Logika Matematika

A. KALIMAT TERBUKA DAN PERNYATAAN

- **Kalimat terbuka** adalah kalimat yang tidak mempunyai nilai kebenaran yang pasti.

  Contoh: Biarkan dia pergi!
  Kapan kau menemuinya?
  $x + 1 > 0, x \in R$
  $2 + x = 5$
- **Pernyataan (proposisi)** adalah kalimat tertutup yang mempunyai nilai kebenaran benar/salah, tidak keduanya pada saat yang bersamaan.
- Pernyataan dilambangkan dengan huruf kecil (p, q, r, dst.) dan nilai kebenaran dilambangkan dengan τ(x), dengan B = benar, S = salah.

  Contoh: p : Hasil kali 5 dengan 6 adalah 30. [τ(p) = B]
  q : Seluruh bilangan prima adalah ganjil. [τ(q) = S]
  r : $20 + 3 > 1$ [τ(r) = B]
  s : $x^2 - x + 2 < 0$. [τ(s) = S]

B. KUANTOR DAN NEGASI

- **Kuantor** adalah simbol yang melambangkan kalimat terbuka dalam semesta pembicaraan pernyataan.
- **Kuantor** terbagi menjadi dua:

1) **Kuantor universal (∀)**

   Menyatakan adanya 'seluruh' atau 'setiap' hal yang terdapat dalam pernyataan.

   ∀x.p : semua x bersifat/berlaku bagi p.

   a. Bernilai **benar** jika tidak ditemukan nilai x yang membuat p salah.

   b. Bernilai **salah** jika ditemukan x yang membuat p salah.

2) **Kuantor eksistensial (∃)**

   Menyatakan hanya adanya 'beberapa' atau 'sebagian' hal yang terdapat dalam pernyataan.

   ∃x.p : ada/beberapa x bersifat/berlaku bagi p.

   a. Bernilai **benar** jika ditemukan nilai x yang membuat p benar.

   b. Bernilai **salah** jika tidak ditemukan x yang membuat p benar.

Contoh:

P = {Adi, Ida, Rani}

Q = {Dita, Rina}

p(x,y) = "x adalah kakak y"

$(\forall_{x\in P})(\exists_{y\in Q})(p(x,y))$: Untuk setiap x pada P, berhubungan dengan beberapa y pada Q, sedemikian hingga x adalah kakak dari y.

Berarti, setiap anggota P adalah salah satu kakak dari anggota Q (Dita/Rina).

- **Negasi (ingkaran)** adalah lawan atau kebalikan dari suatu pernyataan.
- **Negasi** dilambangkan dengan ~p, dan dibaca bukan atau tidak.

  Contoh:

  p : Ibukota negara Indonesia adalah Jakarta. [τ(p) = B]
  ~p : Ibukota negara Indonesia bukan Jakarta. [τ(~p) = S]
  q : $3 > 5$ [τ(q) = S]
  ~q : $3 \leq 5$ [τ(~q) = B]
  r : $x^2 = 25$ [τ(r) = B]
  ~r : $x^2 \neq 25$ [τ(~r) = S]

  Tabel kebenaran:

p	~p	q	~q	r	~r
B	**S**	**S**	**B**	**B**	**S**

C. PERNYATAAN MAJEMUK

- **Pernyataan majemuk** adalah dua buah pernyataan atau lebih yang dihubungkan dengan operasi logika matematika.
- **Operasi logika matematika** antara lain: konjungsi (∧), disjungsi (∨), implikasi (→), dan biimplikasi (↔).
- **Nilai kebenaran pernyataan majemuk** biasanya dituliskan dalam tabel kebenaran.

D. KONJUNGSI & DISJUNGSI

- **Konjungsi** menyatakan hubungan 'p dan/meskipun/tetapi/walaupun q', dan dilambangkan dengan ∧.
- **Nilai konjungsi bernilai benar** jika kedua pernyataan benar (B ∧ B).

  Tabel kebenaran:

p	q	p ∧ q
B	**B**	**B**
B	S	S
S	B	S
S	S	S

  Contoh:

  p : Hari ini hujan. [τ(p) = B]
  q : Hari ini berangin. [τ(q) = B]
  p ∧ q : Hari ini hujan dan berangin. [τ(p ∧ q) = B]

- **Disjungsi** menyatakan hubungan ‘p atau q’, dan dilambangkan dengan V.
- **Nilai disjungsi bernilai salah** jika kedua pernyataan salah (S V S).

