1 演算子積展開

この章では**演算子積展開 (operator product expansion, OPE)** を導入する。これは相関関数を計算するための便利な道具であるとともに、理論を特徴づけるデータとしての役割をもつ。

1.1 演算子積展開の導出

演算子積展開の発想は、電磁気学における多重極展開に近いところがある。空間的に分布している電荷を遠くから見た際に、それを 1 点にある電荷、電気双極子、電気四重極子、... の足し合わせとして表現することができる。同様に、原点付近に分布する局所演算子の積 $\mathcal{O}_{i_1}(x_1)\cdots\mathcal{O}_{i_n}(x_n)$ を考えると、これは原点の演算子の足し合わせによって、

$$\mathcal{O}_{i_1}(x_1)\cdots\mathcal{O}_{i_n}(x_n)=\sum_i C_i\mathcal{O}_i(0) \tag{1.1}$$

と表せるだろう。以下でこれをもう少し具体的に構成する。次の図は議論を要約した概念図である。

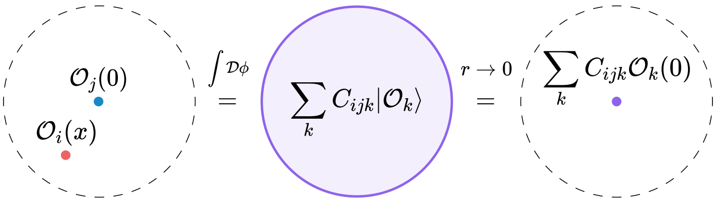

図 1: 演算子積展開

局所演算子の積 $\mathcal{O}_i(x)\mathcal{O}_j(0)$ が与えられたとして、状態・演算子対応から状態 $\mathcal{O}_i(x)|\mathcal{O}_j\rangle$ が得られる。これを共形代数の規約表現に分解し、プライマリー状態とそのディセンダントに関する和として表すと、

$$|\mathcal{O}_i(x)\mathcal{O}_j(0)\rangle=\mathcal{O}_i(x)|\mathcal{O}_j\rangle=\sum_{k:\mathrm{primary}} C_{ijk}(x,P)|\mathcal{O}_k\rangle \tag{1.2}$$

と表せる。$C_{ijk}(x,P)$ は P^μ に関して多項式である。状態・演算子対応から、これは演算子についての等式として、

$$\mathcal{O}_i(x)\mathcal{O}_j(0)=\sum_{k:\mathrm{primary}} C_{ijk}(x,\partial)\mathcal{O}_k(0) \tag{1.3}$$

と表せ、演算子積展開が導かれる。一般の場の理論では演算子積展開の収束性は保証されていないが、共形場理論では半径 $|x|$ の中に他の演算子が挿入されていない場合は収束する。簡単な例として、$\mathcal{O}_j(0)=1$ の場合は

$$\mathcal{O}_i(x)\cdot 1=\mathrm{e}^{x\cdot\partial}\mathcal{O}_i(0) \tag{1.4}$$

となるので、$C_{i1i}(x,\partial) = \mathrm{e}^{x\cdot\partial}$ が分かる。

(1.3) を繰り返し用いることで、N 点の演算子の積を 1 点の演算子の和に置き換えることができる。つまり、N 点関数を 1 点関数の和として表すことができる。ここで 1 点関数は

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle = \begin{cases} 1 & (\mathcal{O} = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{1.5}$$

であるので、[*1] 演算子積展開の 1 に比例する部分が相関関数を与える。したがって演算子積展開が分かっていれば、共形場理論における任意の相関関数が計算可能である。

演算子積展開において、どこを動径量子化の原点にするかは恣意性がある。異なる原点を選んだ場合、異なる展開係数が現れる。

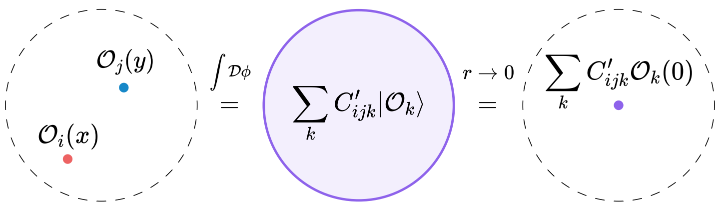

図 2: 異なる原点に対する演算子積展開

1.2　共形不変性との整合性

共形不変性を課すことで、演算子積展開の係数がどのように制限を受けるかをみる。このためには共形不変性のもとでの相関関数と、演算子積展開で計算した相関関数を比較すればよい。

2 点関数は、

$$\big\langle \mathcal{O}_i(x)\mathcal{O}_j(0) \big\rangle = C_{ij1}(x,\partial)1 = \frac{C_{ij}\delta_{\Delta_i\Delta_j}}{|x|^{2\Delta_i}} \tag{1.6}$$

と書ける。したがって、$C_{ij1}(x)$ は 2 点関数そのものであり、その x 依存性は共形次元が与えられていれば定数 C_{ij} を除いて決定される。

