1　経路積分

1.1　経路積分の定義

場の量子論において、最も基本的な量は分配関数

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]} \tag{1.1}$$

である。$\phi(x)$ は d 次元時空の上で定義された物理的な自由度を表す場である。S は作用を表し、Lagrangian $\mathcal{L}$ によって

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^d x \, \mathcal{L}(x, \phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \tag{1.2}$$

と定義される。$\int \mathcal{D}\phi$ は経路積分 (汎函数積分) を表し、連続的な関数 $\phi(x)$ についての和を表す。測度 $\mathcal{D}\phi$ は、

$$\mathcal{D}\phi = \prod_x \mathrm{d}\phi(x) \tag{1.3}$$

と定義される。$\prod_x$ は連続的な総積であり、この定義は数学的に厳密ではないが、ここでは何らかの方法で経路積分が定式化できると信じることにする。物理量 $A[\phi]$ の期待値は、

$$\langle A[\phi] \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \, A[\phi] e^{iS[\phi]} \tag{1.4}$$

によって計算される。一方、場の変数を自由度とする統計力学において、分配関数は

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\beta H[\phi]} \tag{1.5}$$

と定義される。β は逆温度、$H[\varphi]$ は Hamiltonian である。期待値は同様に

$$\langle A[\phi] \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \, A[\phi] e^{-\beta H[\phi]} \tag{1.6}$$

で与えられる。場の量子論は Euclid 化という操作によって、統計力学の理論に置き換えられる。例えば自由スカラー場

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^d x \left(\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \tag{1.7}$$

を考える。ただし、η は符号 $(+,-,...,-)$ をもつ Minkowski 計量である。ここで、

$$t=-i\tau,\quad \frac{\partial}{\partial t}=i\tau,\quad \phi=\sqrt{\beta}\,\phi' \tag{1.8}$$

と置き換えると、

$$iS[\phi]\to-\beta\int \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}^{d-1}x\left(\frac{1}{2}\delta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi'\partial_\nu\phi'+\frac{1}{2}m^2{\phi'}^2\right)=:-\beta H[\phi'] \tag{1.9}$$

となる。$H[\phi']$ は Gaussian 理論の Hamiltonian になっている。

1.2 格子場の理論

時空上の格子点 $x^\mu=an^\mu,\ n\in\mathbb{Z}^d$ の全てについてデルタ関数を挿入すると、分配関数は

$$Z=\int\mathcal{D}\phi\int\prod_{n\in\mathbb{Z}^d}\mathrm{d}\phi_n\,\delta[\phi(an)-\phi_n]e^{iS[\phi]} \tag{1.10}$$

と書ける。$\mathcal{D}\phi$ による積分を先に行うと、

$$Z=\mathcal{N}(a)\int\prod_{n\in\mathbb{Z}^d}\mathrm{d}\phi_n\,e^{iS\{a,\phi\}} \tag{1.11}$$

と書ける。ここで $\mathcal{N}(a)$ は a に依存する定数である。また $S\{a,\phi\}$ は離散的な場 ϕ_n に依存する関数であり、一般には複素数である。連続理論の作用が $S[\phi]=\int\mathrm{d}^dx\,\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$ と書ける場合、$a\to0$ の極限を取ると $S\{a,\phi\}$ において最近接格子間の相互作用しか重要でなくなると考えられる。したがって、

$$Z=\lim_{a\to0}\mathcal{N}(a)\int\prod_{n\in\mathbb{Z}^d}\mathrm{d}\phi_n\,e^{iS_{\mathrm{lattice}}\{a,\phi\}} \tag{1.12}$$

と書けることが期待される。ただし、$S_{\mathrm{lattice}}\{a,\phi\}$ は格子理論の作用を意味しており、最近接格子間の相互作用しか含まない実数の作用である。

1.3 相関関数

場の量子論および統計力学において重要であり、しばしば求めるべき目標となる量として、相関関数がある。N 点相関関数 (N 点 Green 関数) は以下のように定義される。

$$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)\rangle=\frac{1}{Z}\int\mathcal{D}\phi\,\phi(x_1)\cdots\phi(x_N)e^{iS[\phi]} \tag{1.13}$$

