

Anyons and matrix product operator algebras

政岡凜太郎

2024 年 9 月 6 日

目次

1	Introduction	2
2	Injectivity MPS	3
3	G-injective MPS	9
3.1	定義	9
3.2	Parent Hamiltonian	12
4	G-injective PEPS	17
4.1	定義	17
4.2	Parent Hamiltonian	21
4.3	トポロジカルエンタングルメントエントロピー	30
4.4	エニオン励起とその分類	32
5	エニオンと MPO 代数	39
5.1	Unitarity	43
A	標準形	46

1. Introduction

このノートではトポロジカル秩序およびエニオンを PEPS を用いて理解することを目指し、matrix product operator (MPO) algebra による枠組みを解説する。内容の多くは [6, 5, 1] に依拠している。また quantum double について [7] を参照した。また MPS についての基本的な命題 (主に [4] の内容) について appendix で触れている。

2. Injectivity MPS

定義 2.1. TI-MPS

\mathcal{V}, \mathcal{H} を有限次元 Hilbert 空間とする。 \mathcal{V} を virtual space, \mathcal{H} を physical space または local Hilbert space と呼ぶことにする。テンソル $A \in L(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ を以下のように定義する。

$$A = \sum_{i,j,s} A_{ij}^s |i\rangle\langle j|_{\mathcal{V}} |s\rangle_{\mathcal{H}} = \text{---} \boxed{A} \text{---} \quad (2.1)$$

このとき以下の状態を A から構成される translation invariant matrix product state (TI-MPS) と呼ぶ。

$$|\psi(A)\rangle = \text{Tr}_{\mathcal{V}}[A \cdots A] = \text{---} \boxed{A} \text{---} \boxed{A} \text{---} \cdots \text{---} \boxed{A} \text{---} \boxed{A} \text{---} \quad (2.2)$$

なおこのノートでは並進対称性のある場合しか扱わない。

定義 2.2. Injectivity

テンソル $A \in L(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ が

$$\text{Span}\{A^s\}_s = \left\{ \text{---} \boxed{A} \text{---} \begin{array}{c} \alpha \\ \circ \end{array} \left| \alpha \right. \right\} = L(\mathcal{V}) \quad (2.3)$$

を満たすとき、 A が injective であると言う。

定義 2.3. 一般化逆行列

$m \times n$ 行列 X に対し $n \times m$ 行列 X^g が $XX^gX = X$ を満たすとき、 X^g は X の一般化逆行列 (generalized inverse) であるという。

定義 2.4. 擬逆行列

$m \times n$ 行列 X が特異値分解によって

$$X = U \Sigma V^\dagger \quad (2.4)$$

と書かれているとする。ここで U, V はユニタリ行列、 Σ は対角行列である。このとき X の擬逆行列 (pseudoinverse) は以下のように定められる。

$$X^+ := V \Sigma^+ U^\dagger \quad (2.5)$$

ここで

$$\Sigma_{ij}^+ = \begin{cases} (\Sigma_{ij})^{-1} & \Sigma_{ij} \neq 0 \\ 0 & \Sigma_{ij} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

である。擬逆行列は一般化逆行列であり、 X が正則なときは逆行列に一致する。 $A \in L(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ に対し、対応する $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ から \mathcal{H} への写像が以下のように定まる。

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{i,j,s} A_{ij}^s |s\rangle_{\mathcal{H}} \langle i, j|_{\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}} = \text{Diagram of } A \text{ with input lines and one output line} \quad (2.7)$$

この擬逆行列 $\mathcal{P}(A)^+$ を与えるテンソルを A^+ とする。すなわち、

$$\mathcal{P}(A)^+ = \sum_{i,j,s} (A^+)_{ij}^s |i, j\rangle_{\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}} \langle s|_{\mathcal{H}} = \text{Diagram of } A^+ \text{ with one input line and output lines} \quad (2.8)$$

とする。

Remark 2.1.

$\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(A)^+$ および $\mathcal{P}(A)^+\mathcal{P}(A)$ を図示すると

$$\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(A)^+ = \text{Diagram of } A \text{ and } A^+ \text{ connected in series}, \quad \mathcal{P}(A)^+\mathcal{P}(A) = \text{Diagram of } A^+ \text{ and } A \text{ connected in series} \quad (2.9)$$

である。これらは擬逆行列の定義から直交射影となる。これらの射影の像を考えよう。 $\text{im}(\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(A)^+) = \text{im } \mathcal{P}(A) \subsetneq \mathcal{H}$ の場合は local Hilbert space をとり直すことで常に $\text{im } \mathcal{P}(A) = \mathcal{H}$ とできる。次に $\text{im}(\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(A)^+) \subset \mathcal{V}' \otimes \mathcal{V}' \subsetneq \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ の場合、virtual space を \mathcal{V}' に取り直す。しかし、それでも $\text{im}(\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(A)^+) \subsetneq \mathcal{V}' \otimes \mathcal{V}'$ となり得る。この空間を MPS および PEPS の特徴づけとして利用するのが injectivity の考え方である。さらに $\text{im}(\mathcal{P}(A)^+\mathcal{P}(A))$ は

$$\text{im}(\mathcal{P}(A)^+\mathcal{P}(A)) = \text{im}(\mathcal{P}(A)^\dagger \mathcal{P}(A)^{\dagger\dagger}) = \text{im } \mathcal{P}(A)^\dagger = \text{Span}\{\bar{A}^s\}_s \quad (2.10)$$

と表せる。多くの場合は $*$ 演算に対して閉じた行列代数を考えるので、 $\text{Span}\{A^s\}_s$ を考えれば良い。

補題 2.1.

テンソル $A \in L(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ について、以下は同値

1. $\text{Span}\{A^s\}_s = L(\mathcal{V}) = \text{Span}\{\bar{A}^s\}_s$.
2. A から定まる写像 $\mathcal{P}(A) : L(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{H}$ が単射 (injective)
3. $\mathcal{P}(A)^+ \mathcal{P}(A) = \mathbb{1}$. これは以下のように図示される。

$$\begin{array}{c} \text{---} \boxed{A}^+ \text{---} \\ | \\ \text{---} \boxed{A} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \end{array} \quad (2.11)$$

Proof. (1. \Leftrightarrow 2.) $\ker \mathcal{P}(A) = \text{coker } \mathcal{P}(A)^\dagger = L(\mathcal{V}) / \text{im } \mathcal{P}(A)^\dagger$ より、 $\text{Span}\{\bar{A}^s\}_s = \text{im } \mathcal{P}(A)^\dagger = L(\mathcal{V})$ と $\ker \mathcal{P}(A) = 0$ は同値。(1. \Leftrightarrow 3.) $\mathcal{P}(A)^+ \mathcal{P}(A)$ が $\text{Span}\{\bar{A}^s\}_s$ への射影であることから直ちに同値性が分かる。 \square

補題 2.2. 連結 (Concatenation)

injectivity はテンソルの連結 (concatenation) によって保たれる。つまり injective なテンソル A_{ij}^s, B_{ij}^s に対し、 $\sum_j A_{ij}^s B_{jk}^t$ は injective である。

Proof. $\text{Span}\{A^s B^t\}_{s,t} = L(\mathcal{V})L(\mathcal{V}) = L(\mathcal{V})$. \square

Remark 2.2.

MPS $|\psi(A)\rangle$ が injective であるというとき、有限個の A の連結 $A \cdots A$ が injective であることを意味することがあるので注意。例えば Affleck–Keneddy–Lieb–Tasaki 模型の基底状態は

$$A^+ = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma^+, \quad A^0 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \sigma^z, \quad A^- = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sigma^- \quad (2.12)$$

による MPS として与えられるが、local Hilbert space の次元は 3、virtual space の次元は $2 \times 2 = 4$ であるから A は明らかに injective ではない。2 つの A を concatenate してはじめて injective になる。

定理 2.1. Intersection property

$A, B \in L(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ を injective なテンソルとする。このとき、

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{---} A \text{---} B \text{---} M \\ \text{---} \text{---} \end{array} \middle| M \right\} \cap \left\{ \begin{array}{c} \text{---} N \text{---} B \text{---} C \\ \text{---} \text{---} \end{array} \middle| N \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} A \text{---} B \text{---} C \\ \text{---} \text{---} X \end{array} \middle| X \right\} \quad (2.13)$$

Proof. 右辺 \subset 左辺は明らかなので左辺 \subset 右辺を示す。左辺の元に対して、テンソル X が存在して

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ N \\ | \\ \text{---} \end{array} \propto \begin{array}{c} \text{---} A \text{---} \\ | \\ \text{---} X \end{array} \quad (2.14)$$

と書けるならば、右辺にも属することが示される。このような X は具体的に以下のように構成される。

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ N \\ | \\ \text{---} \end{array} \propto \begin{array}{c} \text{---} B^+ \text{---} C^+ \\ | \quad | \\ N \quad N \\ | \quad | \\ \text{---} B \text{---} C \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} B^+ \text{---} C^+ \\ | \quad | \\ A \quad B \\ | \quad | \\ \text{---} M \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} C^+ \\ | \\ A \text{---} M \end{array} \quad (2.15)$$

□

定理 2.2. Closure property

$A, B \in L(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ を injective なテンソルとする。このとき

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{---} A \text{---} B \\ \text{---} M \end{array} \middle| M \right\} \cap \left\{ \begin{array}{c} \text{---} A \text{---} B \\ \text{---} N \end{array} \middle| N \right\} = \left\{ \lambda \begin{array}{c} \text{---} A \text{---} B \\ \text{---} \end{array} \middle| \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad (2.16)$$

Proof. 右辺 \subset 左辺は明らか。左辺の元に対して等式

$$(2.17)$$

を代入することで、左辺 \subset 右辺が得られる。 \square

定義 2.5. Parent Hamiltonian

長さ L の周期的な 1 次元スピン系の Hilbert 空間を

$$\mathcal{H}_{\text{tot}} := \otimes_{i=1}^L \mathcal{H}_i, \quad \mathcal{H}_i = \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_{L+1} = \mathcal{H}_1 \quad (2.18)$$

とする。 $\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_{i+1}$ のみに非自明に作用する直交射影 h_i を、injective なテンソル $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ から以下のように定義する。

$$\ker h_i = \left\{ \left| \begin{array}{c} \text{Diagram with two vertical lines, two boxes A on top, and a box M at the bottom.} \end{array} \right| M \right\} \otimes \left(\bigotimes_{j \neq i, i+1} \mathcal{H}_j \right) \quad (2.19)$$

Hamiltonian $H = \sum_{i=1}^L h_i$ を (周期境界条件における) A に対する parent Hamiltonian と呼ぶ。

定理 2.3.

injective なテンソル $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ に対する parent Hamiltonian の基底状態は TI-MPS $|\psi(A)\rangle$ のみである。

Proof. $\ker H = \bigcap_{i=1}^L \ker h_i$ を [intersection property](#), [closure property](#) を用いて求める。まず、[intersection property](#) において $A = B = C$ とすることで、

$$\ker h_i \cap \ker h_{i+1} = \{ \text{Tr}[X A A A] \mid X \in \mathcal{L}(\mathcal{V}) \} \otimes \left(\bigotimes_{j \neq i, i+1, i+2} \mathcal{H}_j \right) \quad (2.20)$$

