物理工学専攻 H24 解答

政岡凜太郎

2023 年 8 月 18 日

物理学 I

第 1 問

[1]

$\boldsymbol{F}$ は図 1 を前方から見て角度 $7\pi/6$ の向き。$\boldsymbol{F}'$ は角度 π の向き。B へのモーメントの釣り合いから

$$F - F' = 0 \tag{1}$$

[2]

B と C の間の垂直抗力の大きさを T とおく。C の y 方向の釣り合いから、

$$2\left(\frac{1}{2}F + \frac{\sqrt{3}}{2}T\right) = F + \sqrt{3}\,T = mg. \tag{2}$$

また B の x 方向の釣り合いから、

$$-F' - \frac{\sqrt{3}}{2}F + \frac{1}{2}T = 0. \tag{3}$$

これらを $F' = F$ と連立すると、

$$F = \frac{mg}{4+2\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}mg, \quad T = \frac{1}{2}mg \tag{4}$$

が得られる。また B と床との間の垂直抗力 $T' = 3/2mg$ である。円柱が静止する条件は、

$$\frac{F}{T} = 2 - \sqrt{3} < \mu, \quad \frac{F'}{T'} = \frac{2-\sqrt{3}}{3} < \mu'. \tag{5}$$

[3]

$$I = \frac{m}{\pi a^2 l} \cdot 2\pi l \int_0^a r^3 \, \mathrm{d}r = \frac{1}{2} m a^2 \tag{6}$$

[4]

運動方程式は、

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{I}{a}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\mu'' mg \tag{7}$$

で与えられる。これを解くと、

$$v = v_0 - \mu'' g t, \quad \omega = \omega_0 - \frac{2\mu'' g}{a} t \tag{8}$$

となる。$v = 0$ となるときの角速度は、

$$\omega_0 - \frac{2\mu'' g}{a} \cdot \frac{v_0}{\mu'' g} = \omega_0 - \frac{2v_0}{a}. \tag{9}$$

[5]

滑らずに転がりはじめるのは $v + a\omega = 0$ となるとき。このときの速さ $|v|$ は、

$$|v| = -\left(v_0 - \mu'' g \cdot \frac{v_0 + a\omega_0}{3\mu'' g}\right) = \frac{a\omega_0 - 2v_0}{3} \tag{10}$$

[6]

$v + a\omega = 0$ となる時間が T に到達した後、S に到達するまでの間になければならない。T, S に到達する時間はそれぞれ

$$\frac{v_0}{\mu'' g}, \quad \frac{2v_0}{\mu'' g} \tag{11}$$

であり、$v + a\omega = 0$ となる時間は、

$$t = \frac{v_0 + a\omega_0}{3\mu'' g} \tag{12}$$

で与えられるから、求める条件は

$$\frac{v_0}{\mu'' g} < \frac{v_0 + a\omega_0}{3\mu'' g} < \frac{2v_0}{\mu'' g} \tag{13}$$

である。整理すると、

$$\frac{2v_0}{a} < \omega_0 < \frac{5v_0}{a} \tag{14}$$

となる。

第 2 問

[1]

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\phi(x) \tag{15}$$

より、

$$v(x) = \sqrt{\frac{2e\phi(x)}{m}} \tag{16}$$

[2]

連続の式から

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial i(t,x)}{\partial x} \tag{17}$$

である。定常状態では左辺はゼロなので、$\mathrm{d}i/\mathrm{d}x = 0$ となる。よって $i(x)$ は定数となり、$n(x)v(x) > 0$ から $i = -i_0 (i_0 > 0)$ となる。

[3]

$$\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}^2\phi(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{i_0}{v(x)} = i_0 \sqrt{\frac{m}{2e}}\,\phi(x)^{-1/2} \tag{18}$$

よって

$$A = \frac{i_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}, \quad \alpha = -\frac{1}{2}. \tag{19}$$

[4]

設問 [3] の方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = A\phi^{-1/2} \tag{20}$$