$iS[\phi] \to -\beta H[\phi]$ とすれば、統計力学における相関関数の定義が得られる。場の量子論においては、相関関数から LSZ の簡約公式という式を用いることで散乱断面積を求めることができる。また統計力学においては 2 点相関関数が応答関数を与えるという点で重要である。ここで、相関関数の母関数である生成汎函数を以下のように導入する。

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi, J]} = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\Big(iS[\phi] + i \int \mathrm{d}^d x \, J(x)\phi(x) \Big) \tag{1.14}$$

相関関数は、

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle = \frac{1}{i^N Z[0]} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta J(x_N)} Z[J] \Big|_{J=0} \tag{1.15}$$

と表すことができる。統計力学の場合 $iS[\phi] \to -\beta H[\phi],\ iJ(x) \to -J(x)$ とすればよい。

1.4 Wick の定理

以下の Gaussian モデルの Hamiltonian を考える。

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^d \boldsymbol{x} \left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \tag{1.16}$$

生成汎函数は

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S[\phi, J]} = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\Big(-S[\phi] - \int \mathrm{d}^d \boldsymbol{x} \, J(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{x}) \Big) \tag{1.17}$$

と表される。ただし、逆温度 β は ϕ, J の中に含めることで省略している。Hamiltonian を Fourier 変換し、整理すると、

$$\begin{aligned} S[\phi, J] &= \int \frac{\mathrm{d}^d \boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{1}{2}(m^2 + \boldsymbol{k}^2)|\phi_{\boldsymbol{k}}|^2 + \frac{1}{2}(J^*_{\boldsymbol{k}}\phi_{\boldsymbol{k}} + J_{\boldsymbol{k}}\phi^*_{\boldsymbol{k}}) \right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^d \boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} \left[\frac{1}{2}(m^2 + \boldsymbol{k}^2) \Big(\phi_{\boldsymbol{k}} + \frac{J_{\boldsymbol{k}}}{m^2 + \boldsymbol{k}^2} \Big) \Big(\phi^*_{\boldsymbol{k}} + \frac{J^*_{\boldsymbol{k}}}{m^2 + \boldsymbol{k}^2} \Big) \right] \\ &\quad - \int \frac{\mathrm{d}^d \boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} \frac{|J_{\boldsymbol{k}}|^2}{2(m^2 + \boldsymbol{k}^2)} \end{aligned} \tag{1.18}$$

となる。ただし、$\phi(\boldsymbol{x}), J(\boldsymbol{x})$ が実数値をとることから $\phi^*_{\boldsymbol{k}} = \phi_{-\boldsymbol{k}}, J^*_{\boldsymbol{k}} = J_{-\boldsymbol{k}}$ となることを用いた。ここで、新たな場の変数を

$$\tilde{\phi}_{\boldsymbol{k}} = \phi_{\boldsymbol{k}} + \frac{J_{\boldsymbol{k}}}{m^2 + \boldsymbol{k}^2} \tag{1.19}$$

と定義すれば、

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S[\phi,J]} = \exp\left[-\int \frac{\mathrm{d}^d \boldsymbol{k}}{(2\pi)^d} \frac{|J_{\boldsymbol{k}}|^2}{2(m^2+\boldsymbol{k}^2)}\right] \int \mathcal{D}\tilde{\phi}\, e^{-S[\tilde{\phi}]} \tag{1.20}$$

と書ける。ここで、相関関数が、

$$\langle \phi_{\boldsymbol{k}_1} \cdots \phi_{\boldsymbol{k}_n} \rangle = \frac{(-1)^n (2\pi)^{nd}}{Z[0]} \frac{\delta}{\delta J^*_{\boldsymbol{k}_1}} \cdots \frac{\delta}{\delta J^*_{\boldsymbol{k}_n}} Z[J] \Big|_{J=0} \tag{1.21}$$

と書けることに注目する。計算に関する注意として、$J(\boldsymbol{x})$ が実数であることから $J^*_{\boldsymbol{k}} = J_{-\boldsymbol{k}}$ が成り立つ。したがって、

$$\frac{\delta J^*_{\boldsymbol{k}}}{\delta J^*_{\boldsymbol{k}'}} = \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \quad \frac{\delta J_{\boldsymbol{k}}}{\delta J^*_{\boldsymbol{k}'}} = \delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') \tag{1.22}$$

