1　2021 年 (令和 3 年)

第 1 問

[1.1]

$$\hat{H} = -\mu \begin{pmatrix} B_0 & B_1 e^{-i\omega t} \\ B_1 e^{i\omega t} & -B_0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

である。また $\alpha(t), \beta(t)$ は

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

を満たす。

[1.2]

$a(t) = \alpha(t) e^{i\omega_0 t/2}$, $b(t) = \beta(t) e^{-i\omega_0 t/2}$ に対し、

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_0 t/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\omega_1}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i(\omega-\omega_0)t} \\ e^{i(\omega-\omega_0)t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.3}$$

よって、

$$A(t) = e^{-i(\omega-\omega_0)t}. \tag{1.4}$$

[2.1]

$b(t) = 1$ と近似すると、

$$\frac{da}{dt} = -\frac{i\omega_1}{2} e^{-i(\omega-\omega_0)t} \tag{1.5}$$

となり、$a(0) = 0$ から

$$a(t) = \frac{\omega_1}{2(\omega-\omega_0)}\left[e^{-i(\omega-\omega_0)t} - 1\right] \tag{1.6}$$

となる。よって、

$$P_1 = |a(\tau)|^2 = \frac{\omega_1^2}{(\omega-\omega_0)^2}\sin^2\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2} \tag{1.7}$$

[2.2]

$P_1(\omega)$ は $\omega = \omega_0$ で最大値 $\omega_1^2\tau^2/4$ をとる。またこの近傍で $P_1(\omega) = 0$ となる角振動数は

$$\sin\left(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right) = 0, \quad \omega = \omega_0 \pm \frac{2\pi}{\tau} \tag{1.8}$$

で与えられる。

[3.1]

問 [2.1] と同様な議論から、$T < t < T + \tau$ において

$$a(t) = \frac{\omega_1}{2(\omega-\omega_0)}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t} - C\right] \tag{1.9}$$

と書ける。C は定数である。ここで、磁場 $\boldsymbol{B}_0$ を印加したとき $a(t), b(t)$ が不変なことから

$$a(T) = a(\tau) = \frac{\omega_1}{2(\omega-\omega_0)}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\tau} - 1\right] \tag{1.10}$$

となる。よって

$$a(t) = \frac{\omega_1}{2(\omega-\omega_0)}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)T} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\tau} - 1\right] \tag{1.11}$$

となる。

$$a(T+\tau) = \frac{\omega_1}{2(\omega-\omega_0)}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)T} + 1)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\tau} - 1) \tag{1.12}$$

から、

$$P_2 = |a(T+\tau)|^2 = \frac{4\omega_1^2}{(\omega-\omega_0)^2}\cos^2\frac{(\omega-\omega_0)T}{2}\sin^2\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2} \tag{1.13}$$

[3.2]

$P_2(\omega)$ は $\omega = \omega_0$ で最大となる。また $\omega = \omega_0$ の近傍で $P_2(\omega) = 0$ となるのは、$T \gg \tau$ に注意すると、

$$\cos\frac{(\omega-\omega_0)T}{2} = 0 \tag{1.14}$$

のとき。よって、

$$\mathit{\Omega}_1 = \omega_0 - \frac{\pi}{T}, \quad \mathit{\Omega}_2 = \omega_0 + \frac{\pi}{T} \tag{1.15}$$

となる。

[3.3]

$$\mathit{\Delta}\mathit{\Omega} = \mathit{\Omega}_2 - \mathit{\Omega}_1 = \frac{2\pi}{T} \tag{1.16}$$

精度を改善するには、T を大きくすれば良い。

[4.1]

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\lambda L}{l}, \quad \frac{4\pi}{\tau} = \frac{2\lambda L}{D} \tag{1.17}$$

と対応づけられる。よって l が T に、D が τ に対応する。

[4.2]

時刻 t で測定すると、ほとんど $|-\rangle$ が測定される。よって時刻 t においてを $|-\rangle$ を初期状態としてよい。このとき位相を除いて問 [2.2] と同じ結果になる。つまり干渉が消える。

第 2 問

[1.1]

$$m\ddot{x}_n = -k(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) \tag{1.18}$$

[1.2]

$x_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}qn} c_q(t)$ を [1.1] の結果に代入すると、

$$\ddot{c}_q(t) = -\frac{2k}{m}(1 - \cos q)c_q = -\frac{4k}{m}\sin^2\frac{q}{2} \tag{1.19}$$

