

Lingkaran

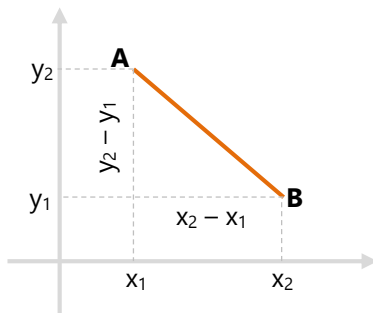
A. PENDAHULUAN

Lingkaran adalah koordinat kedudukan titik-titik yang memiliki jarak sama terhadap suatu titik tertentu.

Jari-jari lingkaran adalah jarak lingkaran terhadap **titik pusat lingkaran** yang besarnya selalu sama terhadap titik dimanapun pada lingkaran.

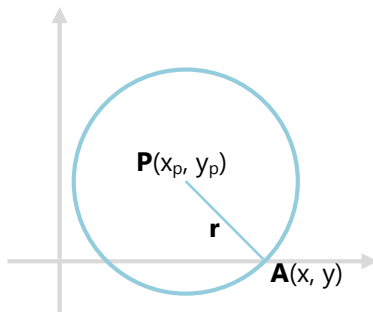
B. PERSAMAAN LINGKARAN

Persamaan lingkaran diturunkan dari teorema Pythagoras.



$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Persamaan dasar lingkaran adalah:



Bentuk dasar

$$(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = r^2$$

Pusat lingkaran : (x_p, y_p)

Jari-jari : r

Bentuk persamaan terbuka

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$A = -2x_p$$

$$B = -2y_p$$

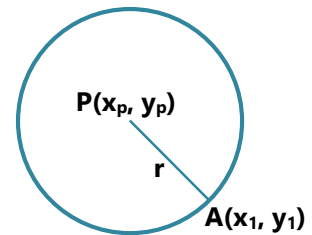
$$C = x_p^2 + y_p^2 - r^2$$

Pusat lingkaran : $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$

Jari-jari : $\sqrt{x_p^2 + y_p^2 - C}$

Persamaan lingkaran dapat dibentuk jika diketahui beberapa variabel untuk mencari variabel lain:

1) Titik pusat dan satu titik pada lingkaran



Pusat lingkaran : (x_p, y_p)

Titik pada lingkaran : (x_1, y_1)

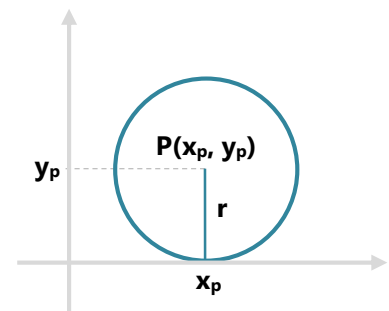
Jari-jari

$$r = \sqrt{(x_1 - x_p)^2 + (y_1 - y_p)^2}$$

Membentuk persamaan lingkaran

$$(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = r^2$$

2) Titik pusat dan menyinggung sumbu x atau y



Pusat lingkaran : (x_p, y_p)

Titik pada lingkaran : $(x_p, 0)$ atau $(0, y_p)$

Jari-jari

Menyinggung sb x

Menyinggung sb y

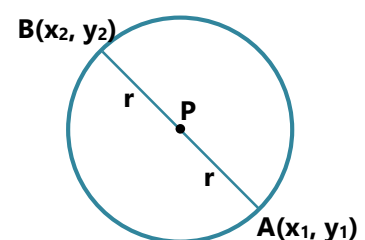
$$r = |y_p|$$

$$r = |x_p|$$

Membentuk persamaan lingkaran

$$(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = r^2$$

3) Titik-titik ujung diameter



Titik pada lingkaran : (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)

Pusat lingkaran

$$P\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right)$$

Jari-jari

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

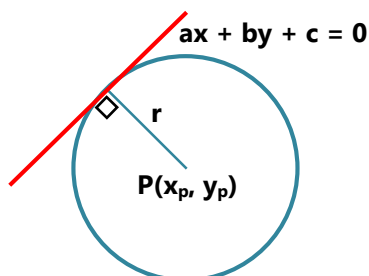
Membentuk persamaan lingkaran

$$(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = r^2$$

atau

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

4) Titik pusat dan persamaan garis singgung lingkaran



Pusat lingkaran : (x_p, y_p)

