1 共形代数の表現論とユニタリティバウンド

1.1 特異ベクトル

1.2 ユニタリティバウンド

用いる交換関係を以下に載せておく。

$$\begin{aligned}
&[K_\mu, P_\nu] = 2\delta_{\mu\nu}D - 2M_{\mu\nu} \\
&[D, P_\mu] = P_\mu \\
&[M_{\nu\rho}, P_\sigma] = -\delta_{\nu\sigma}P_\rho + \delta_{\rho\sigma}P_\nu
\end{aligned}$$

動径量子化におけるユニタリティ (鏡映正値性) を仮定して共形次元に対する制限を導く。まず、スカラープライマリー状態 $|\mathcal{O}\rangle$ に対し、

$$\langle\mathcal{O}|\mathcal{O}\rangle \geq 0 \tag{1.1}$$

が成り立つ。次にレベル 1 のディセンダント状態について考える。交換関係を用いると、

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{O}|K_\mu P_\nu|\mathcal{O}\rangle &= \langle\mathcal{O}|(P_\nu K_\mu + 2\delta_{\mu\nu}D - 2M_{\mu\nu})|\mathcal{O}\rangle \\
&= 2\varDelta\delta_{\mu\nu}\langle\mathcal{O}|\mathcal{O}\rangle
\end{aligned} \tag{1.2}$$

となり、ユニタリティから $\varDelta \geq 0$ が分かる。次にレベル 2 のディセンダント状態について

$$\langle\mathcal{O}|K_\mu K_\nu P_\rho P_\sigma|\mathcal{O}\rangle = \langle\mathcal{O}|K_\mu P_\rho K_\nu P_\sigma|\mathcal{O}\rangle + 2\langle\mathcal{O}|K_\mu(\delta_{\nu\rho}D - M_{\nu\rho})P_\sigma|\mathcal{O}\rangle \tag{1.3}$$

となる。各項は

$$\langle\mathcal{O}|K_\mu P_\rho K_\nu P_\sigma|\mathcal{O}\rangle = 4\varDelta^2\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} \tag{1.4}$$

$$2\delta_{\nu\rho}\langle\mathcal{O}|K_\mu D P_\sigma|\mathcal{O}\rangle = 4(\varDelta^2 + \varDelta)\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \tag{1.5}$$

$$-2\langle\mathcal{O}|K_\mu M_{\nu\rho} P_\sigma|\mathcal{O}\rangle = 4\varDelta\delta_{\nu\sigma}\delta_{\mu\rho} - 4\varDelta\delta_{\rho\sigma}\delta_{\mu\nu} \tag{1.6}$$

と計算されるので、

$$\langle\mathcal{O}|K_\mu K_\nu P_\rho P_\sigma|\mathcal{O}\rangle = 4\varDelta(\varDelta+1)(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}) - 4\varDelta\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} \tag{1.7}$$

を得る。$P_\mu P_\nu|\mathcal{O}\rangle$ を回転に対する既約表現に分解して考えるのが最も一般的な議論だが、ここでは $P^2|\mathcal{O}\rangle$ についてのユニタリティバウンドを考える。これは $\mu = \nu, \rho = \sigma$ として縮約をとれば良いので、

$$8\varDelta(\varDelta+1)d - 4\varDelta d^2 \geq 0 \tag{1.8}$$

が得られる。$\varDelta \geq 0, d > 0$ から

$$\boxed{\varDelta \geq \frac{d}{2} - 1} \tag{1.9}$$

となる。同様の議論をもっと高いレベルのディセンダントで行うこともできるが、これ以上厳しい条件は出てこないことが知られている。

1.3 スピンを持つ演算子のユニタリティバウンド

スピンを持つ演算子についてもユニタリティから共形次元に対する不等式を導くことができる。まず、プライマリー状態の規格化を

$$\langle \mathcal{O}^a | \mathcal{O}_b \rangle = \delta^a_b \tag{1.10}$$

とする。レベル 1 のディセンダントについて、

$$\langle \mathcal{O}^a | K_\mu P_\nu | \mathcal{O}_b \rangle = 2\Delta \delta_{\mu\nu} \delta^a_b - 2 (\mathcal{S}_{\mu\nu})_a{}^b \tag{1.11}$$

となる。ユニタリティから右辺の行列の固有値は全て非負になる必要があるので、

$$\Delta \geq \text{max-eigenvalue}\left((\mathcal{S}_{\mu\nu})_a{}^b \right) \tag{1.12}$$

が言える。ここで、

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{\mu\nu})_a{}^b &= \frac{1}{2} (L^{\alpha\beta})_{\mu\nu} (\mathcal{S}_{\alpha\beta})_a{}^b, \\ (L^{\alpha\beta})_{\mu\nu} &= \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu \end{aligned} \tag{1.13}$$

と書く。$\alpha\beta = A$ と書き、$(L^A)_{\mu\nu}, (\mathcal{S}_A)_a{}^b$ を表現空間 $V, R_{\mathcal{O}}$ に対する M^A の表現とみなすと、

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = L^A \mathcal{S}_A &= \frac{1}{2} \left((L + \mathcal{S})^2 - L^2 - \mathcal{S}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\mathrm{Cas}(V \otimes R_{\mathcal{O}}) + \mathrm{Cas}(V) + \mathrm{Cas}(R_{\mathcal{O}}) \right) \end{aligned} \tag{1.14}$$

と書ける。つまり、$\mathcal{S}$ を Casimir 演算子のみで表すことができる。

以降はスピン l のトレースレス演算子の場合を考える。このとき $R_{\mathcal{O}}$ はスピン l の既約表現となり、$R_{\mathcal{O}} = V_l$ と書くことにする。$V \otimes V_l$ は

$$V \otimes V_l = V_{l-1} \oplus \cdots \quad (l > 0) \tag{1.15}$$

と既約分解できる。最もスピンが小さい空間のみが最大固有値に寄与するので、

$$\begin{aligned} \Delta &\geq \frac{1}{2} \left(-\mathrm{Cas}(V_{l-1}) + \mathrm{Cas}(V_l) + \mathrm{Cas}(V) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Big(-(l-1)(l+d-3) + l(l+d-2) + (d-1) \Big) \end{aligned} \tag{1.16}$$

と書ける。ここで、d 次元空間のスピン l の状態に対する Casimir 演算子の固有値が $\mathrm{Cas}(V_l) = l(l+d-2)$ であることを用いた。整理して

$$\boxed{\Delta \geq l + d - 2} \tag{1.17}$$

となる。もっと高いレベルのディセンダントで同様の議論が可能だが、これ以上厳しい条件は出てこないことが知られている。