を得る。同様の議論を帰納的に繰り返すことで、

$$\bigcap_{i=1}^{L-1} \ker h_i = \left\{ \text{Tr}[X \overbrace{A \cdots A}^L] \mid X \in \mathcal{L}(\mathcal{V}) \right\} \quad (2.21)$$

となる。また同様の議論から、

$$\bigcap_{i=0}^L \ker h_i = \left\{ \text{Tr}[AX \overbrace{A \cdots A}^{L-1}] \mid X \in L(\mathcal{V}) \right\} \quad (2.22)$$

である。よって **closure property** において $B = \overbrace{A \cdots A}^{L-1}$ とすることで

$$\ker H = \left(\bigcap_{i=1}^{L-1} \ker h_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=0}^L \ker h_i \right) = \left\{ \lambda \text{Tr}[\overbrace{A \cdots A}^L] \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\}. \quad (2.23)$$

□

定理 2.4. Energy gap

injective なテンソルに対する parent Hamiltonian は gapped である。

Proof. 証明は [2] にある。追っていない。

□

3. G -injective MPS

3.1 定義

この節では有限群の表現論についての知識を前提とする。

定義 3.1. Intertwiner

群 G のベクトル空間 $\mathcal{V}^\alpha, \mathcal{V}^\beta$ 上の表現 $D^\alpha : G \rightarrow \text{GL}(\mathcal{V}^\alpha)$ および $D^\beta : G \rightarrow \text{GL}(\mathcal{V}^\beta)$ に対して線形写像 $A : \mathcal{V}^\alpha \rightarrow \mathcal{V}^\beta$ が

$$AD^\alpha(g) = D^\beta(g)A \quad (3.1)$$

となるとき、 A を intertwiner、または G -準同型と言い、 $A \in \text{Hom}_G(\mathcal{V}^\alpha, \mathcal{V}^\beta)$ と書く。

定義 3.2. G -injectivity

$A \in \text{L}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ に対してユニタリ表現 $g \mapsto U_g$ が存在して

$$\text{Span}\{A^s\}_s = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \text{---} \boxed{A} \text{---} \end{array} \middle| \alpha \right\} = \text{Hom}_G(\mathcal{V}, \mathcal{V}) = \{X \mid \forall g \in G, [X, U_g] = 0\} \quad (3.2)$$

を満たすとき、 A は G -injective であると言う。

補題 3.1.

以下は同値

1. A が G -injective
2. A から定まる $\mathcal{P}(A) : \text{L}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{H}$ に対して

$$\mathcal{P}(A)^+ \mathcal{P}(A)(X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} U_g X U_{g^{-1}}. \quad (3.3)$$

これは以下のように図示される。

$$\begin{array}{c} \text{---} \boxed{A}^+ \text{---} \\ | \\ \text{---} \boxed{A} \text{---} \end{array} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} g^{-1} =: \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \quad (3.4)$$

ただし図式では U_g の代わりに g と書いた。

$\Pi := \mathcal{P}(A)^{-1} \mathcal{P}(A)$ が射影演算子であることは以下のように示される。

$$\Pi^2(X) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} U_{gh} X U_{gh}^\dagger = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} U_g X U_g^\dagger = \Pi(X). \quad (3.5)$$

さらに

$$X = U_g X U_g^\dagger = \Pi(X), \quad (3.6)$$

$$U_g \Pi(X) U_g^\dagger = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} U_{gh} X U_{hg}^\dagger = \Pi(X) \quad (3.7)$$

から Π は $\text{Hom}_G(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ への射影演算子だと分かる。一般に $\text{im}(\mathcal{P}(A)^+ \mathcal{P}(A)) = \text{im} \mathcal{P}(A)^\dagger = \text{Span}\{\bar{A}^s\}_s$ が成り立つことと、 $\text{Hom}_G(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ が複素共役について閉じていることから、1. と 2. の同値性が示される。

補題 3.2.

G -injectivity は連結によって保たれる。

Proof. G -injective なテンソル $A, B \in \text{L}(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ に対し

$$\text{Span}\{A^s B^t\} = \text{Hom}_G(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \text{Hom}_G(\mathcal{V}, \mathcal{V}) = \text{Hom}_G(\mathcal{V}, \mathcal{V}). \quad (3.8)$$

□

補題 3.3.

$$\begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \circ \text{---} \circ \\ | \quad | \\ \downarrow \downarrow \end{array} g = \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \circ \text{---} \circ \\ | \quad | \\ \downarrow \downarrow \end{array} g. \quad (3.9)$$

Proof.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} U_g U_h \otimes U_{h^{-1}} &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} U_{gh} \otimes U_{h^{-1}g^{-1}} U_g \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} U_h \otimes U_{h^{-1}} U_g. \end{aligned} \quad (3.10)$$

□

補題 3.4.

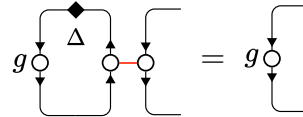
$\Delta \in L(\mathcal{V})$ を以下のように定める。

$$\Delta = \sum_i \frac{d_i}{m_i} \Pi_i \quad (3.11)$$

ここで Π_i は既約表現 $D^i(g)$ に対応する部分空間への射影である。 d_i は $D^i(g)$ の次元であり、 m_i は多重度である。このとき

$$\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \text{Tr}[U_g U_{h^{-1}} \Delta] U_h = U_g \quad (3.12)$$

となる。これを以下のように図示する。



$$(3.13)$$

Proof. 既約表現 $D^i(g)$ の指標を $\chi^i(g)$ と書く。 Π_i は以下のように表示される。

$$\Pi_i = \frac{d_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^i(g)^* U_g \quad (3.14)$$

これを用いると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \text{Tr}[U_g U_{h^{-1}} \Delta] U_h &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \text{Tr}[U_{h^{-1}} \Delta] U_h U_g \\ &= \sum_i \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \frac{d_i}{m_i} \text{Tr}[U_{h^{-1}} \Pi_i] U_h U_g \\ &= \sum_i \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} d_i \chi^i(h)^* U_h U_g \\ &= \sum_i \Pi_i U_g = U_g \end{aligned} \quad (3.15)$$

□

補題 3.5.

G -injective な A, B の連結に対して、以下は一般化逆行列になっている。擬逆行列とは限らない。

$$\begin{array}{c} \text{---} A^+ \text{---} B^+ \text{---} \\ | \quad \Delta \quad | \\ \text{---} A \text{---} B \text{---} \end{array} \quad (3.16)$$

ここで Δ は補題 3.4 で定義される行列である。

Proof.

$$\begin{array}{c} \text{---} A^+ \text{---} B^+ \text{---} \\ | \quad \Delta \quad | \\ \text{---} A \text{---} B \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad \Delta \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad \text{---} \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} . \quad (3.17)$$

□

3.2 Parent Hamiltonian

定理 3.1. Intersection property

$A, B \in L(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ を G -injective なテンソルとする。このとき、

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{---} A \text{---} B \text{---} M \\ | \quad \quad \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \middle| M \right\} \cap \left\{ \begin{array}{c} \text{---} N \text{---} B \text{---} C \text{---} \\ | \quad \quad \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \middle| N \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{---} A \text{---} B \text{---} C \text{---} \\ | \quad \quad \quad | \\ \text{---} \text{---} X \text{---} \end{array} \middle| X \right\} \quad (3.18)$$

Proof. 右辺 \subset 左辺は明らかなので左辺 \subset 右辺を示す。左辺の元に対し、 B, C が G -injective なことから

$$\begin{array}{c} \text{---} N \text{---} B \text{---} C \text{---} \\ | \quad \quad \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} N \text{---} \text{---} B \text{---} C \text{---} \\ | \quad \quad \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad (3.19)$$

である。ここで

$$(3.20)$$

である。これを (3.19) に代入することで左辺 \subset 右辺を得る。 \square

定理 3.2. Closure property

$A, B \in L(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ を G -injective なテンソルとする。

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} \text{Diagram with } A, B, M \end{array} \right) \middle| M \right\} \cap \left\{ \left(\begin{array}{c} \text{Diagram with } A, B, N \end{array} \right) \middle| N \right\} = \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g \left(\begin{array}{c} \text{Diagram with } A, B, g \end{array} \right) \middle| \lambda_g \right\} \quad (3.21)$$

Proof. $M = N = \sum_{g \in G} \lambda_g U_g$ とおけるので右辺 \subset 左辺は明らか。次に左辺の元に対して、

$$(3.22)$$

が成り立つ。等式

を (3.22) に代入することで左辺 \subset 右辺を得る。ここで 3 つ目の等号では A^s, B^s が *intertwiner* であることを用いた。また 5 つ目の等号では (3.9) を用いた。 \square

定理 3.3.

G -injective なテンソル $A \in L(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ に対する parent Hamiltonian の基底空間は $\text{Span}\{\text{Tr}[U_g \overbrace{A \cdots A}^L]\}_{g \in G}$ で与えられる。基底空間の次元は表現空間 \mathcal{V} に含まれる多重度を除いた既約表現の数に一致する。

Proof. 基底空間が $\text{Span}\{\text{Tr}[U_g \overbrace{A \cdots A}^L]\}_{g \in G}$ になることの証明は、injective な場合と同様である。 A が G -injective であることから *intersection property* により

$$\ker H = \left\{ \text{Tr}[X \overbrace{A \cdots A}^L] \mid X \in L(\mathcal{V}) \right\} \cap \left\{ \text{Tr}[AX \overbrace{A \cdots A}^{L-1}] \mid X \in L(\mathcal{V}) \right\} \quad (3.24)$$

となる。よって *closure property* から

$$\ker H = \left\{ \lambda_g \text{Tr}[U_g \overbrace{A \cdots A}^L] \mid \lambda_g \in \mathbb{C} \right\} \quad (3.25)$$

となる。次に縮退度を求める。 A の G -injectivity から

$$\text{Tr}[U_g \overbrace{A \cdots A}^L] = \text{Tr}[U_g U_h \overbrace{A \cdots A}^L U_{h^{-1}}] = \text{Tr}[U_{h^{-1}gh} \overbrace{A \cdots A}^L] \quad (3.26)$$

が成り立つ。よって同じ共役類 C_i の元に対して $\text{Tr}[\overbrace{A \cdots A}^L U_g]$ は等しくなる。したがって

$$\text{Span}\{\text{Tr}[U_g \overbrace{A \cdots A}^L] \mid g \in G\} = \text{Span}\left\{\sum_{g \in C_i} \text{Tr}[U_g \overbrace{A \cdots A}^L] \mid C_i\right\} \quad (3.27)$$

となる。共役類を添字にもつベクトルの基底として、指標 $\chi^i(C_j)^*$ を用いることができるので、

$$\begin{aligned} \text{Span}\{\text{Tr}[U_g \overbrace{A \cdots A}^L] \mid g \in G\} &= \text{Span}\left\{\sum_j \bar{\chi}^i(C_j) \sum_{g \in C_j} \text{Tr}[U_g \overbrace{A \cdots A}^L] \mid i\right\} \\ &= \text{Span}\left\{\text{Tr}[\Pi_i \overbrace{A \cdots A}^L] \mid i\right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

が成り立つ。ここで、 Π_i は既約表現 D^i への射影であり、以下のように表される。

$$\Pi_i := \frac{d_i}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{\chi}^i(g) U_g. \quad (3.29)$$

次に $\text{Tr}[\Pi_i \overbrace{A \cdots A}^L]$ の線形独立性を示す。 $\sum_i \mu_i \text{Tr}[\Pi_i \overbrace{A \cdots A}^L] = 0$ とすると、 $\overbrace{A \cdots A}^L$ の G -injectivity から

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_i \mu_i U_g \Pi_i U_{g^{-1}} = \sum_i \mu_i \Pi_i = 0 \Rightarrow \mu_i = 0. \quad (3.30)$$

したがって、基底空間の次元は表現空間 \mathcal{V} に含まれる多重度を除いた既約表現の数に一致する。 \square

定義 3.3. G -isometric MPS

G -injective なテンソル A に対し、表現 $g \mapsto U_g$ が正則であり、かつ $(A^+)^{ij}_s = \bar{A}^s_{ji}$ が成り立つとき、テンソル A は G -isometric であるという。

Remark 3.1.

