

Quantum dimers and gauge theories

政岡凜太郎

January 8, 2024

ホモロジー・コホモロジー

量子ダイマー模型

古典ダイマー模型

\mathbb{Z}_2 ゲージ理論

\mathbb{Z}_2 閉じ込め相

\mathbb{Z}_2 非閉じ込め相

境界条件とトポロジー

物質場を入れた \mathbb{Z}_2 ゲージ理論

CQED

$U(1)$ ゲージ理論におけるトポロジカル相

双対変換とダイマー模型

ホモロジー・コホモロジー

グラフ¹ G の頂点の集合を $\mathcal{V}(G)$ 、辺の集合を $\mathcal{E}(G)$ 、面の集合を $\mathcal{F}(G)$ と書く。より高次のセルは考えない。

$\mathcal{V}(G), \mathcal{E}(G), \mathcal{F}(G)$ の要素を基底とする形式的なベクトル空間を考え、それぞれ $C_0(G), C_1(G), C_2(G)$ と書く。 $C_p(G)$ の元を p -チェインと呼ぶ。

バウンダリー作用素 ∂ は p -チェインに対してその境界の $(p-1)$ -チェインを返す線形写像で、

$$\partial^2 = 0 \tag{1.1}$$

を満たしている。 $C_p(G)$ および ∂ の作用はグラフに関する全ての情報をもつ。

¹正確には CW 複体というべき。

双対グラフ G^* を

$$\mathcal{V}(G^*) = \mathcal{F}(G), \quad \mathcal{E}(G^*) = \mathcal{E}(G), \quad \mathcal{F}(G^*) = \mathcal{V}(G) \quad (1.2)$$

によって構成する。また

$$C_0(G^*) = C_2(G), \quad C_1(G^*) = C_1(G), \quad C_2(G^*) = C_0(G), \quad (1.3)$$

と対応付ける。 $C_p(G^*)$ の元を p -コチェインと呼ぶ。²

コバウンダリー作用素 $\tilde{\partial}$ を

$$\tilde{\partial} = \partial^T \quad (1.4)$$

によって定義する。(Stokes の定理)

$\tilde{\partial}$ は双対格子におけるバウンダリー作用素とみなせる。明らかに $\tilde{\partial}^2 = 0$ が成り立つ。

²今の構成ではベクトル空間とその双対空間を同一視しているので、チェインとコチェインは同じものである。ただし少数の部分を除いて大体サイクルなものはチェインと呼び、大体コサイクルなものをコチェインと呼ぶことにする。

サイクルは

$$\partial C = 0 \quad (1.5)$$

を満たすチェインのことである。バウンダリーは

$$C = \partial S \quad (1.6)$$

と書けるチェインのことである。 $\partial^2 = 0$ からバウンダリーはサイクルである。サイクルにおいてバウンダリーの差異を無視した類をホモロジー類という。

コサイクルは

$$\tilde{\partial} a = 0 \quad (1.7)$$

を満たすコチェインのことである。コバウンダリーは

$$a = \tilde{\partial} \lambda \quad (1.8)$$

と書けるコチェインのことである。 $\tilde{\partial}^2 = 0$ からコバウンダリーはコサイクルである。コサイクルにおいてコバウンダリーの差異を無視した類をコホモロジー類という。

一般的に語ったが、正方格子しか使わないので、正方格子の場合を考える。ベクトル空間の基底は

$$\{v_i\}, \{e_{ij}\}, \{f_{ijkl}\} \quad (1.9)$$

である。添字どうしの位置関係は文脈で読み取ってほしい。また

$$e_{ji} = -e_{ij}, \quad f_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)\sigma(l)} = \text{sign}(\sigma) f_{ijkl} \quad (1.10)$$

を課す。 ∂ の作用は

$$\partial v_i = 0, \quad \partial e_{ij} = v_i - v_j, \quad \partial f_{ijkl} = e_{ij} + e_{jk} + e_{kl} + e_{li} \quad (1.11)$$

である。これを転置すると、

$$\tilde{\partial} v_i = e_{ij} + e_{ik} + e_{il} + e_{im}, \quad \tilde{\partial} e_{ij} = f_{ijkl} - f_{mnji}, \quad \tilde{\partial} f_{ijkl} = 0 \quad (1.12)$$

のようになる。

正方格子における 1-サイクルは、ご想像の通り。1-コサイクルは双対格子での 1-サイクルを元の格子に戻してきたものである。もちろん $\tilde{\partial}$ のカーネルと考えてもいい。

次に成分表示の見方をする。グラフ上の 0-形式、1-形式、2-形式

$$\phi_0 = \sum_{v \in \mathcal{V}} \phi_0(v)v, \quad \phi_1 = \sum_{e \in \mathcal{E}} \phi_1(e)e, \quad \phi_2 = \sum_{f \in \mathcal{F}} \phi_2(f)f \quad (1.13)$$

を考える。これらに $\tilde{\partial}$ を作用させると

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}\phi_0 &= \sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}} (\phi_0(v_i) - \phi_0(v_j)) e_{ij}, \\ \tilde{\partial}\phi_1 &= \sum_{f_{ijkl} \in \mathcal{F}} (\phi_1(e_{ij}) + \phi_1(e_{jk}) + \phi_1(e_{kl}) + \phi_1(e_{li})) f_{ijkl}, \\ \tilde{\partial}\phi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

となって、ほとんど外微分である。よって格子間隔を小さくする極限で

$$\tilde{\partial} \rightarrow d, \quad \partial \rightarrow \delta = (-1)^p \star^{-1} d \star \quad (1.15)$$

となる。

コホモロジー群はホモロジー群の双対空間としても実現できる。

ホモロジー類の代表元としてサイクル C をとってくる。内積を

$$(v, v') = \delta_{v, v'}, \quad (e, e') = \delta_{e, e'}, \quad (f, f') = \delta_{f, f'} \quad (1.16)$$

によって定める。 C とコチェイン a との内積 (a, C) が C の取り方に依らないためには、

$$(a, \partial S) = (\tilde{\partial} a, S) = 0 \quad (1.17)$$

が必要である。よって a はコサイクルである。一方 a をコバウンダリー $\tilde{\partial}\lambda$ だけ変形すると、

$$(a + \tilde{\partial}\lambda, C) = (a, C) + (a, \partial C) = (a, C) \quad (1.18)$$

となるから、 a にコバウンダリーを足しても線形写像として同じものが得られる。

ホモロジー群の双対空間はコホモロジー群となる。

量子ダイマー模型

ダイマー配位 $D \in \mathcal{D}(G)$ とは、グラフ G の辺集合の部分集合で、互いに共通の頂点を持たず、かつ全ての頂点を覆うようなものである。³

ダイマー配位はグラフ G 上の \mathbb{Z}_2 係数 1-チェインであって

$$\partial D = \sum_{v_i \in \mathcal{V}(G)} v_i \quad (2.1)$$

となるものとしても定義できる。ここで $\mathcal{V}(G)$ はグラフ G の頂点集合である。 v_i との内積をとると、

$$(v_i, \partial D) = (\tilde{\partial} v_i, D) = 1 \quad (2.2)$$

となる。これは教科書の (9.2) 式に対応する。

2 つのダイマー配位 $D_0, D_1 \in \mathcal{D}(G)$ に対して

$$\partial(D_1 - D_0) = 0 \quad (2.3)$$

が成り立つ。したがって、1 つの基準 D_0 を決めてしまえば任意の $D \in \mathcal{D}(G)$ は 1-サイクルとしても表せる。

³ダイマー配位が存在するためには頂点の総数 $|\mathcal{V}(G)|$ が偶数である必要がある。

量子ダイマー模型のハミルトニアンは

$$H_{\text{QDM}} = H_{\text{res}} + H_{\text{diag}} \quad (2.4)$$

である。 H_{res} は共鳴項

$$H_{\text{res}} = \bar{J} \sum_{\text{plaquettes}} (|=\rangle\langle||| + |||\rangle\langle=|) \quad (2.5)$$

であり、 H_{diag} は対角項

$$H_{\text{diag}} = V \sum_{\text{plaquettes}} (|=\rangle\langle=| + |||\rangle\langle|||) \quad (2.6)$$

