

Invers dan Komposisi Fungsi

A. INVERS FUNGSI

Invers fungsi ($f^{-1}(x)$) adalah kebalikan dari fungsi $f(x)$ yang juga merupakan sebuah fungsi.

Syarat agar suatu fungsi memiliki invers:

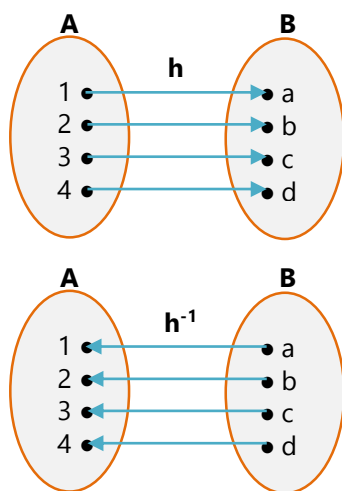
- $f(x)$ harus merupakan fungsi bijektif.
- Grafik fungsi tidak boleh membalik.

Contoh invers fungsi dari berbagai cara penyajian fungsi:

1) Diagram panah

Dapat dilakukan dengan membalik arah panah.

Contoh:



2) Pasangan berurutan

Berlaku: $Df = Rf^{-1}$

$Rf = Df^{-1}$

Contoh:

$f = \{(1, 5)(2, 8)(3, 10)(4, 13)\}$

$f^{-1} = \{(5, 1)(8, 2)(10, 3)(13, 4)\}$

3) Rumus fungsi

Berlaku: $f(x) = a$, maka inversnya:

$f^{-1}(a) = x$

Contoh:

Tentukan invers dari fungsi berikut!

Fungsi linear: $f(x) = 2x + 1$

$f^{-1}(2x + 1) = x$ $y = 2x + 1$

$x = \frac{y-1}{2}$, maka $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

Fungsi pecahan: $f(x) = \frac{3-x}{2x+5}$, $x \neq -5/2$

$f^{-1}\left(\frac{3-x}{2x+5}\right) = x$ $y = \frac{3-x}{2x+5}$

$2xy + 5y = 3 - x$

$2xy + x = 3 - 5y$

$x(2y + 1) = 3 - 5y$

$x = \frac{3-5y}{2y+1}$ $f^{-1}(x) = \frac{3-5x}{2x+1}$

Fungsi kuadrat: $f(x) = x^2 - 6x - 7$, $x \geq 3$

$f^{-1}(x^2 - 6x - 7) = x$ $y = x^2 - 6x - 7$

$x^2 - 6x = y + 7$

$(x-3)^2 - 9 = y + 7$

$x - 3 = \pm \sqrt{y+16}$

$x = 3 \pm \sqrt{y+16}$

karena $x \geq 3$, maka $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+16}$