正則表現に対して $\Delta = \sum_i \Pi_i = \mathbb{1}$ であることに注意すると、 G -isometric なテンソルの擬逆行列は連結に対して保たれる。すなわち以下は AA の擬逆行列である。

$$\text{---} \boxed{A}^\dagger \boxed{A}^\dagger \text{---}. \quad (3.31)$$

Remark 3.2.

G-isometric なテンソルに対する parent Hamiltonian の局所項 h_i は以下のよう
に書ける。

$$h_i = \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right) \otimes \mathbb{1} \quad (3.32)$$

定理 3.4.

G -isometric なテンソルに対する parent Hamiltonian の各項は互いに交換する。

Proof.

$$(3.33)$$

☐

4. G -injective PEPS

4.1 定義

主に [6, 5, 7] に従って G -injective PEPS を導入する。これは Kitaev quantum double 模型 [3] を記述するような PEPS である。ただし後で MPO による形式に拡張しやすいようにはじめから MPO を使って議論している。

定義 4.1. 半正則表現

ユニタリ表現 $g \mapsto U_g$ が全ての既約表現を含むとき、半正則 (semi-regular) であると言う。

定義 4.2. 正則表現

群環 $\mathbb{C}G$ における左作用 $L_g : h \mapsto gh$ によって与えられる表現 $g \mapsto L_g$ を正則表現 (regular representation) と呼ぶ。

補題 4.1.

ユニタリな半正則表現 $g \mapsto U_g$ に対し、 $\{U_g\}_{g \in G}$ は線形独立である。また補題 3.4 で定義される $\Delta = \sum_i \frac{d_i}{m_i} \Pi_i$ に対して

$$\mathrm{Tr}[U_g \Delta] = |G| \delta_{g,e} \quad (4.1)$$

が成り立つ。ここで e は G の単位元である。これを以下のように図示する。

$$\begin{array}{c} \text{---} \blacklozenge \text{---} \\ | \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = |G| \delta_{g,e} \quad (4.2)$$

Proof.

$$\mathrm{Tr}[U_g \Delta] = \sum_i \frac{d_i}{m_i} \mathrm{Tr}[U_g \Pi_i] = \sum_i d_i \chi^i(g) = |G| \delta_{g,e}. \quad (4.3)$$

ただし正則表現の指標が $\sum_i d_i \chi^i(g) = \delta(g)$ となることを用いた。もし $\sum_{g \in G} \mu_g U_g = 0$ ならば、

$$\frac{1}{|G|} \sum_g \mu_g \text{Tr}[U_g U_{h^{-1}} \Delta] = \mu_h = 0 \quad (4.4)$$

よって $\{U_g\}_{g \in G}$ は線形独立。 □

定義 4.3. G -injective PEPS

正方格子上の PEPS を構成するテンソル $A \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{H}$ が有限群 G に対して G -injective であるとは、半正則なユニタリ表現 $U : g \rightarrow \text{GL}(\mathcal{V})$ が存在して

$$\text{Span}\{A^s\}_s = \left\{ X \left| \begin{array}{c} \downarrow \\ \rightarrow \boxed{X} \leftarrow \\ \downarrow \end{array} \right. = \begin{array}{c} \downarrow g \\ \rightarrow \circ \boxed{X} \circ \leftarrow g^{-1} \\ \downarrow g^{-1} \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

となること。右辺の元を G -invariant なテンソルと呼ぶことにする。より一般の格子についても、辺の向き付けを決めると同様に G -injectivity が定義される。

定理 4.1.

$A \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{H}$ と擬逆行列との積が

$$\sum_s A^s \otimes A_s^+ = \begin{array}{c} \downarrow \\ \rightarrow \boxed{A} \uparrow \\ \rightarrow \boxed{A} \downarrow \\ \downarrow \end{array} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \begin{array}{c} \downarrow g \\ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \leftarrow g^{-1} \\ \downarrow g^{-1} \end{array}. \quad (4.6)$$

となることは G -injectivity と同値。

Proof. (4.6) 右辺を $\Pi \in \text{L}(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^*)$ とおく。これが射影であることは以下のように分かる。

$$\frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} \begin{array}{c} \downarrow h \\ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \leftarrow g^{-1} h^{-1} \\ \downarrow g^{-1} \\ \downarrow h^{-1} \end{array} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \begin{array}{c} \downarrow g \\ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \leftarrow g^{-1} \\ \downarrow g^{-1} \end{array}. \quad (4.7)$$

また

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \begin{array}{c} \downarrow \\ \circ \\ \downarrow h \\ \circ \\ \downarrow g \\ \circ \\ \downarrow g^{-1} h^{-1} \\ \circ \\ \downarrow g^{-1} \\ \circ \\ \downarrow h^{-1} \\ \circ \\ \downarrow \end{array} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \begin{array}{c} \downarrow \\ \circ \\ \downarrow g \\ \circ \\ \downarrow g^{-1} \\ \circ \\ \downarrow \end{array} \quad (4.8)$$

から $\text{im } \Pi$ の元は必ず G -invariant になる。一方 G -invariant な X に対して

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \boxed{X} \\ \downarrow \end{array} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in |G|} \begin{array}{c} \downarrow \\ \circ \\ \downarrow g \\ \boxed{X} \\ \downarrow g^{-1} \\ \circ \\ \downarrow \end{array} = \Pi X \quad (4.9)$$

である。よって $\text{im } \Pi$ は G -invariant なテンソルの空間に一致する。 $\sum_s A^s \otimes A_s^+$ は $\text{Span}\{\bar{A}^s\}_s$ への射影であり、 G -invariant なテンソルの空間が複素共役について閉じていることから (4.6) は G -injectivity と同値である。 \square

定義 4.4. MPO による表現

MPO B_{\pm} を以下のように定義する。

$$B_+ = \sum_{g \in G} U_g |g\rangle\langle g|, \quad B_- = \sum_{g \in G} U_{g^{-1}} |g\rangle\langle g| \quad (4.10)$$

これを以下のように図示する。

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \text{red arrow } g \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \circ \\ \downarrow g \\ \circ \\ \downarrow \end{array}, \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{red arrow } g \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \circ \\ \downarrow g^{-1} \\ \circ \\ \downarrow \end{array} \quad (4.11)$$

すると (4.6) は

$$\sum_s A^s \otimes A_s^+ = \frac{1}{|G|} \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{red circle} \\ \downarrow \end{array} \quad (4.12)$$

と表される。以降の議論では $1/|G|$ の係数を省略する。

定理 4.2. Pulling through equation

(4.11) で定義される MPO について、以下の等式が成り立つ。

$$(4.13)$$

$$(4.14)$$

$$(4.15)$$

また向きを反転したり回転したりした式も同様に成り立つ。以上の式を pulling through equation と呼ぶ。図の赤い辺をストリングと呼ぶことにする。ストリングは pulling through equation によりトポロジカルな紐のように自由に動かすことができる。

補題 4.2.

G -injectivity は連結によって保存される。また G -injective な A と B の連結に対して以下は一般化逆行列である。

$$(4.16)$$

ここで Δ は補題 3.4 で定義される $\Delta = \bigoplus_i \frac{d_i}{m_i} \Pi_i$ である。

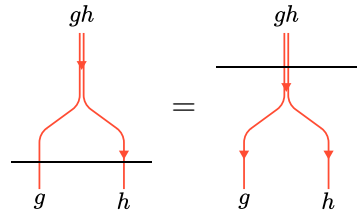
Proof. $\text{Span}\{A^s B^t\}$ が G -invariant なテンソルの空間に一致することを示せばよい。 AB に対して (4.16) を掛けると、

$$(4.17)$$

ここで (4.2) を用いた。これは G -invariant な空間への射影になっているので、内側の添字を任意のテンソルと縮約することで任意の G -invariant なテンソルが構成できる。 \square

補題 4.3. Zipper condition

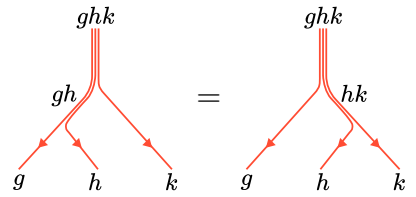
g, h のラベルがついたストリングを束ねることで gh のストリングとみなすことができる。これは以下の zipper condition によって保証される。



黒い辺の向きは両辺で同じ向きを取ればどちらでも良い。

補題 4.4. F -move

群の表現について結合則から、直ちに以下の等式が成り立つ。



4.2 Parent Hamiltonian

定理 4.3. Intersection property

(4.11) で定義される MPO について、以下の等式が成り立つ。

$$\left\{ \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Two circles with arrows, followed by a vertical line with four arrows} \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A vertical line with four arrows, followed by two circles with arrows} \end{array} \\ \hline \end{array} \right\} \\
 = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Three circles with arrows} \end{array} \\ \hline \end{array} \right\}. \quad (4.20)$$

ただし、灰色のテンソルは任意のテンソルを表すとする。

Proof. 右辺 \subset 左辺は明らか。左辺の元について、

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 4: Two circles with arrows, the first has an internal loop} \end{array} \\ \hline \end{array} \\
 = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 5: Two circles with arrows, connected by horizontal lines} \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (4.21)$$

である。これに等式

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 6: Two circles with arrows, connected by a horizontal line} \end{array} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 7: Two circles with arrows, a small square with a dot} \end{array} \\ \hline \end{array} \\
 = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{Diagram 8: Two circles with arrows, a small square with a dot} \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (4.22)$$