である。 $|V| \gg |J|$ の場合、基底状態を求めることは容易である。 $V < 0$ の場合、figure 8.12 (a) のように全てのダイマーが平行になる。 $V > 0$ の場合、figure 8.12 (b) のようにダイマーが互い違いに並ぶ。

$J/V = -1$ を Rokhsar - Kivelson (RK) point といい、この点で厳密な基底状態が構成できる。具体的には

$$|\Psi_{\text{sRVB}}\rangle = \sum_{D \in \mathcal{D}(G)} |D\rangle \quad (2.7)$$

とする。つまり全てのダイマー配位を等しい重みで足し合わせた状態である。これは $J/V = -1$ の場合に基底状態となっている。

$$H_{\text{QDM}} |\Psi_{\text{sRVB}}\rangle = 0 \quad (2.8)$$

$|\Psi_{\text{sRVB}}\rangle$ は規格化されておらず、

$$\|\Psi_{\text{sRVB}}\|^2 = Z_{\text{dimer}} \quad (2.9)$$

となる。 Z_{dimer} は古典ダイマー模型の分配関数である。ダイマー基底について対角な演算子 \mathcal{O} をもってくと

$$\frac{\langle \Psi_{\text{sRVB}} | \mathcal{O} | \Psi_{\text{sRVB}} \rangle}{\|\Psi_{\text{sRVB}}\|^2} = \frac{1}{Z_{\text{dimer}}} \sum_{D \in \mathcal{D}(G)} \langle D | \mathcal{O} | D \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{dimer}} \quad (2.10)$$

となり、期待値が古典ダイマー模型の相関関数にマップできる。

正方格子の古典ダイマー模型の相関関数では、2つの平行な辺の間の相関関数が

$$G(R) \propto \frac{1}{R^2} \quad (2.11)$$

となるらしい。これは critical な振る舞いになっている。

三角格子の場合、相関関数は指数関数的に減衰する。

格子 $U(1)$ ゲージ理論

グラフの各辺に $U(1) \cong S^1$ 上の自由粒子の Hilbert 空間を考え、全ての積について直積をとる。

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{e \in \mathcal{E}} \mathcal{H}_e, \quad \mathcal{H}_e \cong \mathcal{H}_{U(1)} \quad (3.1)$$

このとき各辺の自由度は角度変数 $0 \leq A \leq 2\pi$ か、角運動量 $l \in \mathbb{Z}$ で特徴づけられる。 e 上の角度演算子を $A(e)$ 、角運動量演算子を $E(e)$ と書く。また $E(e)$ の固有状態を $|l(e)\rangle \in \mathcal{H}_e$ と書く。

$A(e), E(e)$ は正準交換関係

$$[A(e), E(e')] = i\delta_{e,e'} \quad (3.2)$$

を満たす。交換関係から明らかに

$$e^{-i m a d} E = E + m \quad (3.3)$$

が成り立つ。 $|0\rangle$ から一般の $|l\rangle$ は

$$|l\rangle = e^{i m a} |0\rangle \quad (3.4)$$

によって構成される。これは $|l\rangle$ の波動関数表示だが (3.3) からわかる。

$A = \sum_{e \in \mathcal{E}} A(e)e$ に対してゲージ変換は

$$A \rightarrow A + \tilde{\partial}\alpha \quad (3.5)$$

と定義される。これを演算子として表現すると、

$$e^{i(\tilde{\partial}\alpha, E)} = e^{i(\alpha, Q)}, \quad Q(v) := \partial E(v) = \sum_{e \in \tilde{\partial}v} E(e) \quad (3.6)$$

となる。ただし $E = \sum_e E(e)e$, $Q = \sum_v Q(v)v$ である。 $Q(v)$ と交換する演算子はゲージ不変な物理量となる。まず $[Q(v), E(e)] = 0$ なので、 $E(e)$ はゲージ不変な物理量である。電磁場 $\tilde{\partial}A$ や Wilson ループ

$$W(\Gamma) = e^{(A, \Gamma)}, \quad (\partial\Gamma = 0) \quad (3.7)$$

もゲージ不変である。 $\Gamma = \partial f$ と取ったものを足し合わせてみると、

$$\begin{aligned} \sum_f W(\partial f) &= 1 + \sum_{f \in \mathcal{F}} (A, \partial f) + \sum_{f \in \mathcal{F}} (A, \partial f)^2 + \dots \\ &= 1 + \|\tilde{\partial}A\|^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる。これは Maxwell 作用 $\int dA \wedge \star dA$ の離散的な対応物になっている。

量子ダイマー模型が $U(1)$ ゲージ理論として書けることを示そう。まず、各辺の自由度を $l = 0, 1$ に限るために、

$$H_{\text{dimer}} = \frac{1}{2k} \sum_e E(e)(E(e) - 1) \quad (3.9)$$

を加えて $k \rightarrow 0$ とする。ここで 2 部グラフを仮定して、辺の向きは常に副格子 A から副格子 B への向きにとる。

ダイマー配位の拘束条件は

$$\partial E = Q = \sum v_B - \sum v_A \quad (3.10)$$

となる。 E を電場とみなすならば、この条件は staggered な背景電荷を表しているとみなせる。ここから

$$\begin{aligned} H_{\text{dimer}} &= \frac{1}{2k} \left(\sum_e E(e)^2 - \sum_{v_A} (E, \tilde{\partial} v_A) \right) \\ &= \frac{1}{2k} \left(\|E\|^2 - \frac{|\mathcal{V}|}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

と書ける。

次に、共鳴項は

$$H_{\text{res}} = 2\bar{J} \sum_f \cos F(f), \quad F = \tilde{\partial} A \quad (3.12)$$

と書ける。また対角項は

$$\begin{aligned} H_{\text{diag}} &= V \sum_{f_{ijkl}} (E(e_{ij})E(e_{kl}) + E(e_{jk})E(e_{li})) \\ &= \frac{V}{2} \sum_f (E, \partial f)^2 - V \sum_e E(e)^2 \\ &= \frac{V}{2} \|\tilde{\partial} E\|^2 - \frac{V|\mathcal{V}|}{2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

と書ける。ただし $k \rightarrow 0$ の場合に $E(e)$ がダイマー配位をとることを前提にして、

$$E(e_{ij})E(e_{jk}) = E(e_{jk})E(e_{kl}) = \cdots = 0, \quad \sum_e E(e) = \frac{|\mathcal{V}|}{2} \quad (3.14)$$

とおいた。

古典ダイマー模型

せっかく量子をやるのだから、古典ダイマー模型についても少し触れておく。

グラフ G 上のダイマー配位 D に対し、作用を

$$e^{-S[D,w]} = \prod_{e_{ij} \in D} w_{ij} \quad (4.1)$$

で定める。ここで w は辺上に定められた正值の重みである。ダイマー模型の分配関数は

$$Z[w] = \sum_{D \in \mathcal{D}(G)} e^{-S[D,w]} \quad (4.2)$$

で与えられる。 w_{ij} を行列と考えれば、 $Z[w]$ はハフニアンと呼ばれる量に一致する。

$$Z[w] = \text{haf } w = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\sigma \in S_{2n}} w_{\sigma(1)\sigma(2)} w_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots w_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)} \quad (4.3)$$

ここで $|\mathcal{V}(G)| = 2n$ とおいた。 \mathcal{N} は数え上げの重複を除く因子であり、分配関数において定数倍には興味がないので省略した。

ハフニアンはとても計算しにくい量なので、パフィアンに変換したくなってくる。

辺 $e_{ij} \in \mathcal{E}(G)$ に対し、向き付け

$$\varepsilon_{ij} = \pm 1, \quad \varepsilon_{ji} = -\varepsilon_{ij} \quad (4.4)$$

を考える。これを用いて、

$$a_{ij} := \varepsilon_{ij} w_{ij} \quad (4.5)$$

と定義する。 a_{ij} は構成から反対称行列である。向きのついたダイマー模型の分配関数は

$$Z'[w, \varepsilon] = \text{Pf } a = \frac{1}{N} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} a_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)} \quad (4.6)$$

