frac{P^2}{m(R+r)} \quad (1.22)$$

となる。よって、

$$\frac{17}{7}\cos\theta_{c3} = \frac{10}{7} + \frac{P^2/m^2}{g(R+r)} \quad (1.23)$$

となり、

$$\cos\theta_{c3} = \frac{10}{17} + \frac{7}{17} \frac{P^2/m^2}{g(R+r)} \quad (1.24)$$

$$v_{c3} = \sqrt{g(R+r)\cos\theta_{c3}} = \sqrt{\frac{10}{17}g(R+r) + \frac{7}{17} \frac{P^2}{m^2}} \quad (1.25)$$

が得られる。

## 第 2 問

[1.1]

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} & a \leq r \leq b \\ 0 & r \leq a \quad \text{or} \quad b \leq r \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) & r \leq a \\ \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) & a \leq r \leq b \\ 0 & b \leq r \end{cases} \quad (1.27)$$

[1.2]

$$\phi(b) - \phi(a) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (1.28)$$

より、

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} \quad (1.29)$$

[1.3]

誘電体を入れた場合、静電容量は

$$C' = \frac{4\pi\epsilon ab}{b-a} \quad (1.30)$$

となる。エネルギーは、

$$\frac{Q_0^2}{2C'} = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (1.31)$$

[1.4]

2つのキャパシタ

$$C_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 a(b-d)}{b-d-a}, \quad C_2 = \frac{4\pi\epsilon b(b-d)}{d} \quad (1.32)$$

を直列につなげると考えれば良い。よって、

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b-d} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{b-d} - \frac{1}{b} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{d}{b^2} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \frac{d}{b^2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) \frac{ad}{b(b-a)} \right] \\
 &= \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} + \frac{4\pi\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon} \frac{a^2}{(b-a)^2} d
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

[2.1]

$$j(r) = \sigma E(r) = \frac{\sigma Q_0}{4\pi\epsilon r^2} \tag{1.35}$$

電流は、

$$I = 4\pi r^2 j = \frac{\sigma Q_0}{\epsilon}. \tag{1.36}$$

Joule 熱は、

$$VI = \frac{\sigma Q_0^2}{4\pi\epsilon^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \tag{1.37}$$

[2.2]

$$\frac{dQ}{dt} = -I = -\frac{\sigma Q_0}{\epsilon} \tag{1.38}$$

を解いて、

$$Q(t) = Q_0 e^{-\sigma t/\epsilon} \tag{1.39}$$

となる。時刻 0 から  $t$  までに発生した Joule 熱は、

$$\begin{aligned}
 W(t) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \int_0^t Q(t')^2 dt' \\
 &= \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) (1 - e^{-2\sigma t/\epsilon})
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

[2.3]

$t \rightarrow \infty$  とすると  $W(t)$  は [1.3] で求めた静電エネルギーに漸近していく。これは静電エネルギーが全て Joule 熱として散逸していくことを意味する。

[3]

それぞれの媒質に流れる電流は、

$$j_1 = \sigma_1 E_1(r_0) = \frac{\sigma_1 Q_1}{4\pi \varepsilon_1 r_0^2}, \quad j_2 = \sigma_2 E_2(r_0) = \frac{\sigma_2 Q_2}{4\pi \varepsilon_2 r_0^2} \quad (1.41)$$

となる。

$$j_1 = j_2 = \frac{I}{4\pi r_0^2} \quad (1.42)$$

から

$$\frac{\sigma_1 Q_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2 Q_2}{\varepsilon_2} = I \quad (1.43)$$

となるので、求める電荷の面密度は

$$\frac{Q_2 - Q_1}{4\pi r_0^2} = \left( \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} \right) \frac{I}{4\pi r_0^2}. \quad (1.44)$$

## 物理学 II

### 第 1 問

[1]

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\phi'(+0) - \phi'(-0)) = v\phi(0) \quad (1.45)$$

に  $\phi(x) = Ne^{-\xi|x|}$  を代入すると、

$$\frac{\hbar^2}{2m} \cdot 2N\xi = vN \quad (1.46)$$

よって、

$$\xi = \frac{mv}{\hbar^2} \quad (1.47)$$

次に規格化条件から、

$$N^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\xi|x|} dx = 2N^2 \frac{1}{2\xi} = 1. \quad (1.48)$$

