

LIMIT DAN TURUNAN



A. Limit Fungsi Aljabar

Limit fungsi didefinisikan sebagai:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Jika x mendekati a ($x \neq a$), maka $f(x)$ mendekati nilai L .

Sifat-sifat limit adalah sebagai berikut.

- $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$

1. Bentuk Tak Tentu $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Untuk menyelesaikan bentuk limit seperti ini, dapat menggunakan cara faktorisasi, kali sekawan, atau menggunakan Dalil L'Hospital.



Penyelesaian dengan menggunakan **Dalil L'Hospital** adalah sebagai berikut.

$$\text{Limit}_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{Limit}_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \neq \frac{0}{0}$$

(Turunkan bagian pembilang yaitu $f(x)$, turunkan bagian penyebut yaitu $g(x)$, lalu substitusikan nilai c).

Contoh:

Nilai dari $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{3x^2 - 2} - 5} = \dots$

A. 0

D. $\frac{25}{3}$

B. $\frac{25}{9}$

E. ∞

C. $\frac{25}{6}$

PEMBAHASAN CERDIK:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{3x^2 - 2} - 5} &= \frac{2(3) - 1}{6(3)} \\ &= \frac{5}{18} = 5 \times \frac{10}{18} = \frac{25}{9} \end{aligned}$$

Jawaban: B

2. Bentuk Limit Fungsi $f(x)$ untuk $x \rightarrow 0$

Perhitungan limit fungsi $f(x)$ untuk $x \rightarrow 0$ atau ditulis $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, pada prinsipnya sama seperti perhitungan pada

$$\lim_{x \rightarrow a} f(a); a \neq 0$$



Rumus Praktis

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sqrt{n+bx} - \sqrt{n+cx}} = \frac{2a\sqrt{n}}{b-c}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{n+bx} - \sqrt{n+cx}}{ax} = \frac{b-c}{2a\sqrt{n}}$$

2. Bentuk Limit Fungsi $f(x)$ untuk $x \rightarrow \infty$

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Misal: $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_n$ dan

$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + a_m$$

Jika m adalah pangkat tertinggi pembilang dan n adalah pangkat tertinggi penyebut, maka bentuk limit tersebut dapat diselesaikan dengan membagi $f(x)$ dan $g(x)$ dengan variabel yang mempunyai pangkat tertinggi.

Penyelesaian:

- untuk $m = n$, maka hasilnya $\frac{a_0}{b_0}$
- untuk $m > n$, maka hasilnya ∞
- untuk $m < n$, maka hasilnya 0

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r}$$

Perhatikan koefisien x^2

Penyelesaian:

- Untuk $a = p$, maka hasilnya $\frac{b-q}{2\sqrt{a}}$
- Untuk $a > p$, maka hasilnya $+\infty$
- Untuk $a < p$, maka hasilnya $-\infty$



$$c. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - px + q = \frac{b}{2\sqrt{a}} + q$$

dengan syarat $a = p^2$

B. Limit Trigonometri

Sifat-sifat:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

Prinsip! \sin , x , dan \tan bisa saling coret, alias setara, atau bisa saling menghilangkan! Coba coba pahami polanya!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \sin mx}{b \cdot \tan nx} = \frac{a \cdot m}{b \cdot n}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \tan^2 mx}{nx \cdot \sin ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot (\tan mx)^2}{nx \cdot \sin ax} = \frac{a \cdot m^2}{n \cdot a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx \cdot \tan ax}{nx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx \cdot \tan ax}{n \cdot x \cdot x} = \frac{m \cdot a}{n}$$

Ingat-ingat:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos nx = 1 - 2 \sin^2 \frac{n}{2} x$$



C. Turunan Fungsi Aljabar

Misalkan y adalah fungsi dari x atau $y = f(x)$, di mana y merupakan fungsi yang dapat diturunkan pada setiap titik (differensiabel), maka turunan pertama fungsi y terhadap x ditulis dengan $\frac{dy}{dx}$ atau y' atau $f'(x)$, dengan definisi:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Secara umum:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{bh} = \frac{a}{b} f'(x)$$

dan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+ah) - f(p)}{bh} = \frac{a}{b} f'(p)$$

