

# 指数定理まわりの勉強ノート

政岡凜太郎

2024 年 12 月 9 日

中原トポロジー 12 章の勉強の際に作ったノート。教科書の内容はあんまり扱っていない。TO DO: reference をつける

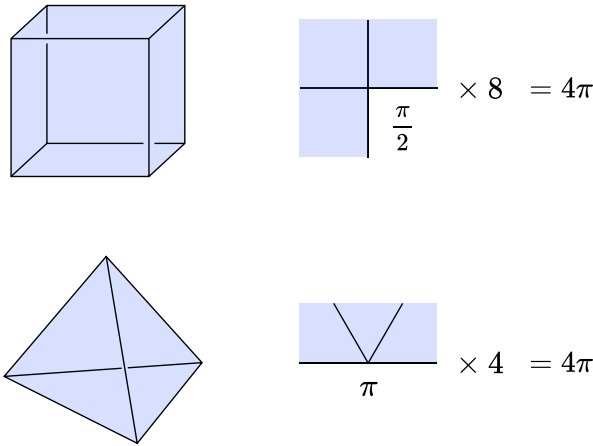
## 目次

1	Gauss-Bonnet の定理	2
2	超対称量子力学と Witten 指数	5
3	Morse 理論	11
4	Chern-Gauss-Bonnet の定理	16
付録 A	連続スペクトルをもつ Witten 模型	19
付録 B	Fokker-Planck 方程式の導出	23

## 1. Gauss-Bonnet の定理

### 不足角

立方体の1つの頂点には、 $\pi/2$ の角が3つ集まっている。これらの角の和  $3\pi/2$  を  $2\pi$  から引くと  $\pi/2$  が残る。この残った角度をその頂点における不足角と呼ぶ。不足角が0ならばその頂点は完全に平らであり、不足角が大きいほど頂点は尖っていると言える。立方体は  $\pi/2$  の不足角が8つの頂点それぞれにあり、その合計は  $4\pi$  である。次に、正四面体を考えてみよう。1つの頂点での不足角は  $\pi$  であり、4つの頂点の合計はこの場合も  $4\pi$  である。



実は不足角の合計は、多面体の詳細にはよらず、種数にしかよらない。頂点の数が  $v$ , 辺の数が  $e$ , 面の数が  $f$  であるような多面体を考える。 $i$  番目の面が  $n_i$  角形だとすると、この内角の和は  $\pi(n_i - 2)$  であるから

$$\begin{aligned} (\text{不足角}) &= 2\pi v - \sum_{i=1}^f \pi(n_i - 2) \\ &= 2\pi v - 2\pi e + 2\pi f = 2\pi \chi \end{aligned} \quad (1)$$

となる。ここで  $\sum_{i=1}^f n_i = 2e$  を用いた。

Gauss-Bonnet の定理はこの式を連続的な曲面に適用できるようにしたものである。ある曲面を多角形分割し、そのメッシュを細かくしていくと、それぞれの頂点での不足角は0に近づいていく。そこで面積あたりの不足角の密度を  $K$  とすると、

$$2\pi \chi = \int_M K \, \text{dvol} \quad (2)$$

と書ける。ただし  $d\text{vol}$  は面積要素。これを Gauss-Bonnet の定理と呼ぶ。位相不変量が曲面上のとある量の積分で表されている、興味深い式である。以下では不足角密度  $K$  を具体的に求める。

## ホロノミー

不足角は接ベクトルの平行移動に対するホロノミー、すなわち接ベクトルが頂点の周りを平行移動して戻ってきたときに獲得する回転の角度とみなすことができる。

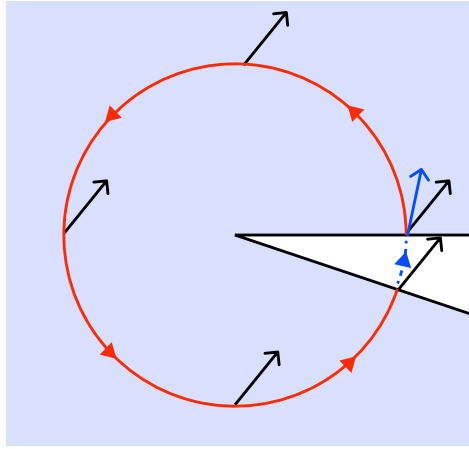


図 1: ホロノミー

曲面を多角形分割し、メッシュを細かくしていく極限を考える。曲面上の領域  $S$  に含まれる不足角の合計はこの極限において収束し、それは  $\partial S$  に沿って接ベクトルを平行移動したときのホロノミーによって与えられる。注意として、ホロノミーは  $2\pi$  の回転の不定性を伴うが、 $S$  を十分小さく取っていればこの不定性は問題にならない。

さて、ホロノミーを具体的に計算しよう。考えている領域において  $g_{ij} = \delta_{ij}$  となる座標をとり、曲面上の正規直交標構を  $e_i$  とする。 $e_i$  の平行移動は共変微分

$$\nabla_i e_j = e_k \Gamma_{ij}^k \quad (3)$$

によって与えられる。 $e_i$  を正規直交標構としたので、 $\Gamma_{ij}^k$  は  $j, k$  について反対称となる。また  $e_i$  は接空間の基底であるから、右から行列を作用させるのが自然であることに注意されよ。反対称行列 ( $\mathfrak{so}(2)$ ) を係数とする 1-形式  $\Gamma$  と 2-形式  $\mathcal{R}$  を

$$\Gamma := \Gamma_i dx^i, \quad (\Gamma)_j^k := \Gamma_{ij}^k dx^i, \quad (\mathcal{R})_{ij} := \frac{1}{2} R_{ijkl} dx^k \wedge dx^l \quad (4)$$

によって定義する。経路  $\partial S$  に沿ったホロノミーは、

$$\exp \left( \int_{\partial S} \Gamma \right) = \exp \left( \int_S d\Gamma \right) = \exp \left( \int_S \mathcal{R} \right) \quad (5)$$

と計算される。 $\Gamma$  が反対称行列なことから  $\mathcal{R} = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = d\Gamma$  であることを用いた。また  $SO(2)$  の可換性から積分に path ordering を付けなかった。求めたいのは正規直交標構が回転した角度である。

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & R_{1212} \\ -R_{1212} & 0 \end{pmatrix} dx^1 \wedge dx^2 \quad (6)$$

を回転角  $\theta$  の定義

$$\exp \left( \int_S \mathcal{R} \right) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

と比較することで、微小な面積における不足角は

$$K dx^1 \wedge dx^2 = -R_{1212} dx^1 \wedge dx^2 = \text{Pf}(\mathcal{R}) \quad (8)$$

と求まる。ここでの Pfaffian の定義は  $2n$  次元反対称行列に対して

$$\text{Pf}(A) := \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sign}(\sigma) A_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)} \quad (9)$$

である。符号の付け方が通常との定義と異なることに注意。したがって、

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M K dx^1 \wedge dx^2 = \frac{1}{2\pi} \int_M \text{Pf}(\mathcal{R}) =: \int_M \text{eu}(TM) \quad (10)$$

