1 共形不変性

この章では共形変換を具体的に定義して、共形変換に対して良い変換性を示すプライマリー場を導入する。以降の議論では常に平坦な時空の計量は Euclid 計量 $\delta_{\mu\nu}$ とするが、これを全て Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ に置き換えてもほとんど同じ議論が可能である。

1.1 Euclid 群

共形変換群を定義する前に、その部分群である Euclid 群について見ておく。これは並進と回転から構成される群である。

d 次元空間における線素は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて、

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \tag{1.1}$$

と表せる。座標変換 $x \to x'$ に対し、$\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}s^2$ を課すことで、計量の変換 $g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x')$ が得られる。微小変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu(x)$ に対し、この変換は

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x_\sigma}{\partial x'^\nu}g_{\rho\sigma}(x) = g_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu\varepsilon_\nu(x) + \partial_\nu\varepsilon_\mu(x) \tag{1.2}$$

で与えられる。

以降は Euclid 空間を考え、$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu}$ と固定する。計量を不変に保つような座標変換は群をなし、(特殊)Euclid 群と呼ばれる。微小変換が Euclid 群に属する条件は、(1.2) から Killing 方程式

$$\boxed{\delta g_{\mu\nu} = \partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu = 0} \tag{1.3}$$

を満たすことである。この方程式を解いてみよう。(1.3) に ∂_ρ を作用させると、

$$\partial_\mu\partial_\rho\varepsilon_\nu + \partial_\nu\partial_\rho\varepsilon_\mu = -2\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon_\rho = 0 \tag{1.4}$$

となる。ただし 1 つ目の等号で (1.3) を利用した。このことから ε_μ は高々 x の一次式である。すなわち、

$$\varepsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu \tag{1.5}$$

と表せる。これを (1.3) に代入することで、$b_{\mu\nu}$ が反対称であることがわかる。ここで、$x^\mu - \varepsilon^\mu(x) = (1 - \varepsilon^\nu(x)\partial_\nu)x^\mu$ と書くことで、$\varepsilon^\nu(x)\partial_\nu$ を座標変換の生成子とみなせる。並進と回転を生成する微分演算子は

$$p_\mu \coloneqq \partial_\mu, \tag{1.6}$$
$$m_{\mu\nu} \coloneqq -x_\mu\partial_\nu + x_\nu\partial_\mu \tag{1.7}$$

と定義される。これらの間の交換関係を計算すると、

$$[p_\mu, p_\nu] = 0, \tag{1.8}$$
$$[p_\mu, m_{\nu\rho}] = -\delta_{\mu\nu}p_\rho + \delta_{\mu\rho}p_\nu, \tag{1.9}$$
$$[m_{\mu\nu}, m_{\rho\sigma}] = -\delta_{\nu\rho}m_{\mu\sigma} + \delta_{\mu\rho}m_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\sigma}m_{\mu\rho} - \delta_{\mu\sigma}m_{\nu\rho} \tag{1.10}$$

となる。単純計算なので過程は載せないが、(1.9),(1.10) において基本的な関係式は

$$[p_1, m_{23}] = [m_{12}, m_{34}] = 0, \tag{1.11}$$
$$[p_1, m_{12}] = -p_2, \tag{1.12}$$
$$[m_{12}, m_{23}] = -m_{13} \tag{1.13}$$

であり、これを $m_{\mu\nu}$ の添字の反対称性に注意して拡張すれば (1.9),(1.10) が得られる。Euclid 群の一般の元は有限のパラメーター $a^\mu, b^{\mu\nu}$ と指数関数を用いて

$$\exp\left(-a^\mu p_\mu - \frac{1}{2}b^{\mu\nu}m_{\mu\nu}\right) \tag{1.14}$$

と表される。

1.2 共形変換群

ここで条件を緩めて、計量が

$$g'_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu} \tag{1.15}$$

と変換する座標変換 $x \to x'$ を考える。これを共形変換とよぶ。ここで、

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \Omega(x)R_\nu{}^\mu(x), \quad R_\nu{}^\mu \in \mathrm{SO}(d) \tag{1.16}$$

