

INTEGRAL



A. Integral Tak Tentu

Integral tak tentu $f(x)$ terhadap x adalah fungsi umum yang ditentukan melalui hubungan:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

dengan:

- $F(x)$ dinamakan fungsi integral umum dan $F(x)$ bersifat $F'(x) = f(x)$
- $f(x)$ disebut integran
- C sembarang konstanta

Rumus dasar integral:

$$\int a \, dx = ax + C$$

$$\int ax^n \, dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

dengan n bilangan rasional dan $n \neq -1$

- $\int x^{-1} dx = \ln x + c$
- $\int a \, dx = ax + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$



Sifat-sifat integral:

- $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- $\int k dx = kx + c$
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
- $\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax + b)^{n+1} + c$

B. Integral Tak Tentu Trigonometri

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \tan x \cdot \sec x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \cot x \cdot \operatorname{cosec} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

- $\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
- $\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
- $\int \sec^2(ax + b) dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + c$
- $\int \operatorname{cosec}^2(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + c$
- $\int \sec(ax + b) \tan(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sec(ax + b) + c$
- $\int \operatorname{cosec}(ax + b) \cot(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \operatorname{cosec}(ax + b) + c$



C. Integral Tentu

Jika $f(x)$ kontinu pada interval $a \leq x \leq b$ dan $F(x)$ anti-turunan dari $f(x)$, maka:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Sifat-sifat integral tentu:

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, dengan k konstanta
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, $a \leq c \leq b$

Sifat-sifat khusus:

- Untuk f fungsi genap $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$

Maka $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

- Fungsi ganjil $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

Maka $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$



D. Teknik Pengintegralan

1. Integral Substitusi

Ciri-ciri:

Terdiri dari dua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ yang saling berhubungan ($f(x)$ turunan dari $g(x)$).

$$\int f(x) \cdot g^n(x) dx = \frac{f(x)}{g'(x)} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot g^{n+1}(x) + c$$

2. Integral Parsial

Ciri-ciri:

Tidak ada hubungan antara dua fungsi, $f(x)$ maupun $g(x)$.

Rumus:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du$$

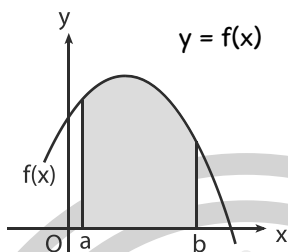
Turunkan fungsi hingga nol		Integralkan fungsi sebanyak turunan yang dilakukan
$f(x)$	+	$g(x)$
$f'(x)$	-	Integral $g(x)$
$f''(x)$	+	Integralkan lagi
0		Integralkan lagi

Catatan: kalikan silang dan perhatikan tanda (+) maupun (-).



E. Luas Daerah

1. Luas Daerah antara Kurva dan Sumbu X

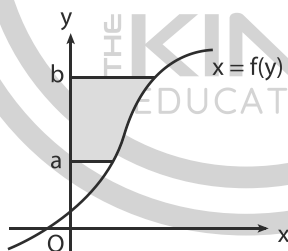


$$L = \int_a^b y \, dx$$

Jika kurva dan daerahnya berada di bawah sumbu X, maka luas daerahnya adalah:

$$L = -\int_a^b y \, dx$$

2. Luas Daerah antara Kurva dan Sumbu Y



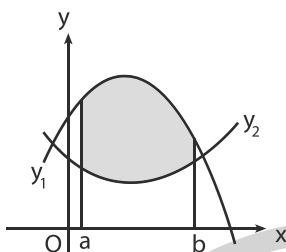
$$L = \int_a^b x \, dy$$

Jika kurva dan daerahnya berada di sebelah kiri sumbu Y, maka luas daerahnya adalah:

$$L = -\int_a^b x \, dy$$

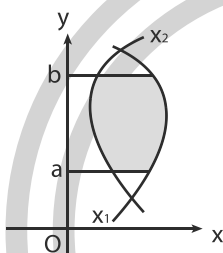


3. Luas Daerah antara Dua Kurva



$$L = \int_a^b (y_1 - y_2) dx$$

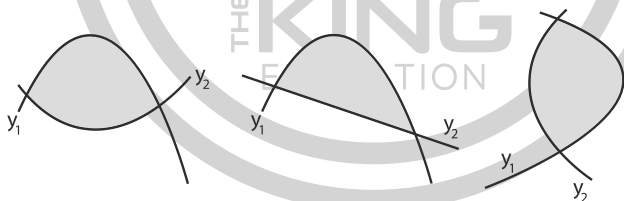
$$L = \int_a^b (y_{\text{atas}} - y_{\text{bawah}}) dx$$



