14.6 Non-abelian quantum Hall states

エニオンの位置の交換は組み紐の群の表現として表せる。今までは abelian な表現を考えてきたが、以降は non-abelian な表現に対応するエニオンを考える。

有効理論としては non-abelian なゲージ場に対する Chern-Simons 理論が現れる。
$(2+1)$ 次元の Chern-Simons 理論は 2 次元の共形場理論と深い関係をもつことが知られている。大雑把には

$$Z(A, \bar{A}) = \sum_{\alpha} \bar{\Psi}_{\alpha}(\bar{A}) \Psi_{\alpha}(A) \tag{1.1}$$

という形。$Z(A, \bar{A})$ は CFT の外場つきの分配関数。$\Psi_{\alpha}(A)$ は Chern-Simons 理論の基底状態であり、かつ CFT の conformal block になっている。波動関数は時空の境界条件を定めた経路積分によって表せるから、Chern-Simons の境界に CFT が住んでいるとみなせる。

さらに、Laughlin 状態などの試行状態も CFT と関係づけることができる。これは試行状態の系統的な導出を可能にする。

Laughlin 状態

$$\Psi_m(z_1,\dots,z_N)=\prod_{i<j}(z_i-z_j)^m\exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{|z_i|^2}{4l_0^2}\right) \tag{1.2}$$

を改めて考察する。注目するべき点はこの波動関数が電子間のポテンシャルの情報を含んでいないことである。Laughlin 状態はポテンシャルに依存して決まるものではなく、波動関数の長距離での性質を記述する普遍的な性質を記述するものである。普遍的な性質を理解する上で 2D CFT による記述がわかりやすい。唐突だが 2 次元 Euclid 空間上で定義されたカイラルボソン $\varphi(z)$ を考えると、Laughlin 状態は

$$\Psi_m(z_1,\dots,z_N)=\left\langle\left(\prod_{i=1}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{m}\varphi(z_i)}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^2z'\,\sqrt{m}\,\rho_0\varphi(z')\right)\right\rangle \tag{1.3}$$

と書ける。$\varphi(z)/\sqrt{m}$ が何らかの位相の自由度であるとし、$\varphi(z)$ と $\varphi(z)+2\pi\sqrt{m}$ を同一視する。プラズマアナロジーの文脈では Laughlin 状態は一様な背景電荷の中にある電子系を表していたが、今の場合電荷が vertex operator に対応している。

フリーボソンについての復習をしておく。作用は

$$S = \frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^2 x \, \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \tag{1.4}$$

とする。相関関数は

$$\langle \phi(z, \bar{z}) \phi(w, \bar{w}) \rangle = -\ln |z - w|^2 \tag{1.5}$$

である。vertex operator の相関関数は

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\phi(z,\bar{z})} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\phi(w,\bar{w})} \rangle = \begin{cases} 0 & (\alpha + \beta \neq 0) \\ |z - w|^{2\alpha\beta} & (\alpha + \beta = 0) \end{cases} \tag{1.6}$$

となる。カイラルボソンは $\phi(z, \bar{z}) = \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})$ と分けて正則部分を取り出すことで得られる。相関関数は以下の通り。

$$\langle \varphi(z) \varphi(w) \rangle = -\ln(z - w) \tag{1.7}$$

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\varphi(z)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\varphi(w)} \rangle = \begin{cases} 0 & (\alpha + \beta \neq 0) \\ (z - w)^{\alpha\beta} & (\alpha + \beta = 0) \end{cases} \tag{1.8}$$

(1.3) が成り立つことを確認しよう。多点 (∞ 点) の相関関数を求めなければならないが、Wick の定理

$$\left\langle \prod_i \mathrm{e}^{A_i} \right\rangle = \exp\left(\sum_{i<j} \langle A_i A_j \rangle \right) \tag{1.9}$$

を使えばうまくいく。ここで A_i は生成消滅演算子の線形結合で表される演算子。証明は省略する。これを適用すると、

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\prod_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{m}\varphi(z_i)} \right) \exp\left(-\mathrm{i} \int \mathrm{d}^2 z' \sqrt{m}\, \rho_0 \varphi(z') \right) \right\rangle \\
&= \exp\left(-m \sum_{i<j} \langle \varphi(z_i)\varphi(z_j) \rangle + m \sum_i \int \mathrm{d}^2 z'\, \rho_0 \langle \varphi(z_i)\varphi(z') \rangle + \text{const.} \right) \\
&= \prod_{i<j} (z_i - z_j)^m \exp\left(-m \sum_i \int \mathrm{d}^2 z'\, \rho_0 \ln(z_i - z') + \text{const.} \right) .
\end{aligned} \tag{1.10}$$

