

Vektor

A. PENDAHULUAN

Besaran berdasarkan arahnya terdiri dari:

- 1) **Besaran skalar**, besaran yang tak punya arah.
Contoh: massa (m), panjang (L), waktu (t), kelajuan (v), massa jenis (ρ).
- 2) **Besaran vektor**, besaran yang punya arah.
Contoh: gaya (\vec{F}), percepatan (\vec{a}), kecepatan (\vec{v}), momentum (\vec{p}).

Vektor diberi nama dengan huruf kecil bergaris atas atau menyebut titik pangkal dan ujungnya.

- 1) **Anak panah** menunjuk arah yang ditunjuk vektor.
- 2) **Besar kecilnya vektor** dilambangkan dengan besar kecilnya anak panah.

Nilai arah vektor:

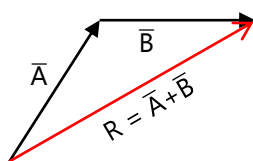
- 1) **Vektor positif** pada koordinat kartesius arahnya ke atas (terhadap y) atau ke kanan (terhadap x).
- 2) **Vektor negatif** pada koordinat kartesius arahnya ke bawah (terhadap y) atau ke kiri (terhadap x).
- 3) **Vektor memiliki resultan** yang merupakan hasil dari penjumlahan, pengurangan atau perkaliannya.

B. PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN VEKTOR

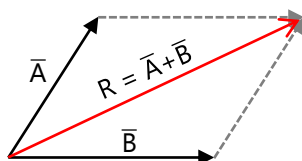
Penjumlahan dan pengurangan vektor digunakan untuk mencari resultan vektor.

Resultan vektor dapat dicari dengan menghubungkan pangkal vektor awal dengan ujung vektor akhir.

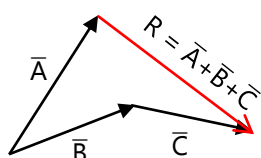
- 1) **Cara segitiga** (dua vektor)



- 2) **Cara jajar genjang** (dua vektor)



- 3) **Cara poligon** (lebih dari dua vektor)

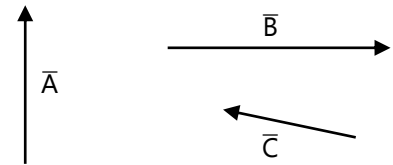


Pengurangan vektor dapat menggunakan sifat operasi hitung:

$$R = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad (\text{berbalik arah})$$

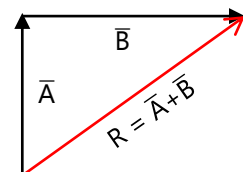
Contoh:

Jika diketahui arah vektor A, B, dan C berikut,

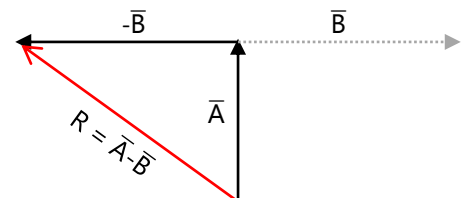


Tentukan:

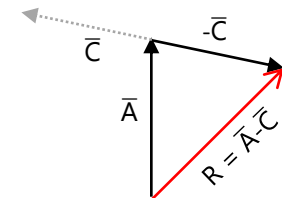
- a. Resultan $\vec{A} + \vec{B}$



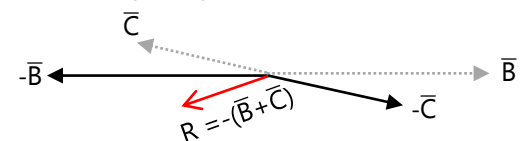
- b. Resultan $\vec{A} - \vec{B}$



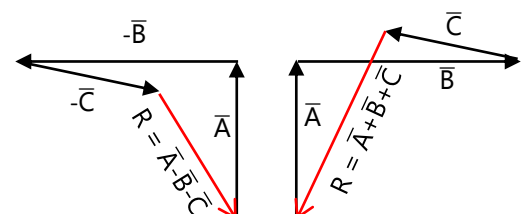
- c. Resultan $\vec{A} - \vec{C}$



- d. Resultan $-(\vec{B} + \vec{C})$



- e. Resultan $\vec{A} - \vec{B} - \vec{C}$ dan $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$