を $\phi(0) = 0$ のもとで解く。$\phi = Bx^\beta$ とおくと、

$$B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} = AB^{-1/2}x^{-\beta/2} \tag{21}$$

から、

$$\beta = \frac{4}{3}, \quad B = \left(\frac{9}{4}A\right)^{2/3} \tag{22}$$

とすればよい。

$$\phi(x) = \left(\frac{9i_0}{4\varepsilon_0}\right)^{2/3}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3} x^{4/3} \tag{23}$$

[5]

$$V = \phi(L) = \left(\frac{9i_0}{4\varepsilon_0}\right)^{2/3}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3} L^{4/3} \tag{24}$$

物理学 II

第 1 問

[1]

$\hat{X} \propto \hat{a} + \hat{a}^\dagger$ から $\langle n|q\hat{X}|n \pm 1\rangle$ のみが値をもつ。つまり $|n \pm 1\rangle$ に遷移しうる。

[2]

$$\langle n|\lambda \hat{X}^4|n\rangle = \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)^2 \langle n|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4|n\rangle \tag{25}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\langle n|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4|n\rangle \\
&= (n+1)(n+2) + (n+1)^2 + (n+1)n + n(n+1) + n^2 + n(n-1) \\
&= 6n^2 + 6n + 3
\end{aligned} \tag{26}$$

から、$|n\rangle$ のエネルギーの変化は、

$$3\lambda(2n^2 + 2n + 1)\left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)^2 \tag{27}$$

となる。

[3]

$|n\rangle'$ には $|n-4\rangle, |n-2\rangle, |n\rangle, |n+2\rangle, |n+4\rangle$ の成分が含まれているので、$\langle n|'(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|8\rangle' \neq 0$ となる n は、

$$n = 3, 5, 7, 9, 11, 13. \tag{28}$$

このような $|n\rangle'$ に遷移しうる。

[4]

$$[\hat{H}_0, \hat{a}] = -\hbar\omega_0 \hat{a}, \quad [\hat{H}_0, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger, \tag{29}$$

より、

$$\begin{aligned}\hat{X}(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t/\hbar} \hat{X}(0) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t/\hbar} \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\hat{a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\hat{a}^\dagger\right) \\ &= \cos(\omega_0 t)\hat{X}(0) + \frac{1}{m\omega_0}\sin(\omega_0 t)\hat{P}(0)\end{aligned} \tag{30}$$

[5]

$\langle n|\hat{X}(0)|n\rangle = \langle n|\hat{P}(0)|n\rangle = 0$ から、設問 [4] の結果より

$$\langle n|\hat{X}(t)|n\rangle = 0 \tag{31}$$

となる。位置の期待値が有限の振幅で振動する状態の例としては、コヒーレント状態

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C} \tag{32}$$

が挙げられる。これは $\hat{a}$ の固有値 α の固有状態なので、

$$\langle\alpha|\hat{X}(t)|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\alpha + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\alpha^*\right) \tag{33}$$

となり、振動する。

第 2 問

[1]

$$f_{\mathrm{BE}}(E) = \frac{1}{\mathrm{e}^{(E-\mu)/k_{\mathrm{B}}T} - 1} \tag{34}$$

$E - \mu = 0$ でこれは発散するので、$\mu < 0$ でなければいけない。

[2]

$f_{\mathrm{BE}}(E)$ は μ についての増加関数であり、$-\mu$ を大きくしていくと指数関数的に減衰する。

[3]

エネルギーが E 以下となるような $\boldsymbol{p}$ の、運動量空間における体積は

$$\frac{4\pi}{3}(2mE)^{3/2} \tag{35}$$

で与えられる。よってエネルギーが E 以下の状態数は

$$N(E) = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \frac{4\pi}{3}(2mE)^{3/2} = \frac{4V}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{mE}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{36}$$

となる。状態密度は、

$$D(E) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E} = \frac{2V}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2} \tag{37}$$

[4]

