# 物理学 I

## 第 1 問

### [1]

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{3m}{4\pi a^3} \cdot 2\pi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \int_0^a \mathrm{d}r\, r^4 \sin^2\theta \\
&= \frac{3m}{2a^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{a^5}{5} \\
&= \frac{2}{5} m a^2
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

### [2]

接地点の速度がゼロになることから、

$$
v' + a\omega' = 0 \tag{0.2}
$$

### [3]

$$
mv' = P, \quad I(\omega' - \omega) = \frac{2}{5} m a^2 (\omega' - \omega) = aP \tag{0.3}
$$

以上の条件から、

$$
\frac{2}{5} m a(\omega' - \omega) - mv' = \frac{1}{5} m a \left(7\omega' - 2\omega\right) = 0 \tag{0.4}
$$

よって、

$$
\omega' = \frac{2}{7}\omega \tag{0.5}
$$

### [4]

跳ね返り前後の関係は

$$
m(v_n - v_{n-1}) = -P_n, \quad I(\omega_n - \omega_{n-1}) = -aP_n \tag{0.6}
$$

である。1 つ目の式の $a$ 倍から 2 つ目の式を引くと、

$$
(I\omega_n - amv_n) - (I\omega_{n-1} - amv_{n-1}) = 0 \tag{0.7}
$$

を得る。よって

$$l := I\omega_n - amv_n \tag{0.8}$$

は一定となる。

**[5]**

反跳が終わったとき、球がすべらずに転がったことから、

$$v_{\mathrm{f}} + a\omega_{\mathrm{f}} = 0. \tag{0.9}$$

これを (0.8) と連立すると、

$$l = I\omega_{\mathrm{f}} - amv_{\mathrm{f}} = -\left(\frac{I}{a} + am\right)v_f = -\frac{7}{5}mav_{\mathrm{f}} \tag{0.10}$$

よって、

$$v_{\mathrm{f}} = -\frac{5l}{7ma} \tag{0.11}$$

と表せる。また、$v_{\mathrm{f}} = 0$ となるためには、

$$l = I\omega_0 - amv_0 = 0 \tag{0.12}$$

となればよい。整理すると、

$$v_0 = \frac{2}{5}a\omega_0 \tag{0.13}$$

となる。

## 第 2 問

**[1]**

円筒状の領域で Gauss の定理を用いると、

$$2\pi rlE(r) = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}, \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{0.14}$$

となる。よって、

$$\phi(r) = -\int_{r_0}^{r} \mathrm{d}r\, E(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0} \tag{0.15}$$

**[2]**

点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と $(a,0),(b,0)$ との間の距離は、

$$\sqrt{(}\,a^2+r^2-2ar\cos\theta), \quad \sqrt{(}\,b^2+r^2-2br\cos\theta) \tag{0.16}$$

で与えられるので、

$$\phi(r,\theta)=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b^2+r^2-2br\cos\theta}{a^2+r^2-2ar\cos\theta} \tag{0.17}$$

となる。

**[3]**

設問 [2] の結果から、静電ポテンシャルは

$$\phi(r,\theta)=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D^2+r^2-2Dr\cos\theta}{d^2+r^2-2dr\cos\theta} \tag{0.18}$$

と書ける。$r=R$ においてこれが $\theta$ に依存しない条件は、

$$\frac{D^2+R^2}{2DR}=\frac{d^2+R^2}{2dR} \tag{0.19}$$

である。整理すると、

$$D=\frac{R^2}{d} \tag{0.20}$$

が得られる。これを (0.18) に代入すると、

$$\phi(r,\theta)=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R^2}{d^2}\frac{(r/R)^2d^2+R^2-2dr\cos\theta}{d^2+r^2-2dr\cos\theta}\right) \tag{0.21}$$

となる。

**[4]**

$$\begin{aligned}\sigma &= \varepsilon_0\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{r=R}\\ &= \frac{\lambda}{4\pi}\left[\frac{2d^2/R-2d\cos\theta}{d^2+R^2-2dR\cos\theta}-\frac{2R-2d\cos\theta}{d^2+R^2-2dR\cos\theta}\right]\\ &= \frac{\lambda(d^2-R^2)}{2\pi R(R^2+d^2-2Rd\cos\theta)}\end{aligned} \tag{0.22}$$

**[5]**

$d/R = a$ とおくと、

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\pi R} \frac{a^2-1}{1-2a\cos\theta + a^2} = -\frac{\lambda}{2\pi R}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx\right) \tag{0.23}$$