よって、

$$N = \sqrt{\xi} = \sqrt{\frac{mv}{\hbar^2}} \quad (1.49)$$

$N = \sqrt{\xi}$ 。次に  $x \neq 0$  での Schrödinger 方程式から、

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m}\xi^2 = -\frac{mv^2}{2\hbar^2} \quad (1.50)$$

[2.1]

$$E(c_1, c_2) = \frac{\langle \Phi_t | \hat{H} | \Phi_t \rangle}{\langle \Phi_t | \Phi_t \rangle} = \frac{A(c_1^2 + c_2^2) + 2Bc_1c_2}{c_1^2 + c_2^2 + 2Sc_1c_2} \quad (1.51)$$

## [2.2]

拘束条件として、 $\langle \Phi_t | \Phi_t \rangle = 1$  を課してもよい。この場合、変分するべきは未定係数  $E$  を含めた

$$\begin{aligned} & A(c_1^2 + c_2^2) + 2Bc_1c_2 - E(c_1^2 + c_2^2 + 2Sc_1c_2) \\ &= (c_1 \quad c_2) \begin{pmatrix} A-E & B-2ES \\ B-2ES & A-E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.52)$$

である。これを  $c_1, c_2$  で偏微分すると、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 & S \\ S & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

を得る。

## [2.3]

条件を以下のように書き換えられる。

$$\begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1+S & 0 \\ 0 & 1-S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

ここから

$$E = \frac{A+B}{1-S}, \quad \frac{A-B}{1+S} \quad (1.55)$$

であり、それぞれのエネルギーに対応して

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

となる。よって波動関数は規格化定数を除いて

$$\phi_s(x_1 + R/2)\phi_s(x_2 - R/2) \pm \phi_s(x_1 - R/2)\phi_s(x_1 - R/2) \quad (1.57)$$

となる。

## [2.4]

$$\begin{aligned} & (\phi_s(x_1 + R/2)\phi_s(x_2 - R/2) + \phi_s(x_1 - R/2)\phi_s(x_1 - R/2)) (\alpha(\omega_1)\beta(\omega_2) - \beta(\omega_1)\alpha(\omega_2)) \\ & (\phi_s(x_1 + R/2)\phi_s(x_2 - R/2) - \phi_s(x_1 - R/2)\phi_s(x_1 - R/2)) (\alpha(\omega_1)\beta(\omega_2) - \beta(\omega_1)\alpha(\omega_2)) \\ & (\phi_s(x_1 + R/2)\phi_s(x_2 - R/2) - \phi_s(x_1 - R/2)\phi_s(x_1 - R/2)) \alpha(\omega_1)\alpha(\omega_2) \\ & (\phi_s(x_1 + R/2)\phi_s(x_2 - R/2) - \phi_s(x_1 - R/2)\phi_s(x_1 - R/2)) \beta(\omega_1)\beta(\omega_2) \end{aligned}$$



## 第 2 問

[1.1]

$$W = \frac{M!}{N!(M-N)!} \quad (1.58)$$

となるので、

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln W = k_B (M \ln M - N \ln N - (M-N) \ln(M-N)) \\ &= k_B N \ln \frac{M}{N} + k_B (M-N) \ln \frac{M}{M-N} \end{aligned} \quad (1.59)$$

[1.2]

$$\begin{aligned} p_0 &= -\frac{\partial F_0}{\partial V} = T \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{T}{v} \frac{\partial S}{\partial M} \\ &= \frac{k_B T}{v} \left( \frac{N}{M} + \ln \frac{M}{M-N} + \frac{M-N}{M} - 1 \right) \\ &= \frac{k_B T}{v} \ln \frac{M}{M-N} \\ &= -\frac{k_B T}{v} \ln \left( 1 - \frac{vN}{V} \right) \end{aligned} \quad (1.60)$$

これは  $\phi = vN/V \ll 1$  のときに

$$p_0 = \frac{k_B NT}{V} + \frac{k_B v N^2 T}{2V^2} + \dots \quad (1.61)$$

と展開でき、1 次では  $p_{\text{id}}$  と一致する。

[2.1]

$$F = U - TS = -\frac{1}{2} M z \alpha \phi^2 - k_B T \left( M \phi \ln \frac{1}{\phi} + M(1-\phi) \ln \frac{1}{1-\phi} \right) \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{M} \frac{\partial F}{\partial \phi} = -\alpha z \phi - k_B T (-\ln \phi - 1 + \ln(1-\phi) + 1) \\ &= -\alpha z \phi + k_B T [\ln \phi - \ln(1-\phi)] \end{aligned} \quad (1.63)$$

