Sistem Persamaan Polinom

A. PENDAHULUAN

- **Sistem persamaan polinom (suku banyak)** adalah sistem persamaan dengan pangkat tertinggi >2.
- **Bentuk umum polinom:**

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o$$

- **Istilah pada polinom:**
  1) Derajat (n), adalah pangkat tertinggi dalam suatu suku banyak.
  2) Variabel (x), adalah bilangan yang dimisalkan dengan huruf, misalnya x.
  3) Koefisien (a), adalah bilangan yang mengikuti variabel.

B. SUBSTITUSI POLINOM

- **Substitusi polinom** dilakukan untuk mendapatkan nilai polinom.
- **Substitusi polinom** P(x) dengan x = k dapat dilakukan dengan:
  1) **Metode substitusi normal**

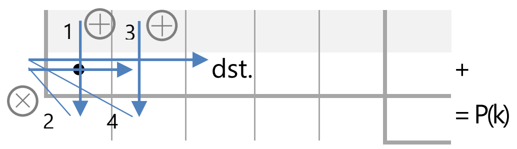
     Mengganti seluruh variabel x sistem persamaan polinom dengan k.
  2) **Metode Horner**

     Bentuk bagan Horner untuk substitusi:

	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	...	x^1	x^0	
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_o	
k	•						+
	a_n						= P(k)

     a. Letakkan seluruh koefisien dari derajat tertinggi sampai nol di bagian atas.
     b. Letakkan substitusi di samping kiri.
     c. Hasil akhir adalah nilai polinom.

     Aturan penggunaan metode Horner:



     a. Perkalian dengan substitusi, penjumlahan ke bawah.
     b. Ulang tahap di atas sampai mencapai nilai P(k).

Contoh:

Diketahui $f(x) = 5x^5 - 8x^4 + x^2 - 3x + 2$. Tentukan nilai dari f(2)!

Jawab:

a. Metode substitusi normal

$f(2) = 5(2)^5 - 8(2)^4 + (2)^2 - 3(2) + 2 = \underline{32}$

b. Metode Horner

	5	-8	0	1	-3	2	
2	•	10	4	8	18	30	+
	5	2	4	9	15	**32**	

C. KESAMAAN POLINOM

- **Kesamaan polinom** dilambangkan dengan:

$$f(x) \equiv g(x)$$

- **Dua buah sistem persamaan polinom** dikatakan memiliki kesamaan jika keduanya:
  1) Memiliki derajat yang sama.
  2) Memiliki variabel dan koefisien seletak yang sama antara polinom ruas kiri dengan kanan.
- **Pada kesamaan polinom** tidak berlaku pindah ruas atau kali silang.

  Contoh:

  Diketahui $x^4 + px^2 + qx - 6 \equiv (x^2 - 2)(x^2 + r)$. Tentukan nilai p, q dan r!

  Jawab:

  Jabarkan terlebih dahulu ruas kanan,

  $x^4 + px^2 + qx - 6 \equiv x^4 + rx^2 - 2x^2 - 2r$

  $x^4 + px^2 + qx - 6 \equiv x^4 + (r - 2)x^2 - 2r$

  Sesuai konsep kesamaan maka,

p = r – 2	$\underline{r = 3}$
$\underline{q = 0}$	p = 3 – 2
-6 = -2r	$\underline{p = 1}$

D. PEMBAGIAN POLINOM, TEOREMA SISA DAN TEOREMA FAKTOR

- **Konsep pembagian polinom:**

$$\frac{19}{5} = 3 + \frac{4}{5}$$

$$\frac{\text{yg dibagi}}{\text{pembagi}} = \text{hasil bagi} + \frac{\text{sisa}}{\text{pembagi}}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

$$\mathbf{P(x) = H(x).Q(x) + S(x)}$$

  1) Derajat hasil bagi [H(x)] adalah derajat yang dibagi [P(x)] dikurang derajat pembagi [Q(x)].
  2) Derajat sisa [S(x)] adalah derajat pembagi [Q(x)] dikurang satu.
- **Pembagian polinom** dapat dilakukan dengan:
  1) **Metode pembagian biasa/susun**

     Membagi bilangan seperti biasa dengan kurung bagi.