と書ける。 $\text{eu}(TM)$  は Euler 形式と呼ばれる。

## 指数定理

Gauss-Bonnet の定理を指数定理の形に整理する。Euler 標数  $\chi$  は Betti 数の交代和として表されるのだった。

$$\chi = \sum_r (-1)^i b_r = \sum_r (-1)^r \dim \ker \Delta_r \quad (11)$$

ここで

$$A := \bigoplus_r (d_{2r} + d_{2r-1}^\dagger), \quad A^\dagger := \bigoplus_r (d_{2r-1} + d_{2r}^\dagger) \quad (12)$$

と定義すると、

$$\begin{aligned}
\text{ind } A &:= \dim \text{Ker } A - \dim \text{Ker } A^\dagger \\
&= \dim \text{Ker}(A^\dagger A) - \dim \text{Ker}(AA^\dagger) \\
&= \dim \text{Ker} \left( \bigoplus_r \Delta_{2r} \right) - \dim \text{Ker} \left( \bigoplus_r \Delta_{2r+1} \right) \\
&= \sum_r (-1)^r \dim \ker \Delta_r = \chi
\end{aligned} \tag{13}$$

となる。よって

$$\text{ind } A = \frac{1}{2\pi} \int_M \text{Pf}(\mathcal{R}). \tag{14}$$

## 2. 超対称量子力学と Witten 指数

### Langevin 方程式と Fokker–Planck 方程式

超対称量子力学をとっつきやすい題材 (私見) から導入することを試みる。1 次元のポテンシャル  $h(x)$  のもとで、粘性抵抗と、ランダムな揺動  $\eta$  によって運動する粒子を考える。この粒子は以下の運動方程式に従う。

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} - \frac{\partial h}{\partial x} + \eta(t) \tag{15}$$

粘性抵抗が十分大きい場合には 2 階微分項を落として

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dh}{dx} + \eta(t) \tag{16}$$

としてよい。簡単のため物理定数は全て 1 とした。この確率微分方程式を考える。ここで、 $\eta(t)$  は白色ノイズとする。 $\eta(t)$  についての平均は

$$\langle X \rangle_\eta = \frac{1}{\mathcal{Z}_\eta} \int \mathcal{D}\eta X \exp \left( -\frac{\beta}{4} \int dt \eta(t)^2 \right), \tag{17}$$

$$\mathcal{Z}_\eta = \int \mathcal{D}\eta \exp \left( -\frac{\beta}{4} \int dt \eta(t)^2 \right). \tag{18}$$

によって与える。等価な系の記述として、粒子の軌跡を追いかけるのではなく、確率分布  $P(x, t)$  の時間発展を考えることもできる。その場合、 $P(x, t)$  は以下の Fokker–Planck 方程式に従う。

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) P(x, t). \tag{19}$$

導出は付録を参照。Fokker–Planck 方程式の固定点は

$$P_{\text{eq}}(x) := \frac{e^{-\beta h(x)}}{\mathcal{Z}}, \quad \mathcal{Z} = \int dx e^{-\beta h(x)} \quad (20)$$

で与えられる。

## 超対称量子力学

以下では式の見やすさのために、 $h(x) \rightarrow 2h(x)/\beta$ ,  $t \rightarrow \beta t$  と置き換える。つまり Fokker–Planck 方程式を

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{dh}{dx} \right) P(x, t) \quad (21)$$

とする。これを解くためには右辺の演算子についての固有ベクトルを求めればよい。実はこの演算子のスペクトルは非負になる。これを示すために相似変換

$$P(x, t) \mapsto \psi(x, t) := e^{h(x)} P(x, t) \quad (22)$$

を考えよう。 $\psi(x, t)$  が従う方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= e^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{dh}{dx} \right) e^{-h(x)} \psi(x) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dh}{dx} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dh}{dx} \right) \psi(x). \end{aligned} \quad (23)$$

で与えられる。この式は虚時間 Schrödinger 方程式

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -H_+ \psi, \quad H_+ = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dh}{dx} \right) \left( -\frac{\partial}{\partial x} - \frac{dh}{dx} \right) \quad (24)$$

とみなせる。 $H_+$  は半正定値なので Fokker–Planck 方程式のスペクトルは非負になる。基底状態は

$$\psi_{\text{eq}}(x) = \sqrt{\mathcal{Z}} e^{h(x)} P_{\text{eq}}(x) = \frac{e^{-h(x)}}{\sqrt{\mathcal{Z}}} \quad (25)$$

で与えられる。

さて、ここまでで Fokker–Planck 方程式と等価な量子系を得たわけだが、この量子系は超対称量子力学と深く関係している。これを見るために  $h(x)$  を  $-h(x)$  に置き換えた Hamiltonian

$$H_- := \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dh}{dx} \right) \left( -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dh}{dx} \right) \quad (26)$$

を考えてみる。 $H_+$  と  $H_-$  は以下のように書くことができる。

$$H_+ := A^\dagger A, \quad H_- := AA^\dagger, \quad A = -i \left( \frac{d}{dx} + \frac{dh}{dx} \right). \quad (27)$$

注目すべきは、 $H_-$  がゼロモードを除いて、 $H_+$  と同じスペクトルをもつことである。実際、 $H_+$  の固有値  $E_n$  の固有ベクトル  $|E_n\rangle$  に対して、 $A|E_n\rangle$  は同じ固有値をもつ  $H_-$  の固有ベクトルになる：

$$H_- A|E_n\rangle = AA^\dagger A|E_n\rangle = AH_+|E_n\rangle = E_n A|E_n\rangle. \quad (28)$$

このような固有状態のペアができないのは  $A|E_n\rangle = 0$  の場合。すなわち  $A^\dagger A|E_n\rangle = H_+|E_n\rangle = 0$  の場合である。

$H_+$  と  $H_-$  は超対称パートナーと呼ばれ、超対称量子力学を用いることで整理される。まず、Hilbert 空間が bosonic な部分空間と fermionic な部分空間の直和として

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_F \quad (29)$$

と書かれているとしよう。波動関数は bosonic な成分と fermionic な成分によって

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_B(x) \\ \psi_F(x) \end{pmatrix} \quad (30)$$

と表される。ここで複素超電荷  $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$  を以下のように定義する。

$$\mathcal{Q} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2}A & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}^\dagger := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

これらは冪零性  $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}^{\dagger 2} = 0$  を満たす。また Hamiltonian を以下のように定義する。

$$H = \frac{1}{2} \{ \mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger \} = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} \quad (32)$$

Hamiltonian  $H$  によって定められる模型を Witten 模型と呼ぶ。また模型を定めるポテンシャル  $h(x)$  は超ポテンシャルと呼ばれる。