Fungsi	Turunan fungsi
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax^n$	$f'(x) = anx^{n-1}$
$f(x) = ku(x)$	$f'(x) = ku'(x)$
$f(x) = u(x) \pm v(x)$	$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$
$f(x) = (u(x))^n$	$f'(x) = n(u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$



D. Turunan Fungsi Trigonometri

Fungsinya	Turunannya
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \sec^2 x$
$f(x) = \operatorname{cotg} x$	$f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
$f(x) = \sec x$	$f'(x) = \sec x \cdot \tan x$
$f(x) = \operatorname{cosec} x$	$f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x$

E. Turunan Fungsi Komposisi dengan Aturan Rantai

Jika fungsi $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$, dengan $u = g(x)$ maka turunan fungsi komposisinya ditentukan oleh:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ atau } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh Soal:

Turunan pertama dari $f(x) = \sin^4(3x^2 - 2)$ adalah

- A. $2\sin^2 x(3x^2 - 2)\sin(6x^2 - 4)$
- B. $12\sin^2 x(3x^2 - 2)\sin(6x^2 - 4)$
- C. $12\sin^2 x(3x^2 - 2)\cos(6x^2 - 4)$
- D. $24\sin^3 x(3x^2 - 2)\cos^2(3x^2 - 2)$
- E. $-24\sin^3 x(3x^2 - 2)\cos^2(3x^2 - 2)$



Pembahasan:

$$f(x) = \sin^4(3x^2 - 2) = (\sin(3x^2 - 2))^4$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(\sin(3x^2 - 2))^3 (\cos(3x^2 - 2))(6x) \\ &= 2.6x.(\sin(3x^2 - 2))^2 (2)(\sin(3x^2 - 2)) \\ &\quad (\cos(3x^2 - 2)) \\ &= 12x.(\sin(3x^2 - 2))^2 (\sin 2(3x^2 - 2)) \\ &= 12x.(\sin(3x^2 - 2))^2 (\sin(6x^2 - 4)) \end{aligned}$$

Jawaban: B

F. Aplikasi Turunan

1. Gradien dan Persamaan Garis Singgung

Misal $y = f(x)$, maka $y' = f'(x)$

Gradien garis singgung pada $x = a$, maka $m = f'(a)$.

Persamaan garis singgung pada titik (a, b) dan gradien m adalah: $(y - b) = m(x - a)$

2. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

- Fungsi naik, jika $f'(x) > 0$
- Fungsi turun, jika $f'(x) < 0$

3. Titik Stasioner

Titik stasioner jika $f'(x) = 0$

Jenis-jenis titik stasioner:

- Titik balik minimum $(a, f(a))$

Syarat:

$f'(x) = 0$ dan selidiki $x = a$ sehingga $f''(a) > 0$.

Untuk mencari nilai minimum substitusi $x = a$ ke fungsi $f(x)$.



- Titik balik maksimum $(a, f(a))$

Syarat:

$f'(x) = 0$ dan selidiki $x = a$ sehingga $f''(a) < 0$.

Untuk mencari nilai minimum substitusi $x = a$ ke fungsi $f(x)$.

- Titik belok $(a, f(a))$

Syarat:

$f'(x) = 0$ dan $f''(x) = 0$ kemudian diperoleh $x = a$.

Untuk mencari nilainya, substitusi $x = a$ ke fungsi $f(x)$.

4. Kecepatan dan Percepatan

Jika $s(t)$ = fungsi jarak, $v(t)$ = fungsi kecepatan,

$a(t)$ = fungsi percepatan, dan t = waktu. Maka berlaku:

$$v(t) = s'(t)$$

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

THE KING
EDUCATION



LATIHAN SOAL

1. SOAL UTBK 2019

Jika $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{ax + b} - 2}{x - 1} \right) = A$,

maka nilai $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{ax^4 + b} - 2x}{x^2 + 2x - 3} \right) = \dots$

A. $\frac{2-A}{2}$

C. $\frac{A-2}{4}$

E. $\frac{A+2}{4}$

B. $-\frac{A}{2}$

D. $\frac{A}{4}$

2. SOAL UTBK 2019

Jika $\lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{(|t|-1)^2 - (|a|-1)^2}{t^2 - a^2} \right) = k$,

maka nilai $\lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{(|t|-1)^4 - (|a|-1)^4}{t - a} \right) = \dots$

