1　2020 年 (令和 2 年)

第 1 問

$\hbar = 1$ とおく。

[1]

$$\hat{U}(t-t_0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t_0)} \tag{1.1}$$

[2]

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^A)^\dagger &= \left(1 + A + \frac{A^2}{2} + \cdots\right)^\dagger \\ &= 1 + A^\dagger + \frac{(A^\dagger)^2}{2} + \cdots \\ &= \mathrm{e}^{A^\dagger}\end{aligned} \tag{1.2}$$

より、

$$\hat{U}(t-t_0)^\dagger = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}^\dagger(t-t_0)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}(t-t_0)} = \hat{U}(t-t_0)^{-1} \tag{1.3}$$

よって $\hat{U}$ はユニタリー。

[3]

設問 [2] の結果から、

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)|\hat{U}(t-t_0)^\dagger\hat{U}(t-t_0)|\psi(t_0)\rangle = \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle \tag{1.4}$$

で時間に依存しない。

[4]

$$\hat{U}(\tau) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\hat{\sigma}_z\tau} = \cos(a\tau)\hat{1} - \mathrm{i}\sin(a\tau)\hat{\sigma}_z \tag{1.5}$$

[5]

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi t/\tau} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

とすると、

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-\phi/\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi t/\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\phi/\tau \end{pmatrix}\hat{U}(t) \tag{1.7}$$

となるから、

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\phi/\tau \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

[6]

$\hat{U}_{\mathrm{NOT}}(\tau) = \hat{\sigma}_x$ としたい。ここで、

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\hat{\sigma}_x/2} = \hat{\sigma}_x \tag{1.9}$$

に注目すると、

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi t}{2\tau}\hat{1} + \frac{\mathrm{i}\pi t}{2\tau}\hat{\sigma}_x\right) \tag{1.10}$$

とすれば良い。よって、

$$\hat{H} = \frac{\pi}{2\tau}(\hat{1} - \hat{\sigma}_x) = \frac{\pi}{2\tau}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

とすればよい。

[7]

$(\sin\theta\cos\phi\hat{\sigma}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{\sigma}_y + \cos\theta\hat{\sigma}_z)^2 = 1$ より、

$$\begin{aligned} &\exp\Bigl(-\mathrm{i}a\tau[\sin\theta\cos\phi\hat{\sigma}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{\sigma}_y + \cos\theta\hat{\sigma}_z] - \mathrm{i}b\tau\hat{1}\Bigr) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b}\left(\cos(a\tau)\hat{1} - \mathrm{i}\sin(a\tau)[\sin\theta\cos\phi\hat{\sigma}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{\sigma}_y + \cos\theta\hat{\sigma}_z]\right) \end{aligned} \tag{1.12}$$

[8]

$$\hat{U}_{\mathrm{H}} = \frac{\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x}{\sqrt{2}} \tag{1.13}$$

より、[6] と同じ議論によって、

$$\hat{H} = \frac{\pi}{2\tau}\left\{\hat{1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,\tau}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}-1\end{pmatrix} \tag{1.14}$$

[9]

$$\hat{H} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi/\tau\end{pmatrix} \tag{1.15}$$

[10]

$$\hat{H} = \frac{\pi}{2\tau}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \tag{1.16}$$

第 2 問

[1]

質量、長さ、時間の次元をそれぞれ M, L, T で表す。左辺の次元は

$$\frac{M}{L^3} L^3 \frac{L}{T^2} = \frac{ML^2}{T^2} \tag{1.17}$$

となり、右辺の次元は

$$\frac{ML}{T^2 L^3} L^3 = \frac{ML^2}{T^2} \tag{1.18}$$

となるから両辺の次元は一致する。

[2]

下面で接する 2 つの体積素の間での作用・反作用の法則から、下面に働く応力は $-\boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{x}'', t)$ となる。

[3]

体積素が x_k 軸に直交する 2 つの面から受ける x_1 方向の力の合計は

$$p_1^{(k)}\left(\boldsymbol{x} + \frac{\Delta x_k}{2}\boldsymbol{e}_x\right) - p_1\left(\boldsymbol{x} - \frac{\Delta x_k}{2}\boldsymbol{e}_x\right) \approx \frac{\partial p_1^{(k)}}{\partial x_k} \tag{1.19}$$