N_{t} は $\mu = 0$ のときに最大。よって、$D(E) = AE^{1/2}$ とおくと、

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{t}}^{\max} &= A\int_0^\infty \frac{E^{1/2}}{\mathrm{e}^{\beta E}-1}\,\mathrm{d}E \\ &= A\beta^{-3/2}\Gamma(3/2)\zeta(3/2) \\ &= \zeta(3/2)V\left(\frac{mk_{\mathrm{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \end{aligned} \tag{38}$$

これは $T \to 0$ でゼロになる。

[5]

$$\zeta(3/2)\frac{V}{\hbar^3}\left(\frac{mk_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}}{2\pi}\right)^{3/2} = N \tag{39}$$

$$T_\mathrm{c} = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_\mathrm{B}}\left(\frac{1}{\zeta(3/2)}\frac{N}{V}\right)^{2/3} \tag{40}$$

[6]

$E > 0$ に対する分布は $\mu = 0$ とした $f_\mathrm{BE}(E)$ で与えられ、さらに $E = 0$ の準位に $N - N_\mathrm{t}^\mathrm{max}$ 個の粒子がいる。

[7]

$$\begin{aligned} E &= A\int_0^\infty \frac{E^{3/2}}{\mathrm{e}^{\beta E}-1}\,\mathrm{d}E \\ &= A\beta^{5/2}\mathit{\Gamma}(5/2)\zeta(5/2) \\ &= \frac{3V}{2}\zeta(5/2)\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(k_\mathrm{B}T)^{5/2} \end{aligned} \tag{41}$$

$$C = \frac{15V}{4}\zeta(5/2)\left(\frac{mk_\mathrm{B}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{42}$$

[8]

$$\begin{aligned} T_\mathrm{c}/\mathrm{K} &= \frac{2\pi\hbar^2}{mk_\mathrm{B}}\left(\frac{1}{\zeta(3/2)}\frac{N}{V}\right)^{2/3} \\ &= \frac{2\pi\times1.1^2}{6.7\times1.4}\times10^{-18}\times\left(\frac{1.5}{2.61\times6.7}\times10^{29}\right)^{2/3} \\ &\approx 8^{2/3} = 4 \end{aligned} \tag{43}$$

(ちゃんと計算すると 3 なのだけど、計算機使わないと無理では?)

[9]

ヘリウム原子間の相互作用

第 3 問

[1]

屈折が起こらない条件を求めれば良い。光線が屈折角 θ' で屈折するとき、

$$\frac{k_0 n_2 \sin\theta}{k_0 n_1 \sin\theta'} = 1 \tag{44}$$

が成り立つ。このような $\sin\theta'$ が存在しない条件は、

$$\sin\theta' = \frac{\beta}{k_0 n_1} > 1 \tag{45}$$

よって β の取りうる範囲は、

$$k_0 n_1 < \beta < k_0 n_2 \tag{46}$$

[2]

Maxwell 方程式から、

$$\mathrm{i}\beta E_y = -\mathrm{i}\mu_0\omega H_x, \tag{47}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}\mu_0\omega H_z, \tag{48}$$

$$\mathrm{i}\beta H_y = 0, \tag{49}$$

$$-\mathrm{i}\beta H_x - \frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x} = \mathrm{i}\epsilon_j\omega E_y, \tag{50}$$

$$\frac{\mathrm{d}H_y}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{51}$$

となる。整理すると、

$$\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}\mu_0\omega H_z \tag{52}$$

$$\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x} = \mathrm{i}\left(\frac{\beta^2}{\mu_0\omega} - \epsilon_j\omega\right)E_y \tag{53}$$

$$H_x = -\frac{\beta}{\mu_0\omega}E_y, \quad H_y = 0 \tag{54}$$

[3]

$H_z(x)=0$ と仮定する。このとき領域 II で

$$E_y = \frac{\mu_0\omega}{\mathrm{i}(\beta^2-\varepsilon_2\mu_0\omega^2)}\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{55}$$

が成り立つ。ただし分母が

$$\beta^2-\varepsilon_2\mu_0\omega^2 = \beta^2-(k_0n_2)^2 \neq 0 \tag{56}$$

となることに注意する。ここから $H_x=0$ も言えるので、電磁場の全ての成分がゼロになってしまう。よって $H_z(x)\neq 0$

[4]