まず $\ln(z_i - z_j)$ の虚部を無視して $\ln|z_i - z_j|$ でについての積分

$$-m \int \mathrm{d}^2 z' \, \rho_0 \ln|z_i - z'| \tag{1.11}$$

を考える。これは電荷密度が ρ_0 で分布するときに位置 z_i での静電ポテンシャルを求める問題に等価である。ここで ρ_0 が半径 R の円盤上で一様に分布しているとしよう。(この仮定は Laughlin 状態の性質から妥当である。) すると位置 z_i における電場の大きさは

$$m\pi\rho_0|z_i|^2 \cdot \frac{1}{|z_i|} = \pi\rho_0|z_i| \tag{1.12}$$

で与えられる。よってこれを積分することで

$$-m \int \mathrm{d}^2 z' \, \rho_0 \ln|z_i - z'| = -\frac{1}{2}\pi m \rho_0 |z_i|^2 + \mathrm{const.} \tag{1.13}$$

となる。$\rho_0 = 1/2\pi m l_0^2$ を代入すると (1.3) を再現する。

$\ln(z_i - z_j)$ の虚部についての積分は至る所に分岐点を含むため ill-defined である。そこで波動関数について至る所で特異ゲージ変換を行ったと考えて位相を単純に無視すると、対称ゲージにおける波動関数が得られる。

CFT による定式化の強力な点は準粒子励起を系統的に扱えることである。点状の準粒子励起に対し、準粒子励起から十分離れた点での波動関数は依然として CFT で表されるので、準粒子が波動関数にもたらす変化は CFT における何らかの演算子で表されるだろう。したがって CFT における演算子の分類 = スペクトル分解によって準粒子励起を分類することができる。さらに、プライマリー演算子 $O(w)$ に対応する励起 $|\Psi_O(w)\rangle$ があれば $w^n\partial_w|\Psi_O(w)\rangle$ によってディセンダント演算子に対応する励起が構成されるので、プライマリー演算子のみを考えればよい。電子は vertex operator $V_m(z) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{m}\varphi(z)}$ に対応するので、準粒子として

$$V_1(z) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(z)/\sqrt{m}} \tag{1.14}$$

を考える。すると同様の議論によって

$$\begin{aligned}
&\Psi_m^+(w_1,\dots,w_M,z_1,\dots,z_N)\\
&=\left\langle \prod_{i=1}^M \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(w_i)/\sqrt{m}} \prod_{i=1}^N \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{m}\varphi(z_i)} \exp\left(-\int \mathrm{d}^2z'\,\sqrt{m}\,\rho_0\varphi(z')\right)\right\rangle\\
&=\prod_{i<j}(w_i-w_j)^{1/m}\prod_{i,j}(z_i-w_j)\prod_{i<j}(z_i-z_j)^m \exp\left(-\frac{1}{4l_0^2}\sum_{i=1}^N|z_i|^2-\frac{1}{4ml_0^2}\sum_{i=1}^n|w_i|^2\right)
\end{aligned} \tag{1.15}$$

が得られる。

準粒子励起の位置 w_i, w_j を連続的に動かして反時計回りに入れ替えると、位相 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/m}$ を獲得する。この操作は組み紐に対応付けられるから、粒子の交換は状態空間に作用する組み紐群の表現になっている。今の場合、準粒子の位置を定めると状態が一意に定まるため、可換な一次元表現しかあり得ない。

組み紐群の表現はモノドロミー行列として実現される。モノドロミー行列は、正則関数によって張られる線形空間作用する行列で、正則関数を閉曲線に沿って解析接続することで得られる。モノドロミー行列は一般に基本群の表現となるので、変数 $\{w_i\}$ についてのモノドロミー行列は組み紐群の表現になっている。