となる。よってこれを $k = 1, 2, 3$ について足し合わせると

$$F_1(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=1,2,3} \frac{\partial p_1^{(k)}}{\partial x_k} \tag{1.20}$$

を得る。

[4]

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = F_j &= \sum_{k,m,n} \frac{1}{2} c_{jkmn} \partial_k (\partial_n u_m + \partial_m u_n) \\ &= \sum_k (\lambda \partial_j \partial_k u_k + \mu \partial_k (\partial_j u_k + \partial_k u_j)) \end{aligned} \tag{1.21}$$

から、

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{u}). \tag{1.22}$$

よって $A = \lambda + \mu$

[5]

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}_0 \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \mathrm{i}\omega t)$ とおく。縦波の場合、$\boldsymbol{k} \propto \boldsymbol{u}_0$ から

$$-\rho\omega^2 \boldsymbol{u}_0 = -\mu \boldsymbol{k}^2 \boldsymbol{u}_0 - (\lambda + \mu)\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u}_0), \quad \rho\omega^2 = (\lambda + 2\mu)k^2. \tag{1.23}$$

よって位相速度は

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{1.24}$$

となる。次に横波の場合、$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u}_0 = 0$ から

$$\rho\omega^2 \boldsymbol{u}_0 = -\mu \boldsymbol{k}^2. \tag{1.25}$$

よって位相速度は

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{1.26}$$

[6]

$$\boldsymbol{u}_{t0} = u_t \begin{pmatrix} -\cos\alpha_t \\ \sin\alpha_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}'_{t0} = u'_t \begin{pmatrix} \cos\alpha'_t \\ \sin\alpha'_t \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

$$\boldsymbol{k}_t = k_t \begin{pmatrix} \sin\alpha_t \\ \cos\alpha_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k}'_t = k'_t \begin{pmatrix} \sin\alpha'_t \\ -\cos\alpha'_t \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

とおける。境界条件から、

$$p_1^{(2)} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \tag{1.29}$$

である。これを計算すると、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ &= -\mathrm{i}u_t k_t \cos 2\alpha_t \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_t x \sin\alpha_t - \mathrm{i}\omega_t t} - \mathrm{i}u'_t k'_t \cos 2\alpha'_t \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'_t x \sin\alpha'_t - \mathrm{i}\omega_t t} = 0 \end{aligned} \tag{1.30}$$

u_t, k_t, u'_t, k'_t は全てゼロではないので、x, t によらずこれがゼロになるためには、

$$\omega_t = \omega'_t, \quad k'_t \sin\alpha'_t = k_t \sin\alpha_t \tag{1.31}$$

が必要。$\omega_t = \omega'_t$ から $k_t = k'_t$ なので、

$$\omega_t = \omega'_t, \quad \alpha_t = \alpha'_t \tag{1.32}$$

が分かる。

[7]

$$p_2^{(2)} = \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{u} + 2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \tag{1.33}$$

とする。横波なので、$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$ としてよく、

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \sin\alpha_t\cos\alpha_t(u'_t - u_t) = 0 \tag{1.34}$$

となる。$\alpha_t \neq 0, \pi$ から、$u'_t = u_t$ が分かる。この結果を $p_1^{(2)} = 0$ に代入すると、

$$\cos 2\alpha_t = 0 \tag{1.35}$$

が分かる。よって求める角度は $\alpha_t = \pi/4$。

[8]

縦波について、

$$\boldsymbol{u}'_l(x,t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{u}'_{l0}\exp(\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'_l\cdot\boldsymbol{x} - \omega'_l t))] \tag{1.36}$$

とおく。

$$\boldsymbol{u}'_{l0} = u'_l\begin{pmatrix}\sin\alpha'_l\\ -\cos\alpha'_l\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k}'_l = k'_l\begin{pmatrix}\sin\alpha'_l\\ -\cos\alpha'_l\end{pmatrix} \tag{1.37}$$

とおける。境界条件から

$$\lambda k'_l u'_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'_l\sin(\alpha'_l)x - \mathrm{i}\omega'_l t} + 2\mu\sin\alpha_t\cos\alpha_t(u'_t - u_t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_t\sin(\alpha_t)x - \mathrm{i}\omega_t t} = 0 \tag{1.38}$$

