

Program Linear

A. PENDAHULUAN

Program linear adalah suatu program untuk menyelesaikan permasalahan yang batas-batasnya berbentuk sistem pertidaksamaan linear dua variabel (SPTLDV).

Program linear mempelajari empat hal utama:

- 1) Menggambar daerah penyelesaian (DP) dari PTLDV atau SPTLDV.
- 2) Menentukan PTLDV atau SPTLDV dari daerah penyelesaian.
- 3) Menentukan nilai optimum (nilai maksimum dan minimum) pada daerah penyelesaian.
- 4) Menyelesaikan masalah mengenai optimasi yang berkaitan dengan program linear.

B. MENENTUKAN DAERAH PENYELESAIAN

Daerah penyelesaian merupakan himpunan penyelesaian (nilai benar) dari PTLDV atau SPTLDV.

Daerah penyelesaian dapat dibuktikan melalui pendekatan grafik pada bidang kartesius.

Langkah menentukan DP:

- 1) **Tentukan dua buah titik sembarang** dari pertidaksamaan.
- 2) **Tarik garis** sehingga kedua titik terhubung dan membagi bidang kartesius menjadi dua bagian.
- 3) **Periksa/uji nilai titik** di salah satu bagian yang telah terbagi tadi, dengan memasukkan nilai x dan y titik ke pertidaksamaan.
- 4) **Jika** daerah yang terdapat titik yang diuji nilainya bernilai benar, maka itulah daerah penyelesaian.
Jika tidak, maka daerah penyelesaiannya berada di bidang lawannya.
- 5) **Jika** pertidaksamaan mempunyai sama dengan, maka titik-titik pada garis juga merupakan daerah penyelesaian.
Jika pertidaksamaan tidak mempunyai sama dengan, maka titik-titik pada garis bukan daerah penyelesaian.

Contoh:

Tentukan daerah penyelesaian dari SPTLDV berikut ini:

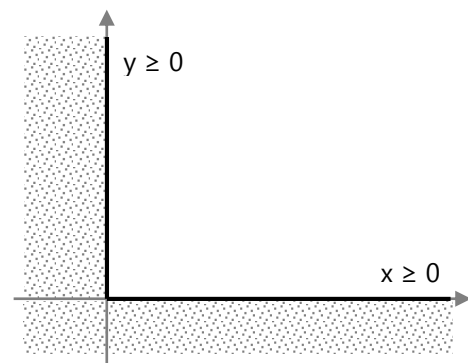
$$x \geq 0 \dots (1)$$

$$y \geq 0 \dots (2)$$

$$2x + 5y \geq 10 \dots (3)$$

$$4x + y > 8 \dots (4)$$

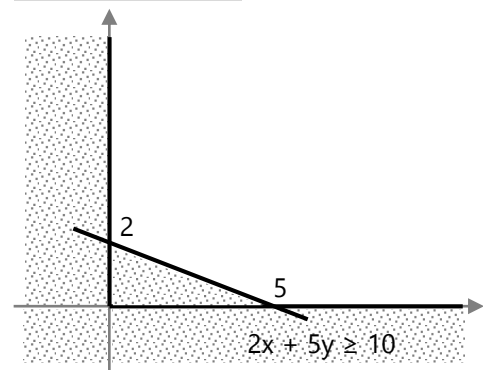
Persamaan 1 dan 2



Persamaan 3

$$2x + 5y = 10$$

x	0	5
y	2	0



Uji nilai untuk koordinat (0, 0)

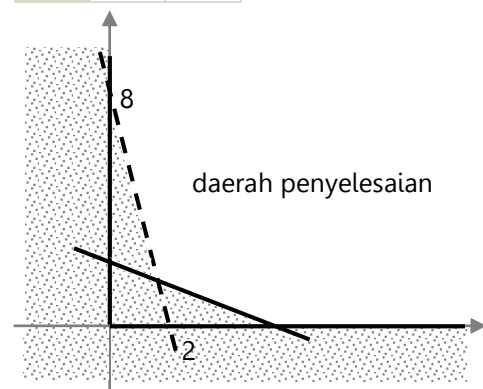
$$2(0) + 5(0) = 10$$

$0 = 10$ pernyataan awal adalah \geq , maka daerah tempat titik yang diuji nilai bernilai salah.

Persamaan 4

$$4x + y = 8$$

x	0	2
y	8	0




Uji nilai untuk koordinat (0, 0)

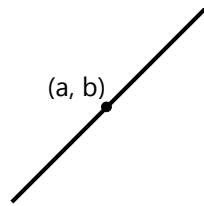
$$4(0) + (0) = 10$$

$0 = 10$ pernyataan awal adalah $>$, maka daerah tempat titik yang diuji nilai bernilai salah.