次に準粒子励起を近づけることで、複合粒子を作ることを考えよう。CFT の文脈ではこれは演算子積展開 (OPE) そのものである。vertex operator $V_p(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\varphi(z)/\sqrt{m}}$ の OPE は

$$V_p(z)V_q(w) \sim |z-w|^{2pq/m} V_{p+q}(w) + \cdots \tag{1.16}$$

で与えられる。$\varphi/\sqrt{m}$ が周期 2π でコンパクト化されていることから、$p, q \in \mathbb{Z}$ である。ここで準粒子を m 個集めると電子またはホールになるため、電子・ホールの寄与を除けば p と q を fuse すると $[p+q]_m$ になる。となる。ここで $[p]_m$ は $p \bmod m$ を表す。これは $V_m = \mathbb{1}$ とおくことに対応する。このとき conpactified boson は有理共形場理論 (RCFT) になる。RCFT とは有限個のプライマリー場をもつ CFT のこと。

カイラルボソンには vertex operator の他にもプライマリー場 $\partial\varphi(z)$ がある。これは内部空間の並進対称性に付随するカレントとみなせ、$J(z) := \mathrm{i}\partial\varphi(z)/\sqrt{m}$ と書くことにする。$J(z)$ と $V_p(w)$ の OPE は

$$J(z)V_p(w) \sim \frac{p}{m}\frac{V_p(w)}{z-w} + \cdots \tag{1.17}$$

となる。これは V_p の電荷が p/m であることを意味している。ただし、これは仮想的な位相の自由度 $\varphi(z)$ に結合する電荷であり、物理的な電荷は vertex operator からではなく背景から提供されることに注意。電荷の大きさが物理的な準粒子励起の電荷と一致することは $\varphi(z)$ と physical なゲージ場との関係を示唆する。

non-abelian な量子 Hall 系を導入する前に、non-abelian な統計性について説明しておく。N 粒子の波動関数を $\psi_{p;i_1,\dots,i_N}(z_1,\dots,z_N)$ と書く。ここで $i_1,\dots,i_N$ は各粒子に割り当てられた量子数を表す。また p は系全体で定義されるような量子数を表す。ここで連続的に粒子の位置を交換したとき、

$$
\begin{aligned}
&\psi_{p;i_1,\dots,i_s,\dots,i_r,\dots,i_N}(z_1,\dots,z_s,\dots,z_r,\dots,z_N) \\
&= \sum_q B_{pq}[i_1,\dots,i_N]\psi_{q;i_1,\dots,i_r,\dots,i_s,\dots,i_N}(z_1,\dots,z_r,\dots,z_s,\dots,z_N)
\end{aligned} \tag{1.18}
$$

となり、B_{pq} が組み紐群の多次元表現になっている解き、粒子は non-abelian fractional statistics をもつという。

ここでも我々は CFT による枠組みを用いることにする。このとき組み紐群の表現は共形ブロックのモノドロミー群によって得られる。

相関関数について、

$$
\langle O_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots O_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle = \sum_p C_p \mathcal{F}_p(\{z\})\bar{\mathcal{F}}_p(\{\bar{z}\}) \tag{1.19}
$$

のように正則部分と反正則部分への分解を行ったとき、$\mathcal{F}_p(\{z_i\})$ を共形ブロックと呼ぶ。次にもう少し丁寧に共形ブロックについて説明する。

まず CFT の相関関数についての復習。プライマリー場 ϕ_i と書く。1 点関数は $\phi_0 = \mathbb{1}$ として $\langle \phi_i \rangle = \delta_{i0}$ である。次に 2 点関数は

$$\langle \phi_i(z_1, \bar{z}_1) \phi_j(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{g_{ij}}{z_{12}^{h_i + h_j} \bar{z}_{12}^{\bar{h}_i + \bar{h}_j}} \tag{1.20}$$

となる。ここで $(h_i, \bar{h}_i)$ は演算子 ϕ_i の共形ウェイト。場を線形結合によって再定義することで常に $g_{ij} = \delta_{ij}$ とできる。3 点関数は

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \rangle = C_{123} \frac{1}{z_{12}^{h_1 + h_2 - h_3} z_{23}^{h_2 + h_3 - h_1} z_{31}^{h_3 + h_1 - h_2}} \times \mathrm{c.c.} \tag{1.21}$$

既に演算子のスケールを決めてしまったので C_{123} に冗長な自由度はない。4 点関数は

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \phi_4(z_4, \bar{z}_4) \rangle = f(\eta, \bar{\eta}) \prod_{i<j}^{4} (z_{ij}^{h/3 - h_i - h_j} \bar{z}_{ij}^{\bar{h}/3 - \bar{h}_i - \bar{h}_j}). \tag{1.22}$$