この模型がもつ超対称性は演算子の間の代数的な関係式としてまとめることができる。まず Hamiltonian は以下の交換関係を満たす。

$$[H, \mathcal{Q}] = [H, \mathcal{Q}^\dagger] = 0. \quad (33)$$

これらの式は  $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$  が  $H$  の固有値を変えないことを意味する。次に

$$(-1)^F := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

と定義する。この演算子は  $((-1)^F)^2 = 1$  および  $[H, (-1)^F] = 0$  を満たす。したがって任意のエネルギー固有状態は  $(-1)^F$  の固有値が  $+1$  の状態 (boson) と  $-1$  の状態 (fermion) に分かれる。また  $\{(-1)^F, Q\} = \{(-1)^F, Q^\dagger\} = 0$  から、 $Q, Q^\dagger$  は  $(-1)^F$  の固有値を反転する。以上で述べた演算子の間の関係式を超対称性関係と呼ぶ。改めてまとめると、以下ようになる。

$$Q^2 = Q^{\dagger 2} = 0 \quad (35)$$

$$\{Q, Q^\dagger\} = 2H \quad (36)$$

$$[H, Q] = [H, Q^\dagger] = 0 \quad (37)$$

$$((-1)^F)^2 = 1 \quad (38)$$

$$[H, (-1)^F] = 0 \quad (39)$$

$$\{(-1)^F, Q\} = \{(-1)^F, Q^\dagger\} = 0 \quad (40)$$

ただし  $Q, Q^\dagger, H, (-1)^F$  は独立なものではなく、

$$\frac{1}{2}[Q^\dagger, Q] = (-1)^F H \quad (41)$$

が成り立つ。また複素超電荷  $Q, Q^\dagger$  の代わりに実超電荷  $Q := \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + Q^\dagger)$  を用いることもできる。この場合、超対称性関係は

$$H = Q^2 \quad (42)$$

$$\{(-1)^F, Q\} = 0 \quad (43)$$

$$((-1)^F)^2 = 0 \quad (44)$$

となる。

bosonic な状態と fermionic な状態の間の対応は超対称性関係だけから導くことができる。まず  $((-1)^F)^2 = 0$ ,  $[H, (-1)^F] = 0$  から任意の固有状態は bosonic または fermionic である。エネルギー  $E > 0$  をもつ規格化された bosonic な固有状態  $|b_E\rangle$  に対し、

$$HQ|b_E\rangle = QH|b_E\rangle = EQ|b_E\rangle, \quad (45)$$

$$(-1)^F Q|b_E\rangle = -Q(-1)^F|b_E\rangle = -Q|b_E\rangle \quad (46)$$

より  $Q|b_E\rangle$  はエネルギー  $E$  の fermionic な固有状態である。また、この状態のノルムは

$$\begin{aligned} \langle b_E|Q^\dagger Q|b_E\rangle &= \frac{1}{2}\langle b_E|\{Q^\dagger, Q\}|b_E\rangle - \frac{1}{2}\langle b_E|[Q^\dagger, Q]|b_E\rangle \\ &= \langle b_E|H|b_E\rangle + \langle b_E|(-1)^F H|b_E\rangle \\ &= 2E \end{aligned} \quad (47)$$



で与えられる。したがって、

$$|f_E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E}} Q|b_E\rangle \quad (48)$$

とおける。同様に、規格化された fermionic な固有状態  $|f_E\rangle$  が与えられれば、

$$|b_E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E}} Q^\dagger |f_E\rangle \quad (49)$$

によって bosonic な固有状態が構成される。

## Witten 指数

Witten 指数を以下のように定義する。

$$\text{ind} := \dim \text{Ker } H_+ - \dim \text{Ker } H_- = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Ker } A^\dagger. \quad (50)$$

$H_+$  と  $H_-$  のスペクトルはゼロモードを除いて等しいという事実から、Witten 指数は以下のように定義することもできる。

$$\text{ind} = \text{Tr}(-1)^F. \quad (51)$$

ただし、この表示において単純に

$$\text{Tr}(-1)^F = \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (52)$$

とはできない。なぜならばそれぞれのブロックの 1 は無限次元の Hilbert 空間に作用する恒等演算子であり、指数の定義は  $\infty - \infty$  の形になっているからである。実際には、指数の定義は以下のように正則化 (熱核正則化) した形で理解するべきである。

$$\text{ind} = \text{Tr}[(-1)^F e^{-\beta H}] = \text{Tr} e^{-\beta H_+} - \text{Tr} e^{-\beta H_-}, \quad \beta > 0. \quad (53)$$

この  $\beta$  は Fokker-Planck 方程式における  $\beta$  とは全く別物なので注意。別の正則化として、固有値にカットオフ  $\Lambda$  を定めるというものもある。この場合、

$$\text{ind} = \sum_{\substack{\lambda_+ \in \text{Spec } H_+ \\ \lambda_+ \leq \Lambda}} 1 - \sum_{\substack{\lambda_- \in \text{Spec } H_- \\ \lambda_- \leq \Lambda}} 1 \quad (54)$$

となる。ただし、連続スペクトルがある場合には正則化に依存する補正項が入ることがあるため注意が必要である (付録を参照)。

次に Witten 指数の幾何学的解釈を与えよう。実は、Witten 指数は

$$\text{ind} = (h(x) \text{ の極小点の数}) - (h(x) \text{ の極大点の数}) \quad (55)$$

として計算できる。この等式の導出は後ほど。右辺は  $h(x)$  の連続的な変形に対して常に保たれるため、位相不変量と言える。

例えば  $h(x)$  が  $x \rightarrow \pm\infty$  で正の無限大に発散する場合を考えよう。この時ポテンシャル  $h(x)$  で指定される Fokker–Planck 方程式には一意な熱平衡状態 (= ゼロモード) が存在するが、 $-h(x)$  の下では粒子が  $x \rightarrow \pm\infty$  に逃げていくので熱平衡状態は存在しない。したがって Witten 指数は  $1 - 0 = 1$  になる。一方で  $h(x)$  の極小点の数は極大点の数より必ず 1 大きくなる。

また  $x \in S^1$  とすることもできる。この時  $h(x)$  が有限なポテンシャルならば、 $\pm h(x)$  に対して一意な熱平衡状態が存在する。よって Witten 指数は  $1 - 1 = 0$  である。一方  $h(x)$  の極大点の数と極小点の数は一致する。

## 調和振動子

具体例として、 $h(x) = x^2/2$  の場合を考えてみる。この時

$$A = -i \left( \frac{d}{dx} + \frac{dh}{dx} \right) = -i \left( \frac{d}{dx} + x \right) = -\sqrt{2} i a \quad (56)$$

である。ここで  $a$  は調和振動子の消滅演算子である。Hamiltonian は

$$H = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & A A^\dagger \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a^\dagger a & 0 \\ 0 & a a^\dagger \end{pmatrix} \quad (57)$$

となる。ゼロモードは bosonic なセクターのみに存在し、

$$\Psi(x) = e^{-x^2/2} |0\rangle \quad (58)$$

で与えられる。ここで  $|0\rangle$  は fermion に対する Fock 真空である。Witten 指数は

$$\text{ind} = \dim \text{Ker } a - \dim \text{Ker } a^\dagger = 1 - 0 = 1 \quad (59)$$

である。また  $h(x) = x^2/2$  の極小点は 1 個、極大点は 0 個であり、幾何学的な指数の定義 (55) が成り立っていることが分かる。

次に  $h(x) = -x^2/2$  の場合を考える。このとき

$$H = 2 \begin{pmatrix} a a^\dagger & 0 \\ 0 & a a^\dagger \end{pmatrix} \quad (60)$$

であり、先ほどとは逆で fermionic なセクターが以下のゼロモードをもつ。

$$\Psi(x) = e^{-x^2/2} \psi^\dagger |0\rangle \quad (61)$$

ただし  $\psi^\dagger$  は fermion の生成演算子である。Witten 指数は

$$\text{ind} = \dim \text{Ker } a^\dagger - \dim \text{Ker } a = 0 - 1 = -1 \quad (62)$$

