1.　動径量子化

演算子形式の場の理論では、時間一定の超平面で時空をスライスし、その断面に Hilbert 空間を対応づける。しかし、時空の切り方は一つではない。回転対称な理論では時間の方向の取り方は任意であるし、時空を曲面で切ることもできる。好き勝手な切り方では良い性質は期待できないが、共形場理論におけるうまい切断面として、超球面がある。このようにして得られる動径量子化は状態・演算子対応や演算子積展開といった共形場理論における強力な道具と密接に関係しているので、以降で詳しく見ていくことにする。

1.1　動径量子化

時空上に特別な原点を 1 つ定め、座標を原点からの距離 r と方向を表す単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ によって表すことにする。r を固定し、角度方向に依存する場 $\phi(r,\boldsymbol{n}) = \varphi(\boldsymbol{n})$ を考え、ありうる全ての場をそれぞれ Hilbert 空間の基底 $|\varphi\rangle$ に対応づける。また時間発展演算子を

$$\langle\varphi_{\mathrm{f}}|\hat{U}(r_{\mathrm{f}}, r_{\mathrm{i}})|\varphi_{\mathrm{i}}\rangle \coloneqq \int_{\phi(r_{\mathrm{i}})=\varphi_{\mathrm{i}}}^{\phi(r_{\mathrm{f}})=\varphi_{\mathrm{f}}} \mathcal{D}\phi\, e^{-S[\phi]} \tag{1.1}$$

と定義する。このような演算子形式を**動径量子化 (radial quantization)** と呼ぶ。

1.2　真空状態

動径量子化において、単位球面上の真空状態 $|0\rangle$ は

$$\langle\varphi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \int_{r=0}^{\phi(r=1)=\varphi} \mathcal{D}\phi\, e^{-S[\phi]} \tag{1.2}$$

と定義される。一方 $\langle 0|$ は

$$\langle 0|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \int_{\phi(r=1)=\varphi}^{r=\infty} \mathcal{D}\phi\, e^{-S[\phi]} \tag{1.3}$$

と定義される。$\sqrt{Z}$ は規格化定数であり、作用に定数を足すことで無視できる。

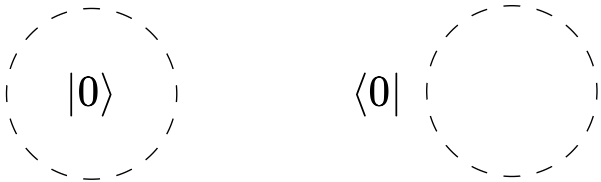

図 1: 動径量子化における真空状態

共形場理論では、トポロジカル演算子の性質から

$$\hat{P}_\mu|0\rangle = \hat{M}_{\mu\nu}|0\rangle = \hat{D}|0\rangle = \hat{K}_\mu|0\rangle = 0 \tag{1.4}$$

が成り立つ。同様に

$$\langle 0|\hat{P}_\mu = \langle 0|\hat{M}_{\mu\nu} = \langle 0|\hat{D} = \langle 0|\hat{K}_\mu = 0 \tag{1.5}$$

が成り立つ。これは以下のように図示できる。

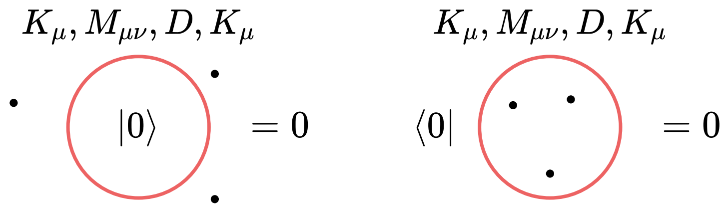

図 2: 真空の対称性

一つ目の式はトポロジカル演算子を 1 点に収縮できることから明らかである。また二つ目の式は期待値に含まれる全ての演算子を一斉に座標変換しても相関関数が変わらないことから分かる。

1.3 シリンダー時空

動径量子化では r ごとに動径一定面 (超球面) の大きさが異なるため、r の異なる Hilbert 空間の次元が等しくならず、同一視できないという問題が発生する。例えば格子正則化した場合を考えると、$r \leq |x| \leq r + \delta r$ となるような格子点の数は r によって異なるので、転送行列を作ろうとすると正方行列ではなくなってしまう。これを正方行列にしたいならば、r ごとに自由度を適当に積分して間引いてやらないといけない。

