

# Instrumentação para Física de partículas

Alberto Reis

## II - Noções preliminares

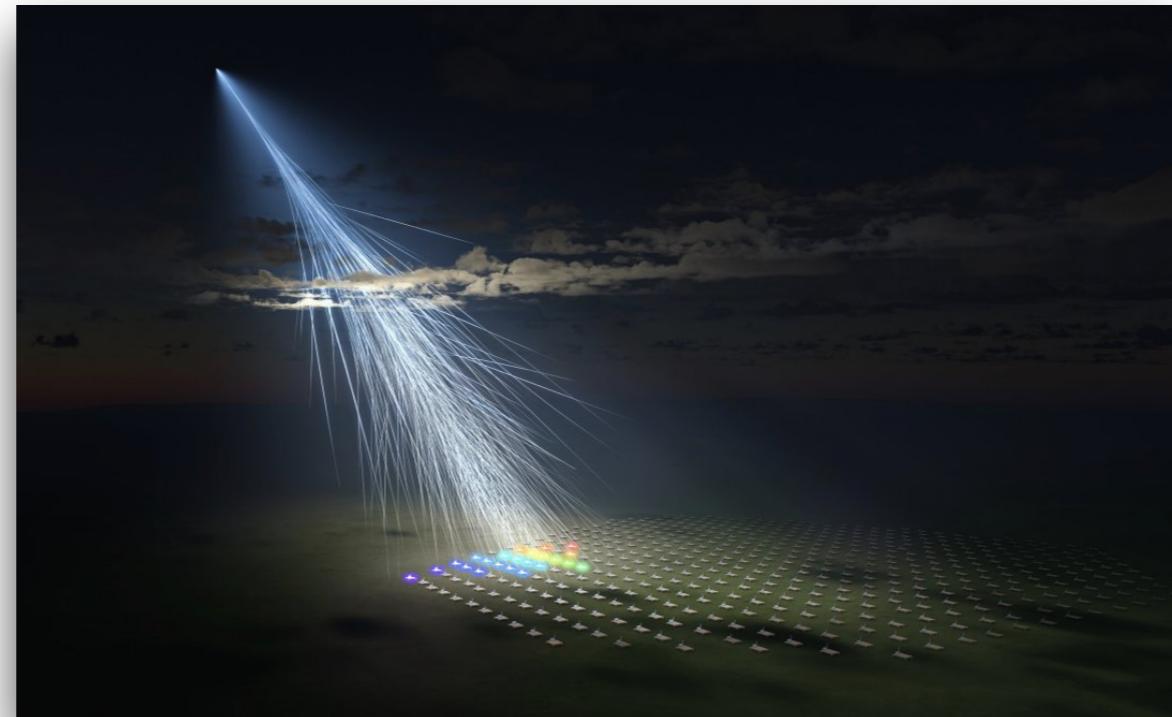


Imagen: Tyuunosuke Tajkeshige



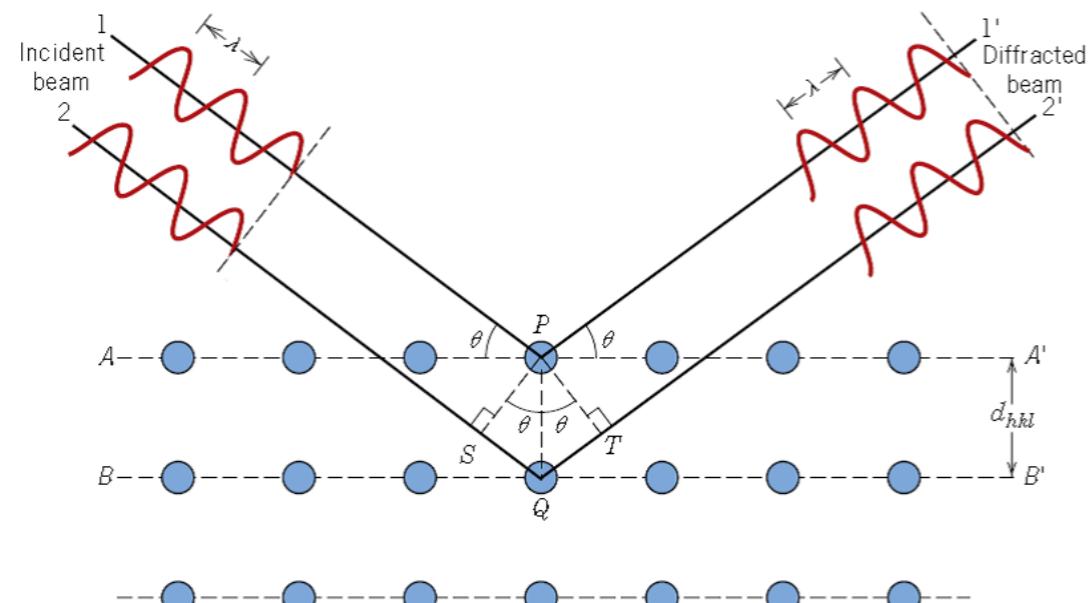
# A conferência Solvay de 1927



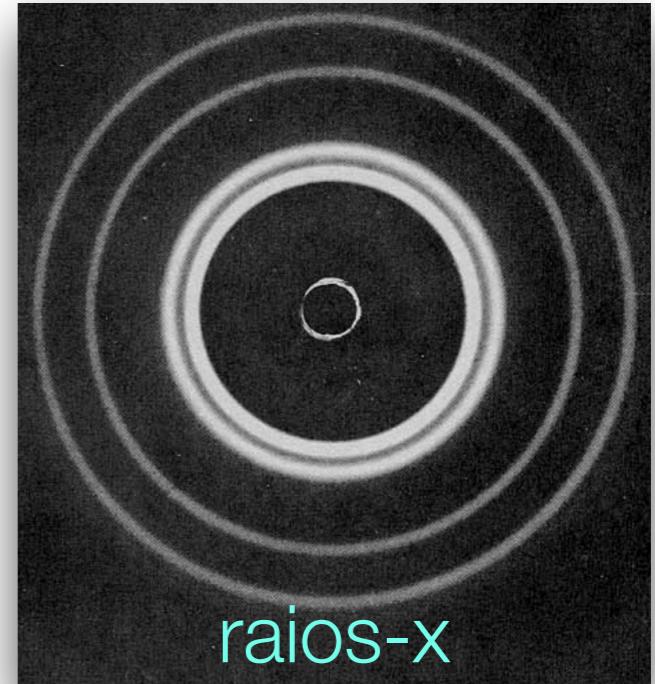
<https://marinamaral.com/portfolio/solvay-conference/>

# LUZ: ONDA OU PARTÍCULA?

A luz se **comporta** como ondas em algumas circunstâncias...

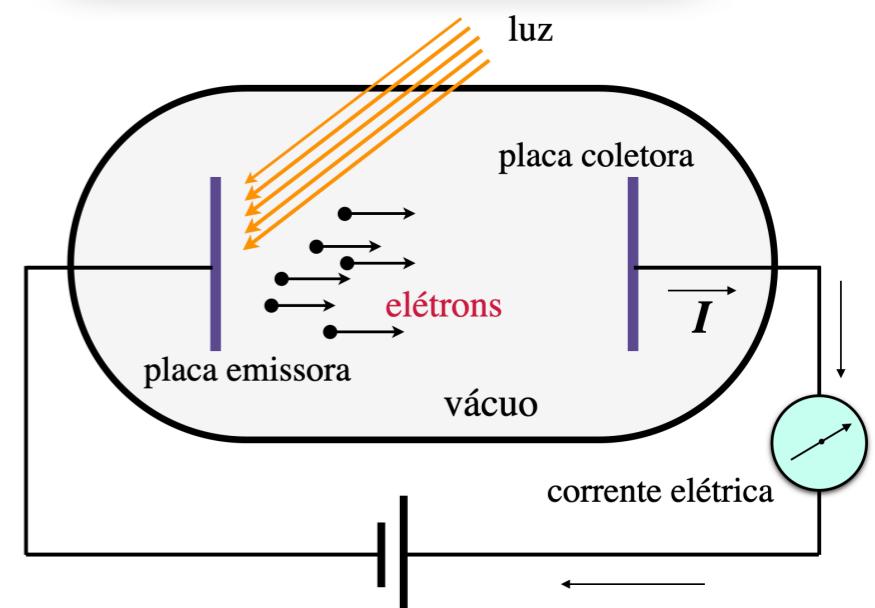


difração de Bragg



... e se **comporta** como partículas em outras

- Um feixe luminoso de frequência  $\nu$  é composto por fótons com energia  $E = h\nu$  e momento  $p = E/c = h/\lambda$



efeito fotoelétrico

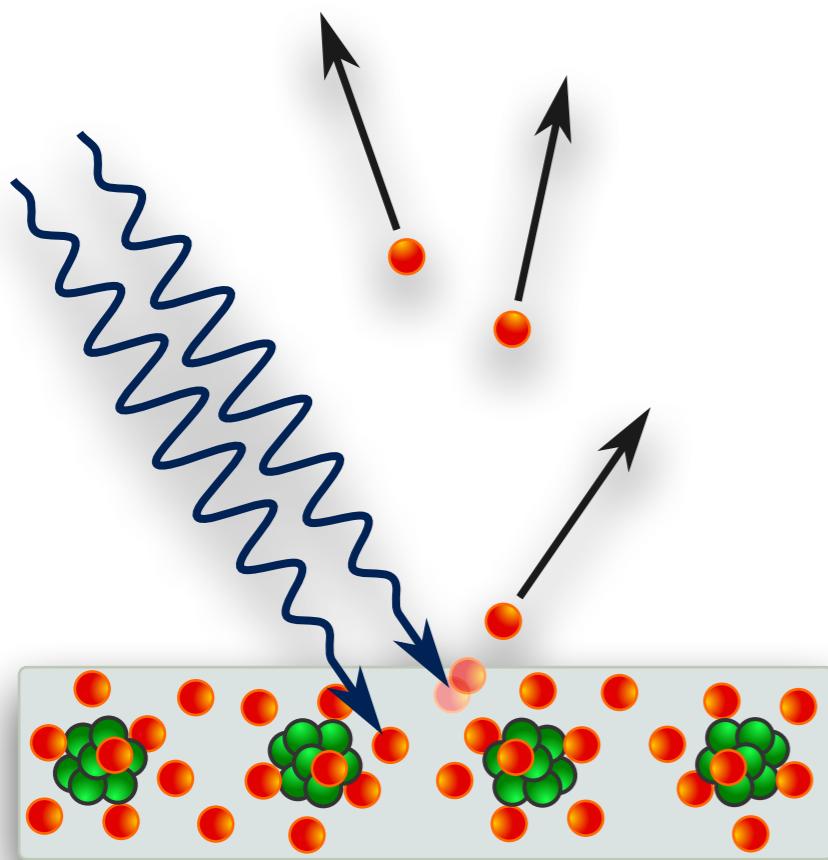
Fótons colidem com elétrons atômicos na superfície de metais

energia do fóton

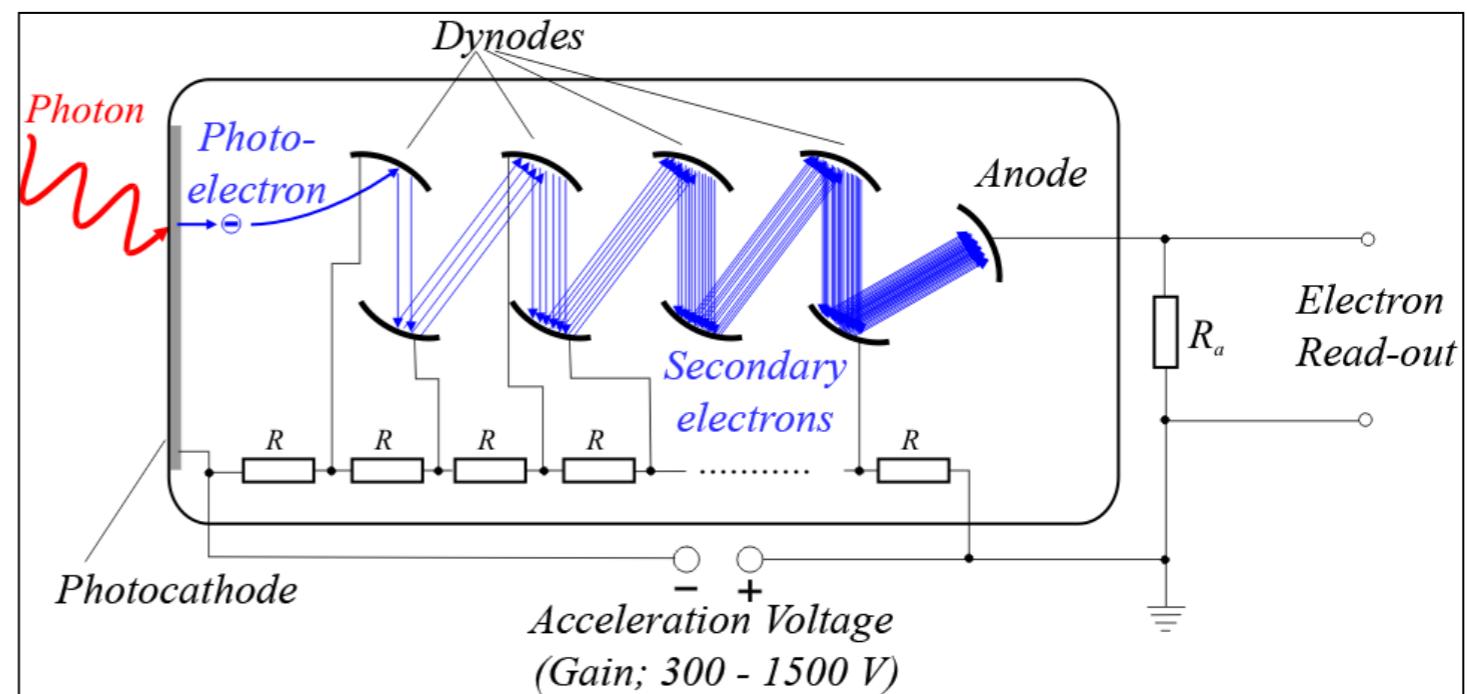
$$T = h\nu - W$$

energia cinética do elétron

energia de ligação

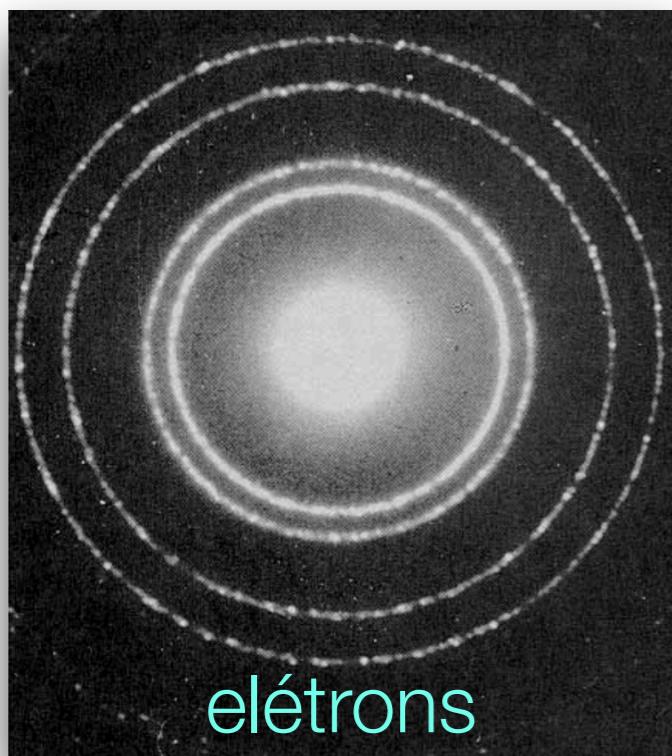
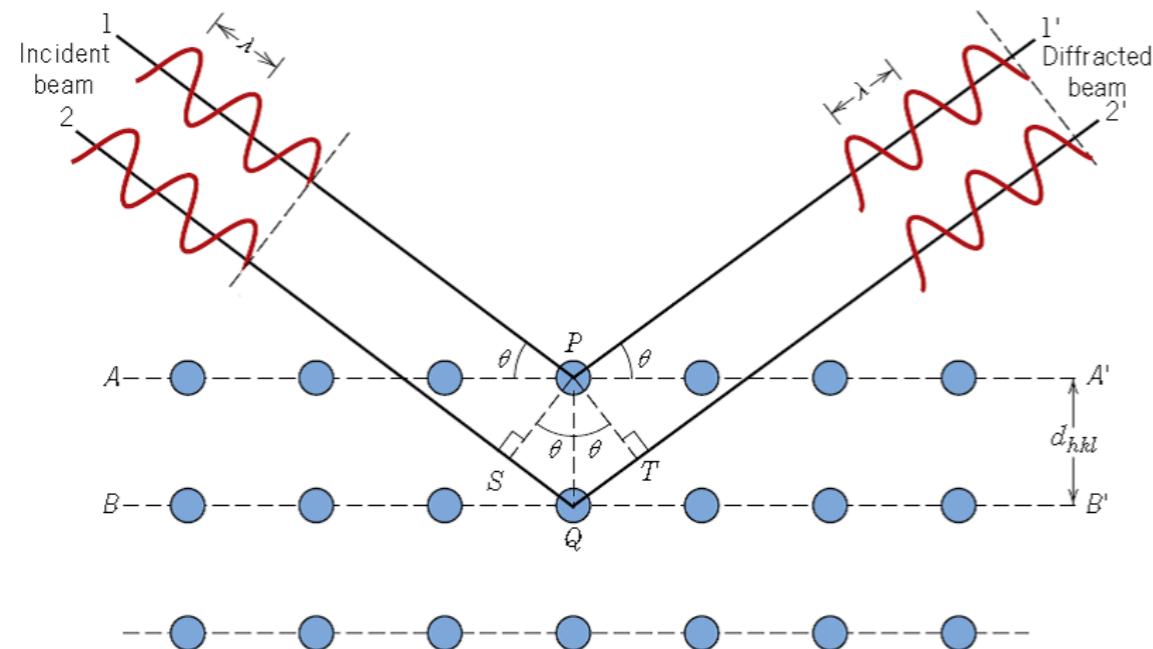