Fungsi polinomial: $f(x) = x^3 + 2$

$f^{-1}(x^3 + 2) = x$ $y = x^3 + 2$

$x^3 = 2 - y$

$x = \sqrt[3]{2-y}$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2-x}$

Fungsi akar: $f(x) = \sqrt{2x-5}$

$f^{-1}(\sqrt{2x-5}) = x$ $y = \sqrt{2x-5}$

$y^2 = 2x - 5$

$2x = y^2 + 5$

$x = \frac{y^2+5}{2}$ $f^{-1}(x) = \frac{x^2+5}{2}$

Fungsi logaritma: $f(x) = {}^2\log(x-3) - 4$

$f^{-1}({}^2\log(x-3) - 4) = x$

$y = {}^2\log(x-3) - 4$

$y + 4 = {}^2\log(x-3)$

$2^{y+4} = x - 3$

$x = 2^{y+4} + 3$ $f^{-1}(x) = 2^{x+4} + 3$

Fungsi eksponen: $f(x) = 3^{x+1} - 5$

$f^{-1}(3^{x+1} - 5) = x$ $y = 3^{x+1} - 5$

$y + 5 = 3^{x+1}$

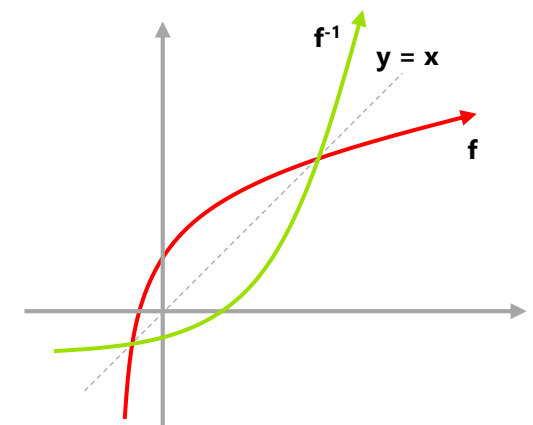
${}^3\log(y+5) = x + 1$

$x = {}^3\log(y+5) - 1$ $f^{-1}(x) = {}^3\log(x+5) - 1$


4) Grafik

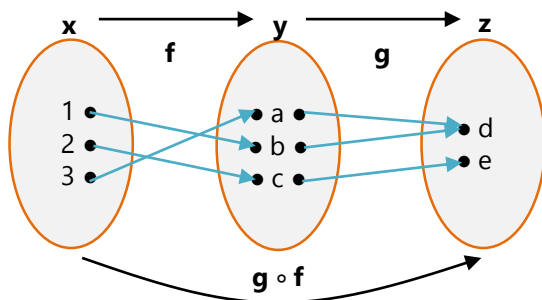
Invers $f^{-1}(x)$ pada grafik adalah sebuah garis yang simetris terhadap $f(x)$ pada cermin $y = x$.

Grafik yang memiliki invers fungsi adalah grafik yang jika dibuat garis mendatar hanya memotong satu titik saja.



B. KOMPOSISI FUNGSI

 **Komposisi fungsi** (\circ) adalah kejadian dimana fungsi f yang memetakan anggota x ke y , dilanjutkan oleh fungsi g yang memetakan y ke z .




$$\begin{aligned} f(x) &= y & \text{atau} & & f &= \{(x, y)\} \\ g(y) &= z & \text{atau} & & g &= \{(y, z)\} \\ & \text{sehingga, } g \circ f(x) = g(f(x)). \\ & \text{atau } g \circ f &= \{(x, z)\} \end{aligned}$$

 **Penulisan komposisi fungsi:**

$g \circ f(x)$ dibaca f dilanjutkan g
dapat ditulis $gf(x)$ atau $g(f(x))$.

 **Pada komposisi fungsi:**

- 1) Irisan daerah hasil fungsi f dengan daerah asal fungsi g bukan himpunan kosong.
- 2) Daerah asal fungsi komposisi $g \circ f$ adalah daerah asal fungsi f .
- 3) Daerah hasil fungsi komposisi $g \circ f$ adalah daerah hasil fungsi g .

 **Komposisi fungsi** dalam berbagai penyajian data:

1) Pasangan berurutan

Jika diketahui:

$$f = \{(1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 1)\}$$

$$g = \{(1, 3)(2, 2)(3, 1)(4, 4)\}$$

Maka $R_g = D_f$. Tentukan:

$$f \circ g = \{(1, 4)(2, 3)(3, 2)(4, 1)\}$$

$$g \circ f = \{(1, 2)(2, 1)(3, 4)(4, 3)\}$$

$$f \circ g \circ f = \{(1, 3)(2, 2)(3, 1)(4, 4)\}$$

2) Rumus fungsi

Jika diketahui:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{jika } x < -1 \\ x^2 - 3, & \text{jika } -1 \leq x < 4 \\ \sqrt{x - 4}, & \text{jika } x \geq 4 \end{cases}$$

$$g(x) = 2x + 2$$

Tentukan:

a. $f \circ f \circ f(5)$

$$\begin{aligned} &= f(f(f(5))) \\ &= f(f(\sqrt{5-4})) = f(f(1)) \\ &= f(f(1^2 - 3)) = f(f(-2)) \\ &= f(-2 + 2) = f(0) \\ &= 0^2 - 3 = -3 \end{aligned}$$

b. $g \circ f \circ g(3)$

$$\begin{aligned} &= g(f(g(3))) \\ &= g(f(2(3) + 2)) = g(f(8)) \\ &= g(\sqrt{8-4}) = g(2) \\ &= 2(2) + 2 = 6 \end{aligned}$$

C. SIFAT DAN ALJABAR FUNGSI

 **Sifat-sifat invers dan komposisi fungsi:**

| | |
|------------------|--|
| Involusi | $(f^{-1})^{-1} = f$ |
| Identitas | $f \circ I = I \circ f = f$ |
| | $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I = x$ |
| Tidak komutatif | $f \circ g \neq g \circ f$ |
| Asosiatif | $(f \circ g \circ h) = ((f \circ g) \circ h) = (f \circ (g \circ h))$ |
| Invers komposisi | $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ |
| | $(f \circ g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$ |
| Lain-lain | Jika $f \circ g = h$, maka: $f = h \circ g^{-1} \quad g = f^{-1} \circ h$ |
| | Jika $f \circ g \circ h = k$, maka: $f = k \circ (g \circ h)^{-1} \quad g = f^{-1} \circ k \circ h^{-1}$ $h = (f \circ g)^{-1} \circ k$ |

 **Sifat-sifat aljabar fungsi:**

1) Penjumlahan

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad D_f \cap D_g = D_{f+g}$$

2) Pengurangan

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad D_f \cap D_g = D_{f-g}$$

3) Perkalian

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad D_f \cap D_g = D_{fg}$$

4) Pembagian

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_f \cap D_g = D_{f/g} \quad g(x) \neq 0$$