Kemungkinan resultan vektor dapat dirumuskan:

$$|\vec{A} - \vec{B}| \leq R \leq |\vec{A} + \vec{B}|$$

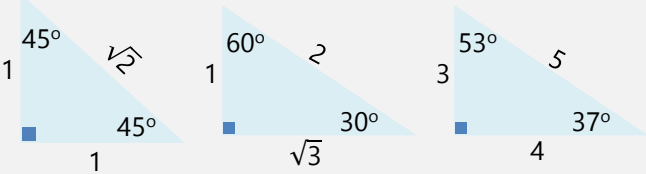
TRIGONOMETRI SEDERHANA

Nilai perbandingan trigonometri

$$\sin \theta = \frac{\text{sisi depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} \quad \tan \theta = \frac{\text{sisi depan sudut}}{\text{sisi samping sudut}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{sisi samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Segitiga istimewa



Sudut istimewa

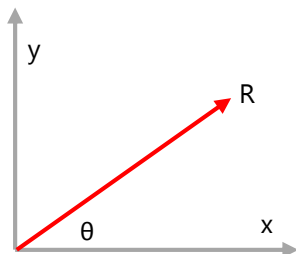
	0°	30°	45°	60°	90°	37°	53°
sin	0	1/2	1/2√2	1/2√3	1	3/5	4/5
cos	1	1/2√3	1/2√2	1/2	0	4/5	3/5
tan	0	1/3√3	1	√3	∞	3/4	4/3

C. PENJUMLAHAN VEKTOR SECARA ANALITIK

Sebuah vektor dapat diuraikan menjadi dua buah vektor pada sumbu horizontal (x) dan sumbu vertikal (y).

Vektor tersebut terurai menjadi komponen x dan y yang saling tegak lurus dan memiliki resultan dengan arah yang merupakan vektor yang terurai itu sendiri.

Cara menentukan komponen vektor:



$$x = R \cos \theta$$

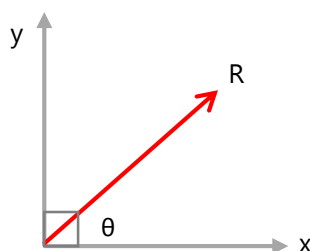
$$y = R \sin \theta$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Penjumlahan vektor secara analitik dapat dilakukan dalam tiga kondisi:

1) Dua buah vektor yang tegak lurus



Resultan vektor dihitung menggunakan teorema Pythagoras:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Arah resultan terhadap sumbu x dapat dihitung:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Contoh:

Gaya 4 N yang bergerak ke arah utara dan gaya 10 N yang bergerak ke barat dilambungkan dengan vektor. Tentukan resultan dan arahnya!

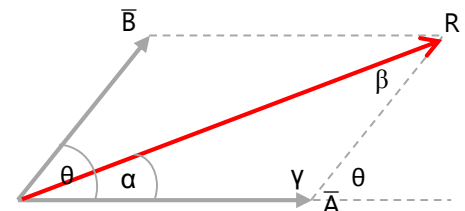
Jawab:

$$R = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{100 + 16}$$

$$R = \sqrt{116} \quad R = 10,77 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{4}{10} \quad \theta = 21,80^\circ \text{ (kalkulator)}$$

2) Dua buah vektor yang tidak tegak lurus



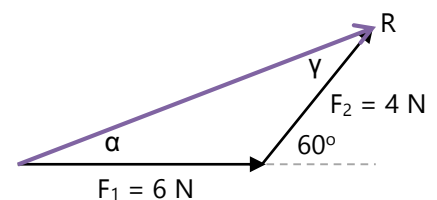
Resultan vektor dihitung menggunakan persamaan kosinus:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 \pm 2AB \cos \theta}$$

Arah resultan terhadap sumbu x dapat dihitung dengan persamaan sinus:

$$\frac{B}{\sin \alpha} = \frac{A}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma}$$

Contoh:



Tentukan nilai resultan dan arah resultan vektor F_1 dan F_2 !