と表される。 G が平面グラフの場合、 $Z'[w, \varepsilon] = Z[w]$ となるような向き付け ε が常に存在することが知られている。すると、 $(\text{Pf } a)^2 = \det a$ から分配関数の計算は a の固有値問題に帰着する。あるいは、

$$\text{Pf } a = \int \mathcal{D}\chi \, e^{\chi_i a_{ij} \chi_j} \quad (4.7)$$

と書いて自由なマヨラナフェルミオンに帰着する。

良い向き付け ε について、少し解像度を高めておこう。ただし、具体的に構成する方法については省略する。⁴ 満たすべき条件は

$$\text{sign}(\sigma)\varepsilon_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots \varepsilon_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)} = \text{const.} \quad (4.8)$$

となることである。ここで、

$$\sigma'(1) = \sigma(2), \sigma'(2) = \sigma(3), \dots, \sigma'(2l) = \sigma(1) \quad (4.9)$$

$$\sigma'(i) = \sigma(i) \quad (i > 2l) \quad (4.10)$$

となるような新たな置換 σ' を考えてみよう。 $\text{sign}(\sigma\sigma'^{-1}) = -1$ から

$$\varepsilon_{\sigma(1)\sigma(2)}\varepsilon_{\sigma(2)\sigma(3)} \cdots \varepsilon_{\sigma(2l-1)\sigma(2l)}\varepsilon_{\sigma(2l)\sigma(1)} = -1 \quad (4.11)$$

が成り立たなければならない。そこで、グラフの任意の面 $f \in \mathcal{F}$ について

$$\prod_{e \in \partial f} \varepsilon(e) = -1 \quad (4.12)$$

を課す。実は条件としてこれで十分である。⁵

⁴ 気になる人は Fisher-Kasteleyn-Temperley のアルゴリズムで検索してみて。

⁵ $g \neq 0$ の閉曲面上ではちょっと事情は複雑になる。

次に同値な向き付けの概念を導入しよう。

行列 a の i 行成分を全て反転すると、各々のダイマー配位の寄与は全て -1 倍される。したがって同じ統計力学系が得られる。

言い換えると、ある頂点に対して接する全ての辺の向きを反転させても系は不変である。この操作は \mathbb{Z}_2 ゲージ変換になる。まず

$$\varepsilon_{ij} = e^{i\pi K_{ij}} \quad (4.13)$$

と書く。2 つの向き付け $\varepsilon'_{ij}, \varepsilon_{ij}$ の比が

$$\varepsilon'_{ij}/\varepsilon_{ij} = e^{i\pi(K'_{ij}-K_{ij})} = e^{i\pi(\delta_{ki}-\delta_{kj})} \quad (4.14)$$

となるとき、分配関数が不変だと言っている。

ここで $\delta_{ki} - \delta_{kj}$ はコバウンダリー $\tilde{\partial}v_k$ の成分表示である。さらに、このようなコバウンダリーをいくつ足しても変わらないのだから、 $K - K_0$ を \mathbb{Z}_2 コホモロジー類の元、あるいは \mathbb{Z}_2 ゲージ場とみなすことができる。

同値でないゲージ場の数を数えてみよう。

- ・ ゲージ場の自由度は $|\mathcal{E}(G)|$ 個
- ・ 満たすべき条件は $|\mathcal{F}(G)|$ 個
- ・ 同値なゲージ場への変換が $|\mathcal{V}(G)| - 1$ 個

である。ここですべての頂点について \mathbb{Z}_2 ゲージ変換を行うと元のゲージ場に戻ってくることに注意。よって平面グラフでは

$$2^{|\mathcal{E}(G)| - |\mathcal{F}(G)| - |\mathcal{V}(G)| + 1} = 2^0 = 1 \quad (4.15)$$

個だけ同値でないゲージ場が存在する。種数が $g \neq 0$ の閉曲面では非自明なゲージ場が可能なることも、予想できるだろう。⁶

ここらで撤退して、本筋に戻る。

⁶ その場合も古典ダイマー模型との間に色々面白い対応があるのだが、スピン構造や Arf 不変量といった概念が出てきて、いまいち分かっていない。

\mathbb{Z}_2 ゲージ理論

ここから Fradkin の内容。

グラフ G を 2 次元正方格子とする。古典論では、各辺に 2 値を取る向きの自由度を考えた。これに対応する量子論の状態空間として、各辺 e に対しスピン $1/2$ の Hilbert 空間 \mathcal{H}_e を考え、全ての辺についてテンソル積したもの考える。

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{e \in \mathcal{E}} \mathcal{H}_e, \quad \mathcal{H}_e \cong \text{span}\{|0\rangle, |1\rangle\} \quad (5.1)$$

また σ^z の固有値 1 を右・上向きに、固有値 -1 を左・下向きに対応させる。ハミルトニアンを

$$H = -g \sum_{e \in \mathcal{E}} \sigma^x(e) - \frac{1}{g} \sum_{f \in \mathcal{F}} W(\partial f) \quad (5.2)$$

と定義する。ここで $W(\partial f)$ はブラケット演算子

$$W(\partial f) := \prod_{e \in \partial f} \sigma^z(e) \quad (5.3)$$

である。

頂点 α に対し、バーテックス演算子を

$$\tilde{W}(\tilde{\partial}v) := \prod_{e \in \tilde{\partial}v} \sigma^x(e) \quad (5.4)$$

と定義する。この演算子は $\tilde{W}(\tilde{\partial}v)^2 = 1$ を満たし、コバウンダリー $\tilde{\partial}v$ に対する \mathbb{Z}_2 ゲージ変換を生成する。ゲージ不変な状態は

$$\tilde{W}(\tilde{\partial}v)|\text{Phys}\rangle = |\text{Phys}\rangle \quad (5.5)$$

を満たす。容易に

$$[\tilde{W}(\tilde{\partial}v), \tilde{W}(\tilde{\partial}v')] = 0, \quad [\tilde{W}(\tilde{\partial}v'), H] = 0 \quad (5.6)$$

が示せるので、 $\{\tilde{W}(\tilde{\partial}v)\}, H$ を同時対角化できる。よって任意のゲージ変換について不変な状態をとってこれる。

ゲージ不変な物理量は以下の通り。3. はゲージ不変なのか？

1. サイクル Γ 上の Wilson ループ

$$W(\Gamma) = \prod_{e \in \Gamma} \sigma^z(e) \quad (5.7)$$

2. 辺 e 上の電場 $\sigma^x(e)$

3. 頂点 v 上の電荷。

$$W(\gamma_{v,\infty}) = \prod_{e \in \gamma_{v,\infty}} \sigma^z(e) \quad (5.8)$$

ただし $\gamma_{v,\infty}$ は v と無限遠点を端点にもつチェイン。

4. 非自明なコサイクル $\tilde{\Gamma}$ 上の 't Hooft ループ

$$\tilde{W}(\tilde{\Gamma}) = \prod_{e \in \tilde{\Gamma}} \sigma^x(e) \quad (5.9)$$

5. 面 f 上の磁荷

$$\tau^z(f) = \tilde{W}(\tilde{\gamma}_{f,\infty}) = \prod_{e \in \tilde{\gamma}_{f,\infty}} \sigma^x(e) \quad (5.10)$$

ただし $\tilde{\gamma}_{f,\infty}$ は f と無限遠点を端点にもつコチェイン。

ハミルトニアン (5.2) を双対格子の言葉に直そう。磁荷演算子 $\tau^z(f)$ は Wilson ループ $W(\partial f)$ と反交換する。

$$\{W(\partial f), \tau^z(f)\} = 0 \quad (5.11)$$

$W(\partial f)^2 = 1$ から、Wilson ループは双対格子上の Pauli 行列 $\tau^x(f) := W(\partial f)$ とみなすことができる。また

$$\sigma^x(e) = \prod_{f \in \tilde{\partial}e} \tau^z(f) \quad (5.12)$$

が成り立つ。よって、

$$H = -g \sum_{\langle f, f' \rangle} \tau^z(f) \tau^z(f') - \frac{1}{g} \sum_f \tau^x(f) \quad (5.13)$$

となる。なんと、横磁場 Ising 模型になった。ということで、横磁場 Ising 模型は $(2+1)$ 次元 \mathbb{Z}_2 ゲージ理論と双対の関係にある。 τ^z は横磁場 Ising 模型の秩序変数だが、ゲージ理論側では磁荷に対応する。

\mathbb{Z}_2 閉じ込め相

g が大きい場合には強結合展開 (低温展開) を行える。 $-g \sum_e \sigma^x(e)$ が支配的なので基底状態は

$$|G_\infty\rangle = \prod_{e \in \mathcal{E}} |\sigma^x(e) = +1\rangle \quad (6.1)$$

