物理工学科 2020 物理

政岡凜太郎

2023 年 6 月 20 日

第 1 問

[1]

[1.1]

簡単のため、$x_0 = x_{N+1} = 0$ とおく。運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_i(t) = -k(x_i - x_{i+1}) - k(x_i - x_{i-1}) = -k(2x_i - x_{i+1} - x_{i-1}) \tag{1}$$

となるので、

$$K = \begin{pmatrix} 2k & -k & & & \\ -k & 2k & -k & & \\ & -k & 2k & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -k \\ & & & -k & 2k \end{pmatrix} \tag{2}$$

[1.2]

固有ベクトルは

$$(\boldsymbol{u}_l)_n = \frac{N_l}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_l n} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_l n}\right) \tag{3}$$

と書ける。この式は、$(\boldsymbol{u}_l)_0 = (\boldsymbol{u}_l)_{N+1} = 0$ を満たす。これに K を作用させると、

$$K\boldsymbol{u}_l = 2k\boldsymbol{u}_l - k(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_l} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_l})\boldsymbol{u}_l = 2k(1-\cos q_l) \tag{4}$$

となる。したがって、固有値は $2k\,(1-\cos q_l)$ である。次に、規格化定数を求める。これは

$$\sum_{l=0}^{N}[(\boldsymbol{u}_l)_n]^2 = 1 \tag{5}$$

となるように定めるべきなので、

$$N_l = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \tag{6}$$

となる。ただし、ベクトル

$$|l\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N+1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_l n}, \quad |-l\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N+1}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_l n} \tag{7}$$

がどちらも規格化されていることと、これらが直交する事実から、

$$\left|\sqrt{2}\,\frac{|l\rangle + |-l\rangle}{2}\right|^2 = 1 \tag{8}$$

となることを用いた。

[1.3]

運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{x}(t) = -\frac{K}{m}\boldsymbol{x}(t) \tag{9}$$

から、

$$\sum_l \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\alpha_l(t)\boldsymbol{u}_l = -\sum_l \alpha_l \frac{K}{m}\boldsymbol{u}_l = -\sum_l \frac{2k}{m}(1-\cos q_l)\alpha_l \boldsymbol{u}_l \tag{10}$$

となる。$\boldsymbol{u}_l$ が完全系を張ることに注意して、

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\alpha_l(t) = -\frac{2k}{m}(1-\cos q_l)\alpha_l(t) \tag{11}$$

を得る。よって

$$\omega_l = \sqrt{\frac{2k}{m}(1-\cos q_l)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\left|\sin\frac{q_l}{2}\right| \tag{12}$$

[1.4]

省略。massless な線形分散が図示できれば OK

[2]

[2.1]

釣り合いの式から、

$$\boldsymbol{f} - K\boldsymbol{x} = 0 \tag{13}$$

となるので、

$$\beta_l - m\omega_l^2 \alpha_l = 0, \quad \frac{\alpha_l}{\beta_l} = \frac{1}{m\omega_l^2} \tag{14}$$

[2.2]

$1/m\omega_l^2$ が最大となる l を求める。

$$m\omega_l^2 = 4k \sin^2 \frac{q_l}{2} \tag{15}$$

より、これは $l = 1, N$ となるときに最小となる。

$$q_l = \frac{\pi l}{N+1} \tag{16}$$

より、$N \gg 1$ では

$$\frac{1}{m\omega_1^2} \approx \frac{1}{4k} \left(\frac{\pi}{2(N+1)} \right)^{-2} = \frac{(N+1)^2}{\pi^2 k} \tag{17}$$

である。

[3]

[3.1]

x_n についての運動方程式の右辺に $-k_0 x_n$ という項が追加されるので、

$$K \to K + k_0 I \tag{18}$$

となる。固有値は全て k_0 だけ増加し、固有ベクトルは不変。

[3.2]

$$m\omega_l^2 = 2k(1-\cos q_l) + k_0 = 4k\sin^2\frac{q_l}{2} + k_0 \tag{19}$$

より、

$$\omega_l = \sqrt{\frac{1}{m}\left(4\sin^2\frac{q_l}{2} + k_0\right)} \tag{20}$$