を代入することで左辺 \subset 右辺を得る。

□

定理 4.4. Closure property

(4.11) で定義される MPO について、以下の等式が成り立つ。

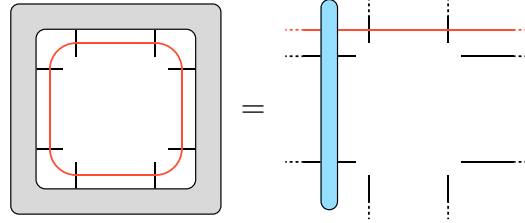
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Square MPO} \\ \text{with four red circles} \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{c} \text{I-shaped MPO} \\ \text{with four red circles} \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{c} \text{H-shaped MPO} \\ \text{with four red circles} \end{array} \right\} \\
 \cap \left\{ \begin{array}{c} \text{Cross-shaped MPO} \\ \text{with four red circles} \end{array} \right\} = \left\{ \sum_{\substack{g, h \in G \\ gh = hg}} \lambda_{g, h} \begin{array}{c} \text{Diagram with red circles and arrows } g, h \\ \text{and coefficient } \lambda_{g, h} \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

ただし、灰色のテンソルは任意のテンソルを表すとする。また点線は周期境界条件を表す。

Proof. (4.23) で右辺 \subset 左辺は明らか。(4.23) の左辺の元について、以下の等式が成り立つ。

$$\begin{array}{c} \text{Square MPO} \\ \text{with red circles} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Square MPO} \\ \text{with red circles and black dots} \end{array} = \begin{array}{c} \text{I-shaped MPO} \\ \text{with red circles and black dots} \end{array} = \begin{array}{c} \text{I-shaped MPO} \\ \text{with red circles} \end{array} \\
 =: \begin{array}{c} \text{I-shaped MPO} \\ \text{with red lines} \end{array} =: \begin{array}{c} \text{Diagram with red lines and orange bar} \end{array} \quad (4.24)$$

また同様の議論により



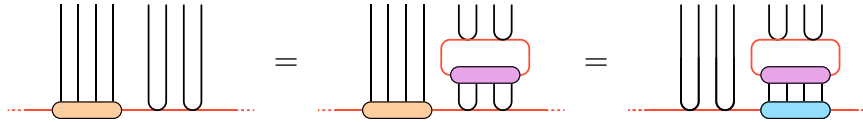
$$(4.25)$$

と表せる。これらを MPS の形で見やすくまとめると、



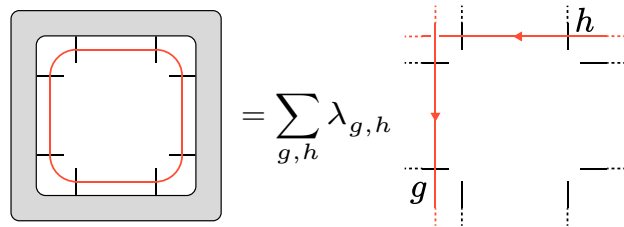
$$(4.26)$$

ここで B^2 の擬逆行列を挿入することで



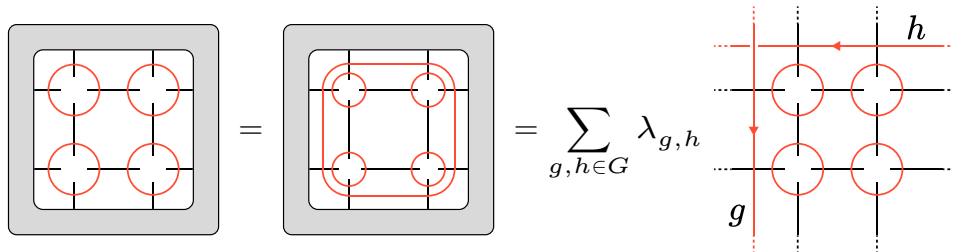
$$(4.27)$$

と表せる。よってもとの書き方では、



$$(4.28)$$

である。したがって、



$$(4.29)$$

が成り立つ。次に $gh \neq hg$ のとき $\lambda_{g,h} = 0$ となることを示す。(4.23) 左辺の元につい

て以下の等式が成り立つ。

Diagrammatic equation (4.30) showing the decomposition of a square with a red loop into a sum of terms involving a cross-like structure and a sum over group elements.

$$\begin{aligned}
 & \text{Square with red loop} = \text{Square with red loop and black dots} = \text{Cross-like structure with red loops} = \text{Cross-like structure with red loops and black dots} \\
 & =: \text{Cross-like structure} =: \sum_{\substack{g_1, g_2, h_1, h_2 \\ h_2 g_1 h_1^{-1} g_2^{-1} = e}} \lambda_{g_1, g_2, h_1, h_2} \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

半正則表現 $g \mapsto U_g$ において $\{U_g\}_{g \in G}$ が線形独立であることから $\{U_{g_1}^1 \otimes U_{g_2}^2 \otimes U_{h_1}^3 \otimes U_{h_2}^4\}_{g_1, g_2, h_1, h_2}$ は線形独立である。よって (4.28) と (4.30) を見比べることで $g_1 = g_2, h_1 = h_2$ かつ $gh \neq hg$ のとき $\lambda_{g, h} = 0$ が分かる。 \square

Remark 4.1.

$gh = hg$ のとき、

Diagrammatic equation (4.31) showing the commutation of strings g and h when they commute.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} = \text{Diagram 3} \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

すなわち g と h のストリングを自由に動かすことができる。逆に $g \neq h$ の場合は 2 つのストリングの交点を動かそうとすると ghg^{-1} などが現れるため自由に動かすことができない。

Remark 4.2.

G -injective な PEPS に (g, h) のストリングを挿入した状態と (xgx^{-1}, xhx^{-1}) を挿入した状態は等しい。

$$(4.32)$$

定義 4.5. Parent Hamiltonian

$A \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{H}$ を正方格子上的 PEPS を構成する G -injective なテンソルとする。直交射影 h_i を以下を満たすように構成する。

$$\ker h_i = \left\{ \left[\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc} A & A \\ A & A \end{array}} \\ X \end{array} \right] \otimes \left(\bigotimes_j \mathcal{H}_j \right) \right\}. \quad (4.33)$$

ただし \bigotimes_j は 2×2 の領域に含まれない格子点に関してのテンソル積とする。Hamiltonian $H = \sum_i h_i$ を A に対する parent Hamiltonian と呼ぶ。

定理 4.5.

G -injective なテンソル A に対する parent Hamiltonian のトーラスにおける基底空間は

$$\text{Span} \left\{ \left[\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \begin{array}{cc} A & \cdots & A \end{array} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{array}{cc} A & \cdots & A \end{array} \\ \vdots & & \vdots \end{array} \right] \mid g, h \in G, gh = hg \right\} \quad (4.34)$$

である。また縮退度は $\{(g, h) \in G \times G \mid gh = hg\}$ を同値関係 $(g, h) \sim (xgx^{-1}, xhx^{-1})$ で割った類 (pair conjugacy class) の数に等しい。

Proof. intersection property, closure property から基底空間が (4.34) に一致することが分かる。次に

$$|\psi(A; g, h)\rangle := \text{diagram} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \text{diagram} \quad (4.35)$$

The first diagram shows a grid of boxes labeled A . A vertical red line with an arrow pointing down is labeled g . A horizontal red line with an arrow pointing right is labeled h . The second diagram shows a similar grid, but the vertical line is labeled xgx^{-1} and the horizontal line is labeled xhx^{-1} .

から $|\psi(A; g, h)\rangle = |\psi(A; ygy^{-1}, yhy^{-1})\rangle$ である。そこで $\{(g, h) \in G \times G \mid gh = hg\}$ を同値関係 $(g, h) \sim (xgx^{-1}, xhx^{-1})$ で割り、その同値類の代表元を $(g_1, h_1), \dots, (g_K, h_K)$ と書く。 $\sum_{k=1}^K \mu_k |\psi(A; g_k, h_k)\rangle = 0$ ならば、 A の一般化逆行列を掛けることで

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \mu_k \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \text{diagram} \\ &= \sum_{k=1}^K \mu_k \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (U_{xg_kx^{-1}})^{\otimes L} \otimes (U_{xh_kx^{-1}})^{\otimes L} = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

The diagram in the first line is similar to the one in (4.35), but the vertical line is labeled xg_kx^{-1} and the horizontal line is labeled xh_kx^{-1} .

を得る。すると半正則表現に対して $\{U_g\}_{g \in G}$ が線形独立であることから、 $\mu_k = 0$ である。よって $\{|\psi(A; g_k, h_k)\rangle\}_{k=1}^K$ は線形独立である。 \square

補題 4.5. Burnside の補題

群 G が集合 X に作用しているとき、軌道の数

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\{x \in X \mid gx = x\}| \quad (4.37)$$

で与えられる。

系 4.1.

$\{(g, h) \in G \times G \mid gh = hg\}$ に対する pair conjugacy class の数は以下で与えられる。

$$\frac{1}{|G|} |\{(g, h, k) \in G \times G \times G \mid gh = hg, hk = kh, kg = gk\}| \quad (4.38)$$

定義 4.6. G -isometric tensor

G -injective なテンソル $A \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{H}$ に対し、表現 $g \mapsto U_g$ が正則であり、かつ $A^+ = A^\dagger$ すなわち

$$\begin{array}{c} k \\ | \\ i - \boxed{A} - j \\ | \\ l \end{array} \begin{array}{c} + \\ s \end{array} = \begin{array}{c} l \\ | \\ j - \boxed{A} - i \\ | \\ k \end{array} \begin{array}{c} s \\ l \end{array} \quad (4.39)$$

が成り立つとき、テンソル A は G -isometric であるという。

補題 4.6.

$$\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \boxed{A} \\ | \\ \diagdown \end{array} \cong \begin{array}{c} \uparrow \\ \circlearrowleft \\ \downarrow \end{array} . \quad (4.40)$$

ただし \cong は両辺が physical space への isometric な変換によって移り合うことを指す。ここから任意の G -isometric PEPS の代わりに右辺の MPO を用いることができる。

Proof. $A^+ = A^\dagger$ が isometric なことから明らか。 □

補題 4.7.

G -isometric な PEPS に対して、parent Hamiltonian の局所項は以下のように表される。

$$h_i = \begin{array}{cc} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (4.41)$$

またこの局所項は互いに可換である。

Proof. h_i の可換性は以下のように示される。

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & & \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ & & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ & & & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array} \quad (4.42)$$

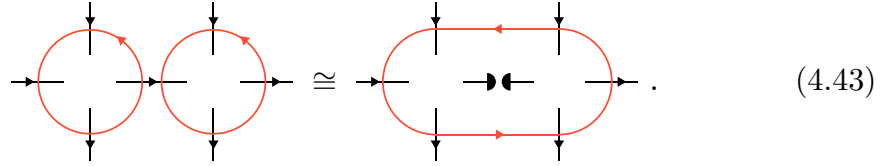
h_i が 1 サイトで重なり合う場合にも同様の議論で可換性が示せる。 \square

系 4.2.

G -isometric な PEPS の parent Hamiltonian に対し、局所項 h_i を同時対角化できるので、parent Hamiltonian は gapped である。

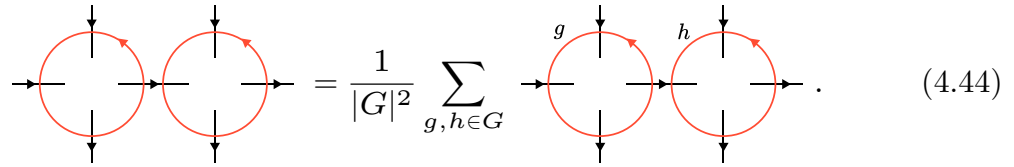
4.3 トポロジカルエンタングルメントエントロピー

補題 4.8.



