1　2018 年 (平成 30 年)

物理学 I

第 1 問

[1.1]

　遠心力と重力の釣り合いは、

$$m\frac{v_1^2}{R} = \frac{mMG}{R^2}. \tag{1.1}$$

よって

$$v_1 = \sqrt{\frac{MG}{R}} \tag{1.2}$$

[1.2]

　脱出する最小の速度 v_2 に対し、

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{mMG}{R} = 0 \tag{1.3}$$

となる。よって

$$v_2 = \sqrt{\frac{2MG}{R}} \tag{1.4}$$

[1.3]

　楕円

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)} \tag{1.5}$$

において、$\theta = \theta_0$ および $\theta = \theta_0 + \pi$ を代入すると、

$$r(\theta = \theta_0) = \frac{l}{1+\varepsilon}, \quad r(\theta = \theta_0 + \pi) = \frac{l}{1-\varepsilon} \tag{1.6}$$

となる。よって長軸は

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{l}{1+\varepsilon} + \frac{l}{1-\varepsilon} = \frac{2l}{1-\varepsilon^2} \\
&= \frac{2h^2}{GM} \cdot \frac{G^2 M^2 m}{2h^2(-E)} \\
&= \frac{GMm}{-E} \\
&= \frac{GM}{GM/R - v^2/2}
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

[2.1]

$$
2mR_0\omega_0^2 = \frac{2mMG}{R_0^2} \tag{1.8}
$$

$$
\omega_0 = \sqrt{\frac{MG}{R_0^3}} \tag{1.9}
$$

[2.2]

$$
I = 2 \cdot m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{2} \tag{1.10}
$$

[2.3]

モーメント $\boldsymbol{N}$ を地道に計算する。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= -\frac{mMG}{|\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{l}/2|^3}\frac{\boldsymbol{l}}{2} \times \left(\boldsymbol{R}_0 + \frac{\boldsymbol{l}}{2}\right) + \frac{mMG}{|\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{l}/2|^3}\frac{\boldsymbol{l}}{2} \times \left(\boldsymbol{R}_0 + \frac{\boldsymbol{l}}{2}\right) \\
&= \frac{mMG}{2R_0^3}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{R}_0 \left[\left(1 - \frac{\boldsymbol{R}_0 \cdot \boldsymbol{l}}{R_0^2} + \frac{l^2}{4R^2}\right)^{-3/2} - \left(1 + \frac{\boldsymbol{R}_0 \cdot \boldsymbol{l}}{R_0^2} + \frac{l^2}{4R^2}\right)^{-3/2}\right] \\
&= \frac{mMGl}{2R_0^2}\sin\phi\boldsymbol{e}_z \left[\left(1 - \frac{l}{R_0}\cos\phi + \frac{l^2}{4R^2}\right)^{-3/2} - \left(1 + \frac{l}{R_0}\cos\phi + \frac{l^2}{4R^2}\right)^{-3/2}\right] \\
&= \frac{mMGl}{2R_0^2} 3lR_0 \sin\phi\cos\phi\boldsymbol{e}_z \\
&= \frac{1}{3}ml^2\omega_0^2 \sin 2\phi\boldsymbol{e}_z
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

[2.4]

$$\sin 2\phi_0 = 0, \quad \therefore \phi_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \tag{1.12}$$

$$N = I\,\delta\ddot{\phi} = \frac{2}{3} m \cos 2\phi_0 l^2 \omega_0^2\,\delta\phi \tag{1.13}$$

$\phi = 0, \pi$ のまわりでは、

$$\delta\ddot{\phi} = \frac{3ml^2\omega_0^2}{2I}\,\delta\phi = 3\omega_0^2\,\delta\phi \tag{1.14}$$

となる。これは不安定である。次に $\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ のまわりでは、

$$\delta\ddot{\phi} = -\frac{ml^2\omega_0^2}{I}\,\delta\phi = -3\omega_0^2\,\delta\phi \tag{1.15}$$

となる。これは安定な調和振動となり、角振動数は $\sqrt{3}\,\omega_0$ となる。

第 2 問

[1.1]

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.16}$$

これを半径 r の上から見て反時計回りの経路で積分すると、

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int \frac{\partial B}{\partial t} \mathrm{d}S \tag{1.17}$$

となる。よって、

$$2\pi r E(t) = -\pi r^2 B'(t), \quad E(t) = -\frac{1}{2} r B'(t) \tag{1.18}$$

である。つまり

$$E(t) = -\pi f \mu_0 H_0 r \cos(2\pi f t) \tag{1.19}$$

[1.2]

