Verlinde 公式の証明

政岡凜太郎

2025 年 5 月 20 日

1　OPE とフュージョン

2　トーラス上の CFT

トーラス上の CFT における基本的な知識を復習する。トーラスは複素平面 $\mathbb{C}$ に以下の同一視を入れることで得られる。

$$z \sim z+1, \quad z \sim z+\tau \tag{1}$$

ここで $\tau \in \mathbb{C}$ はモジュラーパラメーターと呼ばれる。格子 Λ を $\Lambda \coloneqq \{n+m\tau \mid n,m \in \mathbb{Z}\}$ によって定義すると、このトーラスは $\mathbb{C}/\Lambda$ と書くことができる。ここで、Λ を不変に保つような τ の変換をモジュラー変換という。具体的には以下の 1 次分数変換がモジュラー変換の一般形である。

$$\tau \mapsto \frac{a+b\tau}{c+d\tau}, \quad ad-bc=1. \tag{2}$$

モジュラー変換のなす群をモジュラー群と呼ぶ。モジュラー群は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$ に同型である。この群は以下の 2 つの元から生成される。

$$T : \tau \mapsto \tau+1, \quad S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}. \tag{3}$$

トーラス上の CFT の分配関数は

$$Z(\tau) = \mathrm{Tr}(q^{L_0-c/24}\bar{q}^{\bar{L}_0-c/24}), \quad q = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} \tag{4}$$

である。プライマリー場 i から生成される共形族への射影を Π_i とおくと、指標は

$$\chi_i(q) \coloneqq \mathrm{Tr}(\Pi_i q^{L_0-c/24}), \quad q = e^{2\pi i\tau} \tag{5}$$

と定義される。ここでここで Tr は正則部分の Hilbert 空間についてのものである。すると分配関数は

$$Z(\tau) = \sum_{i,j} \mathcal{M}_{ij}\chi_i(q)\bar{\chi}_j(\bar{q}) \tag{6}$$

と表すことができる。ここで $\mathcal{M}_{ij}$ は CFT に存在する共形ウェイトが $(h_i, \bar{h}_j)$ となるようなプライマリー場の個数を表す。

分配関数はモジュラー変換に対して不変である。すなわち

$$Z(\tau) = Z(\tau+1) = Z\left(-\frac{1}{\tau}\right) \tag{7}$$

が成り立つ。では指標についてはどうだろう。T 変換については指標の変換性は簡単に求まる。具体的には、

$$\chi_i(q) \mapsto \mathrm{Tr}(\Pi_i e^{2\pi \mathrm{i}(\tau+1)(L_0-c/24)}) = e^{2\pi \mathrm{i}(h_i-c/24)}\chi_i(q) \tag{8}$$

となる。次に、S 変換についてだが、以下の事実を用いよう。

補題 2.1.

$\{f_i(z)\}_{i=1}^N$, $\{f'_i(z)\}_{i=1}^N$, $\{g_i(z)\}_{i=1}^N$, $\{g'_i(z)\}_{i=1}^N$ を線形独立な正則関数の組とする。これらが

$$\sum_{i=1}^N f_i(z)\bar{f}'_i(\bar{z}) = \sum_{i=1}^M g_i(z)\bar{g}'_i(\bar{z}) \tag{9}$$

を満たすならば、$f_i(z) = \sum_j M_{ij} g_j(z)$, $\bar{f}'_i(\bar{z}) = \sum_j M'_{ij}\bar{g}'_i(\bar{z})$ と表せる。ここで M_{ij}, M'_{ij} は可逆な行列である。

証明　(9) を微分していくと、

$$\sum_{i=1}^N f_i^{(n)}(z)\bar{f}'_i(\bar{z}) = \sum_{i=1}^M g_i^{(n)}(z)\bar{g}'_i(\bar{z}) \tag{10}$$

を得る。よって、Wronskian を $W^f_{ni}(z) = f_i^{(n)}(z)$, $W^g_{ni}(z) = g_i^{(n)}(z)$ によって定義すると、

$$W^f(z)\vec{f}'(\bar{z}) = W^g(z)\vec{g}'(\bar{z}). \tag{11}$$

ここで $\vec{f}', \vec{g}'$ は $\bar{f}'_i, \bar{g}'_i$ を成分にもつベクトルである。$\{f_i(z)\}_{i=1}^N$ の線形独立性から $\det W^f(z_0) \neq 0$ となる z_0 が存在するので、$\vec{f}'(\bar{z}) = (W^f)^{-1}(z_0)W^g(z_0)\vec{g}'(\bar{z}) =: M'\vec{g}'$ と書ける。同様に $\det W^g(z_1) \neq 0$ となる z_1 も存在するので、$\vec{g}'(\bar{z}) = (W^g)^{-1}(z_1)W^f(z_1)\vec{f}'(\bar{z}) = (M')^{-1}\vec{f}'(\bar{z})$ となる。したがって線形変換 M' の可逆性が分かる。$\vec{f}, \vec{g}$ についても同様。 □