そのために、$\tau = \log r$ として、$(\tau, \boldsymbol{n})$ で表されるシリンダー時空に移ることにする。線素を τ を使って表すと、

$$\mathrm{d}s^2_{\mathbb{R}^d} = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}s^2{}_{S^{d-1}} = e^{2\tau}(\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}s^2{}_{S^{d-1}}) = e^{2\tau}\,\mathrm{d}s^2_{\mathbb{R}\times S^{d-1}} \tag{1.6}$$

となるので、Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ からシリンダー時空 $\mathbb{R} \times S^{d-1}$ への変換は共形変換になっている。ここで $\mathrm{d}s^2{}_{S^{d-1}}$ は極座標の線素を表す。

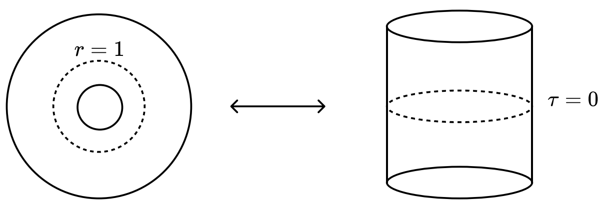

図 3: シリンダー時空

Euclid 空間の経路積分からシリンダー時空の経路積分に移ることで、動径ごとの自由度の数が揃えられるため、性質の良い演算子形式が期待できる。ただし、そのためには場所ごとに倍率の異なるくりこみ変換を行う必要があり、したがって共形不変性が必要なことに注意する。

理論のスケール不変性から

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_N(x_N)\rangle = \frac{1}{r_1^{\Delta_1}}\cdots\frac{1}{r_N^{\Delta_N}} f(\{n_i\},\{\tau_i-\tau_j\}) \tag{1.7}$$

と表せるので、シリンダー時空上で定義される場 $\mathcal{O}_{\mathrm{cyl.}}(\tau,\boldsymbol{n})$ を、

$$\mathcal{O}_{\mathrm{cyl.}}(\tau,\boldsymbol{n}) = r^{\Delta}\mathcal{O}(x) = e^{\Delta\tau}\mathcal{O}(x) \tag{1.8}$$

とする。シリンダー時空への変換では局所的には $x\to x/r$ というくりこみ変換をしているので、このように場を定義しなおすのは妥当である。すると相関関数は

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle = \frac{1}{r_1^{\Delta_1}}\cdots\frac{1}{r_N^{\Delta_N}}\left\langle \mathcal{O}_1^{\mathrm{cyl.}}(x_1)\cdots\mathcal{O}_n^{\mathrm{cyl.}}(x_n)\right\rangle \tag{1.9}$$

となる。したがって、シリンダー時空の相関関数は Euclid 空間の相関関数を無次元化したものになっている。

1.4 シリンダー時空の演算子形式

シリンダー時空では素朴に定義される (1.1) は修正を受ける。まず、τ を固定して超球面上の場 $\phi_{\mathrm{cyl.}}(\tau,\boldsymbol{n})=\varphi(\boldsymbol{n})$ を考え、これを $|\varphi\rangle$ に対応づける。ここで、$\phi_{\mathrm{cyl.}}(\tau,\boldsymbol{n})=e^{\Delta_\phi\tau}\phi(x)$ である。シリンダー時空における時間発展演算子は

$$\langle\varphi_{\mathrm{f}}|\hat{U}(\tau_{\mathrm{f}},\tau_{\mathrm{i}})|\varphi_{\mathrm{i}}\rangle \coloneqq \int_{\phi_{\mathrm{cyl.}}(\tau_{\mathrm{i}})=\varphi_{\mathrm{i}}}^{\phi_{\mathrm{cyl.}}(\tau_{\mathrm{f}})=\varphi_{\mathrm{f}}} \mathcal{D}\phi\, e^{-S[\phi]} \tag{1.10}$$

と定義される。境界条件はシリンダー時空の場 $\phi_{\mathrm{cyl.}}(\tau,\boldsymbol{n})=e^{\Delta_\phi\tau}\phi(x)$ に対して課されていることに注意する。規格化条件

$$\int \mathcal{D}\varphi\,|\varphi\rangle\langle\varphi| = 1 \tag{1.11}$$

を課すことで時間発展演算子の加法性

$$\hat{U}(\tau_1,\tau_3) = \hat{U}(\tau_1,\tau_2)\hat{U}(\tau_2,\tau_3) \tag{1.12}$$