Jawab:

Sudut 60° merupakan sudut θ .

$$R = \sqrt{6^2 + 4^2 + 2 \cdot 6 \cdot 4 \cos 60}$$

$$R = \sqrt{36 + 16 + 48,0,5}$$

$$R = \sqrt{76} \quad R = 8,71 \text{ N}$$

Dari gambar diatas, dapat kita ketahui bahwa $\beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

$$\frac{B}{\sin \alpha} = \frac{A}{\sin \beta} \quad \frac{4}{\sin \alpha} = \frac{6}{\sin 120}$$

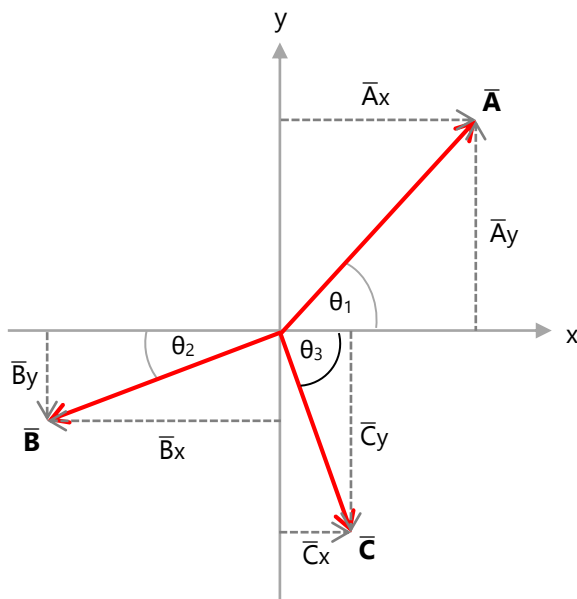
$$4 \cdot \sin 60 = 6 \cdot \sin \alpha$$

$$4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 6 \cdot \sin \alpha$$

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{2\sqrt{3}}{6} \quad \alpha = 35,26^\circ \text{ (kalkulator)}$$

3) Lebih dari dua buah vektor

Jika terdapat lebih dari dua buah vektor, harus diketahui terlebih dahulu resultan komponen x dan y nya, sehingga menjadi dua vektor yang tegak lurus, kemudian resultan baru dapat dicari.



Resultan komponen vektor x:

$$\Sigma R_x = R_{x1} \pm R_{x2} \pm \dots R_{xn}$$

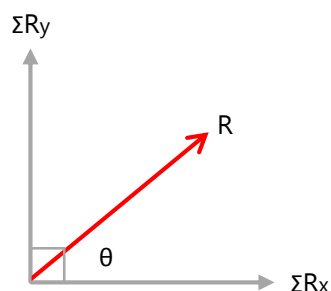
$$x = R \cos \theta$$

Resultan komponen vektor y:

$$\Sigma R_y = R_{y1} \pm R_{y2} \pm \dots R_{yn}$$

$$y = R \sin \theta$$

Setelah kedua komponen dihitung, maka **susunan vektor** menjadi:



Resultan akhir vektor:

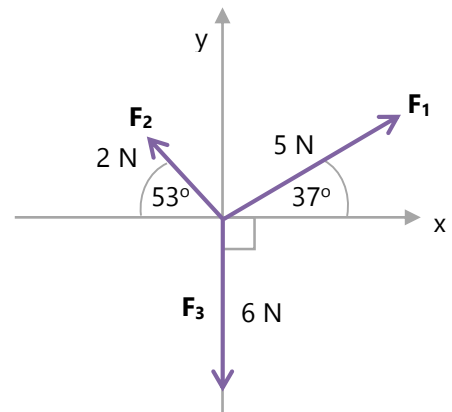
$$R = \sqrt{\Sigma R_x^2 + \Sigma R_y^2}$$

Arah resultan vektor:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\Sigma R_x}{\Sigma R_y}$$

Contoh:

Suatu benda ditarik oleh tiga buah gaya sesuai diagram dibawah. Tentukan resultan gaya dan arah perpindahan benda!