A. $2K(|a|-1)^2$

D. $aK(|a|-1)^2$

B. $K(|a|-1)^2$

E. $K^2(|a+K|-1)^2$

C. $4aK(|a|-1)^2$



3. SOAL SBMPTN 2018

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{\sqrt{2+2x} - \sqrt{6-2x}} = \dots$$

- A. -2 C. 0 E. 2
B. -1 D. 1

4. SOAL SBMPTN 2017

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \csc\left(3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\sin x \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \dots$$

- A. 2 D. $\frac{1}{3}$
B. 1 E. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{2}$

5. SOAL SBMPTN 2017

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)(1 - \sin x)}{\tan 2x} = \dots$$

- A. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ E. $\frac{5}{2}$
B. 1 D. 2

6. SOAL SBMPTN 2016

Jika $\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{g(x)} \right) = 4$ dan $\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) - \frac{1}{g(x)} \right) = -3$,

maka $\lim_{x \rightarrow a} \left((f(x))^2 + \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 \right) = \dots$



A. $\frac{24}{3}$

C. $\frac{25}{3}$

E. $\frac{27}{2}$

B. $\frac{23}{5}$

D. $\frac{25}{2}$

7. SOAL SIMAK UI 2019

Jika $f(x) = \sqrt{x}$, nilai $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2f(s+t) + f(s-t) - 3f(s)}{3t}$

adalah

A. $-\frac{1}{3s}\sqrt{s}$

D. $\frac{1}{3s}\sqrt{s}$

B. 0

E. 1

C. $\frac{1}{6s}\sqrt{s}$

8. SOAL SIMAK UI 2018

Jika $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\frac{1}{ax} + \frac{1}{3}}{bx^3 + 27} = -\frac{1}{3^5}$ nilai $a + b$ untuk a dan b bilangan bulat positif adalah

A. -4

C. 0

E. 4

B. -2

D. 2

9. SOAL UM UGM 2019

Jika $p > 0$ dan $\lim_{x \rightarrow p} \frac{x^3 + px^2 + qx}{x - p} = 12$, maka nilai $p - q$

adalah

A. 14

C. 8

E. 3

B. 10

D. 5



10. SOAL UM UGM 2018

Diketahui m adalah sisa pembagian polinomial

$h(x) = x^3 - x^2 + 2x + 2$ oleh $(x - 1)$. Nilai k yang me-

enuhi $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mx^3 - kx + 5}{kx^3 + 3x^2 - 7} - k = 0$ adalah

- A. -1 D. 1
B. 0 E. 2
C. $\frac{1}{2}$

11. SOAL UTBK 2019

Diberikan fungsi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 5$.

Garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik dengan absis $x = a$ dan $x = a + 1$ saling sejajar. Jarak kedua garis singgung tersebut adalah

- A. $\frac{5}{\sqrt{37}}$ C. $\frac{3}{\sqrt{37}}$ E. $\frac{1}{\sqrt{37}}$
B. $\frac{4}{\sqrt{37}}$ D. $\frac{2}{\sqrt{37}}$

12. SOAL SBMPTN 2018

Jika garis singgung kurva $y = 3x^2$ di titik $P(a, b)$ dengan $a \neq 0$ memotong sumbu x di titik $Q(4, 0)$, maka $a + b$ adalah

- A. $\frac{21}{4}$ C. 52
B. $\frac{33}{4}$ D. 184
E. 200



13 SOAL SBMPTN 2017

Jika $f(x) = \cos^2(\tan x^2)$, maka $f'(x) = \dots$

- A. $2x \sin(2 \tan x^2) \sec^2(x^2)$
- B. $4x \sin(2 \tan x^2) \sec^2(x^2)$
- C. $-2 \sin(2 \tan x^2) \sec^2(x^2)$
- D. $-4x \sin(2 \tan x^2) \sec^2(x^2)$
- E. $-2x \sin(2 \tan x^2) \sec^2(x^2)$

14 SOAL STANDAR UTBK 2019

Jika $f(x) = \cot x$ dan $g(x) = \sec x$, maka $\frac{d(g \circ f)}{dx} = \dots$

- A. $-\frac{\sin(\cot x)}{\cos^2(\cot x) \cdot \sin^2 x}$
- B. $\frac{\sin(\sec x)}{\cos^2(\sec x) \cdot \sin^2 x}$
- C. $-\frac{\sin(\cot x)}{\cos^2(\cot x) \cdot \cos^2 x}$
- D. $\frac{\sin(\sec x)}{\cos^2(\sec x) \cdot \cos^2 x}$
- E. $\frac{\cos(\sec x)}{\cos^2(\sec x) \cdot \cos^2 x}$