Hamamatsu

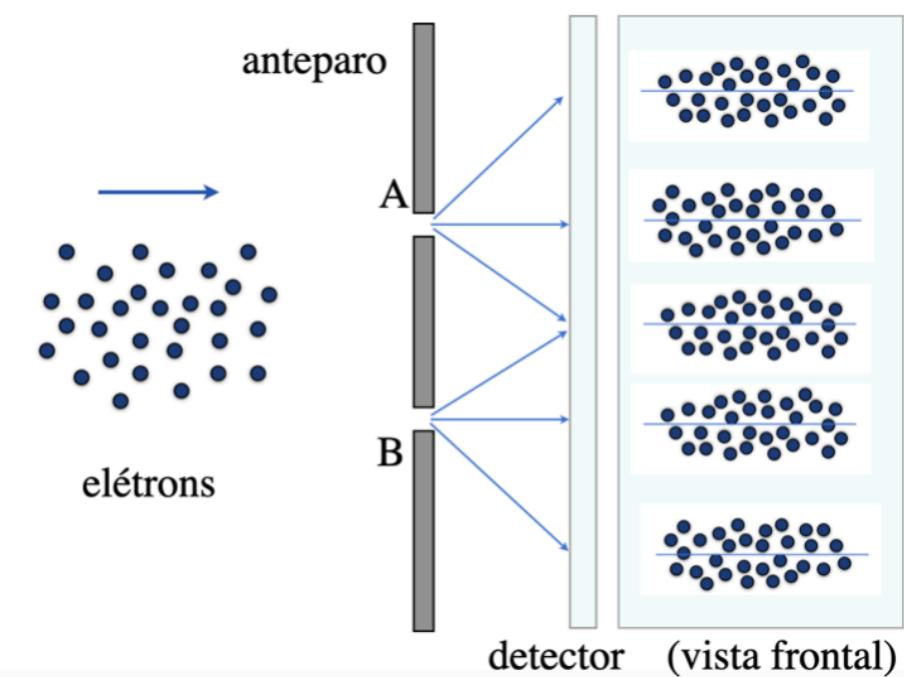
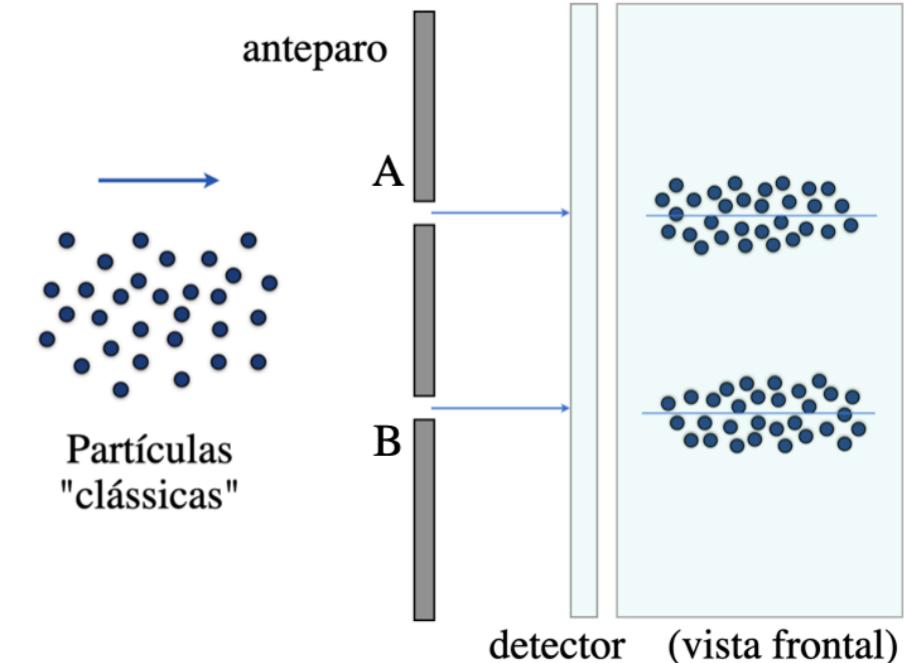


# ELÉTRONS: PARTÍCULAS OU ONDAS?

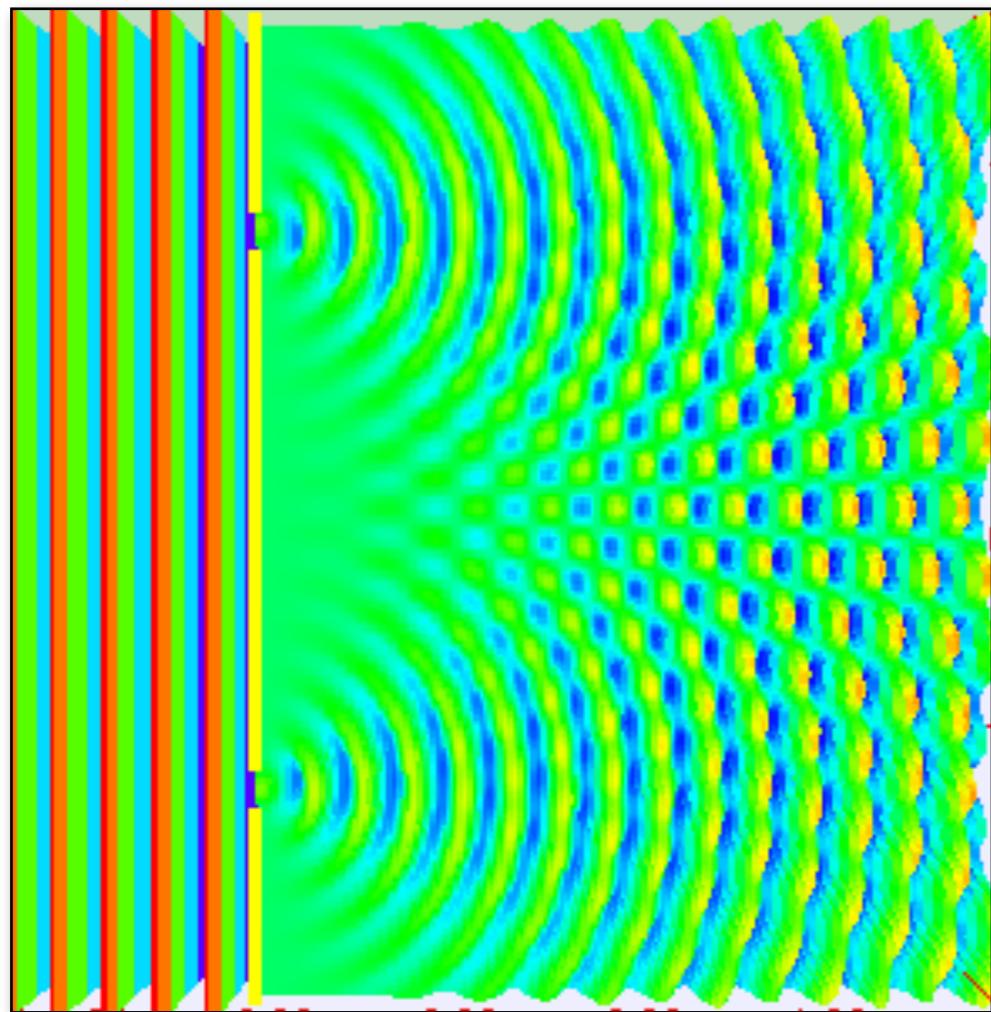
Elétrons também se *comportam* como ondas em algumas circunstâncias



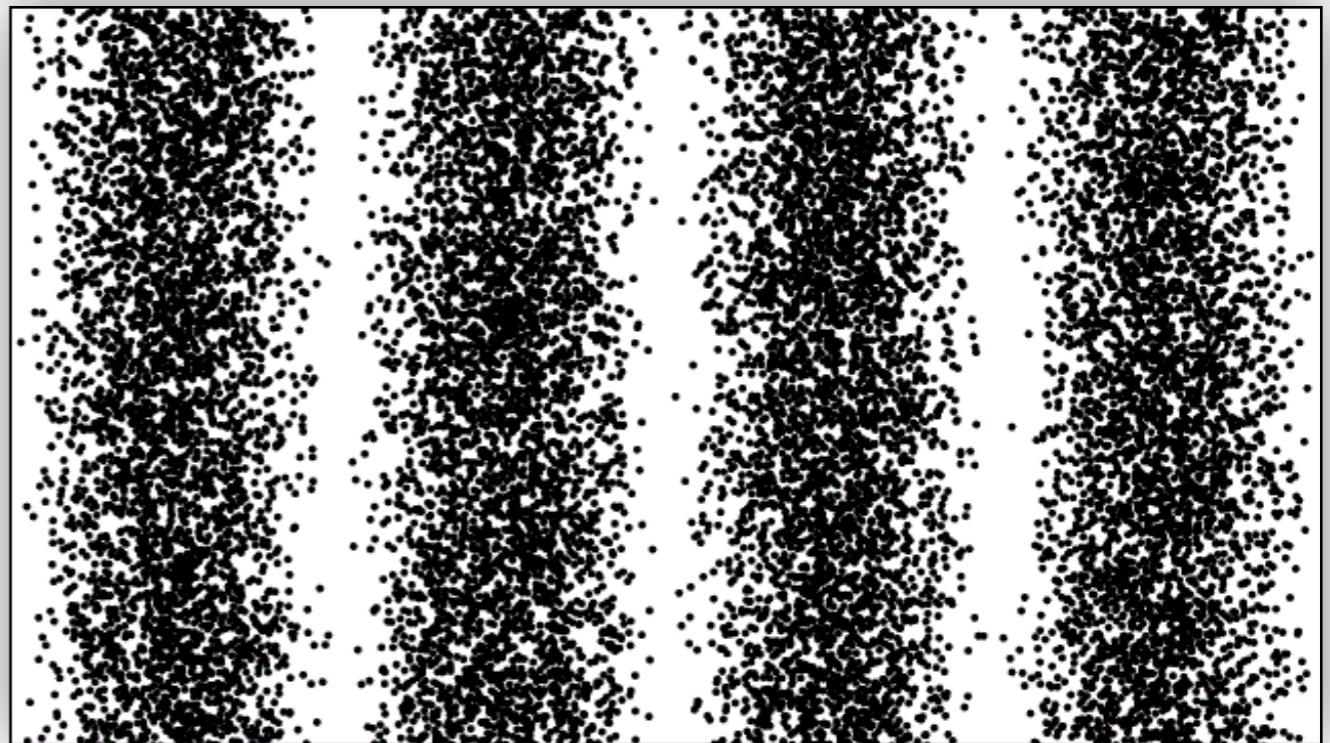
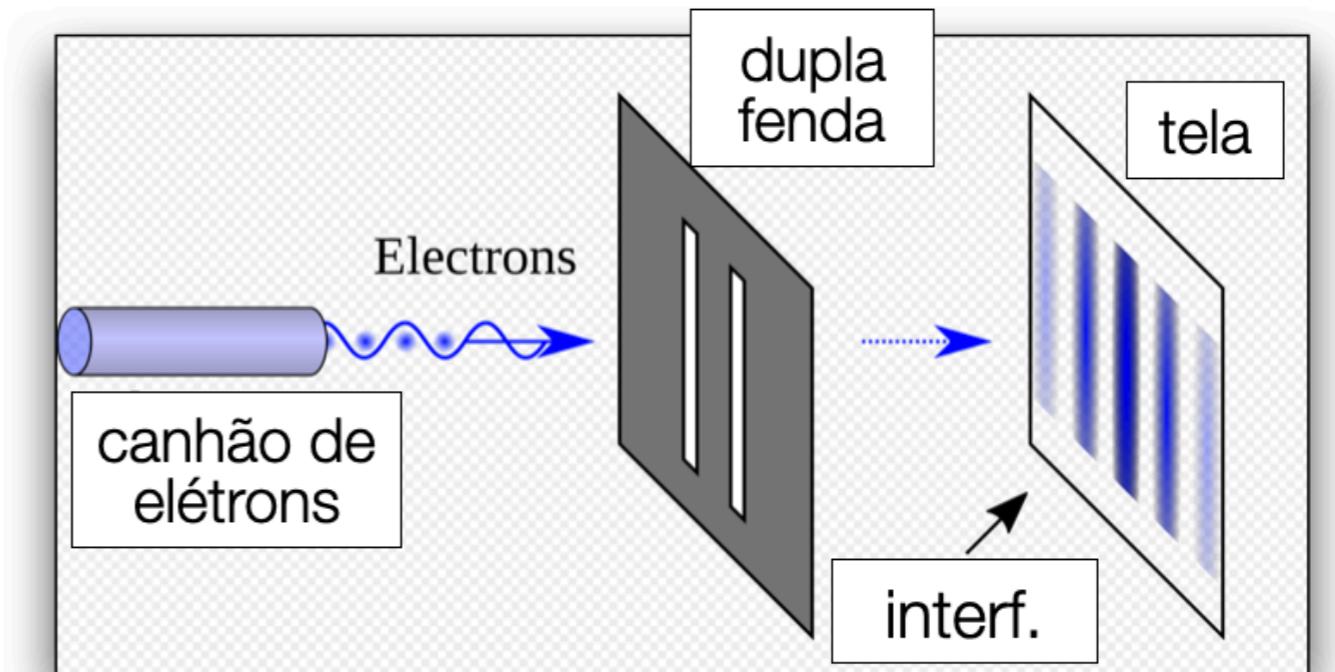
Elétrons de momento  $p$   
se propagam como uma  
onda de comprimento  
de onda  $\lambda = h/p$



## DUPLA FENDA



simulação numérica de um tanque de água onde ondas planas passam por um anteparo com duas fendas



## PRINCÍPIO DE INCERTEZA

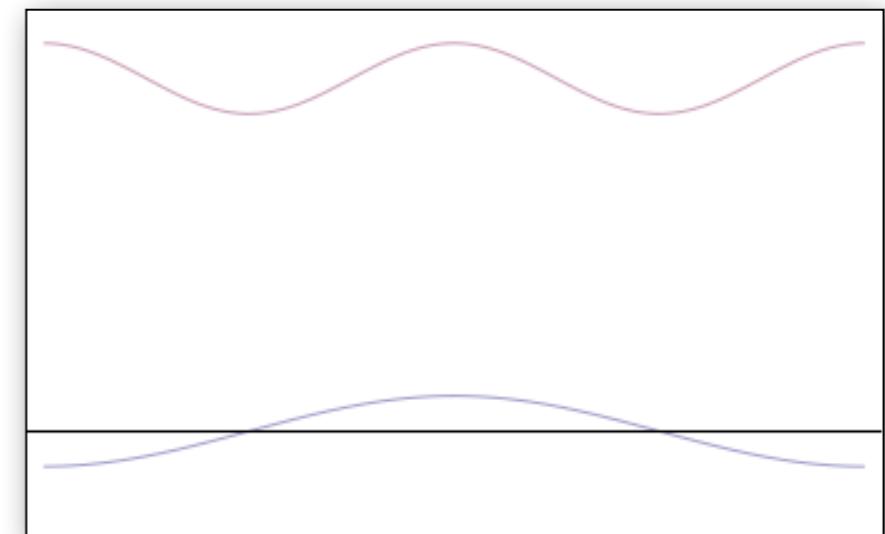
O Princípio de Incerteza implica uma limitação inevitável da capacidade de se obter informações sobre o estado de qualquer sistema quântico.

É impossível determinar, simultaneamente e com precisão absoluta, posição e momentum, ou energia e tempo:

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \frac{h}{2\pi}$$

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \frac{h}{2\pi}$$

Um pacote de onda é uma superposição de várias ondas planas com frequências distintas. Cada onda plana tem um valor bem definido de energia.