となる。

[1.3]

$$\omega_q = \sqrt{\frac{4k}{m}}\left|\sin\frac{q}{2}\right| \tag{1.20}$$

[1.4]

$q = 0$ のとき、$c_q(t)$ についての微分方程式およびその解は、

$$\ddot{c}_0(t) = 0, \quad c_0(t) = At + B \tag{1.21}$$

となる。ただし A, B は定数である。

[2.1]

$|n| > 0$ については [1.1] と同様。すなわち、

$$m\ddot{x}_n = -k(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) \tag{1.22}$$

となる。$n = 0$ については、

$$M\ddot{x}_0 = -k(2x_0 - x_1 - x_{-1}) \tag{1.23}$$

となる。

[2.2]

$n \leq -2$ あるいは $n \geq +1$ に対しては、運動方程式は [1.1] と同様である。これに $x_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}qn-\mathrm{i}\omega_q t}$ を代入すると、[1.3] と同様な議論から

$$\omega_q = \sqrt{\frac{4k}{m}}\left|\sin\frac{q}{2}\right| \tag{1.24}$$

となる。また $x_n(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qn-\mathrm{i}\omega_q t}$ を代入しても同じ結果を得る。さらに $x_n(t)$ としてこれらの線形結合をとっても問題ない。よって (1) 式に対して ω_q の表式は [1.3] と同じである。

[2.3]

$n = 0, -1$ に対する運動方程式

$$-M\ddot{x}_0 = -k(2x_0 - x_1 - x_{-1}) \tag{1.25}$$
$$-m\ddot{x}_{-1} = -k(2x_{-1} - x_0 - x_{-2}) \tag{1.26}$$

に (1) 式を代入すると、

$$(2k - M\omega_q^2)T_q = k(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}T_q + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} + R_q\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}) \tag{1.27}$$
$$(2k - m\omega_q^2)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} + R_q\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}) = k(T_q + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}q} + R_q\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q}) \tag{1.28}$$

となる。整理すると、

$$\left(2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q} - \frac{4M}{m}\sin^2\frac{q}{2}\right)T_q - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}R_q = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q}, \tag{1.29}$$
$$T_q - R_q = 1 \tag{1.30}$$

となる。

[2.4]

[2.3] の 2 つ目の式から $R_q = T_q - 1$ となる。これを 1 つ目の式に代入すると、

$$\left(2 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}q} - \frac{4M}{m}\sin^2\frac{q}{2}\right)T_q = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q} \tag{1.31}$$

よって、

$$\begin{aligned} T_q &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}}{2 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}q} - (M/m)(2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q})} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}}{2(1 - M/m) + (M/m)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} - (2 - M/m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}} \end{aligned} \tag{1.32}$$

[2.5]

$M=m$ では

$$T_q = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}} = 1 \tag{1.33}$$

これは $M = m$ では波が全て透過し、反射が起こらないことを表している。次に、$M=+\infty$ では、

$$T_q = 0 \tag{1.34}$$

となる。これは透過が起こらず、全反射が起こることを表している。

[3.1]

$$\det\left[\begin{pmatrix} T_q & R_q \\ R_q & T_q \end{pmatrix} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qL}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0 \tag{1.35}$$

となるから、

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}qL} - 2T_q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qL} + T_q^2 - R_q^2 \\ &= (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qL} - T_q - R_q)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qL} - T_q + R_q) = 0 \end{aligned} \tag{1.36}$$

となる。よって、

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qL} = T_q \pm R_q = 2T_q - 1, 1 \tag{1.37}$$

[3.2]

$M=m$ の場合、$T_q = 1,\ R_q = 0$ となる。このとき、

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qL} = 1 \tag{1.38}$$

から

$$q = \frac{2l\pi}{L}, \quad l \in \mathbb{Z} \tag{1.39}$$

となる。このとき、

$$\omega_q = \sqrt{\frac{4k}{m}}\left|\sin\frac{l\pi}{L}\right| \tag{1.40}$$

[3.3]

$M=2m$ の場合、

$$T_q=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}}{-2+2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q}} \tag{1.41}$$

となる。よって、

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}qL}=1, \tag{1.42}$$

または、

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}qL}=2T_q-1=\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}}{-1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}. \tag{1.43}$$

ここから

$$q=\frac{2l\pi}{L},\frac{2l\pi}{L-1},\quad l\in\mathbb{Z} \tag{1.44}$$

となる。また、

$$\omega_q=\sqrt{\frac{4k}{m}}\left|\sin\frac{l\pi}{L}\right|,\quad\sqrt{\frac{4k}{m}}\left|\sin\frac{l\pi}{L-1}\right| \tag{1.45}$$