15 SOAL SBMPTN 2016

Misalkan $f(x) = a\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}}$ mempunyai titik belok di titik $(4, 13)$. Nilai $a + b = \dots$



A. $\frac{91}{8}$

C. $\frac{71}{8}$

E. $\frac{51}{8}$

B. $\frac{81}{8}$

D. $\frac{61}{8}$

16. SOAL SBMPTN 2015

Fungsi $f(x) = \sqrt{\cos^2 x + \left(\frac{x}{2}\right)} + \pi$, $x > 0$ turun pada interval

A. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$

D. $0 < x < \frac{5\pi}{12}$

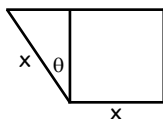
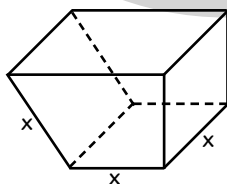
B. $\frac{\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{12}$

E. $0 < x < \frac{\pi}{12}$

C. $\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$

17. SOAL SIMAK UI 2019

Seorang peternak ikan ingin membuat akuarium berbentuk prisma yang sisi kacanya dibuat miring (lihat gambar akuarium) dengan derajat kemiringan kaca sebesar θ (lihat gambar sisi depan). Jika θ_1 adalah sudut yang menyebabkan volume akuarium tersebut maksimal, nilai dari $\sin \theta_1 = \dots$



A. $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

E. 1

B. $\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$

D. $\frac{1+\sqrt{3}}{8}$

18. SOAL SIMAK UI 2018

Jika $y = \frac{1}{3}x^3 - ax + b$, $a > 0$, dan $a, b \in \mathbb{R}$, maka

1) Nilai minimum lokal $y = b - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$

2) Nilai maksimum lokal $y = b + \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$

3) y stasioner saat $x = a^{\frac{1}{2}}$

4) Naik pada interval $\left[-\infty, -a^{\frac{1}{2}}\right]$

19. SOAL UM UGM 2019

Diketahui fungsi f dan g dengan $f(x) = (2x+1)^5$ dan $h = f \circ g$. Jika $g(5) = -1$ dan $g'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x+2$, maka

$h'(5) = \dots$

A. 10

C. 50

E. 120

B. 25

D. 60

20. SOAL UM UGM 2016

Jika fungsi $g(x) = p\sqrt{x^2-4}$ naik pada $x \leq -2$ dan turun pada $x \geq 2$ maka himpunan semua nilai p yang memenuhi adalah

A. \emptyset

C. $p > 0$

E. $p = -2$

B. $p \geq 2$

D. $p < 0$



PEMBAHASAN

1. PEMBAHASAN CERDIK:

Diketahui: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{ax^4 + b} - 2}{x - 1} \right) = A$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\left(\sqrt{ax^4 + b} - 2 \right) + (2 - 2x)}{(x - 1)(x + 3)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{ax^4 + b} - 2}{(x - 1)(x + 3)} \right) + \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(2 - 2x)}{(x - 1)(x + 3)} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x + 3)} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{ax^4 + b} - 2}{(x - 1)} \right) \right) + \\ & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-2(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{4} \right) (A) + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x + 3)} \\ &= \left(\frac{1}{4} \right) (A) + \frac{-2}{(1 + 3)} = \left(\frac{1}{4} \right) (A) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{A - 2}{4} \end{aligned}$$