となる。

### 3. Morse 理論

#### 微分形式の超対称量子力学による表現

この節ではより一般的な形で  $d$  次元 Riemann 多様体  $M$  上の超対称量子力学を考える。まず複素超電荷として、以下の演算子を考える。

$$\mathcal{Q} := \psi^{\dagger i} \left( p_i - i \frac{\partial h}{\partial x^i} \right), \quad \mathcal{Q}^\dagger := \psi^i \left( p_i^\dagger + i \frac{\partial h}{\partial x^i} \right). \quad (63)$$

$p_i$  は運動量演算子であり、交換関係

$$[p_i, f(x)] = -i \partial_i f(x) \quad (64)$$

に従う。一般の多様体上の量子力学では  $p_i^\dagger = p_i$  とはできないことに注意する。微分形式の文脈で外微分の随伴  $d^\dagger$  が計量  $g_{ij}$  およびその行列式  $\det g$  による寄与を含むことを思い出されよ。また  $\psi^i$  はフェルミオン演算子であり、

$$[p_i, \psi_j] = 0, \quad [p_i, \psi^{\dagger j}] = 0, \quad (65)$$

$$\{\psi_i, \psi_j\} = \{\psi^{\dagger i}, \psi^{\dagger j}\} = 0, \quad \{\psi^{\dagger i}, \psi^j\} = \delta_j^i \quad (66)$$

に従うとする。この定義には流儀がありそうで、 $[p_i, \psi^j] = 0, [p_i, \psi_j^\dagger] = 0$  としている文献もあった。微分形式との対応関係を尊重してこのような定義にしている。 $\mathcal{Q}$  の冪零性は以下のように確認される。

$$\mathcal{Q}^2 = \psi^{\dagger i} \psi^{\dagger j} \left( p_i - i \frac{\partial h}{\partial x^i} \right) \left( p_j - i \frac{\partial h}{\partial x^j} \right) = 0. \quad (67)$$

$\mathcal{Q}^\dagger$  についても同様。ここで、fermion の生成消滅演算子は形式的に

$$\psi^{\dagger j} = dx^j \wedge, \quad \psi_j = \iota_{\partial_j} \quad (68)$$

と置き換えることができる。このように見ると、波動関数と微分形式の間に

$$\Psi_{i_1 \dots i_p}(x) \psi^{\dagger i_1} \dots \psi^{\dagger i_p} |0\rangle \leftrightarrow \Psi_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (69)$$

という対応がつく。また内部積  $\iota_{\partial_j}$  は

$$\iota_{\partial_j}(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = \sum_n (-1)^{n-1} \delta_j^{i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_n}} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (70)$$

を線形に拡張して得られるが、これは  $\psi_j$  の作用に完全に対応している。したがって、fermion は微分形式の自由度を表しているとみなすことができ、 $n$ -fermion 状態は  $n$ -form に対応する。

## 共変微分

この節の内容は超対称量子力学の Hamilton 形式をすっきりまとめるためのものであるが、次節の Witten 指数の計算ではそこまで必要ではない。曲がった多様体上では偏微分に対応する演算子  $p_i$  は使いにくいいため、共変微分に対応する演算子

$$\pi_i := p_i + i\Gamma_{ij}^k \psi^{\dagger j} \psi_k = -i\nabla_i \quad (71)$$

を定義する。 $\Gamma_{ij}^k$  は Levi-Civita 接続

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \quad (72)$$

である。この演算子は

$$[\pi_i, \psi_j] = -i\Gamma_{ij}^k \psi_k, \quad [\pi_i, \psi^j] = i\Gamma_{ik}^j \psi^k, \quad (73)$$

$$[\pi_i, \psi_j^\dagger] = -i\Gamma_{ij}^k \psi_k^\dagger, \quad [\pi_i, \psi^{\dagger j}] = i\Gamma_{ik}^j \psi^{\dagger k}, \quad (74)$$

$$[\pi_i, \pi_j] = R_{ijkl} \psi^{\dagger k} \psi^l \quad (75)$$

を満たす。ここで  $R_{ijkl}$  は Riemann テンソル

$$R_{ijkl} := (\partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m + \Gamma_{ik}^n \Gamma_{jm}^k - \Gamma_{jk}^n \Gamma_{im}^k) g_{ml} \quad (76)$$

である。また  $\pi_i$  の共役は以下のように書かれる。

$$\pi_i^\dagger = \pi_i - i \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i \sqrt{\det g} = \pi_i - i\Gamma_{ij}^j. \quad (77)$$

特に  $g_{ij} = \delta_{ij}$  としたとき、 $\pi_i$  は Hermitian になる。超電荷  $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger$  を定義する際に、 $p_i$  の代わりに  $\pi_i$  を用いて

$$\mathcal{Q} := \psi^{\dagger i} \left( p_i - i \frac{\partial h}{\partial x^i} \right) = \psi^{\dagger i} \left( \pi_i - i \frac{\partial h}{\partial x^i} \right), \quad (78)$$

$$\mathcal{Q}^\dagger := \psi^i \left( p_i^\dagger + i \frac{\partial h}{\partial x^i} \right) = \psi^i \left( \pi_i + i \frac{\partial h}{\partial x^i} \right) \quad (79)$$

と表せる。 $\mathcal{Q}$  の表示は

$$\psi^{\dagger i} \pi_i = \psi^{\dagger i} (p_i + i \Gamma_{ij}^k \psi^{\dagger j} \psi_k) = \psi^{\dagger i} p_i \quad (80)$$

より分かる。 $\mathcal{Q}^\dagger$  の表示は

$$\psi^i \pi_i = \pi_i \psi^i - [\pi_i, \psi^i] = \pi_i \psi^i - i \Gamma_{ij}^i \psi^j = \pi_i^\dagger \psi^i \quad (81)$$

より分かる。Hamilton は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} 2H &= \{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^\dagger\} \\ &= \left\{ \psi^{\dagger i} \left( \pi_i - i \frac{\partial h}{\partial x^i} \right), \psi^j \left( \pi_j + i \frac{\partial h}{\partial x^j} \right) \right\} \\ &= \{\psi^{\dagger i} \pi_i, \psi^j \pi_j\} + \{\psi^{\dagger i}, \psi^j\} \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x^j} \\ &\quad + i \psi^{\dagger i} \left[ \pi_i, \psi^j \frac{\partial h}{\partial x^j} \right] - i \psi^j \left[ \pi_j, \psi^{\dagger i} \frac{\partial h}{\partial x^i} \right] \\ &= \Delta + g^{ij} \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x^j} + [\psi^{\dagger i}, \psi^j] \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial h}{\partial x^k} \right). \end{aligned} \quad (82)$$

ここで  $\Delta$  は以下のように成分表示される。

$$\begin{aligned} \Delta &:= \{d, d^\dagger\} = \{\psi^{\dagger i} \pi_i, \psi^j \pi_j\} \\ &= \psi^{\dagger i} [\pi_i, \psi^j] \pi_j + \psi^{\dagger i} \psi^j [\pi_i, \pi_j] + \{\psi^{\dagger i}, \psi^j\} \pi_j \pi_i - \psi^j [\psi^{\dagger i}, \pi_j] \pi_i \\ &= g^{ij} (\pi_i \pi_j + i \Gamma_{ij}^k \pi_k) + R_{ijkl} \psi^{\dagger i} \psi^j \psi^{\dagger k} \psi^l \end{aligned} \quad (83)$$