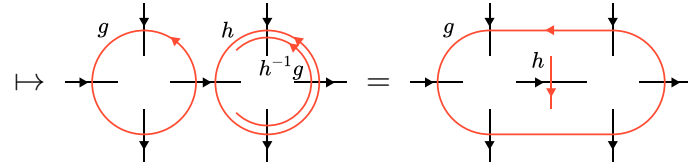
$$(4.43)$$

Proof. $g, h \in G$ を以下のように定める。



$$(4.44)$$

内側の 2 つの physical index を測定することで $h^{-1}g$ が得られる。この結果を以下の作用を与える conditional なユニタリ演算子を構成できる。



$$(4.45)$$

このユニタリ演算子は g, h に依存しないことに注意。すると h は内側のテンソルにしか現れないため

$$\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \sum_{x \in G} |x\rangle \otimes |hx\rangle = |G\rangle \otimes |G\rangle, \quad |G\rangle := \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g \in G} |g\rangle \quad (4.46)$$

と表せる。 □

補題 4.9.

$g \mapsto L_g$ を左正則表現とすると

$$(L_g)^{\otimes N} \cong L_g \otimes (\mathbb{1}_{\mathbb{C}G})^{\otimes (N-1)}. \quad (4.47)$$

ここで $\mathbb{1}_{\mathbb{C}G} := \sum_{g \in G} |g\rangle \langle g|$ である。

Proof. $(L_g)^N$ に対する指標は

$$\chi(g) = (|G| \delta_{g,e})^N = |G|^N \delta_{g,e}. \quad (4.48)$$

よって $(L^g)^N$ は $|G|^{N-1}$ 個の正則表現の直和として表される。これは $L_g \otimes (\mathbb{1}_{CG})^{\otimes(N-1)}$ とユニタリ同値。 \square

定理 4.6. 粗視化に対する安定性

G -isometric なテンソルの連結に対し、

$$\begin{array}{cc} \text{---} \bigcirc \text{---} & \cong & \text{---} \bigcirc \text{---} \otimes \text{---} \text{---} \otimes \begin{array}{c} \text{---} \\ \downarrow \uparrow \\ \text{---} \end{array} \end{array} \quad (4.49)$$

よって局所的な自由度を取り除くことで G -isometric なテンソルは粗視化に対して不変となる。

Proof. 補題 4.8 と同様の議論により

$$\begin{array}{cc} \text{---} \bigcirc \text{---} & \cong & \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \downarrow \uparrow \\ \text{---} \end{array} \end{array} \quad (4.50)$$

よって $L_g \otimes L_g \cong L_g \otimes \mathbb{1}_{CG}$ から (4.49) を得る。 \square

定理 4.7. トポロジカルエンタングルメントエントロピー

G -isometric PEPS に対するエンタングルメントエントロピーは

$$S_\alpha = \log |G| \cdot |\partial D| - \log |G| \quad (4.51)$$

となる。ここで $|\partial D|$ は対象となる領域の境界の長さである。

Proof. トーラス上の 2×2 の PEPS を左上の領域 S とそれ以外の領域 E に分けてエンタングルメントエントロピーを計算する。他の形状についても同様である。 E に対するユ

ニタリ演算子によって以下のように状態を書き直す。

$$\text{Diagram 1} \cong \text{Diagram 2} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \text{Diagram 3} \quad (4.52)$$

ここで E に対する測定によって xgx^{-1}, xhx^{-1} が分かるので、conditional なユニタリ演算子によって以下のように状態を変更できる。

$$\text{Diagram 1} \cong \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \text{Diagram 2} \quad (4.53)$$

よってエンタングルメントエントロピーは密度行列

$$\rho = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} L_g^{\otimes |\partial D|} \cong \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} L_g \otimes (\mathbb{1}_{\mathbb{C}G})^{\otimes (|\partial D|-1)} \quad (4.54)$$

に対して計算すれば良い。

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} L_g = |G\rangle\langle G|, \quad |G\rangle = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{g \in G} |g\rangle \quad (4.55)$$

より、Rényi α -エントロピーは

$$S_\alpha = \log |G| (|\partial D| - 1) \quad (4.56)$$

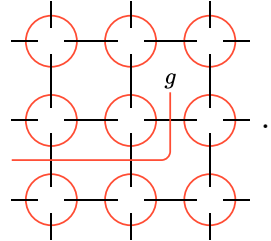
となる。 ρ が射影なことから Rényi α -エントロピーは α によらないことに注意。 \square

4.4 エニオン励起とその分類

G -injective な PEPS についてもエニオン励起を考えることは可能であるが、簡単のため、以下では G -isometric な PEPS を考える。

定義 4.7. 磁気的な励起

G -isometric な PEPS $|\psi(A)\rangle$ に対して端点のあるストリングを追加する:

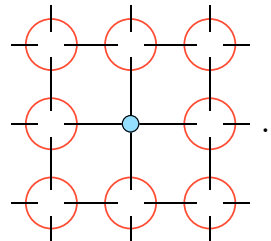


$$(4.57)$$

端点を動かさなければストリングは自由に動かすことができるので、parent Hamiltonian に対して端点以外でのエネルギーコストは発生しない。この状態は磁気的な励起 (magnetic excitation) と呼ばれる。端のない領域では磁気的な励起は必ず複数個の組で現れる。また $g \mapsto xgx^{-1}$ に対して状態は不変なので、磁気的な励起は G の共約類 C_i によってラベルされる。

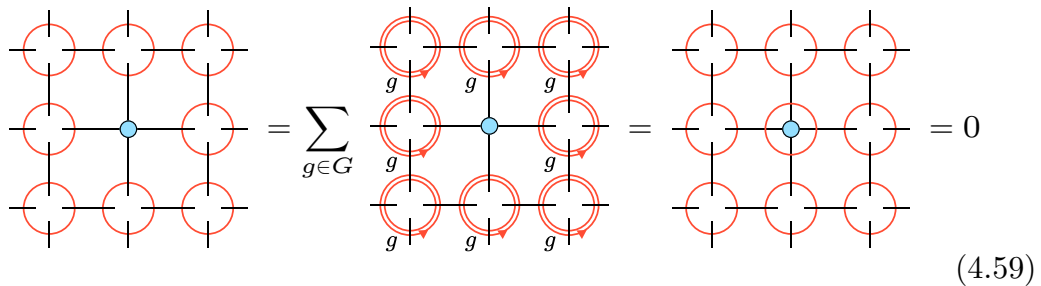
定義 4.8. 電気的な励起

G -isometric な PEPS $|\psi(A)\rangle$ に対して 1 つのテンソル A を $B \in \text{Span}\{A^s\}^\perp$ に置き換える:



$$(4.58)$$

$|\psi(A)\rangle$ の physical space への局所的な作用によってこの状態を構成することはできない。よってこの状態は非局所的な点状励起を表し、電気的な励起 (electric excitation) と呼ばれる。この励起は周期境界条件において必ず複数個の組で現れる。端のない領域で励起が一つだけ存在すると

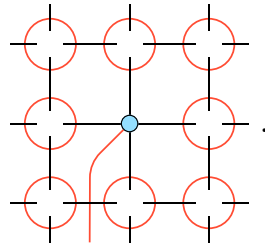


$$(4.59)$$

から必ずゼロになってしまう。

定義 4.9. ダイオン励起

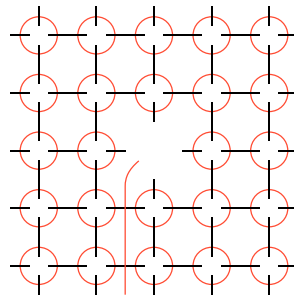
電気的な励起と磁気的な励起を組み合わせたものをダイオン励起 (dyonic excitation) と呼ぶ。



(4.60)

定義 4.10. Tube algebra

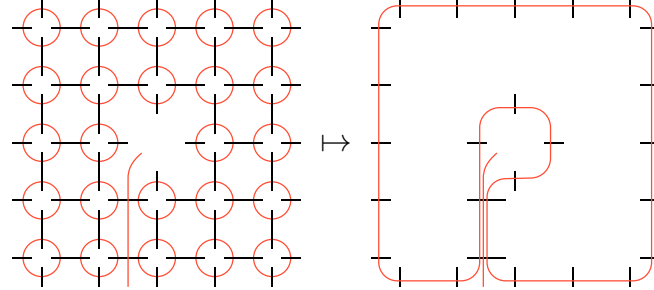
励起は果たしてこれだけだろうか。また励起を系統的に分類することはできるだろうか。この疑問に答えるために、円筒状の領域における G -isometric PEPS の parent Hamiltonian の基底空間を考える。Closure property と同様の議論によって基底状態は



(4.61)

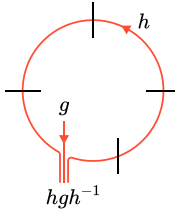
と表される。ただし、任意の境界条件をとることが許される。よって、励起が有限の領域の中に存在し、外部の parent Hamiltonian によって検出できないならば、

それはダイオン励起の形に限られる。次に、(4.61) に擬逆行列を掛けて



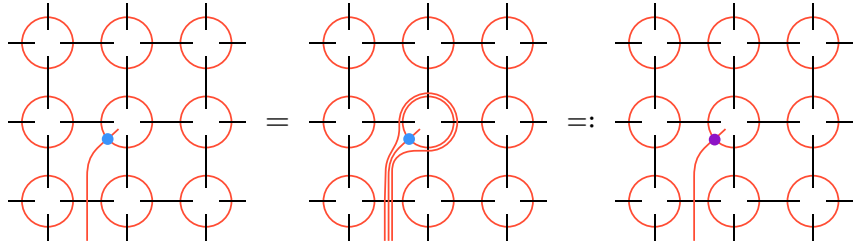
$$(4.62)$$

とすると、内側の境界条件は以下の MPO を通じてしか physical space に影響を及ぼせないことが分かる。



$$A_{g,h} := \text{diagram} \quad (4.63)$$

よってある頂点を $A_{g,h}$ の線形結合で置き換えることでエニオン励起を構成できる。ただし、以下のように $A_{g,h}$ を作用させて変形することが可能なためこの表現は一意ではない。



$$(4.64)$$

よって $\{A_{g,h}\}_{g,h}$ から生成される行列代数に注目する必要がある。これを tube algebra と呼ぶ。重要な性質として、 $\text{Span}\{A_{g,h}\}_{g,h}$ は積について閉じている:

$$A_{g',h'} A_{g,h} = \delta_{g',hgh^{-1}} A_{g,h'h}. \quad (4.65)$$

したがって tube algebra は $\text{Span}\{A_{g,h}\}_{g,h}$ に等しい。ここで構造定数が MPO の長さに依らないことから、tube algebra は円筒状領域の取り方に依らない。また群元の逆を取ると共役転置が得られるので、 $\text{Span}\{A_{g,h}\}_{g,h}$ は C^* 代数となる。