となる。具体的に期待値を計算する。まず、

$$\frac{\delta}{\delta J^*_{\boldsymbol{k}}} Z[J] = \frac{J_{\boldsymbol{k}}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(m^2+\boldsymbol{k}^2)} Z[J] \tag{1.23}$$

より、$J_{\boldsymbol{k}} = 0$ とおいて $\langle \phi_{\boldsymbol{k}} \rangle = 0$ が分かる。次に、

$$\frac{\delta}{\delta J^*_{\boldsymbol{k}_1}} \frac{\delta}{\delta J^*_{\boldsymbol{k}_2}} Z[J] = \frac{\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{(2\pi)^d} \frac{1}{m^2+\boldsymbol{k}_1^2} Z[J] + \mathcal{O}(J^2) \tag{1.24}$$

より、

$$\langle \phi_{\boldsymbol{k}_1} \phi_{\boldsymbol{k}_2} \rangle = \frac{(2\pi)^d \delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)}{m^2+\boldsymbol{k}_1^2} \tag{1.25}$$

となる。同様の計算を繰り返すと、

$$\langle \phi_{\boldsymbol{k}_1} \cdots \phi_{\boldsymbol{k}_{2n-1}} \rangle = 0 \tag{1.26}$$

$$\langle \phi_{\boldsymbol{k}_1} \cdots \phi_{\boldsymbol{k}_{2n}} \rangle = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \langle \phi_{\boldsymbol{k}_{\sigma(1)}} \phi_{\boldsymbol{k}_{\sigma(2)}} \rangle \cdots \langle \phi_{\boldsymbol{k}_{\sigma(2n-1)}} \phi_{\boldsymbol{k}_{\sigma(2n)}} \rangle \tag{1.27}$$

を得る。ただし、S_{2n} は対称群を表す。これを Wick の定理と呼ぶ。

1.5 演算子形式

場の量子論には経路積分による定式化と等価な演算子形式による定式化がある。

まず、時刻 t を固定して、空間に依存する場 $\varphi(\boldsymbol{x}) = \phi(t, \boldsymbol{x})$ を考える。ここで、ありうる全ての場 $\varphi(\boldsymbol{x})$ をそれぞれ Hilbert 空間の基底 $|\varphi(\boldsymbol{x})\rangle$ に対応づける。ただし、$|\varphi(\boldsymbol{x})\rangle$ は

$$\int \mathcal{D}\varphi \, |\varphi\rangle\langle\varphi| = 1 \tag{1.28}$$

によって規格化されているものとする。時刻 t が $t_i \leq t \leq t_f$ に制限された時空を考える。$t = t_i$ で $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ であった場が時間発展して、時刻 $t = t_f$ で $\varphi_f(\boldsymbol{x})$ となる確率振幅を、

$$\langle\varphi_f(\boldsymbol{x})|\hat{U}(t_f, t_i)|\varphi_i(\boldsymbol{x})\rangle \coloneqq \int_{\phi(t_i)=\varphi_i}^{\phi(t_f)=\varphi_f} \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]} \tag{1.29}$$

によって与える。この式は時間発展演算子 $\hat{U}(t_f, t_i)$ の定義となっている。右辺は

$$\int_{\phi(t_i)=\varphi_i}^{\phi(t_f)=\varphi_f} \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]} = \int \mathcal{D}\phi \, \delta[\phi(t_i) - \varphi_i]\delta[\phi(t_f) - \varphi_f]e^{iS[\phi]} \tag{1.30}$$

と表される。ここで、デルタ汎函数 $\delta[\varphi]$ は $\int \mathcal{D}\varphi \, \delta[\varphi]F[\varphi] = F[0]$ によって定義される超汎函数である。

統計力学でも同様に演算子形式が存在する。y を行を表すパラメターとし、$\boldsymbol{x}$ をそれ以外の座標をまとめたものとし、場を $\phi(y, \boldsymbol{x})$ と書く。また y 方向には周期的境界条件 $\phi(0, \boldsymbol{x}) = \phi(L, \boldsymbol{x})$ が課されているとする。このとき分配関数は、

$$Z = \int_{\phi(0)=\phi(L)} \mathcal{D}\phi \, e^{-\beta H[\phi]} = \int \mathcal{D}\varphi \int_{\phi(0)=\phi(L)=\varphi} \mathcal{D}\phi \, e^{-\beta H[\phi]} \tag{1.31}$$