これを $r = R$ の円周上で積分すると、

$$R\int_0^{2\pi} \sigma \, \mathrm{d}\theta = -\lambda \tag{0.24}$$

となる。つまり、$z$ 軸方向の単位長さあたりの誘起される電荷は $-\lambda$ となる。

**[6]**

線電荷が $\theta = 0$ の位置にいるとし、$\sigma_n$ がそれぞれ $\theta_n := -\psi + (n-1)\pi/2$ の位置にいるとしてよい。このとき、

$$\frac{2\pi R\sigma_n}{\lambda} = \frac{-(R^2-d^2)}{R^2+d^2-2Rd\cos\theta_n} \tag{0.25}$$

となる。$d$ が $R$ に比べて十分小さいとして、$d/R$ に関して 2 次の項を無視すると、

$$\frac{2\pi R\sigma_n}{\lambda} = -1 - \frac{2d}{R}\cos\theta_n \tag{0.26}$$

となる。ここで、

$$\cos\theta_1 = \cos\psi, \quad \cos\theta_2 = \sin\psi, \tag{0.27}$$

から、

$$(x_0, y_0) = (d\cos\psi, d\sin\psi) = \left(-\frac{R}{2}\left(1 + \frac{2\pi R\sigma_1}{\lambda}\right), -\frac{R}{2}\left(1 + \frac{2\pi R\sigma_2}{\lambda}\right)\right) \tag{0.28}$$

となる。また、

$$\cos\theta_3 = -\cos\psi, \quad \cos\theta_4 = -\sin\psi \tag{0.29}$$

から、

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_2 + \sigma_4 = -\frac{\lambda}{\pi R} \tag{0.30}$$

となるので、

$$\begin{aligned}(x_0, y_0) &= \left(-\frac{R}{2}\left(1 - \frac{2\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_3}\right), -\frac{R}{2}\left(1 - \frac{2\sigma_2}{\sigma_2+\sigma_4}\right)\right) \\ &= \left(\frac{R}{2}\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3}, \frac{R}{2}\frac{\sigma_2-\sigma_4}{\sigma_2+\sigma_4}\right). \end{aligned} \tag{0.31}$$

# 物理学 II

## 第 1 問

**[1]**

$\psi_S$ と $\psi_A$ の節の数はそれぞれ 0 と 1 であり、振動定理から節の数が少ない $\psi_S$ ほうが固有エネルギーが低い。

**[2]**

$$\langle \psi_L | \psi_R \rangle = \frac{1}{2}(\langle \psi_S | \psi_S \rangle - \langle \psi_A | \psi_A \rangle) = 0 \tag{0.32}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix} \tag{0.33}$$

**[3]**

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \mathrm{i}\sin\omega t \\ \mathrm{i}\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}, \quad \omega = \frac{J}{\hbar} \tag{0.34}$$

より、$\sin^2(Jt/\hbar)$

**[4.1]**

$$|0\rangle = |LL\rangle, \quad |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|LR\rangle + |RL\rangle), \quad |2\rangle = |RR\rangle \tag{0.35}$$

$$\mathcal{H}|0\rangle = \mathcal{H}|2\rangle = -J(|LR\rangle + |RL\rangle) = -\sqrt{2}\,J|1\rangle \tag{0.36}$$

$$\mathcal{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(2|LL\rangle + 2|RR\rangle) = -\sqrt{2}\,J(|0\rangle + |2\rangle) \tag{0.37}$$

**[4.2]**

もとの固有状態で考えれば、$-2J, 0, 2J$

**[4.3]**

2 つの粒子が独立なことから、

$$P_1(t) = 2\sin^2\frac{Jt}{\hbar}\cos^2\frac{Jt}{\hbar} \tag{0.38}$$

$$P_2(t) = \cos^4\frac{Jt}{\hbar} \tag{0.39}$$

**[5.1]**

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -A & -\sqrt{2}\,J & 0 \\ -\sqrt{2}\,J & 0 & -\sqrt{2}\,J \\ 0 & -\sqrt{2}\,J & -A \end{pmatrix} \tag{0.40}$$

**[5.2]**

固有方程式は、

$$E^3 + 2AE^2 + (A^2 - 4J^2)E - 4AJ^2 = (E + A)(E^2 + AE - 4J^2) = 0 \tag{0.41}$$

(パリティ対称性があるので、$3 \times 3$ 行列でも楽に対角化できることが保証されている。つまり、自明な固有ベクトルとして $(1, 0, -1)$ があるので、これに $\mathcal{H}$ を作用させれば少なくとも 1 つの固有値は求まる。) よって

$$E = -A, \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 16J^2}}{2}. \tag{0.42}$$