ここで $\eta := z_{12} z_{34} / z_{12} z_{24}$ は交差比で、$f(\eta, \bar{\eta})$ は任意の関数である。3 点関数までは正則部分と反正則部分の積に分かれるが、4 点関数はそうなっていない。

次に OPE について。プライマリー場 ϕ_1, ϕ_2 の OPE は

$$\begin{aligned}&\phi_1(z_1,\bar{z}_2)\phi_2(z_2,z_2)\\&=\sum_p C_{12}^p\left(z_{12}^{h_p-h_1-h_2}\sum_{\{k\}}\beta_{12p}^{\{k\}}z_{12}^{k_1+\cdots+k_N}\,\mathrm{ad}\,L_{-k_1}\cdots\mathrm{ad}\,L_{-k_N}\times\mathrm{c.c.}\right)\phi_p(z_2,\bar{z}_2)\end{aligned}\tag{1.23}$$

となる。係数 C_{12}^p は (1.21) の係数に一致する。さらに 3 点関数の微分から係数 $\beta_{12p}^{\{k\}}$ を求めることができる。よってディセンダントに対する係数は共形不変性から一意に定まっている。

CFT の状態空間はプライマリー状態とそのディセンダントによって張られる。一つのプライマリー状態とそのディセンダントをまとめて共形族 (Verma module) という。プライマリー場 ϕ_p から構成される共形族への射影を Π_p と書くと、OPE による計算は相関関数に $\sum_p \Pi_p$ を挿入する操作と捉えられる。4 点関数を OPE を用いて計算すると

$$\langle\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\rangle=\sum_p\langle\phi_1\phi_2\Pi_p\phi_3\phi_4\rangle=\sum_p C_p\mathcal{F}_p(\{z\})\bar{\mathcal{F}}_p(\{\bar{z}\})\tag{1.24}$$

と書ける。正則部分と反正則部分に分かれることは OPE の具体形 (1.23) から分かる。(おおもとは Virasoro 代数が正則部分と反正則部分のテンソル積で表されること。) $\mathcal{F}_p(\{z_i\})$ を共形ブロックと呼ぶ。

OPE 係数 C_{ijk} は CFT の相関関数についての詳細な情報を含むが、完全な記述は複雑であるから、C_{ijk} がゼロか否かだけを気にしたものをフュージョン則よぶ。プライマリー場を ϕ_i とすると、フュージョン則は

$$\phi_i \star \phi_j = \sum_k N_{ij}^k \phi_k \tag{1.25}$$

と書かれる。ϕ_i と ϕ_j の OPE に ϕ_k で指定される共形族が現れれば $N_{ij}^k = 1$ であり、そうでなければ $N_{ij}^k = 0$ である。$N_{ij}^k > 2$ は同じ共形ウェイトをもつ等価なプライマリー演算子が複数出てくる場合。フュージョン則は

$$\phi_i \star \phi_j = \phi_j \star \phi_i, \quad \phi_i \star (\phi_j \star \phi_k) = (\phi_i \star \phi_j) \star \phi_k \tag{1.26}$$

を満たす。対応して、

$$N_{ij}^k = N_{ji}^k, \quad \sum_l N_{il}^m N_{jk}^l = \sum_n N_{ij}^n N_{nk}^m \tag{1.27}$$

となる。

n 点関数について OPE を繰り返すことで

$$\begin{aligned}\langle \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_n} \rangle &= \sum_{\{p\}} \langle \phi_{i_1} \phi_{i_2} \Pi_{p_1} \phi_{i_3} \Pi_{p_2} \phi_{i_4} \cdots \phi_{n-2} \Pi_{p_{n-3}} \phi_{n-1} \phi_n \rangle \\ &= \sum_{\{p\}} C_{\{p\}} \mathcal{F}_{\{p\}}(\{z\}) \bar{\mathcal{F}}_{\{p\}}(\{\bar{z}\}) \end{aligned} \tag{1.28}$$

と表せる。$\mathcal{F}_{\{p\}}(\{z\})$ が共形ブロック。

理由はさておき、我々は $\mathcal{F}_{\{p\}}(\{z_i\})$ をエニオンの波動関数に同定しようとしている。そのときエニオンの状態空間の次元は $\mathcal{F}_{\{p\}}(\{z_i\})$ の個数である。一般の CFT ではプライマリー場が無限に存在するため共形ブロックも無限に存在するが、RCFT では状態空間に非自明な拘束条件が加わることでプライマリー場が有限個に限られる。

