多様体上の量子力学

政岡凜太郎

2024 年 11 月 21 日

$\mathbb{R}^d$ 上の量子力学に対し、運動量演算子は

$$[p_i, x_j] = -\mathrm{i}\delta_{ij} \tag{1}$$

を満たす。この定義を一般の多様体に拡張したい。まず位置座標を $x \in \mathcal{M}$ として、一般の状態は

$$|\psi\rangle = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{dvol}\, \psi(x) |x\rangle \tag{2}$$

と書かれるとする。$\mathcal{M}$ 上の座標 $(x^1, \dots, x^d)$ に対して、運動量演算子は

$$p_i |x\rangle = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^i}|x\rangle \tag{3}$$

と定義すれば良さそう。ただし問題として、座標 $(x^1, \dots, x^d)$ は $\mathcal{M}$ 全域で定義されるとは限らない。次に座標の取り方によらない定義として、

$$\langle x|p_f|\psi\rangle = -\mathrm{i}f^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\langle x|\psi\rangle \tag{4}$$

を考える。正準交換関係は

$$[g(x), p_f] = \mathrm{i}f^i\frac{\partial g}{\partial x^i} \tag{5}$$

もう一つの解決策として、外微分を用いて

$$p := -\mathrm{i}\mathrm{d} \tag{6}$$

とする。このとき波動関数の空間は関数だけでなく微分形式も含む。(超対称量子力学)

$$\langle \xi|\eta\rangle = \int \xi^* \wedge \star\eta \tag{7}$$

$$\star(\eta_{i_1\cdots i_m}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_m})=\frac{\sqrt{|g|}}{} \tag{8}$$