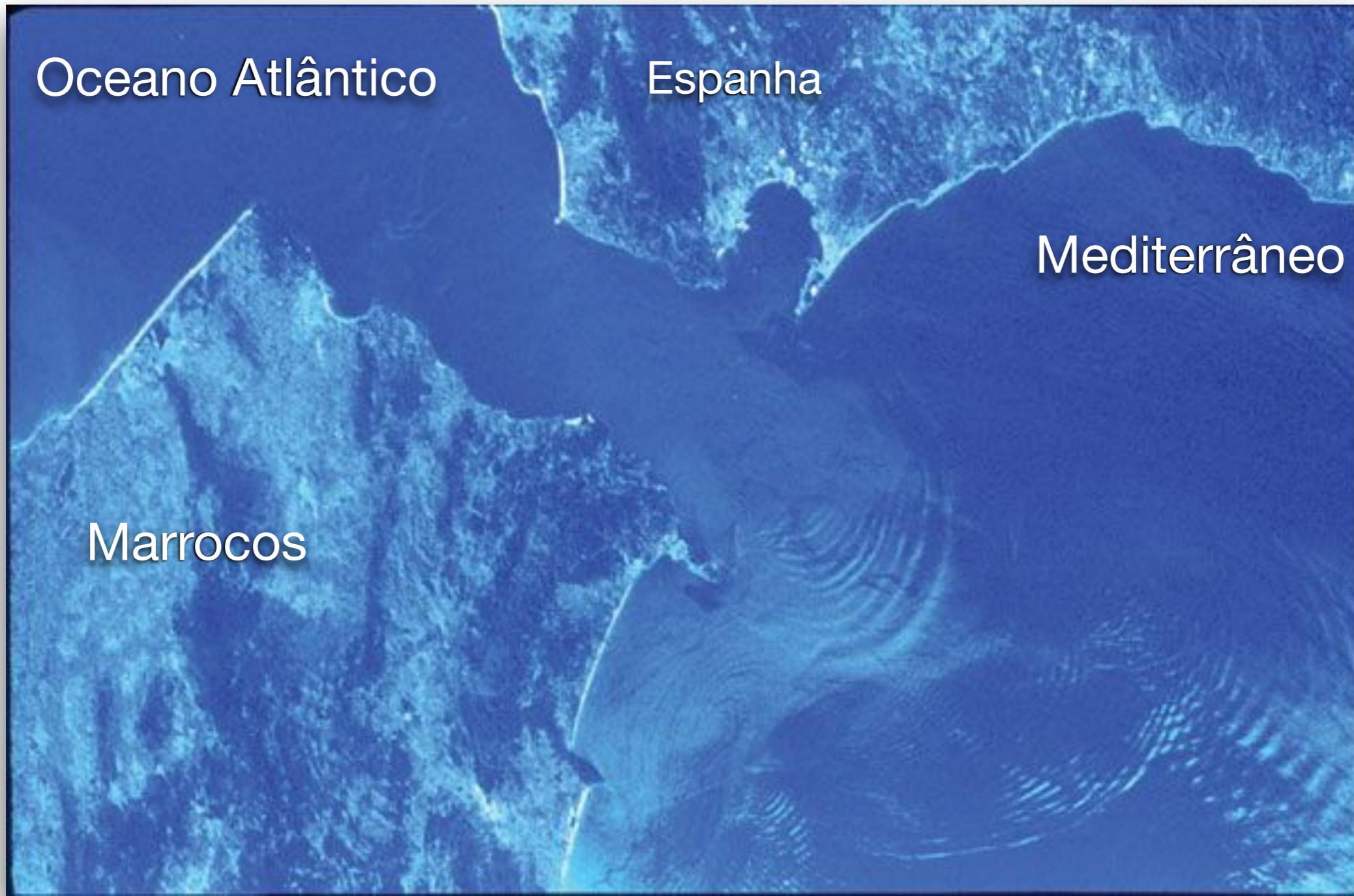


Quanto mais ondas são adicionadas, mais localizado é o pacote, menos informação temos sobre a energia da partícula.

Na MQ não há o equivalente ao conceito clássico de trajetória.

# A universalidade dos fenômenos ondulatórios.

<https://www.nature.com/articles/440036a>



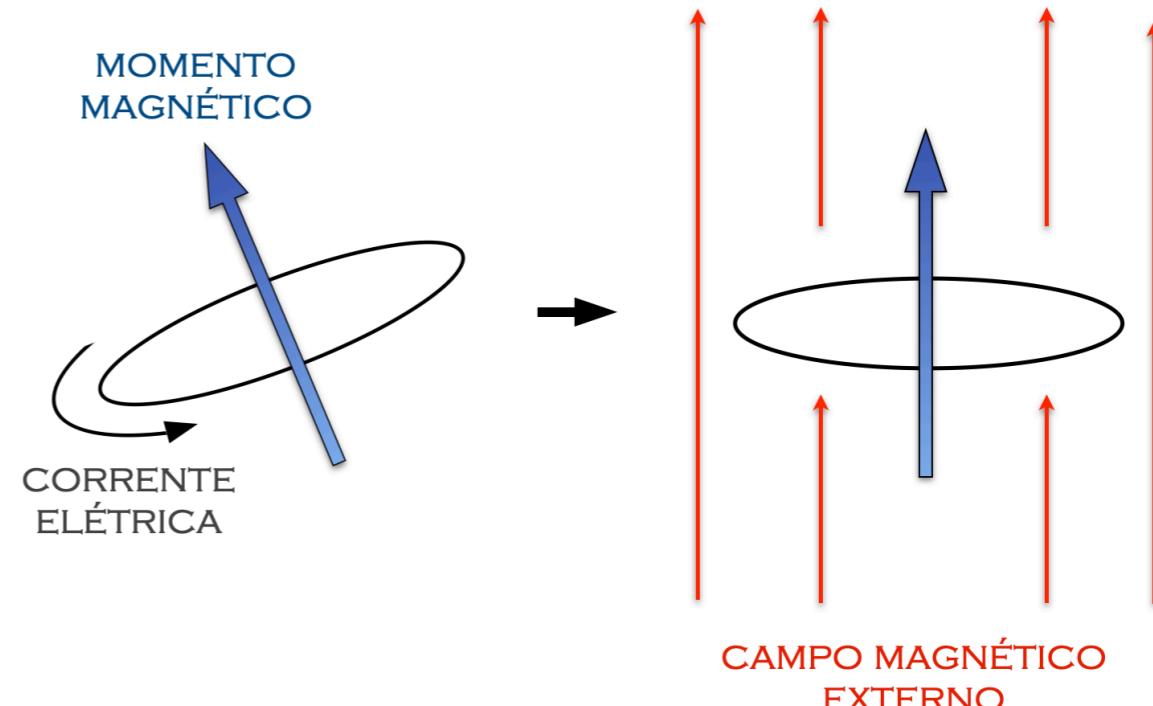
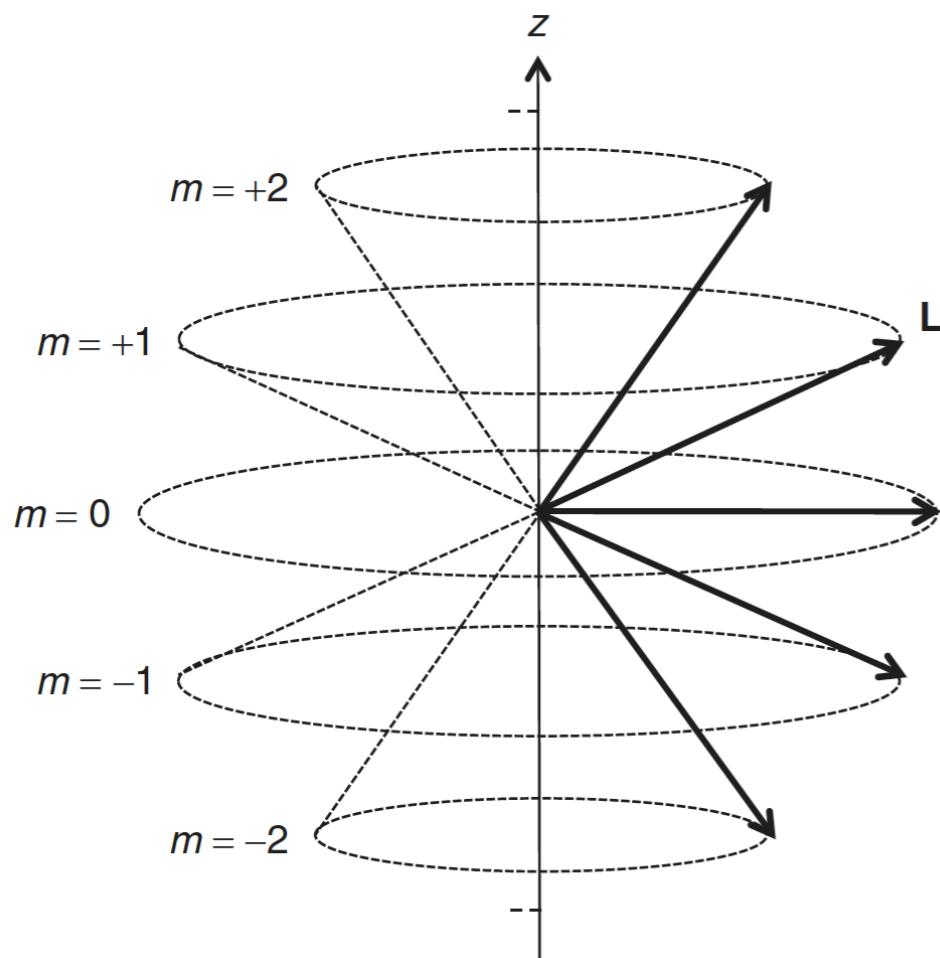
Fotografia: missão espacial STS-41G, da NASA.

Difração de ondas através do estreito de Gibraltar

# SPIN

O momento de dipolo magnético se alinha com o campo externo uniforme

- É possível medir apenas o spin e a sua projeção em um dos eixos (z, por ex).



- As partículas são classificadas de acordo com o *spin*  
férmions:  $\frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$       bósons:  $0, \hbar, 2\hbar, \dots$

Princípio de exclusão de Pauli:  
Dois férmions não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente

## EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

A equação de Schrödinger é uma equação de onda.  
Descreve a propagação de uma partícula não relativista e sem spin:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \xrightarrow{\text{ }} \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad p \rightarrow -i\hbar \nabla = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \quad \left( \hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \right)$$

constante  
de Plank

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] \psi(\vec{r}, t)$$

As soluções da eq. de Schrödinger são as *funções de onda*, ondas de probabilidade que *transportam informação*

Uma quantidade observável (energia ou momentum, por ex.) corresponde à ação de um operador sobre a função de onda.

operador                          autovalor

$$\hat{A}\psi = a\psi$$

# Orbitais atômicos

*Regiões do espaço, no interior de um átomo, onde um elétron pode ser encontrado com 90% de probabilidade*

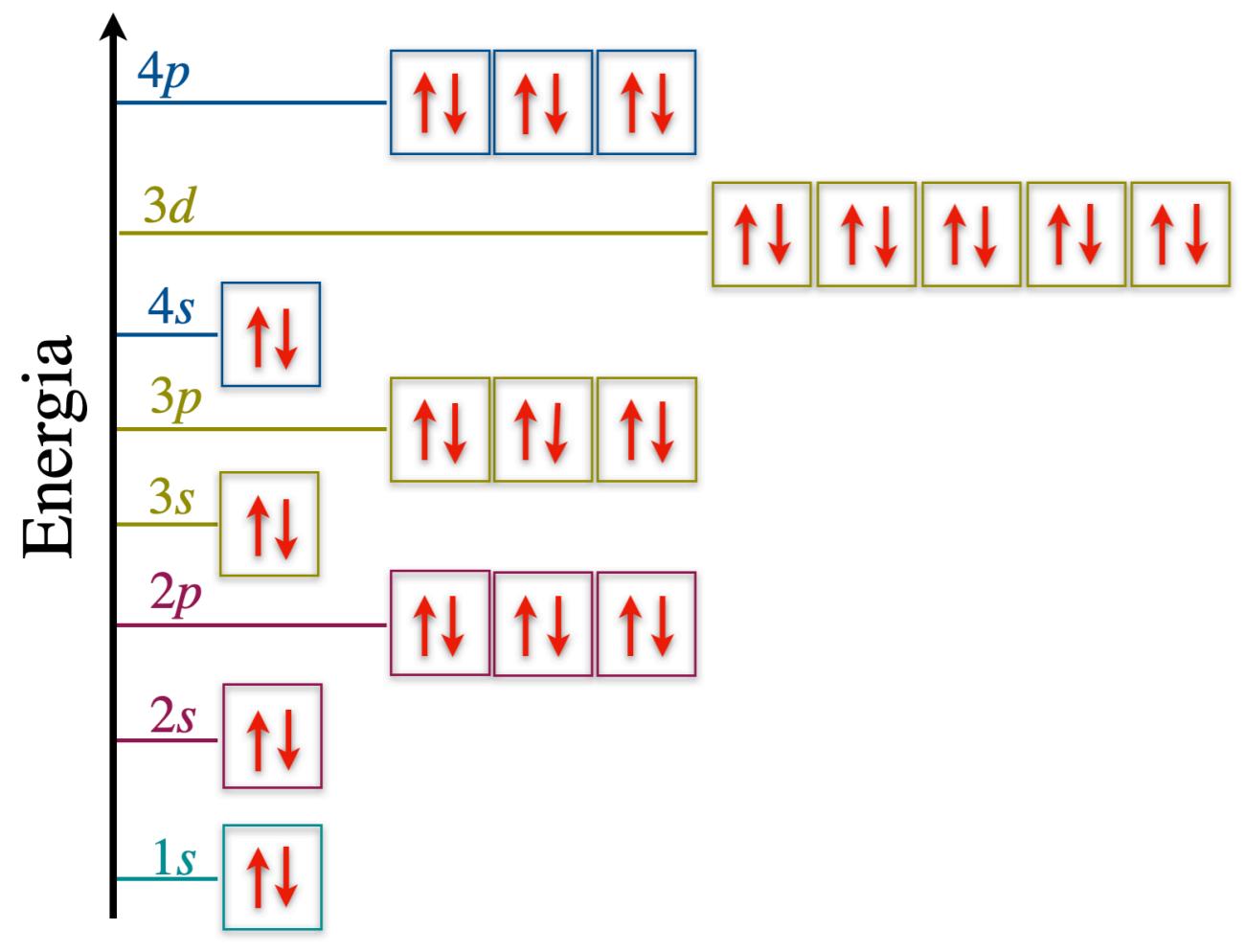
são definidos por três números quânticos:

- número quântico principal,  $n$ : energia      ( $n = 1, 2, 3, \dots, 7$ )
- número quântico azimutal,  $l$ : formato      ( $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ )
- número quântico magnético,  $m_l$ : orientação espacial      ( $-l < m_l < l$ )

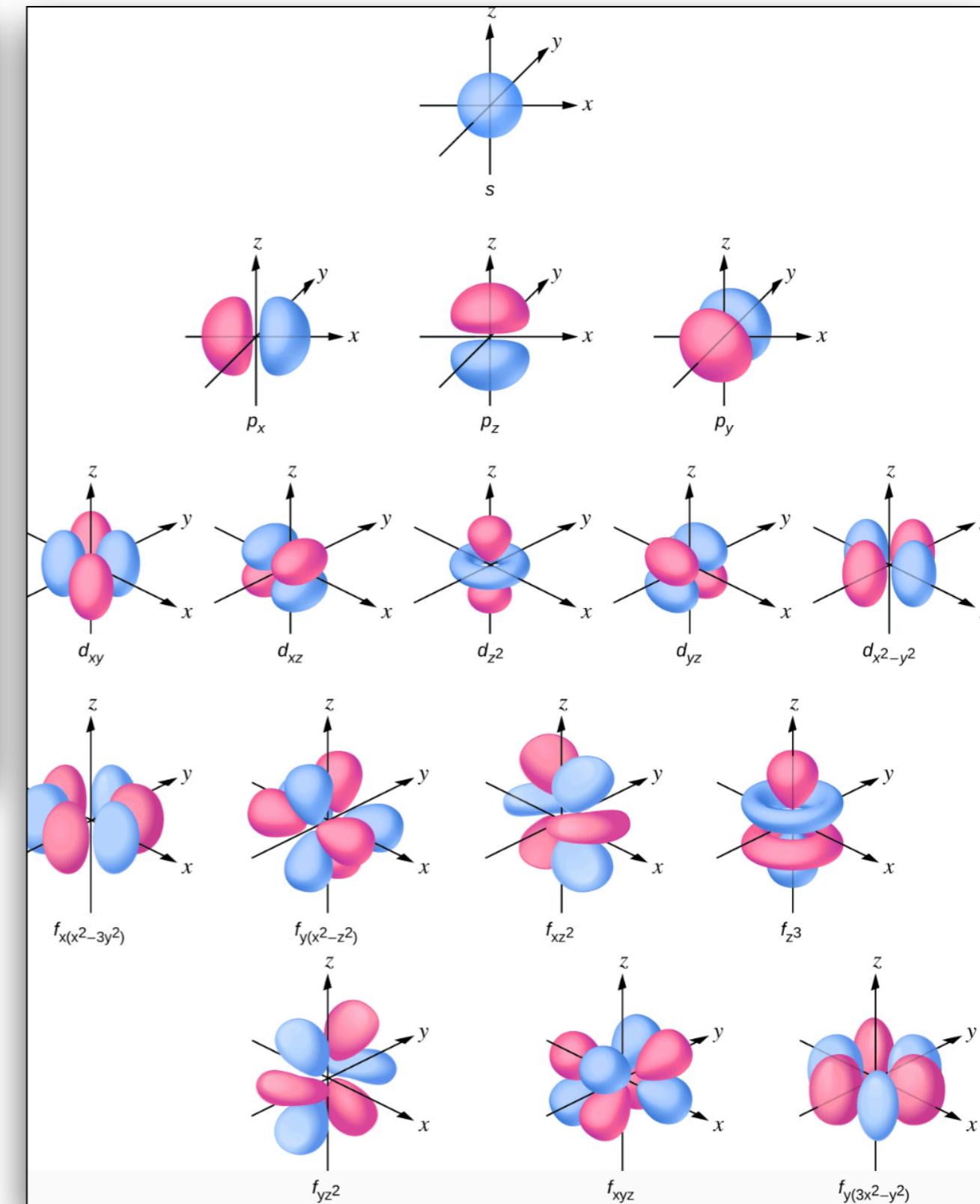
$n$	$l$	$m_l$	designação
1	0	0	$1s$
2	0	0	$2s$
2	1	-1, 0, 1	$2p$
3	0	0	$3s$
3	1	-1, 0, 1	$3p$