設問 [2] で求めた方程式から

$$\frac{\mathrm{d}^2E_y}{\mathrm{d}x^2} = -\mathrm{i}\mu_0\omega\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x} = (\beta^2-\epsilon_j\mu_0\omega^2)E_y \tag{57}$$

となるので、

$$\frac{\mathrm{d}^2E_y(x)}{\mathrm{d}x^2}+(k_0^2n_j^2-\beta^2)E_y(x)=0, \quad j=\begin{cases}1 & (|x|>d)\\ 2 & (|x|<d)\end{cases} \tag{58}$$

[5]

領域 $|x|<d$ における $E_y(x)$ を

$$E_y(x)=a\cos(kx), \quad k=\sqrt{k_0^2n_2^2-\beta^2} \tag{59}$$

とおく。また $x>d$ における $E_y(x)$ を

$$E_y(x)=b\mathrm{e}^{-\kappa x}, \quad \kappa=\sqrt{\beta^2-k_0^2n_1^2} \tag{60}$$

とおく。接続条件から

$$\begin{aligned} a\cos(kd) &= c\mathrm{e}^{-\kappa d}\\ -ka\sin(kd) &= -\kappa c\mathrm{e}^{-\kappa d} \end{aligned} \tag{61}$$

よって、

$$k\tan(kd) = \kappa \tag{62}$$

となる。よって

$$A(\beta) = kd = \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}\, d, \quad B(\beta) = \frac{\kappa}{k} = \sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 n_1^2}{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}} \tag{63}$$

[6]

$$F(\beta) = \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}\, d - \arctan\left(\sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 n_1^2}{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}}\right) \tag{64}$$

である。$\beta \to k_0 n_1$ とすると

$$F(\beta) = \sqrt{n_2^2 - n_1^2}\, k_0 d > 0 \tag{65}$$

となる。また $\beta \to k_0 n_2$ とすると

$$F(\beta) = -\frac{\pi}{2} < 0 \tag{66}$$

となる。よって、$F(\beta) = 0$ となる点が少なくとも 1 つ存在する。方程式を満たす β が一つだけ存在する条件は、

$$\sqrt{n_2^2 - n_2^2}\, k_0 d < \pi \tag{67}$$

である。このとき $E_y(x)$ の概形としては、山が一つでき、$|x| > d$ で減衰していく。

第 4 問

[1]

運動方程式は

$$m\ddot{u}_n = C_1(v_n - u_n) + C_2(v_{n-1} - u_n), \tag{68}$$
$$m\ddot{v}_n = C_2(u_{n+1} - v_n) + C_1(u_n - v_n). \tag{69}$$

解として

$$u_n = u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kan},\ v_n = v\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}ka(n+1/2)} \tag{70}$$

を仮定すると、

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - C_1 - C_2 & C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka/2} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka/2} \\ C_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka/2} + C_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka/2} & m\omega^2 - C_1 - C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{71}$$

となる。この方程式が非自明な解をもつためには、

$$m\omega^2 = C_1 + C_2 \pm |C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka/2} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka/2}| \tag{72}$$

であればよい。計算上のテクニックとしては、Pauli 行列の線形結合

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^* & 0 \end{pmatrix} \tag{73}$$

の固有値が $\pm|\alpha|$ であることを覚えておくと計算が簡便になる。よって、

$$\omega = \sqrt{\frac{C_1 + C_2 \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos(ka)}}{m}} \tag{74}$$

[2]

長波長での分散関係は、

$$\begin{aligned} m\omega^2 &= C_1 + C_2 \pm \sqrt{(C_1+C_2)^2 - C_1C_2(ka)^2} \\ &= C_1 + C_2 \pm \left(C_1 + C_2 - \frac{C_1C_2(ka)^2}{2(C_1+C_2)} \right) \end{aligned} \tag{75}$$

