ファインマン統計力学 7 章

スピン波

理学部物理学科 3 年 政岡凜太郎

2022 年 9 月 26 日

導入

本日の目標

- 磁性体の低温での振る舞いを，スピン波の概念を使って定性的に理解する．
- 1 次元 Heisenberg 模型の厳密解の構成方法について知る．

Pauli 行列を

$$\sigma_i^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_i^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

と定義する．ただし，この行列は $|{\uparrow}\rangle_i, |{\downarrow}\rangle_i$ を基底とする空間に作用するものである．また，

$$\sigma_i^\pm = \sigma_i^x \pm i\sigma_i^y, \quad \sigma_i^+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_i^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

とする．

今回主に扱うハミルトニアンは，一般的には

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j \tag{1.3}$$

と書かれる．これを Heisenberg 模型という．最も簡単な例としては，1 次元で最近接相互作用のみを取り入れた場合，

$$H_{XXX} = -J \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \tag{1.4}$$

と書かれる．この場合も単に Heisenberg 模型と呼んだり，あるいは XXX 模型と呼んだりもする．z 軸方向の相互作用の強さを変えたものは，XXZ 模型と呼ばれ，

$$H_{XXZ} = -J \sum_{n=1}^{N} (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^z + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \Delta \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z) \tag{1.5}$$

と書かれる．

スピン置換演算子

まず，2 スピン系 $H = -J\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ を考える．

$$\Pi^{1,2} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + 1}{2} = \frac{\sigma_1^z \sigma_2^z + 1}{2} + \frac{\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+}{4} \tag{1.6}$$

と定義すると，$H = -J(2\Pi^{1,2} - 1)$ と書ける．ここで，

$$\Pi^{1,2} \left|\uparrow\uparrow\right\rangle = \left|\uparrow\uparrow\right\rangle, \quad \Pi^{1,2} \left|\downarrow\downarrow\right\rangle = \left|\downarrow\downarrow\right\rangle,$$
$$\Pi^{1,2} \left|\uparrow\downarrow\right\rangle = \left|\downarrow\uparrow\right\rangle, \quad \Pi^{1,2} \left|\downarrow\uparrow\right\rangle = \left|\uparrow\downarrow\right\rangle$$

となる．$\Pi^{1,2}$ はスピン 1 とスピン 2 を入れ替える変換であり，スピン置換演算子という．

ハミルトニアンは

$$H = -J \sum_{n=1}^{N} (2\Pi^{n,n+1} - 1) = -J \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \tag{1.7}$$

である．Heisenberg の運動方程式

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_n = \frac{i}{\hbar}[H, \boldsymbol{\sigma}_n] \tag{1.8}$$

は，交換関係

$$[\sigma_1^i \sigma_2^i, \sigma_1^j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_1^k \sigma_2^i = 2i(\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2)^j \tag{1.9}$$

より，

$$\hbar\dot{\boldsymbol{\sigma}}_n = 2J\boldsymbol{\sigma}_n \times (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_{n-1}) \tag{1.10}$$

と書ける．

$\boldsymbol{\sigma}_n$ を大きさ 1 の古典的なベクトルとみなす．$\boldsymbol{\sigma}_z \approx 1$ のとき，方程式を線形化でき，

$$\hbar\dot{\boldsymbol{\sigma}}_n = 4J\boldsymbol{\sigma}_n \times \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_z \times (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_{n-1}) \tag{1.11}$$

と近似できる．$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_{n-1} = 2\boldsymbol{\sigma}_n$ と近似すると，$\boldsymbol{\sigma}_n$ は単に z 軸まわりのラーモア歳差運動をする．次に，

$$\sigma_n^x \approx c \sin \omega t e^{ink} \tag{1.12}$$

$$\sigma_n^y \approx c \cos \omega t e^{ink} \tag{1.13}$$

という解を仮定する．これを (1.11) に代入すると，

$$\hbar\omega = 4J(1 - \cos k) \tag{1.14}$$

を得る．ここで，波数の次元について注意しておく．今回扱うのは全て格子間隔を 1 とした格子であり，波数は無次元量になる．通常の 1/(距離) の次元を持つ波数にしたければ，格子間隔を a として，$k \to ka$ と置き換えれば良い．