$n$	$l$	$m_l$	designação
3	2	-2, -1, 0, 1, 2	$3d$
4	0	0	$4s$
4	1	-1, 0, 1	$4p$
4	2	-2, -1, 0, 1, 2	$4d$
		:	

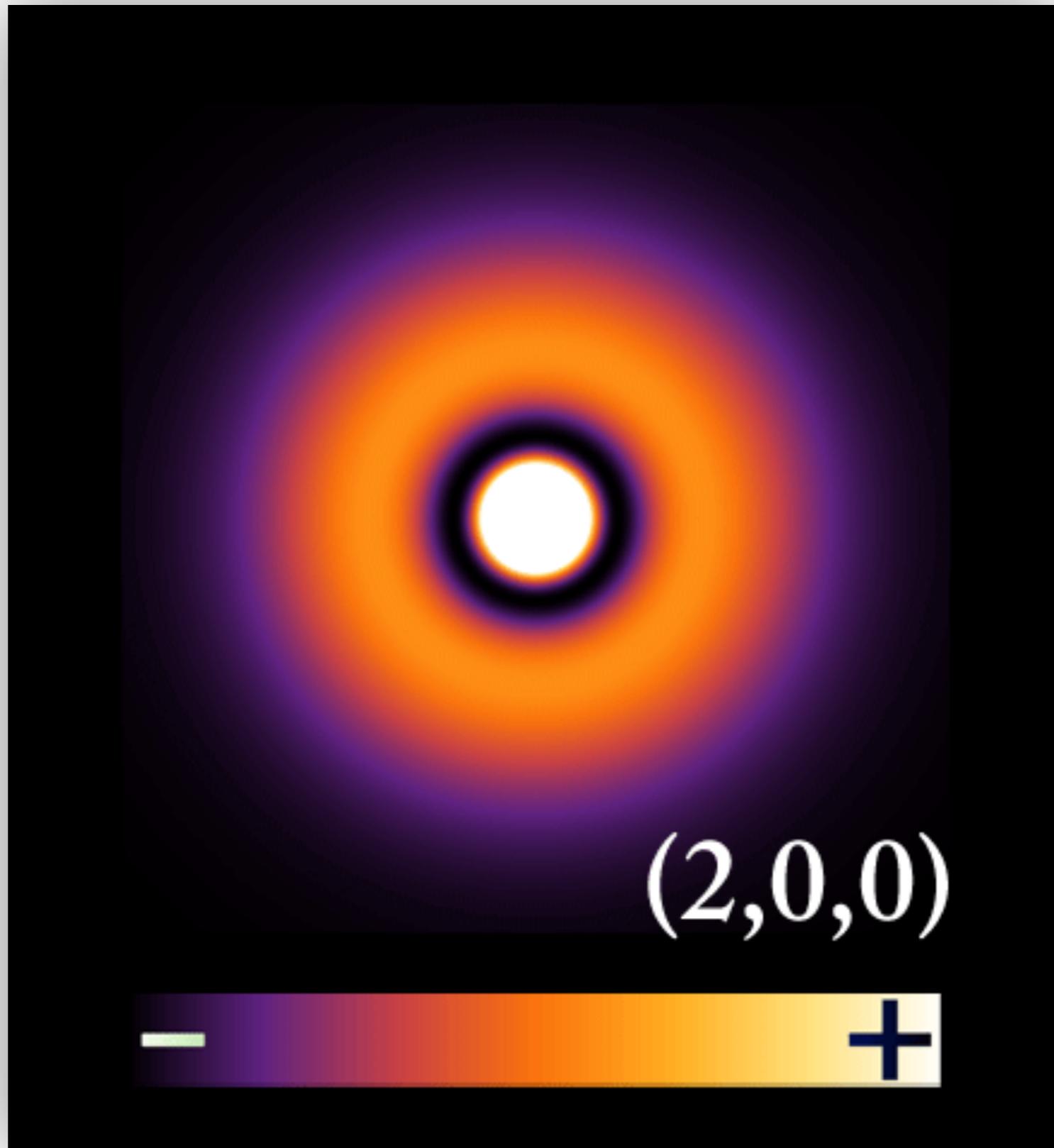
# Orbitais atômicos



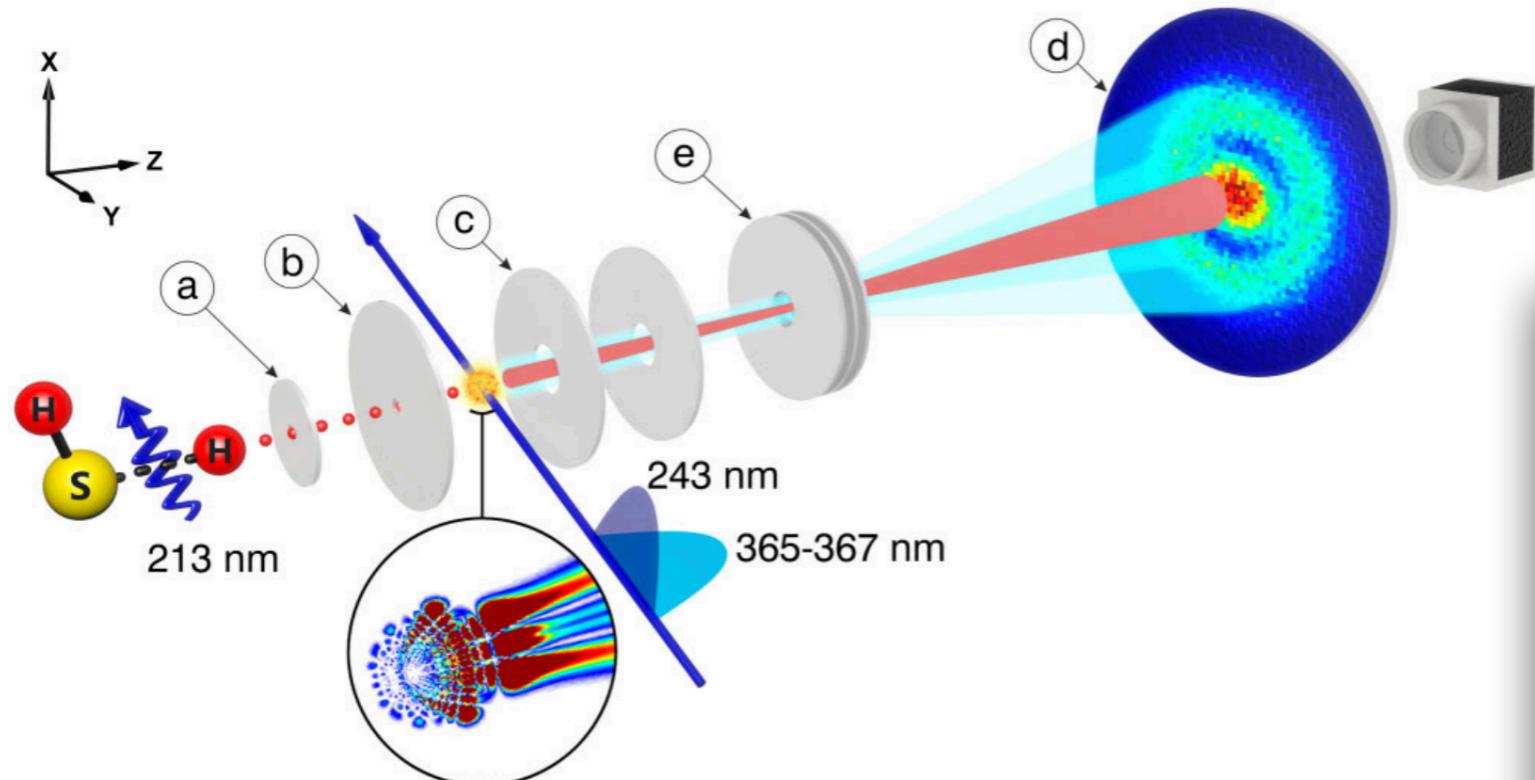
Em átomos com muitos elétrons, o acoplamento *spin-órbita* causa um desdobramento dos níveis de energia



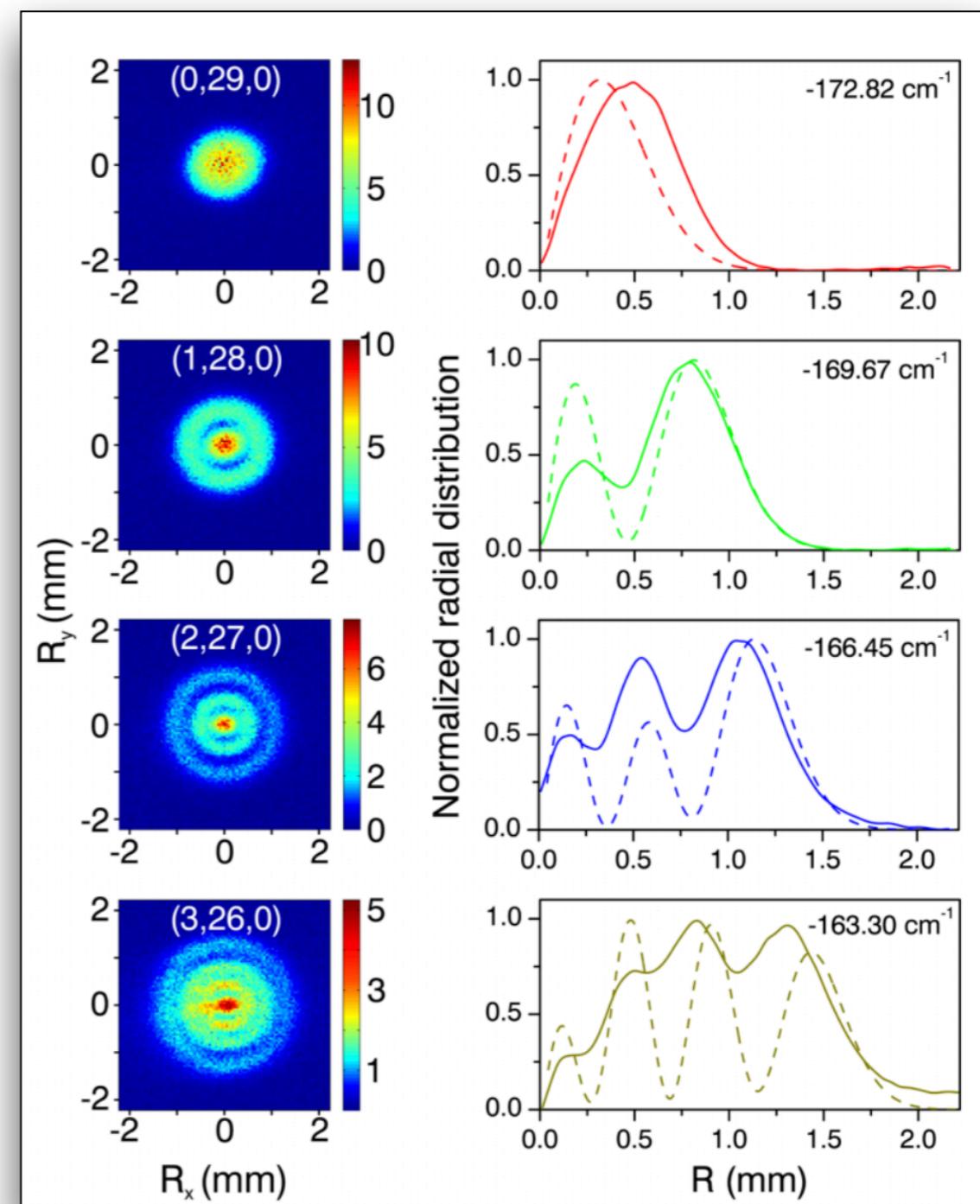
formato dos orbitais do hidrogênio até  $n=4$



# Um experimento registrou imagens dos orbitais s do hidrogênio



- átomos de hidrogênio são levados a um estado excitado por um laser
- Os átomos excitados são então ionizados por outro feixe de laser
- Os elétrons são acelerados por um campo elétrico e registrados por CCDs



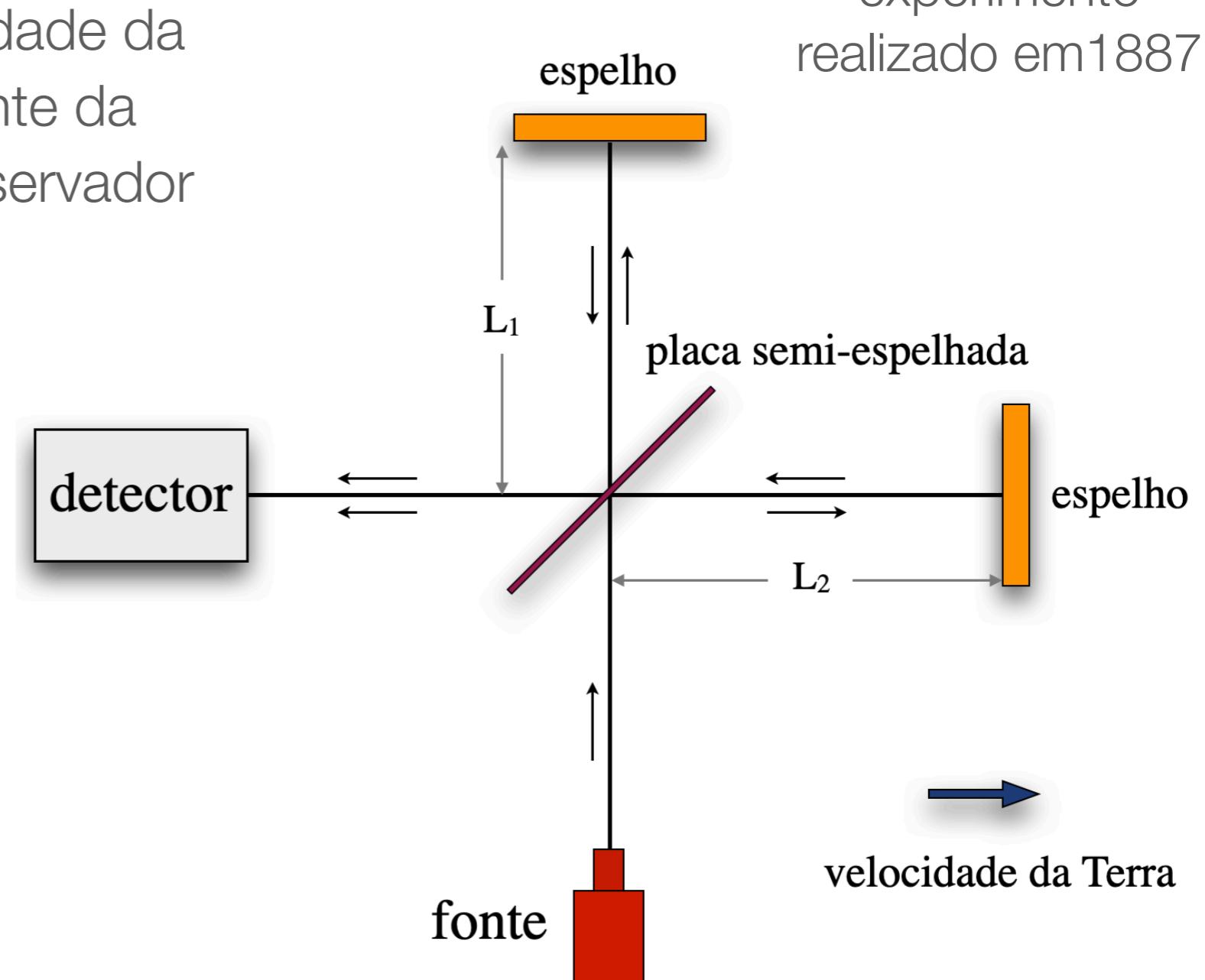
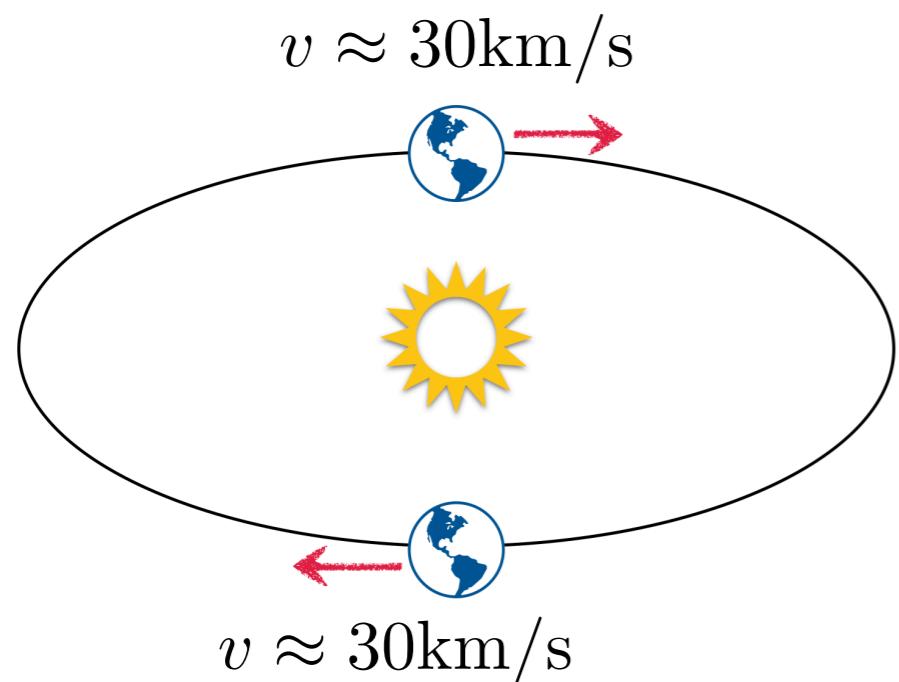
# Relatividade Especial