と表される。ここで、

$$\langle\varphi_f|\hat{T}(y_f, y_i)|\varphi_i\rangle \coloneqq \int_{\phi(y_i)=\varphi_i}^{\phi(y_f)=\varphi_f} \mathcal{D}\phi \, e^{-\beta H[\phi]} \tag{1.32}$$

によって転送演算子 $\hat{T}(y_f, y_i)$ を定義すると、分配関数は

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi \, \langle\varphi|\hat{T}(L, 0)|\varphi\rangle = \mathrm{Tr}\, \hat{T}(L, 0) \tag{1.33}$$

と書ける。$\hat{T}(y_f, y_i)$ は転送行列の連続極限となっている。

量子力学の話に戻る。さて、デルタ汎函数の性質から、

$$\int \mathcal{D}\phi = \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\phi \, \delta[\phi(t) - \varphi] \tag{1.34}$$

という変形ができることに注目すると、$t_1 > t_2 > t_3$ に対して

$$
\begin{aligned}
\langle\varphi_1|\hat{U}(t_1,t_3)|\varphi_3\rangle &= \int \mathcal{D}\varphi_2\,\delta[\phi(t_2)-\varphi_2]\int_{\phi(t_3)=\varphi_3}^{\phi(t_1)=\varphi_1}\mathcal{D}\phi\,e^{iS[\phi]} \\
&= \int \mathcal{D}\varphi_2 \int_{\phi_{12}(t_2)=\varphi_2}^{\phi_{12}(t_1)=\varphi_1}\mathcal{D}\phi_{12}\int_{\phi_{23}(t_3)=\varphi_3}^{\phi_{23}(t_2)=\varphi_2}\mathcal{D}\phi_{23}\,e^{i(S[\phi_{12}]+S[\phi_{23}])} \\
&= \int \mathcal{D}\varphi_2\,\langle\varphi_1|\hat{U}(t_1,t_2)|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|\hat{U}(t_2,t_3)|\varphi_3\rangle
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

が成り立つ。ここで、$\phi_{12}(x),\phi_{23}(x)$ はそれぞれ $t_1 \geq t \geq t_2, t_2 \geq t \geq t_3$ における $\phi(x)$ である。ここから時間発展演算子の加法性

$$
\hat{U}(t_1,t_3) = \hat{U}(t_1,t_2)\hat{U}(t_2,t_3) \tag{1.36}
$$

がわかる。

1.6 Legendre 変換

汎函数に対する Fourier 変換を以下のように定義する。

$$
\tilde{F}[\tilde{\phi}] = \int \mathcal{D}\phi\,F[\phi]e^{-i\tilde{\phi}\cdot\phi}, \quad F[\phi] = \int \tilde{\mathcal{D}}\tilde{\phi}\,\tilde{F}[\tilde{\phi}]e^{i\tilde{\phi}\cdot\phi} \tag{1.37}
$$

ただし、$\tilde{\phi}\cdot\phi = \int \mathrm{d}^d x\,\tilde{\phi}(x)\phi(x)$ という略記を用いている。また $\tilde{\mathcal{D}}\tilde{\phi}$ は、1 変数の場合の $1/2\pi$ に相当する因子を含めた測度を表す。特に、デルタ汎函数に対して、

$$
\int \mathcal{D}\phi\,\delta[\phi]e^{-i\tilde{\phi}\cdot\phi} = 1, \quad \delta[\phi] = \int \tilde{\mathcal{D}}\tilde{\phi}\,e^{i\tilde{\phi}\cdot\phi} \tag{1.38}
$$

が成り立つ。いま作用が Lagrangian $L[\phi(t),\dot{\phi}(t)]$ の積分として、

$$
S[\phi] = \int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\,L[\phi(t),\dot{\phi}(t)] \tag{1.39}
$$

と表されているとしよう。このとき、L は $\phi(t),\dot{\phi}(t)$ を独立な変数とする汎函数であるが、ϕ と $\dot{\phi}$ は独立な場ではない。これは扱いにくいので補助場 $\rho(x)$ を導入して、

$$
e^{iS[\phi]} = \int \mathcal{D}\rho\,\delta[\dot{\phi}-\rho]e^{i\int\mathrm{d}t\,L[\phi(t),\rho(t)]} \tag{1.40}
$$

