14.5 Superconductors as topological fluids

BCS 理論によると、spin-singlet superconductor の基底状態は以下の pair-field

$$\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \epsilon_{\sigma\sigma'} \psi^\dagger_\sigma(\boldsymbol{x}) \psi^\dagger_{\sigma'}(\boldsymbol{y}), \quad \Delta(\boldsymbol{k}) = \epsilon_{\sigma\sigma'} \psi^\dagger_\sigma(\boldsymbol{k}) \psi^\dagger_{\sigma'}(-\boldsymbol{k}) \tag{1.1}$$

がノンゼロの期待値を取る状態として特徴づけられる。pair-field は大域的な $\mathrm{U}(1)$ 変換 $\psi_\sigma(\boldsymbol{x}) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\psi_{\sigma'}(\boldsymbol{x})$ に対して $\Delta \mapsto \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\Delta$ となる。

超伝導の基底状態は $\mathrm{U}(1)$ 対称性を自発的に破る状態であり、その考えのもとに Ginzburg–Landau 理論が展開される。しかし、厳密には超伝導における秩序変数の概念には問題がある。

次に gauge invariant な秩序変数を考える。

$$\mathcal{O}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \exp\left(\mathrm{i} \int \mathrm{d}^2 z \, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{E}_c(\boldsymbol{z})\right) \tag{1.2}$$

ここで

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_c(\boldsymbol{z}) = \delta(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}) + \delta(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}) \tag{1.3}$$

とする。

超伝導のスペクトラムには中性の fermionic な励起が存在することが知られている。

Coulomb ゲージでは

$$\exp\left(-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^2 z\, \boldsymbol{A}(z)\cdot\nabla U_c(z)\right) = \exp\left(\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^2 z\, \nabla\cdot\boldsymbol{A}(z) U_c(z)\right) = 1 \tag{1.4}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{topo}}[a_\mu, b_\mu] = \frac{1}{\pi}\epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu b_\lambda - a^\mu j^\mu_{\mathrm{qp}} - j^{\mathrm{v}}_\mu b^\mu \tag{1.5}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + V(\phi^* \phi) - e A_\mu j_{\mathrm{up}}^\mu \tag{1.7}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i} \frac{2e}{\hbar c} A_\mu \tag{1.8}$$

$V(\phi^*\phi)$ はメキシカンハット型のポテンシャルとし、$\phi = \sqrt{\rho_\mathrm{s}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ に最小をもつとする。ここで ρ_s は $|\Delta|$ に比例する。渦の寄与を入れるために $\mathrm{d}\varphi$ を $\mathrm{d}\eta + \delta\chi$ で置き換える。$\delta\chi$ が渦の部分で $\mathrm{d}(\mathrm{d}\eta + \delta\chi) = \Delta\chi$ が渦密度を表すとする。すると

$$\oint_{\partial\Sigma} \delta\chi = \int_\Sigma \Delta\chi = 2\pi N_\mathrm{v}[\Sigma] \tag{1.9}$$

となる。

14.9 Topological superconductors