と表すことができる。したがって共形変換は局所的な角度を保つ変換である。

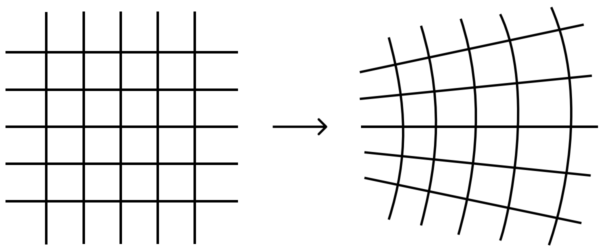

図 1: 共形変換

微小な共形変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu$ に対し、

$$\partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu = \lambda(x)\delta_{\mu\nu} \tag{1.17}$$

と書ける。ただし $\lambda(x)$ は任意の関数である。両辺のトレースをとると、

$$\lambda(x) = \frac{2}{d}\partial_\mu \varepsilon^\mu \tag{1.18}$$

となる。これを元の式に代入して以下の共形 Killing 方程式を得る。

$$\boxed{\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d}\delta_{\mu\nu}\partial_\rho \varepsilon^\rho} \tag{1.19}$$

以下でこれを解こう。過程が気にならない方は (1.28) に飛んでしまって構わない。(1.17) の両辺を ∂_ρ で微分し、(1.17) を用いると、

$$\begin{aligned}&\partial_\rho\partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\rho\partial_\nu\varepsilon_\mu \\ &= -2\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon_\rho + \partial_\mu\lambda(x)\delta_{\nu\rho} + \partial_\nu\lambda(x)\delta_{\mu\rho} = \partial_\rho\lambda(x)\delta_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{1.20}$$

となる。さらに μ, ν を縮約して、

$$-2\partial_\mu\partial^\mu\varepsilon_\rho = (d-2)\partial_\rho\lambda(x) \tag{1.21}$$

を得る。この式を、(1.20) の両辺を ∂^ρ で微分した式に代入すると、

$$\partial^\rho\partial_\rho\partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial^\rho\partial_\rho\partial_\nu\varepsilon_\mu = (2-d)\partial_\mu\partial_\nu\lambda(x) = \partial^\rho\partial_\rho\lambda(x)\delta_{\mu\nu}. \tag{1.22}$$

また μ, ν を縮約して、

$$(1-d)\partial_\mu\partial^\mu\lambda(x) = 0. \tag{1.23}$$

$d > 2$ の場合、[*1] (1.22)、(1.23) から $\partial_\mu\partial_\nu\lambda(x) = 0$ を得る。したがって $\lambda(x)$ は高々 1 次である。また (1.18) から $\varepsilon_\mu(x)$ は高々 2 次であり、

$$\varepsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu + c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho \tag{1.24}$$

とおける。ここで $c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$ とする。これを (1.19) に代入すると、1 次の項に関して、

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d}b^\rho{}_\rho\delta_{\mu\nu} \tag{1.25}$$

が得られる。ここから、$b_{\mu\nu}$ の対称成分が、$\delta_{\mu\nu}$ に比例することが分かる。したがって、$b_{\mu\nu}$ の対称成分が生成する変換は $x^\mu \to x'^\mu = (1-\lambda)x^\mu$ と書ける。これはスケール変換になっている。

また (1.17) から、2 次の項に関して、

$$2c_{\nu\rho\mu} + 2c_{\mu\rho\nu} = \frac{2}{d}\delta_{\mu\nu}c^\sigma{}_{\sigma\rho} \tag{1.26}$$

[*1] $d = 2$ の場合、(1.22) の条件が緩むことで共形対称性は無限個の生成子を持つ。また $d = 1$ の場合は (1.22),(1.23) のどちらも消える。これは 1 次元で角度が定義されないことに対応している。

となる。ここから

$$c_{\mu\nu\rho} = -c_\mu \delta_{\nu\rho} + c_\nu \delta_{\rho\mu} + c_\rho \delta_{\mu\nu}, \quad c_\mu = \frac{1}{d} c^\sigma{}_{\sigma\mu} \tag{1.27}$$

