0.1 自由場の理論

抽象的な議論ばかりで具体的な計算に欠けるので、自由場と摂動論の計算を扱う。相関関数の母関数である生成汎函数を以下のように導入する。

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S[\phi,J]} = \int \mathcal{D}\phi\, \exp\Bigl(-S[\phi] + \int \mathrm{d}^d x\, J(x)\phi(x)\Bigr) \tag{0.1}$$

$J(x)$ を源 (source) と呼ぶ。すると n 点関数は、

$$\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle = \frac{1}{Z[0]}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J]\Bigr|_{J=0} \tag{0.2}$$

と表すことができる。回りくどく感じるかもしれないが、作用が場の 2 次形式で表される場合にはこれが具体的に計算できてしまう。このとき作用は以下のような 2 次形式で表される。

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d x\, \mathrm{d}^d y\, \phi(x) K(x,y) \phi(y) \tag{0.3}$$

$K(x,y)$ は x, y の交換について対称な超関数であり、例えば

$$K(x,y) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y_\mu}\delta^d(x-y) + m^2 \delta(x-y) \tag{0.4}$$

の場合は

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d x\, \mathrm{d}^d y\, \phi(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y_\mu}\delta^d(x-y) + m^2\delta(x-y)\right)\phi(y) \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d x\, (\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) + m^2\phi(x)^2) \end{aligned} \tag{0.5}$$

となる。生成汎函数は源を加えて、

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi\, \exp\Bigl(-\int \mathrm{d}^d x\, \mathrm{d}^d y\, \phi(x)K(x,y)\phi(y) + \int \mathrm{d}^d x\, J(x)\phi(x)\Bigr) \tag{0.6}$$

となる。これを計算するにあたって、いきなり連続的な場合を考えるのではなく離散的な場合を考える。すなわち、$N \times N$ 対称行列 K_{ij} によって

$$Z[J] = \int \prod_i \mathrm{d}\phi_i \exp\Bigl(-\frac{1}{2}\phi_i K_{ij}\phi_j + J_i\phi_i\Bigr) \tag{0.7}$$

と表してやる。これは単なる Gauss 積分であり、簡単に解ける。まず平方完成によって

$$-\frac{1}{2}\phi_i K_{ij}\phi_j + J_i\phi_i = -\frac{1}{2}(\phi_i + J_k K^{-1}_{ki})K_{ij}(\phi_j + K^{-1}_{jl}J_l) + \frac{1}{2}J_i K^{-1}_{ij} J_j \tag{0.8}$$

と変形する。K_{ij} が対称であることから $J_k K^{-1}_{ki} = K^{-1}_{ik} J_k$ が成り立つので、$\tilde{\phi}_i = \phi_i + J_k K^{-1}_{ki}$ とおくことで、

$$Z[J] = \exp\Bigl(\frac{1}{2}J_i K^{-1}_{ij} J_j\Bigr)\int \prod_i \mathrm{d}\phi_i \exp\Bigl(-\frac{1}{2}\tilde{\phi}_i K_{ij}\tilde{\phi}_j\Bigr) =: \mathcal{N}\exp\Bigl(\frac{1}{2}J_i K^{-1}_{ij} J_j\Bigr) \tag{0.9}$$

と書ける。ここで、J に依存しない積分は全て定数 $\mathcal{N}$ としてまとめてしまった。さらに、分配関数は定数倍して定義し直せるので、

$$Z[J] = \exp\left(\frac{1}{2} J_i K_{ij}^{-1} J_j\right) \tag{0.10}$$

と書ける。この式を、連続極限でも信用することにする。すなわち、

$$Z[J] = \exp\left(\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^d x\, \mathrm{d}^d y\, J(x) K^{-1}(x, y) J(y)\right) \tag{0.11}$$

とする。$K^{-1}(x, y)$ は $K(x, y)$ に対する Green 関数であり、

$$\int \mathrm{d}^d y\, K^{-1}(x, y) K(y, z) = \delta(x - z) \tag{0.12}$$

となるような関数である。あとで零質量の自由場を扱うが、その場合は

$$K(x, y) = \partial_\mu \partial^\mu \delta(x - y) \tag{0.13}$$

であり、Green 関数は

$$K^{-1}(x, y) = \frac{C}{|x - y|^{d-2}}, \quad C \coloneqq \frac{1}{(d - 2) S_d} \tag{0.14}$$