## VELOCIDADE DA LUZ: FINITA E CONSTANTE

**Michelson e Morley:** a velocidade da luz é constante, independente da velocidade da fonte ou do observador

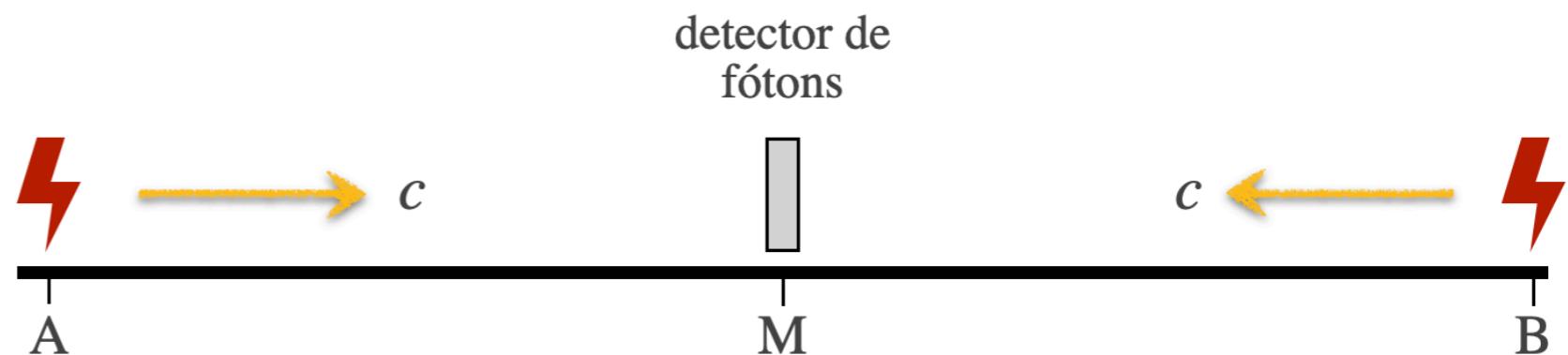
experimento  
realizado em 1887



Em intervalos de 6 meses, a variação da velocidade da Terra em relação ao Sol é  $\sim 60\text{km/s}$ .

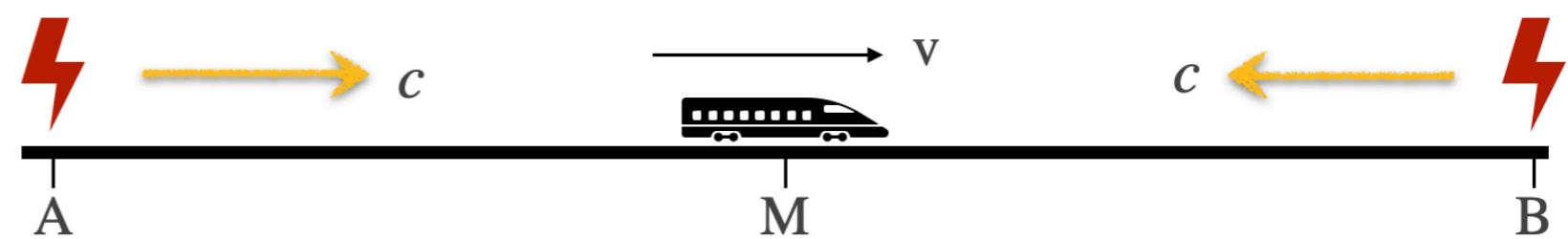
## RELATIVIDADE DA SIMULTANEIDADE

Dois relâmpagos caem sobre os pontos A e B em uma longa ferrovia retilínea



Um observador em repouso em relação à ferrovia dirá que os relâmpagos caem ao mesmo tempo se os clarões chegam ao ponto M no mesmo instante

A velocidade da luz é finita. Enquanto o clarão de B viaja até o observador no trem, este se aproxima

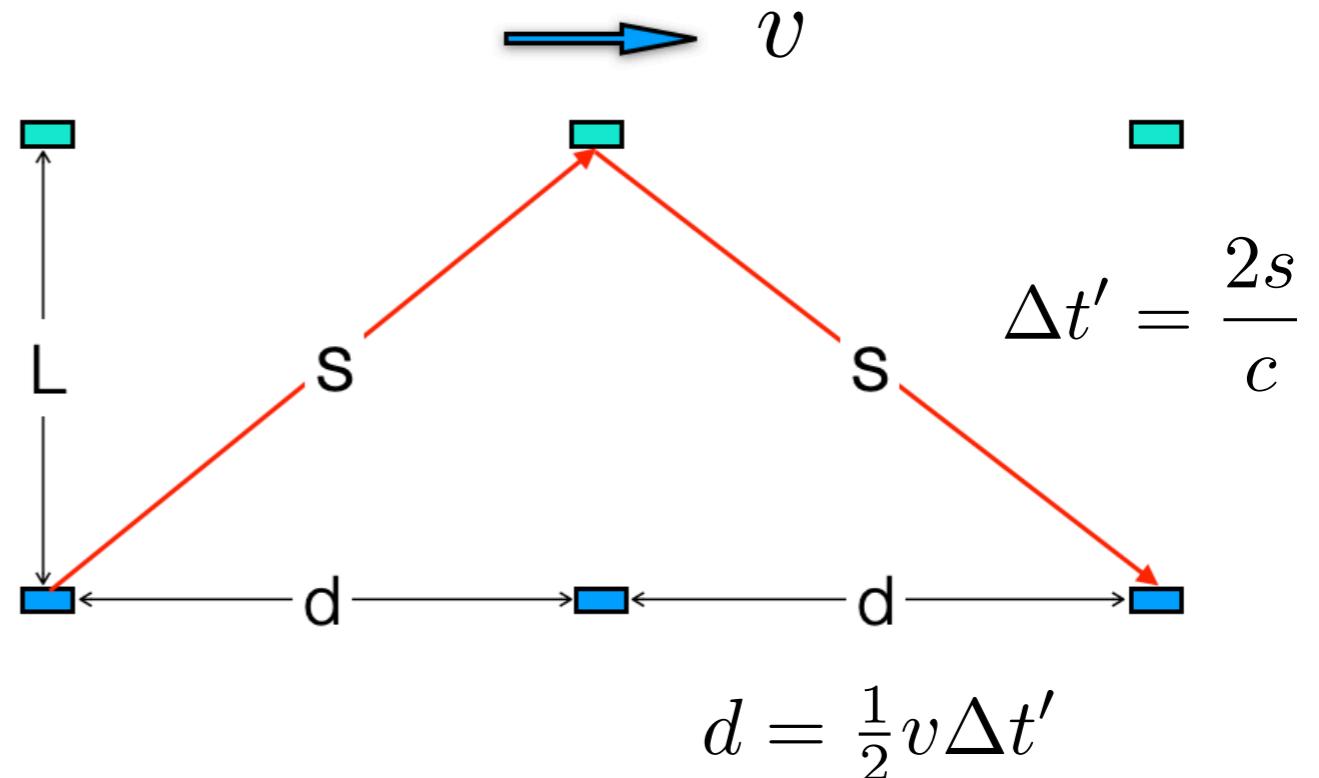
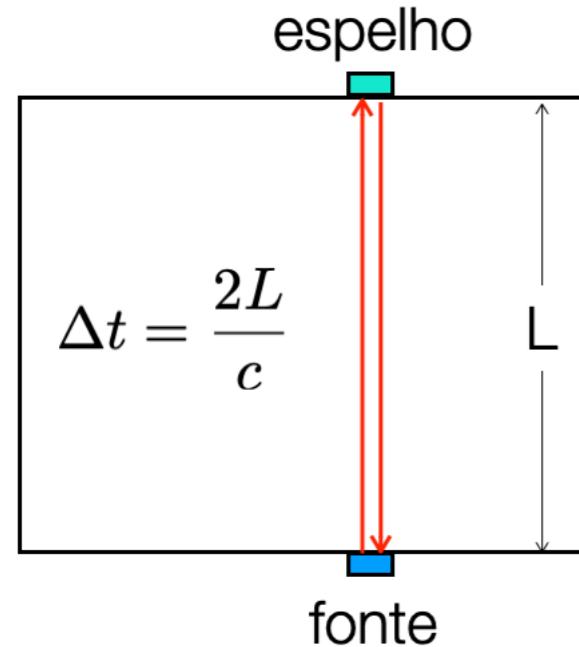


Um observador no trem vê o clarão de B chegar **antes** do clarão de A.

A simultaneidade é relativa. Não existe um tempo absoluto.  
Cada observador tem o seu próprio tempo!

dentro de uma nave  
um feixe de luz é emitido  
do chão e refletido pelo teto

visto da Terra, o feixe percorre uma  
distância maior, e leva mais tempo até  
retornar à fonte



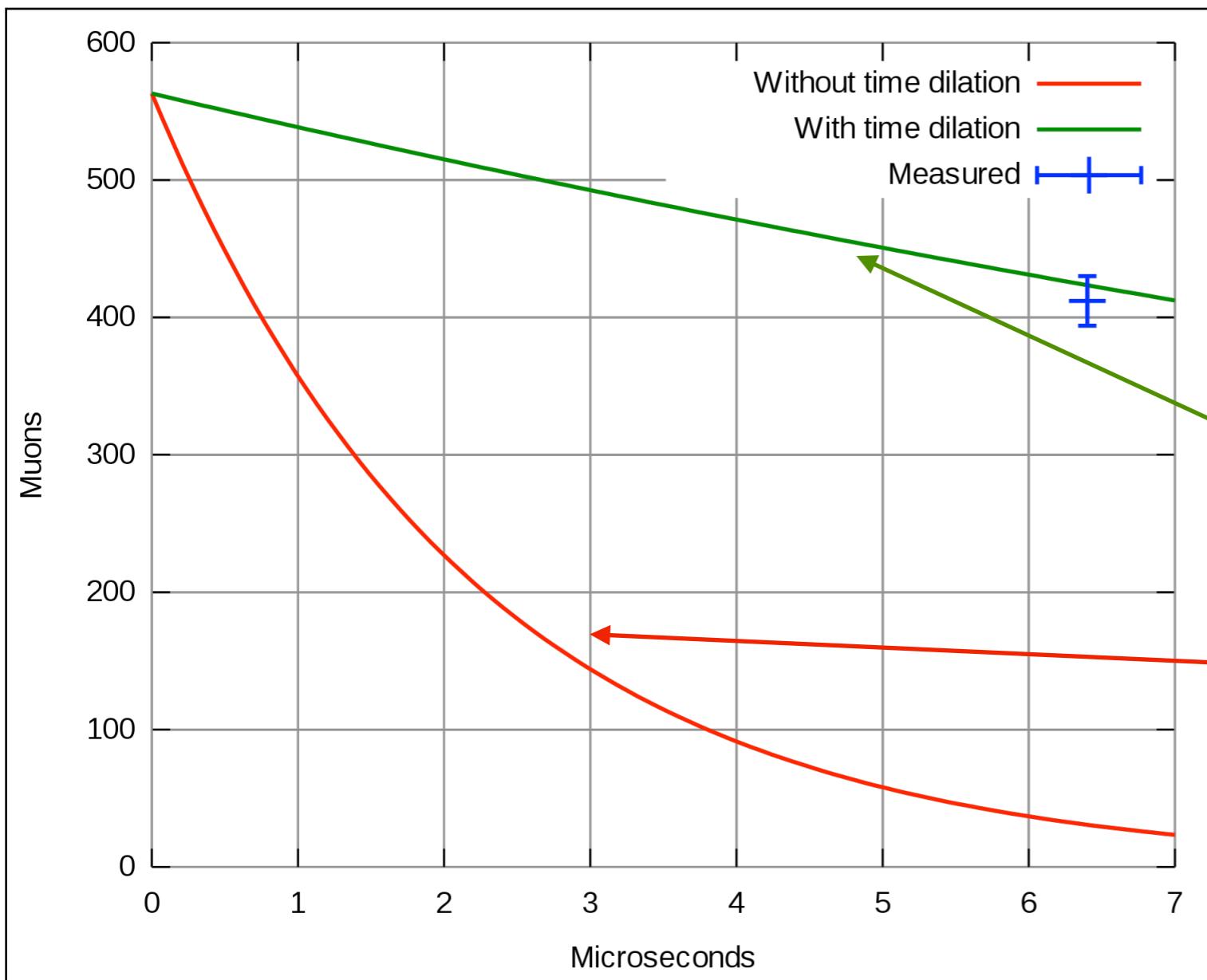
$$s = \sqrt{L^2 + d^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}v\Delta t'\right)^2}$$

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t = \gamma \Delta t$$

$\Delta t$  = tempo próprio

Múons são instáveis: vida média de  $\sim 2 \mu\text{s}$ .  
São produzidos nas camadas mais altas da atmosfera.

Mesmo tendo velocidades próximas à da luz,  
como é possível detectá-los ao nível do mar?



Uma demonstração da dilatação do tempo

Einstein:  $N \exp[-t/\gamma t_0]$

Newton:  $N \exp[-t/t_0]$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

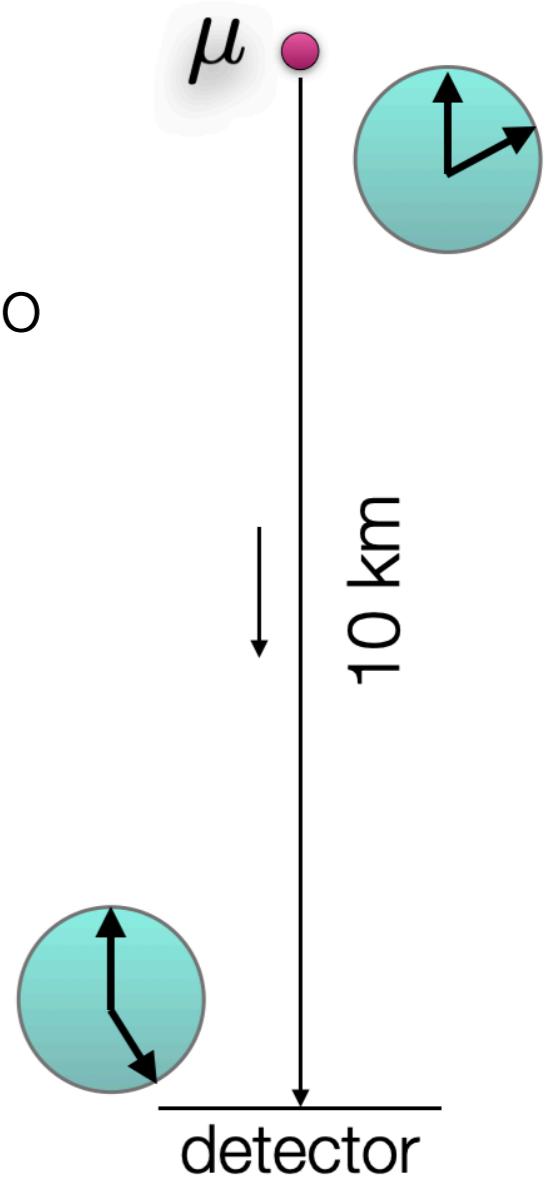
## CONTRAÇÃO DE LORENTZ — FITZGERALD

- Um mûon com  $v = 0.98c$  ( $\gamma = 5.02$ ) é produzido a 10 km de altitude
- No referencial da Terra, ele levará  $3.4 \times 10^{-5}$  s até atingir o detector
- No referencial do mûon, é a Terra que se aproxima
- A velocidade relativa entre o mûon e a Terra é a mesma para o observador fixo na Terra e para o que se move com o mûon

$$v = \frac{L_0}{\Delta t_0} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L}{\gamma \Delta t_0} \Rightarrow L_0 = \frac{L}{\gamma}$$