共形ブロックの個数を数えるだけならば、OPE を使わなくともフュージョン則で十分である。

$$\dim \mathcal{H} = \sum_{\{p\}} N^{p_1}_{i_1 i_2} N^{p_2}_{p_1 i_3} N^{p_3}_{p_2 i_4} \cdots N^{p_{n-1}}_{p_{n-2} i_n} \tag{1.29}$$

同様の計算によって一般のトポロジーの空間における共形ブロックの個数を数えることができる。相関関数に Π_p を挿入する操作は空間のパンツ分解と考えられる。共形族の添字 p について縮約をとる操作は空間を張り合わせることに対応している。よって例えばトーラス上の 1 点の共形ブロックの数は

$$\dim \mathcal{H} = \sum_{p} N^{p}_{ip} \tag{1.30}$$

となる。曲面にハンドルをくっつける操作は $\sum_i (\cdots)_i \sum_p N^p_{ip}$ によって行えるので、任意の曲面に対してフュージョン則だけから n 点の共形ブロックの個数が数えられる。

14.6.2 Conformal blocks

共形場理論による定式化によってトーラス上の量子 Hall 流体を考えてみよう。そのためにトーラス上の CFT を考える。トーラスの周期を $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ としよう。$\omega_2/\omega_1 = \tau$ をモジュラーパラメーターという。トーラスの自由度は τ のみである。(さらにモジュラー不変性から $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\{\pm\}$ の同値関係が入る。) 一般性を失わずに $\omega_1 = L \in \mathbb{R}$ とおく。

H をシリンダー時空におけるハミルトニアン、P を運動量演算子とする。ω_2 軸方向のハミルトニアンは

$$\frac{\operatorname{Im}\tau}{|\tau|} H_0 - \frac{\operatorname{Re}\tau}{|\tau|} \mathrm{i}P \tag{1.31}$$

となる。$H = (2\pi/L)(L_0 + \bar{L}_0 - c/12),\ P = (2\pi\mathrm{i}/L)(L_0 - \bar{L}_0)$ を代入すると分配関数は

$$\begin{aligned} Z &= \operatorname{Tr}\exp\left(-H \operatorname{Im}\tau + \mathrm{i}P \operatorname{Re}\tau\right) \\ &= \operatorname{Tr}\exp\left(-\pi(\tau-\bar{\tau})\left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12}\right) - \pi(\tau+\bar{\tau})(L_0 - \bar{L}_0)\right) \\ &= \operatorname{Tr}\exp\left(-2\pi\tau\left(L_0 - \frac{c}{24}\right) + 2\pi\bar{\tau}\left(\bar{L}_0 - \frac{c}{24}\right)\right) \\ &= \operatorname{Tr} q^{\mathrm{i}(L_0 - c/24)} \operatorname{Tr} \bar{q}^{\mathrm{i}(\bar{L}_0 - c/24)}, \quad (q = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\tau}). \end{aligned} \tag{1.32}$$

共形族 i に対する指標を

$$\psi_i := \operatorname{Tr}(\Pi_i q^{\mathrm{i}L_0 - c/24}), \quad \bar{\psi}_i := \operatorname{Tr}(\Pi_i \bar{q}^{\mathrm{i}\bar{L}_0 - c/24}) \tag{1.33}$$

で定義する。ただしトレースはそれぞれ正則な空間と反正則な空間でとるとする。分配関数は $Z = \sum_i \psi_i \bar{\psi}_i$ と表される。以降は正則部分のみを考える。

次にトーラスはモジュラー変換

$$T : \tau \mapsto \tau + 1, \quad S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau} \tag{1.34}$$

についての不変性をもつ。モジュラー変換に対する指標の変換性は

$$T : \psi_i \mapsto \exp\left[2\pi \mathrm{i}\left(h_i - \frac{c}{24}\right)\right]\psi_i, \quad S : \psi_i \mapsto \sum_j \mathcal{S}_i^j \psi_j \tag{1.35}$$

と表される。T についての変換は指標の定義から自明である。$\mathcal{S}_i^j$ はモジュラー $\mathcal{S}$ 行列と呼ばれる。モジュラー $\mathcal{S}$ 行列はフュージョン行列を対角化することが知られている。具体的には

$$N_{ij}^k = \sum_n \frac{\mathcal{S}_j^n \mathcal{S}_i^n (\mathcal{S}^{-1})_n^k}{\mathcal{S}_0^n} \tag{1.36}$$