となる。$N\to\infty$ において最小の ω_l は、$q_l \to 0$ によって得られるので、

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{k_0}{m}} \tag{21}$$

[3.3]

省略。massive な分散関係を図示すれば OK

第 2 問

[1]

Maxwell eq. に複素数表示の平面波解を代入すると、

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \omega\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B} = -\omega\mu_0\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E} \tag{22}$$

が得られる。したがって、

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) = \omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B} = -\omega^2\mu_0\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E} \tag{23}$$

が得られる。指数関数部分を取り除くと、

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0) = -\omega^2\mu_0\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0 \tag{24}$$

を得る。

[2]

[1] の結果を整理すると、

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0) = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0) - \boldsymbol{k}^2\boldsymbol{E}_0 = -\omega^2\mu_0\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0 \tag{25}$$

したがって、

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \omega^2\mu_0\varepsilon_1 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & \omega^2\mu_0\varepsilon_1 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & \omega^2\mu_0\varepsilon_2 - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \tag{26}$$

と定義すれば、[1] の結果は $\tilde{X}\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{0}$ と書ける。

[3]

$\boldsymbol{k} = (0, k\sin\theta, k\cos\theta)^{\mathrm{T}}$ を代入すると、

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \omega^2\mu_0\varepsilon_1 - k^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2\mu_0\varepsilon_1 - k^2\cos^2\theta & k^2\cos\theta\sin\theta \\ 0 & k^2\cos\theta\sin\theta & \omega^2\mu_0\varepsilon_2 - k^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{27}$$

となる。$\tilde{X}\boldsymbol{E}_0 = 0$ が非自明な解を持つためには、$\det\tilde{X} = 0$ が必要。したがって、

$$\omega^2\mu_0\varepsilon_1 - k^2 = 0 \tag{28}$$

または、

$$\begin{aligned}&\left(\omega^2\mu_0\varepsilon_1 - k^2\cos^2\theta\right)\left(\omega^2\mu_0\varepsilon_2 - k^2\sin^2\theta\right) - k^4\cos^2\theta\sin^2\theta \\ &= \omega^4\mu_0^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - k^2\omega^2\mu_0(\varepsilon_1\sin^2\theta + \varepsilon_2\cos^2\theta) = 0\end{aligned} \tag{29}$$

である。したがってそれぞれの場合に、

$$k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}, \quad k_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1\sin^2\theta + \varepsilon_2\cos^2\theta)}} \tag{30}$$

となる。

[4]

$k = k_1$ に対しては明らかに $(1, 0, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{Ker}\,\tilde{X}$ だから、$\boldsymbol{E}_0 = (E_0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ とすればよい。$k = k_2$ に対しては、

$$\begin{pmatrix} \omega^2\mu_0\varepsilon_1 - k_2^2\cos^2\theta & k_2^2\cos\theta\sin\theta \\ k_2^2\cos\theta\sin\theta & \omega^2\mu_0\varepsilon_2 - k_2^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{31}$$

のカーネルの元を見つければよい。これを仮に $(1, a)^{\mathrm{T}}$ とおくと、

$$(\omega^2\mu_0\varepsilon_1 - k_2^2\cos^2\theta) + ak_2^2\cos\theta\sin\theta = 0 \tag{32}$$

よって、

$$
\begin{aligned}
a &= -\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_1 k_2^{-2} - \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} \\
&= -\frac{(\varepsilon_1/\varepsilon_2)\sin^2\theta + \cos^2\theta - \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} \\
&= -\frac{\varepsilon_1\sin\theta}{\varepsilon_2\cos\theta}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