である。ただし公式

$$\{AB, CD\} = A[B, C]D + AC[B, D] + \{A, C\}DB - C[A, D]B \quad (84)$$

を用いた。さらに、等式  $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$  および  $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$  から

$$\begin{aligned} R_{ijkl} \psi^{\dagger i} \psi^{\dagger j} \psi^k \psi^l &= (-R_{iklj} - R_{iljk}) \psi^{\dagger i} \psi^{\dagger j} \psi^k \psi^l \\ &= (R_{ikjl} - R_{iljk}) \psi^{\dagger i} \psi^{\dagger j} \psi^k \psi^l \\ &= -2R_{ijkl} \psi^{\dagger i} \psi^j \psi^{\dagger k} \psi^l + 2R_{ikjl} g^{kj} \psi^{\dagger i} \psi^l \\ &= -2R_{ijkl} \psi^{\dagger i} \psi^j \psi^{\dagger k} \psi^l - 2R_{ij} \psi^{\dagger i} \psi^j \end{aligned} \quad (85)$$

となる。よって、

$$\Delta = g^{ij}(\pi_i \pi_j + i\Gamma_{ij}^k \pi_k) - R_{ij} \psi^{\dagger i} \psi^j - \frac{1}{2} R_{ijkl} \psi^{\dagger i} \psi^{\dagger j} \psi^k \psi^l \quad (86)$$

となる。Laplacian のこのような成分表示は微分形式の理論において Weitzenböck identity として知られている。

## Morse 理論

さて、Hamiltonian  $H = \frac{1}{2}\{Q, Q^\dagger\}$  で定められる超対称量子力学系に対し、Witten 指数を求めよう。 $(-1)^F$  は fermion 数が偶数個の状態に対して固有値  $+1$  を、奇数個の状態に対して固有値  $-1$  を与える演算子として定義される。よって Witten 指数は

$$\text{ind} = (\text{偶数 fermion のゼロモードの数}) - (\text{奇数 fermion のゼロモードの数}) \quad (87)$$

となる。超電荷  $Q, Q^\dagger$  は

$$Q = e^{-h}(-i\psi^{\dagger i} \partial_i) e^h = -ie^{-h} d e^h, \quad (88)$$

$$Q^\dagger = e^h(-i\psi^i \partial_i) e^{-h} = -ie^h d^\dagger e^{-h} \quad (89)$$

と書き直せる。考えている多様体  $M$  がコンパクトで  $h(x)$  が有限の場合、Witten 指数は  $h(x)$  の連続変形に対して不変なので、特に  $h(x) = 0$  の場合を考えることができる。このとき  $Q = d, Q^\dagger = d^\dagger, H = \frac{1}{2}\Delta$  であり、ゼロモードは調和形式である。したがって、Witten 指数は Euler 数になる。

$$\text{ind} = \text{Tr}(-1)^F = \sum_r (-1)^r b_r = \chi. \quad (90)$$

次に、Witten 指数の幾何学的解釈 (55) を導出しよう。多様体上に関数  $h(x)$  を考え、その極値から多様体の情報を引き出す枠組みは Morse 理論とよばれる。超対称量子力学によって Morse 理論は物理的考察から理解することができる。Witten 指数が位相不変量であることから、 $h(x)$  を  $h(x)/\hbar$  で置き換えて  $\hbar \rightarrow 0$  の極限を取ってよい。このとき  $\partial_i h(x) \neq 0$  であるような点においてポテンシャルが発散するため、ゼロモードは  $h(x)$  の臨界点付近に局在する。臨界点とは、 $h(x)$  が極値をとる点  $x$  のことである。臨界点  $x_0 \in M$  において Hessian  $\nabla_i \nabla_j h = \partial_i \partial_j h$  を対角化する座標をとると、

$$h(x) \approx \sum_i \frac{\lambda_i}{2} (x^i - x_0^i)^2 \quad (91)$$

と表せる。ここで  $\lambda_i$  は Hessian の固有値である。臨界点付近に局在するモードに対する Hamiltonian は

$$H \approx \sum_i \frac{1}{\hbar^2} \begin{pmatrix} A_i^\dagger A_i & 0 \\ 0 & A_i A_i^\dagger \end{pmatrix}, \quad A_i := -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} - i\lambda_i(x^i - x_0^i) \quad (92)$$

と近似できる。各座標軸に対応する項は調和振動子の超対称量子力学系であり、 $\lambda_i > 0$  の場合は bosonic なゼロモード

$$\exp\left(-\frac{\lambda_i}{2\hbar}(x^i - x_0^i)^2\right) |0\rangle, \quad (93)$$

$\lambda_i < 0$  の場合は fermionic なゼロモード

$$\exp\left(\frac{\lambda_i}{2\hbar}(x^i - x_0^i)^2\right) \psi^{\dagger i} |0\rangle \quad (94)$$

がある。Hessian の負の固有値が  $r$  個あるとき、その臨界点の Morse 指数は  $r$  であるという。臨界点  $x_0$  付近に存在するゼロモードは fermion 数が  $r$  となる以下のゼロモードをもつ。

$$\exp\left(-\sum_i \frac{|\lambda_i|}{2\hbar}(x^i - x_0^i)^2\right) \psi^{\dagger i_1} \dots \psi^{\dagger i_r} |0\rangle \quad (95)$$

ここで  $i_1, \dots, i_r$  は Hessian の負の固有値の方向を表す。ただし、トンネル効果によって複数のゼロモードが相互作用し、一般に準位の分裂が起こるため、これらのゼロモードは近似的なものである。Morse 指数が  $r$  であるような臨界点の数を  $m_r$  とすると、fermion 数が  $r$  の厳密なゼロモードの数は Betti 数  $b_r$  で与えられるので、

$$m_r \geq b_r \quad (96)$$

が成り立つ。これを弱い形の Morse の不等式と言う。しかし超対称性から、余分に数えられたゼロモードの数は bosonic なものと fermionic なもので一致するため、Witten 指数は近似的ゼロモードによって計算してよい。以上の議論をまとめると、多様体  $M$  上の関数  $h(x)$  に対し、Morse 指数が  $r$  であるような臨界点の数を  $m_r$  とすると、

$$\text{ind} = \sum_r (-1)^r m_r = \chi. \quad (97)$$

この式は Morse 理論の基本定理と呼ばれる。

## 4. Chern–Gauss–Bonnet の定理

ここまでで超対称量子力学と指数定理の関係を概観してきたが、超対称量子力学による記述は単に微分形式の理論を書き換えたに過ぎないと思われるかもしれない。しかし、この書き換えによって量子力学における様々な道具が使えるようになる。以下では超対称量子力学の経路積分表示によって Gauss–Bonnet の定理の  $2n$  次元多様体への拡張である Chern–Gauss–Bonnet の定理

$$\chi(M) = \int_M \text{eu}(TM) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_M \text{Pf}(\mathcal{R}) \quad (98)$$