次に、3 点関数は演算子積展開によって

$$\big\langle \mathcal{O}_i(x_1)\mathcal{O}_j(x_2)\mathcal{O}_k(x_3) \big\rangle = \sum_{k'} C_{ijk'}(x_{12},\partial_2)\,\langle \mathcal{O}_{k'}(x_2)\mathcal{O}_k(x_3) \rangle \tag{1.7}$$

と書ける。$\langle \mathcal{O}_{k'}(x_2)\mathcal{O}_k(x_3) \rangle = \delta_{kk'}x_{23}^{-2\Delta_k}$ となる基底を選択すると、

$$\frac{f_{ijk}}{x_{12}^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}x_{23}^{\Delta_j+\Delta_k-\Delta_i}x_{31}^{\Delta_k+\Delta_i-\Delta_j}} = C_{ijk}(x_{12},\partial_2)x_{23}^{-2\Delta_k} \tag{1.8}$$

[*1] 共形次元 $\Delta \neq 0$ をもつ演算子の一点関数は並進対称性から値が不変である一方で、スケール変換によって値が変わることから、必ずゼロになる。一方 $\Delta = 0$ の演算子 $\phi(x)$ に対し相関関数を計算すると x に依存しないので、これは恒等演算子に比例する。

となる。この式から $C_{ijk}(x_{12},\partial_2)$ は定数 f_{ijk} を除いて完全に決定される。ここでは簡単のため $\Delta_i=\Delta_j=\Delta_\phi,\Delta_k=\Delta$ の場合を考える。$x_{12}=x,x_{23}=y$ と書くと、

$$f_{ijk}|x|^{\Delta-2\Delta_\phi}|y|^{-\Delta}|x-y|^{-\Delta}=C_{ijk}(x,\partial_y)y^{-2\Delta} \tag{1.9}$$

となる。左辺を $x/|y|$ によって展開し、右辺と比較することで

$$C_{ijk}(x,\partial)=f_{ijk}|x|^{\Delta-2\Delta_\phi}\left(1+\frac{1}{2}x\cdot\partial+\alpha x^\mu x^\nu\partial_\mu\partial_\nu+\beta x^2\partial^2+\cdots\right) \tag{1.10}$$

と書けることが分かる。α,β は定数である。[*2] したがって、演算子積展開の係数は $C_{ijk}(x,\partial)=f_{ijk}C(x,\partial)$ のように、モデルに依存する f_{ijk} と共形不変性のみから決まる $C(x,\partial)$ に分けることができる。

以上の議論から、理論に現れる演算子の共形次元 Δ_i と 3 点関数の係数 f_{ijk} から、任意の相関関数を構成できることが分かる。これをもって、Δ_i と f_{ijk} を共形場理論を指定する**共形データ**と言う。

1.3 共形ブロック

スカラープライマリー演算子の 4 点関数について考える。共形不変性から

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\rangle=\frac{g(u,v)}{x_{12}^{2\Delta_\phi}x_{34}^{2\Delta_\phi}} \tag{1.12}$$

と書ける。u,v は複比である。一方 $\phi(x_1)\cdot\phi(x_2),\phi(x_3)\cdot\phi(x_4)$ に演算子積展開を適用すると、

$$\begin{aligned}\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\rangle&=\sum_{\mathcal{O},\mathcal{O}'}f_{\phi\phi\mathcal{O}}f_{\phi\phi\mathcal{O}'}C_a(x_{12},\partial_2)C_b(x_{34},\partial_4)\left\langle\mathcal{O}^a(x_2)\mathcal{O}'^b(x_4)\right\rangle\\&=\sum_{\mathcal{O}}f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2C_{12a}(x_{12},\partial_2)C_b(x_{34},\partial_4)\frac{I^{ab}}{x_{24}^{2\Delta_\mathcal{O}}}\\&=:\frac{\sum_\mathcal{O}f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2g_{\Delta_\mathcal{O},l_\mathcal{O}}(u,v)}{x_{12}^{2\Delta_\phi}x_{34}^{2\Delta_\phi}}\end{aligned} \tag{1.13}$$

となる。ここで最後の式では (1.12) に合わせるために、$g_{\Delta_\mathcal{O},l_\mathcal{O}}(u,v)$ を定義した。具体的には

$$g_{\Delta,l}(u,v)=x_{12}^{2\Delta_\phi}x_{34}^{2\Delta_\phi}C_a(x_{12},\partial_2)C_b(x_{34},\partial_4)\frac{I^{ab}}{x_{24}^{2\Delta}} \tag{1.14}$$

である。$g_{\Delta,l}(u,v)$ を**共形ブロック**と呼ぶ。$\mathcal{O}$ がスカラーの場合、$x_{12},x_{34}\to 0$ としたときの最低次の近似で

$$x_{12}^{2\Delta_\phi}x_{34}^{2\Delta_\phi}C(x_{12},\partial_2)C(x_{34},\partial_4)\frac{1}{x_{24}^{2\Delta}}=\frac{x_{12}^\Delta x_{34}^\Delta}{x_{24}^{2\Delta}}+\cdots=u^{\Delta/2}(1+\cdots) \tag{1.15}$$