Titik pada lingkaran : tidak diketahui

Jari-jari

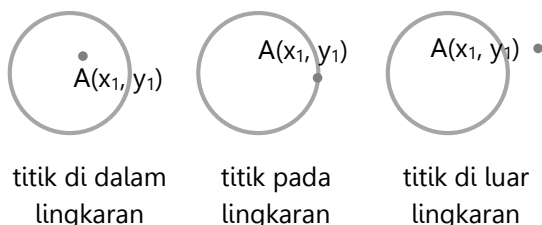
$$r = \left| \frac{a \cdot x_p + b \cdot y_p + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Membentuk persamaan lingkaran

$$(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = r^2$$

C. KEDUDUKAN TITIK DAN GARIS TERHADAP LINGKARAN

Kedudukan titik terhadap lingkaran terdiri dari tiga macam:



titik di dalam
lingkaran

titik pada
lingkaran

titik di luar
lingkaran

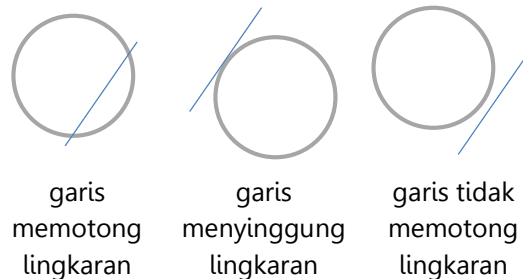
Kedudukan titik terhadap lingkaran dapat ditentukan menggunakan nilai kuasa.

Kuasa (K) adalah persamaan lingkaran yang telah disubstitusi oleh koordinat titik yang diuji.

$$K = x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C$$

- 1) **Jika $K < 0$** , maka titik berada di dalam lingkaran.
- 2) **Jika $K = 0$** , maka titik berada pada lingkaran (memenuhi persamaan lingkaran).
- 3) **Jika $K > 0$** , maka titik berada di luar lingkaran.

Kedudukan garis terhadap lingkaran terdiri dari tiga macam:



garis
memotong
lingkaran

garis
menyinggung
lingkaran

garis tidak
memotong
lingkaran

Kedudukan garis terhadap lingkaran dapat ditentukan menggunakan nilai determinan.

- 1) Ubah agar persamaan lingkaran hanya memuat satu variabel saja (x atau y), dengan mensubstitusi persamaan garis ke persamaan lingkaran.
- 2) Persamaan lingkaran akan menjadi persamaan garis parabola dengan bentuk umum:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- 3) Cari nilai determinan (D) persamaan tersebut:

$$D = b^2 - 4ac$$

- a. **Jika $D < 0$** , maka garis memotong lingkaran (di dua titik perpotongan).
- b. **Jika $D = 0$** , maka garis menyinggung lingkaran (di satu titik perpotongan).
- c. **Jika $D > 0$** , maka garis tidak memotong lingkaran (tidak ada titik perpotongan).

D. PERSAMAAN GARIS SINGGUNG LINGKARAN

Garis singgung lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran hanya pada satu titik perpotongan dan tegak lurus dengan jari-jari lingkaran pada titik itu

Persamaan garis singgung lingkaran dapat dibentuk jika diketahui persamaan lingkaran:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

- 1) **Gradien garis singgung lingkaran**

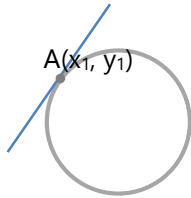
Membentuk persamaan garis singgung

$$y - y_p = m(x - x_p) \pm r \sqrt{m^2 + 1}$$

(x_p, y_p) = pusat lingkaran

r = jari-jari

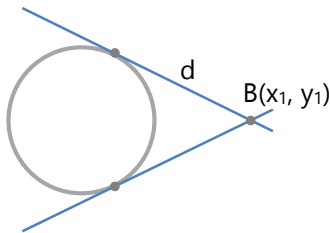
m = gradien garis singgung lingkaran

2) Titik pada lingkaran/titik singgung ($K = 0$)

Melalui satu titik pada lingkaran hanya dapat dibuat satu buah garis singgung lingkaran saja.

Membentuk persamaan garis singgung

$$(x - x_p)(x_1 - x_p) + (y - y_p)(y_1 - y_p) = r^2$$

3) Titik di luar lingkaran ($K > 0$)

Melalui satu titik di luar lingkaran dapat dibuat dua buah garis singgung lingkaran.

Nilai gradien garis singgung dapat dicari menggunakan persamaan:

$$y_1 - y_p = m(x_1 - x_p) \pm r \sqrt{m^2 + 1}$$

Membentuk persamaan garis singgung

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Panjang garis singgung dari titik di luar ke titik singgung

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C}$$