を証明しよう。

### Lagrangian の導出

先ほどは Hamilton 形式での超対称量子力学を議論したが、経路積分のために Lagrange 形式を導こう。以下では  $h(x) = 0$  の場合のみを考える。すなわち  $\mathcal{Q} = \mathcal{d}$  の場合である。まず Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}g^{ij}(\pi_i\pi_j + i\Gamma_{ij}^k\pi_k) - \frac{1}{2}R_{ij}\psi^{\dagger i}\psi^j - \frac{1}{4}R_{ijkl}\psi^{\dagger i}\psi^{\dagger j}\psi^k\psi^l \quad (99)$$

と表されるのだった。Lagrangian を求める上で最も正統な方法は正準形式からはじめて完全系を挿入することで経路積分を導出し、そこから作用を読み取ることであるが、ここでは以下の Lagrangian を与えてしまうことにする。

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + ig^{ij}\psi^{*i}\frac{\nabla}{dt}\psi^j - \frac{1}{4}R_{ijkl}\psi^{*i}\psi^{*j}\psi^k\psi^l, \quad (100)$$

$$\frac{\nabla}{dt}\psi^i := \dot{\psi}^i + \dot{x}^k\Gamma_{kj}^i\psi^j. \quad (101)$$

この Lagrangian の導出ができなくて困っているところ。Ricci テンソルは一体どこに行ってしまったのか。この作用は以下の超対称性変換に対して不変である。

$$\delta x^i = \varepsilon^*\psi^i - \varepsilon\psi^{\dagger i} \quad (102)$$

$$\delta\psi^i = \varepsilon(-i\dot{x}^i + \Gamma_{jk}^i\psi^{\dagger j}\psi^k) \quad (103)$$

$$\delta\psi^{\dagger i} = \varepsilon^*(i\dot{x}^i + \Gamma_{jk}^i\psi^{\dagger j}\psi^k) \quad (104)$$



## 経路積分

気を取り直して Witten 指数を求めていこう。熱核正則化による形を経路積分を用いて表すと、

$$\mathrm{Tr}[(-1)^F e^{-\beta H}] = \int_{\mathrm{PBC}} \mathcal{D}x \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* e^{-S[x, \psi, \psi^*]}. \quad (105)$$

ここで Euclid 化した作用は

$$S = \int_0^\beta L dt, \quad (106)$$

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + i g_{ij} \psi^{*i} \frac{\nabla}{dt} \psi^j - \frac{1}{4} R_{ijkl} \psi^{*i} \psi^{*j} \psi^k \psi^l \quad (107)$$

である。Witten 指数は  $\beta$  によらないから  $\beta \rightarrow 0$  の極限を考えることにすると、 $\dot{x}, \dot{\psi}$  が定数でないような経路は積分に寄与しない。したがって、定数の経路  $x(t) = x_0, \psi(t) = \psi_0, \psi^*(t) = \psi_0^*$  に関して経路積分を行うと、

$$\begin{aligned} \mathrm{ind} &\propto \int_M \mathrm{dvol} \int d\psi_0 d\psi_0^* \exp\left(-\frac{1}{4} R_{ijkl} \psi_0^{*i} \psi_0^{*j} \psi_0^k \psi_0^l\right) \\ &= \int_M \mathrm{dvol} \frac{(-1)^n}{4^n n!} \varepsilon^{i_1 j_1 \dots i_n j_n} \varepsilon^{k_1 l_1 \dots k_n l_n} R_{i_1 j_1 k_1 l_1} \dots R_{i_n j_n k_n l_n} \\ &= \int_M \frac{(-1)^n}{2^n n!} \varepsilon^{i_1 j_1 \dots i_n j_n} \mathcal{R}_{i_1 j_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{R}_{i_n j_n} \\ &= \int_M \mathrm{Pf}(\mathcal{R}) \end{aligned} \quad (108)$$

となる。ここで  $\mathcal{R} := \frac{1}{2} R_{ijkl} dx^k \wedge dx^l$  である。また  $M$  の次元を  $2n$  とした。よって Chern-Gauss-Bonnet の定理が導かれるが、比例係数を決定する作業がまだ残っている。これは定数経路のまわりのゆらぎの寄与を計算することで実行される。まずゆらぎを周波数ごとに分解して

$$x^i(t) = x_0^i + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{f \neq 0} e^{2i\pi f t / \beta} x_f^i \quad (109)$$

$$\psi^i(t) = \psi_0^i + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{f \neq 0} e^{2i\pi f t / \beta} \psi_f^i \quad (110)$$

$$\psi^{*i}(t) = \psi_0^{*i} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{f \neq 0} e^{-2i\pi f t / \beta} \psi_f^{*i} \quad (111)$$

とおく。一般に  $x \in M$  をこのように Fourier 展開することはできないが、今は  $x_0^i$  まわりの微小なゆらぎを考えているため、このように展開してしまって良い。経路積分測度は

$$\prod_t \frac{d^{2n}x(t)}{(2\pi)^n} = \beta^n \frac{d^{2n}x_0}{(2\pi)^n} \prod_{f \neq 0} \frac{d^{2n}x_f}{(2\pi)^n}, \quad (112)$$

$$\prod_t d^{2n}\psi(t) d^{2n}\psi^*(t) = \frac{d^{2n}\psi_0 d^{2n}\psi_0^*}{\beta^{2n}} \prod_{f \neq 0} d^{2n}\psi_f d^{2n}\psi_f^* \quad (113)$$

となる。ここで空間の測度に  $1/(2\pi)^n$  の因子をつける理由については

$$\langle x(t + \delta t) | \exp\left(-\frac{p^2}{2m}\delta t\right) | x(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{m}{2}\dot{x}^2\delta t\right) \quad (114)$$

を思い出してほしい。注意として演算子としての反交換関係  $\{\psi^{\dagger i}, \psi^j\} = g^{ij}(x)$  から、fermion の測度に  $\det g$  による補正をいれる必要がある。ここでは  $g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$  とおくことで  $\det g = 1$  とする。すると bosonic な微小ゆらぎの作用は以下ようになる。

$$S_1 \approx \frac{1}{2} \int_0^\beta dt \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2} \sum_{f \neq 0} \left(\frac{2\pi f}{\beta}\right)^2 \delta_{ij} x_{-f}^i x_f^j. \quad (115)$$

経路積分を実行すると、

$$\int \prod_{f \neq 0} \frac{d^{2n}x_f}{(2\pi)^n} e^{-S_1[x]} = \prod_{f > 0} \left(\frac{\beta}{2\pi f}\right)^{2n}. \quad (116)$$

また fermionic な微小ゆらぎの作用は以下ようになる。

$$S_2 \approx \int_0^\beta dt \delta_{ij} \psi^{*i} i \frac{d}{dt} \psi^j = - \sum_{f \neq 0} \frac{2\pi f}{\beta} \delta_{ij} \psi_f^{*i} \psi_f^j. \quad (117)$$

よって経路積分すると、

$$\int \prod_{f \neq 0} d^{2n}\psi_f d^{2n}\psi_f^* e^{-S_2[\psi^*, \psi]} = \prod_{f \neq 0} \left(\frac{2\pi f}{\beta}\right)^n = \prod_{f > 0} \left(\frac{2\pi f}{\beta}\right)^{2n}. \quad (118)$$