定義 4.11. 中心冪等元

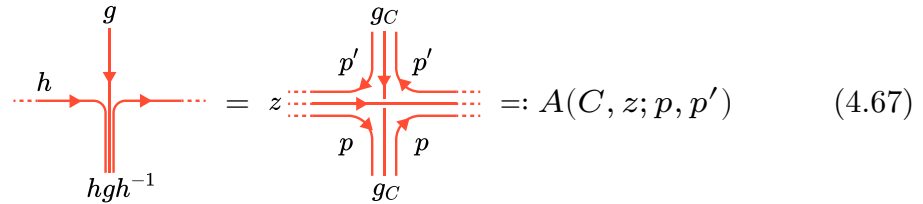
任意の有限次元 C^* 代数はユニタリ変換によって $\bigoplus_i L(\mathbb{C}^{r_i}) \otimes \mathbb{1}_{m_i}$ と直和分解できる。tube algebra を直和分解したとき、それぞれの直和因子は以下の性質を満たす中心冪等元 (central idempotent) $\mathcal{P}_i \in \text{Span}\{A_{g,h}\}_{g,h}$ によってラベルされる。

$$\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \delta_{ij} \mathcal{P}_i, \quad \mathcal{P}_i^\dagger = \mathcal{P}_i, \quad \mathcal{P}_i A_{g,h} = A_{g,h} \mathcal{P}_i. \quad (4.66)$$

ただし、 \mathcal{P}_i はそれ以上は中心冪等元の和によって分解できないとする。このとき中心冪等元はミニマルであると言う。具体的には $\bigoplus_i L(\mathbb{C}^{r_i}) \otimes \mathbb{1}_{m_i}$ に対して $\mathcal{P}_i = \mathbb{1}_{r_i} \otimes \mathbb{1}_{m_i}$ である。(4.64) の変形から、tube algebra の作用によって移り合う励起は同一視されるので、エニオンはミニマルな中心冪等元 \mathcal{P}_i でラベルされる。

定理 4.8.

(4.63) の定義は不便なので、改めて定義する。まず、 G の共役類 C に対する代表元を $g_C \in G$ と書く。ここで任意の $g \in C$ に対し $pgp^{-1} = g_C$ となるような $p \in G$ が存在する。これを用いて、



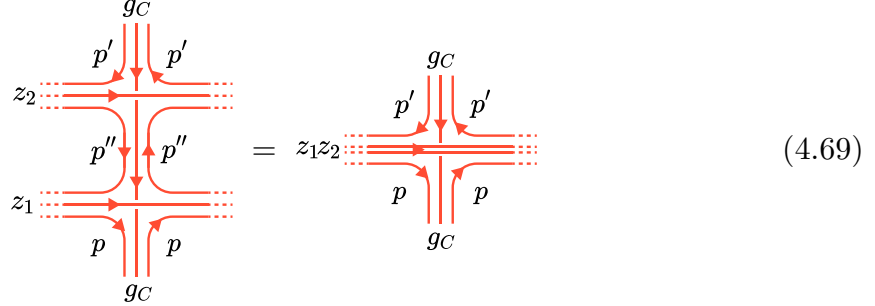
$$= z \text{ --- } \text{---} =: A(C, z; p, p') \quad (4.67)$$

と定義し直す。ただし MPO の他の部分は計算に関係ないので省略してしまった。ここで頂点における整合性を満たすために z は g_C と交換する必要がある。このとき、tube algebra の中心冪等元は

$$\mathcal{P}_{C,R} := \frac{d_R}{|Z(g_C)|} \sum_{z \in Z(g_C)} \bar{\chi}^R(z) \sum_p A(C, z; p, p) \quad (4.68)$$

で与えられる。ただし $Z(g_C) := \{h \in G \mid g_C h = h g_C\}$ は g_C に対する中心化群である。また χ^R は中心化群 $Z(g_C)$ の既約表現 $\Gamma^R(z)$ に対する指標であり、 d_R は $\Gamma^R(z)$ の次元である。 C は磁荷、 R は電荷を表す。

Proof. $A(C, z; p'p)$ の積は以下の図式で与えられる。



ただしこれ以外の積は全てゼロになる。異なる共役類についての積がゼロになることから、tube algebra は共役類 C についてブロック対角化されている。さらに、各ブロックは g_C の中心化群 $Z(g_C) := \{h \in G \mid g_C h = h g_C\}$ の正則表現 L_z を用いて

$$A(C, z; p, p') \cong L_z \otimes |p\rangle\langle p'| \quad (4.70)$$

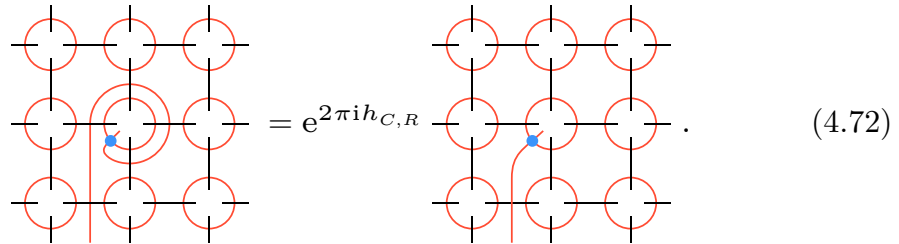
と書ける。 $|p\rangle\langle p'|$ は $L(\mathbb{C}^{|C|})$ を成すのでブロック対角化は出来ない。次に $Z(g_C)$ は既約表現ごとブロック対角化が可能である。よって既約表現 Γ^R への射影を構成することで、

$$\begin{aligned} & \frac{d_R}{|Z(g_C)|} \sum_{z \in Z(g_C)} \bar{\chi}^R(z) L_z \otimes \sum_p |p\rangle\langle p| \\ & \cong \frac{d_R}{|Z(g_C)|} \sum_{z \in Z(g_C)} \bar{\chi}^R(z) \sum_p A(C, z; p, p) \end{aligned} \quad (4.71)$$

が中心冪等元となることが分かる。ここで $\chi^R(z) := \text{Tr}[\Gamma^R(z)]$ は指標であり、 d_R は Γ^R の次元である。またこれ以上の分解は不可能である。 $Z(g_C)$ の既約表現への分解は一般に多重度を含むが、 L_z の線形結合によって同値な表現を区別する射影を作ることは出来ないので、これを考慮する必要はない。 \square

定理 4.9. Topological spin

磁荷 C 、電荷 R をもつエニオンに対して



ここで $e^{2\pi i h_{C,R}} = \Gamma^R(g_C)$ である。ただし g_C は共役類 C の代表元、 Γ^R は中心化群 $Z(g_C)$ の既約表現である。

Proof. トポロジカルスピンは以下の演算子の作用から求まる。

$$A(C, g_C; e, e) = \begin{array}{c} g_C \\ \downarrow \\ g_C \cdots \rightarrow \cdots \\ \uparrow \\ g_C \end{array} \quad (4.73)$$

ここで $Z(g_C)$ の既約表現 Γ^R に対して

$$\forall z \in Z(g_C), \Gamma^R(g_C)\Gamma^R(z) = \Gamma^R(z)\Gamma^R(g_C) \quad (4.74)$$

が成り立つ。よって Schur の補題から $\Gamma^R(g_C) \propto \mathbb{1}$ である。さらに $g_C^n = e$ となる n が存在することから $h_{C,R} \in [0, 1)$ が存在して $\Gamma^R(g_C) = e^{2\pi i h_{C,R}} \mathbb{1}$ である。 \square

定理 4.10. Braiding

5. エニオンと MPO 代数

MPO 代数のデータ

定義 5.1. Projector matrix product operators

$B \in L(W) \otimes L(V)$, $\Delta \in L(W)$ によって表される以下の MPO $P_L \in L(V)^{\otimes L}$ を考える。

$$P_L = \text{Tr}[\Delta \overbrace{B \cdots B}^L] = \sum_{\{i\}, \{j\}} \text{Tr}[\Delta B^{i_1 j_2} \cdots B^{i_L j_L}] |i_1, \dots, i_L\rangle \langle j_1, \dots, j_L| \quad (5.1)$$

ただし行列の積は W についてとった。 P_L は射影であるとし、 Δ を挿入する位置に依存しないとする。さらに、以下のブロック対角化が成り立つとする。

$$W = \bigoplus_{a=1}^{\mathcal{N}} W_a, \quad (5.2)$$

$$B^{ij} = \bigoplus_{a=1}^{\mathcal{N}} B_a^{ij} \quad B_a^{ij} \in L(W), \quad (5.3)$$

$$\Delta = \bigoplus_{a=1}^{\mathcal{N}} w_a \mathbb{1}_a, \quad w_a \in \mathbb{C}. \quad (5.4)$$

ここで B_a は injective なテンソルであるとする。すなわち、 $\text{Span}\{B_a^{ij}\}_{i,j} = L(W_a)$ である。さらに転送行列の最大固有値が 1 になるように規格化されているとする。 P_L が Δ の位置に依らないことと、 B_a の injectivity から Δ に対するブロック行列は $\mathbb{1}_a$ の定数倍に限られることに注意する。このような P_L を projector matrix product operator (PMPO) と呼ぶ。

定理 5.1. Fusion tensor

B を PMPO を構成するテンソルとし、 $\{B_a\}_{a=1}^{\mathcal{N}}$ を injective なブロックとする。また $O_a^L := \text{Tr}[\overbrace{B_a \cdots B_a}^L]$ とおき、 $\{O_a^L\}_{a=1}^{\mathcal{N}}$ がなす行列代数が閉じているとする。このとき、 $X_{ab,\mu}^c : W_c \rightarrow W_a \otimes W_b$, $\mu = 1, \dots, N_{ab}^c$ が存在して

$$X_{ab,\mu}^{+c} \left(\sum_j B_a^{ij} \otimes B_b^{jk} \right) X_{ab,\mu}^c = B_c^{ik}. \quad (5.5)$$

が成り立つ。テンソル $X_{ab,\mu}^c$ を fusion tensor と呼ぶ。

Proof. $O_a^L O_b^L$ に対する標準形の存在からゲージ変換および非対角ブロックの削除によって

$$B_a^{ij} \otimes B_b^{jk} \mapsto \bigoplus_{c=1}^{\mathcal{N}} \bigoplus_{\mu=1}^{N_{ab}^c} \lambda_{ab,\mu}^c B_c^{ik}, \quad \lambda_{ab,\mu}^c \in \mathbb{C} \quad (5.6)$$

と表せる。ここから

$$O_a^L O_b^L = \sum_{c,\mu} (\lambda_{ab,\mu}^c)^L O_c^L \quad (5.7)$$

である。よって

$$P_L = P_L^2 = \sum_{a,b} w_a w_b O_a^L O_b^L = \sum_{a,b,c,\mu} (\lambda_{ab,\mu}^c)^L w_a w_b O_c^L \quad (5.8)$$

である。 P_L が任意の L において射影であることから $\lambda_{ab,\mu}^c = 1$ が分かる。よって $\mathcal{W}_a \otimes \mathcal{W}_b$ と各ブロック \mathcal{W}_c の間の変換 $X_{ab,\mu}^c, X_{ab,\mu}^{+c}$ が存在して (5.5) が成り立つ。 \square

定義 5.2. Zipper condition

(5.5) から直ちに以下が成り立つ。

$$\left(\sum_j B_a^{ij} \otimes B_b^{jk} \right) X_{ab,\mu}^c = X_{ab,\mu}^c B_c^{ik}, \quad (5.9)$$

$$X_{ab,\mu}^{+c} \left(\sum_j B_a^{ij} \otimes B_b^{jk} \right) = B_c^{ik} X_{ab,\mu}^{+c} \quad (5.10)$$

この式を zipper condition と呼ぶ。

定義 5.3.