2) **Metode Horner**

Aturan penggunaan:

a. Letakkan seluruh koefisien dari derajat tertinggi sampai nol di bagian atas.

b. Letakkan faktor pengali di samping kiri.

c. Baris bawah bagian kiri adalah hasil bagi, sedangkan bagian kanan adalah sisa.

$$\text{hasil bagi} = \frac{\text{kolom bagian kiri}}{\text{koef derajat pembagi}}$$

sisa = kolom bagian kanan

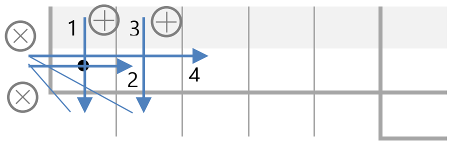
Bagan Horner tingkat satu

Pembagi **ax + b**

	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	...	x^1	x^0	
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_o	
$-^b/_a$	•						+
	hasil					**c**	
	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}	...	x^0	**sisa**	

Sisa = **c**

Aturan penggunaan:



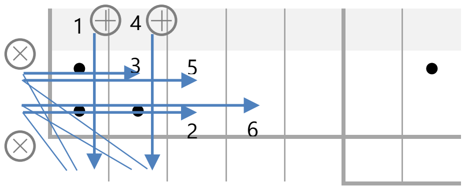
Bagan Horner tingkat dua

Pembagi **ax^2 + bx + c**

	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	...	x^2	x^1	x^0	
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_o	
$-^b/_a$	•						•	
$-^c/_a$	•	•						+
	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}	...	x^0	**m**	**n**	

Sisa = **mx + n**

Aturan penggunaan:



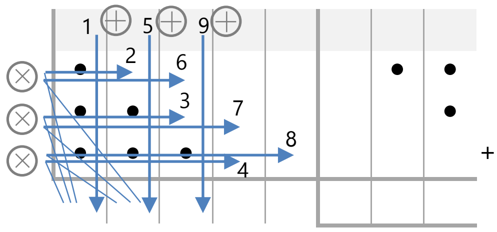
Bagan Horner tingkat tiga

Pembagi **ax^3 + bx^2 + cx + d**

	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	...	x^3	x^2	x^1	x^0	
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_3	a_2	a_1	a_o	
$-^b/_a$	•						•	•	
$-^c/_a$	•	•						•	
$-^d/_a$	•	•	•						+
	hasil					**p**	**q**	**r**	
	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}	...	x^0		**sisa**		

Sisa = **px^2 + qx + r**

Aturan penggunaan:



Contoh:

Tentukan hasil bagi $4x^5 + 3x^3 - 6x^2 - 5x + 1$ bila dibagi dengan $2x - 1$!

Jawab:

a. Metode pembagian biasa/susun

$$\begin{array}{r|l}
 & \mathbf{2x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x - {}^7/_2} \\
2x - 1 & 4x^5 + 3x^3 - 6x^2 - 5x + 1 \\
 & 4x^5 - 2x^4 \quad - \\
 & 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 5x + 1 \\
 & 2x^4 - x^3 \quad - \\
 & 4x^3 - 6x^2 - 5x + 1 \\
 & 4x^3 - 2x^2 \quad - \\
 & -4x^2 - 5x + 1 \\
 & -4x^2 + 2x \quad - \\
 & -7x + 1 \\
 & {}^7/_2 \quad - \\
 & -{}^5/_2
\end{array}$$

Hasil bagi = $2x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x - {}^7/_2$

Sisa = $-{}^5/_2$

b. Metode Horner

Pembagi **ax + b**

	4	0	3	-6	-5	1	
$^1/_2$	•	2	1	2	-2	$-^7/_2$	+
	4	**2**	**4**	**-4**	**-7**	**$-^5/_2$**	

Hasil bagi = $\dfrac{4x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 4x - 7}{2}$

Hasil bagi = $2x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x - {}^7/_2$

Sisa = $-{}^5/_2$

- **Teorema sisa** menjelaskan bahwa:

  1) Derajat sisa adalah derajat pembagi dikurang satu.