$$L = \int_a^b (x_1 - x_2) dy$$

$$L = \int_a^b (x_{\text{kanan}} - x_{\text{kiri}}) dy$$

4. Rumus Praktis

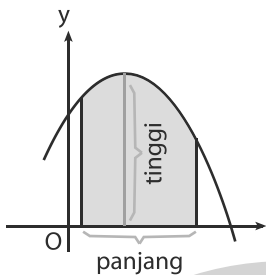


Jika daerah yang diarsir hanya dibatasi oleh DUA kurva, maka cara praktisnya adalah sebagai berikut.

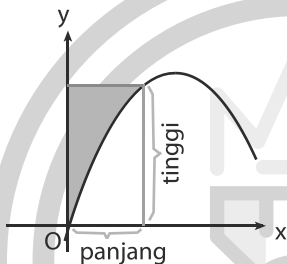
$$L = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}$$

D = diskriminan dari $y_2 - y_1$





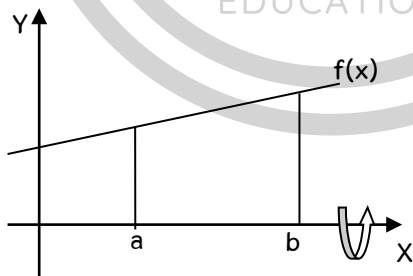
$$L = \frac{2}{3} \times \text{panjang} \times \text{tinggi}$$



$$L = \frac{1}{3} \times \text{panjang} \times \text{tinggi}$$

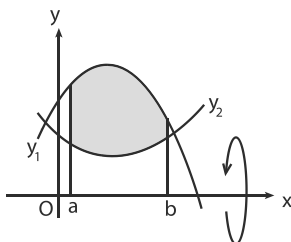
F. Volume Benda Putar

1. Volume Benda Putar terhadap Sumbu X



$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

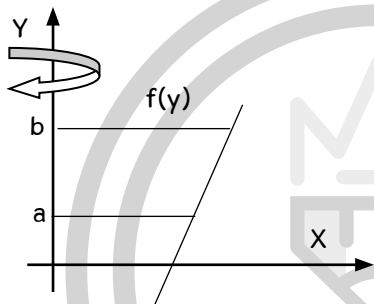




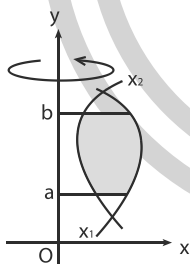
$$L = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

$$L = \pi \int_a^b (y_{\text{atas}}^2 - y_{\text{bawah}}^2) dx$$

2. Volume Benda Putar terhadap Sumbu Y



$$V_y = \pi \int_a^b f^2(y) dy$$



$$L = \pi \int_a^b (x_1^2 - x_2^2) dy$$

$$L = \pi \int_a^b (x_{\text{kanan}}^2 - x_{\text{kiri}}^2) dy$$

LATIHAN SOAL

1. SOAL UTBK 2019

Diketahui $f(x)$ merupakan fungsi genap.

$$\text{Jika } \int_{-4}^4 f(x) dx = 16,$$

$$\int_3^4 f(2x-2) dx = 11 \text{ dan } \int_{-5}^{-1} f(1-x) dx = 6,$$

$$\text{maka } \int_0^2 f(x) dx = \dots$$

A. 22

C. 24

E. 26

B. 23

D. 25

2. SOAL UTBK 2019

Fungsi $f(x)$ memenuhi $f(x) = f(-x)$. Jika nilai dari

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = 6 \text{ dan } \int_2^3 f(x) dx = 1, \text{ maka } \int_0^2 f(x) dx = \dots$$

A. 1

C. 3

E. 5

B. 2

D. 4

3. SOAL SBMPTN 2018

$$\text{Nilai } \int_{1/8}^{1/3} \frac{3}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx \text{ adalah}$$

A. 19

C. 57

E. 95

B. 38

D. 76



4. SOAL SBMPTN 2018

Daerah R dibatasi oleh $y = \sqrt{x}, y = x^2$, untuk $x \in [0, 2]$.
Volume benda padat yang didapat dengan memutar R terhadap sumbu x adalah