$\omega = 2\pi f, B_0 = \mu_0 H_0$ とおくと、

$$E(t) = -\frac{1}{2} r \omega B_0 \cos(\omega t) \tag{1.20}$$

である。単位体積あたりに発生する Joule 熱は、

$$p(r) = \frac{\boldsymbol{E}^2}{\rho} = \frac{\omega^2 B_0^2}{4\rho} r^2 \cos^2(\omega t) \tag{1.21}$$

で計算できる。これを積分して、

$$P = 2\pi L \int_0^R r p(r) \mathrm{d}r = 2\pi L \frac{\omega^2 B_0^2}{4\rho} \frac{R^4}{4} \cos^2(\omega t) \tag{1.22}$$

を得る。$\omega = 2\pi f$ および $B_0 = \mu_0 H_0$ を代入すると、

$$P = \frac{\pi^3 \mu_0^2 H_0^2 f^2 L R^4}{2\rho} \cos^2(2\pi f t) \tag{1.23}$$

となる。

[1.3]

$$
\begin{aligned}
\frac{\langle P\rangle}{C}/\mathrm{K} &= \frac{\pi^3\mu_0^2 H_0^2 f^2 L R^4}{4\rho C} \\
&= \frac{2^{4+6}\times 10^{-14+8+2-3-8}\times \pi^5}{2^{2+2-1}\times 10^{-8}} \\
&= 128\pi^5\times 10^{-7}
\end{aligned} \tag{1.24}
$$

である。

$$\pi^5 \approx 3^5\cdot 1.05^5 \approx 243\cdot 1.25 \approx 300 \tag{1.25}$$

から、

$$\frac{\langle P\rangle}{C} \approx 4\times 10^{-3}\,\mathrm{K} \tag{1.26}$$

[2.1]

系の対称性から B_x について計算すればよい。Biot-Savart の法則より、

$$B_x = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia^2\,\mathrm{d}\theta}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} \tag{1.27}$$

[2.2]

$$B(x) = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(\frac{1}{(a^2+(b+x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2+(b-x)^2)^{3/2}}\right) \tag{1.28}$$

これを x について展開する。まず、$B(0)=0$ である。また、

$$B'(0) = -2\cdot\frac{\mu_0 I a}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{2b}{(a^2+b^2)^{5/2}} = \frac{3\mu_0 I a b}{(a^2+b^2)^{5/2}} \tag{1.29}$$

である。

$$B(x) = -B(-x) \tag{1.30}$$

から $B''(0) = -B''(0) = 0$ なので、

$$B(x) = -\frac{3\mu_0 I a^2 b}{(a^2+b^2)^{5/2}}x + \mathcal{O}(x^3) \tag{1.31}$$

と書ける。

[2.3]

電流が同じ向きの場合、

$$B(x) = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(\frac{1}{(a^2+(b+x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2+(b-x)^2)^{3/2}}\right) \tag{1.32}$$

となる。() 内第 1 項を無次元化したものを x について展開すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^2+b^2+2bx+x^2}{a^2+b^2}\right)^{-3/2} &= \left(1+\frac{2bx+x^2}{a^2+b^2}\right)^{-3/2} \\ &= 1-\frac{3}{2}\cdot\frac{2bx+x^2}{a^2+b^2}+\frac{15}{8}\cdot\frac{4b^2x^2+\mathcal{O}(x^3)}{(a^2+b^2)^2} \\ &= 1-\frac{3bx}{a^2+b^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{4b^2-a^2}{(a^2+b^2)^2}x^2+\mathcal{O}(x^3)\end{aligned} \tag{1.33}$$

これに $x \to -x$ とした式を足し上げ、定数倍することで $B(x)$ が得られる。したがって、$B(x)$ の x^2 に比例する項が消える条件は、

$$4b^2 - a^2 = 0 \tag{1.34}$$

とである。$a, b > 0$ から求める条件は

$$a = 2b \tag{1.35}$$

である。

物理学 II

第 1 問

[1.1]

まず波動関数の連続性から

$$\psi(\varepsilon) = \psi(-\varepsilon) \tag{1.36}$$

が成り立つ。ε は微小な正の数である。次に、Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \tag{1.37}$$

を $-\varepsilon$ から ε まで積分することで、

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi'(\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)\right) + \alpha\psi(0) = 0 \tag{1.38}$$