[*2] 少し計算すると、以下の値が得られる。

$$\alpha=\frac{\Delta+2}{8(\Delta+1)},\quad \beta=-\frac{\Delta}{16(\Delta+1-d/2)(\Delta+1)} \tag{1.11}$$

と書ける。高次の項まで具体的に計算するのは大変だが、共形ブロックは演算子積展開の係数に依存せず、**共形不変性だけで決まる量**である。4 点関数の係数 $g(u,v)$ は共形ブロックによって以下のように表せる。

$$g(u,v)=\sum_{\mathcal{O}} f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2 g_{\Delta_{\mathcal{O}},l_{\mathcal{O}}}(u,v) \tag{1.16}$$

これを共形ブロック展開という。この時点では共形ブロックが u,v に依存することは明らかでないが、次のように表示すると明らかである。

$$\frac{f_{\phi\phi\mathcal{O}}^2}{x_{12}^{2\Delta_\phi}x_{34}^{2\Delta_\phi}} g_{\Delta_{\mathcal{O}},l_{\mathcal{O}}}=\sum_n \langle\phi(x_3)\phi(x_4)|\mathcal{O},n\rangle\langle\mathcal{O},n|\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle \tag{1.17}$$

ここで、$|x_{3,4}|\geq|x_{1,2}|$ を仮定している。また $|\mathcal{O},n\rangle$ は $\mathcal{O}$ のディセンダントを規格直交化した基底であり、$\sum_n|\mathcal{O},n\rangle\langle\mathcal{O},n|$ は $\mathcal{O}$ から生成される共形族への射映演算子を表す。射映演算子は共形変換の全ての生成子と交換し、右辺は 4 点関数と同様の変換性を示すため、共形ブロックは u,v のみに依存すると分かる。

1.4 共形 Casimir 演算子による計算

この節では、共形ブロックを求める具体的な方法について説明する。ただし伝えたいのは共形ブロックが求められるという事実であり、方法そのものではない。共形ブロックを求める方法はいくつかあるが、ここでは共形 Casimir 演算子による方法を紹介する。他にも数値的に効率よく共形ブロックを求める方法として、漸化関係式を使うものがある。詳細は [1] を参照してほしい。

共形 Casimir 演算子は、共形次元 Δ、スピン l の状態に対して以下の固有値を持つ。

$$\mathcal{C}|\mathcal{O}\rangle=-\lambda_{\Delta,l}|\mathcal{O}\rangle,\quad \lambda_{\Delta,l}=\Delta(\Delta-d)+l(l+d-2) \tag{1.18}$$

これを $|\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle\coloneqq\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle$ に作用させると、

$$\mathcal{C}|\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle=\mathcal{D}_{1,2}|\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle,\quad \mathcal{D}_{1,2}\coloneqq-\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{ab,1}+\mathcal{L}_{ab,2})(\mathcal{L}^{ab,1}+\mathcal{L}^{ab,2}) \tag{1.19}$$

となる。したがって、4 点関数に対し、

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_{1,2}\left(\sum_n\langle\phi(x_3)\phi(x_4)|\mathcal{O},n\rangle\langle\mathcal{O},n|\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle\right)\\&=\sum_n\langle\phi(x_3)\phi(x_4)|\mathcal{O},n\rangle\langle\mathcal{O},n|\mathcal{C}|\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle\\&=\lambda_{\Delta_{\mathcal{O}},l_{\mathcal{O}}}\sum_n\langle\phi(x_3)\phi(x_4)|\mathcal{O},n\rangle\langle\mathcal{O},n|\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle\end{aligned} \tag{1.20}$$

となる。$\mathcal{D}_{1,2}$ を複比 u,v についての微分演算子 $\mathcal{D}$ に直せば、共形ブロックについての微分方程式

$$\mathcal{D}g_{\Delta,l}(u,v)=\lambda_{\Delta,l}g_{\Delta,l}(u,v) \tag{1.21}$$

が得られる。$\mathcal{D}$ は

$$u = z\bar{z}, \quad v = (1-z)(1-\bar{z}) \tag{1.22}$$

で定められる z 座標を用いて、以下のように表される [2]。

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= 2(z^2(1-z)\partial_z^2 - z^2\partial_z^2) + 2(\bar{z}^2(1-\bar{z})\partial_{\bar{z}}^2 - \bar{z}^2\partial_{\bar{z}}) \\ &\quad + 2(d-2)\frac{z\bar{z}}{z-\bar{z}}((1-z)\partial_z - (1-\bar{z})\partial_{\bar{z}})\end{aligned} \tag{1.23}$$

2 次元と 4 次元の場合は、Gauss の超幾何関数を使った解が知られている。3 次元の場合は l が小さい場合の解しか知られていない。ただしこの場合にも級数展開や漸化関係式を用いる方法は有効である。