Jawaban: C



2. PEMBAHASAN CERDIK:

$$\text{Diketahui: } \lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{(|t|-1)^2 - (|a|-1)^2}{t^2 - a^2} \right) = K$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{(|t|-1)^2 - (|a|-1)^2}{(t-a)(t+a)} \right) = K$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{(|t|-1)^2 - (|a|-1)^2}{(t-a)} \right) \left(\lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{(t+a)} \right) = K$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{(|t|-1)^2 - (|a|-1)^2}{(t-a)} \right) \left(\frac{1}{(a+a)} \right) = K$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{(|t|-1)^2 - (|a|-1)^2}{(t-a)} \right) = 2aK$$

$$\lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{(|t|-1)^4 - (|a|-1)^4}{t-a} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{\left((|t|-1)^2 \right)^2 - \left((|a|-1)^2 \right)^2}{t-a} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{\left((|t|-1)^2 - (|a|-1)^2 \right) \left((|t|-1)^2 + (|a|-1)^2 \right)}{t-a} \right)$$



$$\begin{aligned}
 &= \left(\lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{((|t|-1)^2 - (|a|-1)^2)}{t-a} \right) \right) \\
 &\quad \left(\lim_{t \rightarrow a} ((|t|-1)^2 + (|a|-1)^2) \right) \\
 &= (2aK) \left((|a|-1)^2 + (|a|-1)^2 \right) \\
 &= (2aK) \left(2(|a|-1)^2 \right) \\
 &= 4aK(|a|-1)^2
 \end{aligned}$$

Jawaban: C

3. PEMBAHASAN CERDIK:

Dengan Dalil L'Hospital, diperoleh:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{\sqrt{2+2x} - \sqrt{6-2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x}{\frac{2}{2\sqrt{2+2x}} - \frac{-2}{2\sqrt{6-2x}}} \\
 &= \frac{3(1)^2 - 2(1)}{\frac{2}{2\sqrt{2+2(1)}} - \frac{-2}{2\sqrt{6-2(1)}}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1
 \end{aligned}$$

Jawaban: D



4. PEMBAHASAN CERDIK:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \csc\left(3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\sin x \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\sin x \cdot \sin\left(3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cdot 3} = \frac{1}{\left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Jawaban: D

5. PEMBAHASAN CERDIK:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)(1 - \sin x)}{\tan 2x}$$

Misal:

Jika $y = x + \frac{\pi}{2}$, untuk $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ akibatnya $y \rightarrow 0$

Jika $y = x + \frac{\pi}{2}$ maka $x = y - \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(1 - \sin(y - \frac{\pi}{2}))}{\tan 2(y - \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$



$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \left(1 - \sin \left(- \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \right) \right)}{\tan 2 \left(- \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \right)}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \left(1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \right)}{-\tan 2 \left(\frac{\pi}{2} - y \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \left(1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} - y \right) \right)}{-\tan(\pi - 2y)}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(1 + \cos y)}{-(-\tan 2y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(1 + \cos y)}{\tan 2y} = \frac{1}{2} \cdot (1 + 1) = 1$$

Jawaban: B

6. PEMBAHASAN CERDIK:

Trik Praktis

Bentuk limit dapat diubah sebagai bentuk berikut:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{g(x)} \right) = 4 \Rightarrow f(a) + \frac{1}{g(a)} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) - \frac{1}{g(x)} \right) = -3 \Rightarrow f(a) - \frac{1}{g(a)} = -3$$

Misalkan $f(a) = p$ dan $\frac{1}{g(a)} = q$, sehingga:

$$p + q = 4$$

$$p - q = -3$$

$$+ \quad 2p = 1$$

$$p = \frac{1}{2}$$



Sehingga, $\frac{1}{2} + q = 4 \Rightarrow q = \frac{7}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left((f(x))^2 + \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 \right) = p^2 + q^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{7}{2} \right)^2$$

$$= \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

Jawaban: D

7. PEMBAHASAN CERDIK:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2f(s+t) + f(s-t) - 3f(s)}{3t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{s+t} + 2\sqrt{s-t} - 3\sqrt{s}}{3t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{2\sqrt{s+t}} + \frac{-1}{2\sqrt{s-t}}}{3}$$

$$= \frac{\frac{2}{2\sqrt{s+0}} + \frac{-1}{2\sqrt{s-0}}}{3} = \frac{1}{6s} \sqrt{s}$$

Jawaban: C

8. PEMBAHASAN CERDIK:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\frac{1}{ax} + \frac{1}{3}}{bx^3 + 27} = -\frac{1}{3^5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3ax \left(\frac{1}{ax} + \frac{1}{3} \right)}{3ax(bx^3 + 27)} = -\frac{1}{3^5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3 + ax}{3ax(bx^3 + 27)} = -\frac{1}{3^5}$$



Untuk $x = -3$ maka:

$$3 + ax = 0 \Leftrightarrow 3 - 3a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

$$bx^3 + 27 = 0 \Leftrightarrow b(-3)^3 + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 1$$

Jadi, $a + b = 1 + 1 = 2$.