- A. π C. 3π E. 5π
B. 2π D. 4π

5. SOAL SBMPTN 2017

Jika $\int_{-4}^4 f(x)(\sin x + 1)dx = 8$, dengan $f(x)$ fungsi genap

dan $\int_{-2}^4 f(x)dx = 4$, maka $\int_{-2}^0 f(x)dx = \dots$

- A. 0 C. 2 E. 4
B. 1 D. 3

6. SOAL SBMPTN 2016

Suatu daerah dibatasi $y = x^2$ dan $y = 4$. Jika garis $y = k$ membagi luas daerah tersebut menjadi dua bagian dengan perbandingan luas bagian atas : luas bagian bawah adalah $1 : 2$, maka nilai $k^{\frac{3}{2}} = \dots$

- A. $\frac{17}{3}$ C. $\frac{15}{3}$ E. $\frac{12}{3}$
B. $\frac{16}{3}$ D. $\frac{14}{3}$

7. SOAL SBMPTN 2016

Diketahui fungsi $f(x) = f(x + 2)$ untuk setiap x.

Jika $\int_0^2 f(x) dx = B$, maka $\int_3^7 f(x + 8) dx = \dots$



- A. B C. 3B E. 5B
B. 2B D. 4B

8. SOAL SBMPTN 2015

Pada interval $0 \leq x \leq 20$, luas daerah di bawah kurva $y = x^2$ dan di atas kurva garis $y = kx$ sama dengan luas daerah di atas kurva $y = x^2$ dan di bawah garis $y = kx$.

Nilai $k = \dots$

- A. $13\frac{1}{3}$ C. $11\frac{2}{3}$ E. $10\frac{1}{2}$
B. 12 D. $10\frac{2}{3}$

9. SOAL STANDAR UTBK 2019

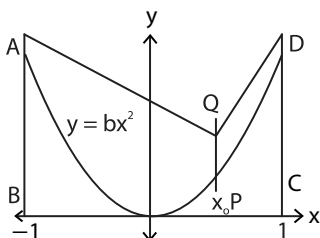
$$\int 2 \sin x \cos(1 - 2x) dx = \dots$$

- A. $-\cos(x - 1) + \frac{1}{3}\cos(3x - 1) + c$
B. $\cos(x - 1) + \frac{1}{3}\cos(3x - 1) + c$
C. $\cos(x - 1) - \frac{1}{3}\cos(3x - 1) + c$
D. $\cos(x - 1) + \cos(3x - 1) + c$
E. $-\cos(x - 1) + \cos(3x - 1) + c$

10. SOAL STANDAR UTBK 2019

Misalkan $A(t)$ menyatakan luas daerah di bawah kurva $y = bx^2$, $0 \leq x \leq t$. Jika titik $P(x_0, 0)$ sehingga $A(x_0) : A(1) = 1 : 8$, maka perbandingan luas trapesium $ABPQ : DCPQ = \dots$





- A. 2 : 1
- B. 3 : 1
- C. 6 : 1
- D. 8 : 1
- E. 9 : 1

11. SOAL SIMAK UI 2018

Jika $f(x)$ fungsi kontinu di interval $[1,30]$ dan

$$\int_6^{30} f(x) dx = 30, \text{ maka } \int_1^9 f(3y+3) dy = \dots$$

- A. 5
- B. 10
- C. 15
- D. 18
- E. 27

12. SOAL SIMAK UI 2017

$$\text{Jika } 6 \int_0^1 (\cos \pi x + x^2 - 3x + 2) dx = (a-1)(a-5),$$

maka nilai a adalah

- A. -2 atau -3
- B. 0 atau -6
- C. 2 atau -2
- D. 0 atau 6
- E. 2 atau 3

13. SOAL SIMAK UI 2016

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \dots$$

- A. $\cot x + \sec x + c$
- B. $\cot x - \sec x + c$
- C. $-\cot x + \csc x + c$
- D. $-\cot x - \sec x + c$
- E. $\cot x + 2 \sec x + c$

14 SOAL UM UGM 2017

Jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $y = (2m - 2)x$ mempunyai luas $\frac{1}{3}$ satuan, maka nilai $m = \dots$

- A. $2\frac{1}{2}$ atau -1 D. 4 atau -2
B. 2 atau 0 E. $4\frac{1}{2}$ atau $-2\frac{1}{2}$
C. $3\frac{1}{2}$ atau $-1\frac{1}{2}$