が分かる。場 $\mathcal{O}(\tau,\boldsymbol{n})$ の質量次元が Δ であるとき、期待値は

$$\begin{aligned}\left\langle\mathcal{O}_{\mathrm{cyl.}}(\tau,\boldsymbol{n})\right\rangle &= e^{\Delta\tau}\int\mathcal{D}\varphi\,\langle 0|\varphi\rangle\mathcal{O}[e^{-\Delta_\phi\tau}\varphi(\boldsymbol{n})]\langle\varphi|0\rangle \\ &= \int\mathcal{D}\varphi\,\langle 0|\varphi\rangle\mathcal{O}[\varphi(\boldsymbol{n})]\langle\varphi|0\rangle \\ &= \langle 0|\hat{U}(0,\tau)\hat{\mathcal{O}}(\boldsymbol{n})\hat{U}(\tau,0)|0\rangle\end{aligned} \tag{1.13}$$

となる。したがって、$\mathcal{O}_{\mathrm{cyl.}}(\tau,\boldsymbol{n})=e^{\Delta\tau}\mathcal{O}(x)$ は Heisenberg 表示

$$\hat{\mathcal{O}}(\tau,\boldsymbol{n}) = \hat{U}(0,\tau)\hat{\mathcal{O}}(\boldsymbol{n})\hat{U}(\tau,0) \tag{1.14}$$

に対応することが分かる。以降の議論でハットのついた演算子は全て無次元化されており、$\hat{\mathcal{O}}(\tau, \boldsymbol{n})$ は $\mathcal{O}(\tau, \boldsymbol{n})$ ではなく $\mathcal{O}_{\mathrm{cyl.}}(\tau, \boldsymbol{n})$ に対応するので注意してほしい。

ここで、Ward-Takahashi 恒等式から

$$\mathcal{O}_{\mathrm{cyl.}}(\tau, \boldsymbol{n}) = e^{\Delta\tau} e^{\tau\,\partial/\partial\tau}\,\mathcal{O}(0, \boldsymbol{n}) = e^{\tau\mathcal{D}}\mathcal{O}(0, \boldsymbol{n}) \tag{1.15}$$

が成り立つので、

$$\hat{\mathcal{O}}(\tau, \boldsymbol{n}) = e^{\tau\hat{D}}\hat{\mathcal{O}}(0, \boldsymbol{n})e^{-\tau\hat{D}} \tag{1.16}$$

となる。ただし、$\hat{D}$ は

$$\hat{D} = -\int \mathrm{d}\Omega\, n_\mu n^\nu \hat{T}^\mu{}_\nu \tag{1.17}$$

と定義される。$\mathrm{d}\Omega$ は極座標の測度であり、$n_\mu = x_\mu / r$ である。(1.14) と (1.16) を比較して、

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\hat{U}(\tau, 0) = -\hat{D}} \tag{1.18}$$

が得られる。したがって $\hat{D}$ は動径量子化において Hamiltonian の役割をもつ。

1.5　状態・演算子対応

スケール不変性をもつ場の理論では、$d-1$ 次元球面上で定義された状態と、その中心にある局所演算子が 1 対 1 対応するという良い性質がある。これを以下で示すが、議論は次の図にまとめられる。

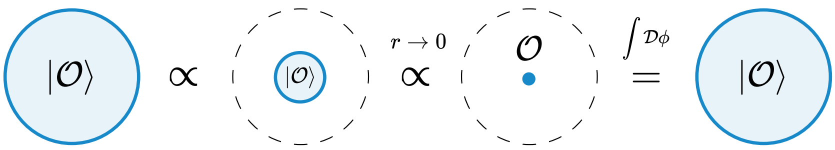

図 4: 状態・演算子対応

まず、状態から対応する局所演算子を構成する。演算子は任意の境界条件に対して相関関数が計算できれば定義できる。$|\mathcal{O}\rangle$ は $\tau = 0$ で定義されているとする。もし $\tau_1 > 0$ に演算子 $\mathcal{O}_1$ が挿入された場合、相関関数は