とする。デルタ関数を積分表示すると、

$$
e^{iS[\phi]} = \int \mathcal{D}\rho\int\tilde{\mathcal{D}}\pi\,e^{i\pi\cdot(\dot{\phi}-\rho)}e^{i\int\mathrm{d}t\,L[\phi(t),\rho(t)]} \tag{1.41}
$$

となる。ここで、$\rho(x)$ に関する経路積分は被積分関数が $\dot{\rho}(x)$ によらないため、時間的に局所的な関数の積として表せる。
したがって、

$$\int \mathcal{D}\rho\, e^{-i\pi\cdot\rho+i\int \mathrm{d}t L[\phi(t),\rho(t)]} =: \mathcal{N} e^{-i\int \mathrm{d}t H[\phi(t),\pi(t)]} \tag{1.42}$$

とおける。$H[\phi(t),\pi(t)]$ を Hamiltonian と呼ぶ。$\mathcal{N}$ は定数である。このように定義した Hamiltonian は一般に虚部を含む。分配関数は

$$Z = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\, \tilde{\mathcal{D}}\pi\, \exp\!\left(i\pi\cdot\dot{\phi} - i\int \mathrm{d}t\, H[\phi(t),\pi(t)]\right) \tag{1.43}$$

と書ける。Hamiltonian を具体的に計算することは大変な問題なので、鞍点法を考えることにする。(1.42) 左辺の指数は $-\pi(x)+\delta L/\delta\rho(x) = 0$ のときに極小となる。この場合が経路積分において主要な寄与を与えるので、

$$e^{-i\int \mathrm{d}t H[\phi(t),\pi(t)]} \approx e^{-i\pi\cdot\rho+i\int \mathrm{d}t L[\phi(t),\rho(t)]}\Big|_{\pi=\delta L/\delta\rho} \tag{1.44}$$

と近似できる。これは Legendre 変換となっている。
経路積分では Legendre 変換は近似に過ぎないが、幸いなことに我々が用いるほとんどの Lagrangian では Legendre 変換が厳密な結果を与える。それは

$$L[\phi(t),\dot{\phi}(t)] = \frac{1}{2}\dot{\phi}(t)^2 - V[\phi(t)] \tag{1.45}$$

のように、運動項が $\dot{\phi}$ の 2 次で表されるような場合である。ただし、$\dot{\phi}(t)^2 = \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\,\dot{\phi}(t,\boldsymbol{x})^2$ という略記を用いている。このとき

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{D}\rho\, \exp\!\left(\frac{i}{2}\rho^2 - i\pi\cdot\rho\right) &= \exp\!\left(-\frac{i}{2}\pi^2\right)\int \mathcal{D}\rho\, \exp\!\left(\frac{i}{2}(\rho-\pi)^2\right) \\
&= \exp\!\left(-\frac{i}{2}\pi^2\right)\int \mathcal{D}\rho'\, \exp\!\left(\frac{i}{2}{\rho'}^2\right) \\
&=: \mathcal{N}\exp\!\left(-\frac{i}{2}\pi^2\right)
\end{aligned} \tag{1.46}$$

と変形できる。ここで $\rho' = \rho - \pi$ とし、この変数変換の Jacobian が 1 であることを用いた。ここから

$$H[\phi(t),\pi(t)] = \frac{1}{2}\pi(t)^2 + V[\phi(t)] \tag{1.47}$$

となる。これは Legendre 変換による結果と同じである。

1.7 運動量固有状態

運動量固有状態を

$$|\varpi\rangle = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{i\varpi\cdot\varphi}|\varphi\rangle \tag{1.48}$$

によって定義する。ここで、デルタ汎函数の Fourier 変換

$$\int \mathcal{D}\varphi\, \delta[\varphi]e^{-i\varpi\cdot\varphi} = 1, \quad \delta[\varphi] = \int \tilde{\mathcal{D}}\varpi\, e^{i\varphi\cdot\varpi} \tag{1.49}$$