したがってゆらぎの寄与は boson と fermion で相殺する。以上により、

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \int_M \frac{d\text{vol}}{(2\pi)^n} \int \frac{d^{2n}\psi_0 d^{2n}\psi_0^*}{\beta^n} \exp\left(-\frac{\beta}{4} R_{ijkl} \psi_0^{*i} \psi_0^{*j} \psi_0^k \psi_0^l\right). \\ &= \int_M \frac{d\text{vol}}{(2\pi)^n} \int d^{2n}\psi_0 d^{2n}\psi_0^* \exp\left(-\frac{1}{4} R_{ijkl} \psi_0^{*i} \psi_0^{*j} \psi_0^k \psi_0^l\right). \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_M \text{Pf}(\mathcal{R}) = \int_M \text{eu}(M). \end{aligned} \quad (119)$$

## 指数定理の証明の枠組み

Chern–Gauss–Bonnet の定理の証明で、超対称量子力学による指数定理の証明の枠組みが掴めたのではなかろうか。証明を振り返ってみると、まず作用素  $\Delta$  の指数が求めたいとして、それを熱核正則化した Witten 指数  $\text{Tr}[(-1)^F e^{-\beta \Delta}]$  に置き換える。指数の定義からするとゼロモードのみが生き残る  $\beta \rightarrow \infty$  の極限が自然であろうが、 $\beta \rightarrow 0$  の極限で指数を求める。Tr の展開の仕方としては、座標による展開

$$\text{ind} = \int \text{dvol} \langle x | (-1)^F e^{-\beta H} | x \rangle \quad (120)$$

とエネルギーによる展開

$$\text{ind} = \sum_n (-1)^{F_n} e^{-\beta E_n} \quad (121)$$

がある。前者の求め方が我々が用いたものであり、後者の求め方は熱核の方法と言われる。被積分量  $\langle x | (-1)^F e^{-\beta H} | x \rangle$  を求めるためには経路積分と鞍点近似を用いる。Hirzebruch 符号数定理やスピン複体に対する Atiyah–Singer 指数定理の証明の場合、 $(-1)^F$  をカイリティに読み替えるが、大体は同じである。

## 付録 A. 連続スペクトルをもつ Witten 模型

この節の内容は Hirayama(1983) による。1 次元の Witten 模型

$$H = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & A A^\dagger \end{pmatrix}, \quad A = -i \frac{d}{dx} - i \frac{dh}{dx} \quad (122)$$

を考える。ただし、 $h(x)$  は

$$h'(-\infty) = \lambda, \quad h'(+\infty) = \mu \quad (123)$$

を満たすとする。超対称電荷は

$$\mathcal{Q} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} A & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}^\dagger := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (124)$$

で与えられる。Hamiltonian のポテンシャル項を

$$V_\pm(x) := h'(x)^2 \mp h''(x) \quad (125)$$

とおくと、

$$V_\pm(+\infty) = \mu^2, \quad V_\pm(-\infty) = \lambda^2 \quad (126)$$

となる。量子力学系としては散乱解をもつ問題を考えることになる。

Witten 指数は  $\text{ind} = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Ker } A^\dagger$  である。これは  $\lambda$  と  $\mu$  の符号によって分類できる。ただし  $\lambda, \mu$  のいずれかがゼロになる場合は考えない。 $\lambda < 0, \mu > 0$  の場合、ポテンシャル  $h(x)$  に対する Fokker–Planck 方程式が熱平衡状態をもち、 $-h(x)$  は熱平衡状態をもたないので、 $\text{ind} = +1$  である。同様に、 $\lambda > 0, \mu < 0$  ならば  $\text{ind} = -1$  である。 $\lambda, \mu$  の符号が同じならば  $\text{ind} = 0$  である。以上をまとめて、

$$\text{ind} = \frac{1}{2}(\text{sign } \mu - \text{sign } \lambda) \quad (127)$$

と書ける。ここで、以下の量を計算してみよう。

$$J(z) := \text{Tr} \left[ (-1)^F \frac{z}{H+z} \right] \quad (128)$$

これは  $J(0) = \text{Tr}(-1)^F$  の正則化とみなせるから、Witten 指数と一致しそうに思われるが、連続スペクトルの寄与を考慮する必要がある。まず、 $H$  のエネルギー  $E$  の固有状態を

$$\begin{pmatrix} b_E(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ f_E(x) \end{pmatrix} \quad (129)$$

とおく。超対称性により、

$$f_E(x) = \frac{1}{\sqrt{E}} A b_E(x) \quad (130)$$

とおける。この等式および  $A^\dagger A b_E(x) = E b_E(x)$  を用いると、

$$\begin{aligned} & |b_E(x)|^2 - |f_E(x)|^2 \\ &= \frac{1}{2E} (H_+ b_E(x))^* b_E(x) + \frac{1}{2E} b_E^*(x) H_+ b_E(x) - \frac{1}{E} |A b_E(x)|^2 \\ &= \frac{1}{2E} (-b_E''^* + h'^2 b_E^* - h'' b_E^*) b_E + \frac{1}{2E} b_E^* (-b_E'' + h'^2 b_E - h'' b_E) \\ &\quad - \frac{1}{E} |b_E' + h' b_E|^2 \\ &= -\frac{1}{2E} (b_E^* b_E'' + 2b_E'^* b_E' + b_E b_E'') - \frac{1}{E} (h'' |b_E|^2 + h' b_E'^* b_E + h' b_E^* b_E') \\ &= -\frac{1}{E} \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} |b_E|^2 + \frac{d}{dx} (h' |b_E|^2) \right]. \end{aligned} \quad (131)$$

すると連続スペクトルの寄与は、

$$\begin{aligned}
J_C(z) &:= J(z) - \text{ind} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{E>0} \frac{z}{E+z} (|b_E(x)|^2 - |f_E(x)|^2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{E>0} \frac{-z}{E(E+z)} \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} |b_E|^2 + \frac{d}{dx} (h' |b_E|^2) \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{E>0} \frac{-z}{E(E+z)} [h' |b_E|^2]_{x=-\infty}^{+\infty}. \tag{132}
\end{aligned}$$

これを具体的に計算しよう。 $\mu > \lambda$  として一般性を失わない。エネルギーが  $E \geq \mu^2$  を満たすとき、固有状態は以下のように表される。

$$b_E^{(1)}(x) = \begin{cases} e^{ik_1(x)} + R^{(1)} e^{-ik_1 x} & x \sim -\infty \\ T^{(1)}(E) e^{ik_2 x} & x \sim +\infty \end{cases} \tag{133}$$

$$b_E^{(2)}(x) = \begin{cases} e^{-ik_2(x)} + R^{(2)} e^{-ik_2 x} & x \sim +\infty \\ T^{(2)}(E) e^{-ik_1 x} & x \sim -\infty \end{cases}. \tag{134}$$