となる。規格化すると、

$$
\boldsymbol{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{\varepsilon_1^2\sin^2\theta + \varepsilon_2^2\cos^2\theta}}\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_2\cos\theta \\ -\varepsilon_1\sin\theta \end{pmatrix}
\tag{34}
$$

[5]

電場が x 成分のみを持つのは $k = k_1$ の場合。Poynting ベクトルは

$$
\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}\times(\mu_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) = \mu_0\boldsymbol{E}^2\boldsymbol{k} - \mu_0(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{E}
\tag{35}
$$

と書ける。$k = k_1$ の場合、$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{k} \propto \boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k} = 0$ であるから、第 2 項が消えて $\boldsymbol{S} \propto \boldsymbol{k}$ となる。つまり光線は入射後も直進する。

[6]

電場が x 成分のみを持つのは $k = k_2$ の場合。このとき $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} \propto \boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ だから、

$$
\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times(\mu_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) \propto \boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_1\sin\theta \\ \varepsilon_2\cos\theta \end{pmatrix}
\tag{36}
$$

となる。すなわち、

$$
\tan(\theta + \alpha) = \frac{\varepsilon_1\sin\theta}{\varepsilon_2\cos\theta}
\tag{37}
$$

となる。また、

$$
\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{\sin(\theta+\alpha)\cos\theta - \cos(\theta+\alpha)\sin\theta}{\cos(\theta+\alpha)\cos\theta + \sin(\theta+\alpha)\sin\theta} \\
&= \frac{\tan(\theta+\alpha) - \tan\theta}{1 + \tan(\theta+\alpha)\tan\theta}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

より、

$$\tan\alpha = \frac{(\varepsilon_1/\varepsilon_2 - 1)\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \tag{39}$$

[7]

上下にずれた Q が 2 つ重なって見える。

第 3 問

[1]

$$\begin{aligned} Z^{(\mathrm{g})}(V,\beta,N) &= \frac{1}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}}\int \mathrm{d}x^{3N}\,\mathrm{d}p^{3N}\exp\left(-\sum_{i=1}^{3N}\frac{\beta p_i^2}{2m}\right) \\ &= \frac{V^N}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}}\left(\int \mathrm{d}p\exp\left(\frac{\beta p^2}{2m}\right)\right)^{3N} \\ &= \frac{V^N}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3N/2} \\ &= \frac{V^N}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3N/2} \end{aligned} \tag{40}$$

[2]

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{G}}^{(\mathrm{g})}(V,\beta,\mu) &= \sum_{N=0}^{\infty} Z^{(\mathrm{g})}(V,\beta,N)\mathrm{e}^{\beta\mu N} \\ &= \exp\left(V\mathrm{e}^{\beta\mu}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2}\right) \end{aligned} \tag{41}$$

[3]

$$P(\beta,\mu) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\log Z_{\mathrm{G}}^{(\mathrm{g})} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{\beta\mu}\beta^{-5/2} \tag{42}$$

[4]

$$\xi_{\mathrm{G}}^{(\mathrm{a})} = 1 + \mathrm{e}^{\beta(\varepsilon+\mu)} \tag{43}$$

[5]

$$n_a = \frac{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon+\mu)}}{1 + \mathrm{e}^{\beta(\varepsilon+\mu)}} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon+\mu)}} \tag{44}$$

[6]

$$\mathrm{e}^{-\beta\mu} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \beta^{-5/2} P^{-1} \tag{45}$$

より、

$$\begin{aligned} n_a &= \frac{1}{1 + (m/2\pi\hbar^2)^{3/2}\,\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon}\beta^{-5/2}P^{-1}} \\ &= \frac{1}{1 + (m/2\pi\hbar^2)^{3/2}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T}(k_{\mathrm{B}}T)^{5/2}P^{-1}} \end{aligned} \tag{46}$$

[7]

図示は省略する。P を 0 から上げていくと、n_a は 0 から単調増加して 1 に漸近する。T を 0 から上げていくと、n_a は 1 から減少したあと、極小値をとってまた 1 に近づいていく。