である。$0<q<\pi$ から基準振動の総数は、

$$0<l<\frac{L}{2},\quad 0<l<\frac{L-1}{2} \tag{1.46}$$

となる整数 l の数の和で与えられる。よって

$$\left(\frac{L}{2}-1\right)+\left(\frac{L}{2}-1\right)=L-2. \tag{1.47}$$

これは L よりも 2 個モードが少ない。1 個のモードは並進運動の自由度を表す。もう 1 個のモードは $n=0$ の質点のまわりに束縛されている。

[3.4]

$M\to\infty$ の場合、固定端の問題と同じ。$T_q=0$ から、

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}qL}=\pm1 \tag{1.48}$$

よって

$$q=\frac{l\pi}{L},\quad l\in\mathbb{Z} \tag{1.49}$$

であり、振動モードの数は L 個。(固定端だから並進運動できない。) また、

$$\omega_q = \sqrt{\frac{4k}{m}}\left|\sin\frac{l\pi}{2L}\right| \tag{1.50}$$

第 3 問

[1]

$$N_{AB} = N_A \cdot z \cdot \frac{N_B}{N} = Nzx(1-x) \tag{1.51}$$

$$E = NVzx(1-x) \tag{1.52}$$

[2]

$$\begin{aligned} S &= k_{\mathrm{B}} \log \frac{N!}{N_A! N_B!} \\ &= -k_{\mathrm{B}} N_A \log \frac{N_A}{N} - k_{\mathrm{B}} N_B \log \frac{N_B}{N} \\ &= -k_{\mathrm{B}} N [x \log x + (1-x) \log(1-x)] \end{aligned} \tag{1.53}$$

[3]

$$F = E - TS = NVzx(1-x) + k_{\mathrm{B}} NT [x \log x + (1-x) \log(1-x)] \tag{1.54}$$

[4]

$$f(x) = Vzx(1-x) + k_{\mathrm{B}} T [x \log x + (1-x) \log(1-x)] \tag{1.55}$$

から、$f(x)$ 極値をとる x では

$$f'(x) = -Vz(2x-1) + k_{\mathrm{B}} T (\log x - \log(1-x)) = 0 \tag{1.56}$$

となる。よって、

$$\frac{zV}{k_{\mathrm{B}} T}(2x-1) = g(x) = \log \frac{x}{1-x} \tag{1.57}$$

[5]

両辺の $x = 1/2$ における傾きが一致するとき、

$$\frac{2zV}{k_{\mathrm{B}}T} = \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right]_{x=1/2} = 4 \tag{1.58}$$

となる。よって、

$$T_{c0} = \frac{zV}{2k_{\mathrm{B}}} \tag{1.59}$$

[6]

両辺はどちらも $x = 1/2$ を軸として奇関数になっている。また $g(0) = -g(1) = \infty$ である。$T < T_{c0}$ では (2) 式の解が 3 つ現れ、$T > T_{c0}$ では (2) 式の解は 1 つだけである。これらを図示すれば良い。

[7]

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2zV + k_{\mathrm{B}}T\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right] \\ &= -2zV + \frac{k_{\mathrm{B}}T}{x - x^2} = 0 \end{aligned} \tag{1.60}$$

から、

$$x^2 - x + \frac{k_{\mathrm{B}}T}{2zV} = 0. \tag{1.61}$$

よって

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{k_{\mathrm{B}}T}{2zV}}, \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{k_{\mathrm{B}}T}{2zV}} \tag{1.62}$$

[8]

省略。$f'(0) = -\infty, f'(1) = \infty$ に気を付ける。(対数発散なので、グラフにすると大したことない。) $f(x)$ の極値が $1/2 - \delta_0, 0, 1/2 + \delta_0$ であり、極値の間に $1/2 \pm \delta_1$ がある。

[9]

よくある、$T < T_{c0}$ で二価な関数が $T = T_{c0}$ で合流してゼロになるようなグラフを δ_0, δ_1 のそれぞれについて描く。$\delta_0(T_{c0}) = \delta_1(t_{c0}) = 0$、$\delta_0(T = 0) = \delta_1(T = 0) = 1/2$ および $0 < T < T_{c0}$ で $|\delta_0(T)| > |\delta_1(T)|$ となることに注意する。

[10]

$$sx_1 + (1 - s)x_2 = x_0 \tag{1.63}$$

より、

$$s = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} \tag{1.64}$$

[11]

$$f^* = sf(x_1) + (1 - s)f(x_2) = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2} f(x_2) \tag{1.65}$$

