1 共形ブートストラップ

この章では共形ブートストラップについて概略を説明する。技術的な部分については[**simmonsduffin2016tasi**],[**Nakayama_2019**]を参照してほしい。

この方法はモデルの具体的な Hamiltonian を指定せずに、演算子積展開から導かれる相関関数の自己無撞着性によって、共形データを決定する試みである。

1.1 交差対称性 (crossing symmetry)

相関関数を演算子積展開によって計算する時、演算子積展開を適用する順序には任意性がある。異なる順序の計算は全て同じ結果を与えなければならない。この条件を**交差対称性 (crossing symmetry)** と呼ぶ。

まず、3 点関数の交差対称性

$$\mathcal{O}_1 \cdot (\mathcal{O}_2 \cdot \mathcal{O}_3) = \mathcal{O}_1 \cdot (\mathcal{O}_3 \cdot \mathcal{O}_2) = \mathcal{O}_2 \cdot (\mathcal{O}_1 \cdot \mathcal{O}_3) = \cdots \tag{1.1}$$

から、演算子積展開の係数 f_{ijk} に対して、

$$f_{ijk} = f_{ikj} = f_{jik} \tag{1.2}$$

が成り立つ。つまり f_{ijk} は完全対称である。これは $\mathcal{O}_i$ が期待値の中で可換なことから自明な関係式である。

次に、4 点関数の交差対称性を考える。3 点関数と 4 点関数についての交差対称性から、任意の n 点関数についての交差対称性が導かれるので、これ以上の条件は必要ない。簡単のために同一スカラープライマリー場の 4 点関数 $\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\rangle$ を考え、以下の 2 つの順序で計算する。

$$\langle (\phi(x_1) \cdot \phi(x_2)) \cdot (\phi(x_3) \cdot \phi(x_4)) \rangle = \langle (\phi(x_1) \cdot \phi(x_4)) \cdot (\phi(x_2) \cdot \phi(x_3)) \rangle \tag{1.3}$$

共形ブロックを用いると、4 点関数は

$$\langle (\phi(x_1) \cdot \phi(x_2)) \cdot (\phi(x_3) \cdot \phi(x_4)) \rangle = \frac{g(u,v)}{x_{12}^{2\Delta_\phi} x_{34}^{2\Delta_\phi}}, \quad g(u,v) = \sum_{\mathcal{O}} f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2 g_{\Delta_\mathcal{O}, l_\mathcal{O}}(u,v) \tag{1.4}$$

と書けるので、交差対称性から

$$\frac{g(u,v)}{x_{12}^{2\Delta_\phi} x_{34}^{2\Delta_\phi}} = \frac{g(v,u)}{x_{23}^{2\Delta_\phi} x_{14}^{2\Delta_\phi}} \tag{1.5}$$

が得られる。この式は以下のようなダイアグラムで表される。

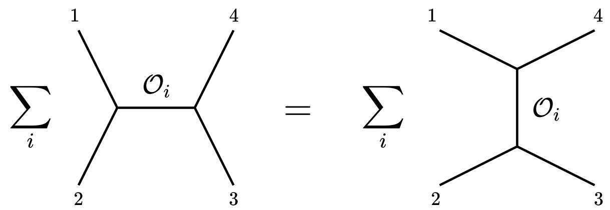

図 1: 交差対称性を表すダイアグラム。左は $(\phi(x_1)\cdot\phi(x_2))\cdot(\phi(x_3)\cdot\phi(x_4))$ の順序で、右は $(\phi(x_1)\cdot\phi(x_4))\cdot(\phi(x_2)\cdot\phi(x_3))$ の順序で演算子積展開を適用することを表す。

また複比

$$u = z\bar{z} = \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2}, \quad v = (1-z)(1-\bar{z}) = \frac{x_{23}^2 x_{14}^2}{x_{13}^2 x_{24}^2} \tag{1.6}$$