Jawaban: D

9. PEMBAHASAN CERDIK:

Untuk $x = p$, maka:

$$x^3 + px^2 + qx \Rightarrow p^3 + p^3 + qp = 0$$

$$2p^3 + qp = 0$$

$$2p^2 + q = 0$$

Dengan dalil L'Hospital diperoleh:

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{x^3 + px^2 + qx}{x - p} = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{3x^2 + 2px + q}{1} = 12$$

$$3p^2 + 2p^2 + q = 12$$

$$5p^2 + (-2p^2) = 12$$

$$3p^2 = 12$$

$$p = \pm 2$$

Diketahui $p > 0$, maka yang memenuhi adalah $p = 2$ dan

$$q = -8,$$

$$\text{Sehingga: } p - q = 2 - (-8) = 10$$

Jawaban: B



10 PEMBAHASAN CERDIK:

Suku banyak $h(x)$ dibagi $(x-1)$ bersisa $h(1)$ maka
 $m = h(1) = 1 - 1 + 2 + 2 = 4$

Misalkan $m = 4$ maka:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{mx^3 - kx + 5}{kx^3 + 3x^2 - 7} \right) - k = 0$$

$$\frac{4}{k} - k = 0$$

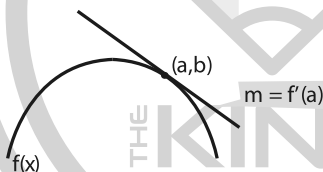
$$\frac{4 - k^2}{k} = 0$$

$$k^2 = 4$$

$$k = \pm 2$$

Jawaban: E

11. PEMBAHASAN CERDIK:



Garis singgung kurva $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 5$ di titik dengan absis $x = a$ dan $x = a + 1$ saling sejajar. Berlaku:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 5 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 6x + 6$$

$$x = a \Rightarrow m = f'(a) \Rightarrow m_1 = 6a^2 + 6a + 6$$

$$x = a + 1 \Rightarrow m = f'(a + 1) \Rightarrow m_2 = 6(a + 1)^2 + 6(a + 1) + 6$$

Karena sejajar maka

$$m_1 = m_2$$

$$\Rightarrow 6a^2 + 6a + 6 = 6(a + 1)^2 + 6(a + 1) + 6$$

$$\Rightarrow 6a^2 + 6a + 6 = 6a^2 + 18a + 18$$

$$\Rightarrow 12a = -12 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$



Selanjutnya diperoleh titik singgung $x = a = -1$ dan $x = a + 1 = -1 + 1 = 0$.

$$\text{Untuk titik } x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = -2 + 3 - 6 + 5 = 0$$

Titik singgungnya $(-1, 0)$ dan g

$$\text{Gradiennya} = m = f'(-1) = 6(-1)^2 + 6(-1) + 6 = 6$$

Persamaan garisnya :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 0 = 6(x + 1) \Rightarrow y_1 = 6x + 6$$

Untuk $x = 0$ maka $y = 5$.

Artinya garis y_2 melalui $(0, 5)$

Jarak y_1 dengan $y_2 =$ jarak y_1 ke titik $(0, 5)$

$=$ jarak $(y - 6x - 6 = 0)$ ke titik $(0, 5)$

$$= \frac{|5 - 6(0) - 6|}{\sqrt{1^2 + (-6)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{37}} = \frac{1}{\sqrt{37}}$$

Jawaban: E

12 PEMBAHASAN CERDIK:

Gradien garis singgung $y = 3x^2$ di titik $P(a, b)$ adalah:

$$m = f'(a) = 6a$$

Persamaan garis singgungnya:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\text{Pgs: } y - b = 6a(x - a)$$