を得る。

[1.2]

境界条件から

$$1 + r = t \tag{1.39}$$

$$\frac{\mathrm{i}k\hbar^2}{2m}(t + r - 1) = \alpha(1 + r) \tag{1.40}$$

となる。整理すると、

$$1 + r = t \tag{1.41}$$

$$\mathrm{i}(t + r - 1) = 2C(1 + r) \tag{1.42}$$

となる。これを解くと、

$$r = \frac{C}{\mathrm{i} - C}, \quad t = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i} - C}. \tag{1.43}$$

[2.1]

$$
\begin{aligned}
\Psi(x_1, x_2) &\propto \det \begin{pmatrix} t\psi_+(x_1) + r\psi_-(x_1) & r\psi_+(x_1) + t\psi_-(x_1) \\ t\psi_+(x_2) + r\psi_-(x_2) & r\psi_+(x_2) + t\psi_-(x_2) \end{pmatrix} \\
&= (t^2 - r^2) \det \begin{pmatrix} t\psi_+(x_1) & t\psi_-(x_1) \\ t\psi_+(x_2) & t\psi_-(x_2) \end{pmatrix} \\
&= (t^2 - r^2)(\psi_+(x_1)\psi_-(x_2) - \psi_-(x_1)\psi_+(x_2)) \qquad (1.44)
\end{aligned}
$$

よって 2 粒子は反対方向に散乱される。

[2.2]

対称な場合、

$$
\begin{aligned}
\Psi(x_1, x_2) \propto\ & 2tr(\psi_+(x_1)\psi_+(x_2) + \psi_+(x_1)\psi_-(x_2)) \\
& + (t^2 + r^2)(\psi_+(x_1)\psi_-(x_2) + \psi_-(x_1)\psi_+(x_2)) \qquad (1.45)
\end{aligned}
$$

$$
tr = \frac{\mathrm{i}C}{(\mathrm{i} - C)^2} \qquad (1.46)
$$

は、$\alpha \to 0$ または $\alpha \to \infty$ で 0 になる。よって、このとき 2 粒子は反対方向に散乱される。また $C = \mathrm{i}$ すなわち、

$$
\alpha = \alpha_0 = \frac{\mathrm{i}\hbar^2 k}{m} = \mathrm{i}\hbar\sqrt{\frac{2E}{m}} \qquad (1.47)
$$

のとき、2 粒子は必ず同方向に散乱される。

[3]

$x < 0$ での波動関数を $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$、$0 < x < L$ での波動関数を $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$、$L < x$ での波動関数を $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-L+\delta)}$ とおく。接続条件は

$$
\begin{aligned}
& A + B = 1, && (1.48) \\
& \mathrm{i}(A - B - 1) = 2C, && (1.49) \\
& A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\delta}, && (1.50) \\
& \mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\delta} - A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL}) = 2C\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\delta} && (1.51)
\end{aligned}
$$

となる。上の 2 式から

$$
A = 1 - \mathrm{i}C, \quad B = \mathrm{i}C \qquad (1.52)
$$

となる。また下の 2 式から

$$A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(L-\delta)} = 1 + \mathrm{i}C, \quad B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(L+\delta)} = -\mathrm{i}C \tag{1.53}$$

となる。よって

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kL} = \frac{B}{A} \cdot \frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(L-\delta)}}{B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(L+\delta)}} = \frac{\mathrm{i}C}{1-\mathrm{i}C} \cdot \frac{1+\mathrm{i}C}{-\mathrm{i}C} = \frac{1+\mathrm{i}C}{-1+\mathrm{i}C}. \tag{1.54}$$

よって

$$L = \frac{1}{2k\mathrm{i}} \log \frac{1+\mathrm{i}C}{-1+\mathrm{i}C} \tag{1.55}$$

第 2 問

[1]

van der Waals の状態方程式

$$P = \frac{nk_{\mathrm{B}}T}{1-bn} - an^2 \tag{1.56}$$

について考える。まず

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T = 0 \quad \text{and} \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right)_T = 0 \tag{1.57}$$

となる点 T_c, n_c を求める。

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T &= \frac{k_{\mathrm{B}}T}{1-bn} + \frac{bnk_{\mathrm{B}}T}{(1-bn)^2} - 2an \\ &= \frac{k_{\mathrm{B}}T}{(1-bn)^2} - 2an = 0\end{aligned} \tag{1.58}$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right)_T = \frac{2bk_{\mathrm{B}}T}{(1-bn)^3} - 2a = 0 \tag{1.59}$$