ここで

$$k_1 = \sqrt{E - \lambda^2}, \quad k_2 = \sqrt{E - \mu^2} \tag{135}$$

である。 $x \rightarrow \pm\infty$  でのそれぞれの固有状態の  $J_C(z)$  への寄与を求めると、以下のようになる。

$$\sum_{E \geq \mu^2} \frac{-z}{E(E+z)} h'(+\infty) |b_E^{(1)}(+\infty)|^2 = \int_0^\infty \frac{dk_1}{2\pi} \frac{-\mu z \theta(E - \mu^2)}{E(E+z)} |T^{(1)}|^2 \tag{136}$$

$$\sum_{E \geq \mu^2} \frac{-z}{E(E+z)} h'(+\infty) |b_E^{(2)}(+\infty)|^2 = \int_0^\infty \frac{dk_2}{2\pi} \frac{-\mu z}{E(E+z)} (1 + |R^{(2)}|^2) \tag{137}$$

$$\sum_{E \geq \mu^2} \frac{-z}{E(E+z)} h'(-\infty) |b_E^{(1)}(-\infty)|^2 = \int_0^\infty \frac{dk_1}{2\pi} \frac{-\lambda z \theta(E - \mu^2)}{E(E+z)} (1 + |R^{(1)}|^2) \tag{138}$$

$$\sum_{E \geq \mu^2} \frac{-z}{E(E+z)} h'(-\infty) |b_E^{(2)}(-\infty)|^2 = \int_0^\infty \frac{dk_2}{2\pi} \frac{-\lambda z}{E(E+z)} |T^{(2)}|^2. \tag{139}$$

ここで  $|b_E^{(i)}(x)|^2$  の中で振動する項は積分によって消えるため無視した。1次元の散乱理論により成り立つ関係式

$$k_2 |T^{(1)}(E)|^2 = k_1 |T^{(2)}(E)|^2 \tag{140}$$

$$|R^{(1)}(E)|^2 + |T^{(2)}(E)|^2 = |R^{(2)}(E)|^2 + |T^{(1)}(E)|^2 = 1 \tag{141}$$

および  $k_1 dk_1 = k_2 dk_2$  を用いると、

$$dk_1 |T^{(1)}|^2 + dk_2 (1 + |R^{(1)}|^2) = dk_2 (1 + |R^{(2)}|^2 + |T^{(2)}|^2) = 2 dk_2, \quad (142)$$

$$dk_2 |T^{(2)}|^2 + dk_1 (1 + |R^{(1)}|^2) = dk_1 (1 + |R^{(1)}|^2 + |T^{(1)}|^2) = 2 dk_1. \quad (143)$$

よって以下のようにまとめられる。

$$\int_0^\infty \frac{dk_2}{2\pi} \frac{-2\mu z}{E(E+z)} - \int_0^\infty \frac{dk_1}{2\pi} \frac{-2\lambda z \theta(E - \mu^2)}{E(E+z)}. \quad (144)$$

次に  $\lambda^2 \leq E < \mu^2$  のとき、波動関数は

$$|b_E^{(i)}(-\infty)|^2 = 2, \quad |b_E^{(i)}(+\infty)|^2 = 0 \quad (145)$$

を満たす。したがって、

$$\sum_{i=1,2} \sum_{\lambda^2 \leq E < \mu^2} \frac{-z}{E(E+z)} \{h'(x) |b_E^{(i)}(x)|^2\}_{x=-\infty}^{+\infty} = \int_0^\infty \frac{dk_1}{2\pi} \frac{-2\lambda z \theta(\mu^2 - E)}{E(E+z)} \quad (146)$$

となる。以上の寄与を全て足しあげると、

$$\begin{aligned} J_C(z) &= -\frac{z}{\pi} \int_0^\infty dk \left[ \frac{\mu}{(k^2 + \mu^2 + z)(k^2 + \mu^2)} - \frac{\lambda}{(k^2 + \lambda^2 + z)(k^2 + \lambda^2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + z}} - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + z}} \right) - \frac{1}{2} (\text{sign } \mu - \text{sign } \lambda) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + z}} - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + z}} \right) - \text{ind}. \end{aligned} \quad (147)$$

途中計算で留数積分

$$\begin{aligned} -\frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{\mu}{(k^2 + \mu^2 + z)(k^2 + \mu^2)} &= -\frac{z}{\pi} \left( \frac{2\pi i \mu}{2i \sqrt{\mu^2 + z} (-z)} + \frac{2\pi i \mu}{2i \mu z} \right) \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + z}} - \text{sign } \mu \end{aligned} \quad (148)$$

を用いた。したがって、

$$J(z) = \text{ind} + J_C(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + z}} - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + z}} \right). \quad (149)$$

となる。

## 付録 B. Fokker–Planck 方程式の導出

Langevin 方程式

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dh}{dx} + \eta(t) \quad (150)$$

から Fokker–Planck 方程式を導く。ただし  $\eta$  に関する期待値は

$$\langle X \rangle_\eta = \frac{1}{\mathcal{Z}_\eta} \int \mathcal{D}\eta X \exp \left( -\frac{\beta}{4} \int dt \eta(t)^2 \right), \quad (151)$$

$$\mathcal{Z}_\eta = \int \mathcal{D}\eta \exp \left( -\frac{\beta}{4} \int dt \eta(t)^2 \right). \quad (152)$$

によって与える。まず座標変換  $x' = f(x)$  に対して測度  $P(x)dx$  の変換は

$$P'(x')dx' = P(f^{-1}(x')) \frac{df^{-1}(x')}{dx'} dx' \quad (153)$$

で与えられることに注意する。これを決定論的な微小時間発展  $x' = x + dx$  に適用すると、

$$\begin{aligned} P(x, t + dt)dx &= P(x - dx, t) \frac{d(x - dx)}{dx} dx \\ &= P(x - dx, t) \left( 1 + \frac{d^2 h}{dx^2} dt \right) dx \end{aligned} \quad (154)$$

となる。実際にはランダム変数  $\eta(t)$  に対して平均を取るので、

$$P(x, t + dt) = \langle P(x - dx, t) \rangle_{\eta(t)} \left( 1 + \frac{d^2 h}{dx^2} dt \right) \quad (155)$$

である。ここで

$$\langle P(x - dx, t) \rangle_{\eta(t)} := \sqrt{\frac{\beta dt}{4\pi}} \int d\eta(t) e^{-\beta dt \eta(t)^2/4} P(x - dx, t) \quad (156)$$

とした。

$$\begin{aligned} \langle (\eta(t)dt)^n \rangle_{\eta(t)} &:= \sqrt{\frac{\beta dt}{4\pi}} \int d\eta(t) (\eta(t)dt)^n e^{-\beta dt \eta(t)^2/4} \\ &= \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 2dt/\beta & (n = 2) \\ O(dt^2) & (n = 1, n > 2) \end{cases} \end{aligned} \quad (157)$$

を用いると、 $P(x - dx, t)$  を  $\eta(t)dt$  のべきで展開して 0 次、2 次の寄与を取り出すことで  $P(x, t + dt)$  が得られる。よって

$$\left\langle P\left(x - \left(-\frac{dh}{dx} + \eta(t)\right) dt, t\right) \right\rangle_{\eta(t)} = P(x, t) + dt \frac{dh}{dx} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dt}{\beta} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + O(dt^2). \quad (158)$$

以上の結果から Fokker–Planck 方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{d^2 h}{dx^2} P + \frac{dh}{dx} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dh}{dx} \right) P(x, t). \end{aligned} \quad (159)$$