から、

$$\omega_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{C_1C_2}{2m(C_1+C_2)}}\,ak, \quad \omega_\mathrm{o} = \sqrt{\frac{2(C_1+C_2)}{m}} - \frac{C_1C_2(ka)^2}{4\sqrt{m(C_1+C_2)^3}} \tag{76}$$

ただし ω_a は音響フォノンを表し、ω_o は光学フォノンを表す。よって群速度は

$$\frac{\mathrm{d}\omega_\mathrm{a}}{\mathrm{d}k} = \sqrt{\frac{C_1C_2}{2m(C_1+C_2)}}\,a, \quad \frac{\mathrm{d}\omega_\mathrm{o}}{\mathrm{d}k} = -\frac{C_1C_2a^2}{2\sqrt{m(C_1+C_2)^3}}k \tag{77}$$

となる。

[3]

音響フォノンは u と v が同じ向きに振動し、光学フォノンは u と v が反対向きに振動する。

[4]

まず $\boldsymbol{K}_\mathrm{i}, \boldsymbol{K}_\mathrm{f}, \boldsymbol{q}_\mathrm{B}$ の関係は

$$\boldsymbol{K}_\mathrm{i} = \boldsymbol{K}_\mathrm{f} + \boldsymbol{q}_\mathrm{B} \tag{78}$$

で与えられる。$\omega_\mathrm{i} \gg \omega_\mathrm{B}$ のとき、$\omega_\mathrm{i} \approx \omega_\mathrm{f}$ から $|\boldsymbol{K}_\mathrm{i}| \approx |\boldsymbol{K}_\mathrm{i}|$ である。よって、

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{q}_\mathrm{B}|^2 &= |\boldsymbol{K}_\mathrm{i}|^2 + |\boldsymbol{K}_\mathrm{f}|^2 - 2|\boldsymbol{K}_\mathrm{i}||\boldsymbol{K}_\mathrm{f}|\cos\theta \\ &\approx 2|\boldsymbol{K}_\mathrm{i}|^2(1-\cos\theta) \end{aligned} \tag{79}$$

となる。よって主要な寄与をとると、

$$|\boldsymbol{q}_\mathrm{B}| = 2|\boldsymbol{K}_\mathrm{i}|\sin\frac{\theta}{2} \tag{80}$$

[5]

$$\frac{\omega_\mathrm{B}}{v_\mathrm{a}} = \frac{2n\omega_\mathrm{i}}{c}\sin\frac{\theta}{2} \tag{81}$$

[6]

$$\begin{aligned} v_\mathrm{a} &= \frac{c}{2n}\frac{\omega_\mathrm{B}}{\omega_\mathrm{i}} \\ &= \frac{c}{2n}\frac{\lambda_\mathrm{i}}{\lambda_\mathrm{B}} \\ &= \frac{3.0 \times 680 \times 3.0 \times 10^{8-9-2}}{2 \times 2.4} \\ &\approx 1.3\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{82}$$

[7]

$k = \pi/a$ のとき、

$$\omega_{\mathrm{a}} = \sqrt{\frac{2C_2}{m}}, \quad \omega_{\mathrm{o}} = \sqrt{\frac{2C_1}{m}}, \tag{83}$$

となる。エネルギー保存から、

$$\frac{\hbar}{2M_{\mathrm{n}}}\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{i}j}}\right)^2 - \frac{\hbar}{2M_{\mathrm{n}}}\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{f}}}\right)^2 = \sqrt{\frac{2C_j}{m}} \tag{84}$$

よって

$$C_j = \frac{2m\pi^4\hbar^2}{M_{\mathrm{n}}^2}\left(\frac{1}{\lambda_{\mathrm{i}j}} - \frac{1}{\lambda_{\mathrm{f}}}\right)^2 \tag{85}$$

[8]

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2m\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)} \\ &= \frac{M_{\mathrm{n}}}{\pi^2\hbar}\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_{\mathrm{i}1}} - \frac{1}{\lambda_{\mathrm{f}}}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{\lambda_{2j}} - \frac{1}{\lambda_{\mathrm{f}}}\right)^{-2}} \end{aligned} \tag{86}$$