となる。ここで S_d は $d - 1$ 次元超球面の面積であり、具体的には

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \tag{0.15}$$

である。

生成汎函数が求まったので、あとはこれをひたすら汎函数微分していけば、相関関数が求まる。まず、$Z[J]$ を $J(x)$ で汎函数微分すると、

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J] = \int \mathrm{d}^d y\, K^{-1}(x, y) J(y) Z[J] \tag{0.16}$$

となる。したがって $J(x) = 0$ とおくと、1 点関数は

$$\langle \phi(x) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J] \bigg|_{J=0} = 0 \tag{0.17}$$

となる。さらに $J(y)$ で汎函数微分すると、

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} Z[J] = K^{-1}(x, y) Z[J] + \mathcal{O}(J^2) \tag{0.18}$$

となるので、2 点関数は

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} Z[J] \bigg|_{J=0} = K^{-1}(x, y) \tag{0.19}$$

となる。

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_{2n+1}) \rangle = 0 \tag{0.20}$$

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_{2n}) \rangle = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \left\langle \phi(x_{\sigma(1)}) \phi(x_{\sigma(2)}) \right\rangle \cdots \left\langle \phi(x_{\sigma(2n-1)}) \phi(x_{\sigma(2n)}) \right\rangle \tag{0.21}$$

0.2 摂動論

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}^d x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi(x)^4 \right) \tag{0.22}$$

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi\, F[\phi] e^{-S[\phi]} &= \int \mathcal{D}\phi\, F[\phi] e^{-S_0[\phi] - S_{\mathrm{int}}[\phi]} \\ &= \int \mathcal{D}\phi\, F[\phi] \left(1 + \frac{1}{4!} \lambda \int \mathrm{d}^d x\, \phi(x)^4 + \cdots \right) e^{-S_0[\phi]} \end{aligned} \tag{0.23}$$

0.3 正規積

場の量子論において、同一点にある 2 つの場の積は発散する。そこで自由場の正規積を以下のように定義する。

$$: A(x) B(y) : \; = A(x) B(y) - \langle A(x) B(y) \rangle \tag{0.24}$$

これは発散を差し引く形になっており、$x \to y$ で収束する。また $n+1$ 個の演算子の正規積は再帰的に

$$: A_1 \cdots A_{n+1} : \; = \; : A_1 \cdots A_n : A_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle A_{n+1} A_i \rangle \; : A_1 \cdots \cancel{A_i} \cdots A_n : \tag{0.25}$$

と定義する。ここで $: A(x) : \; = A(x)$ とする。たとえば

$$\begin{aligned} : A_1 A_2 A_3 : \; &= \; : A_1 A_2 : A_3 - \langle A_1 A_3 \rangle : A_2 : - \langle A_2 A_3 \rangle : A_1 : \\ &= A_1 A_2 A_3 - \langle A_1 A_2 \rangle A_3 - \langle A_2 A_3 \rangle A_1 - \langle A_3 A_1 \rangle A_2 \end{aligned} \tag{0.26}$$

である。通常の場の積を正規積によって表すこともできる。

$$\begin{aligned} A_1 A_2 A_3 A_4 = \; &: A_1 A_2 A_3 A_4 : + \frac{1}{4} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \left\langle A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \right\rangle : A_{\sigma(3)} A_{\sigma(4)} : \\ &+ \frac{1}{8} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \left\langle A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \right\rangle \left\langle A_{\sigma(3)} A_{\sigma(4)} \right\rangle \end{aligned} \tag{0.27}$$