Jawab:

$$\Sigma F_x = F_{x1} - F_{x2} + F_{x3}$$

$$\Sigma F_x = F_1 \cdot \cos 37 - F_2 \cdot \cos 53 + F_3 \cdot \cos 90$$

$$\Sigma F_x = 5 \cdot \frac{4}{5} - 2 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot 0$$

$$\Sigma F_x = 4 - 1,2 + 0$$

$$\Sigma F_x = 2,8 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = F_{y1} + F_{y2} - F_{y3}$$

$$\Sigma F_y = F_1 \cdot \sin 37 - F_2 \cdot \sin 53 + F_3 \cdot \sin 90$$

$$\Sigma F_y = 5 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} - 6 \cdot 1$$

$$\Sigma F_y = 3 + 1,6 - 6$$

$$\Sigma F_y = -1,4 \text{ N}$$

Kemudian dapat dibentuk:

$$R = \sqrt{2,8^2 + 1,4^2}$$

$$R = \sqrt{7,84 + 1,96}$$

$$R = \sqrt{9,8}$$

$$R = 3,13 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{1,4}{2,8}$$

$$\theta = 30^\circ$$

Arah perpindahan adalah barat condong ke selatan sebesar 30° .

D. PERKALIAN VEKTOR

Perkalian vektor terdiri dari dua, yaitu perkalian titik (dot), dan perkalian silang (cross).

Bentuk penulisan vektor:

1) **Vektor posisi**, ditulis dalam notasi vektor terhadap titik acuan.

Contoh: vektor posisi titik A dari O adalah \vec{OA} .


2) **Vektor basis**, ditulis dalam vektor satuan.

Vektor satuan sumbu x adalah \mathbf{i} , sumbu y adalah \mathbf{j} , dan sumbu z adalah \mathbf{k} .


$$\vec{a} = x.\mathbf{i} + y.\mathbf{j} + z.\mathbf{k}$$

Panjang/nilai skalar dari vektor yang ditulis dalam vektor basis adalah:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

 **Perkalian skalar/titik (\cdot)** menghasilkan besaran skalar, memiliki definisi:


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

 **Perkalian skalar** dengan vektor basis dengan $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ dan $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ diketahui dapat dihitung:


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

 **Sifat-sifat perkalian skalar:**

Identitas	$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2$
Vektor satuan	$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$
Komutatif	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
Distributif	$\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \pm (\vec{a} \cdot \vec{c})$
Asosiatif	$(\vec{m}.\vec{a}) \cdot (\vec{n}.\vec{b}) = (\vec{m}.\vec{n})(\vec{a} \cdot \vec{b})$
Tegak lurus	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, maka $\vec{a} \perp \vec{b}$

 **Perkalian vektor/silang (\times)** menghasilkan besaran vektor yang tegak lurus terhadap dua vektor yang dikali silang, memiliki definisi:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \vec{e}$$


 **Perkalian vektor** dengan vektor basis dengan $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ dan $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ diketahui dapat dihitung:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1.z_2 - y_2.z_1) \mathbf{i} + (z_1.x_2 - z_2.x_1) \mathbf{j} + (x_1.y_2 - y_1.x_2) \mathbf{k}$$

 **Sifat-sifat perkalian vektor:**

Identitas	$\vec{a} \times \vec{a} = 0$
Vektor satuan	$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$ $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$
Anti-Komutatif	$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
Distributif	$\vec{a} \times (\vec{b} \pm \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \pm (\vec{a} \times \vec{c})$ $(\vec{b} \pm \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b} \times \vec{a}) \pm (\vec{c} \times \vec{a})$

 **Sudut dua vektor** dapat dicari menggunakan perkalian skalar.

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$