から、

$$\begin{aligned}\int \tilde{\mathcal{D}}\varpi\, |\varpi\rangle\langle\varpi| &= \int \tilde{\mathcal{D}}\varpi \int \mathcal{D}\varphi\, \mathcal{D}\varphi'\, e^{i\varpi\cdot(\varphi'-\varphi)}|\varphi\rangle\langle\varphi'| \\ &= \int \mathcal{D}\varphi\, \mathcal{D}\varphi'\, \delta[\varphi'-\varphi]|\varphi\rangle\langle\varphi'| = 1\end{aligned} \tag{1.50}$$

となり、$|\varpi\rangle$ が $\tilde{\mathcal{D}}\varpi$ に対して規格化されていることが分かる。
運動量固有状態に対する時間発展演算子の行列要素は

$$\begin{aligned}&\langle\varpi_f|\hat{U}(t_f,t_i)|\varpi_i\rangle \\ &= \int \mathcal{D}\varphi_f\, \mathcal{D}\varphi_i\, e^{-i\varphi_f\cdot\varpi_f + i\varphi_i\cdot\varpi_i}\langle\varphi_f|\hat{U}(t_f,t_i)|\varphi_i\rangle \\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\, \tilde{\mathcal{D}}\pi\, e^{-i\phi(t_f)\cdot\varpi_f + i\phi(t_i)\cdot\varpi_i} e^{i\int \mathrm{d}t(\dot{\phi}(t)\cdot\pi(t) - H(t))}\end{aligned} \tag{1.51}$$

と書かれる。

$$i\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t\, \dot{\phi}(t)\cdot\pi(t) = i\phi(t_f)\pi(t_f) - i\phi(t_i)\pi(t_i) - \int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\, \phi(t)\cdot\dot{\pi}(t) \tag{1.52}$$

から、$\phi(t_f), \phi(t_i)$ に関する積分は $\delta[\pi(t_f)-\varpi_f], \delta[\pi(t_i)-\varpi_i]$ を出すので、

$$\langle\varpi_f|\hat{U}(t_f,t_i)|\varpi_i\rangle = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi \int_{\pi(t_i)=\varpi_i}^{\pi(t_f)=\varpi_f} \tilde{\mathcal{D}}\pi\, e^{i\int \mathrm{d}t(\dot{\phi}(t)\cdot\pi(t) - H(t))} \tag{1.53}$$

と書ける。

1.8 場の演算子

場の演算子 $\hat{\varphi}(\boldsymbol{x})$ を、$|\varphi(\boldsymbol{x})\rangle$ を固有状態にもつ演算子として、

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{x})|\varphi'\rangle = \varphi'(\boldsymbol{x}) \tag{1.54}$$

によって定義する。Heisenberg 表示での演算子は、

$$\hat{\phi}(t, \boldsymbol{x}) = \hat{U}(0, t)\hat{\varphi}(\boldsymbol{x})\hat{U}(t, 0) \tag{1.55}$$

と定義される。ここで、$\hat{U}(0, t) = \hat{U}(t, 0)^{-1}$ である。同様に、

$$\hat{\varpi}(\boldsymbol{x})|\varpi'\rangle = \varpi'(\boldsymbol{x}), \quad \hat{\pi}(t, \boldsymbol{x}) = \hat{U}(0, t)\hat{\varpi}(\boldsymbol{x})\hat{U}(t, 0) \tag{1.56}$$

と定義する。

$$\int \mathcal{D}\varphi \, \hat{\varpi}(\boldsymbol{x})F[\varphi]|\varphi\rangle = -i \int \mathcal{D}\varphi \, \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\boldsymbol{x})}|\varphi\rangle \tag{1.57}$$

が成り立つことから、

$$[\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}), \hat{\varpi}(\boldsymbol{y})] = i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \quad [\hat{\phi}(t, \boldsymbol{x}), \hat{\pi}(t, \boldsymbol{y})] = i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{1.58}$$

が分かる。

これまでは有限時間の時間発展を扱ってきたが、ここからは無限の過去から無限の未来まで含む全時空を考えることにする。このとき、真空状態 $|0\rangle$ を考えるのが便利である。

統計力学の場合、真空状態 $|0\rangle$ は転送行列の最大固有値をもつ固有状態として定義される。転送行列を定数倍して定義し直すことで、$|0\rangle$ の固有値は 1 に取れる。$|1\rangle$ を真空状態以外の固有状態とするとき、

$$\hat{T}(t, 0)|1\rangle = e^{-\lambda t}|1\rangle \quad (\lambda > 0) \tag{1.59}$$