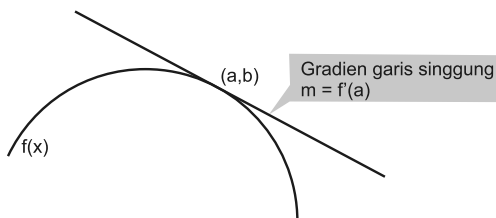
Melalui $(4, 0)$, maka

$$y - b = 6a(x - a)$$

$$\Rightarrow 0 - b = 6a(4 - a)$$

$$\Rightarrow b = 6a^2 - 24a \quad \dots(1)$$





Di sisi lain, (a, b) melalui $y = 3x^2$

Artinya berlaku $b = 3a^2$ (2)

$$b = 3a^3 \text{(2)}$$

Jika (2) disubstitusikan ke (1) diperoleh

$$3a^2 = 6a^2 - 24a$$

$$3a^2 - 24a = 0$$

$$\Rightarrow 3a(a - 8) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ atau } a = 8$$

$$\text{Untuk } a = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$a = 8 \Rightarrow b = 192$$

$$\text{Untuk } P(a, b) = (8, 192)$$

$$\Rightarrow a + b = 8 + 192 = 200$$

Jawaban: E

13 PEMBAHASAN CERDIK:

$$f(x) = \cos^2(\tan x^2)$$

$$f'(x) = 2 \cos(\tan x^2) \cdot -\sin(\tan x^2) \cdot \sec^2 x^2 \cdot 2x$$

$$f'(x) = -2x \sin(2 \tan x^2) \cdot \sec^2 x^2$$

Jawaban: E



14 PEMBAHASAN CERDIK:

Untuk menentukan hasil turunan fungsi, gunakan **Aturan Rantai**, yaitu:

$$f(x) = h(g(x)) \Rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \cdot (g'(x))$$

Jika $f(x) = \cot x$ dan $g(x) = \sec x$, maka:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sec(\cot x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(g \circ f)}{dx} &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= \sec(\cot x) \tan(\cot x) \cdot (-\operatorname{cosec}^2 x) \\ &= \left(\frac{1}{\cos(\cot x)} \right) \left(\frac{\sin(\cot x)}{\cos(\cot x)} \right) \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) \\ &= -\frac{\sin(\cot x)}{\cos^2(\cot x) \cdot \sin^2 x} \end{aligned}$$

Jawaban: A

15 PEMBAHASAN CERDIK:

- Titik belok $(4, 13)$ pada $f(x) = a\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}}$

$$13 = a\sqrt{4} + \frac{b}{\sqrt{4}}$$

$$13 = 2a + \frac{b}{2} \dots (i)$$

- $f(x) = a\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}} = ax^{\frac{1}{2}} + bx^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}ax^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}bx^{-\frac{5}{2}}$$

Titik belok, syarat: $f''(x) = 0$

$$-\frac{1}{4}ax^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}bx^{-\frac{5}{2}} = 0$$

$$-\frac{1}{4}ax^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{4}bx^{-\frac{5}{2}}$$

$$ax = 3b$$

$$x = \frac{3b}{a} \text{ dengan absis titik belok 4, maka:}$$

$$4 = \frac{3b}{a}$$

$$a = \frac{3b}{4} \dots (ii)$$

Substitusi (ii) ke (i) diperoleh:

$$13 = 2\frac{3b}{4} + \frac{b}{2}$$

$$13 = \frac{3b}{2} + \frac{b}{2}$$

$$13 = 2b$$

$$b = \frac{13}{2}$$

$$\text{maka } a = \frac{3}{4} \frac{13}{2} = \frac{39}{8}$$

$$\bullet \text{ Nilai } a + b = \frac{39}{8} + \frac{13}{2} = \frac{39 + 52}{8} = \frac{91}{8}$$

Jawaban: A



16 PEMBAHASAN CERDIK:

Ingat! Ingat!

Turunan pertama dari $y = \sqrt{u(x)}$ adalah $y' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{\cos^2 x + \left(\frac{x}{2}\right) + \pi}$, $x > 0$ turun.
Maka:

$$f'(x) < 0$$

$$\frac{-2 \cos x \sin x + \frac{1}{2}}{2\sqrt{\cos^2 x + \left(\frac{x}{2}\right) + \pi}} < 0$$

$$-2 \cos x \sin x + \frac{1}{2} < 0$$

$$-2 \cos x \sin x < -\frac{1}{2}$$

$$-2 \cos x \sin x < -\frac{1}{2}$$

$$-\sin 2x + \frac{1}{2} < 0$$

Pembuat nol:

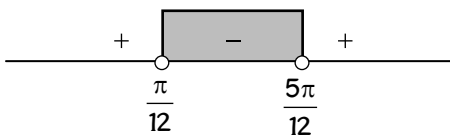
$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{atau} \quad 2x_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{12} \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{5\pi}{12}$$

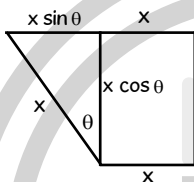




Jadi, $f(x)$ turun pada interval $\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$.