よって、

$$\frac{2b}{1-bn} = \frac{1}{n}, \quad n_c = \frac{1}{3}\frac{1}{b}. \tag{1.60}$$

また

$$T_c = \frac{2an_c}{k_{\mathrm{B}}}(1-bn_c)^2 = \frac{8}{27}\frac{a}{k_{\mathrm{B}}b}. \tag{1.61}$$

このとき

$$P_c = \frac{n_c k_{\mathrm{B}} T_c}{1-bn_c} - an_c^2 = \frac{4a}{27b^2} - \frac{a}{9b^2} = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2}. \tag{1.62}$$

[2]

$$
\begin{aligned}
K_T &= -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \\
&= \left[-V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\right]^{-1} \\
&= \left[n\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T\right]^{-1} \\
&= \left(\frac{nk_{\mathrm{B}}T}{(1-bn)^2} - 2an^2\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{1.63}
$$

$n = n_c = 1/3b$ のとき、

$$
K_T = \frac{1}{n_c}\left(\frac{9}{4}k_{\mathrm{B}}T - \frac{2a}{3b}\right)^{-1} = \frac{4}{9}\frac{1}{n_c k_{\mathrm{B}}(T-T_c)} \tag{1.64}
$$

となる。

[3]

$$
\begin{aligned}
Z_0(T,V,N) &= \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\exp\left(-\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}\frac{p^2}{2m}\right)\right]^{3N} \\
&= \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}}(2mk_{\mathrm{B}}T)^{3N/2}
\end{aligned} \tag{1.65}
$$

$$
\begin{aligned}
F_0(T,V,N) &= -k_{\mathrm{B}}T\ln Z_0(T,V,N) \\
&= -Nk_{\mathrm{B}}T\left(\ln\frac{V}{h^3} - \ln N + 1 + \frac{3}{2}\ln(2mk_{\mathrm{B}}T)\right)
\end{aligned} \tag{1.66}
$$

[4]

$$
A \approx \left(\frac{V-Nv}{V}\right)^N \left[1 - \frac{4\pi}{V}\int_l^{\infty} r^2\frac{u(r)}{k_{\mathrm{B}}T}\mathrm{d}r\right]^{N(N-1)/2} \tag{1.67}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{4\pi}{V}\int_l^\infty r^2\frac{u(r)}{k_\mathrm{B}T}\,\mathrm{d}r &= -\frac{4\pi\varepsilon}{k_\mathrm{B}TV}\int_l^\infty \frac{l^6}{r^4}\,\mathrm{d}r \\
&= -\frac{4\pi\varepsilon l^3}{3k_\mathrm{B}TV} \\
&= -\frac{\varepsilon}{k_\mathrm{B}T}\frac{2v}{V}
\end{aligned} \tag{1.68}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln A &\approx N\ln\left(\frac{V-Nv}{V}\right)+\frac{N(N-1)}{2}\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{k_\mathrm{B}T}\frac{2v}{V}\right) \\
&\approx N\ln\left(\frac{V-Nv}{V}\right)+\frac{\varepsilon}{k_\mathrm{B}T}\frac{vN^2}{V}
\end{aligned} \tag{1.69}
$$

$$
F=-Nk_\mathrm{B}T\left(\ln\frac{V-Nv}{Nh^3}+1+\frac{3}{2}\ln(2mk_\mathrm{B}T)+\frac{\varepsilon}{k_\mathrm{B}T}\frac{vN}{V}\right) \tag{1.70}
$$

[**5**]

$$
\begin{aligned}
P=-\frac{\partial F}{\partial V} &= \frac{Nk_\mathrm{B}T}{V-Nv}-\frac{v\varepsilon N^2}{V^2} \\
&= \frac{nk_\mathrm{B}T}{1-vn}-\varepsilon vn^2
\end{aligned} \tag{1.71}
$$

[**6**]

$$
b=v,\quad a=\varepsilon v \tag{1.72}
$$

第 3 問

[1.1]

$$E^{\mathrm{i}}(z,t) = E_0^{\mathrm{i}} \exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\omega n_0}{c}z + \omega t\right)\right] \tag{1.73}$$

$$H^{\mathrm{i}}(z,t) = H_0^{\mathrm{i}} \exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\omega n_0}{c}z + \omega t\right)\right] \tag{1.74}$$