$J^2/A$ のオーダーまで展開すると、

$$E = -A - \frac{4J^2}{A}, -A, \frac{4J^2}{A} \tag{0.43}$$

**[5.3]**

摂動がパリティを破っていないことに注意すると、$|1\rangle$ の成分はない。よって 2 個の粒子が複合粒子を作っている状況なので、設問 [3] と同じものを選べば良い。よってグラフは (b)。また点線が $P_0$、実線が $P_2$、一点鎖線が $P_1$。周期は基底状態と第一励起状態のエネルギー差を $\varDelta E$ として、

$$T = \frac{2\pi}{\varDelta E/\hbar} = \frac{\pi\hbar A}{2J^2}. \tag{0.44}$$

**[6]**

$A \to -B$ とすればよい。グラフは (b)。点線が $P_0$、実線が $P_2$、一点鎖線が $P_1$。周期は

$$T = \frac{\pi\hbar B}{2J^2} \tag{0.45}$$

**[7]**

引力の場合と斥力の場合の違いは、複合粒子状態 ($|0\rangle, |2\rangle$) のエネルギーがそうでない状態 ($|1\rangle$) のエネルギーよりが高いか低いかだけである。しかし、摂動がパリティを破っていないことから、$|1\rangle$ の成分はない。よって 2 つの場合で差はない。

## 第 2 問

**[1]**

$$Z = \frac{V^N}{h^{3N}N!}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_\mathrm{B}T}\right)\right)^{3N} = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{mk_\mathrm{B}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3N/2} \tag{0.46}$$

**[2]**

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = \frac{3}{2}Nk_\mathrm{B}T \tag{0.47}$$

$$C = \frac{3}{2}k_\mathrm{B}T \tag{0.48}$$

**[3]**

$$P = k_\mathrm{B}T\frac{\partial}{\partial V}\ln Z = \frac{Nk_\mathrm{B}T}{V} \tag{0.49}$$

**[4]**

相互作用がない場合の分配関数を $Z_0(T,V,N)$ と書くことにする。分配関数は、

$$Z = Z_0(T, V-b, N)\exp\left(-\frac{\alpha N^2}{V-b}\right) \tag{0.50}$$

となる。ここから、

$$P = k_{\mathrm{B}} T \frac{\partial}{\partial V} \ln Z = \frac{k_{\mathrm{B}} T}{V - b} + \frac{\alpha k_{\mathrm{B}} T N^2}{(V - b)^2} \tag{0.51}$$

**[5]**

状態方程式は $A'(V) = 0$ のときに満たされる。これは 3 点あるが、力学的に安定となるためには

$$A''(V) = \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} = -\frac{\partial P}{\partial V} < 0 \tag{0.52}$$

が成り立つ必要がある。よって安定な点は 2 つの極小点で、極大となる点は不安定。

## 第 3 問

**[1]**

$$\boldsymbol{E}(z, t) = \mathrm{e}^{-k_2 z} \operatorname{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{E}}_0 \exp\left\{\mathrm{i}\left(k_1 z - \omega t\right)\right\}\right] \tag{0.53}$$

の位相速度は、

$$v = \frac{\omega}{k_1} \tag{0.54}$$

**[2]**

$$d = \frac{1}{k_2} \tag{0.55}$$

**[3]**

(1),(2) から、

$$\tilde{k}^2 = \varepsilon \mu \omega^2 + \mathrm{i} \mu \sigma \omega =: \mu \omega \sqrt{\varepsilon^2 \omega^2 + \sigma^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{0.56}$$

となる。ここで、

$$\tilde{k} = \pm \sqrt{\mu \omega \sqrt{\varepsilon^2 \omega^2 + \sigma^2}} \left( \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} + \mathrm{i} \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} \right) \tag{0.57}$$

と書けるから、

$$k_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\mu\omega\left(\sqrt{\varepsilon^2\omega^2+\sigma^2}+\varepsilon\omega\right)}, \tag{0.58}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\mu\omega\left(\sqrt{\varepsilon^2\omega^2+\sigma^2}-\varepsilon\omega\right)} \tag{0.59}$$

となる。ただし符号は $k_2 > 0$ となるように選択した。

**[4]**

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega(\sqrt{\varepsilon^2\omega^2+\sigma^2}-\varepsilon\omega)}} \tag{0.60}$$

$\sigma \gg \varepsilon\omega$ のとき、

$$d \approx \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}} \propto \sigma^{-1/2} \tag{0.61}$$

$\sigma \ll \varepsilon\omega$ のとき、

$$d \approx \sqrt{\frac{4\varepsilon}{\mu\sigma^2}} \propto \sigma^{-1} \tag{0.62}$$

**[5]**

$-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{E}$ より、

$$\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B} = \mathrm{i}\tilde{k}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}. \tag{0.63}$$