Jawaban: C

17. PEMBAHASAN CERDIK:



Volume akuarium adalah

$$V = \left(\frac{2x + x \sin \theta}{2} \right) x \cos \theta$$

$$= x^2 \cos \theta + \frac{1}{4} x^2 \sin 2\theta$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0$$

$$-x^2 \sin \theta + \frac{1}{2} x^2 \cos 2\theta = 0$$

$$x^2 \left(-\sin \theta + \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 \theta) \right) = 0$$

Jelas bahwa $x \neq 0$, maka $\sin^2 \theta + \sin \theta = \frac{1}{2}$.

Dengan menggunakan rumus kuadrat didapat:

$$\sin \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$



Karena $0^\circ < \theta < 90^\circ$, maka $\sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.

Jawaban: A

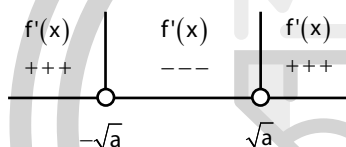
18 PEMBAHASAN CERDIK:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - ax + b$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - a = 0, \text{ karena } a > 0 \text{ maka:}$$

$$(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$$

$$x = -\sqrt{a} \text{ atau } x = \sqrt{a}$$



Dari gambar garis bilangan tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa pernyataan (3) dan 4 BENAR.

$$y = \frac{1}{3}x^3 - ax + b$$

$$x = -\sqrt{a} \Rightarrow y = b + \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$$

(nilai maksimum lokal), pernyataan (2) BENAR

$$x = \sqrt{a} \Rightarrow y = b - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$$

(nilai maksimum lokal), pernyataan (1) BENAR

Jawaban: E



19 PEMBAHASAN CERDIK:

$$f(x) = (2x + 1)^5 \Rightarrow f'(x) = 10(2x + 1)^4$$

Mencari nilai $g'(5)$.

$$g'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x + 2$$

Maka:

$$\frac{x+1}{x-1} = 5$$

$$x+1 = 5x-5$$

$$6 = 4x$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Sehingga:

$$g'(5) = 2\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = 5.$$

Selanjutnya $h = f \circ g = f(g(x))$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$h'(5) = f'(-1) \cdot g'(5)$$

$$= 10(-2+1)^4 \cdot 5 = 50$$

Jawaban: C

20 PEMBAHASAN CERDIK:

Ingat! Ingat!

$$\text{Turunan dari } y = \sqrt{f(x)} \text{ adalah } y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Turunan dari fungsi $g(x) = p\sqrt{x^2 - 4}$ adalah:

$$g'(x) = p \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{px}{\sqrt{x^2 - 4}}$$



Diketahui $g(x)$ naik pada $x \leq -2$, artinya untuk semua nilai $x \leq -2$ berlaku $g'(x) > 0$

Misalkan $x = -5$ maka:

$$g'(x) > 0$$

$$\frac{px}{\sqrt{x^2 - 4}} > 0$$

$$\frac{-5p}{\sqrt{25 - 4}} > 0$$

$$-5p > 0$$

$$p < 0$$

Jawaban: D

THE KING
EDUCATION



1. Group Belajar UTBK GRATIS)

Via Telegram, Quis Setiap Hari, Drilling Soal Ribuan, Full Pembahasan Gratis. Link Group: t.me/theking_utbk

2. Instagram Soal dan Info Tryout UTBK

[@theking.education](https://www.instagram.com/theking.education)

[@video.trik_tpa_tps](https://www.instagram.com/video.trik_tpa_tps)

[@pakarjurusan.ptn](https://www.instagram.com/pakarjurusan.ptn)

3. DOWNLOAD BANK SOAL

www.edupower.id

www.theking-education.id

4. TOKO ONLINE ORIGINAL

SHOPEE, nama toko: [forumedukasiofficial](https://www.shopee.co.id/forumedukasiofficial)

5. Katalog Buku

www.bukuedukasi.com

WA Layanan Pembaca:
0878-397-50005



@theking.education