- distância percorrida medida no referencial do mûon :

$$L_0 = \frac{10}{5.02} \approx 2 \text{ km}$$

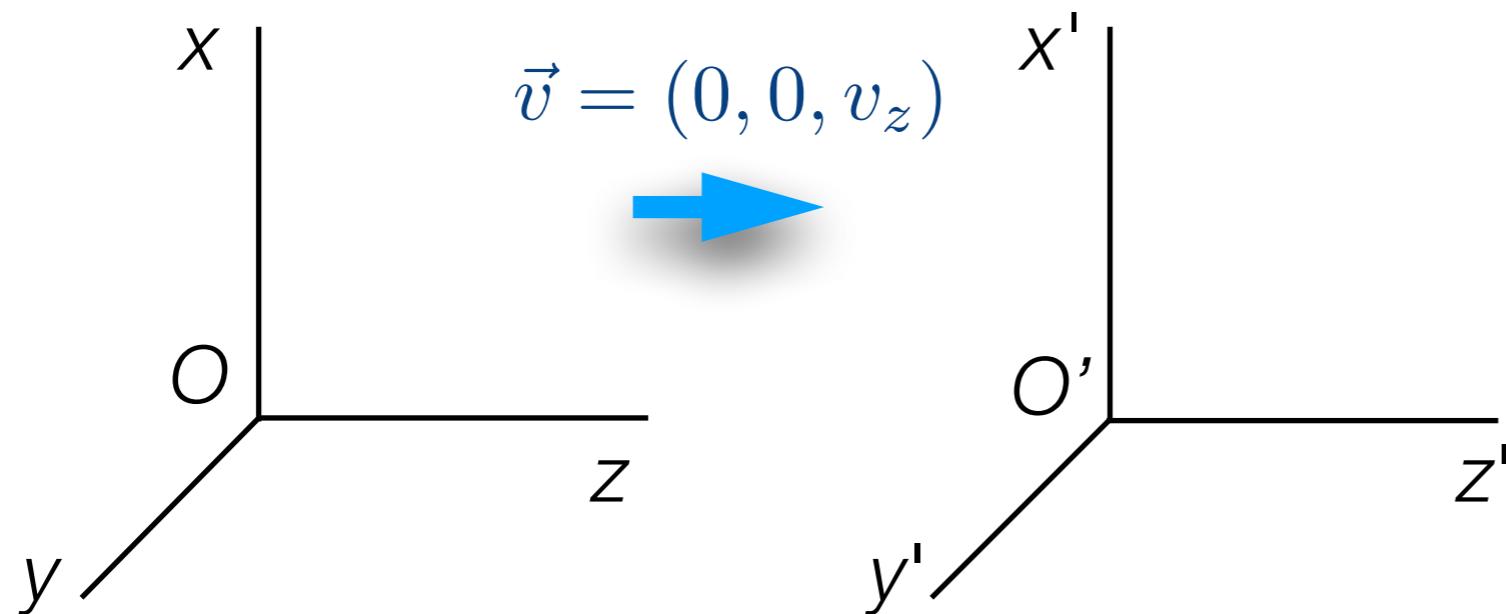


## OS POSTULADOS DE EINSTEIN: RELATIVIDADE ESPECIAL

1- As leis da Física são as mesmas em qualquer referencial inercial

2- A velocidade da luz no vácuo é constante e independe do movimento da fonte

**Transformações de Lorentz:** relacionam as coordenadas  $(t, x, y, z)$  de um evento num referencial  $S$ , e as coordenadas  $(t', x', y', z')$ , num referencial  $S'$  que se move com velocidade constante em relação a  $S$ .

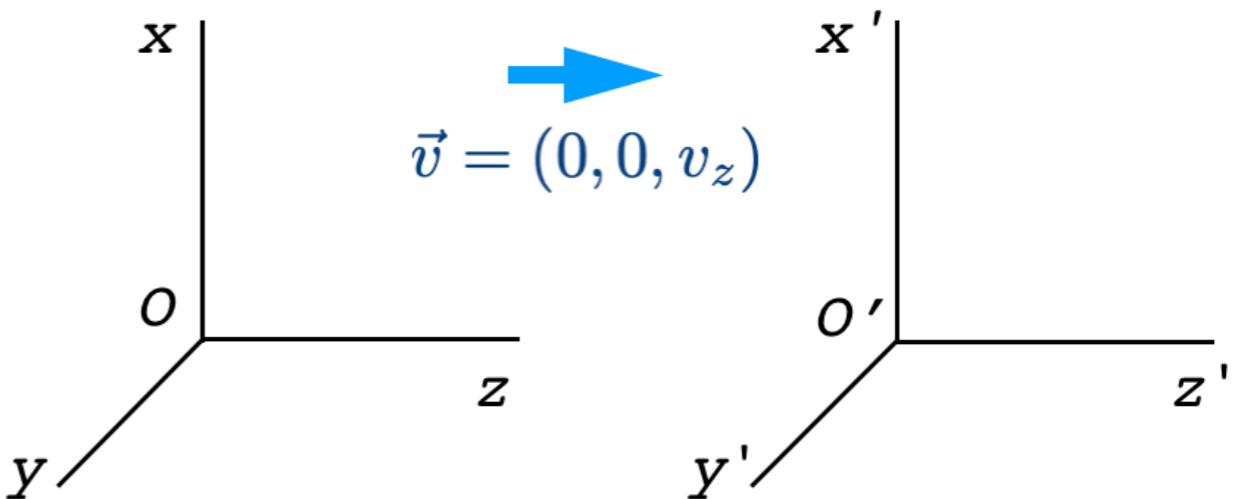


Em  $t = t' = 0$  a origem dos sistemas de coordenadas coincide.

## TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Na RE, um evento é especificado por 4 números: 3 coordenadas espaciais e o tempo

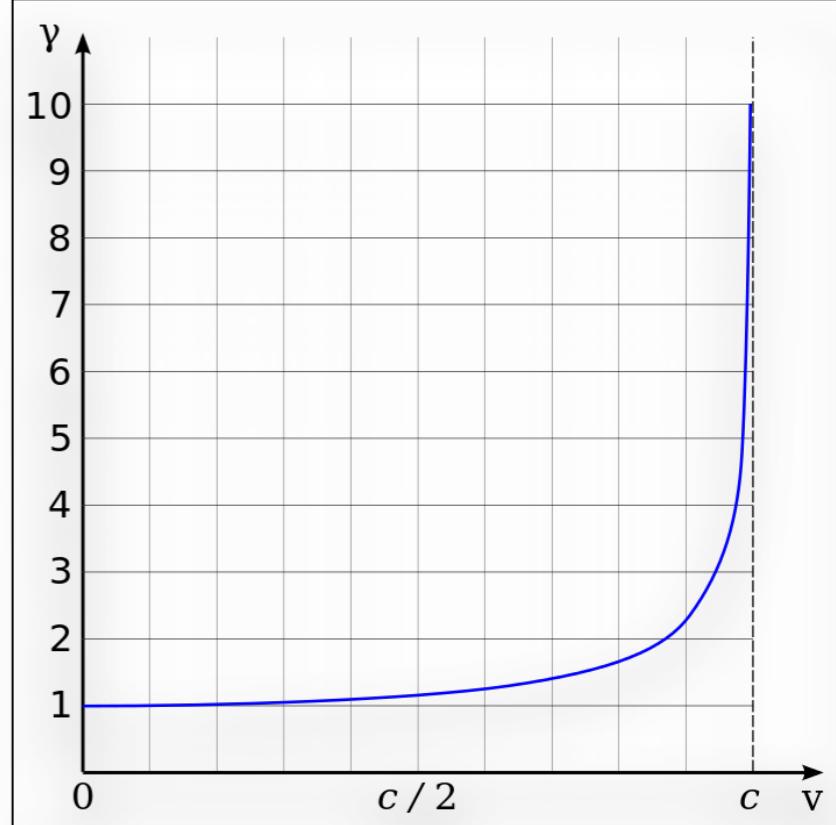
As transformações de Lorentz conectam as coordenadas de um evento em dois sistemas de referência inerciais



O fator  $\gamma$  de Lorentz

$$\begin{aligned}x' &= x & x &= x' \\y' &= y & y &= y' \\z' &= \gamma(z - vt) & z &= \gamma(z' + vt) \\t' &= \gamma(t - vz/c^2) & t &= \gamma(t' + vz'/c^2)\end{aligned}$$

$$\gamma = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

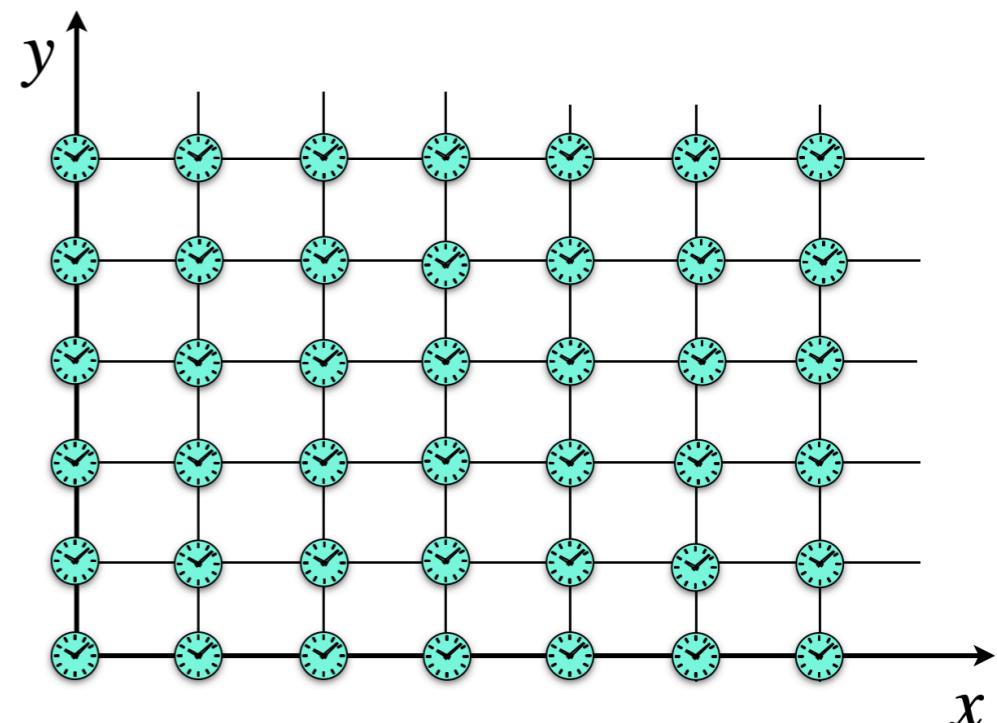


## MINKOVSKI: ESPAÇO - TEMPO

- Na RE, espaço e tempo estão interligados.  
A passagem de um referencial inercial a outro mistura espaço e tempo

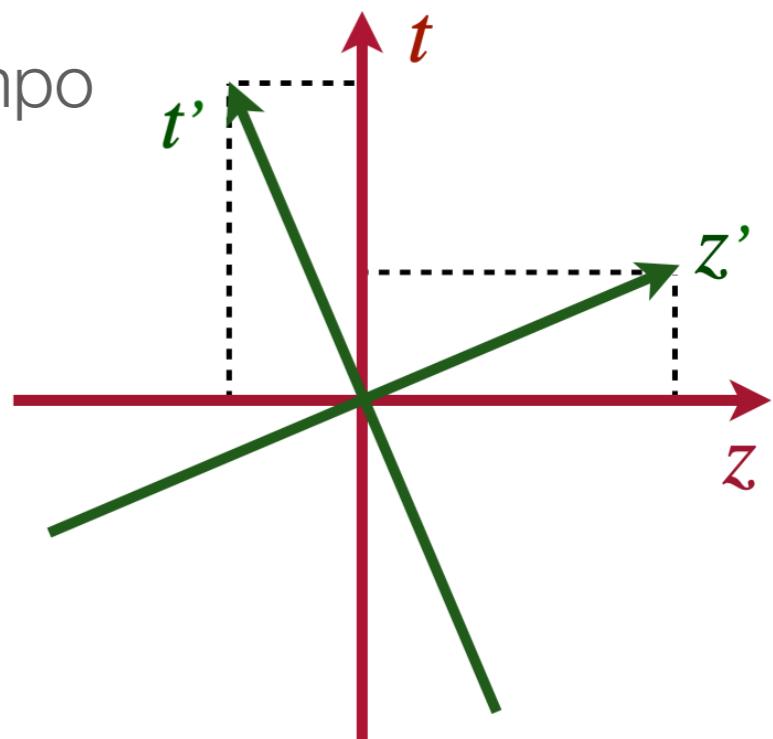
$$z' = \gamma(z - vt) \quad t' = \gamma(t - vz/c^2)$$

- O espaço-tempo é um contínuo em quatro dimensões, onde vale a geometria de Euclides



- Um evento é especificado pelas suas coordenadas no espaço-tempo
- Transformações de Lorentz são rotações no espaço-tempo

$$L(v_z) \rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



## QUADRIVETORES

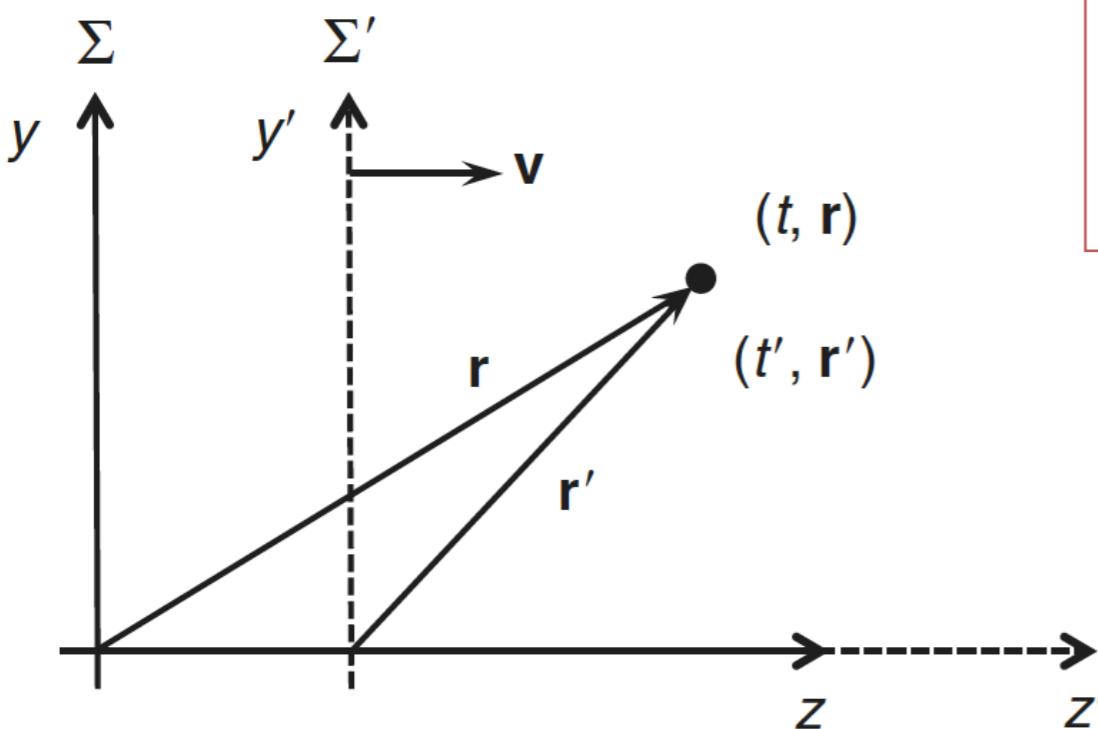
Quadrivetores são os objetos fundamentais na RE  
Um evento é representado pelo quadrivector posição,  $(ct, \vec{x})$

O módulo de um trivetor  
é invariante por rotações espaciais.

$$\vec{x}' = R(\phi, \theta, \psi) \vec{x} \rightarrow |\vec{x}'| = |\vec{x}|$$

O "módulo" de um quadrivector - *intervalo espaço-temporal* - é invariante por rotações no espaço-tempo (transformações de Lorentz),

Um pulso luminoso  
é emitido em  $t = t' = 0$ .



a frente de onda  
chega ao ponto  $\mathbf{r}$   
em  $t$  segundos.  
 $\mathbf{r}^2 = (ct)^2$

a frente de onda  
chega ao ponto  $\mathbf{r}'$   
em  $t'$  segundos.  
 $\mathbf{r}'^2 = (ct')^2$

intervalo espaço-temporal:  
 $(ct)^2 - \mathbf{r}^2 = (ct')^2 - \mathbf{r}'^2$

## NOTAÇÃO COVARIANTE

- covariância: invariância na *forma*; mesmas equações em qualquer referencial
- invariância: o mesmo **valor** em qualquer referencial (massa de repouso, carga)

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma vt & 0 & 0 & \gamma z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma t & 0 & 0 & \gamma v z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