C. PERSAMAAN GARIS

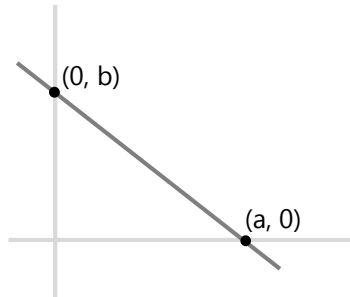
 **Persamaan garis** dapat dibentuk dari suatu garis pada bidang kartesius.

1) Garis yang melewati satu titik



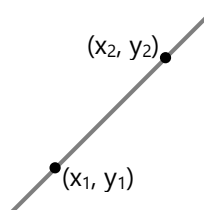
$$y - b = m(x - a)$$

2) Garis yang memotong sumbu x dan sumbu y



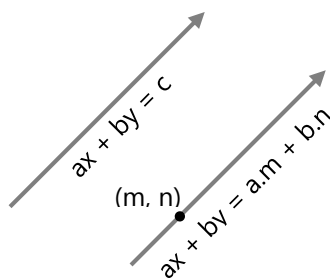
$$bx + ay = ab$$

3) Garis yang melewati dua titik sembarang

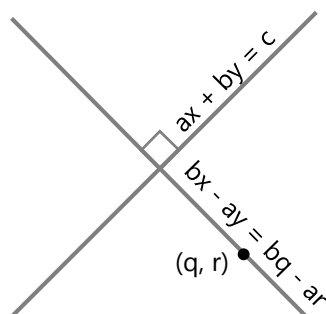


$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$


4) Dua garis yang sejajar



5) Dua garis yang tegak lurus



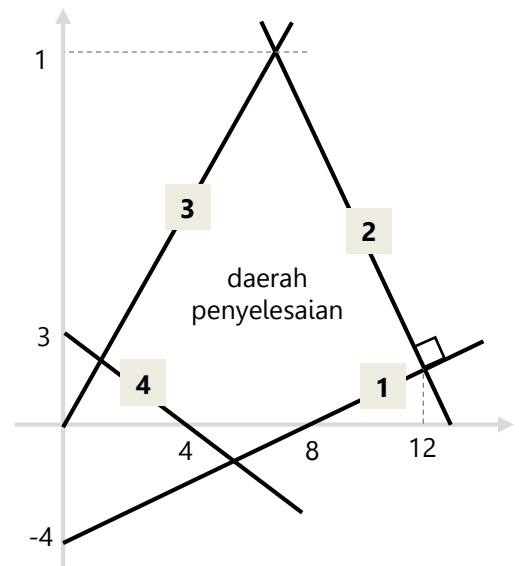
D. MENENTUKAN SPTLDV DARI DAERAH PENYELESAIAN

 **Cara menentukan** PTLDV dan SPTLDV dari grafik daerah penyelesaian:

- 1) **Jumlah garis** pembatas daerah penyelesaian adalah jumlah SPTLDV.
- 2) **Tentukan** semua persamaan garis dengan rumus-rumus pada pembahasan sebelumnya.
- 3) **Uji nilai titik** di salah satu bagian yang dibagi garis untuk menentukan tanda pertidaksamaan yang tepat.

Contoh:

Tentukan pertidaksamaan-pertidaksamaan yang memenuhi daerah penyelesaian berikut ini!



Garis 1

$$-4x + 8y = -4 \cdot 8$$

$$x - 2y = 8$$

Uji titik koordinat untuk (0, 0) (daerah benar)

$$(0) - 2(0) = 8$$

$0 = 8$, tandanya adalah \leq dan titik berada di daerah benar, maka

$$x - 2y \leq 8$$

Garis 2 (tegak lurus dengan garis 1)

Tentukan titik potongnya terlebih dahulu dengan garis 1 (diketahui $x = 12$)

$$x - 2y = 8$$

$$12 - 2y = 8$$

$$y = 2 \quad \text{berpotongan pada } (12, 2), \text{ maka}$$

$$2x + y = 2 \cdot 12 + 1 \cdot 2$$

$$2x + y = 26$$

Uji titik koordinat untuk (0, 0) (daerah benar)

$$2(0) + (0) = 26$$

$0 = 26$, tandanya adalah \leq dan titik berada di daerah benar, maka

$$2x + y \leq 26$$

Garis 3 (berpotongan dengan garis 2)

Tentukan titik potongnya dengan garis 2 (diketahui $y = 12$)

$$2x + y = 26$$

$$2x + 12 = 26$$

$$x = 7 \quad \text{berpotongan pada } (7, 12), \text{ dan ada}$$

titik pada 0, 0, maka

$$12x + 7y = 0$$

Uji titik koordinat untuk (1, 0) (daerah benar)

$$12(1) + 7(0) = 0$$

$12 = 0$, tandanya adalah \geq dan titik berada di daerah benar, maka

$$12x + 7y \geq 0$$

Garis 4

$$3x + 4y = 4.3$$

$$3x + 4y = 12$$

Uji titik koordinat untuk (0, 0) (daerah salah)

$$3(0) + 4(0) = 12$$

$0 = 12$, tandanya adalah \leq dan titik berada di daerah salah, maka

$$3x + 4y \geq 12$$

E. NILAI OPTIMUM

Nilai optimum adalah nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi objektif/sasaran [$f(x, y)$] suatu daerah penyelesaian pada program linear.