第 4 問

[1]

$$\tilde{H} = \hbar\omega(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + 1) \tag{47}$$

[2]

$$E = \hbar\omega(n_x + n_y + 1), \quad n_x, n_y \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{48}$$

[3]

角運動量の次元を表す定数は $\hbar$ であるから、

$$\begin{aligned}\hat{l}_z &= -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger)(\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger) + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}(\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger) \\ &= \mathrm{i}\hbar(\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y)\end{aligned} \tag{49}$$

と書ける。ここから

$$[\hat{H}, \hat{l}_z] = \mathrm{i}\hbar^2\omega(-\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y + \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y) = 0 \tag{50}$$

となる。つまり $\hat{l}_z$ は保存量。

[4]

$$\hat{l}_z\hat{A}|l_z\rangle = ([\hat{l}_z, \hat{A}] + \hat{A}\hat{l}_z)|l_z\rangle = (\alpha + l_z)\hat{A}|l_z\rangle \tag{51}$$

より、$\hat{A}|l_z\rangle \neq 0$ ならば、$\hat{A}|l_z\rangle$ は固有値 $l_z + \alpha$ を持つ $\hat{l}_z$ の固有状態となる。

[5]

$$[\hat{l}_z, C\hat{a}_x^\dagger + D\hat{a}_y^\dagger] = \mathrm{i}\hbar(C\hat{a}_y^\dagger - D\hat{a}_x^\dagger) = \alpha(C\hat{a}_x^\dagger + D\hat{a}_y^\dagger) \tag{52}$$

より、

$$\alpha C = -\mathrm{i}\hbar D, \quad \alpha D = \mathrm{i}\hbar C \tag{53}$$

となる。したがって $\alpha^2 C = -\mathrm{i}\hbar\alpha D = \hbar^2 C$ となるから、$\alpha = \pm\hbar$ である。$\alpha = \hbar$ に対しては、

$$\hat{b}_1^\dagger = C(\hat{a}_x^\dagger + \mathrm{i}\hat{a}_y^\dagger), \quad \hat{b}_1 = C(\hat{a}_x - \mathrm{i}\hat{a}_y) \tag{54}$$

となる。さらに $|C|^2 + |D|^2 = 1$ から

$$\hat{b}_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger + \mathrm{i}\hat{a}_y^\dagger), \quad \hat{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x - \mathrm{i}\hat{a}_y) \tag{55}$$

となる。また $\alpha = -\hbar$ に対して同様に計算すると、

$$\hat{b}_2^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger - \mathrm{i}\hat{a}_y^\dagger), \quad \hat{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + \mathrm{i}\hat{a}_y) \tag{56}$$

となる。

[6]

$$[\hat{b}_1, \hat{b}_1^\dagger] = [\hat{b}_2, \hat{b}_2^\dagger] = 1, \quad [\hat{b}_1, \hat{b}_2^\dagger] = [\hat{b}_2, \hat{b}_1^\dagger] = 0 \tag{57}$$

[7]

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2 + 1), \quad \hat{l}_z = \hbar(\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_1 - \hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2) \tag{58}$$

[8]

$\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_1$ の固有値を m_1、$\hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2$ の固有値を m_2 とすると、N 番目のエネルギー準位については $m_1 + m_2 = N$ となる。$\hat{l}_z$ の固有値は

$$l_z = \hbar(m_1 - m_2) \tag{59}$$

であるから、$(m_1, m_2) = (N, 0), (N-1, 1), \ldots, (0, N)$ を代入して、

$$l_z = \hbar N, \hbar(N-2), \ldots, -\hbar N \tag{60}$$

となる。

[9]

エネルギー準位は $\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1$ の固有値を $m_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2$ の固有値を $m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、スピン量子数を $s = \pm 1$ として、

$$E = \hbar\omega(m_1 + m_2 + 1) + \hbar\lambda s(m_1 - m_2) \tag{61}$$

と書ける。