となる。

励起状態を作るためには σ^x をフリップすればよいが、ゲージ不変性から $\sigma^x = -1$ の辺はサイクルをなす必要がある。つまり真空中に Wilson ループを作用させることで励起状態を構成できる。 $W(\Gamma)|G_\infty\rangle$ の励起エネルギーは、

$$\Delta E = 2g|\Gamma| \quad (6.2)$$

で与えられる。

g が有限の場合、基底状態はループ状の励起の重ね合わせで表される。 $g \rightarrow g_c$ とすると、ギャップは 0 に近づき、典型的なループの大きさが発散するため、強結合展開は破綻する。

双対な横磁場 Ising 模型では、 $g \rightarrow \infty$ は Ising 相互作用が横磁場に比べて大きい極限なので、秩序相に対応する。これはモノポール $\tau^z(f)$ が凝縮した相とみなすことができる。

単一電荷が存在する状態は、

$$Q(v_0)|\psi\rangle = -|\psi\rangle, \quad Q(v)|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (v \neq v_0) \quad (6.3)$$

で定義される。基底状態からこの状態を作ろうとすると、

$$|\psi\rangle = W(\gamma_{v_0,\infty})|G\rangle = \prod_{e \in \gamma_{v_0,\infty}} \sigma^z(e)|G\rangle \quad (6.4)$$

とする必要がある。ここで $\gamma_{v_0,\infty}$ は v_0 と無限遠点を端点にもつチェーンである。このためには無限の σ^x をフリップしないといけないので、gapped な相では単一の電荷を作ることはいできない。

ただし、基底状態に Wilson ラインを作用させることで、2 つの電荷の対ならば有限のエネルギーで作ることができる。 R だけ離れた電荷の間のエネルギーは

$$\Delta E(R) = \sigma R, \quad \sigma = 2g + O(1/g) \quad (6.5)$$

となる。 σ を "string tension" と呼ぶ。 σ は $g \rightarrow g_c$ で 0 に近づく。

これは $SU(3)$ ゲージ理論の強結合領域で電荷 (色荷) が単独で存在できない事情と同じなので、これをもって \mathbb{Z}_2 閉じ込め相と呼ぶ。

次に Wilson ループの期待値を考える。まず $g = \infty$ では $\langle G_\infty | W(\partial S) | G_\infty \rangle = 0$ である。有限の g では $|G\rangle$ は Brillouin-Wigner 摂動論によって $1/g^2$ で展開できる。有限の寄与が出てくるのは $|S|$ は面 S の面積として、 $(1/g^2)^{|S|}$ 次以降であるから

$$\langle G(g) | W(\partial S) | G(g) \rangle \sim \left(\frac{1}{g^2} \right)^{|S|} = e^{-\mu(g)|S|}, \quad \mu(g) = \log(g^2) + \mathcal{O}(1) \quad (6.6)$$

となるだろう。

かなり雑に議論してしまったので、ちゃんと考えてみる。まず

$$H = g \left(E_\infty + H_\infty - \frac{1}{g^2} \sum_f W(\partial f) \right), \quad H_\infty = \sum_{e \in \mathcal{E}} (1 - \sigma^x(e)) \quad (6.7)$$

とおく。ここで gE_∞ は $g = \infty$ での基底状態のエネルギーを表す。基底状態 $|G\rangle$ は以下の自己無撞着方程式を満たす。

$$|G\rangle = |G_\infty\rangle + \frac{1}{g^2} \frac{1 - |G_\infty\rangle\langle G_\infty|}{H_\infty + \frac{1}{g^2} \sum_f \langle G_\infty | W(\partial f) | G_\infty \rangle} \sum_f W(\partial f) |G\rangle \quad (6.8)$$

である。

$g \rightarrow \infty$ で主要な項を取り出すと、

$$\langle G | W(\partial S) | G \rangle \approx \left(\frac{1}{g^2} \right)^{|S|} \sum \langle G | W(\partial S) \prod_{f_i \in S} \frac{W(\partial f_i)}{H_\infty} | G_\infty \rangle \quad (6.9)$$

と書ける。 \sum は Wilson ループを掛けるあらゆる順序についての足し合わせである。これを平均場近似を使って評価しよう。 S の中でランダムに面を塗りつぶして行って、 $S' \subset S$ を構成する。このとき $\partial S'$ の長さは

$$|\partial S'| \approx 2|S| \cdot 2p(1-p), \quad p = \frac{|S'|}{|S|} \quad (6.10)$$

と評価できる。ここで S の内部に含まれる辺の総数がおおよそ $2|S|$ であることを用いた。ここから

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_\infty} \prod_{f_i \in S' \subset S} W(\partial f_i) | G_\infty \rangle &\approx \frac{1}{2|\partial S'|} \prod_{f_i \in S' \subset S} W(\partial f_i) | G_\infty \rangle \\ &= \frac{|S|}{8|S'|(|S| - |S'|)} \prod_{f_i \in S' \subset S} W(\partial f_i) | G_\infty \rangle \end{aligned} \quad (6.11)$$

となる。

よって

$$\begin{aligned}
 \langle G|W(\partial S)|G\rangle &\approx \left(\frac{1}{g^2}\right)^{|S|} (|S|+1)! \prod_{n=1}^{|S|} \frac{|S|}{8n(|S|-n)} \\
 &= \left(\frac{|S|}{8g^2}\right)^{|S|} \frac{(|S|+1)!}{(|S|!)^2} \\
 &\sim \exp(\log(|S|/8g^2)|S| - |S|\log|S| + |S|) \\
 &= \exp(-\mu(g)|S|)
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

となる。ここで、 $\mu(g) = \log(8g^2) - 1$ である。⁷

粗っぽい評価だが、Wilson ループの期待値が閉じ込め相で面積則に従うことがわかった！

疑問: 面積則は閉じ込め相に対して普遍的な性質か？

⁷相転移点を $\mu(g) = 0$ となる点とすれば、 $1/g_c^2 \sim 8/e = 2.94$ と推定できる。これを数値計算の結果 $1/g_c^2 = 3.044$ と比較すると、割といい線いっている。

\mathbb{Z}_2 非閉じ込め相

次に弱結合相を考える。 $g \rightarrow 0$ の基底状態は全てのブラケット演算子 $W(\partial f)$ に対して固有値 1 をもつ状態である。これは \mathbb{Z}_2 ゲージ場が平坦であると言い換えることができる。 $W(\partial f)$ に対して対角化された基底は

$$|\{A\}\rangle = \bigotimes_e |\sigma^z(e) = (-1)^{A(e)}\rangle \quad (7.1)$$

のように書ける。 $W(\partial f)$ について固有値が 1 となるのは

$$W(\partial f)|\{A\}\rangle = (-1)^{\tilde{\partial}A(f)}|\{A\}\rangle = |\{A\}\rangle \quad (7.2)$$

となるとき。すなわち A がコサイクル (閉形式) であるとき。

ゲージ変換で移り合う状態を同一視するとき、ゲージ固定をすると便利である。⁸ ここでは正方格子において x 軸方向の辺で全て $\sigma^z = 1$ とするゲージをとる。このとき基底状態は

$$|G_0\rangle = \bigotimes_{e \in \mathcal{E}} |\sigma^z(e) = 1\rangle \quad (7.3)$$

となる。

⁸古典ダイマー模型における Fisher-Kasteleyn-Temperley のアルゴリズムとは、まさにゲージ固定を系統的に構成する方法である。

ゲージ変換で移り合う基底を手で同一視するのではなく、そもそもゲージ不変な基底状態を構成することも可能である。この場合、 $W(\partial f)$ だけでなく $\tilde{W}(\tilde{\partial}v)$ についても対角化するので、Toric code

$$H = - \sum_f W(\partial f) - \sum_{v \in \mathcal{V}} \tilde{W}(\tilde{\partial}v) \quad (7.4)$$