15 SOAL UM UGM 2016

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\sqrt[3]{2x-1} + \sin \pi x \right) dx = \dots$$

- A. $\frac{3\pi - 8}{8\pi}$ C. $\frac{3\pi + 4}{4\pi}$ E. $\frac{3}{4} + \pi$
B. $\frac{3\pi - 4}{4\pi}$ D. $\frac{3\pi + 8}{8\pi}$

16 SOAL STANDAR UTBK 2019

Diketahui $\int f(x) dx = ax^2 + bx + c$, dan $a \neq 0$. Jika a , $f(a)$, $2b$ membentuk barisan aritmetika, dan $f(b) = 6$,

maka $\int_0^1 f(x) dx = \dots$

- A. $\frac{17}{4}$ C. $\frac{25}{4}$ E. $\frac{11}{4}$
- B. $\frac{21}{4}$ D. $\frac{13}{4}$

17 SOAL STANDAR UTBK 2019

Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, garis $x = 2$, garis $x = 4$ dan garis $y = 3$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360° adalah

A. 4π

C. 8π

E. 12π

B. 6π

D. 10π



PEMBAHASAN

1. PEMBAHASAN CERDIK:

Ingat! Ciri-ciri FUNGSI GENAP

- Berlaku $f(-x) = f(x)$
- Grafiknya simetri dengan pusat sumbu y
- Berlaku $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

Selanjutnya, soal dapat diselesaikan sebagai berikut.

$$\int_{-4}^4 f(x) dx = 16 \Rightarrow 2 \int_0^4 f(x) dx = 16$$

$$\Rightarrow \int_0^4 f(x) dx = 8$$

Selanjutnya,

$$\int_3^4 f(2x-2) dx = 11$$

$$\left[\text{misal: } (2x-2) = y \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y+2) \right]$$

$$\Rightarrow \int_4^6 f(y) d\left(\frac{1}{2}(y+2)\right) = 11$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_4^6 f(y) dy = 11 \Rightarrow \int_4^6 f(y) dy = 22$$

Selanjutnya:

$$\int_{-5}^{-1} f(1-x) dx = 6, \left[\text{misalkan } (1-x) = y \Rightarrow x = 1-y \right]$$

$$\Rightarrow \int_6^2 f(y) d(1-y) = 6$$

$$\Rightarrow -1 \int_6^2 f(y) dy = 6 \Rightarrow \int_6^2 f(y) dy = -6$$



Maka,

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &= \int_0^4 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx + \int_6^2 f(x) dx \\ &= 8 + 22 - 6 = 24\end{aligned}$$

Jawaban: C

2. PEMBAHASAN CERDIK:

Ingat! Ciri-ciri FUNGSI GENAP

- Berlaku $f(-x) = f(x)$
- Grafiknya simetri dengan pusat sumbu y
- Berlaku $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

Selanjutnya diperoleh:

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = 6 \Rightarrow 2 \int_0^3 f(x) dx = 6 \Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = 3$$

dan $\int_2^3 f(x) dx = 1$, maka

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &= \int_0^3 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx \\ &= 3 - 1 = 2\end{aligned}$$

Jawaban: B

3. PEMBAHASAN CERDIK:

Integral Substitusi

$$\int f(x) [g(x)]^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{f(x)}{g'(x)} \cdot [g(x)]^{n+1} + c$$

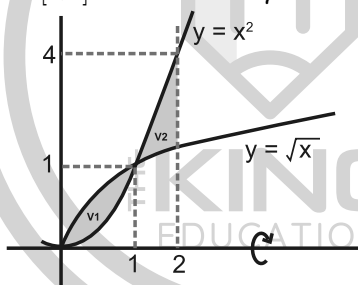


$$\begin{aligned}
 \int_{1/8}^{1/3} \frac{3}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx &= \int_{1/8}^{1/3} (3x^{-2}) (1+x^{-1})^{\frac{1}{2}} dx \\
 &= \left[\frac{(3x^{-2})}{-x^{-2}} \frac{1}{1+\frac{1}{2}} (1+x^{-1})^{1+\frac{1}{2}} \right]_{1/8}^{1/3} \\
 &= \left[-2(1+x^{-1}) \left(\sqrt{1+x^{-1}} \right) \right]_{1/8}^{1/3} \\
 &= ((-2)(4)(2)) - ((-2)(9)(3)) \\
 &= -16 + 54 = 38
 \end{aligned}$$