となる。$c_{\mu\nu\rho}$ が生成する座標変換は、$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - 2(x^\nu c_\nu)x^\mu + c^\mu x^2$ であり、以上により (1.19) の解は

$$\varepsilon^\mu = a^\mu + b^{\mu\nu} x_\nu + \lambda x^\mu + c^\nu (2x_\nu x^\mu - x^2 \delta^\mu_\nu) \tag{1.28}$$

と書ける。ただし $a^\mu, b^{\mu\nu}, \lambda, c^\mu$ は微小なパラメーターであり、$b^{\nu\mu} = -b^{\mu\nu}$ である。ここから共形変換を生成する微分演算子を

$$\mathcal{p}_\mu \coloneqq \partial_\mu, \tag{1.29}$$

$$\mathcal{m}_{\mu\nu} \coloneqq -x_\mu \partial_\nu + x_\nu \partial_\mu, \tag{1.30}$$

$$\mathcal{d} \coloneqq x \cdot \partial, \tag{1.31}$$

$$\mathcal{k}_\mu \coloneqq 2x_\mu (x \cdot \partial) - x^2 \partial_\mu \tag{1.32}$$

と定義できる。$\mathcal{p}_\mu, \mathcal{m}_{\mu\nu}$ は Euclid 群の生成子と同一であり、新たにスケール変換の生成子 $\mathcal{d}$ と特殊共形変換の生成子 $\mathcal{k}_\mu$ が追加されている。

$\mathcal{p}_\mu, \mathcal{m}_{\mu\nu}, \mathcal{d}$ が生成する有限の共形変換はそれぞれ並進、回転、スケール変換であり、分かりやすい。$\mathcal{k}_\mu$ が生成する有限の変換は特殊共形変換であり、

$$x^\mu \to x'^\mu = \frac{x^\mu - x^2 c^\mu}{1 - 2c \cdot x + c^2 x^2} \tag{1.33}$$

という形になる。この変換は反転変換、並進変換、反転変換の組み合わせで構成される。

$$x^\mu \to \frac{x^\mu}{x^2} \to \frac{x^\mu}{x^2} - c^\mu \to \frac{x^\mu/x^2 - c^\mu}{(x/x^2 - c)^2} = \frac{x^\mu - x^2 c^\mu}{1 - 2c \cdot x + c^2 x^2} \tag{1.34}$$

特殊共形変換がパラメーター c^μ について加法性を満たすことは、反転変換を 2 回繰り返すと元に戻ることから、並進変換の加法性より明らかである。また c^μ が微小だとして展開すると、

$$x'^\mu = x^\mu + 2(c \cdot x)x^\mu - x^2 c^\mu = (1 + c \cdot \mathcal{k})x^\mu \tag{1.35}$$

となるから、(1.33) は確かに $\mathcal{k}_\mu$ で生成される変換になっている。特殊共形変換が反転変換、並進変換、反転変換の合成で構成されることを微小変換に適用すると、生成子の間の関係

$$\mathcal{k}_\mu = -I \mathcal{p}_\mu I \tag{1.36}$$

が分かる。ただし I は反転を表す。

$\mathscr{p}_\mu, \mathscr{m}_{\mu\nu}, \mathscr{d}, \mathscr{k}_\mu$ の満たす交換関係を計算すると、以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
&[\mathscr{p}_\mu, \mathscr{p}_\nu] = [\mathscr{d}, \mathscr{m}_{\mu\nu}] = [\mathscr{k}_\mu, \mathscr{k}_\nu] = 0, && (1.37)\\
&[\mathscr{m}_{\mu\nu}, \mathscr{m}_{\rho\sigma}] = -\delta_{\nu\rho}\mathscr{m}_{\mu\sigma} + \delta_{\mu\rho}\mathscr{m}_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\sigma}\mathscr{m}_{\mu\rho} - \delta_{\mu\sigma}\mathscr{m}_{\nu\rho}, && (1.38)\\
&[\mathscr{d}, \mathscr{p}_\mu] = -\mathscr{p}_\mu, && (1.39)\\
&[\mathscr{p}_\mu, \mathscr{m}_{\nu\rho}] = -\delta_{\mu\nu}\mathscr{p}_\rho + \delta_{\mu\rho}\mathscr{p}_\nu, && (1.40)\\
&[\mathscr{d}, \mathscr{k}_\mu] = \mathscr{k}_\mu, && (1.41)\\
&[\mathscr{k}_\mu, \mathscr{m}_{\nu\rho}] = -\delta_{\mu\nu}\mathscr{k}_\rho + \delta_{\mu\rho}\mathscr{k}_\nu, && (1.42)\\
&[\mathscr{k}_\mu, \mathscr{p}_\nu] = 2\mathscr{m}_{\mu\nu} - 2\delta_{\mu\nu}\mathscr{d} && (1.43)
\end{aligned}
$$