の基底状態を求めれば良い。(別に今は Toric とは限定していないが。) これは Kitaev 状態

$$|G\rangle_{\text{Kitaev}} = \sum_{A \sim A_0} |\{A\}\rangle \quad (7.5)$$

として与えられる。ここで $A \sim A_0$ は $A = A_0 + \tilde{\partial}\Lambda$ を意味する。 $|\{A\}\rangle$ は $A = \sum_e A(e)e$ に対して

$$|\{A\}\rangle = \bigotimes_e |\sigma^z(e) = (-1)^{A(e)}\rangle \quad (7.6)$$

として定義される。ゲージ変換はコホモロジー類の元に対する置換として作用するので、同じ重みで重ね合わせた $|G\rangle_{\text{Kitaev}}$ は任意のゲージ変換について不変になっている。

励起状態について考えよう。

$|G\rangle_{\text{Kitaev}}$ に 't Hooft ライン $\tilde{W}(\tilde{\gamma}) = \prod_{e \in \tilde{\gamma}} \sigma^x(e)$ を掛ければ、モノポール $\tau^z(f)$ の対を生成できる。 $g = 0$ では励起エネルギーは常にモノポールと重なる $W(\partial f)$ に対して発生し、モノポール間の距離は関係ない。つまりモノポール間のポテンシャルは 0 である。

次に $|G\rangle_{\text{Kitaev}}$ に Wilson ライン $W(\gamma) = \prod_{e \in \gamma} \sigma^z(e)$ を掛ければ、電荷の対を生成できる。 $g = 0$ では電荷はゲージ対称性を破るだけで、エネルギーは 0 である。 $g > 0$ では基底状態に g^2 のオーダーの寄与が加わるため、 R だけ離れた電荷の間のエネルギーは

$$\Delta E(R) = 2E_0(g) + V(g, R) \quad (7.7)$$

と書ける。ただし

$$E_0(g) \propto g^2 + O(g^4), \quad V(g, R) \sim A(g)e^{-R/\xi_s(g)} \quad (7.8)$$

である。gapped な相なので $V(g, R)$ の R 依存性が指数関数になるとした。

これは電荷が遮蔽されていると捉えることもできる。電荷の対を生成して無限遠まで離していく過程で有限のエネルギーしか必要でないので、弱結合相を非閉じ込め相と呼ぶ。

Wilson ループの期待値は $g = 0$ においては

$$\langle G_0 | W(\partial S) | G_0 \rangle = 1 \quad (7.9)$$

である。 $g > 0$ では基底状態は束縛されたモノポール対が希薄気体と考えられる。Wilson ループの期待値は Wilson ループがモノポール対と交差することに -1 倍される。よってモノポール対の密度を $\rho(g)$ とすると

$$\langle G | W(\partial S) | G \rangle \approx (1 - \rho(g))^{|\partial S|} \approx e^{-\rho(g)|\partial S|} \quad (7.10)$$

と考えられ、Wilson ループの期待値が周長則に従うことがわかる。

これもちゃんと考えたいなら摂動論を使うのがいいだろう。基底状態は

$$|G\rangle = |G_0\rangle + g^2 \frac{1 - |G_0\rangle\langle G_0|}{H_0 + g^2 \sum_e \langle G_0 | \sigma^x(e) | G \rangle} \sum_e \sigma^x(e) |G\rangle \quad (7.11)$$

満たす。

モノポール対が n 個ある状態を $|n\rangle$ と書くと、モノポール対が希薄であるとき

$$\frac{1}{H_0 + g^2 \sum_e \langle G_0 | \sigma^x(e) | G \rangle} |n\rangle \approx \frac{1}{H_0} |n\rangle \approx \frac{1}{2n} |n\rangle \quad (7.12)$$

としてしまってよい。よって

$$\begin{aligned} |G\rangle &\approx |G_0\rangle + \frac{g^2}{2} \sum_e \sigma^x(e) |G_0\rangle + \frac{1}{2!} \left(\frac{g^2}{2} \right)^2 \sum_{e,e'} \sigma^x(e) \sigma^x(e') |G_0\rangle + \dots \\ &= \prod_e \exp \left(\frac{g^2}{2} \sigma^x(e) \right) |G_0\rangle \end{aligned} \quad (7.13)$$

となり、

$$\langle G | W(\partial S) | G \rangle \approx \prod_{e \notin \partial S} \cosh(g^2) \prod_{e \in \partial S} 1 \quad (7.14)$$

と計算できる。ただし、これは発散するので以下のように規格化して、周長則を得る。

$$\frac{\langle G | W(\partial S) | G \rangle}{\langle G | G \rangle} \approx \prod_{e \in \partial S} \frac{1}{\cosh(g^2)} = e^{-\log(\cosh(g^2)) |\partial S|} \quad (7.15)$$

境界条件とトポロジー

境界条件の影響を考えよう。

閉じ込め相を双対な模型で考えると、基底状態では $\tau^z(f)\tau^z(f') = 1$ が任意の辺 $\langle f, f' \rangle$ について成り立つ。しかし、このような状態は $\tau^z(f)$ が全て 1 か全て -1 かの 2 通りある。したがって双対変換は 2 対 1 の対応になっており、一方での対称性の破れが他方で区別されない。

このような微妙な状況は、 \mathbb{Z}_2 グローバル対称性変換を生成する演算子を考えてみると浮き彫りになる。これは

$$\tilde{Q} = \prod_f \tau^x(f) = \prod_{e \in \sum_f \partial f} \sigma^z(e) = W(\partial M) \quad (8.1)$$

と表される。ここで $\partial M = \sum_f \partial f$ はグラフ全体の境界である。境界があるグラフでは、 $\langle G_\infty | \tilde{Q} | G_\infty \rangle = 0$ となる。一方 $\partial M = 0$ ならば $W(\partial M) = 1$ となり、Hilbert 空間は \mathbb{Z}_2 対称なセクターに限られる。

次に、非閉じ込め相を考えてみよう。平坦な \mathbb{Z}_2 ゲージ場 A に対するコホモロジー類は 2^{2g} 個存在する。ここでの g は種数なので注意。異なるコホモロジー類への変換はラージゲージ変換として、

$$A \rightarrow A + \tilde{\Gamma}_i \quad (\partial \tilde{\Gamma}_i = 0, \tilde{\Gamma}_i \sim 0) \quad (8.2)$$

で与えられる。

トーラスの場合、ホモロジー類とコホモロジー類の代表元として $\Gamma_1, \Gamma_2, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2$ を取ってこれる。これらはそれぞれ x 方向と y 方向にのびるサイクル・コサイクルであり、

$$(\tilde{\Gamma}_1, \Gamma_1) = 0, \quad (\tilde{\Gamma}_1, \Gamma_2) = 1, \quad (\tilde{\Gamma}_2, \Gamma_1) = 1, \quad (\tilde{\Gamma}_2, \Gamma_2) = 0 \quad (8.3)$$

が成り立つ。量子論でラージゲージ変換を生成するのは可縮でない 't Hooft ループ

$$\tilde{W}(\tilde{\Gamma}_i) = \prod_{e \in \tilde{\Gamma}_i} \sigma^x(e) \quad (8.4)$$

である。Wilson ループと 't Hooft ループの間には

$$W(\Gamma_i) \tilde{W}(\tilde{\Gamma}_j) = (-1)^{(\Gamma_i, \tilde{\Gamma}_j)} \tilde{W}(\tilde{\Gamma}_j) W(\Gamma_i) \quad (8.5)$$

という関係が成り立つ。

基底状態はコホモロジー類の数に対応して 4 重縮退している。これらは $\tilde{W}(\tilde{\Gamma}_1), \tilde{W}(\tilde{\Gamma}_2)$ (または $W(\Gamma_1), W(\Gamma_2)$) の固有値によって識別される。

さらに、この縮退は $g = 0$ だけの特殊事情ではない。 $g > 0$ での基底状態は $|G_0\rangle$ に Wilson ループを作用させたものの重ね合わせとして表せる。系が十分大きければ、可縮でない Wilson ループによる励起はエネルギーが大きすぎるため、無視できる。ここで

$$\tilde{W}(\tilde{\Gamma}_i)W(\partial S) = (-1)^{(\partial S, \tilde{\Gamma}_i)}W(\partial S)\tilde{W}(\tilde{\Gamma}_i) = W(\partial S)\tilde{W}(\tilde{\Gamma}_i) \quad (8.6)$$

から可縮な Wilson ループは $\tilde{W}(\tilde{\Gamma}_i)$ の固有値を変えない。よって有限の g でも基底状態は $\tilde{W}(\tilde{\Gamma}_i)$ の固有値で区別でき、4 重縮退は維持される。