[12]

$x_1 = x_0 - \delta, x_2 = x_0 + \delta$ とすると、

$$\begin{aligned}
f^* &= \frac{1}{2} f(x_0 - \delta) + \frac{1}{2} f(x_0 + \delta) \\
&= \frac{1}{2} \left(f(x_0) - \delta f'(x_0) + \frac{\delta^2}{2} f''(x_0) \right) + \frac{1}{2} \left(f(x_0) + \delta f'(x_0) + \frac{\delta^2}{2} f''(x_0) \right) + \mathcal{O}(\delta^3) \\
&= f(x_0) + \frac{1}{2} \delta^2 f''(x_0) + \mathcal{O}(\delta^3)
\end{aligned} \tag{1.66}$$

となる。よって $f^* > f(x_0)$ となるための条件は、

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x = x_0} > 0 \tag{1.67}$$

[13]

高温側が (I)、δ_0 と δ_1 に囲まれている領域が (II)、δ_1 に囲まれている領域が (III)。

第 4 問

[1.1]

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = -q\boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} - m\omega_0^2 \boldsymbol{x}(t) - m\gamma \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.68}$$

[1.2]

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$ とすると、

$$-m\omega^2 \boldsymbol{x}_0 = -q\boldsymbol{E}_0 - m\omega_0^2 \boldsymbol{x}_0 + \mathrm{i}m\gamma\omega\boldsymbol{x}_0 \tag{1.69}$$

よって、

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{-q\boldsymbol{E}_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) - \mathrm{i}\gamma\omega]} \tag{1.70}$$

[1.3]

$$\boldsymbol{P}_0 = -Nq\boldsymbol{x}_0 = \frac{Nq^2}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) - \mathrm{i}\gamma\omega]}\boldsymbol{E}_0 = \epsilon_0 \chi \boldsymbol{E}_0 \tag{1.71}$$

よって、

$$\chi = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + \mathrm{i}\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{1.72}$$

である。

$$\chi_R = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \quad \chi_I = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{1.73}$$

[1.4]

χ_R の符号は $\omega < \omega_0$ で正、$\omega > \omega_0$ で負となる。また $|\omega - \omega_0| \sim \gamma$ を境にゼロに減衰していく。

[2.1]

$$E_0 \exp(\mathrm{i}k \sin\theta_0 x) + E_m \exp(\mathrm{i}K_{mx} x) = E_t \exp(\mathrm{i}K_{tx} x) \tag{1.74}$$

[2.2]

[2.1] の結果が任意の x で成り立つことから、

$$K_{mx} = K_{tx} = k \sin\theta_0 \tag{1.75}$$

[2.3]

波動方程式は、

$$(\nabla^2 - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2})(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_m) = \boldsymbol{0}, \quad \left(\nabla^2 - (1+\chi)\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{0}. \tag{1.76}$$

ここから、

$$k^2 = K_{mx}^2 + K_{mz}^2 = \epsilon_0\mu_0\omega^2, \quad K_{tx}^2 + K_{tz}^2 = (1+\chi)\epsilon_0\mu_0\omega^2 \tag{1.77}$$

[2.4]

$$K_{mz} = k\cos\theta_0 \tag{1.78}$$

[2.5]

$\theta_0 = \theta_c$ において、

$$K_{tz}^2 = (1+\chi)\epsilon_0\mu_0\omega^2 - k^2\sin^2\theta_c = k^2(1+\chi-\sin^2\theta_c) \tag{1.79}$$

となる。よって、

$$\theta_c = \arcsin\left(\sqrt{1+\chi}\right) \tag{1.80}$$

である。$\theta_0 > \theta_c$ のとき、z 軸負方向に伝播していくことに注意して、

$$K_{tz} = -k\sqrt{1+\chi-\sin^2\theta_0}\,. \tag{1.81}$$

$\theta_0 < \theta_c$ のとき、z 軸負方向に減衰していくことに注意して、

$$K_{tz} = \mathrm{i}k\sqrt{\sin^2\theta_0 - (1+\chi)} \tag{1.82}$$

[2.6]

誘電体内での振幅は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}K_{tz}z} = \mathrm{e}^{-k\sqrt{\sin^2\theta_0-(1+\chi)}z}$ から

$$z_0 = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2\theta_0 - (1+\chi)}} = \frac{1}{k\sqrt{-\chi - \cos^2\theta_0}} \tag{1.83}$$

これは $\cos^2\theta_0 \to -\chi$ で発散する。