  2) Jika P(x) dibagi q(x) bersisa, dan k adalah nilai x pembuat q(x) menjadi nol, maka P(k) = sisa.

     a. Jika P(x) : (ax + b), maka sisanya $P(-\frac{b}{a})$.

     b. Jika P(x) : (ax^2 + bx + c), maka sisanya adalah $P(x_1)$ dan $P(x_2)$.

- **Teorema sisa** dapat digunakan untuk menentukan sisa pembagian polinom tanpa mengetahui polinom dan/atau hasil baginya.

Contoh:

Suku banyak g(x) jika dibagi (x – 1) bersisa 6, sedangkan apabila dibagi (x – 2) sisanya 3. Tentukan sisanya apabila f(x) dibagi ($x^2 - 3x + 2$)!

Jawab:

f(2) = 3

f(1) = 6

f(x) : ($x^2 - 3x + 2$), sisa = mx + n, maka

$$\begin{array}{rl} f(2) = & 2m + n = 3 \\ f(1) = & m + n = 6 \quad - \\ \hline & m = -3 \qquad n = 9 \end{array}$$

maka, f(x) bila dibagi ($x^2 - 3x + 2$) bersisa <u>–3x + 9</u>.

- **Teorema faktor** menjelaskan bahwa:
  1) Jika P(x) habis dibagi q(x) atau mempunyai sisa nol, maka q(x) adalah faktor dari P(x).
  2) Jika P(x) = f(x).g(x) maka f(x) dan g(x) adalah faktor dari P(x).
- **Teorema faktor** dapat digunakan untuk menentukan faktor lain atau akar-akar rasional dari sistem persamaan polinom menggunakan metode Horner.

Contoh:

Jika salah satu akar dari $f(x) = x^4 + mx^3 - 6x^2 + 7x - 6$ adalah 2, tentukan akar linear lainnya!

Jawab:

Pertama-tama, cari terlebih dahulu nilai m dengan substitusi polinom f(2) = 0, karena 2 adalah akar/faktor dari f(x).

f(2) = 0

$0 = (2)^4 + m(2)^3 - 6(2)^2 + 7(2) - 6$

0 = 8m

m = 0

Kemudian gunakan metode Horner dan cara tebak untuk menentukan faktor/akar lain.

	1	0	-6	7	-6	
2	•	2	4	-4	6	+
	1	2	-2	3	0	
-3	•	-3	3	-3	+	
	1	-1	1	0		

Faktor f(x) antara lain adalah (x – 2), (x + 3), dan ($x^2 - x + 1$).

Jadi, faktor/akar linear selain 2 adalah <u>-3</u>.

E. SISTEM PERSAMAAN POLINOM

- **Sistem persamaan polinom (suku banyak)** mempunyai faktor/akar linear atau himpunan penyelesaian seperti persamaan kuadrat atau linear.
- **Faktor/akar-akar polinom** dapat dicari menggunakan teorema faktor.
- **Sifat-sifat akar-akar polinom:**
  1) **Persamaan kuadrat**

     Bentuk umum:

     $ax^2 + bx + c$

     dengan akar-akar x_1 dan x_2,

     $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\quad$ $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$
  2) **Persamaan pangkat tiga**

     Bentuk umum:

     $ax^3 + bx^2 + cx + d$

     dengan akar-akar x_1, x_2 dan x_3,

     $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

     $x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = \frac{c}{a}$ $\quad$ $x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$
  3) **Persamaan pangkat empat**

     Bentuk umum:

     $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

     dengan akar-akar x_1, x_2, x_3 dan x_4,

     $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$

     $x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_1.x_4 + x_2.x_3 + x_2.x_4 + x_3.x_4 = \frac{c}{a}$

     $x_1.x_2.x_3 + x_1.x_2.x_4 + x_1.x_3.x_4 + x_2.x_3.x_4 = -\frac{d}{a}$

     $x_1.x_2.x_3.x_4 = \frac{e}{a}$