以上のような縮退は自発的対称性の破れとはメカニズムが全く異なるものである。境界条件によって縮退度が変化するという特徴をもつ相はトポロジカル相と呼ばれる。非閉じ込め相にある \mathbb{Z}_2 ゲージ理論は \mathbb{Z}_2 トポロジカル流体の例である。また量子 Hall 系もトポロジカル相であり、後の章で扱われる。

物質場を入れた \mathbb{Z}_2 ゲージ理論

物質場として \mathbb{Z}_2 係数 0-形式場 $\tau(v)$ を考える。ゲージ場 $A(e)$ と物質場 $\tau(v)$ に対するゲージ変換は

$$A(e) \rightarrow A(e) + \tilde{\partial}A(e), \quad \tau(v) \rightarrow (-1)^{A(v)}\tau(v) \quad (9.1)$$

と定義される。物質場に対応する Hilbert 空間として

$$\tau(v) = \pm 1 \rightarrow |\tau^z(v) = \pm 1\rangle \quad (9.2)$$

を考える。するとゲージ変換は演算子

$$Q(v) := \tilde{W}(\tilde{\partial}v)\tau^x(v) = \left(\prod_{e \in \tilde{\partial}v} \sigma^x(e) \right) \tau^x(v) \quad (9.3)$$

として表される。そこで、ハミルトニアンを

$$\begin{aligned} H = & -g \sum_e \sigma^x(e) - \frac{1}{g} \sum_f W(\partial f) \\ & - \frac{1}{\lambda} \sum_v \tau^x(v) - \lambda \sum_{\langle v, v' \rangle} \tau^z(v) \sigma^z(\langle v, v' \rangle) \tau^z(v') \end{aligned} \quad (9.4)$$

とする。各項が $Q(v)$ と可換なことに注意。

v, v' を端点にもつチェーン $\gamma_{v,v'}$ に対し、以下の演算子を考える。

$$C(\gamma_{v,v'}) = \tau^z(v) \left(\prod_{e \in \gamma_{v,v'}} \sigma^z(e) \right) \tau^z(v') \quad (9.5)$$

これは電荷の対を作り出す演算子だが、先程と異なりゲージ変換と可換である。 v, v' を引き離していくと、孤立した電荷が得られる。

孤立した電荷はペアの電荷を無限遠に追いやって忘れることではじめて現れる概念である。このような機構を Fradkin は "fractionalization" と呼んでいる。例えば整数電荷の集まりであるはずの 2 次元電子系で分数電荷が現れるのも同じようなからくりである。

ユニタリーゲージ

$$\tau^z(v)|\text{Phys}\rangle = |\text{Phys}\rangle \quad (9.6)$$

をとる。このとき物質場の自由度を除いたハミルトニアンは

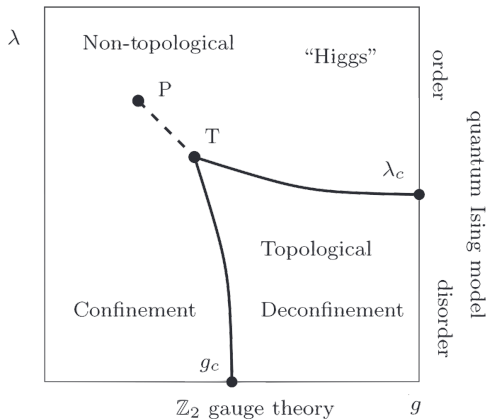
$$\begin{aligned} H = & -g \sum_e \sigma^x(e) - \frac{1}{g} \sum_f W(\partial f) \\ & - \frac{1}{\lambda} \sum_v \tilde{W}(\tilde{\partial}v) - \lambda \sum_e \sigma^z(e) \end{aligned} \quad (9.7)$$

と表される。このハミルトニアンにおいて格子を双対変換し、 $\sigma^x \leftrightarrow \sigma^z$ と取り替えると、結合定数を

$$\lambda \leftrightarrow \frac{1}{g} \quad (9.8)$$

としたハミルトニアンが得られる。これらのハミルトニアンは双対の関係にある。

相図は以下ようになる。実線は連続相転移で、破線は 2 次相転移を表す。



CQED



格子上の $U(1)$ ゲージ理論において、以下のようなハミルトニアンを考える。

$$H_{\text{CQED}} = \frac{g}{2} \sum_e E(e)^2 - \frac{1}{g} \sum_f \cos F(f) \quad (10.1)$$

ただし $F = \tilde{\partial}A$ である。ハミルトニアンの各項はゲージ変換を生成する演算子 $Q(v) = \partial E(v)$ と交換する。ゲージ不変なセクターは

$$Q(v)|\text{Phys}\rangle = 0 \quad (10.2)$$

によって定義される。

CQED は QDM と似ているが、

- (a) 共鳴項 $\sum_f \cos F(f)$ の符号が異なる。
 - (b) 拘束条件 $\partial E = \rho$ において、QDM では staggered な背景電荷がある。
- (a) に関しては $A \rightarrow A + a$, $\tilde{\partial}a = \pi$ とすればすぐに解消できる。一方 (b) は変数の取り替えによって除くことはできない。

(2 + 1) 次元では CQED は $g > 0$ で閉じ込め相にあることが知られている。 $g = \infty$ での基底状態は $|\{E(e) = 0\}\rangle$ である。Wilson ライン

$$W(\gamma_{x,y}) = \prod_{e \in \gamma_{x,y}} e^{iqA(e)} \quad (10.3)$$

によって、電荷の対を生成できる。実際、

$$W(\gamma_{x,y})Q(x) = (Q(x) + q)W(\gamma_{x,y}), \quad (10.4)$$

$$W(\gamma_{x,y})Q(y) = (Q(y) - q)W(\gamma_{x,y}) \quad (10.5)$$

となる。このとき

$$\Delta E(|x - y|) = \frac{gq^2}{2}|x - y| \quad (10.6)$$

であるから、電荷が孤立して存在するためには無限のエネルギーが必要であり、閉じ込めが起こる。

$g = +0$ まで閉じ込め相が続くのは非自明であるが、後で議論する双対変換によって理解できる。

U(1) ゲージ理論におけるトポロジカル相

物質場として角度変数 $\{\theta(v)\}$ を考え、共役運動量を $\{L(v)\}$ とする。

$$[\theta(v), L(v')] = i\delta_{v,v'} \quad (11.1)$$

物質場の電荷を q とする。ゲージ変換は

$$A(e) \rightarrow A(e) + \tilde{\partial}\alpha(e), \quad \theta(v) \rightarrow \theta(v) + q\alpha(v) \quad (11.2)$$

と定義される。この変換の生成子は

$$Q(v) = \partial E(v) + qL(v) \quad (11.3)$$

である。ゲージ不変な状態は $Q(v)|\text{Phys}\rangle = 0$ を満たす。

ハミルトニアンを

$$\begin{aligned} H = & \sum_v \frac{1}{2\lambda} L(v)^2 - \sum_e \lambda \cos(\tilde{\partial}\theta(e) - qA(e)) \\ & + \frac{g}{2} \sum_e E(e)^2 - \frac{1}{g} \sum_f \cos(\tilde{\partial}A(f)) \end{aligned} \quad (11.4)$$

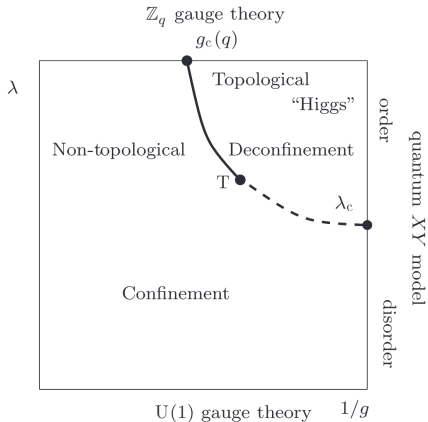
とする。第 1 項は角度変数のダイナミカルな項であり、第 2 項は共変微分による運動項

$$De^{-i\theta} \wedge \star De^{i\theta} = (d\theta - qA) \wedge \star (d\theta - qA) \quad (11.5)$$

の離散的な対応物である。また $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ から \cos の中に入れる必要がある。