このように定義される Lie 代数を **(d 次元) 共形代数**と呼ぶ。$d = 2$ の場合、共形変換の生成子は無限次元に拡大するが、$\mathscr{p}_\mu, \mathscr{m}_{\mu\nu}, \mathscr{d}, \mathscr{k}_\mu$ はその中で部分代数 (大域的共形代数) をなす。対称性を大域的共形代数に限ることにすれば、本記事の以降の議論は $d = 2$ の場合も有効である。

詳細な計算過程は省くが、いくつか補足をしておく。まず $[\mathscr{d}, \mathscr{m}_{\mu\nu}] = 0$ はスケール変換と回転が可換であることを意味しており、直観的には明らかである。$\mathscr{k}_\mu$ についての交換関係は

$$\mathscr{k}_\mu = -I\mathscr{p}_\mu I, \quad \mathscr{m}_{\mu\nu} = I\mathscr{m}_{\mu\nu}I, \quad \mathscr{d} = -I\mathscr{d}I \tag{1.44}$$

を用いると $\mathscr{p}_\mu$ についての交換関係に帰着できる。例えば、

$$[\mathscr{k}_\mu, \mathscr{k}_\nu] = [I\mathscr{p}_\mu I, I\mathscr{p}_\nu I] = I[\mathscr{p}_\mu, \mathscr{p}_\nu]I = 0 \tag{1.45}$$

である。$[\mathscr{k}_\mu, \mathscr{p}_\nu]$ についてはこのトリックが使えないので真面目な計算を載せておく。

$$
\begin{aligned}
[\mathscr{k}_\mu, \mathscr{p}_\nu] &= [2x_\mu(x\cdot\partial) - x^2\partial_\mu, \partial_\nu]\\
&= -2\delta_{\mu\nu}(x\cdot\partial) - 2x_\mu\partial_\nu + 2x_\nu\partial_\mu\\
&= 2\mathscr{m}_{\mu\nu} - 2\delta_{\mu\nu}\mathscr{d}
\end{aligned} \tag{1.46}
$$

1.3 積の順序についての注意

微分演算子の積の順序について注意をしておく。例として

$$\mathrm{e}^{-b\cdot m}x^\mu =: R^\mu{}_\nu(b)x^\nu, \quad \left(b\cdot m = \frac{1}{2}b^{\mu\nu}m_{\mu\nu}\right) \tag{1.47}$$

とおくと、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-b'\cdot m}\mathrm{e}^{-b\cdot m}x^\mu &= R^\mu{}_\nu(b)\mathrm{e}^{-b'\cdot m}x^\nu\\
&= R^\mu{}_\nu(b)R^\nu{}_\rho(b')x^\rho
\end{aligned} \tag{1.48}
$$

となる。すなわち、微分演算子の順序と座標変換の順序は逆である。このことは回転変換以外についても成り立つ。一般の微分演算子 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ について、座標変換の合成

$$x'' = \mathrm{e}^{\mathcal{Q}'(x')}x' = \mathrm{e}^{\mathcal{Q}'(x')}\mathrm{e}^{\mathcal{Q}(x)}x \tag{1.49}$$

を考える。ここで $\mathcal{Q},\mathcal{Q}'$ が一般に座標 x に依存することに注意する。$\mathcal{Q}'$ の引数を x に直すと、

$$\mathcal{Q}'(x') = \mathrm{e}^{\mathcal{Q}(x)}\mathcal{Q}'(x)\mathrm{e}^{-\mathcal{Q}(x)} \tag{1.50}$$