よって、位相の遅れは

$$\phi = \arg(k_1 + \mathrm{i}k_2) \tag{0.64}$$

$\sigma/\varepsilon\omega \to \infty$ では $k_1/k_2 \to 1$ から、

$$\phi = \arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4} \tag{0.65}$$

$\sigma/\varepsilon\omega \to 0$ では $k_2/k_1 \to 0$ から、

$$\phi = \arg(1) = 0 \tag{0.66}$$

**[6]**

$z=0$ において、

$$|\boldsymbol{S}| = \frac{|\tilde{k}||\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2}{\mu\omega}\cos(\omega t)\cos(\omega t+\phi) = \frac{|\tilde{k}||\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2}{2\mu\omega}\left(\cos(2\omega t+\phi)+\cos\phi\right) \tag{0.67}$$

と書ける。よってこの時間平均をとると、

$$\frac{|\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2|\tilde{k}|\cos\phi}{2\mu\omega} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2 k_1}{2\mu\omega} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2}{2}\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}\left(\sqrt{\varepsilon^2\omega^2+\sigma^2}+\varepsilon\omega\right)} \tag{0.68}$$

**[7]**

$$Q = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) \tag{0.69}$$

**[8]**

$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ より、

$$\langle Q\rangle = \frac{1}{2}\sigma|\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2\mathrm{e}^{-2k_2 z} \tag{0.70}$$

$$\int_0^{+\infty}\langle Q\rangle\,\mathrm{d}z = \frac{\sigma|\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2}{4k_2} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2 k_1}{2\mu\omega} \tag{0.71}$$

ここで

$$k_1k_2 = \frac{1}{2}\mu\omega\sigma \tag{0.72}$$

を用いた。よって、境界から導体内へ流入するエネルギーは全て Joule 熱として消費される。

## 第 4 問

**[1]**

$$
\boldsymbol{b}_1 = 2\pi \frac{\det\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & -\sqrt{3}\,a/2 \\ \boldsymbol{e}_2 & a/2 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} \sqrt{3}\,a/2 & -\sqrt{3}\,a/2 \\ a/2 & a/2 \end{vmatrix}} = 2\pi \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3}\,a \\ 1/a \end{pmatrix}, \tag{0.73}
$$

$$
\boldsymbol{b}_2 = 2\pi \frac{\det\begin{vmatrix} \sqrt{3}\,a/2 & \boldsymbol{e}_1 \\ a/2 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} \sqrt{3}\,a/2 & -\sqrt{3}\,a/2 \\ a/2 & a/2 \end{vmatrix}} = 2\pi \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3}\,a \\ 1/a \end{pmatrix}. \tag{0.74}
$$

$P(2\pi/\sqrt{3}\,a, 0)$, $Q(0, 4\pi/3a)$

**[2]**

$k_\mathrm{F}$ に対して、

$$
2 \cdot \pi k_\mathrm{F}^2 \frac{S}{(2\pi)^2} = 2 \cdot \frac{S}{s} \tag{0.75}
$$

が成り立つ。$S$ は系の面積、$s$ は単位胞の面積であり、

$$
s = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \tag{0.76}
$$

で与えられる。よって、

$$
k_\mathrm{F} = \sqrt{\frac{4\pi}{s}} = \sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}}\, a^{-1}. \tag{0.77}
$$

同じことを波数空間でも考えられる。Fermi 面の内部の面積と Brillouin ゾーンの面積が等しいことから、

$$
\pi k_\mathrm{F}^2 = \frac{(2\pi)^2}{s} = \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}\,a^2}. \tag{0.78}
$$

よって同じ答えを得る。

**[4]**

$$\langle \phi_i^A | \mathcal{H} | \psi_{\boldsymbol{k}} \rangle = \lambda_A \epsilon_A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i^A} + \lambda_B \tau \sum_{\boldsymbol{\delta}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_i^A + \boldsymbol{\delta})} \tag{0.79}$$

$$\langle \phi_i^B | \mathcal{H} | \psi_{\boldsymbol{k}} \rangle = \lambda_B \epsilon_B \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i^B} + \lambda_A \tau \sum_{\boldsymbol{\delta}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_i^B - \boldsymbol{\delta})} \tag{0.80}$$

から、

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_{\boldsymbol{k}}^A | \mathcal{H} | \psi_{\boldsymbol{k}}^A \rangle & \langle \psi_{\boldsymbol{k}}^A | \mathcal{H} | \psi_{\boldsymbol{k}}^B \rangle \\ \langle \psi_{\boldsymbol{k}}^B | \mathcal{H} | \psi_{\boldsymbol{k}}^A \rangle & \langle \psi_{\boldsymbol{k}}^B | \mathcal{H} | \psi_{\boldsymbol{k}}^B \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_A & \tau \sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_j} \\ \tau \sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_j} & \epsilon_B \end{pmatrix} \tag{0.81}$$