Letak nilai optimum adalah pada titik-titik pojok batas daerah penyelesaian.

Cara menentukan nilai optimum ada dua, yaitu cara uji titik pojok dan cara garis selidik.

Langkah-langkah cara uji titik pojok:

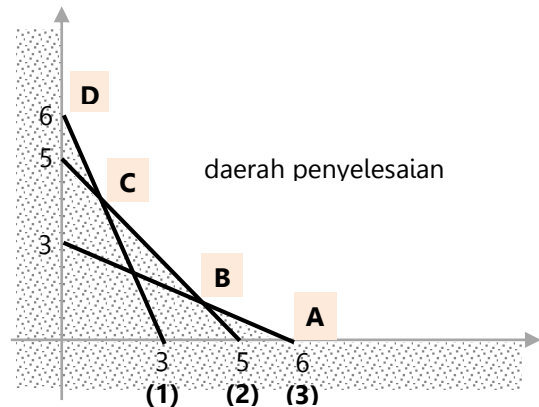
- 1) Buat gambar DP jika belum ada.
- 2) Menentukan koordinat masing-masing titik pojok.
- 3) Memasukkan nilai x dan y ke persamaan garis.

Langkah-langkah cara garis selidik:

- 1) Menentukan skala garis selidik menggunakan fungsi objektif/sasaran. [$f(x, y) = k$]
- 2) Garis selidik yang tidak memotong daerah penyelesaian saat menyelidiki suatu titik pojok adalah nilai optimum.
- 3) Jika nilai x positif, maka nilai maksimum berada di titik yang lebih kanan, dan nilai minimum di titik yang lebih kiri.
- 4) Jika nilai x negatif, maka nilai maksimum berada di titik yang lebih kiri, dan nilai minimum di titik yang lebih kanan.

Contoh 1: (cara uji titik pojok)

Tentukan nilai minimum dari $500x + 400y$ pada daerah penyelesaian dibawah ini!



Titik yang tidak diketahui koordinatnya adalah titik B dan titik C.

Persamaan garis (1):

$$6x + 3y = 3.6$$

$$2x + y = 6$$

Persamaan garis (3):

$$3x + 6y = 6.3$$

$$x + 2y = 6$$

Titik B (titik potong garis 2 dan 3)

Eliminasi: $x + 2y = 6$

$$\begin{array}{r} x + y = 5 - \\ \hline y = 1 \end{array}$$

$$x = 4 \quad B = (4, 1)$$

Titik C (titik potong garis 1 dan 2)

Eliminasi: $2x + y = 6$

$$\begin{array}{r} x + y = 5 - \\ \hline x = 1 \end{array}$$

$$y = 4 \quad C = (4, 1)$$

Uji nilai titik pojok (dari fungsi sasaran):

$$A = 500(6) + 400(0) = 3000$$

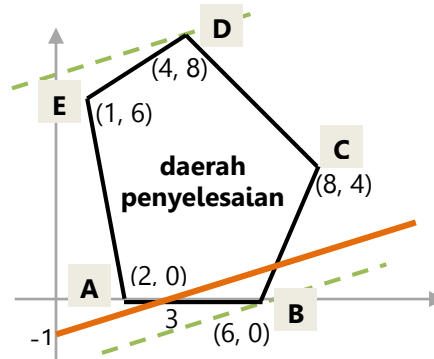
$$B = 500(4) + 400(1) = 2400$$

$$C = 500(1) + 400(4) = 2100 \text{ (nilai minimum)}$$

$$D = 500(0) + 400(6) = 2400$$

Contoh 2: (cara garis selidik)

Tentukan nilai maksimum serta minimum dari $2x - 6y$ pada daerah penyelesaian dibawah ini!



Maka, $x - 3y = k$


Titik optimum yang memenuhi ketentuan garis selidik adalah titik B dan titik D (tidak memotong).

Karena nilai x adalah positif, maka titik B adalah nilai maksimum, dan titik D adalah nilai minimum.

$$B = 2(6) - 6(0) = 12 \text{ (nilai maksimum)}$$

$$D = 2(4) - 6(8) = -40 \text{ (nilai minimum)}$$

F. PENYELESAIAN MASALAH DENGAN PROGRAM LINEAR

 **Cara menyelesaikan masalah** (soal cerita) menggunakan metode program linear:

- 1) **Soal cerita** hanya boleh memiliki dua peubah (variabel).
- 2) **Mengubah soal cerita** menjadi model matematika berupa pertidaksamaan, persamaan, atau fungsi sasaran. Bila perlu, dapat dibuat grafik daerah penyelesaian.
- 3) **Suatu pertidaksamaan** terdiri dari suatu jenis yang sama (misalnya harga).