Jawaban: B

4. PEMBAHASAN CERDIK:

Diketahui daerah R dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, untuk $x \in [0, 2]$. Sketsa kurvanya:



V_1 = Volume benda putar daerah 1

$$\begin{aligned}
 &= \pi \int_0^1 (y_1)^2 - (y_2)^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 dx \\
 &= \pi \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 \\
 &= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} \pi
 \end{aligned}$$



$V_2 = \text{Volume benda putar daerah 2}$

$$\begin{aligned} &= \pi \int_1^2 (y_2)^2 - (y_1)^2 dx \\ &= \pi \int_1^2 (x^2)^2 - (\sqrt{x})^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \\ &= \pi \left[\left(\frac{32}{5} - 2 \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \frac{44}{10} \pi + \frac{3}{10} \pi \end{aligned}$$

Sehingga:

Volume total

$$\begin{aligned} &= V_1 + V_2 \\ &= \frac{3}{10} \pi + \frac{44}{10} \pi + \frac{3}{10} \pi = \frac{50}{10} \pi = 5\pi \end{aligned}$$

Jawaban: E

5. PEMBAHASAN CERDIK:

Fungsi genap adalah fungsi yang berlaku

$$f(x) = f(-x)$$

Ciri utamanya yaitu fungsinya simetri terhadap

sumbu-y. Artinya: $\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$

$$\int_{-2}^4 f(x) dx = 4$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx = 4$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^0 f(x) dx = 4 - \int_0^4 f(x) dx \quad \dots(1)$$



Selanjutnya akan kita cari nilai dari $\int_0^4 f(x) dx$

$$\int_{-4}^4 f(x)(\sin x + 1) dx = 8, \text{ maka berlaku:}$$

$$\int_{-4}^4 f(x)(\sin x + 1) dx = 8$$

$$\Rightarrow \int_{-4}^4 f(x)(\sin x) dx + \int_{-4}^4 f(x) dx = 8$$

$$\Rightarrow \left(\int_{-4}^0 f(x)(\sin x) dx + \int_0^4 f(x)(\sin x) dx \right)$$

$$+ \left(\int_{-4}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx \right) = 8$$

$$\Rightarrow \left(- \int_0^4 f(x)(\sin x) dx + \int_0^4 f(x)(\sin x) dx \right)$$

$$+ \left(\int_0^4 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx \right) = 8$$

$$\Rightarrow (0) + 2 \left(\int_0^4 f(x) dx \right) = 8 \Rightarrow \int_0^4 f(x) dx = 4 \dots\dots(2)$$

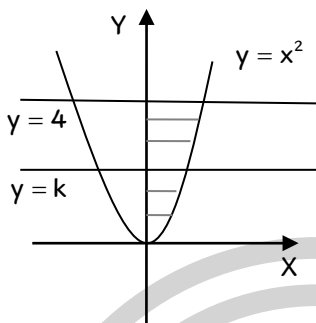
Maka, dari (1) dan (2) selanjutnya diperoleh

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = 4 - \int_0^4 f(x) dx = 4 - 4 = 0$$

Jawaban: A



6. PEMBAHASAN CERDIK:



$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\int_k^4 \sqrt{y} dy}{\int_0^k \sqrt{y} dy}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\int_k^4 y^{\frac{1}{2}} dy}{\int_0^k y^{\frac{1}{2}} dy}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_k^4}{\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^k}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{2}{3} y \sqrt{y} \Big|_k^4}{\frac{2}{3} y \sqrt{y} \Big|_0^k}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{2}{3} k \sqrt{k}}{\frac{2}{3} k \sqrt{k}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{2}{3} (4 \cdot 2 - k \sqrt{k})}{\frac{2}{3} k \sqrt{k}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{(8 - k \sqrt{k})}{k \sqrt{k}}$$

$$k \sqrt{k} = 16 - 2k \sqrt{k}$$

$$3k \sqrt{k} = 16$$

$$k^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}$$

Jawaban: B

7. PEMBAHASAN CERDIK:

$f(x) = f(x+2)$ untuk setiap x . Artinya, berlaku:

$$f(x) = f(x+2) = f(x+4) = f(x+6) = \dots$$

Akibatnya:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx = \int_4^6 f(x) dx = \dots = B$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_2^4 f(x+2) dx = \int_4^6 f(x+4) dx = \dots = B$$