[2.2]

$$\mu'(\phi) = -\alpha z + k_{\text{B}} T \left[ \frac{1}{\phi} + \frac{1}{1-\phi} \right] = -\alpha z + \frac{k_{\text{B}} T}{\phi(1-\phi)} \quad (1.64)$$

$\mu'(\phi) > 0$  となる温度の条件は、

$$\phi(1-\phi) < \frac{k_{\text{B}} T}{\alpha z} \quad (1.65)$$

が任意の  $\phi$  について成り立つこと。よって、

$$\frac{k_{\text{B}} T}{\alpha z} > \frac{1}{4}, \quad T > \frac{\alpha z}{4k_{\text{B}}} \quad (1.66)$$

[2.3]

等しい  $\mu$  を与える  $\phi$  が3つ存在するとき、相共存が起こりうる。すなわち  $\mu(\phi_1) = \mu(\phi_2)$  となる  $\phi_1, \phi_2$  が存在し、 $\phi_1 < \phi < \phi_2$  となる  $\phi$  に対しては系が密度  $\phi_1, \phi_2$  の2つの領域に分かれる。この  $\phi_1, \phi_2$  は Maxwell の等面積則によって決まる。

### 第 3 問

[1.1]

$$\frac{dN_1}{dt} = (A + BW(\omega_0))N_2 - BW(\omega_0)N_1 \quad (1.67)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = BW(\omega_0)N_1 - (A + BW(\omega_0))N_2 \quad (1.68)$$

[1.2]

定常状態では  $dN_1/dt = dN_2/dt = 0$  から、

$$-(N_1 - N_2)BW(\omega_0) + AN_2 = 0 \quad (1.69)$$

よって、

$$W(\omega_0) = \frac{AN_2}{B(N_1 - N_2)} \quad (1.70)$$

となる。また、

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{BW(\omega_0)}{A + BW(\omega_0)} < 1 \quad (1.71)$$

[2.1]

一つのモードは波数  $\mathbf{k}$  で特徴づけられ、 $\mathbf{k}$  は

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{d}\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3 \quad (1.72)$$

と書ける。 $\omega = c|\mathbf{k}|$  から、角周波数が 0 から  $\omega$  までのモードの数  $N$  は、偏向を考慮すると、

$$N = 2 \left( \frac{d}{2\pi} \right)^3 \frac{4\pi(\omega/c)^3}{3} = \frac{d^3\omega^3}{3\pi^2c^3} \quad (1.73)$$

[2.2]

単位角周波数あたり、単位体積あたりの電磁波のモード数は、

$$D(\omega) = \frac{1}{d^3} \frac{dN}{d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2c^3} \quad (1.74)$$

よって、

$$W_{\text{eq}}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_{\text{B}}T} - 1} D(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_{\text{B}}T} - 1} \quad (1.75)$$

[2.3]

$$\frac{A}{B} = \frac{N_1 - N_2}{N_2} W(\omega_0) = (e^{\hbar\omega_0/k_{\text{B}}T} - 1) W(\omega_0) \quad (1.76)$$

[3.1]

$$\frac{dN_1}{dt} = -(P + L)N_1 + (A + L)N_2 + (A' + P)N_3 \quad (1.77)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = LN_1 - (A + L)N_2 + CN_3 \quad (1.78)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = PN_1 - (A' + P + C)N_3 \quad (1.79)$$

[3.2]

$$\begin{pmatrix} -P - L & A + L & A' + P \\ L & -A - L & C \\ P & 0 & -A' - P - C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.80)$$

から、

$$(-C(P + L) - (A' + P)L)N_1 + (A' + P + C)(A + L)N_2 \quad (1.81)$$

よって、

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{(A' + P + C)L + CP}{(A' + P + C)(A + L)} \quad (1.82)$$

となる。 $N_2/N_1 > 1$  となるとき、

$$(A' + P + C)L + CP > (A' + P + C)(A + L) \quad (1.83)$$

これを整理すると、

$$P(C - A) > A(A' + C) \quad (1.84)$$

となる。よって  $C > A$  のとき、 $P$  の臨界値  $P_c$  が存在し、

$$P_c = \frac{A(C + A')}{C - A} \quad (1.85)$$

となる。

### [3.3]

反転分布の条件は、

$$W_p(\omega_p) > \frac{A(C + A')}{B_{13}(C - A)} \quad (1.86)$$

である。短波長では

$$W_p(\omega_p) \approx \frac{\hbar \omega^3}{\pi c^3} e^{-\hbar \omega / k_B T} \quad (1.87)$$