で、これは Verlinde 公式と呼ばれる。

14. 7 The spin-singlet Halperin states

スピン一重項 Halperin $(n+1, n+1, n)$ 状態も CFT の相関関数として表せる。波動関数

$$\Psi_{(n+1,n+1,n)}(\{z_i^\uparrow\},\{z_i^\downarrow\}) = \prod_{i<j}(z_i^\uparrow - z_j^\uparrow)^{n+1}(z_i^\downarrow - z_j^\downarrow)^{n+1}\prod_{i,j}(z_i^\uparrow - z_j^\downarrow)^n \times \exp\left(-\frac{1}{4l_0^2}\sum_i\left(|z_i^\uparrow|^2 + |z_i^\downarrow|^2\right)\right) \tag{2.1}$$

を semion の Laughlin 状態

$$\Psi_m^{(\pi/2)}(\{z_i^\uparrow\},\{z_i^\downarrow\}) = \prod_{i<j}(z_i^\uparrow - z_j^\downarrow)^{n+1/2}(z_i^\downarrow - z_j^\downarrow)^{n+1/2}(z_i^\uparrow - z_j^\downarrow)^{n+1/2} \tag{2.2}$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{4l_0^2}\sum_i(|z_i^\uparrow|^2 + |z_i^\downarrow|^2)\right) \tag{2.3}$$

と因子

$$\Psi_{\text{singlet}}(\{z_i^\uparrow\},\{z_i^\downarrow\}) = \prod_{i<j}\frac{(z_i^\uparrow - z_j^\downarrow)^{1/2}(z_i^\downarrow - z_j^\downarrow)^{1/2}}{(z_i^\uparrow - z_j^\downarrow)^{1/2}} \tag{2.4}$$

に分ける。まず

$$\Psi_m^{(\pi/2)}(\{z_i^\uparrow\},\{z_i^\downarrow\}) = \left\langle \prod_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{n+\frac{1}{2}}\varphi(z_i)} \exp\left(-\int \mathrm{d}^2 z' \sqrt{n+\frac{1}{2}}\,\rho_0\varphi(z')\right)\right\rangle_{\mathrm{U}(1)_k} \tag{2.5}$$

ここで $\langle\cdot\rangle_{\mathrm{U}(1)_k}$ は level-k の chiral boson における期待値を表す。また

$$\Psi_{\text{singlet}}(\{z_i^{\uparrow}\},\{z_i^{\downarrow}\}) = \left\langle V_{+1/2}(z_1^{\uparrow})\cdots V_{+1/2}(z_{N/2}^{\uparrow})V_{-1/2}(z_1^{\downarrow})\cdots V_{1/2}(z_{N/2}^{\downarrow})\right\rangle_{\mathrm{SU}(2)_1} \tag{2.6}$$

である。ただし $V^{\pm}$ は Wess–Zumino–Witten(WZW) 理論における primary spin-1/2 multiplet である。WZW 理論について、少し補足しておく。WZW 理論はカレント $J^a(z)$ と、カレントが満たす affine Kac–Moody 代数

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{k\delta^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{\mathrm{i}f^{ab}{}_c J^c(w)}{z-w}, \tag{2.7}$$

$$[J^a_m, J^b_n] = km\delta^{ab}\delta_{m+n,0} + \mathrm{i}f^{ab}{}_c J^c_{m+n} \tag{2.8}$$

によって特徴づけられる。ただし $f^{ab}{}_c$ は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の構造定数である。affine Kac–Moody 代数はゼロ次の交換関係として $\mathfrak{g}$ を含む。

$\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(2)$ とする。最高ウェイト状態 $|j\rangle$ は以下を満たす。

$$J_0^3|j\rangle=j|j\rangle,\quad J_0^+|j\rangle=0,\quad J_n^a|j\rangle=0\quad \text{for}\quad n>0. \tag{2.9}$$