índices repetidos  
indicam soma

letras gregas:  
soma de 0 a 3

4-vector contravariante :  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$

4-vector covariante :  $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z)$

produto escalar :  $x^\mu x_\mu = (x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3) = \boxed{(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2}$

intervalo

O *produto escalar* de dois 4-vetores quaisquer é um *invariante de Lorentz*

$$(a_0, \mathbf{a}) \rightarrow a_0^2 - \mathbf{a}^2$$

## EQUIVALÊNCIA ENTRE MASSA E ENERGIA

- A equivalência entre massa e energia é a implicação mais importante da RE
- Uma partícula de massa  $m$  no referencial de repouso tem energia  $E = mc^2$
- Em outro referencial inercial qualquer :  $E = \gamma mc^2$
- Da relação entre massa e energia vem a definição do momento na RE:  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

O 4-vetor momento-energia é o mais relevante para a FAE:

$$p^\mu = (E/c, \vec{p}) \quad p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - |\vec{p}|^2$$

no referencial de repouso:  $\gamma = 1, \vec{p} = \vec{0}$

$$p^\mu = (mc, 0, 0, 0) \rightarrow p^\mu p_\mu = m^2 c^2$$

$$(E/c)^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 c^2 \implies E = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}$$

# **NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA**

# Caracterização de uma amostra de dados

Seja um conjunto de  $N$  medidas independentes de uma quantidade  $x$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$$

★ **Valor médio**     $\Sigma \equiv \sum_{i=1}^N x_i \rightarrow \boxed{\bar{x} \equiv \frac{\Sigma}{N} = \sum_{x=0}^{\infty} x F(x)}$

$$F(x) \equiv \frac{\text{número de ocorrências de } x}{\text{número de medidas}} , \quad \sum_{x=0}^{\infty} F(x) = 1$$

## ★ **Variância**

$$d_i \equiv x_i - \bar{x} \rightarrow \text{resíduo}$$
$$\sigma^2 \equiv \sum_{i=1}^N d_i^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

# Modelos estatísticos – distribuições

**Distribuição binomial:** o modelo estatístico mais geral, aplicável quando a probabilidade de sucesso,  $p$ , é constante

“experimento”  
jogar dados

definição de sucesso  
tirar um seis

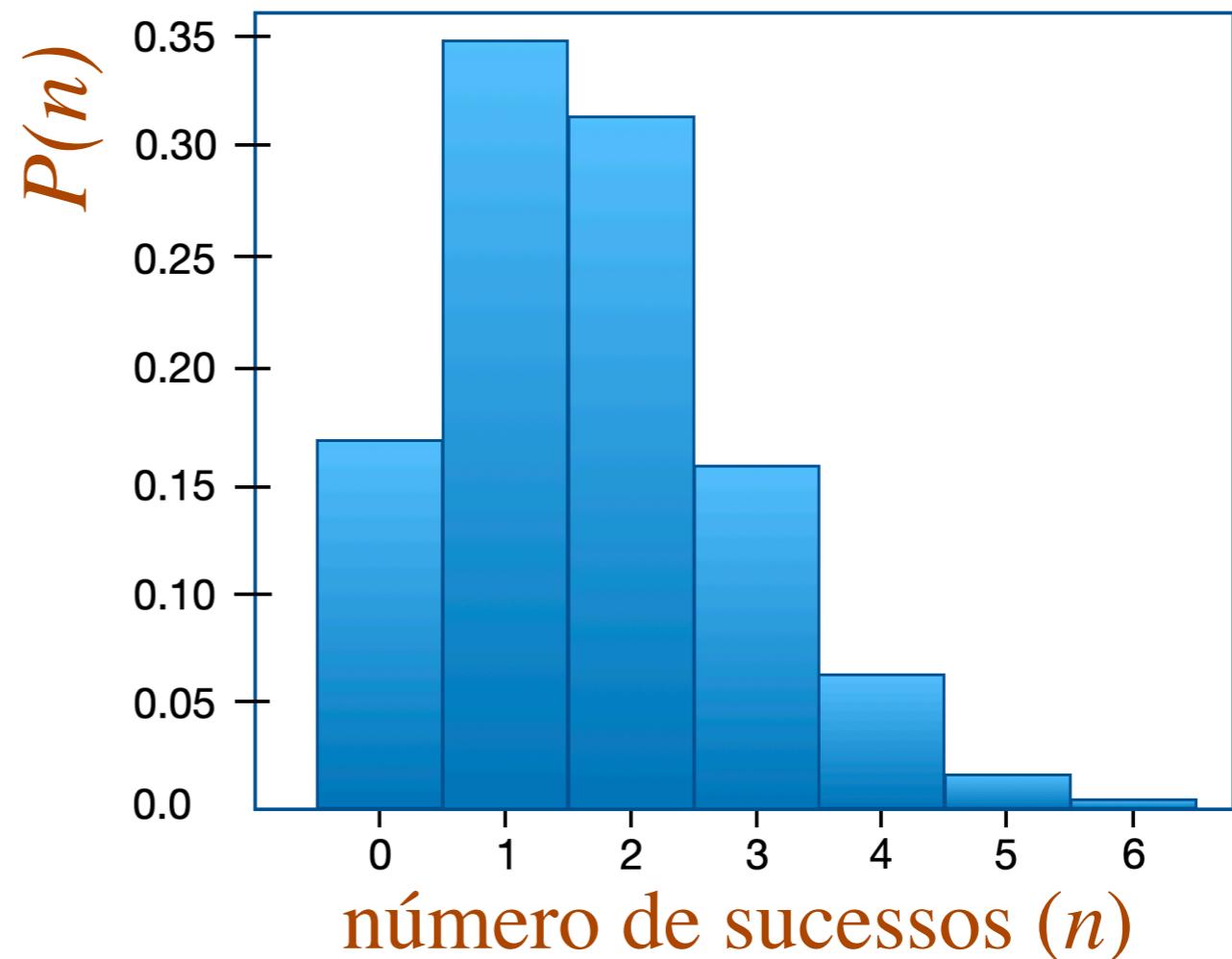
probabilidade de sucesso  
 $p = 1/6$

$$P(n) = \frac{k!}{n!(k-n)!} p^n q^{k-n}$$
$$(q = 1 - p)$$

nº. de tentativas  $\rightarrow k = 10$

valor médio  $\rightarrow \bar{n} = pk$

variância  $\rightarrow \sigma^2 = \bar{n}(1 - p)$

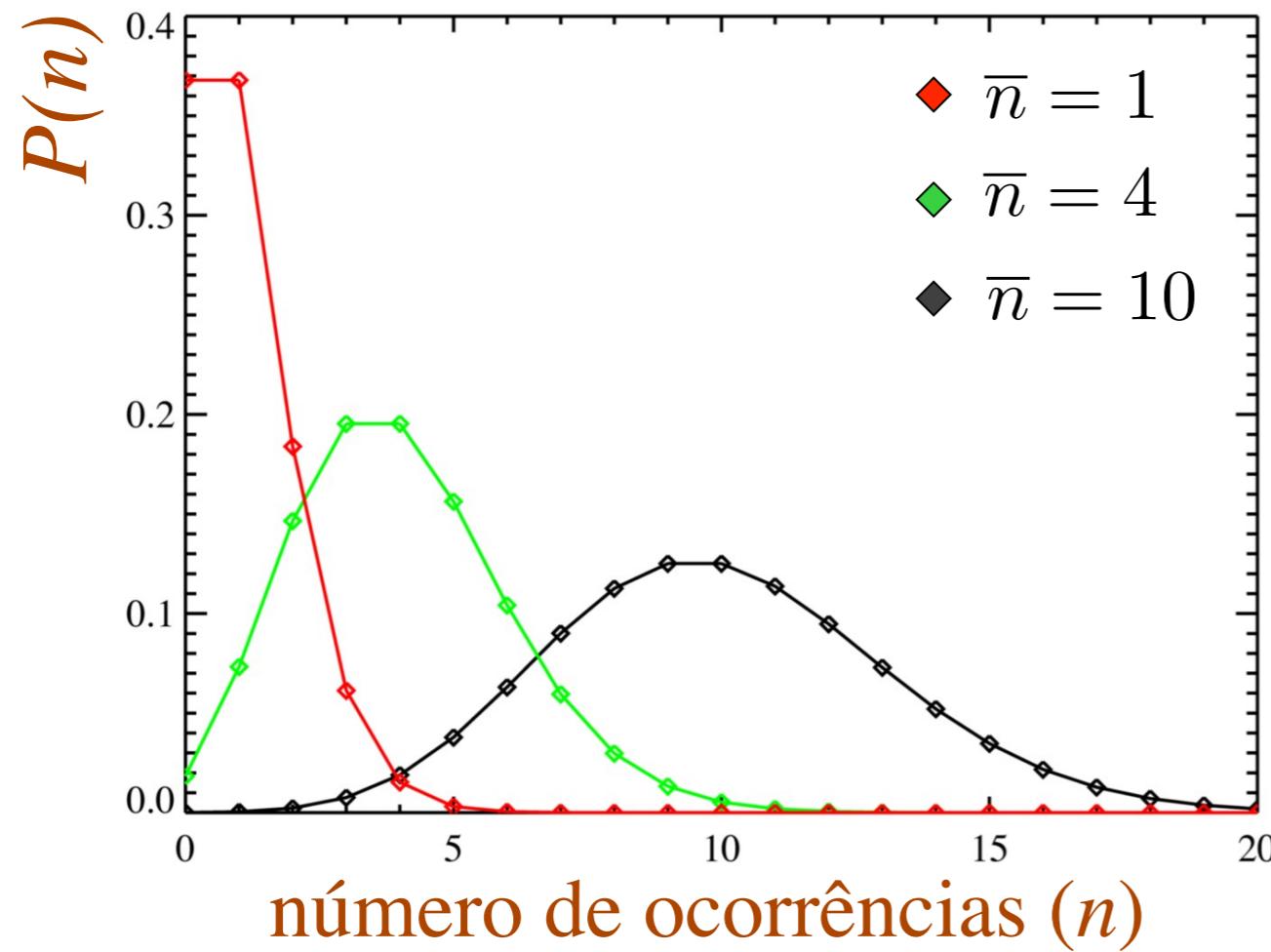


**Distribuição de Poisson:** limite da distribuição binomial quando a probabilidade de sucesso,  $p$ , é muito pequena

distribuição binomial (  $p \ll 1$ ,  $k \rightarrow \infty$  )  $\rightarrow P(n) = \frac{(pk)^n e^{-pk}}{n!}$

$$\sum_{n=0}^k P(n) = 1, \quad \bar{n} = \sum_{n=0}^k nP(n) = pk \rightarrow$$

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{\bar{n}!}$$



$$\sigma^2 \equiv \sum_{n=1}^k (n_i - \bar{n})^2 P(n) = pk$$

$$\sigma = \sqrt{\bar{n}}$$

- a distribuição binomial depende de dois parâmetros,  $n$  e  $p$
- a distribuição de Poisson depende de apenas um,  $\bar{n}$

Seja um grupo de 1000 pessoas, escolhidas ao acaso.  
Quantas fazem aniversário hoje?

$$p = 1/365 = 0.00274$$

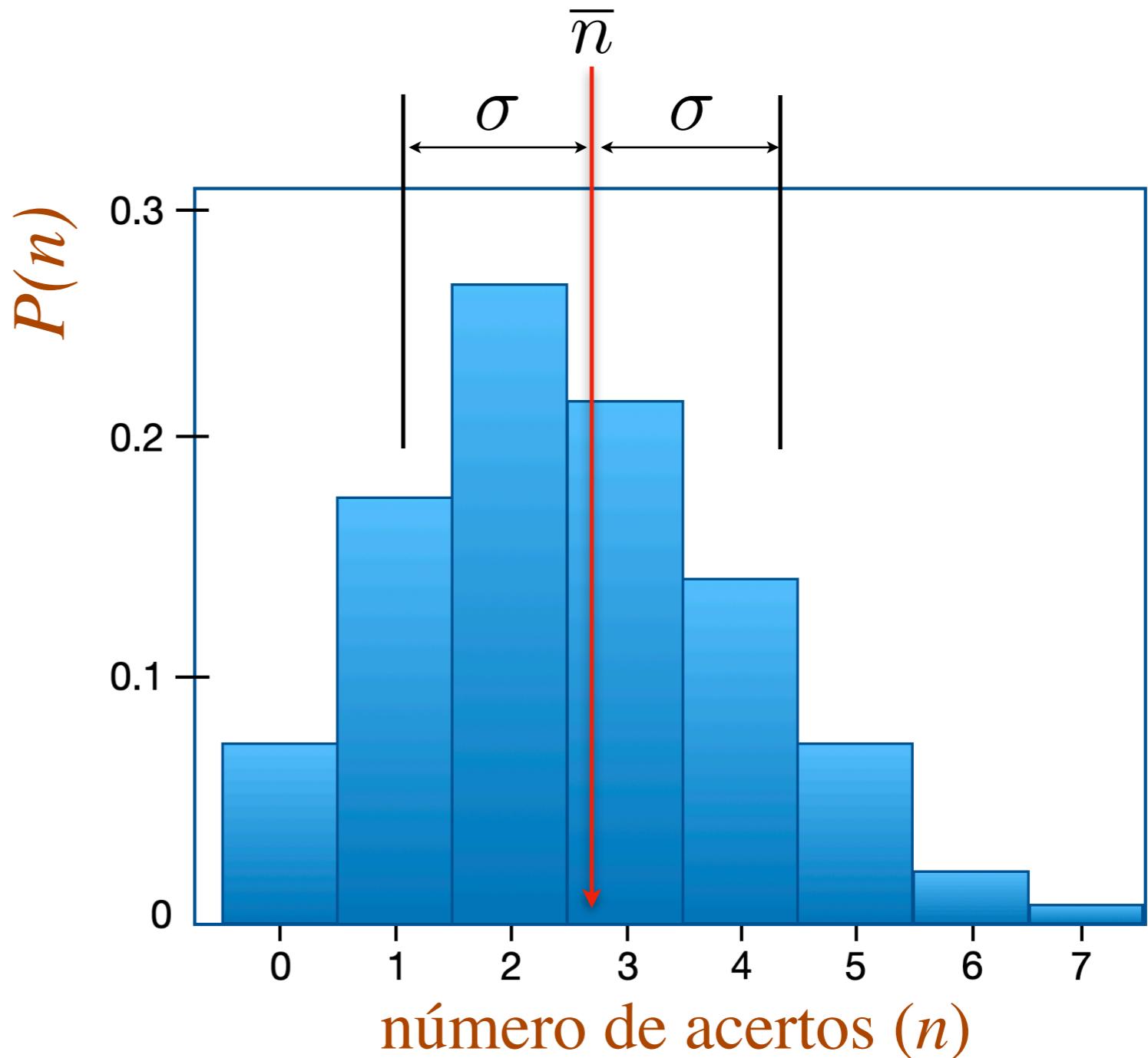
$$k = 1000$$

$$\bar{n} = pk = 2.74$$

$$\sigma = \sqrt{\bar{n}} = 1.66$$

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!}$$

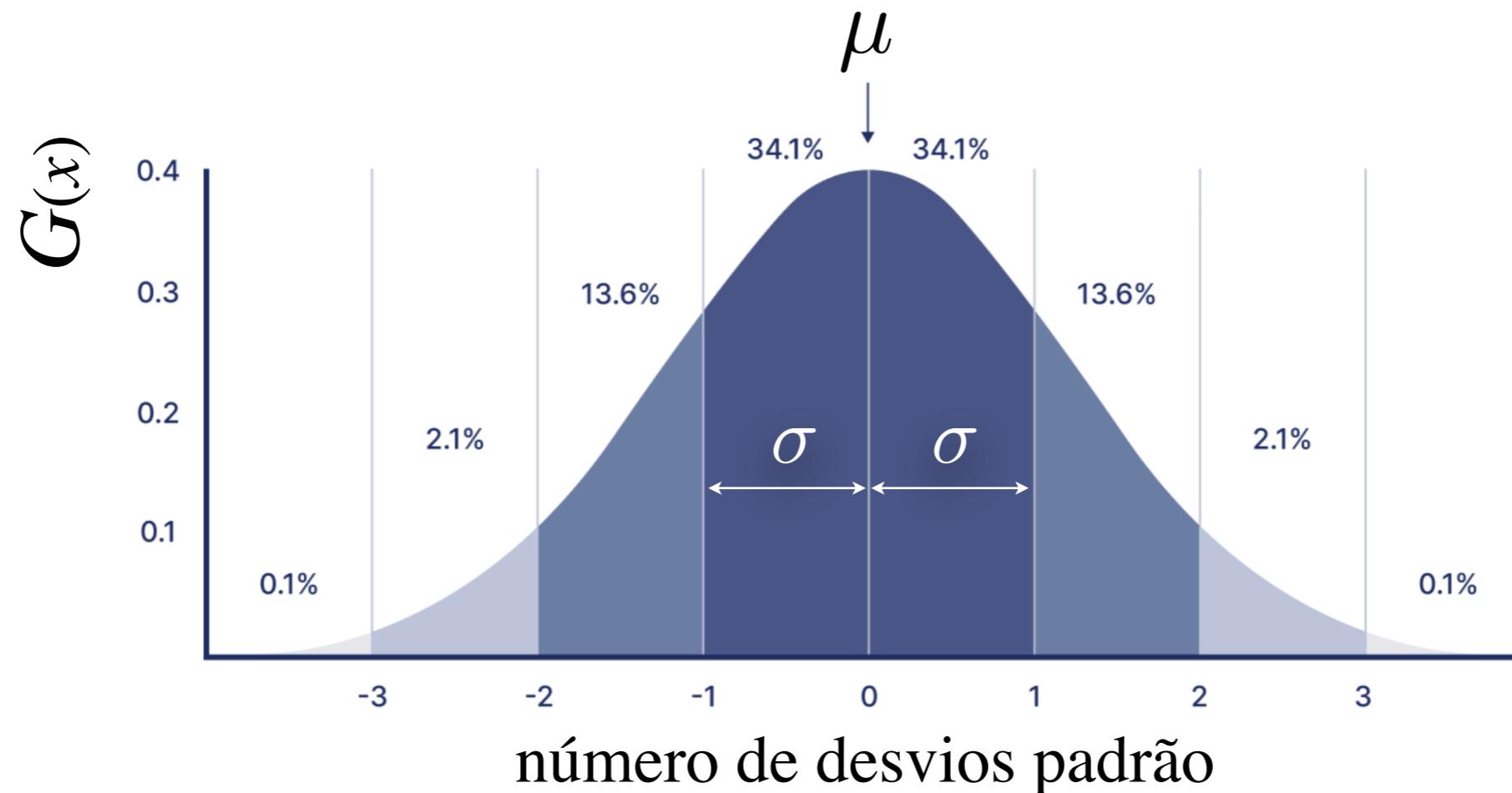
$$P(n) = \frac{(2.74)^n e^{-2.74}}{n!}$$