を用いると、

$$v^{\Delta_\phi} g(u,v) = u^{\Delta_\phi} g(v,u) \tag{1.7}$$

が成り立つ。これを共形ブロックを使って書くと、

$$\boxed{\sum_{\mathcal{O}} f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2 F_{\Delta_{\mathcal{O}},l_{\mathcal{O}}}^{\Delta_\phi}(u,v) = 0, \quad F_{\Delta,l}^{\Delta_\phi}(u,v) := \left(v^{\Delta_\phi} g_{\Delta,l}(u,v) - u^{\Delta_\phi} g_{\Delta,l}(v,u)\right)} \tag{1.8}$$

となる。この式を**交差方程式 (crossing equation)** と呼ぶ。4 点関数の交差対称性はもう一つあり、x_1 と x_2 を入れ替えることで

$$g(u,v) = g(u/v, 1/v) \tag{1.9}$$

が成り立つ。ただしこれは演算子積展開の順序交換 $\mathcal{O}_1\cdot\mathcal{O}_2 \leftrightarrow \mathcal{O}_2\cdot\mathcal{O}_1$ についての対称性であり、自明な関係式である。任意の置換に対する交差対称性は以上の 2 つの関係式から構成できる。

1.2 共形データに対する制限

(**??**) は 2 変数の関数空間における無限次元の拘束条件となっている。解析的に (**??**) から情報を引き出す試みもあるが、この節では厳密に解くことを諦め、不等式として共形データに対する制限を求めることにする。

まず、$f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2 \geq 0$ に注目する。[*1] (**??**) は

$$\sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l} \vec{F}_{\Delta,l}^{\Delta_\phi} = 0, \quad p_{\Delta,l} \geq 0 \tag{1.11}$$

[*1] これを示すために実時間のシリンダー時空上での 3 点関数を考える。space-like に離れた 3 点に対し、演算子が可換であることを用いると、

$$\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\mathcal{O}^{\mu_1\cdots\mu_l}(x_3)|0\rangle^* = \langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\mathcal{O}^{\mu_1\cdots\mu_l}(x_3)|0\rangle \tag{1.10}$$

となる。したがって $f_{\phi_1\phi_2\mathcal{O}}^* = f_{\phi_1\phi_2\mathcal{O}}$ が言える。ただし場の演算子が Hermite 演算子であることを仮定した。

という形で書ける。ここで $F^{\Delta_\phi}_{\Delta_\mathcal{O},l_\mathcal{O}}(u,v)$ を u,v についての関数空間におけるベクトルとみなし、$\vec{F}^{\Delta_\phi}_{\Delta_\mathcal{O},l_\mathcal{O}}$ と書いた。これは無限次元のベクトルだが、有限次元の部分空間に射映しても、以下の議論は問題なく成り立つ。

次に、演算子積展開に現れる Δ, l を仮定する。つまり、$f^2_{\phi\phi\mathcal{O}} > 0$ となる $\mathcal{O}$ の共形次元およびスピンを仮定する。このような Δ, l に対し線型汎函数 α で

$$\alpha\left(\vec{F}^{\Delta_\phi}_{\Delta,l}\right) \geq 0 \tag{1.12}$$

となるものがあったとしよう。ただし、左辺が正になるような Δ, l が少なくとも 1 つ存在するとする。このとき、

$$\sum_{\Delta,l} p_{\Delta,l}\alpha\left(\vec{F}^{\Delta_\phi}_{\Delta,l}\right) > 0 \tag{1.13}$$

が成り立つ。これは (??) と矛盾するので、仮定が排除される。

[**simmonsduffin2016tasi**] にある具体例を紹介しよう。2 次元の共形場理論で、共形次元が $\Delta_\phi = 1/8$ となるスカラープライマリー場 ϕ を有する理論を考える。$\vec{F}$ を以下の写像によって 2 次元の部分空間に射映する。

$$\vec{v}(F) = \left(H\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right) - H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right), H\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right) - H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.14}$$