Maka, soal diselesaikan dengan cara berikut.

$$\begin{aligned} & \int_3^7 f(x+8) dx \\ &= \int_3^7 f(x) dx \\ &= \int_3^4 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx + \int_6^7 f(x) dx \\ &= \int_3^4 f(x) dx + \int_6^7 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx \\ &= \int_1^2 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \\ &= B + B = 2B \end{aligned}$$

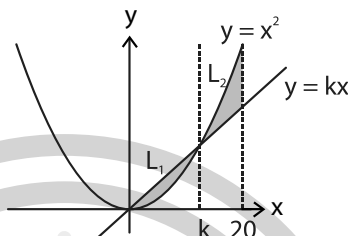
Jawaban: B



8. PEMBAHASAN CERDIK:

Pertama, kita tentukan titik potong kurva $y = x^2$ dan $y = kx$, yaitu:

$$\begin{aligned}y_1 &= y_2 \\x^2 &= kx \\x^2 - kx &= 0 \\x(x - k) &= 0 \\x &= 0 \text{ atau } x = k\end{aligned}$$



Jadi diperoleh nilai $x = k$

Luas daerah yang diarsir terbagi menjadi dua bagian, yaitu:

- Luas daerah di bawah kurva $y = kx$ dan di atas $y = x^2$ dari $x = 0$ sampai $x = k$, adalah:

$$L_1 = \int_0^k (kx - x^2) dx$$

- Luas daerah di bawah kurva $y = x^2$ dan di atas $y = kx$ dari $x = k$ sampai $x = 20$, adalah:

$$L_2 = \int_k^{20} (x^2 - kx) dx$$

Pada interval $0 \leq x \leq 20$, luas daerah di bawah kurva $y = x^2$ dan di atas kurva garis $y = kx$ sama dengan luas daerah di atas kurva $y = x^2$ dan di bawah garis $y = kx$, sehingga $L_2 = L_1$



Jadi, diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned}\int_k^{20} (x^2 - kx) dx &= \int_0^k (kx - x^2) dx \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}kx^2 \right]_k^{20} &= \left[\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^k \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}(20)^3 - \frac{1}{2}k(20)^2 \right) - \left(\frac{1}{3}(k)^3 - \frac{1}{2}k(k)^2 \right) &= \\ \left(\frac{1}{2}k(k)^2 - \frac{1}{3}(k)^3 \right) - \left(\frac{1}{2}k(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3 \right) & \\ \Leftrightarrow \left(\frac{8000}{3} - 200k \right) - \left(\frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^3 \right) &= \left(\frac{1}{2}k^3 - \frac{1}{3}k^3 \right) - 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{8000}{3} - 200k \right) + \frac{1}{6}k^3 &= \frac{1}{6}k^3 \\ \Leftrightarrow \frac{8.000}{3} - 200k &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{8.000}{3} = 200k &\Leftrightarrow k = 13\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Jawaban: A

9. PEMBAHASAN CERDIK:

$$\begin{aligned}\int 2 \sin x \cos(1-2x) dx &= \int \sin(x+1-2x) + \sin(x-1+2x) dx \\ &= \int \sin(1-x) + \sin(3x-1) dx \\ &= \cos(1-x) - \frac{1}{3}\cos(3x-1) + c \\ &= \cos(-(x-1)) - \frac{1}{3}\cos(3x-1) + c \\ &= \cos(x-1) - \frac{1}{3}\cos(3x-1) + c\end{aligned}$$

Jawaban: C



10. PEMBAHASAN CERDIK:

$A(t)$ adalah luas daerah di bawah kurva $y = bx^2$, $0 \leq x \leq t$, maka $A(t)$ dapat dinyatakan dalam integral tentu, yaitu

$$A(t) = \int_0^t bx^2 dx$$

Diketahui pada soal bahwa $A(x_0) : A(1) = 1 : 8$, maka:

$$\frac{A(x_0)}{A(1)} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\int_0^{x_0} bx^2 dx}{\int_0^1 bx^2 dx} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left[\frac{1}{3} bx^3 \right]_0^{x_0}}{\left[\frac{1}{3} bx^3 \right]_0^1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3} \cdot b \cdot x_0^3}{\frac{1}{3} \cdot b} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow x_0^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$$

Jadi, perbandingan luas trapesium $ABPQ : DCPQ$ adalah:

$$\frac{L_{ABPQ}}{L_{DCPQ}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}b + b \right) \cdot \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}b + b \right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{1}$$