**Distribuição Gaussiana (ou normal):** limite da distribuição de Poisson quando o valor médio é muito grande ( $> 20$ )

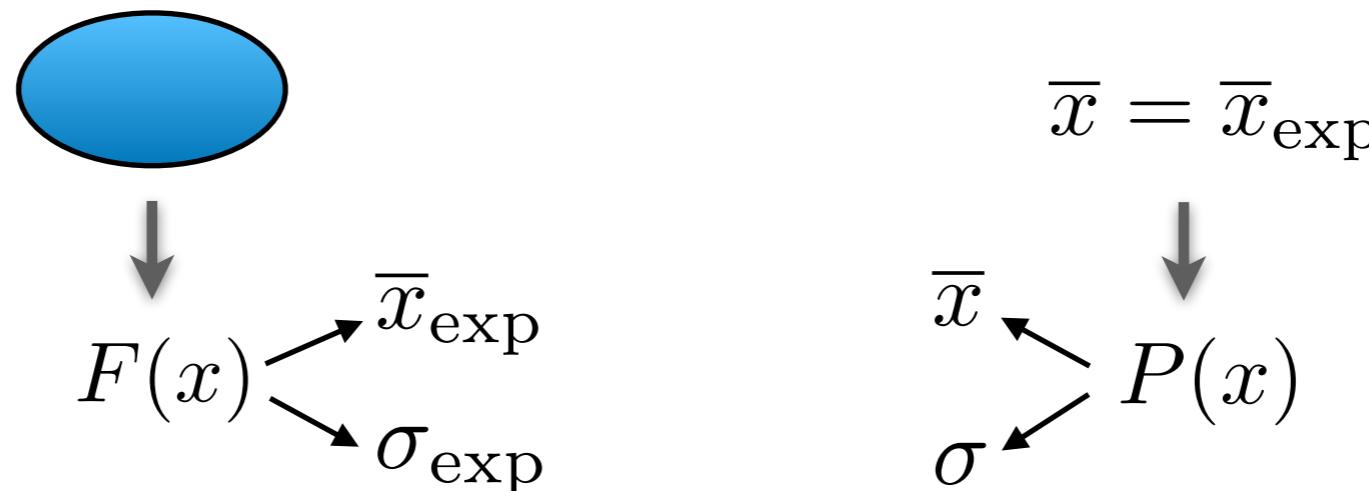
$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\bar{x}}\right)$$

Se  $x$  é uma variável contínua,  $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$



**dados**  
conjunto de  $N$  medidas  
independentes

**hipótese**  
modelo estatístico  
(Poisson ou Gaussiana)



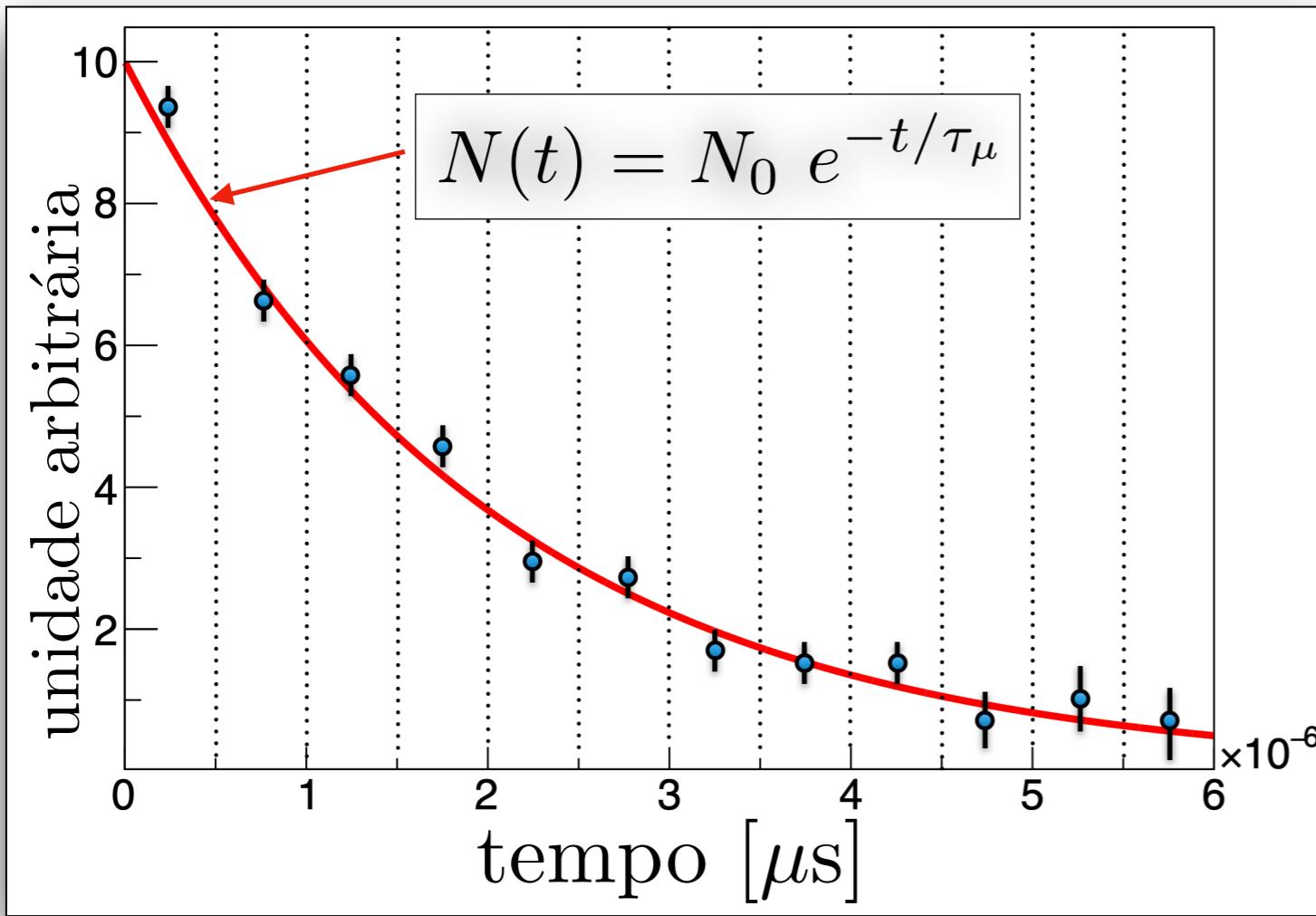
As variações nos resultados das  $N$  medidas  
são compatíveis com flutuações estatísticas?

O teste de  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{\text{esp}})^2}{\sigma_{\text{esp}}^2} \longrightarrow \chi_\nu^2 = \frac{\chi^2}{\nu} \rightarrow \text{nº. de graus de liberdade}$$

## Exemplo: medida da vida média do múon

- medimos o tempo de voo de uma amostra numerosa de múons
- dividimos a amostra em 12 *bins* de tempo de voo
- ajustamos a distribuição dos dados com uma exponencial  $\rightarrow \tau_\mu$



*n bins* independentes  
em cada *bin* as  
medidas seguem uma  
distribuição Gaussiana

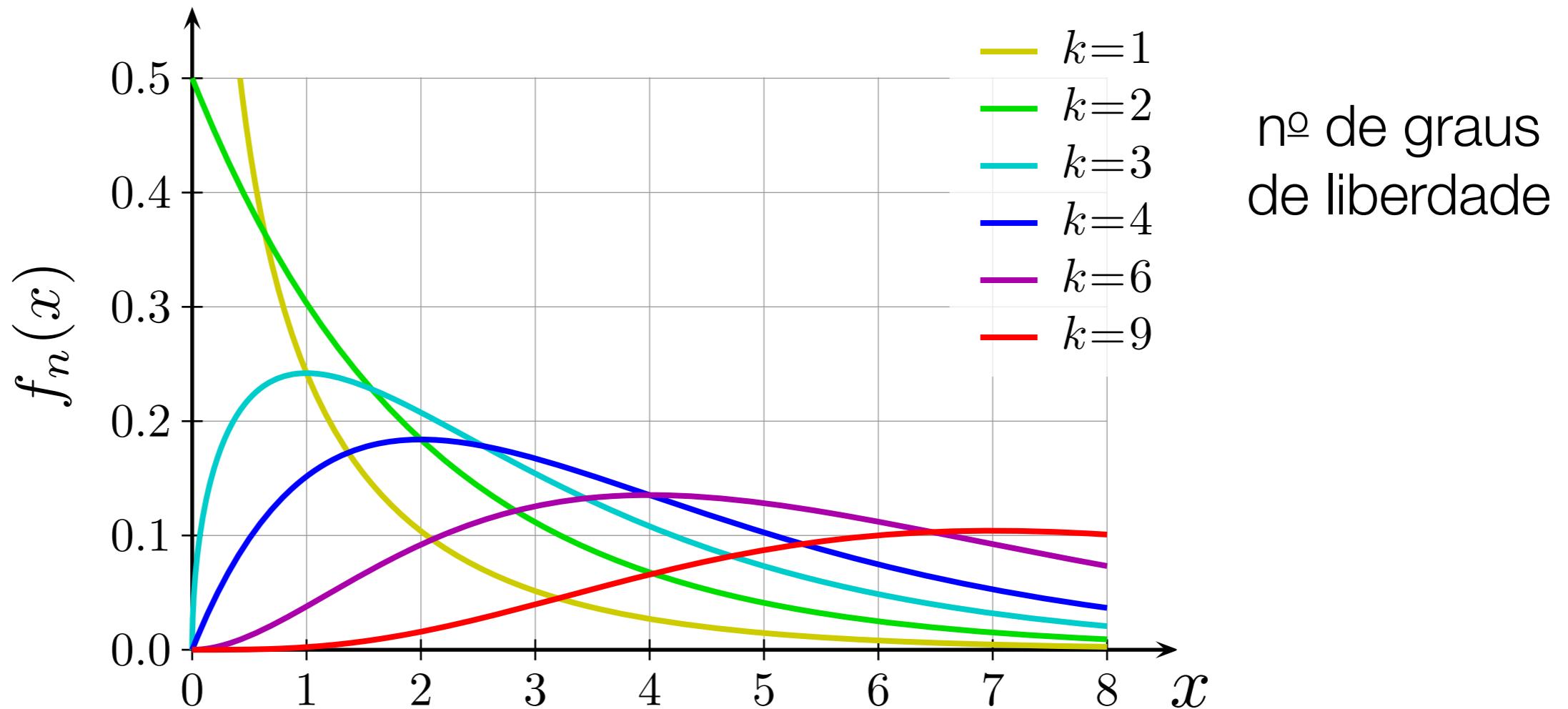
Apenas um único  
parâmetro de ajuste

**Nº de graus de liberdade:**  
12 *bins* - 1 parâmetro = 11

## A distribuição de $\chi^2$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{\text{esp}})^2}{\sigma_{\text{esp}}^2}$$

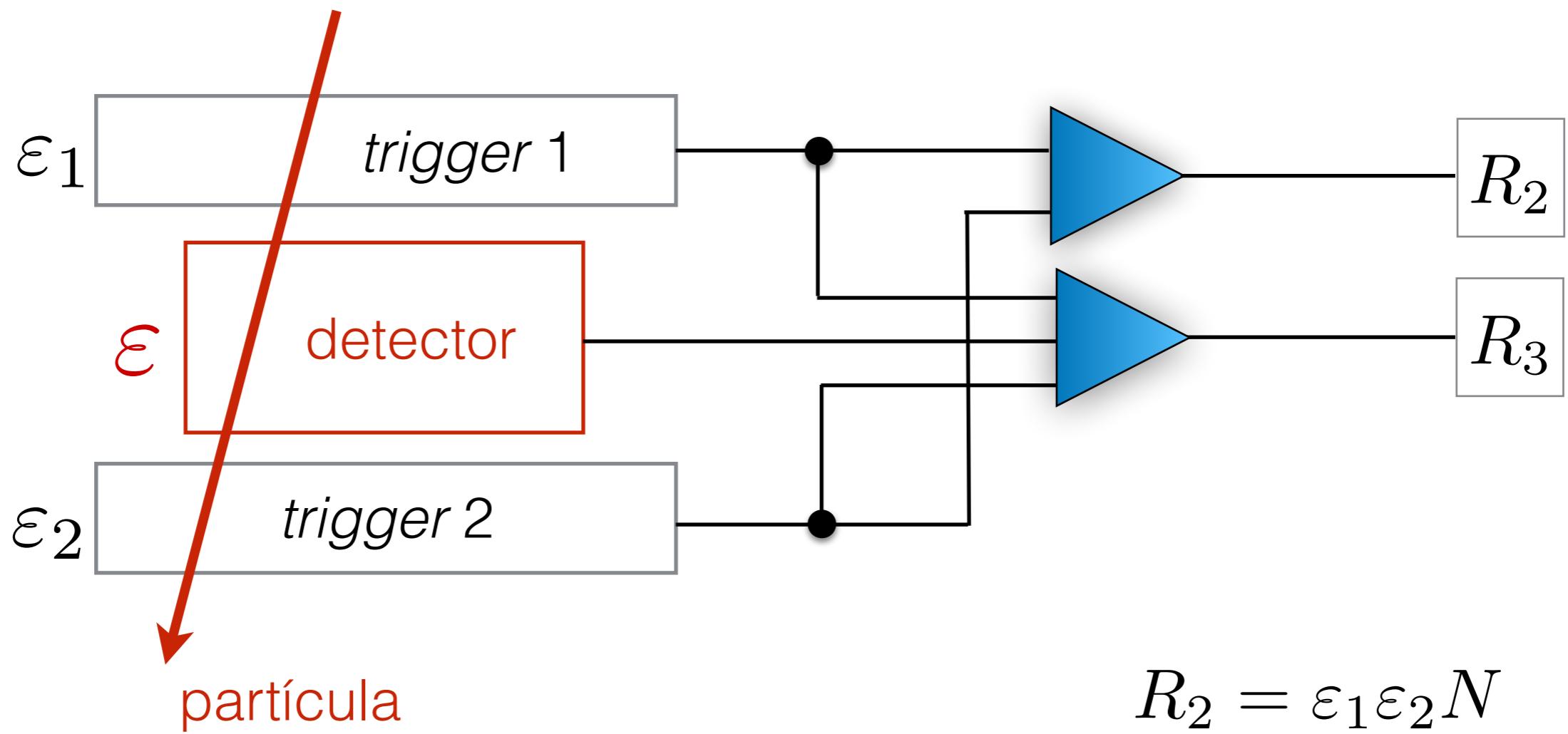
$$x \equiv \chi^2 \quad f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}$$



probabilidade de os pontos  
medidos serem incompatíveis  
com uma exponencial

$$\rightarrow p = \int_{x_{\text{obs}}}^{\infty} f(x) dx$$

# Eficiência



$$R_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 N$$

$N$  partículas incidem sobre o conjunto

$$R_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon N$$

$\varepsilon_{1,2} \rightarrow$  eficiências do trigger 1 e 2

$$\varepsilon = \frac{R_3}{R_2}$$

# Setup experimental

## Fator geométrico ( $\eta$ )

- compensa a perda dos mísseis que não passam por todos os detectores
- obtido com simulação numérica

## Eficiência ( $\varepsilon$ )

- Usando coincidências entre os quatro detectores, determina-se a eficiência

$$\text{fluxo} = \frac{\text{nº de muons}}{\Delta t \varepsilon \eta}$$