となるので

$$x'' = \mathrm{e}^{\mathcal{Q}(x)}\mathrm{e}^{\mathcal{Q}'(x)}\mathrm{e}^{-\mathcal{Q}(x)}x' = \mathrm{e}^{\mathcal{Q}(x)}\mathrm{e}^{\mathcal{Q}'(x)}x \tag{1.51}$$

となる。したがって座標変換の合成を微分演算子で表現する場合は積を逆順にしなければならない。

これはややこしいので、座標変換の合成と同じ順序に従う共形変換の生成子 $P_\mu, M_{\mu\nu}, D, K_\mu$ を定義する。これらの生成子の積は微分演算子の逆順の積に対応するとする。例えば、

$$P_\mu K_\nu \leftrightarrow \mathscr{k}_\nu \mathscr{p}_\mu \tag{1.52}$$

とする。したがって符号を反転した以下の交換関係が成り立つ。

$$[P_\mu, P_\nu] = [D, M_{\mu\nu}] = [K_\mu, K_\nu] = 0, \tag{1.53}$$
$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \delta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} + \delta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}, \tag{1.54}$$
$$[D, P_\mu] = P_\mu, \tag{1.55}$$
$$[P_\mu, M_{\nu\rho}] = \delta_{\mu\nu}P_\rho - \delta_{\mu\rho}P_\nu, \tag{1.56}$$
$$[D, K_\mu] = -K_\mu, \tag{1.57}$$
$$[K_\mu, M_{\nu\rho}] = \delta_{\mu\nu}K_\rho - \delta_{\mu\rho}K_\nu, \tag{1.58}$$
$$[K_\mu, P_\nu] = 2\delta_{\mu\nu}D - 2M_{\mu\nu} \tag{1.59}$$

以降の議論でも共形変換の生成子は頻繁に用いるが、筆記体は微分演算子を意味し、イタリックの生成子とは積の順序が逆なので、注意してほしい。

1.4 プライマリー場

座標変換 $x \to x'$ によって計量が

$$\mathrm{g}'_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 \mathrm{g}_{\mu\nu} \tag{1.60}$$

となったとき、場 $\mathcal{O}(x)$ の変換性が

$$\mathcal{O}'(x') = \Omega(x)^{\Delta}\mathcal{O}(x) \tag{1.61}$$

で与えられるならば、$\mathcal{O}(x)$ を**共形次元 Δ** の**プライマリー場**と呼ぶ。空間の添字をもつ場の場合、

$$\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\cdots\mathrm{d}x^{\mu_l} \tag{1.62}$$

を共形次元 Δ のプライマリー場とみなせる。すなわち場の変換性は

$$\begin{aligned}\mathcal{O}'_{\mu_1\cdots\mu_l}(x') &= \Omega(x)^{\Delta-l}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\mu_l}}\mathcal{O}_{\nu_1\cdots\nu_l}(x)\\ &= \Omega(x)^{\Delta}R_{\mu_1}{}^{\nu_1}(x)\cdots R_{\mu_l}{}^{\nu_l}(x)\mathcal{O}_{\nu_1\cdots\nu_l}(x)\end{aligned} \tag{1.63}$$

で与えられる。

微小な共形変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \varepsilon^\mu$ に対するプライマリー場の変換性を求めよう。ただし

$$\varepsilon^\mu = a^\mu + b^{\mu\nu}x_\nu + \lambda x^\mu + 2(c\cdot x)x^\mu - c^\mu x^2 \tag{1.64}$$

であり、$b_{\mu\nu}$ は反対称とする。過程が気にならない方は (1.71) に飛んでしまって構わない。(1.19) から

$$\Omega(x)^2\delta_{\mu\nu} = \left(1 + \frac{2}{d}\partial\cdot\varepsilon\right)\delta_{\mu\nu} = (1 + 2(\lambda + 2c\cdot x))\delta_{\mu\nu} \tag{1.65}$$