$k'_l \neq 0, u'_l \neq 0$ であり、上の式が任意の x について成り立つことから、

$$k'_l\sin\alpha'_l = k_t\sin\alpha_t \tag{1.39}$$

となる。

第 3 問

[1.1]

固有状態は、

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{1.40}$$

で表される。ここで

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^3 \tag{1.41}$$

であるから、運動量空間の単位体積あたりの固有状態の数は、

$$\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \tag{1.42}$$

[1.3]

$\epsilon = p^2/2m$ から、

$$\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \cdot 4\pi p^2 \, \mathrm{d}p = D(\epsilon)\, \mathrm{d}\epsilon \tag{1.43}$$

より、

$$D(\epsilon) = 4\pi m \sqrt{2m\epsilon} \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \epsilon^{1/2}. \tag{1.44}$$

[1.3]

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{\mathrm{e}^{\epsilon/T}-1}\,\mathrm{d}\epsilon &= T^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) T^{3/2}\end{aligned} \tag{1.45}$$

したがって、

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{mL^2T_c}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} = N \tag{1.46}$$

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)^{-2/3}\left(\frac{N}{L^3}\right)^{2/3} \tag{1.47}$$

[1.4]

$$N - N_0 = \zeta\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{mL^2T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} N \tag{1.48}$$

$$N_0 = \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right] N \tag{1.49}$$

[1.5] 2 次元の場合、

$$D(\epsilon) = D = \mathrm{const.} \tag{1.50}$$

と書けるから、

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty \frac{D}{\mathrm{e}^{(\epsilon-\mu)/T} - 1}\,\mathrm{d}\epsilon \\ &= \int_0^\infty \frac{D\mathrm{e}^{-(\epsilon-\mu)/T}}{1 - \mathrm{e}^{-(\epsilon-\mu)/T}}\,\mathrm{d}\epsilon \\ &= \left[DT\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-(\epsilon-\mu)/T}\right)\right]_{\varepsilon=0}^{\infty} \\ &= -DT\ln\left(1 - \mathrm{e}^{\mu/T}\right) \end{aligned} \tag{1.51}$$

となる。これは $\mu \to -0$ とすればいくらでも大きくなるので、BEC は起こらない。

[2.1]

エネルギーが ϵ 以下になる状態数を $N(\epsilon)$ と書くと、

$$\hbar\omega\frac{\mathrm{d}N(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon} \approx N(\epsilon + \hbar\omega) - N(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\hbar\omega} + 2 \approx \frac{\epsilon}{\hbar\omega} \tag{1.52}$$

である。ただし、$\epsilon/\hbar\omega \gg 1$ を仮定し、$\epsilon/\hbar\omega$ の 0 次の項を無視した。ここから、

$$D(\epsilon) = \frac{\epsilon}{(\hbar\omega)^2} \tag{1.53}$$

となる。

[2.2]

$T = T_c$ において、

$$\int_0^\infty \frac{\epsilon/(\hbar\omega)^2}{\mathrm{e}^{\epsilon/T_c} - 1}\,\mathrm{d}\epsilon = N \tag{1.54}$$

が成り立つ。与えられた公式から、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\epsilon/(\hbar\omega)^2}{\mathrm{e}^{\epsilon/T_c}-1}\,\mathrm{d}\epsilon &= \left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^2\int_0^\infty \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^2 = N \end{aligned}\tag{1.55}$$

となるので、

$$T_c = \frac{\sqrt{6}\,\hbar\omega}{\pi}N^{1/2}\tag{1.56}$$

[2.3]

$\omega \propto L_0^{-1}$ より、

$$\omega N^{1/2} \propto \frac{N^{1/2}}{L_0} = \text{const.}\tag{1.57}$$

を満たせば良い。

[2.4]

$$N - N_0 = \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^2 = \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 N\tag{1.58}$$

より、

$$N_0 = \left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]N\tag{1.59}$$

第 4 問

[1]

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}) &= \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(r^2 - lr\cos\theta + \frac{l^2}{4}\right)^{-1/2} - \left(r^2 + lr\cos\theta + \frac{l^2}{4}\right)^{-1/2}\right] \\ &= \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l}{r^2}\cos\theta \end{aligned} \tag{1.60}$$