$|j\rangle$ に J_0^-, J_n^a をかけていくことで一般の状態が構成される。理論のユニタリティを要請することで、$|j\rangle$ に制限がかかる。まず $\mathfrak{su}(2)$ の交換関係による制限から $j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ である。このとき $(J_0^-)^{2j+1}|j\rangle$ がヌルベクトルとなる。さらに追加のヌルベクトルとして $(J_{-1}^+)^{k+1-2j}|j\rangle$ がある。ヌルベクトルはこれら 2 つとそのディセンダントによって尽きることが知られている。$(J_{-1}^+)^{k+1-2j}|j\rangle$ のノルムは公式

$$\langle j|(J_1^-)^N(J_{-1}^+)^N|j\rangle=\prod_{n=1}^{N}n(k+1-n-2j) \tag{2.10}$$

から分かる。これは $[J_1^-,J_{-1}^+]=k-2J_0^3$, $J_0^3(J_{-1}^+)^N|j\rangle=(j+N)(J_{-1}^+)^N|j\rangle$ から帰納法によって以下のように証明できる。

$$\begin{aligned}\langle j|(J_1^-)^N(J_{-1}^+)^N|j\rangle&=\sum_{m=0}^{N-1}\langle j|(J_1^-)^{N-1}(J_{-1}^+)^m(k-2J_0^3)(J_{-1}^+)^{N-1-m}|j\rangle\\&=\sum_{m=0}^{N-1}(k-2j-2N+2+2m)\langle j|(J_1^-)^{N-1}(J_{-1}^+)^{N-1}|j\rangle\\&=N(k+1-N-2j)\langle j|(J_1^-)^{N-1}(J_{-1}^+)^{N-1}|j\rangle.\end{aligned} \tag{2.11}$$

もし $j > k/2$ ならば、

$$\langle j|J_1^- J_{-1}^+|j\rangle = k - 2l < 0 \tag{2.12}$$

となる。よって $j \leq k/2$ である必要がある。これを満たす j が有限個しか存在しないことに注意。

実は affine Kac–Moody 代数の中には Virasoro 代数が隠れている。具体的には

$$T(z) = \gamma (J^a J^a)(z) \tag{2.13}$$

$$L_m = \gamma \sum_n : J_n^a J_{m-n}^a : = \gamma \left(\sum_{n \leq -1} J_n^a J_{m-n}^a + \sum_{n \geq 0} J_{m-n}^a J_n^a \right) \tag{2.14}$$

は Virasoro 代数を満たす。これを菅原構成法という。γ は Lie 代数から決まる定数で、ここでは定義を省略する。また中心電荷 c も Lie 代数から定まる。

この構成において最高ウェイト状態はプライマリー状態である。最高ウェイト状態のことを WZW プライマリー状態と呼ぶ。

次にフュージョン則について考える。フュージョン則は WZW プライマリー状態に対する概念として同様に定義される。トーラス上の $\mathrm{SU}(2)_k$ WZW 理論に対してモジュラー S 行列を求め、Verinde 公式を用いると

$$\phi_{j_1} \star \phi_{j_2} = \phi_{|j_1 - j_2|} + \cdots + \phi_{j_{\max}}. \tag{2.15}$$

が得られる。ここで $j_{\max} = \min(j_1 + j_2, k - j_1 - j_2)$ である。特に $\mathrm{SU}(2)_1$ については、

$$[1/2] \star [1/2] = [0] \tag{2.16}$$

となる。よって fusion channel は 1 つだけであり、共形ブロックは常に 1 つである。よって $\mathrm{SU}(2)$ は non-abelian にもかかわらず、組み紐群の表現は abelian になる。実は $\mathrm{SU}(2)_1$ は chiral boson と以下のように対応する。

$$J^3(z) \sim \mathrm{i}\partial\phi(z), \quad J^{\pm}(z) \sim \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\sqrt{2}\phi(z)} \tag{2.17}$$

また

$$V_{\pm 1/2}(z) \sim \exp\left(\pm \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\phi(z)\right) \tag{2.18}$$

である。

14.8 Moore-Read states and their generalizations

Moore と Read は Majorana fermion(Ising CFT) に対応する以下のような状態を考えた

$$\Psi_{\mathrm{MR}}(z_1, \dots, z_N) = \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) \prod_{i<j} (z_i - z_j)^n \exp\left(-\frac{1}{4l_0^2} \sum_i |z_i|^2\right). \tag{3.1}$$