U(1) ゲージ理論におけるトポロジカル相

相図は以下ようになる。実線が1次相転移で、破線が連続相転移である。各領域について、これから説明する。



U(1) ゲージ理論におけるトポロジカル相

$\lambda = 0$ の場合、 $L(v) = 0$ となる。ゲージ不変性からこれは $\partial E(v) = 0$ を意味し、電荷の自己エネルギーが発散する。よって閉じ込め相が実現する。

$g = \infty$ の場合、 $E(e) = 0$ となる。このとき Wilson ラインによる励起エネルギーがその長さに比例するので、閉じ込め相が実現する。

$g = 0$ の場合は A が平坦になり、ゲージ変換によって局所的には $A = 0$ とおくことができる。 A に対してラージゲージ変換を行うことは、 θ に対してトポロジカル欠陥を作ることに対応する。このようにして A を取り除くとグローバル U(1) 対称性をもつ quantum-rotor model が得られる。

quantum-rotor model において、 $\lambda < \lambda_c$ であればおよそ $L(v) = 0$ となり、基底状態はグローバル U(1) 対称性をもつ。 $\lambda < \lambda_c$ では自発的に対称性が破れ、gapless な南部-Goldstone モードが現れる。 $g \neq 0$ の場合はゲージ場が南部-Goldstone モードと結合することで Higgs モードになる。

U(1) ゲージ理論におけるトポロジカル相

$\lambda \rightarrow \infty$ では \mathbb{Z}_q ゲージ理論が現れる。ユニタリーゲージ $\theta = 0$ をとれば、 $A(e)$ が取りうる値は

$$A(e) = \frac{2\pi}{q} p(e), \quad p(e) \in \mathbb{Z}_q \quad (11.6)$$

に限られる。Wilson ループ $W(\Gamma_i)$ および 't Hooft ループ $\tilde{W}(\tilde{\Gamma}_i)$ を

$$W(\Gamma_i) = \prod_{e \in \Gamma_i} e^{A(e)}, \quad \tilde{W}(\tilde{\Gamma}_j) = \prod_{e \in \tilde{\Gamma}_j} e^{2\pi E(e)/q} \quad (11.7)$$

によって定義する。すると

$$e^{iA(e)} e^{2\pi i E(e)/q} = e^{-2\pi [A(e), E(e)]/q} e^{2\pi i E(e)/q} e^{iA(e)} = e^{-2\pi i/q} e^{2\pi i E(e)/q} e^{iA(e)} \quad (11.8)$$

から、

$$W(\Gamma_i) \tilde{W}(\tilde{\Gamma}_j) = e^{-2\pi i (\Gamma_i, \tilde{\Gamma}_j)/q} \tilde{W}(\tilde{\Gamma}_j) W(\Gamma_i) \quad (11.9)$$

が成り立つ。

Wilson ループと 't Hooft ループがそれぞれハミルトニアンと交換することから、基底状態が張る空間に対するこれらの演算子の作用は (11.9) の表現になっていなければならない。そして、この表現は 1 次元ではあり得ず、必ず縮退が生まれる。

これを見るために、基底状態を $\{\tilde{W}(\tilde{\Gamma}_i)\}$ について対角化しよう。 $\{W(\Gamma_i)\}$ について対角化することも可能だが、どちらも対角化することはできない。 $(\Gamma_i, \tilde{\Gamma}_j) = 1$ となるような $\Gamma_i, \tilde{\Gamma}_j$ を 1 つ与え、 $\tilde{W}(\tilde{\Gamma}_j)$ の固有値 $e^{2\pi i p/q}$ の固有状態を $|p\rangle$ と書く。すると

$$\tilde{W}(\tilde{\Gamma}_j)W(\Gamma_i)|p\rangle = e^{2\pi i(p+1)/q}W(\Gamma_i)|p\rangle \quad (11.10)$$

となる。よって $W(\Gamma_i)|p\rangle \propto |p+1\rangle$ であり、 $W(\Gamma_i)$ を作用させるたびに直交する状態が得られる。そして $W(\Gamma_i)^q$ ではじめて元にもどる。

可縮でない Wilson ループは $2g$ 個あるので、基底状態の縮退度が q^{2g} 以上であることがわかる。

双対変換とダイマー模型

QDM をゲージ理論の見方から解析する。古典的な背景場 $B(e)$ によって、

$$E(e) = \partial N(e) + B(e) \quad (12.1)$$

と表す。 $N(e)$ は整数値を固有値にもつ演算子である。 $B(e)$ は

$$\partial E(v) = \partial B(v) = \rho(v), \quad \rho = \sum v_A - \sum v_B \quad (12.2)$$

を満たす。 $B(e)$ の設定には以下のような自由度がある。

$$B(e) \rightarrow B(e) - \partial S(e), \quad N(f) \rightarrow N(f) + S(f) \quad (12.3)$$

コサイクル $\tilde{\gamma}_i$ に対し、 $(\tilde{\gamma}_i, B)$ は B の取り方によらない不変量となる。 B はサイクルではないので、 B はホモロジー類をなさないことに注意。

格子の双対変換をすると、 $\partial \leftrightarrow \tilde{\partial}$ と置き換えることができる。すると $B(e)$ はゲージ場に対応し、 $N(v)$ は物質場に対応する。また

$$\tilde{\partial} B(f) = \rho(f) \quad (12.4)$$

となり、 ρ は電荷ではなく磁束になる。

$A(e)$ と $E(e)$ の間の正準交換関係から

$$[(\partial f, A), (e, E)] = i(e, \partial f) \quad (12.5)$$

が成り立つ。 $E = \partial N + B$ を代入し、Stokes の定理を用いると

$$[(f, \tilde{\partial} A), (\tilde{\partial} e, N)] = i(f, \tilde{\partial} e) \quad (12.6)$$

となる。 B が演算子でないことに注意。よって $N(f)$ と $F(f) := \tilde{\partial} A(f)$ の間に正準交換関係

$$[F(f), N(f')] = i\delta_{f,f'} \quad (12.7)$$

が設定される。 $N(f)$ は電磁場 $F(f)$ をシフトする演算子である。

QDM のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2k} \left(\|E\|^2 - \frac{|\mathcal{V}|}{2} \right) + 2\bar{J} \sum_f \cos(\tilde{\partial} A(f)) + \frac{V}{2} \|\tilde{\partial} E\|^2 - \frac{V|\mathcal{V}|}{2} \quad (12.8)$$

を双対な変数 $B(e), N(v), F(v)$ で表すと、

$$H = \frac{1}{2k} \left(\|\tilde{\partial} N + B\|^2 - \frac{|\mathcal{V}|}{2} \right) - 2\bar{J} \sum_v \cos F(v) + \frac{V}{2} \|\Delta N + \partial B\|^2 - \frac{V|\mathcal{V}|}{2} \quad (12.9)$$

となる。ただし $\Delta = -(\partial + \tilde{\partial})^2 = -\partial\tilde{\partial} - \tilde{\partial}\partial$ である。また常に $k \rightarrow 0$ を仮定する。これらを比べると、以下のことに気づく。

- (i) 運動項とポテンシャル項が入れ替わっている。
- (ii) 変数が前者では $U(1)$ で、後者では \mathbb{Z} である。
- (iii) 前者はゲージ $U(1)$ 対称性をもつが、後者は $N \rightarrow N + n_0$ に対する対称性をもつ。

整数の自由度をもつ模型は多くの場合 discrete Gaussian (DS) 模型や Solid on Solid (SOS) 模型として議論される。例えば以下のハミルトニアンが典型的である。

$$H_c = \frac{\gamma}{2} \|\tilde{\partial} N\|^2 \quad (12.10)$$

SOS 模型は多くの場合 2 つの相をもつ。相関関数

$$g_\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle e^{i\alpha N(\mathbf{r})} e^{-i\alpha N(\mathbf{r}')} \rangle, \quad G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle N(\mathbf{r}) - N(\mathbf{r}') \rangle \quad (12.11)$$

は $T < T_R$, $T > T_R$ においてそれぞれ以下のように振る舞う。

$$g_\alpha(R) \approx \begin{cases} M^2 + \text{const.} \times e^{-R/\xi(T)} & T < T_R \quad (\text{smooth phase}) \\ \text{const.} \times R^{-\eta(\alpha, T)} & T > T_R \quad (\text{rough phase}) \end{cases} \quad (12.12)$$

$$G(R) \approx \begin{cases} m^2 + \text{const.} \times e^{-R/\xi(T)} & T < T_R \quad (\text{smooth phase}) \\ \text{const.} \times \ln(R/a_0) & T > T_R \quad (\text{rough phase}) \end{cases} \quad (12.13)$$

量子ゆらぎを考慮に入れると状況は変わるらしい。(どう変わるの?)