係数の 1/4, 1/8 は重複して数えている寄与を除くための因子である。両辺の期待値をとると、(??) から $\langle : A_1 \cdots A_4 : \rangle = 0$ が分かる。同様の議論によって一般に、

$$\begin{aligned} A_1 \cdots A_n = \; &: A_1 \cdots A_n : \\ &+ \frac{1}{2(n-2)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left\langle A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \right\rangle : A_{\sigma(3)} \cdots A_{\sigma(n)} : \\ &+ \frac{1}{4(n-4)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left\langle A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \right\rangle \left\langle A_{\sigma(3)} A_{\sigma(4)} \right\rangle : A_{\sigma(5)} \cdots A_{\sigma(n)} : \\ &+ \cdots \end{aligned} \tag{0.28}$$

と書ける。ここから (??) により $\langle:A_1\cdots A_n:\rangle=0$ となる。この式も Wick の定理と呼ばれる。

() において、$A_{m+1},...,A_n$ を $B_1,...,B_l$ と書くことにする。右辺にある A どうしの縮約と B どうしの縮約を全て左辺に移項すると、左辺は $:A_1\cdots A_m::B_1\cdots B_l:$ と表せる。また右辺には A と B の間の縮約だけが残り、

$$\begin{aligned}&:A_1\cdots A_m::B_1\cdots B_l:\\=&:A_1\cdots A_mB_1\cdots B_l:\\&+(\text{係数})\times\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_l}\left\langle A_{\sigma(1)}B_{\sigma'(1)}\right\rangle:\text{残り}:\\&+(\text{係数})\times\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_l}\left\langle A_{\sigma(1)}B_{\sigma'(1)}\right\rangle\left\langle A_{\sigma(2)}B_{\sigma'(2)}\right\rangle:\text{残り}:\\&+\cdots\end{aligned}\tag{0.29}$$

と書ける。ここで (係数) は重複して数えている寄与を除くための因子であり、具体的に書いてもあまり意味がないので省略した。

正規積について複雑な式を並べてきたが、これらは単純な母関数表示にまとめることができる。まず、以下の等式が成り立つ。

$$:e^A::e^B:=e^{\langle AB\rangle}:e^{A+B}:\tag{0.30}$$

これは両辺を A,B について Taylor 展開した結果が (0.29) で添字の違いを無視した場合の式に一致することから分かる。この式を 2 回使うと、

$$\begin{aligned}:e^A::e^B::e^C:&=e^{\langle AB\rangle}:e^{A+B}::e^C:\\&=e^{\langle AB\rangle+\langle BC\rangle+\langle CA\rangle}:e^{A+B+C}:\end{aligned}\tag{0.31}$$

が得られる。同様の議論を繰り返して

$$\prod_i:e^{A_i}:=e^{\sum_{i<j}\langle A_iA_j\rangle}:e^{\sum_iA_i}:\tag{0.32}$$

を得る。これは Wick の定理の母関数表示となっている。

0.4 演算子積展開

$$\begin{aligned}\phi(x)\phi(0)&=\frac{C}{|x|^{d-2}}+:\phi(x)\phi(0):\\&=\frac{C}{|x|^{d-2}}1+\phi^2(0)+x\cdot\partial\phi(0)\phi(0)+\frac{1}{2}x^\mu x^\nu\partial_\mu\partial_\nu\phi(0)\phi(0)+\cdots\end{aligned}\tag{0.33}$$

$$\begin{aligned}\phi^2(x)\phi^2(0)&=\frac{2C^2}{|x|^{2(d-2)}}+\frac{4C}{|x|^{d-2}}:\phi(x)\phi(0):+:\phi(x)^2\phi(0)^2:\\&=\frac{2C^2}{|x|^{2(d-2)}}1+\frac{4C}{|x|^{d-2}}\phi^2(0)+\phi^4(0)+\cdots\end{aligned}\tag{0.34}$$

$$\phi^4(x)\phi^2(0) = \frac{12C^2}{|x|^{2(d-2)}}\phi^2(0) + \frac{8C}{|x|^{(d-2)}}\phi^4(0) + \cdots \tag{0.35}$$

$$\phi^4(x)\phi^4(0) = \frac{24C^4}{|x|^{4(d-2)}}1 + \frac{96C^3}{|x|^{3(d-2)}}\phi^2(0) + \frac{72C^2}{|x|^{2(d-2)}}\phi^4(0) + \cdots \tag{0.36}$$