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}(0)\rangle \coloneqq \langle 0|\hat{\mathcal{O}}_1(\tau_1, \boldsymbol{n}_1)|\mathcal{O}\rangle = \int \mathcal{D}\varphi\,\langle\varphi|\mathcal{O}\rangle \int_{\phi_{\mathrm{cyl.}}(0)=\varphi}^{\tau=\infty} \mathcal{D}\phi\,\mathcal{O}_1(\tau_1, \boldsymbol{n}_1)e^{-S[\phi]} \tag{1.19}$$

と計算できる。一方この式で $\tau_1 < 0$ としようとしても、経路積分は $\tau < 0$ の領域を含まないため、うまく定義できない。しかし、

$$|\mathcal{O}\rangle = \hat{U}(0, \tau)\hat{U}(\tau, 0)|\mathcal{O}\rangle \eqqcolon \hat{U}(0, \tau)|\mathcal{O}\rangle_\tau \tag{1.20}$$

と変形し、$\tau \to -\infty$ とすることで $\tau < 0$ にも演算子を挿入できる。したがって、$|\mathcal{O}\rangle$ に対応する演算子 $\mathcal{O}(0)$ は

$$\langle \cdots \mathcal{O}(0) \rangle = \langle 0 | \cdots | \mathcal{O} \rangle = \lim_{\tau \to -\infty} \langle 0 | \cdots \hat{U}(0, \tau) | \mathcal{O} \rangle_\tau \tag{1.21}$$

によって定義される。

一般の $\mathcal{O}(x)$ については x を原点とする動径量子化を考えて同様に定義できる。状態の積も以下のように問題なく定義できる。

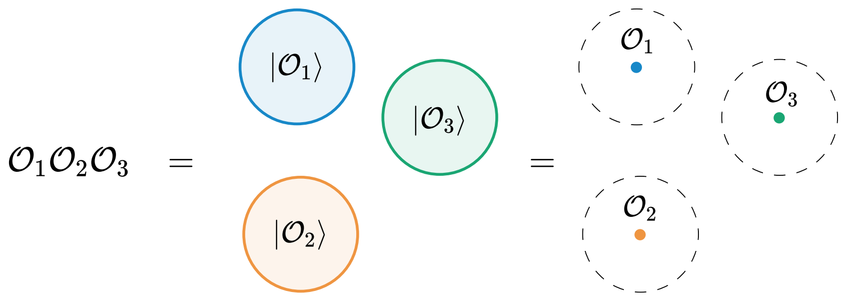

図 5: 状態 ⇒ 演算子

スケール不変性がない場合はそれぞれの状態を重ねることができず、状態は剛体のような演算子として振る舞う。スケール不変性があると、境界をいくらでも縮めることができるので、状態を局所演算子に対応づけられる。

次に、局所演算子から対応する状態を構成する。演算子 $\mathcal{O}(x = 0)$ に対し、状態 $|\mathcal{O}\rangle$ は $r < 1$ での経路積分を行った後の境界として得られる。すなわち、

$$\langle \varphi | \mathcal{O} \rangle = \int_{\tau=-\infty}^{\phi(\tau=0)=\varphi} \mathcal{O}(x = 0) e^{-S[\phi]} \tag{1.22}$$

と定義する。$\mathcal{O}(x)$ に対応する状態は x を中心とする動径量子化で同様に構成することができる。

状態・演算子対応によって、プライマリー場に対応するプライマリー状態を構成することができる。プライマリー場は

$$K_\mu \mathcal{O}(0) = 0, \quad M_{\mu\nu} \mathcal{O}(0) = -\mathcal{S}_{\mu\nu} \mathcal{O}(0), \quad D\mathcal{O}(0) = \Delta \mathcal{O}(0) \tag{1.23}$$

を満たすので、これに対応する状態 $|\mathcal{O}\rangle$ は

$$\hat{K}_\mu |\mathcal{O}\rangle = 0, \quad \hat{M}_{\mu\nu} |\mathcal{O}\rangle = -\mathcal{S}_{\mu\nu} |\mathcal{O}\rangle, \quad \hat{D} |\mathcal{O}\rangle = \Delta |\mathcal{O}\rangle \tag{1.24}$$