$q(t)l = \alpha E_0$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{\alpha E_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left\{0\cdot\frac{1}{r} + 1\cdot\frac{1}{r^2}\right\} \tag{1.61}$$

$$C = 0, \quad D = 1 \tag{1.62}$$

[2]

$$r_\pm \approx r - \frac{l}{2}\cos\theta \tag{1.63}$$

より、

$$\begin{aligned} q(t - r_\pm/c)l &\approx \alpha E_0\cos\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0 r}{c} \pm \frac{l\omega_0\cos\theta}{2c}\right) \\ &\approx \alpha E_0\cos\left(\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \mp \alpha E_0\sin\left(\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\frac{l\omega_0\cos\theta}{2c} \end{aligned} \tag{1.64}$$

これを代入すると、

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) \approx \frac{\alpha E_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\cos\left(\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\frac{1}{r^2} - \sin\left(\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\frac{\omega_0}{cr}\right] \tag{1.65}$$

$$F = -\frac{\omega_0}{c}\sin\left(\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right), \quad G = \cos\left(\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \tag{1.66}$$

[3]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{\mathrm{d}p(t - \frac{r}{c})}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_z \\ &= -\frac{\alpha_0 E_0\omega_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\left(\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) \end{aligned} \tag{1.67}$$

[4]

$1/r^2$ に比例する項を無視すると、

$$\nabla \frac{F\cos\theta}{r} \approx \frac{\cos\theta}{r}\nabla F = \frac{\omega_0^2\cos\theta}{c^2 r}\cos\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\boldsymbol{e}_r \tag{1.68}$$

となる。よって、

$$\nabla\varphi = \frac{\alpha_0 E_0\omega_0^2\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\cos\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\boldsymbol{e}_r \tag{1.69}$$

[5]

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\alpha_0 E_0\omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\cos\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) \tag{1.70}$$

から、

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\alpha_0 E_0\omega_0^2\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\cos\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\boldsymbol{e}_\theta \tag{1.71}$$

次に $\boldsymbol{B}$ を求める。$1/r^2$ に比例する項を無視すると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} &\approx -\frac{\alpha_0 E_0\omega_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\nabla\sin\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\times(\cos\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)\\ &= \frac{\alpha_0 E_0\omega_0^2\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\cos\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\boldsymbol{e}_\phi \end{aligned}\tag{1.72}$$

[6]

$$\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 c^2\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = \frac{(\alpha_0 E_0\omega_0^2)^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r}\frac{\sin^2\theta}{r^2}\cos^2\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\boldsymbol{e}_r \tag{1.73}$$

$|\boldsymbol{S}|$ は ϕ によらず、θ に対しては

$$|\boldsymbol{S}| \propto \sin^2\theta \tag{1.74}$$

となる。

[**7**]

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \omega_v t \tag{1.75}$$

$$\alpha'(t) = -\omega_v \alpha_1 \sin \omega_v t \tag{1.76}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \frac{\mathrm{d}^2 p(t - r/c)}{\mathrm{d}t^2} \boldsymbol{e}_z \\
&= -\frac{\alpha(t) E_0 \omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \cos\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \boldsymbol{e}_z \\
&\quad - \frac{2\alpha'(t) E_0 \omega_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \sin\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \boldsymbol{e}_z \\
&\quad + \frac{\alpha''(t) E_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \cos\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \boldsymbol{e}_z
\end{aligned} \tag{1.77}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} = \frac{E_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \Big[& \alpha(t)\omega_0^2 \sin\theta \cos\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \boldsymbol{e}_\theta \\
& + 2\alpha'(t)\omega_0 \sin\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \boldsymbol{e}_z - \alpha''(t) \cos\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \boldsymbol{e}_z \Big]
\end{aligned} \tag{1.78}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} = & \frac{\alpha(t) E_0 \omega_0^2 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \cos\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \boldsymbol{e}_\theta \\
& + \frac{\alpha_1 E_0 \omega_v}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \left[-2\omega_0 \sin(\omega_v t) \sin\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) + \omega_v \cos(\omega_v t) \cos\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \right] \boldsymbol{e}_z
\end{aligned} \tag{1.79}$$

$\omega_0, \omega_0 \pm \omega_v$