であり、これは  $\omega$  が大きくなると指数関数的に減衰するため、条件を満たすのが難しくなる。

## 第 4 問

[1.1]

$v = v_x + \mathrm{i}v_y$ ,  $E = E_x + \mathrm{i}E_y$  とおくと、

$$m \left( \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} \right) v = -eE + \mathrm{i}eBv. \quad (1.88)$$

定常状態では

$$v = -\frac{eE\tau}{m} + \mathrm{i}\omega_c\tau v \quad (1.89)$$

となる。ただし  $\omega_c = eB/m$  である。よって、

$$J = -nev = \frac{ne^2\tau/m}{1 + (\omega_c\tau)^2} (1 + \mathrm{i}\omega_c\tau) E \quad (1.90)$$

これを行列で表すと、

$$\mathbf{J} = \tilde{\sigma} \mathbf{E}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{ne^2\tau/m}{1 + (\omega_c\tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.91)$$

よって

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (1.92)$$

[1.2]

$j_y = 0$  のとき、

$$E = \frac{1 - \mathrm{i}\omega_c\tau}{\sigma_0} j_x. \quad (1.93)$$

よって、

$$R_{\mathrm{H}} = \frac{E_y}{j_x B} = -\frac{\omega_c\tau}{\sigma_0 B}, \quad \sigma = \sigma_0 \quad (1.94)$$

[2.1]

正孔に対する運動方程式は定常状態の場合、

$$v = \frac{eE\tau}{m} - \mathrm{i}\omega_c\tau v \quad (1.95)$$

と書ける。よって伝導率は

$$\frac{ne^2\tau/m}{1-i\omega_c\tau} + \frac{pe^2\tau/m}{1+i\omega_c\tau} \quad (1.96)$$

となる。行列で書くと、

$$\tilde{\sigma} = \frac{e^2\tau/m}{1+(\omega_c\tau)^2} \begin{pmatrix} n+p & -(n-p)\omega_c\tau \\ (n-p)\omega_c\tau & n+p \end{pmatrix}. \quad (1.97)$$

[2.2]

$$\begin{aligned} E &= \frac{m(1+(\omega_c\tau)^2)}{e^2\tau} \cdot \frac{1}{(n+p)+i(n-p)\omega_c\tau} j_x \\ &= \frac{m(1+(\omega_c\tau)^2)}{e^2\tau} \cdot \frac{(n+p)-i(n-p)\omega_c\tau}{(n+p)^2+(n-p)^2(\omega_c\tau)^2} j_x \end{aligned} \quad (1.98)$$

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{E_y}{j_x B} = -\frac{e}{m\omega_c} \cdot \frac{m(1+(\omega_c\tau)^2)}{e^2\tau} \cdot \frac{(n-p)\omega_c\tau}{(n+p)^2+(n-p)^2(\omega_c\tau)^2} \\ &= \frac{1}{(n-p)e} \cdot \frac{1+(\omega_c\tau)^2}{(\frac{n+p}{n-p})^2+(\omega_c\tau)^2} \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$\sigma = \frac{j_x}{E_x} = \frac{(n+p)e^2\tau}{m} \cdot \frac{1+(\frac{n-p}{n+p})^2(\omega_c\tau)^2}{1+(\omega_c\tau)^2} \quad (1.100)$$

[2.3]

問 [2.2] の結果から、

$$R_H^{(0)} = -\frac{n-p}{e(n+p)^2}, \quad R_H^{(\infty)} = -\frac{1}{e(n-p)}. \quad (1.101)$$

よって、

$$n-p = -\frac{1}{eR_H^{(\infty)}}, \quad (n+p)^2 = \frac{1}{e^2 R_H^{(0)} R_H^{(\infty)}} \quad (1.102)$$

となるから、

$$n = \frac{1}{2e} \left( \frac{1}{\sqrt{R_H^{(0)} R_H^{(\infty)}}} - \frac{1}{R_H^{(\infty)}} \right), \quad p = \frac{1}{2e} \left( \frac{1}{\sqrt{R_H^{(0)} R_H^{(\infty)}}} + \frac{1}{R_H^{(\infty)}} \right) \quad (1.103)$$