を満たす。またディセンダント演算子に対応するディセンダント状態は

$$\hat{P}_\mu |\mathcal{O}\rangle, \hat{P}_\mu \hat{P}_\nu |\mathcal{O}\rangle, \ldots \tag{1.25}$$

のように構成される。

1.6 共役

量子論において重要な性質として Hermite 性があるが、これが Euclid 空間においてどのように現れるのかを見る。まず Hamiltonian について、Hermite 性

$$\hat{H}^\dagger = \hat{H} \tag{1.26}$$

が成り立つことを仮定する。これは量子論では時間発展がユニタリであることを意味し、統計力学では転送行列が Hermite であることを意味する。Minkowski 時空では、Heisenberg 表示の演算子は

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{L}}(t_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{x}) = e^{i\hat{H}t_{\mathrm{L}}}\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{L}}(0, \boldsymbol{x})e^{-i\hat{H}t_{\mathrm{L}}} \tag{1.27}$$

と定義される。この式は Minkowski 時空における Ward-Takahashi 恒等式

$$\eta_{\mu\nu}\partial^\mu J^\nu_a \mathcal{O}_{\mathrm{L}}(x) = iQ_a\mathcal{O}_{\mathrm{L}}(x), \tag{1.28}$$

から導くことができる。ここで $\eta_{\mu\nu}$ は符号 $(-, +, \ldots, +)$ をもつ Minkowski 計量である。$\mathcal{O}_{\mathrm{L}}(0, \boldsymbol{x})$ が Hermite 演算子であるとき、

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{L}}(t_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{x})^\dagger = e^{i\hat{H}t_{\mathrm{L}}}\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{L}}(0, \boldsymbol{x})e^{-i\hat{H}t_{\mathrm{L}}} = \hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{L}}(t_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{x}) \tag{1.29}$$

が成り立つ。これは量子論で親しんでいる内容である。次に、これを Wick 回転した式は

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{E}}(t_{\mathrm{E}}, \boldsymbol{x}) = e^{\hat{H}t_{\mathrm{E}}}\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{L}}(0, \boldsymbol{x})e^{-\hat{H}t_{\mathrm{E}}} \tag{1.30}$$

となる。ここで $\mathcal{O}_{\mathrm{L}}(0, \boldsymbol{x})$ と書いて添字 E ではなく L をつけているが、Schrödinger 表示の演算子が Wick 回転によって不変であることを課して $\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{E}}(t_{\mathrm{E}}, \boldsymbol{x})$ を定義している。この共役は $\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{L}}(0, \boldsymbol{x})$ が Hermite なとき

$$\boxed{\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{E}}(t_{\mathrm{E}}, \boldsymbol{x})^\dagger = \hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{E}}(-t_{\mathrm{E}}, \boldsymbol{x})} \tag{1.31}$$

となる。この式が Euclid 空間における (Heisenberg 表示の演算子に対する)Hermite 性の定義である。ただし、時間成分の添字をもつ演算子の場合は

$$\mathcal{O}^0_{\mathrm{E}}(0, \boldsymbol{x}) = -i\mathcal{O}^0_{\mathrm{L}}(0, \boldsymbol{x}) \tag{1.32}$$

と定義する。これにより、(1.31) の符号が変わる。同様に、時間の添字が n 個ある場合は $(-i)^n$ を掛ける。したがって、テンソル演算子に対し、

$$\mathcal{O}^{\mu_1\cdots\mu_l}_{\mathrm{E}}(t, \boldsymbol{x})^\dagger = \Theta^{\mu_1}{}_{\nu_1}\cdots\Theta^{\mu_l}{}_{\nu_l}\mathcal{O}^{\nu_1\cdots\nu_l}_{\mathrm{E}}(-t, \boldsymbol{x}) \tag{1.33}$$

$$\Theta^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - 2\delta^\mu_0\delta^0_\nu \tag{1.34}$$

が成り立つ。

同様に、状態に対する共役を構成する。Heisenberg 表示の状態は

$$|\varphi(t)\rangle = \hat{U}(0,t)|\varphi\rangle = e^{\hat{H}t}|\varphi\rangle, \quad \langle\varphi(t)| = \langle\varphi|\hat{U}(t,0) = \langle\varphi|e^{-\hat{H}t} \tag{1.35}$$