となるので、

$$\Omega(x)^\Delta = 1 + \lambda\Delta + 2(c\cdot x)\Delta \tag{1.66}$$

が分かる。また

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'^\mu} &= \delta_{\mu\nu} + \partial_\mu\varepsilon_\nu \\ &= (1 + \lambda + 2c\cdot x)\delta_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} + 2(c_\mu x_\nu - c_\nu x_\mu) \\ &= \Omega(x)R^\nu{}_\mu(x)\end{aligned} \tag{1.67}$$

より

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu}(x) &= \delta_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} + 2(c_\mu x_\nu - c_\nu x_\mu) \\ &= \delta_{\mu\nu} + (b_{\rho\sigma} - 2c_\sigma x_\rho)(\delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\mu - \delta^\rho_\mu\delta^\sigma_\nu)\end{aligned} \tag{1.68}$$

となるので、

$$R_{\mu_1\nu_1}(x)\cdots R_{\mu_l\nu_l}(x) = \delta_{\mu_1\nu_1}\cdots\delta_{\mu_l\nu_l} + (b_{\rho\sigma} - 2c_\sigma x_\rho)\sum_i(\delta^\rho_{\nu_i}\delta^\sigma_{\mu_i} - \delta^\rho_{\mu_i}\delta^\sigma_{\nu_i})\prod_{j\neq i}\delta_{\mu_j\nu_j} \tag{1.69}$$

と書ける。また

$$\begin{aligned}&\mathcal{O}'_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) - \mathcal{O}'_{\mu_1\cdots\mu_l}(x') \\ &= \varepsilon\cdot\partial\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) = \left(a^\mu \mathscr{p}_\mu + \frac{1}{2}b^{\mu\nu}\mathscr{m}_{\mu\nu} + \lambda\mathscr{d} + c^\mu\mathscr{k}_\mu\right)\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x)\end{aligned} \tag{1.70}$$

である。以上の式を (1.63) に代入することにより、

$$\mathcal{O}'_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) = \left(a^\mu\mathcal{P}_\mu + \frac{1}{2}b^{\mu\nu}\mathcal{M}_{\mu\nu} + \lambda\mathcal{D} + c^\mu\mathcal{K}_\mu\right)\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\mu_l}(x) \tag{1.71}$$

と書ける。ここで、

$$\mathcal{P}_\mu \coloneqq \partial_\mu \tag{1.72}$$

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} \coloneqq -x_\mu\partial_\nu + x_\nu\partial_\mu + \mathcal{S}_{\mu\nu} \tag{1.73}$$

$$\mathcal{D} \coloneqq x\cdot\partial + \Delta \tag{1.74}$$

$$\mathcal{K}_\mu \coloneqq 2x_\mu(x\cdot\partial) - x^2\partial_\mu + 2x_\mu\Delta - 2x^\nu\mathcal{S}_{\mu\nu} \tag{1.75}$$

と定義した。また

$$(\mathcal{S}_{\mu\nu})_{\mu_1\cdots\mu_l\nu_1\cdots\nu_l}\mathcal{O}^{\nu_1\cdots\nu_l} := \sum_{j=1}^{l}(\delta^{\mu}_{\nu_j}\delta^{\nu}_{\mu_j} - \delta^{\mu}_{\mu_j}\delta^{\nu}_{\nu_j})\mathcal{O}_{\mu_1\cdots\nu_j\cdots\mu_l} \tag{1.76}$$

である。共形変換の生成子 $P_\mu, M_{\mu\nu}, D, K_\mu$ はプライマリー場に対し、

$$P_\mu\mathcal{O}(x) = \mathcal{P}_\mu\mathcal{O}(x), \tag{1.77}$$

$$M_{\mu\nu}\mathcal{O}(x) = \mathcal{M}_{\mu\nu}\mathcal{O}(x) \tag{1.78}$$

$$D\mathcal{O}(x) = \mathcal{D}\mathcal{O}(x), \tag{1.79}$$

$$K_\mu\mathcal{O}(x) = \mathcal{K}_\mu\mathcal{O}(x) \tag{1.80}$$

を満たす。(1.73), (1.74), (1.75) において $x = 0$ とおくと、

$$M_{\mu\nu}\mathcal{O}(0) = \mathcal{S}_{\mu\nu}\mathcal{O}(0), \tag{1.81}$$

$$D\mathcal{O}(0) = \Delta\mathcal{O}(0), \tag{1.82}$$

$$K_\mu\mathcal{O}(0) = 0 \tag{1.83}$$

が得られる。特に (1.83) はプライマリー場の定義とすることもできる。

この定義が元の定義を再現することを以下で示す。$P_\mu = \partial_\mu$ は常に成り立つので、[*2] $P_\mu\mathcal{O}(x) = \partial_\mu\mathcal{O}(x)$ であり、