Maxwell の方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1.75}$$

より、

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \tag{1.76}$$

が成り立つ。

$$-\mathrm{i}\frac{\omega n_0}{c}E_0^{\mathrm{i}} = \mathrm{i}\omega\mu_0 H_0^{\mathrm{i}} \tag{1.77}$$

$$H_0^{\mathrm{i}} = -\frac{n_0}{c\mu_0}E_0^{\mathrm{i}} \tag{1.78}$$

[1.2]

$$E_0^{\mathrm{i}} + E_0^{\mathrm{r}} = E_0^{\mathrm{t}}, \quad H_0^{\mathrm{i}} + H_0^{\mathrm{r}} = H_0^{\mathrm{t}} \tag{1.79}$$

[1.3]

境界条件は以下のように書き直せる。

$$E_0^{\mathrm{i}} + E_0^{\mathrm{r}} = E_0^{\mathrm{t}} \tag{1.80}$$

$$\frac{n_0}{c\mu_0}(E_0^{\mathrm{i}} - E_0^{\mathrm{r}}) = \frac{n_{\mathrm{g}}}{c\mu_0}E_0^{\mathrm{t}} \tag{1.81}$$

これを解くと、

$$E_0^{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_{\mathrm{g}}}{n_0}\right)E_0^{\mathrm{t}} \tag{1.82}$$

$$E_0^{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n_{\mathrm{g}}}{n_0}\right)E_0^{\mathrm{t}} \tag{1.83}$$

となる。振幅反射係数 $r_0 = E_0^{\mathrm{r}}/E_0^{\mathrm{i}}$ は、

$$r_0 = \frac{E_0^{\mathrm{r}}}{E_0^{\mathrm{i}}} = \frac{n_0 - n_{\mathrm{g}}}{n_0 + n_{\mathrm{g}}} \tag{1.84}$$

となる。

[2.1]

$$E_l(z,t) = \left\{ E_l^- \exp\left[-\mathrm{i}\frac{\omega n_l}{c}(z - z_l) \right] + E_l^+ \exp\left[\mathrm{i}\frac{\omega n_l}{c}(z - z_l) \right] \right\} \exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{1.85}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \tag{1.86}$$

$$H_l^{\pm} = \mp \frac{n_l}{c\mu_0} E_l^{\pm} \tag{1.87}$$

[2.2]

第 l 層の厚みを $d_l = z_{l-1} - z_l$ とする。$z = z_{l-1}$ における境界条件は

$$E_l(z_{l-1}, t) = E_{l-1}(z_{l-1}, t), \quad H_l(z_{l-1}, t) = H_{l-1}(z_{l-1}, t), \tag{1.88}$$

で与えられる。電場の境界条件は、

$$E_l^- \exp\left[-\mathrm{i}\frac{\omega n_l d_l}{c} \right] + E_l^+ \exp\left[\mathrm{i}\frac{\omega n_l d_l}{c} \right] = E_{l-1}^- + E_{l-1}^+ \tag{1.89}$$

となる。磁場の境界条件は、

$$-n_l E_l^- \exp\left[-\mathrm{i}\frac{\omega n_l d_l}{c} \right] + n_l E_l^+ \exp\left[\mathrm{i}\frac{\omega n_l d_l}{c} \right] = -n_{l-1} E_{l-1}^- + n_{l-1} E_{l-1}^+ \tag{1.90}$$

となる。よって、$\Delta_l = n_l \omega d_l / c$ とおくと、

$$\frac{E_{l-1}^- - E_{l-1}^+}{E_{l-1}^- + E_{l-1}^+} = \frac{n_l}{n_{l-1}} \cdot \frac{E_l^- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta_l} - E_l^+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta_l}}{E_l^- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta_l} + E_l^+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta_l}} \tag{1.91}$$

すなわち、

$$\alpha_l = \frac{n_l}{n_{l-1}} \tag{1.92}$$

[2.3]

$\varDelta_l = \pi/2$ のとき、

$$\frac{E_{l-1}^{-} - E_{l-1}^{+}}{E_{l-1}^{-} + E_{l-1}^{+}} = \frac{n_l}{n_{l-1}} \cdot \frac{E_l^{-} + E_l^{+}}{E_l^{-} - E_l^{+}} \tag{1.93}$$