と定義される。$|\varphi(t)\rangle$ の共役をとると

$$|\varphi(t)\rangle^\dagger = \langle\varphi|e^{\hat{H}t} = \langle\varphi(-t)| \tag{1.36}$$

となる。この場合も共役は (Heisenberg 表示において) 時間反転を伴う。したがって Hermite 演算子 $\hat{\mathcal{O}}(t,\boldsymbol{x})$ に対し、

$$\langle\varphi_{\mathrm{f}}(t_{\mathrm{f}})|\hat{\mathcal{O}}(t,\boldsymbol{x})|\varphi_{\mathrm{i}}(t_{\mathrm{i}})\rangle^* = \langle\varphi_{\mathrm{i}}(-t_{\mathrm{i}})|\hat{\mathcal{O}}(-t,\boldsymbol{x})|\varphi_{\mathrm{f}}(-t_{\mathrm{f}})\rangle \tag{1.37}$$

が成り立つ。

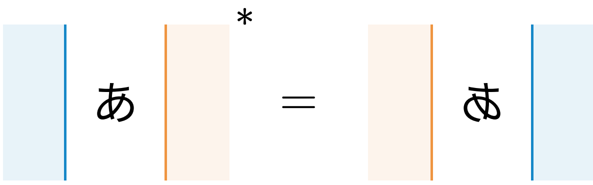

図 6: Euclid 空間における共役

1.7 動径量子化における共役

次に動径量子化での共役を考える。共役は Hilbert 空間に付随する概念なので、量子化の方法 (Hilbert 空間の取り方) に依存することに注意する。動径量子化の共役と正準量子化の共役は別の操作であり、同じ記号 † を用いるが、文脈によって区別してほしい。

動径量子化ではスケール変換の生成子 $\hat{D}$ が Hamiltonian に対応するので、

$$\hat{D}^\dagger = \hat{D} \tag{1.38}$$

を仮定する。これは $\hat{H}$ の Hermite 性より幾分か非自明であるが、シリンダー時空での時間発展のユニタリ性を意味している。またこの仮定は共形次元が実数となることを保証する。シリンダー時空の演算子の Hermite 性は

$$\hat{\mathcal{O}}(\tau,\boldsymbol{n})^\dagger = \hat{\mathcal{O}}(-\tau,\boldsymbol{n}), \quad \hat{\mathcal{O}}(x)^\dagger = \hat{\mathcal{O}}\left(\frac{x}{r^2}\right) \tag{1.39}$$

と定義される。右辺は $\mathcal{O}(x)$ に対し反転 $I : x^\mu \to x^\mu/r^2$ を作用させたものになっている。テンソル演算子の場合、τ 成分の添字に対して符号を反転させて、

$$\hat{\mathcal{O}}^{\mu_1\cdots\mu_l}(x)^\dagger = I^{\mu_1}{}_{\nu_1}(x)\cdots I^{\mu_l}{}_{\nu_l}(x)\hat{\mathcal{O}}^{\nu_1\cdots\nu_l}\left(\frac{x}{r^2}\right), \tag{1.40}$$

$$I^\mu{}_\nu(x) = \delta^\mu_\nu - 2n^\mu n_\nu = \delta^\mu_\nu - \frac{2x^\mu x_\nu}{r^2} \tag{1.41}$$

となる。

次に、トポロジカル演算子の共役を調べる。半径 r の超球面上で積分された運動量は

$$P_\mu = -r^{d-1} \int \mathrm{d}\Omega\, n_\nu T^\nu{}_\mu(x) \tag{1.42}$$

と書かれる。ここで $\mathrm{d}\Omega$ は極座標の測度を表す。これを演算子にする場合、

$$P_\mu \to r^{-1}\hat{P}_\mu, \quad T^\nu{}_\mu \to r^{-d}\hat{T}^\nu{}_\mu \tag{1.43}$$

として

$$\hat{P}_\mu = -\int \mathrm{d}\Omega\, n_\nu \hat{T}^\nu{}_\mu(n) \tag{1.44}$$

となる。ここで $x^\mu = rn^\mu$ とおいている。同様の議論から

$$\hat{K}_\mu = \int \mathrm{d}\Omega\, n_\nu(\delta_{\mu\rho} - 2n_\mu n_\rho)\hat{T}_{\mathrm{c}}^{\nu\rho}(rn) \tag{1.45}$$