これを Moore–Read 状態と呼ぶ。この状態は lowest Landau level に属し、占有率は $\nu = 1/n$ である。波動関数が fermion の統計性を満たすためには、n は偶数である必要がある。Moore–Read 状態は Majorana fermion $\psi(z)$ によって

$$\Psi_{\mathrm{MR}}(\{z_i\}) = \langle \psi(z_1) \cdots \psi(z_N) \rangle_{\mathrm{Ising}} \times \langle \left(\prod_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{n}\phi(z_i)}\right) \exp\left(-\int \mathrm{d}^2 z' \sqrt{n}\, \rho_0 \phi(z')\right) \rangle_{\mathrm{U}(1)_n} \tag{3.2}$$

と書ける。ここで、Majorana fermion に対する Wick の定理から

$$\langle \psi(z_1) \cdots \psi(z_N) \rangle = \mathrm{Pr}\langle \psi(z_i)\psi(z_j) \rangle = \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) \tag{3.3}$$

となることを用いた。

Majorana fermion をプライマリー場にもつ RCFT として、Ising CFT がある。Ising CFT の chiral なプライマリー場は $\phi_{(1,1)}(z), \phi_{(1,2)}(z), \phi_{(2,2)}(z)$ の 3 つで、それぞれの共形ウェイトは $h = 0, 1/2, 1/16$ である。以下の演算子を考える。

$$\mathbb{I} = \phi_{(1,1)}(z) \otimes \phi_{(1,1)}(\bar{z}) \tag{3.4}$$

$$\psi(z) = \phi_{(1,2)}(z) \otimes \phi_{(1,1)}(\bar{z}) \tag{3.5}$$

$$\sigma(z, \bar{z}) = \phi_{(2,2)}(z) \otimes \phi_{(2,2)}(\bar{z}) \tag{3.6}$$

$$\mu(z, \bar{z}) = \phi_{(2,2)}(z) \otimes \phi_{(2,2)}(\bar{z}) \tag{3.7}$$

ψ はカイラルフェルミオンであり、σ はスピン場、μ は双対スピン場である。σ と μ は次元は等しいが OPE 係数が異なる。フェルミオン場とスピン場の OPE は

$$\psi(z)\sigma(w, \bar{w}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{2}\,(z-w)^{1/2}}\mu(w, \bar{w}) + \cdots \tag{3.8}$$

$$\psi(z)\mu(w, \bar{w}) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{2}\,(z-w)^{1/2}}\sigma(w, \bar{w}) + \cdots \tag{3.9}$$

である。

Moore-Read 状態において電子は $\psi(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{n}\phi(z)}$ に対応する。準粒子励起が電子に対して局所的になることを要請すると、以下の励起があり得る。

1. 恒等演算子: $\mathbb{I}$
2. σ 粒子 (non-abelion, half-vortex): $\sigma(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(z)/2\sqrt{n}}$
3. Majorana fermion: $\psi(z)$
4. Laughlin 準粒子 (vortex): $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(z)/\sqrt{n}}$

ここで $\sigma(z)$ 単体では $\psi(z)$ との mutual statistics が非自明になるので、vertex operator$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(z)/2\sqrt{n}}$ をつけることで位相を相殺した。

相関関数 $\langle \sigma \cdots \sigma \chi \cdots \chi \rangle$ が非ゼロになるためには σ 粒子、χ 粒子は常に偶数個必要である。σ 粒子が 2 つある場合、波動関数は

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{MR}}^{2\mathrm{qh}}(\{z_i\}) &= \langle \sigma(\eta_1)\sigma(\eta_2)\psi(z_1)\cdots\psi(z_N)\rangle_{\mathrm{Ising}} \\ &\times \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\eta_1)/2\sqrt{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\eta_2)/2\sqrt{n}} \prod_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{n}\phi(z_i)} \exp\left(-\int \mathrm{d}^2 z' \sqrt{n}\,\rho_0 \phi(z')\right)\right\rangle_{\mathrm{U}(1)_n}\end{aligned} \tag{3.10}$$

である。このとき、Pfaffian を以下のように変えれば良い。

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) \mapsto \mathrm{Pf}\left(\frac{(z_i - \eta_i)(z_j - \eta_2) + (i \leftrightarrow j)}{z_i - z_j}\right) \tag{3.11}$$

σ 粒子が 4 つある場合は

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{z_i - z_j}\right) &\mapsto \mathrm{Pf}\left(\frac{(z_i - \eta_1)(z_i - \eta_2)(z_j - \eta_3)(z_j - \eta_4) + (i \leftrightarrow j)}{z_i - z_j}\right) \\ &=: \mathrm{Pf}_{(12)(34)}\end{aligned} \tag{3.12}$$

とする。これらの計算は大変。