とおくと、

$$\hat{T}(t, 0)(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) = c_0|0\rangle + e^{-\lambda t}c_1|1\rangle \to c_0|0\rangle \quad (t \to \infty) \tag{1.60}$$

となる。つまり、十分長く時間発展した場合、$|0\rangle$ 以外の寄与は消える。したがって、分配関数や期待値の計算の際に、真空状態を境界条件として設定しておくことで、計算を簡単にしながらバルクの物理量をうまく取り出せる。

場の量子論の場合、$|0\rangle$ を Hamiltonian の最小固有値をもつ固有状態として定義すればよい。ただし、時間発展演算子の固有値は e^{-iEt} という形をとるので、真空以外の寄与が無視できることを示すためにはもっと繊細な議論が必要になる。
場の期待値

$$\langle \phi(x) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi\, \phi(x) e^{iS[\phi]} \tag{1.61}$$

を演算子形式で表す。$t = t_i, t_f$ で状態が $|i\rangle, |f\rangle$ であるという境界条件を課すと、

$$\begin{aligned}\langle \phi(t, \boldsymbol{x}) \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\varphi \int_{\phi(t)=\varphi} \mathcal{D}\phi\, \varphi(\boldsymbol{x}) e^{iS[\phi]} \\ &= \frac{\langle f|\hat{U}(t_f, t)\hat{\varphi}(t)\hat{U}(t, t_i)|i\rangle}{\langle f|\hat{U}(t_f, t_i)|i\rangle} = \frac{\langle f|\mathsf{T}^*\left[\hat{\phi}(t, \boldsymbol{x})\hat{U}(t_f, t_i)\right]|i\rangle}{\langle f|\hat{U}(t_f, t_i)|i\rangle}\end{aligned} \tag{1.62}$$

と表せる。T^* 積は左側が未来、右側が過去になるように演算子を並べて積をとることを表す。$t_f \to \infty, t_i \to -\infty$ とし、$|f\rangle = |i\rangle = |0\rangle$ とすると、

$$\langle \phi(t, \boldsymbol{x}) \rangle = \langle 0|\hat{\phi}(t, \boldsymbol{x})|0\rangle \tag{1.63}$$

となる。ただし真空のエネルギーを 0 とした。場の期待値は、場の演算子の真空期待値に等しくなる。
同様に 2 点相関関数は、$t_1 > t_2$ のとき、

$$\begin{aligned}\langle \phi(t_1, \boldsymbol{x}_1)\phi(t_2, \boldsymbol{x}_2) \rangle &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\varphi_1\, \mathcal{D}\varphi_2 \int_{\substack{\phi(t_1)=\varphi_1 \\ \phi(t_2)=\varphi_2}} \mathcal{D}\phi\, \varphi_1(\boldsymbol{x}_1)\varphi_2(\boldsymbol{x}_2) e^{iS[\phi]} \\ &= \frac{\langle f|U(t_f, t_1)\hat{\varphi}_1(\boldsymbol{x}_1)U(t_1, t_2)\hat{\varphi}_2(\boldsymbol{x}_2)U(t_2, t_i)|i\rangle}{\langle f|U(t_f, t_i)|i\rangle} \\ &= \frac{\langle f|U(t_f, 0)\hat{\phi}(t_1, \boldsymbol{x}_1)\hat{\phi}(t_2, \boldsymbol{x}_2)U(0, t_i)|i\rangle}{\langle f|U(t_f, t_i)|i\rangle}\end{aligned} \tag{1.64}$$

と表せる。$t_1 < t_2$ のときは $\hat{\phi}(t_1, \boldsymbol{x}_1)$ と $\hat{\phi}(t_2, \boldsymbol{x}_2)$ の順序を入れ替える必要があるので、

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle = \frac{\langle f|\mathsf{T}^*\left[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\hat{U}(t_f, t_i)\right]|i\rangle}{\langle f|U(t_f, t_i)|i\rangle} \tag{1.65}$$

と書ける。$t_f \to \infty, t_i \to -\infty$ とし、$|f\rangle = |i\rangle = |0\rangle$ とすると、

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle = \langle 0|\mathsf{T}^*\left[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\right]|0\rangle \tag{1.66}$$