となる。$\hat{P}_\mu$ の共役をとると、(1.40) を用いて

$$\hat{P}_\mu^\dagger = \int \mathrm{d}\Omega\, n_\nu(\delta_{\mu\rho} - 2n_\mu n_\rho)\hat{T}^{\nu\rho}\Big(\frac{n}{r}\Big) = \hat{K}^\mu \tag{1.46}$$

を得る。角運動量演算子に対しては、

$$\hat{M}_{\mu\nu} = -\int \mathrm{d}\Omega\, n_\rho(n_\nu \hat{T}^\rho{}_\mu - n_\mu \hat{T}^\rho{}_\nu) \tag{1.47}$$

から、

$$\begin{aligned}\hat{M}_{\mu\nu}^\dagger &= \int \mathrm{d}\Omega\, n_\rho(-n_\nu \hat{T}^\rho{}_\sigma(\delta_\mu^\sigma - 2n^\sigma n_\mu) + n_\mu \hat{T}^\rho{}_\sigma(\delta_\nu^\sigma - 2n^\sigma n_\nu)) \\ &= -\hat{M}_{\mu\nu}^\dagger \end{aligned}\tag{1.48}$$

となる。以上をまとめて、

$$\boxed{\hat{P}_\mu^\dagger = \hat{K}_\mu, \quad \hat{K}_\mu^\dagger = \hat{P}_\mu, \quad \hat{M}_{\mu\nu}^\dagger = -\hat{M}_{\mu\nu}} \tag{1.49}$$

となる。これらの式は以下の方法によっても導出可能である。[*1]

$$P_\mu^\dagger \coloneqq -IP_\mu I = K_\mu, \quad M_{\mu\nu}^\dagger \coloneqq -IM_{\mu\nu}I = -M_{\mu\nu} \tag{1.50}$$

I は反転変換を表す。また、(1.49) は交換関係

$$[D, P_\mu] = P_\mu, \quad [D, K_\mu] = K_\mu \tag{1.51}$$

と整合する。

[*1] 動径量子化の共役が反転を表すことから生成子の両側に I を掛ける。負号がつくのは量子力学で $\partial/\partial x^\dagger = -\partial/\partial x$ とするのと同じ理由で、部分積分をすることによる。

1.8 ユニタリティと鏡映正値性

我々が通常興味のある場の量子論は、ユニタリな理論である。これは状態空間が正定値の内積をもつと言い換えられる。Euclid 空間の場の理論においてユニタリティに対応する概念は鏡映正値性 (reflection positivity) と呼ばれる性質である。Euclid 空間での状態を

$$\hat{\mathcal{O}}_1(-t_1)\cdots\hat{\mathcal{O}}_n(-t_n)|0\rangle, \quad (-t_1 > \cdots > -t_n) \tag{1.52}$$

と書くと、その共役は

$$\langle 0|\hat{\mathcal{O}}_n(t_n)\cdots\hat{\mathcal{O}}_1(t_1) \tag{1.53}$$

で与えられる。ただし (1.31) を仮定した。状態空間の正定値性は

$$\langle 0|\hat{\mathcal{O}}_n(t_n)\cdots\hat{\mathcal{O}}_1(t_1)\hat{\mathcal{O}}_1(-t_1)\cdots\hat{\mathcal{O}}_n(-t_n)|0\rangle \geq 0 \tag{1.54}$$

と書ける。相関関数で書くと

$$\langle \mathcal{O}_n(t_n)\cdots\mathcal{O}_1(t_1)\mathcal{O}_1(-t_1)\cdots\mathcal{O}_n(-t_n)\rangle \geq 0 \tag{1.55}$$

となる。この性質を**鏡映正値性 (reflection positivity)** という。

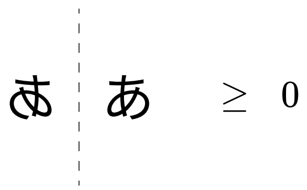

図 7: 鏡映正値性

動径量子化についての鏡映正値性は

$$\langle \mathcal{O}_n(\tau_n)\cdots\mathcal{O}_1(\tau_1)\mathcal{O}_1(-\tau_1)\cdots\mathcal{O}_n(-\tau_n)\rangle \geq 0 \tag{1.56}$$

となる。