以下では経路積分を使って議論する。虚時間で考えて、分配関数を以下のように Trotter 分解する。

$$Z = \lim_{N_\tau \rightarrow \infty} \text{tr} \left([e^{-\Delta_\tau H_{\text{kin}}} e^{-\Delta_\tau H_{\text{pot}}}]^{N_\tau} \right) \quad (12.14)$$

ここで $\beta = \Delta_\tau N_\tau$ とした。 H_{pot} は $|\{N\}\rangle$ について対角的な部分であり、

$$\langle \{N_j\} | e^{-\Delta_\tau H_{\text{kin}}} e^{-\Delta_\tau H_{\text{pot}}} | \{N_{j+1}\} \rangle = \langle \{N_j\} | e^{-\Delta_\tau H_{\text{kin}}} | \{N_{j+1}\} \rangle e^{-\Delta_\tau H_{\text{pot}} \{N_{j+1}\}} \quad (12.15)$$

となる。ここで、

$$H_{\text{pot}} \{N_j\} = \frac{1}{2k} \left(\|\tilde{\partial} N_j + B_j\|^2 - \frac{|\mathcal{V}|}{2} \right) + \frac{V}{2} \|\Delta N_j + \partial B_j\|^2 - \frac{V|\mathcal{V}|}{2} \quad (12.16)$$

である。

一方

$$\langle \{N_j\} | e^{-\Delta_\tau H_{\text{kin}}} | \{N_{j+1}\} \rangle = \langle \{N_j\} | e^{2\Delta_\tau \bar{J} \sum_f \cos F(f)} | \{N_{j+1}\} \rangle \quad (12.17)$$

である。ここで

$$e^{z \cos p} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(z) e^{ilp} \quad (12.18)$$

を用いる。 $I_l(z)$ はベッセル関数である。すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{\{l(f)\}} \left(\prod_f I_{l(f)}(2\bar{J}\Delta_\tau) \right) \langle N_j | e^{i \sum_f l(f) F(f)} | N_{j+1} \rangle \\ &= \sum_{\{l\}} \left(\prod_f I_{l(f)}(2\bar{J}\Delta_\tau) \right) \langle N_j | N_{j+1} + l \rangle \\ &= \prod_f I_{N_j(f) - N_{j+1}(f)}(2\bar{J}\Delta_\tau) \end{aligned} \quad (12.19)$$

となる。

$$I_l(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^z e^{-l^2/2z} (1 + \mathcal{O}(z^{-1})) \quad (12.20)$$

を代入すると、

$$\prod_f I_{N_j(f) - N_{j+1}(f)}(2\bar{J}\Delta_\tau) \propto \exp\left(\frac{1}{4\bar{J}\Delta_\tau} \sum_j \|N_{j+1} - N_j\|^2\right) \quad (12.21)$$

となる。よって分配関数を経路積分によって

$$Z = \lim_{\Delta_\tau \rightarrow 0} \sum_{\{N\}} e^{-S\{N\}} \quad (12.22)$$

としたときの作用が

$$\begin{aligned} S\{N\} &= \frac{\Delta_\tau}{4\bar{J}} \sum_j \|\partial_0 N_j\|^2 \\ &\quad + \frac{\Delta_\tau}{2k} \sum_j \left(\|\tilde{\partial} N_j + B_j\|^2 - \frac{|V|}{2} \right) \\ &\quad + \frac{V\Delta_\tau}{2} \sum_j \|\Delta N_j + \partial B_j\|^2 \end{aligned} \quad (12.23)$$

と求まる。ここで $\partial_0 N_j := (N_{j+1} - N_j)/\Delta_\tau$ である。

量子ダイマー模型とモノポール気体

Poisson 和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int d\phi e^{2\pi i m \phi} f(\phi) \quad (13.1)$$

によって、整数の変数 $N(v)$ を実数 $\phi(v)$ と整数 $m(v)$ に置き換えられる。すると

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{m\}} \int \mathcal{D}\phi \exp(2\pi i(m, \phi) - S[\phi]) \\ &= \sum_{\{m\}} \int \mathcal{D}\phi \exp(-S_B[\mathbf{B}] - S_\phi[\phi] - S_{\text{int}}[\phi, m, \mathbf{B}]) \end{aligned} \quad (13.2)$$

と表せる。ここで、

$$S_\phi[\phi] = \Delta_\tau \sum_x \left(\frac{1}{4J} (\partial_0 \phi(x))^2 + \frac{1}{2k} (\tilde{\partial} \phi(x))^2 + \frac{V}{2} (\Delta \phi(x))^2 \right) \quad (13.3)$$

$$S_{\text{int}}[\phi, m, B] = \Delta_\tau \sum_x \phi(x) \left(\frac{2\pi i}{\Delta_\tau} m(x) + \frac{1}{k} \partial B(x) - V \Delta \partial B(x) \right) \quad (13.4)$$

である。ただし $x = (x^0, \mathbf{x})$ とし、 $x^0 = j\Delta_\tau$, $j = 1, \dots, N_\tau$ である。また \mathbf{x} は正方格子の格子点を表すベクトルである。

作用は ϕ について 2 次形式になっているので、 ϕ を integrate out することができる。
まず、

$$S_\phi[\phi] = -\frac{\Delta\tau}{2} \sum_x \phi(x) \left(\frac{1}{2\bar{J}} \partial_0^2 + \frac{1}{k} \Delta - V \Delta^2 \right) \phi(x) \quad (13.5)$$

と表す。Green 関数 $G_0(x - x')$ は以下のように定義される。

$$-\left(\frac{1}{2\bar{J}} \partial_0^2 + \frac{1}{k} \Delta - V \Delta^2 \right) G_0(x - x') = \delta_{x, x'} \quad (13.6)$$

連続極限をとって、 Δ^2 の寄与を無視すると、Green 関数は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} G_0(x) &\approx \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{iq \cdot x}}{q_0^2/2\bar{J} + (q_1^2 + q_2^2)/k} \\ &= \frac{\sqrt{2\bar{J}k}}{4\pi} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\sqrt{2\bar{J}k}q_0x^0 + i\sqrt{k}\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}}{q^2} \\ &= \frac{k/4\pi}{\sqrt{x_0^2 + (k/2\bar{J})\mathbf{x}^2}} \end{aligned} \quad (13.7)$$

ϕ を integrate out すると、分配関数は

$$Z \propto Z_{\text{CG}} = \sum_{\{m\}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{x,x'} m(x) V_{\text{eff}}(x-x') m(x') + 2\pi i \sum_x m(x) \Psi(x) \right) \quad (13.8)$$

となる。ここで

$$V_{\text{eff}}(x) = \frac{4\pi^2}{\Delta_\tau} G_0(x) \approx \frac{\pi k / \Delta_\tau}{\sqrt{(x^0)^2 + (k/2\bar{J})x^2}} \quad (13.9)$$

$$\Psi(x) = \sum_{x'} G_0(x-x') \left(\frac{1}{k} \partial B(x') - V \Delta \partial B(x') \right) \quad (13.10)$$

である。

次に $m(x)$ を integrate out する。モノポールが希薄であると仮定して $m(x) = 0, \pm 1$ のみを考える。さらに作用に

$$S_{\text{core}} = u \sum_x m(x)^2 \quad (13.11)$$

を加える。 m に関して和をとると、

$$\prod_x \sum_{m(x)=0,\pm 1} e^{um(x)^2 + 2\pi i m(x)\phi(x)} = \prod_x (1 + z \cos(2\pi\phi(x))) \quad (13.12)$$

となる。ここでモノポールのフガシティを $z = e^{-2u}$ とおいた。ここから、背景磁束 B を無視すれば、有効理論の作用は sine-Gordon 模型

$$S = \int d^D x \left[\frac{K}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - g \cos(2\pi\phi) \right] \quad (13.13)$$

になると推察できる。