ここで、

$$H(u,v) = \frac{F(u,v)}{u^{\Delta_\phi} - v^{\Delta_\phi}} \tag{1.15}$$

である。図??は、ありうる全ての l, Δ に対し、$\vec{v}(F^{\Delta_\phi}_{\Delta,l})$ をプロットしたものである。まず恒等演算子に対し、$F^{\Delta_\phi}_{0,0}(u,v) = u^{\Delta_\phi} - v^{\Delta_\phi}$ となることから、$\vec{v}(F^{\Delta_\phi}_{0,0}) = (0,0)$ となる。l が奇数となる演算子はスカラー演算子の 4 点関数の計算では現れないので無視している。また $l \to \infty$ としたとき、軌道は図の y 軸に近づいていくことが読み取れる。

2 次元空間を原点を通る直線で 2 つに分けた時、演算子積展開に現れる全ての演算子が片側に分布してしまうと、ベクトル $\vec{u}$ が存在して

$$\alpha(F^{\Delta_\phi}_{\Delta,l}) \coloneqq \vec{u} \cdot \vec{v}(F^{\Delta_\phi}_{\Delta,l}) > 0 \tag{1.16}$$

となってしまう。このとき交差対称性を満たすことはできない。ここでスピン 0 の演算子に注目すると、交差対称性を満たすためには $\Delta \in [0.161, 1.04]$ となるような演算子が演算子積展開に現れなければならないことが分かる。

この制限がどこまで強いものなのかを、厳密解と比較して考えてみる。2 次元 Ising 模型は実スカラー場 σ をもち、その共形次元は $\Delta_\sigma = 1/8$ である。$\sigma \times \sigma$ の演算子積展開に現れるもっとも次元の低いスカラー場はエネルギー演算子 ε であり、その共形次元は $\Delta_\varepsilon = 1$ である。つまり、$\Delta_{\mathrm{scalar}} \leq 1.04$ は実際の理論に対して 4% 程度の精度で上限を与えていることが分かる。

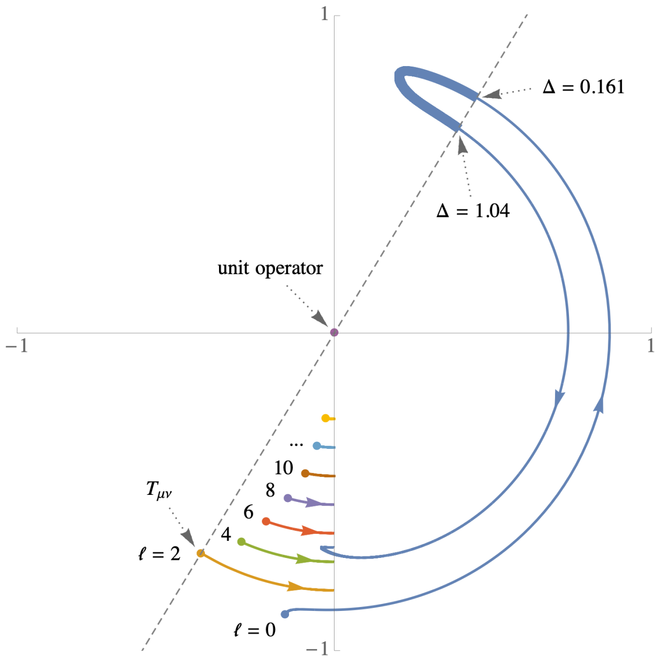

図 2: [**simmonsduffin2016tasi**] より引用。それぞれの軌跡はスピン l の演算子に対し、Δ を $\Delta_{\text{min}} = l + d - 2 = l$ から始めて連続的に大きくしていった場合の $\vec{v}(F^{\Delta_\phi}_{\Delta,l})$ を表す。

1.3 3 次元 Ising 模型への適用

いよいよ 3 次元 Ising モデルへの適用を考えよう。我々はまず、$\mathbb{Z}_2$ 変換に対して $\phi \to -\phi$ となるようなスカラー場 ϕ を考える。演算子積展開 $\phi \times \phi$ の中で、最も次元の小さいスカラー場の次元を Δ_0 とする。は $\mathbb{Z}_2$ 対称だから、ϕ は現れない。

$$\alpha(F) = \sum_{m+n \leq \Lambda} a_{mn} \partial_z^m \partial_{\bar{z}}^n F(z, \bar{z}) \Big|_{z=\bar{z}=\frac{1}{2}} \tag{1.17}$$