行列代数 $\{O_a^L\}_{a=1}^{\mathcal{N}}$ は

$$O_a^L O_b^L = \sum_c N_{ab}^c O_c^L, \quad N_{ab}^c \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (5.11)$$

によって定まる。 N テンソルは $\sum_j B_a^{ij} \otimes B_b^{jk}$ を injective なブロックに分解したときの多重度によって与えられる。

Remark 5.1.

PMPO $P_L = \sum_a w_a O_a^L$ と N_{ab}^c に対し、以下が成り立つ。

$$\sum_{a,b=1}^{\mathcal{N}} N_{ab}^c w_a w_b = w_c \quad (5.12)$$

Proof. $P_L^2 = P_L$ から

$$P_L^2 = \sum_{a,b} w_a w_b O_a O_b = \sum_{a,b,c} N_{ab}^c w_a w_b O_c = \sum_c w_c O_c = P_L. \quad (5.13)$$

□

定義 5.4. Duality

P_L が Hermitian であることを課す。このときブロック a に対して \bar{B}_a が injective であることからブロック a^* が一意に存在し、

$$\bar{w}_a = w_{a^*}, \quad O_a^{L\dagger} = O_{a^*}^L \quad (5.14)$$

となる。また

$$N_{ab}^c = N_{b^*a^*}^{c^*} \quad (5.15)$$

となる。 $(a^*)^* = a$ であり、 a^* を a に双対なブロックと呼ぶ。

定義 5.5. Frobenius Schur indicator

ブロック a, a^* は以下のゲージ変換によって結ばれる。

$$\bar{B}_a^{ji} = Z_a^{-1} B_{a^*}^{ij} Z_a \quad (5.16)$$

ここで Z_a は

$$Z_a \bar{Z}_{a^*} = \bar{Z}_{a^*} Z_a = \kappa_a \mathbb{1}, \quad \kappa_a = \begin{cases} 1 & (a \neq a^*) \\ \pm 1 & (a = a^*) \end{cases} \quad (5.17)$$

を満たす。 κ_a を Frobenius–Schur indicator と呼ぶ。

Proof. $O_a^{L\dagger} = O_{a^*}^L$ の両辺を標準形で表すと、標準形の一意性からゲージ変換 Z_a :

$\mathcal{W}_a \rightarrow \mathcal{W}_{a^*}$ と $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\bar{B}_a^{ji} = e^{i\theta} Z_a^{-1} B_{a^*}^{ij} Z_a \quad (5.18)$$

となる。(5.14) が L に依らずに成り立つことから $\theta = 0$ としてよい。これを 2 回用いると、

$$B_a^{ji} = \bar{Z}_a^{-1} \bar{B}_{a^*}^{ij} \bar{Z}_a = \bar{Z}_a^{-1} Z_{a^*}^{-1} B_{a^*}^{ij} Z_{a^*} \bar{Z}_a \quad (5.19)$$

となる。よって B_a の injectivity から $Z_{a^*} \bar{Z}_a = \gamma_a \mathbb{1} = \bar{Z}_a Z_{a^*}$ と表せる。ここで γ_a は複素数であり $\bar{\gamma}_{a^*} = \gamma_a$ を満たす。 $a \neq a^*$ の場合、 Z_a を定数倍して再定義することで $\gamma_a = \gamma_{a^*} = 1$ とできる。 $a = a^*$ の場合、 $Z_a \bar{Z}_a = \bar{Z}_a Z_a$ から γ_a は実数に限られる。 Z_a を定数倍して再定義することで必ず $\gamma_a = \pm 1 =: \kappa_a$ にできる。ただし符号を変えることはできない。 \square

補題 5.1. 結合則 (associativity)

$(O_a^L O_b^L) O_c^L = O_a^L (O_b^L O_c^L)$ から N テンソルは以下の結合則を満たす。

$$\sum_e N_{ab}^e N_{ec}^d = \sum_f N_{af}^d N_{bc}^f. \quad (5.20)$$

定義 5.6. F 行列

F 行列 $(F_d^{abc})_{e\mu\nu}^{f\lambda\sigma}$ が存在して以下が成り立つ。

$$(X_{ab,\mu}^e \otimes \mathbb{1}_c) X_{ec,\nu}^d = \sum_{f=1}^{\mathcal{N}} \sum_{\lambda=1}^{N_{bc}^f} \sum_{\sigma=1}^{N_{af}^d} (F_d^{abc})_{e\mu\nu}^{f\lambda\sigma} (\mathbb{1}_a \otimes X_{bc,\lambda}^f) X_{af,\sigma}^d. \quad (5.21)$$

Proof. zipper condition を 2 通りの順序で用いることで以下の等式が成り立つ。

$$\sum_{d e \mu \nu} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\mu \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline e \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\nu \\ \hline \end{array} \bullet \begin{array}{|c|} \hline d \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\nu^+ \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline e \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\mu^+ \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} = \sum_{d f \sigma \lambda} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\lambda \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\sigma \\ \hline \end{array} \bullet \begin{array}{|c|} \hline d \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\sigma^+ \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\lambda^+ \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}. \quad (5.22)$$

両辺に右から fusion tensor を掛けると

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\mu \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline e \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\nu \\ \hline \end{array} \bullet \begin{array}{|c|} \hline d \\ \hline \end{array} = \sum_{d' f \sigma \lambda} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\lambda \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\sigma \\ \hline \end{array} \bullet \begin{array}{|c|} \hline d' \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\sigma^+ \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\lambda^+ \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline e \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\mu \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline d \\ \hline \end{array}. \quad (5.23)$$

よって $B_d, B_{d'}$ の injectivity から

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\mu \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} e \\ \\ \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\nu \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} d \\ \\ \end{array} \otimes d = \sum_{f\sigma\lambda} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\lambda \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} f \\ \\ \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\sigma \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} d \\ \\ \end{array} \otimes \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\sigma^+ \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} d \\ \\ \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\lambda^+ \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} f \\ \\ \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\mu \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} e \\ \\ \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X_\nu \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} d \\ \\ \end{array}. \quad (5.24)$$

よって右辺の 2 個目の因子を $(F_d^{abc})_{e\mu\nu}^{f\lambda\sigma} \mathbb{1}_d$ と書くことができ、(5.21) が示される。 \square

定義 5.7. Pentagon equation

$$\sum_{h,\sigma\lambda\omega} (F_g^{abc})_{h\sigma\lambda}^{f\mu\nu} (F_e^{acd})_{i\omega\kappa}^{g\lambda\rho} (F_i^{bcd})_{j\lambda\delta}^{h\sigma\omega} = \sum_{\sigma} (F_e^{acd})_{j\gamma\sigma}^{g\nu\rho} (F_e^{abj})_{i\delta\kappa}^{f\mu\sigma}. \quad (5.25)$$

Proof.

$$\begin{array}{c} a \ b \ c \ d \\ \diagup \ \diagdown \ \diagup \ \diagdown \\ g \ \quad \quad i \\ \diagdown \ \diagup \ \diagdown \ \diagup \\ e \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} a \ b \ c \ d \\ \diagup \ \diagdown \ \diagup \ \diagdown \\ i \ \quad \quad j \\ \diagdown \ \diagup \ \diagdown \ \diagup \\ e \end{array} \quad (5.26)$$

\square

Remark 5.2.

$$N_{ab}^c = N_{bc^*}^{a^*} = N_{c^*a}^{b^*} = N_{b^*a^*}^{c^*} = N_{cb^*}^a = N_{a^*c}^b. \quad (5.27)$$

5.1 Unitarity

定義 5.8.

これを以下に図示する。

$$(5.28)$$

$$(5.29)$$

ただし $X_{ab,\mu}^c$ については多重度の添字 μ だけ図示した。

定義 5.9. Pivotal property

$$(5.30)$$

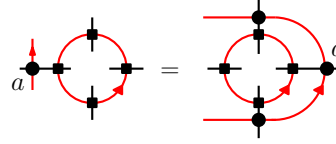
ここで A_{ab}^c は $(A_{ab}^c)^\dagger A_{ab}^c = \frac{w_c}{w_b} \mathbb{1}$ を満たす行列である。また b の足を曲げることで同様に $A_{ab}^{'c}$ が定義される。

補題 5.2.

$$(5.31)$$

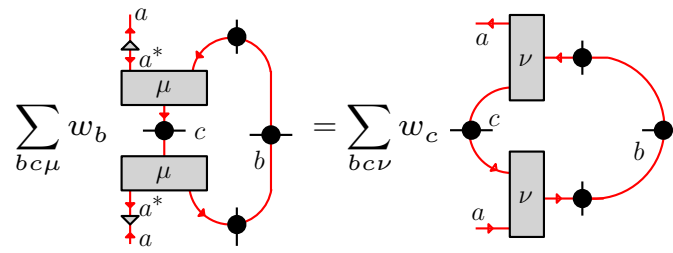
ここで $C_{ab}^c = A_{a^*b}^c \bar{A}_{a^*c^*}^{'b} A_{b^*c^*}^{a^*}$ である。

定理 5.2. Pulling through equation



$$(5.32)$$

Proof.



$$(5.33)$$

□

A. 標準形

定義 A.1. 転送行列 (Transfer matrix)

テンソル $A \in L(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ に対して転送行列 (transfer matrix) $\mathcal{E}_A \in L(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V})$ が以下のように定義される。

$$\mathcal{E}_A := \sum_s A^s \otimes \bar{A}^s = \begin{array}{c} \boxed{\bar{A}} \\ | \\ \boxed{A} \end{array} . \quad (\text{A.1})$$

これを $\mathcal{E}_A : L(\mathcal{V}) \rightarrow L(\mathcal{V})$ として表すと

$$\mathcal{E}_A : X \mapsto \sum_s A^s X A^{s\dagger} \quad (\text{A.2})$$

となる。

定義 A.2. Positive map

線形写像 $\mathcal{E} : L(\mathcal{V}) \rightarrow L(\mathcal{V})$ が半正定値性を保つとき、positive map であると言う。

定義 A.3. 既約性 (Irreducibility)

テンソル $A \in L(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{H}$ が $A^s P = P A^s P$ となるような非自明な直交射影 P を持たないとき、 A は既約 (irreducible) であるという。

定義 A.4. 既約性 (Irreducibility)

線形写像 $\mathcal{E} : L(\mathcal{V}) \rightarrow L(\mathcal{V})$ が $\mathcal{E}(PL(\mathcal{V})P) \subset PL(\mathcal{V})P$ となるような非自明な直交射影 P を持たないとき、 \mathcal{E} は既約 (irreducible) であるという。

補題 A.1.