である。屈折率 $n_{\mathrm{L}}, n_{\mathrm{H}}$ の層を空気側から $LHLH \cdots LH$ と交互に重ねていく場合に、漸化式を繰り返し用いると、

$$\begin{aligned}\frac{E_{2N+1}^{-} + E_{2N+1}^{+}}{E_{2N+1}^{-} - E_{2N+1}^{+}} &= \frac{n_{\mathrm{H}}}{n_{\mathrm{g}}} \cdot \frac{E_{2N}^{-} - E_{2N}^{+}}{E_{2N}^{-} + E_{2N}^{+}} \\ &= \cdots = \frac{n_0 n_{\mathrm{H}}^{2N}}{n_{\mathrm{g}} n_{\mathrm{L}}^{2N}} \cdot \frac{E_0^{-} - E_0^{+}}{E_0^{-} + E_0^{+}}\end{aligned} \tag{1.94}$$

となる。$E_{2N+1}^{+} = 0$ から

$$\frac{1 - r_1}{1 + r_1} = \frac{n_{\mathrm{g}} n_{\mathrm{L}}^{2N}}{n_0 n_{\mathrm{H}}^{2N}}, \quad r_1 = \frac{E_0^{+}}{E_0^{-}} \tag{1.95}$$

となる。したがって、

$$r_1 = \frac{n_0 n_{\mathrm{H}}^{2N} - n_{\mathrm{g}} n_{\mathrm{L}}^{2N}}{n_0 n_{\mathrm{H}}^{2N} + n_{\mathrm{g}} n_{\mathrm{L}}^{2N}} \tag{1.96}$$

であり、反射防止条件 $r_1 \leq 0$ は

$$n_0 n_{\mathrm{H}}^{2N} \leq n_{\mathrm{g}} n_{\mathrm{L}}^{2N}, \quad \frac{n_{\mathrm{L}}}{n_{\mathrm{H}}} \geq \left(\frac{n_0}{n_{\mathrm{g}}}\right)^{1/2N} \tag{1.97}$$

となる。

第 4 問

[1.1]

化学ポテンシャル μ は内部エネルギー $U(S,V,N)$ (S はエントロピー、Vは体積、N は粒子数) に対し

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N \tag{1.98}$$

によって定義される。(T は温度、p は圧力)

2 つの系の間で粒子のやりとりが許され、化学ポテンシャルが高い方から低い方へ粒子が流れる。今の場合、金属板 M と半導体板 S で化学ポテンシャルが異なったために電荷が移動した。

[1.2]

微小な電荷 δq が M から S へ移動するときの静電エネルギーの変化は

$$\frac{\rho d}{\varepsilon_0}\,\delta q \tag{1.99}$$

で与えられる。一方電荷の移動によって獲得される化学ポテンシャルの差分は

$$(W-\phi_{\mathrm{s}})\frac{\delta q}{e} \tag{1.100}$$

となる。これらが釣り合うことから、

$$\rho = \frac{\varepsilon_0}{ed}(W-\phi_{\mathrm{s}}). \tag{1.101}$$

[1.3]

M, S の間の力は、

$$A\rho\cdot\frac{\rho}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 A}{2e^2d^2}|W-\phi_{\mathrm{s}}|^2 \tag{1.102}$$

[1.4]

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \frac{\varepsilon_0}{ed}(W-\phi_{\mathrm{s}})\left(1+\frac{\delta}{d}\sin\varOmega t\right)^{-1}\\ &\approx \frac{\varepsilon_0}{ed}(W-\phi_{\mathrm{s}})\left(1-\frac{\delta}{d}\sin\varOmega t\right)\end{aligned} \tag{1.103}$$

から、電流は

$$I(t) = A\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon_0 A\delta}{ed^2}(W - \phi_\mathrm{s})\varOmega\cos\varOmega t \tag{1.104}$$

となる。よって、

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0 A\delta}{ed^2}|W - \phi_\mathrm{s}|\varOmega \tag{1.105}$$

[2.1]

$\varDelta_\mathrm{s}$ は電子を S から M へ動かすときに必要なエネルギーなので、化学ポテンシャルの差に一致する。すなわち、

$$\varDelta_\mathrm{s} = W - \phi_\mathrm{s} \tag{1.106}$$

[2.2]

伝導電子の分布は電圧を $V(x) = Ex$ として、

$$\mathrm{e}^{eEx/k_\mathrm{B}T} \tag{1.107}$$

に比例する。E の符号によって電荷空乏層に電子が供給されるかが変化するため、整流特性が生じる。