となる。ここで、

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2}{3}, \quad \boldsymbol{\delta}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2}{3}, \quad \boldsymbol{\delta}_3 = \frac{-2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2}{3} \tag{0.82}$$

と定義した。$\lambda_A, \lambda_B$ が満たす方程式は、

$$\begin{pmatrix} \epsilon_A & \tau \sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_j} \\ \tau \sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_j} & \epsilon_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \end{pmatrix} = E(\boldsymbol{k}) \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \end{pmatrix} \tag{0.83}$$

となる。

**[5]**

まず、

$$\mathit{\Delta}(\boldsymbol{k}) := \tau \sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_j} \tag{0.84}$$

とおく。設問 [4] で求めた方程式に非自明な解が存在する条件は、

$$E(\boldsymbol{k})^2 - (\epsilon_A + \epsilon_B) E(\boldsymbol{k}) + (\epsilon_A \epsilon_B - |\mathit{\Delta}(\boldsymbol{k})|^2) = 0 \tag{0.85}$$

となる。よって

$$E(\boldsymbol{k}) = \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} \pm \sqrt{\frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2}{4} + |\mathit{\Delta}(\boldsymbol{k})|^2} \tag{0.86}$$

である。正直ここで終わりにしたいが、$|\mathit{\Delta}(\boldsymbol{k})|^2$ を計算する。

$$\begin{aligned} |\mathit{\Delta}(\boldsymbol{k})|^2 &= \tau^2 \left[3 + 2\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_{23}) + 2\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_{31}) + 2\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_{12})\right] \\ &= \tau^2 \left(3 + 2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a k_x + \frac{1}{2} a k_y\right) + 2\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} a k_x + \frac{1}{2} a k_y\right) + 2\cos(a k_y)\right) \\ &= \tau^2 \left(3 + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a k_x\right)\cos\left(\frac{1}{2} a k_y\right) + 2\cos(a k_y)\right) \end{aligned} \tag{0.87}$$

ただし $\boldsymbol{\delta}_{ij} = \boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j$ と略記している。よって、

$$E(\boldsymbol{k}) = \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} \pm \sqrt{\frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2}{4} + \tau^2 \left(3 + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,ak_x}{2}\right)\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right) + 2\cos\left(ak_y\right)\right)} \tag{0.88}$$

**[6]**

$k_x = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} E(k_y) &= \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} \pm \sqrt{\frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2}{4} + \tau^2 \left(1 + 4\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{ak_y}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} \pm \sqrt{\frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2}{4} + \tau^2 \left(1 + 2\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right)^2\right)}. \end{aligned} \tag{0.89}$$

ギャップが最小になるのは $\cos\left(ak_y/2\right) = -1/2$ のときなので、

$$k_y = \frac{4\pi}{3a} + 4n\pi, \quad \frac{8\pi}{3a} + 4n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{0.90}$$

のとき。ただし、これらは全て等価であり、Brilloin ゾーンに含まれる点としては

$$k_y = \pm\frac{4\pi}{3a} \tag{0.91}$$

となる。このとき、ギャップは

$$E_g = \epsilon_A - \epsilon_B \tag{0.92}$$

**[7]**

点 X からの $k_y$ のずれを $\delta k_y$ とおく。

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{a\,\delta k_y}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}\,a}{2}\,\delta k_y \tag{0.93}$$

から、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}) &\approx \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} \pm \frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)}{2}\left[1 + \frac{2\tau^2}{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2}\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{2}\,\delta k_y\right)^2\right] \\ &= \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} \pm \left[\frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)}{2} + \frac{3a^2\tau^2}{4(\epsilon_A - \epsilon_B)}\,\delta k_y^2\right] \end{aligned} \tag{0.94}$$

上下のバンドの有効質量は、

$$\pm\frac{2\hbar^2(\epsilon_A-\epsilon_B)}{3a^2\tau^2} \tag{0.95}$$

となる。

[**8**]

$\epsilon_A=\epsilon_B$ とすればよい。

$$E(\boldsymbol{k})=\epsilon_A\pm\tau\left|1+2\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right)\right| \tag{0.96}$$

から、点 X 付近では、

$$E(\boldsymbol{k})=\epsilon_A\pm\frac{\sqrt{3}\,a\tau}{2}\left|\delta k_y\right|. \tag{0.97}$$