$$\mathcal{O}(x) = \mathrm{e}^{x\cdot P}\mathcal{O}(0) \tag{1.84}$$

と書ける。Baker-Campbell-Hausdorff の公式

$$\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^{[A,\cdot]}B = B + [A,B] + \frac{1}{2}[A,[A,B]] + \cdots \tag{1.85}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu}\mathcal{O}(x) &= M_{\mu\nu}\mathrm{e}^{x\cdot P}\mathcal{O}(0) \\ &= \mathrm{e}^{x\cdot P}(\mathrm{e}^{-x\cdot P}M_{\mu\nu}\mathrm{e}^{x\cdot P})\mathcal{O}(0) \\ &= \mathrm{e}^{x\cdot P}(M_{\mu\nu} - x_\mu P_\nu + x_\nu P_\mu)\mathcal{O}(0) \\ &= (\mathcal{S}_{\mu\nu} - x_\mu\partial_\nu + x_\nu\partial_\mu)\mathcal{O}(x) \end{aligned} \tag{1.86}$$

となるので、(1.73) が得られる。同様に

$$\mathrm{e}^{-x\cdot P}D\mathrm{e}^{x\cdot P} = D + x\cdot P \tag{1.87}$$

$$\mathrm{e}^{-x\cdot P}K_\mu\mathrm{e}^{x\cdot P} = K_\mu + 2x_\mu D - 2x^\nu M_{\mu\nu} + 2x_\mu(x\cdot P) - x^2P_\mu \tag{1.88}$$

を用い、(1.83) を課すことで (1.74), (1.75) が得られる。微小変換に対する変換性から有限変換に対する変換性を構成できるので、(1.83) は (1.61) と等価である。

[*2] 並進によって内部空間の変換が引き起こされるような変な場は基本的に考えない。

1.5 ディセンダント場

プライマリー場 $\mathcal{O}(x)$ を微分して得られる場 $P_\mu\mathcal{O}(x), P_\mu P_\nu\mathcal{O}(x), \ldots$ をディセンダント場と呼ぶ。

$$\begin{aligned} K_\mu P_\nu \mathcal{O}(0) &= [K_\mu, P_\nu]\mathcal{O}(0) + P_\nu K_\mu \mathcal{O}(0) \\ &= (2\Delta\delta_{\mu\nu} - 2\mathcal{S}_{\mu\nu})\mathcal{O}(0) \end{aligned} \tag{1.89}$$

が消えないことから、一般に $P_\mu\mathcal{O}(x)$ はプライマリー場ではない。さらに、

$$\begin{aligned} DP_\mu\mathcal{O}(x) &= (P_\mu D + [D, P_\mu])\mathcal{O}(x) \\ &= P_\mu(D+1)\mathcal{O}(x) \\ &= (x\cdot\partial + \Delta + 1)(P_\mu\mathcal{O}(x)) \end{aligned} \tag{1.90}$$

から、$P_\mu\mathcal{O}(x)$ は共形次元が 1 上がっていることが分かる。P_μ を n 回掛けたディセンダント場の共形次元は $\Delta + n$ となり、これをレベル n のディセンダント場という。同様に、

$$\begin{aligned} DK_\mu\mathcal{O}(x) &= (K_\mu D + [D, K_\mu])\mathcal{O}(x) \\ &= K_\mu(D-1)\mathcal{O}(x) \\ &= (x\cdot\partial + \Delta - 1)(K_\mu\mathcal{O}(x)) \end{aligned} \tag{1.91}$$