A が既約 $\Leftrightarrow \mathcal{E}_A$ が既約

Proof. まず \Leftarrow の対偶を示す。 A が既約でないならば直交射影 P が存在して

$$\mathcal{E}_A(PXP) = \sum_s A^s PXP A^{s\dagger} = \sum_s P A^s PXP A^{s\dagger} P \in PL(\mathcal{V})P \quad (\text{A.3})$$

となる。よって \mathcal{E}_A は既約でない。

次に \Rightarrow の対偶を示す。 \mathcal{E}_A が既約でないとき、 $\mathcal{E}_A(PL(\mathcal{V})P) \subset PL(\mathcal{V})P$ を満たす非自明な直交射影 P が存在する。すると $\text{im } P$ の正規直交基底 $\{|a\rangle\}_a$ が存在して

$$\mathcal{E}_A(P) = \sum_a \sum_s A^s |a\rangle \langle a| A^{s\dagger} = \sum_a \lambda_a |a\rangle \langle a| \quad (\text{A.4})$$

と表せる。ここから $\text{Span}\{A^s |a\rangle\}_{s,a} = \text{Span}\{|a\rangle\}_a$ が言える。よって $A^s P = P A^s P$ が成り立つ。 \square

定理 A.1. 有限次元 Krein–Rutman の定理

線形写像 \mathcal{E} が positive かつ既約であるとき、

1. \mathcal{E} のスペクトル半径 $\rho_{\mathcal{E}}$ は \mathcal{E} の固有値である。
2. $\rho_{\mathcal{E}}$ は非縮退で固有ベクトルは正定値
3. $\rho_{\mathcal{E}}$ 以外の固有値をもつ固有ベクトルは半正定値ではない。

定義 A.5. 強既約性 (Strong irreducibility)

線形写像 $\mathcal{E} : L(\mathcal{V}) \rightarrow L(\mathcal{V})$ が以下の条件を満たすとき強既約 (strongly irreducible) であると言う。

1. \mathcal{E} は既約
2. \mathcal{E} の固有値で絶対値がスペクトル半径 $\rho_{\mathcal{E}}$ に一致するものは $\rho_{\mathcal{E}}$ だけであり、かつ $\rho_{\mathcal{E}}$ は縮退しない。

さらに $\rho_{\mathcal{E}} = 1$ のとき、正規テンソル (normal tensor) と呼ばれることがある。また転送行列 \mathcal{E}_A が強既約なときテンソル A が強既約であると言う。

Remark A.1.

以下のゲージ変換に対し MPS は不変

$$A^s \mapsto X A^s X^{-1}, \quad X \in GL(\mathcal{V}). \quad (\text{A.5})$$

また周期境界条件が課されているため、 A^s がブロックごとに三角化されているとき

$$A^s = \begin{pmatrix} A_1^s & * \\ 0 & A_2^s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_1^s & 0 \\ 0 & A_2^s \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

としても TI-MPS は不変。

定義 A.6. TI-MPS の標準形 (canonical form)

任意の TI-MPS $|\psi(A)\rangle$ に対し、ゲージ変換と非対角ブロックの削除によって同じ状態を生成する以下のテンソルが得られる。

$$B^s = \bigoplus_{a=1}^{\mathcal{N}} \lambda_a B_a^s, \quad \lambda_a \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.7})$$

これを TI-MPS の標準形 (canonical form) と呼ぶ。ただし、各ブロック B_a に対する転送行列 \mathcal{E}_{B_a} は以下の条件を満たす。

- B_a は既約である。
- \mathcal{E}_{B_a} のスペクトル半径は 1 である。
- \mathcal{E}_{B_a} は右固有ベクトル $\mathcal{E}_{B_a} \mathbb{1} = \mathbb{1}$ をもつ。
- \mathcal{E}_{B_a} は左固有ベクトル $\Lambda_a \mathcal{E}_{B_a} = \Lambda_a$ をもつ。ここで Λ_a は正定値な対角行列である。

Proof. A に対し非自明な射影 $A^s P = P A^s P$ がある場合、

$$\text{Tr}[A \cdots AP] = \text{Tr}[A \cdots APAP] = \cdots = \text{Tr}[PAP A \cdots PAP]. \quad (\text{A.8})$$

また $A^s P^\perp = P A^s P^\perp + P^\perp A^s P^\perp$ から

$$\text{Tr}[A \cdots AP^\perp] = \text{Tr}[A \cdots APAP^\perp] + \text{Tr}[A \cdots AP^\perp AP^\perp]. \quad (\text{A.9})$$

右辺第 1 項は (A.8) と同様の議論で $\text{Tr}[PAP \cdots APAP^\perp] = 0$ となるから、この変形を繰り返すことで

$$\text{Tr}[A \cdots AP^\perp] = \text{Tr}[P^\perp AP^\perp A \cdots P^\perp AP^\perp] \quad (\text{A.10})$$

を得る。よって $A \mapsto PAP + P^\perp AP^\perp$ と置き換えてよい。この操作を繰り返すことで、 A はブロック対角化されており全てのブロックは既約だと仮定できる。

次に既約なテンソル A に対し一般性を失わずに \mathcal{E}_A のスペクトル半径を 1 とする。 \mathcal{E}_A は既約な positive map であるから、[Krein-Rutman の定理](#)により最大固有値 (= 1) の固有ベクトルは正定値である。よって \mathcal{E}_A の固定点を $X > 0$ とし、 $B^s := X^{-1/2} A^s X^{1/2}$ を考えると

$$\sum_s B^s \mathbb{1} B^{s\dagger} = \sum_s X^{-1/2} A^s X A^{s\dagger} X^{-1/2} = \mathbb{1} \quad (\text{A.11})$$

である。次に X の対角化を $X = U^\dagger \Lambda^{1/2} U$ とおく。ここで U はユニタリ行列で Λ は正定値な対角行列である。 $B^s = U X^{-1/2} A^s X^{1/2} U^\dagger = \Lambda^{-1/4} U A^s U^\dagger \Lambda^{1/4}$ と置き直すと、

$$\sum_s B^s \mathbb{1} B^{s\dagger} = U U^\dagger = \mathbb{1} \quad (\text{A.12})$$

かつ

$$\begin{aligned} \sum_s B^{s\dagger} \Lambda B^s &= \sum_s (\Lambda^{1/4} U A^{s\dagger} U^\dagger \Lambda^{-1/4}) \Lambda (\Lambda^{-1/4} U A^s U^\dagger \Lambda^{1/4}) \\ &= \sum_s \Lambda^{1/4} U A^{s\dagger} X A^s U^\dagger \Lambda^{1/4} \\ &= \Lambda \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

となる。 □

定義 A.7. TI-MPS の強い標準形

任意の TI-MPS $|\psi(A)\rangle$ に対し、 $p \in \mathbb{N}$ が存在して、 p 個の A を連結し、ゲージ変換と非対角ブロックの削除をすることで同じ状態を生成する以下のテンソルが得られる。

$$B^{s_1, \dots, s_p} = \bigoplus_{a=1}^{\mathcal{N}} \lambda_a B_a^{s_1, \dots, s_p}, \quad \lambda_a \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.14})$$

ただし、各ブロック B_a は以下の条件を満たす。

- B_a は強既約である。
- 転送行列のスペクトル半径は 1 である。
- 転送行列 \mathcal{E}_{B_a} は右固有ベクトル $\mathcal{E}_{B_a} \mathbb{1} = \mathbb{1}$ をもつ。
- 転送行列 \mathcal{E}_{B_a} は左固有ベクトル $\Lambda_a \mathcal{E}_{B_a} = \Lambda_a$ をもつ。ここで Λ_a は正定値な対角行列である。

Proof. 大まかなアイデアだけ述べる。一般性を失わずに転送行列 \mathcal{E}_A のスペクトル半径が 1 であると仮定する。CP 写像 \mathcal{E} が $\mathbb{1}$ のみを固定点にもつ場合、 $\{\omega^k\}_{k=1, \dots, p}$, $\omega = \exp(2\pi i/p)$ が全ての絶対値 1 の固有値になるような $p \in \mathbb{N}$ が存在することを示すことができる。よって p 個の A を連結させた B を構成すると \mathcal{E}_B の絶対値 1 の固有値は 1 以外に存在しない。これを既約分解していくことで強い標準形を得る。 □

定理 A.2.

以下の 2 つは同値

1. 有限の長さ L が存在して、 $\overbrace{A \cdots A}^L$ が injective
2. A が強既約

定理 A.3. 標準形の一意性

強既約なテンソル $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^D) \otimes \mathcal{H}$ に対し $\overbrace{B \cdots B}^L$ が injective となるような最小の L を L_0 とする。テンソル $B, C \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^D) \otimes \mathcal{H}$ から構成される MPS に対しある $N > 2L_0 + D^4$ が存在して

$$\mathrm{Tr}[\overbrace{B \cdots B}^N] = \mathrm{Tr}[\overbrace{C \cdots C}^N] \quad (\text{A.15})$$

ならば、 $U \in \mathrm{U}(D)$ と $e^{i\theta} \in \mathrm{U}(1)$ が存在して

$$B^s = e^{i\theta} U C^s U^\dagger \quad (\text{A.16})$$

が成り立つ。

References

- [1] Nick Bultinck et al. “Anyons and Matrix Product Operator Algebras”. In: *Annals of Physics* 378 (Mar. 2017), pp. 183–233. DOI: [10.1016/j.aop.2017.01.004](https://doi.org/10.1016/j.aop.2017.01.004). arXiv: [1511.08090](https://arxiv.org/abs/1511.08090) [cond-mat, physics:quant-ph].
- [2] M. Fannes, B. Nachtergaele, and R. F. Werner. “Finitely Correlated States on Quantum Spin Chains”. In: *Communications in Mathematical Physics* 144.3 (Mar. 1992), pp. 443–490. DOI: [10.1007/BF02099178](https://doi.org/10.1007/BF02099178).
- [3] A. Yu Kitaev. *Fault-Tolerant Quantum Computation by Anyons*. <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9707021v1>. July 1997. DOI: [10.1016/S0003-4916\(02\)00018-0](https://doi.org/10.1016/S0003-4916(02)00018-0).
- [4] D. Perez-Garcia et al. *Matrix Product State Representations*. May 2007. arXiv: [quant-ph/0608197](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0608197).
- [5] Mehmet Burak Şahinoğlu et al. “Characterizing Topological Order with Matrix Product Operators”. In: *Annales Henri Poincaré* 22.2 (Feb. 2021), pp. 563–592. DOI: [10.1007/s00023-020-00992-4](https://doi.org/10.1007/s00023-020-00992-4).
- [6] Norbert Schuch, Ignacio Cirac, and David Pérez-García. “PEPS as Ground States: Degeneracy and Topology”. In: *Annals of Physics* 325.10 (Oct. 2010), pp. 2153–2192. DOI: [10.1016/j.aop.2010.05.008](https://doi.org/10.1016/j.aop.2010.05.008).
- [7] Steven H. Simon and Steven H. Simon. *Topological Quantum*. Oxford, New York: Oxford University Press, Sept. 2023. ISBN: 978-0-19-888672-3.