この補題を用いると、分配関数のモジュラー不変性

$$Z(\tau) = \sum_{i,j}\mathcal{M}_{i,j}\chi_i(q)\overline{\chi_j(q)} = \sum_{i,j}\mathcal{M}_{i,j}\chi_i(\tilde{q})\overline{\chi_j(\tilde{q})} = Z\left(-\frac{1}{\tau}\right), \quad \tilde{q} = e^{-2\pi \mathrm{i}/\tau} \tag{12}$$

から、指標の S 変換による変換性を

$$\chi_i(\tilde{q}) = \sum_j S_{ij}\chi_j(q), \quad \tilde{q} = e^{-2\pi i/\tau} \tag{13}$$

のように線形変換として書くことができる。この S_{ij} をモジュラー S 行列と呼ぶ。

3　Verlinde 公式

Verlinde はフュージョン係数 N_{ij}^k とモジュラー S 行列の間に成り立つ以下の驚くべき関係式を予想した。

定理 3.1. Verlinde 公式

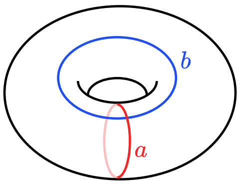
$$N_{ij}^k = \sum_l \frac{S_{il}S_{jl}(S^{-1})_{kl}}{S_{0l}} \tag{14}$$

この公式にはいくつかの証明があるようだが、Verlinde の原論文の議論に沿った証明を紹介する。[1)] 記号は Yellow book に従う。

まず指標 χ_j に対し、トーラス上の 2 点にそれぞれプライマリー場 $\phi_i(z)$ とその共役 $\phi_{i^*}(w)$ を挿入することができる。適切に規格化をし、$z \to w$ とすれば、もとの指標が再現される:

$$\chi_j = \lim_{z\to w}(z-w)^{2h_i}\mathcal{F}_j^{i,i^*}(z-w). \tag{15}$$

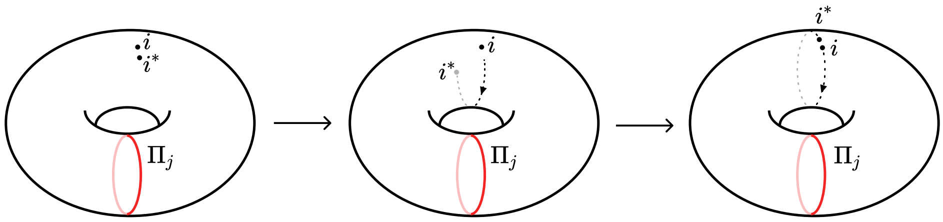
トーラスの非自明な 2 つのサイクルをそれぞれ a (空間方向), b(時間方向) と書く。



χ_i に対して $\phi_i(z), \phi_{i^*}(w)$ を挿入したあと, $\phi_{i^*}(w)$ を非自明なサイクルに沿って連続的に動かしていき、一周してから $\phi_i(z), \phi_{i^*}(w)$ を接近させて対消滅させる、という操作を考える。ここで $\phi_{i^*}(w)$ を連続的に動かす、というのは $\mathcal{F}_j^{i,i^*}(z-w)$ を w について解析接続することを指す。この操作を $\phi_i(\mathsf{a})$ または $\phi_i(\mathsf{b})$ という記号で表そう。これは場のように書いているが、実際には指標がなす空間に作用する線形変換である。

$\phi_i(\mathsf{a})$ の方は簡単である。指標 χ_j について、射影 Π_j は a に沿って挿入されていることから、挿入した場を射影 Π_j に触れずに a に沿って動かすことができる。

1)　Verlinde の原論文では (14) の左辺がフュージョン係数として満たすべき性質のいくつかを満たすことを示しているが、それがフュージョン係数に完全に一致することは示していない。Verlinde 公式を実際に証明したのは Moore–Seiberg である。



したがって $\phi_i(\mathsf{a})$ の操作によって Π_j に影響が及ぶことがないため、$\phi_i(\mathsf{a})$ は指標 χ_i が張る 1 次元空間に作用する。すなわち定数 $\gamma_i^{(j)}$ によって

$$\phi_i(\mathsf{a})\chi_j = \gamma_i^{(j)}\chi_j \tag{16}$$

と表せる。

問題となるのは $\phi_i(\mathsf{b})$ の方である。この場合 $\phi_{i^*}(w)$ を動かしていくと射影 Π_j と衝突するため、フュージョンによって他の指標 χ_k が現れることが予想される。結論から述べると、なんと厳密に

$$\phi_i(\mathsf{b})\chi_j = \sum_k N_{ij}^k \chi_k \tag{17}$$

となる。まずこの式を証明できれば、Verlinde 公式が従うことを示す。$\phi_i(\mathsf{a})$ と $\phi_i(\mathsf{b})$ はモジュラー変換でつながるため、

$$\phi_i(\mathsf{b}) = S\phi_i(\mathsf{a})S^{-1} \tag{18}$$

が成り立つ。$\phi_i(\mathsf{a})$ が対角行列であったことを思い出すとこの式は $\phi_i(b)$ がモジュラー S 行列によって同時対角化されることを意味している。(17) を認めれば、このことはフュージョン係数 N_{ij}^k が S によって対角化されることを意味する:

$$N_{ij}^k = \sum_l S_{il}\gamma_j^{(l)}(S^{-1})_{kl}. \tag{19}$$

ここで $N_{0j}^k = \delta_j^k$ を代入すると、

$$\delta_j^k = \sum_l S_{0l}\gamma_j^{(l)}(S^{-1})_{kl}. \tag{20}$$

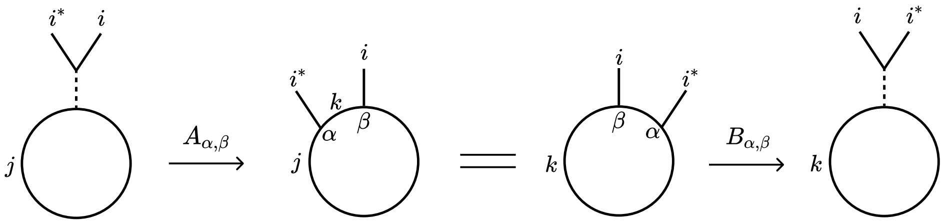
両辺に右から $\sum_k S_{kl}$ を掛けると、

$$S_{jl} = S_{0l}\gamma_j^{(l)}. \tag{21}$$

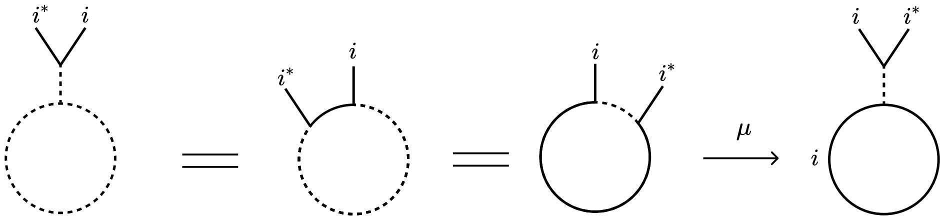
よって、Verlinde 公式が従う:

$$N_{ij}^k = \sum_l \frac{S_{il}S_{jl}(S^{-1})_{kl}}{S_{0l}} \tag{22}$$

さて、問題の式 (17) を示そう。まず $\phi_i(\mathsf{b})$ は以下のようなダイアグラムによって表すことができる。



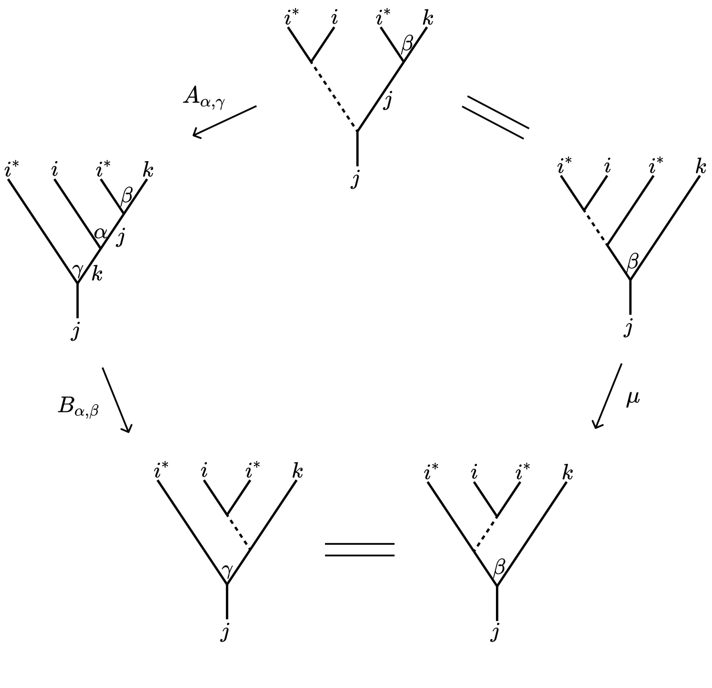
ここで $A_{\alpha,\beta}, B_{\alpha,\beta}$ は適切な F 行列によって記述されるべきものだが、添字をたくさん書くのが面倒なのでこのように書いている。また添字に関しての和は省いている。ただし、これが $\phi_i(\mathsf{b})$ を表すのではなく、$\phi_i(\mathsf{b})$ の定数倍を表している。規格化定数を決定するために、$j = 0$ とする。するとダイアグラムは



となる。μ も F 行列から定義されるが、中間チャネルが全て真空なため、結局定数になる。この操作は $\mu\phi_i(b)$ に等しいから、

$$\phi_i(\mathsf{b})\chi_j = \frac{1}{\mu}\sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}B_{\alpha,\beta}\chi_j \tag{23}$$

を得る。さらに、以下の pentagon equation を考える。



すると

$$\sum_{\alpha,\gamma} A_{\alpha,\gamma} B_{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha} A_{\alpha,\beta} B_{\alpha,\beta} = \mu. \tag{24}$$

ここで、$\beta = \gamma$ となることを用いた。$\beta = 1, \ldots, N_{ij}^k$ について和をとると、

$$\sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta} B_{\alpha,\beta} = \mu N_{ij}^k. \tag{25}$$

この式を (23) に代入することで、(17) が示される。