から K_μ は共形次元を 1 下げることが分かる。しかし後で議論するように、ユニタリな場の理論では共形次元に下限が存在するので、K_μ を作用させていくと必ず $K_\mu\mathcal{O}(0) = 0$ となる場が現れる。これはプライマリー場に他ならない。つまりプライマリー場は最低ウェイト状態であり、一般の場はプライマリー場に P_μ を作用させて構成できる。プライマリー場 $\mathcal{O}(x)$ と、その微分で得られるディセンダント場をまとめて共形族 (conformal family) と呼ぶ。

1.6 共形 Casimir 演算子

d 次元共形代数は $d+2$ 次元 Lorentz 代数 $\mathfrak{so}(1, d+1)$ に同型であることが知られている。[*3] 実際、

$$L_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}, \quad L_{-1\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \quad L_{-10} = D, \quad L_{0\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu) \tag{1.92}$$

によって L_{ab} $(a, b = -1, 0, \ldots, d)$ を定義し、$L_{ba} = -L_{ab}$ を課すと、共形代数の交換関係は

$$[L_{ab}, L_{cd}] = -\eta_{bc}L_{ad} + \eta_{ac}L_{bd} + \eta_{bd}L_{ac} - \eta_{bc}L_{ab} \tag{1.93}$$

という形にまとめられる。ここで η は符号 $(-, +, \ldots, +)$ をもつ Minkowski 計量である。これは $d+2$ 次元 Lorentz 代数 $\mathfrak{so}(1, d+1)$ に同型である。ここから共形 Casimir 演算子

$$L^2 = \frac{1}{2}L_{ab}L^{ab} = \frac{1}{2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu} - D^2 + \frac{1}{2}(P_\mu K^\mu + K^\mu P_\mu) \tag{1.94}$$

[*3] d 次元 Minkowski 時空における共形代数は $\mathfrak{so}(2, d)$ と同型である。

は共形代数の全ての演算子と交換する。

ここで、

$$L^2 = \frac{1}{2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu} - D(D-d) + P_\mu K^\mu \tag{1.95}$$

と変形できる。これをプライマリー場に作用させると、

$$L^2\mathcal{O}(0) = \left(\frac{1}{2}\mathcal{S}_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu} - \Delta(\Delta - d)\right)\mathcal{O}(0) \tag{1.96}$$

となる。$\mathcal{O}(0)$ をスピン l のテンソル[*4] とすれば、$\frac{1}{2}\mathcal{S}_{\mu\nu}\mathcal{S}^{\mu\nu}\mathcal{O}(0) = -l(l+d-2)\mathcal{O}(0)$ となることが知られている[*5] ので、

$$L^2\mathcal{O}(0) = -\lambda_{\Delta,l}\mathcal{O}(0), \quad \lambda_{\Delta,l} = l(l+d-2) + \Delta(\Delta - d) \tag{1.100}$$

となる。さらに、共形 Casimir 演算子が P_μ と交換することから、任意のディセンダント場はプライマリー場と同じ固有値を持つ。

---

*4 l 階の対称トレースレステンソルのこと。この記事ではそのようなテンソルのみを扱う。

*5 これを確かめる簡便な方法は Laplacian の極座標表示

$$\partial^2 = \frac{1}{r^2}\left[\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + dr\frac{\partial}{\partial r} + m^2\right] \tag{1.97}$$

を用いる方法である。

$$\partial^2 \frac{1}{|y-x|^{d-2}} = 0 \tag{1.98}$$

に注目し、$1/|y-x|^{d-2}$ を $|x|/|y| =: r/|y|$ のべきによって展開する。r^l に比例する項は $C_l(\boldsymbol{n})r^l$ と書け、これに対し

$$-r^{l-2}m^2C_l(\boldsymbol{n}) = C_l(\boldsymbol{n})\partial^2 r^l = l(l+d-2)C_l(\boldsymbol{n})r^{l-2} \tag{1.99}$$

が成り立つ。ちなみに $C_l(\boldsymbol{n})$ は Gegenbauer 多項式と呼ばれる特殊関数になる。r^l の係数はスピン l の表現に対応しており、この表現に対する Casimir 演算子の固有値は $-l(l+d-2)$ である。