Contoh 1:

Seorang penjual makanan keliling menggunakan tasnya untuk menjual roti dan kacang goreng. Tasnya hanya dapat memuat 120 bungkus makanan saja. Harga pembelian roti Rp5.000,00 per bungkus, dan harga pembelian kacang goreng Rp4.000,00 per bungkus. Dalam penjualannya, ia memiliki modal Rp600.000,00 dan mendapat untung Rp1.000,00 per bungkus roti, Rp500,00 per bungkus kacang goreng.

Jawab:

Makanan	Banyak bungkus	Harga beli per bungkus	Keuntungan per bungkus
Roti	x	5000x	1000x
Kacang goreng	y	4000y	500y
Total	120	600 000	k

Maka model matematika yang dapat dibuat:

$$\begin{aligned} x &\geq 0, x \in \mathbb{C} & y &\geq 0, y \in \mathbb{C} \\ x + y &\leq 120 & 5x + 4y &\leq 600 \\ 1000x + 500y &= k \text{ (fungsi sasaran)} \end{aligned}$$

Grafik daerah penyelesaian

Titik potong: $5x + 4y = 600$

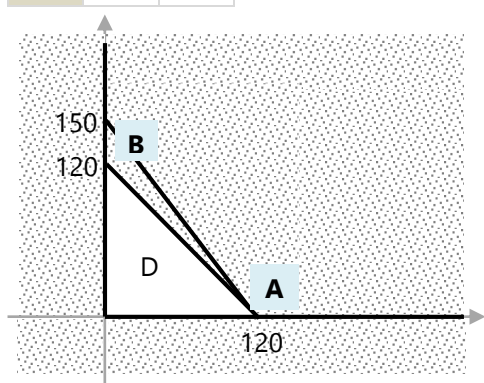
$$4x + 4y = 480$$

$$x = 120$$

$$y = 0$$

Cari titik lain:

x	120	0
y	0	150



Uji titik pojok:

$$A = 1000(120) + 500(0) = 120\,000 \text{ (maks)}$$

$$B = 1000(0) + 500(120) = 60\,000 \text{ (min)}$$

Contoh 2:

Perusahaan air minum akan mengangkut galon air seberat 65 ton dari Malang ke Bandung menggunakan dua jenis truk. Truk C berkapasitas 1 ton dengan harga sewa Rp300.000,00, sedangkan truk D berkapasitas 3 ton dengan harga sewa Rp500.000,00. Jika perusahaan tersebut harus menyewa setidaknya 40 truk dari kedua truk, tentukan:

- a. Banyak masing-masing truk agar biaya pengangkutan sekecil mungkin.
- b. Biaya pengangkutan yang paling murah.

Jawab:

Truk	Banyak truk	Ongkos sewa per truk	Kapasitas
C	x	300000x	x
D	y	500000y	3y
Total	40	k	65

Maka model matematika yang dapat dibuat:

$$\begin{aligned} x &\geq 0, x \in \mathbb{C} \dots (1) & y &\geq 0, y \in \mathbb{C} \dots (2) \\ x + y &\geq 40 \dots (3) & x + 3y &\geq 65 \dots (4) \end{aligned}$$

$$300000x + 500000y = k \text{ (fungsi sasaran)}$$

Titik potong: $x + 3y = 65$

$$x + y = 40 \quad -$$

$$2y = 25$$

$$y = 12,5 \quad x = 27,5$$

Karena x dan y bukan bilangan cacah, maka titik di sekitar titik potong lah yang merupakan nilai minimum (biaya terkecil).

Uji nilai titik di sekitar titik potong dengan pertidaksamaan 3 dan 4:

Titik (27, 12) : $(27) + (12) \geq 40$ (salah)

Titik (28, 12) : $(28) + (12) \geq 40$ (benar)

$$(28) + 3(12) \geq 65 \text{ (salah)}$$

Titik (27, 13) : $(27) + (13) \geq 40$ (benar)

$$(27) + 3(13) \geq 65 \text{ (benar)}$$

Titik (28, 13) : $(28) + (13) \geq 40$ (benar)

$$(28) + 3(13) \geq 65 \text{ (benar)}$$

Titik (27, 13) adalah nilai terendah benar dari uji titik di sekitar titik potong.

Jadi, jumlah truk C ada 27 truk, dan jumlah truk D ada 13 truk.

Maka biaya terkecil yang dapat digunakan adalah:

$$300000(27) + 500000(13) = \text{Rp}14.600.000$$