Tabel kebenaran:

p	q	p V q
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	**S**	**S**

Contoh:

p : 5 + 10 = 20. [τ(p) = S]

q : 20 bukan bilangan genap. [τ(q) = S]

p V q : 5 + 10 = 20 atau 20 bukan bilangan genap. [τ(p V q) = S]

- **Disjungsi** terdiri dari dua:

1) **Disjungsi inklusif**, yaitu disjungsi yang biasa digunakan, dimana kemungkinan benar ada tiga, yaitu hanya p yang benar, hanya q yang benar, atau benar kedua-duanya.

p	q	p V q
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	**S**	**S**

2) **Disjungsi eksklusif**, yaitu disjungsi yang bernilai benar jika hanya ada salah satu pernyataan yang benar, dilambangkan dengan ⊕ atau ⊻.

p	q	p ⊻ q
B	B	S
B	**S**	**B**
S	**B**	**B**
S	S	S

- **Konjungsi dan disjungsi** dapat dianalogikan ke dalam rangkaian listrik.
- **Rangkaian listrik seri** bersifat **konjungsi**, karena jika seluruh elemen terhubung (B Λ B), maka barulah arus listrik akan mengalir (B).
- **Rangkaian listrik paralel** bersifat **disjungsi**, karena apabila seluruh elemen tidak terhubung (S V S), maka arus listrik akan terputus (S).

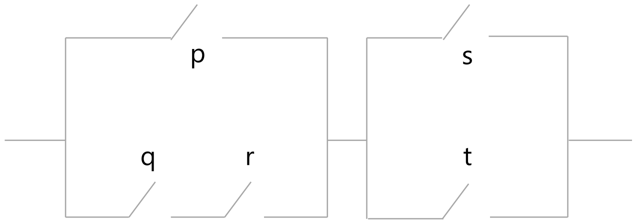
p	q	rangkaian	p Λ q
1	**1**	**tertutup**	**1**
1	0	terbuka	0
0	1	terbuka	0
0	0	terbuka	0

p	q	rangkaian	p V q
1	1	tertutup	1
1	0	tertutup	1
0	1	tertutup	1
0	**0**	**terbuka**	**0**

- **Analogi rangkaian listrik** dari pernyataan logika matematika:

Contoh pernyataan:

[p V (q Λ r)] Λ [s V t]



E. IMPLIKASI

- **Implikasi** menyatakan hubungan ‘jika p maka q’ atau ‘q jika p’, dan dilambangkan dengan →.
- Pernyataan jika (p) dari implikasi disebut **hipotesis/premis**, sedangkan pernyataan maka (q) dari implikasi disebut **konsekuen/kesimpulan**.
- **Nilai implikasi bernilai salah** jika hipotesis benar namun konsekuennya salah (B → S).

Tabel kebenaran:

p	*q*	*p → q*
B	B	B
B	**S**	**S**
S	B	B
S	S	B

Contoh:

p : Hari ini mendung. [τ(p) = B]

q : Hari ini tidak akan hujan. [τ(q) = S]

p → q : Jika hari ini mendung maka hari ini tidak akan hujan. [τ(p Λ q) = S]

- **Macam-macam implikasi:**

1) **Konvers**, merupakan kebalikan dari implikasi biasanya.

p → q menjadi q → p

2) **Invers**, merupakan implikasi yang kedua pernyataannya dinegasikan.

p → q menjadi ~p → ~q

3) **Kontraposisi**, merupakan kebalikan dari implikasi biasa yang kedua pernyatannya dinegasikan.

p → q menjadi ~q → ~p

p	*q*	*~p*	*~q*	*p → q*	*q → p*	*~p → ~q*	*~q → ~p*
B	B	S	S	**B**	**B**	**B**	**B**
B	S	S	B	**S**	**B**	**B**	**S**
S	B	B	S	**B**	**S**	**S**	**B**
S	S	B	B	**B**	**B**	**B**	**B**

F. BIIMPLIKASI

- **Bimplikasi** menyatakan hubungan 'p jika dan hanya jika q' atau 'jika p maka q dan jika q maka p', dan dilambangkan dengan ↔.
- **Biimplikasi bernilai benar** jika kedua pernyataan bernilai sama (X ↔ X).

  Tabel kebenaran:

p	*q*	*p* ↔ *q*
B	**B**	**B**
B	S	S
S	B	S
S	**S**	**B**

Contoh:

p : Hari ini tidak hujan. [τ(p) = S]

q : Hari ini tidak mendung. [τ(q) = S]

p ↔ q : Hari ini tidak hujan jika dan hanya jika hari ini tidak mendung. [τ(p ∧ q) = B]

G. EKUIVALENSI DAN ALJABAR LOGIKA MATEMATIKA

- **Ekuivalensi dua pernyataan majemuk** dapat dicari menggunakan tabel kebenaran dan aljabar logika matematika, dan dilambangkan dengan ≡.
- **Jenis-jenis tabel kebenaran** dari hasil akhir nilai kebenarannya:
  1) **Tautologi**, hasil akhirnya benar semua.
  2) **Kontradiksi**, hasil akhirnya salah semua.
  3) **Kontingensi**, hasil akhirnya ada yang benar dan ada yang salah.
- **Aljabar/sifat** dalam operasi logika matematika:

IDEMPOTEN

p ∧ p ≡ p

p ∨ p ≡ p

INVOLUSI

~(~p) ≡ p

IDENTITAS

p ∧ (B) ≡ p

p ∨ (B) ≡ (B)

p ∧ (S) ≡ (S)

p ∨ (S) ≡ p

KOMPLEMEN

p ∧ ~p ≡ (S)

p ∨ ~p ≡ (B)

ABSORPSI

p ∧ (p ∨ q) ≡ p

p ∨ (p ∧ q) ≡ p

KOMUTATIF

p ∧ q ≡ q ∧ p

p ∨ q ≡ q ∨ p

ASOSIATIF

p ∧ (q ∧ r) ≡ (p ∧ q) ∧ r

p ∨ (q ∨ r) ≡ (p ∨ q) ∨ r

DISTRIBUTIF

p ∧ (q ∨ r) ≡ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)

p ∨ (q ∧ r) ≡ (p ∨ q) ∧ (p ∨ r)

DE MORGAN

~(p ∧ q) ≡ ~p ∨ ~q

~(p → q) ≡ p ∧ ~q

~(p ∨ q) ≡ ~p ∧ ~q

~(p ↔ q) ≡ ~p ↔ q ≡ p ↔ ~q

~(∃.p) ≡ ∀.(~p)

~(∀.p) ≡ ∃.(~p)

IMPLIKASI

p → q ≡ ~p ∨ q

p → q ≡ ~q → ~p

q → p ≡ ~p → ~q

p ↔ q ≡ (p → q) ∧ (q → p)

Contoh:

Buktikan bahwa ~(p ↔ q) ekuivalen dengan p ↔ q dengan tabel kebenaran dan aljabar logika matematika!

Dengan tabel kebenaran

~	p	↔	q
S	B	B	B
B	B	S	S
B	S	S	B
S	S	B	S
(2)		(1)	

p	↔	q
B	**B**	B
B	**S**	S
S	**S**	B
S	**B**	S
	(3)	

Dengan aljabar logika matematika

= ~(p ↔ q) De Morgan

= ~[(p → q) ∧ (q → p)] sifat implikasi

= ~[(~p ∨ q) ∧ (~q ∨ p)] De Morgan

= ~(~p ∨ q) ∨ ~(~q ∨ p) De Morgan

= (p ∧ ~q) ∨ (q ∧ ~p) distributif

= [(p ∧ ~q) ∨ q] ∧ [(p ∧ ~q) ∨ ~p] distributif

= [(p ∨ q) ∧ (~q ∨ q)] ∧ [(p ∨ ~p) ∧ (~q ∨ ~p)]

P (B) (B) P

komplemen lalu identitas

= (p ∨ q) ∧ (~q ∨ ~p) sifat implikasi

= (~p → q) ∧ (q → ~p) pengertian biimplikasi

= ~p ↔ q ekuivalen

H. PENARIKAN KESIMPULAN

- **Kesimpulan** dikatakan sah apabila:

  Premis 1 : a
  Premis 2 : b
  ____
  ∴ c

  logis bila $(a \wedge b) \rightarrow c$ nilai akhirnya tautologi.

- **Tiga rumus logis** premis-premis:

1) **Modus Ponen**

   Premis 1 : $p \rightarrow q$
   Premis 2 : p
   ____
   ∴ q

   Jika p terjadi maka q terjadi, dan p terjadi lagi, maka dipastikan q terjadi.

2) **Modus Tollen**

   Premis 1 : $p \rightarrow q$
   Premis 2 : $\sim q$
   ____
   ∴ $\sim p$

   Jika p terjadi maka q terjadi, namun q sebenarnya tidak terjadi, maka dipastikan p tidak terjadi.

3) **Silogisme**

   Premis 1 : $p \rightarrow q$
   Premis 2 : $q \rightarrow r$
   ____
   ∴ $p \rightarrow r$

   Jika p terjadi maka q terjadi, dan jika q terjadi maka r terjadi, maka dipastikan jika p terjadi maka r terjadi juga.

Contoh:

Jika A berteman dengan B, maka A tidak berteman dengan C. C berteman dengan D atau C tidak berteman dengan A. Jika A berteman dengan D, maka C tidak berteman dengan D. Diketahui A berteman dengan D.

Jawab:

Analogi:

p = "A berteman dengan B"
q = "A berteman dengan C"
r = "C berteman dengan D"
s = "A berteman dengan D"

Pernyataan:

1) $p \rightarrow \sim q$
2) $r \vee q \equiv \sim r \rightarrow q$
3) $s \rightarrow \sim r$
4) s

Kesimpulan:

$s \rightarrow \sim r$	$\longrightarrow$	$\sim r \rightarrow q$	$\longrightarrow$	$p \rightarrow \sim q$
s		$\sim r$		q
∴ $\sim r$ (Ponen)		∴ q (Ponen)		∴ $\sim p$ (Tollen)

Jadi, kesimpulannya adalah, A tidak berteman dengan B.