となる。

1.9 運動方程式

場の微小変換 $\phi'(x) = \phi(x) + \varepsilon\delta\phi(x)$ を考える。$\delta\phi(x)$ が $\phi(x)$ に依存しないとき、$\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$ であるから、以下の恒等式が成り立つ。

$$\int \mathcal{D}\phi\, F[\phi] e^{iS[\phi]} = \int \mathcal{D}\phi\, F[\phi'] e^{iS[\phi']} \tag{1.67}$$

右辺から左辺を引いて、分配関数で割ると、

$$\int \mathrm{d}^d x\, \delta\phi(x) \left\langle i \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} F[\phi] + \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \right\rangle = 0 \tag{1.68}$$

となる。ただし、$\delta\phi(x)$ が積分領域の境界で 0 となることを仮定し、表面項を消している。積分領域の内部で $\delta\phi(x)$ は任意であるから、

$$i \left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} F[\phi] \right\rangle + \left\langle \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \right\rangle = 0 \tag{1.69}$$

が成り立つ。特別な場合として、$F[\phi] = \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)$ とした以下の式は Schwinger-Dyson 方程式と呼ばれる。

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \right\rangle = i \sum_{j=1}^{n} \delta(x - x_j) \left\langle \phi(x_1) \cdots \cancel{\phi(x_j)} \cdots \phi(x_n) \right\rangle \tag{1.70}$$

$F[\phi] = 1$ とした場合は、Euler-Lagrange 方程式

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} \right\rangle = 0 \tag{1.71}$$

が得られる。初期状態と終了状態は任意なので、これを演算子形式で書くことができる。

$$\frac{\delta S[\hat{\phi}]}{\delta\hat{\phi}(x)} = 0 \tag{1.72}$$

一方、Schwinger-Dyson 方程式 (1.70) から、

$$\left\langle \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \right\rangle \neq 0 \quad (x = x_1, \ldots, x_n) \tag{1.73}$$

となる。これらの結果は矛盾するように見えるが、$\delta S/\delta\phi(x)$ の中に $\partial_0\phi(x)$ が含まれているため、T* 積はデルタ関数を出すことに注意が必要である。

Hamilton 形式で同様に議論すると、

$$\int \mathrm{d}t \left\langle \delta\phi(t) \cdot \left(-i\dot{\pi}(t) - i\frac{\delta H(t)}{\delta\phi(t)} \right) + \delta\pi(t) \cdot \left(i\dot{\phi}(t) - i\frac{\delta H(t)}{\delta\pi(t)} \right) \right\rangle = 0 \tag{1.74}$$

から、正準方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \phi(t, \boldsymbol{x}) \rangle = \left\langle \frac{\delta H(t)}{\delta\pi(t, \boldsymbol{x})} \right\rangle, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \pi(t, \boldsymbol{x}) \rangle = - \left\langle \frac{\delta H(t)}{\delta\phi(t, \boldsymbol{x})} \right\rangle \tag{1.75}$$

を得る。演算子形式で書くと、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\delta}{\delta\hat{\pi}(t, \boldsymbol{x})}\hat{H}[\hat{\phi}(t), \hat{\pi}(t)], \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\pi}(t, \boldsymbol{x}) = -\frac{\delta}{\delta\hat{\phi}(t, \boldsymbol{x})}\hat{H}[\hat{\phi}(t), \hat{\pi}(t)] \tag{1.76}$$

となる。ここで、正準交換関係 (1.58) から $\delta/\delta\hat{\pi} = -i[\hat{\phi}, \cdot], \delta/\delta\hat{\phi} = i[\hat{\pi}, \cdot]$ と書けるので、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}(t, \boldsymbol{x}) = i[\hat{H}(t), \hat{\phi}(t, \boldsymbol{x})], \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\pi}(t, \boldsymbol{x}) = i[\hat{H}(t), \hat{\pi}(t, \boldsymbol{x})] \tag{1.77}$$

を得る。この表示を Heisenberg の運動方程式と呼ぶ。$\hat{\phi}(t, \boldsymbol{x}), \hat{\pi}(t, \boldsymbol{x})$ の定義 (1.55),(1.56) を代入すると、以下の Schrödinger 方程式を得る。

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{U}(t, 0) = \hat{H}(t). \tag{1.78}$$