Jawaban: B

11. PEMBAHASAN CERDIK:

$$\int_{y=1}^{y=9} f(3y+3) dy$$

$$x = 3y + 3 \text{ maka } \frac{dx}{dy} = 3 \Leftrightarrow dy = \frac{1}{3} dx$$

Maka, nilai batas-batas integralnya yaitu:

$$y = 1 \Rightarrow x = 6$$

$$y = 9 \Rightarrow x = 30$$



Sehingga:

$$\begin{aligned}\int_1^9 f(3y+3) dy &= \int_6^{30} f(x) \frac{1}{3} dx \\&= \frac{1}{3} \int_6^{30} f(x) dx \\&= \frac{1}{3} (30) \\&= 10\end{aligned}$$

Jawaban: B

12 PEMBAHASAN CERDIK:

Rumus integral fungsi:

$$\begin{aligned}f(x) = ax^n \rightarrow \int f(x) dx &= \int ax^n dx \\&= \frac{a}{n+1} (x^{n+1}) + C\end{aligned}$$

Rumus integral fungsi trigonometri:

$$\int \cos ax = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$6 \int_0^1 (\cos \pi x + x^2 - 3x + 2) dx = (a-1)(a-5)$$

$$\int_0^1 (\cos \pi x + x^2 - 3x + 2) dx = \frac{(a-1)(a-5)}{6}$$

$$\left[\frac{1}{\pi} (\sin \pi x) + \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2x \right]_0^1 = \frac{(a-1)(a-5)}{6}$$

$$\left(\frac{1}{\pi} (\sin \pi) + \frac{1}{3} (1) - \frac{3}{2} (1) + 2(1) \right) - 0 = \frac{(a-1)(a-5)}{6}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{(a-1)(a-5)}{6}$$



$$\frac{2-9+12}{6} = \frac{(a-1)(a-5)}{6}$$

$$5 = (a-1)(a-5)$$

$$a^2 - 6a + 5 = 5$$

$$a(a-6) = 0$$

$$a = 0 \text{ atau } a = 6$$

Jawaban: D

13 PEMBAHASAN CERDIK:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\cos x} &= \int \frac{dx}{1+\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x} \\ &= \int \frac{(1-\cos x)dx}{1-\cos^2 x} \\ &= \int \frac{(1-\cos x)dx}{\sin^2 x} \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= \int (\operatorname{cosec}^2 x - \cot x \cdot \operatorname{cosec} x) dx \\ &= -\cot x + \operatorname{cosec} x + c \end{aligned}$$

Jawaban: C

14 PEMBAHASAN CERDIK:

Daerah yang dimaksud dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $y = (2m-2)x$ maka:

$$y = y$$

$$x^2 = (2m-2)x$$

$$x^2 - (2m-2)x = 0$$

$$\text{Sehingga, } D = b^2 - 4ac = (2m-2)^2 \text{ atau } \sqrt{D} = |2m-2|$$



Diketahui luas daerahnya adalah $1\frac{1}{3}$ maka:

$$L = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}$$

$$1\frac{1}{3} = \frac{(2m-2)^2 |2m-2|}{6(1)^2}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{|2m-2|^3}{6}$$

$$|2m-2|^3 = 8$$

$$|2m-2| = 2$$

$$2m-2 = \pm 2$$

$$2m = 2 \pm 2$$

$$m = 1 \pm 1$$

Jadi, $m = 2$ atau $m = 0$.

Jawaban: B

15 PEMBAHASAN CERDIK:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (\sqrt[3]{2x-1} + \sin \pi x) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left((2x-1)^{\frac{1}{3}} + \sin \pi x \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2\left(\frac{1}{3}+1\right)} (2x-1)^{\frac{1}{3}+1} - \frac{1}{\pi} \cos \pi x \right) \bigg|_{\frac{1}{2}}^1$$



$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{\frac{8}{3}} (2x-1)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{\pi} \cos \pi x \right) \bigg|_{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\frac{3}{8} (2x-1)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{\pi} \cos \pi x \right) \bigg|_{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\frac{3}{8} (2 \cdot 1 - 1)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{\pi} \cos \pi \right) - \left(\frac{3}{8} (2 \cdot \frac{1}{2} - 1)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{\pi} \cos \frac{1}{2} \pi \right) \\
 &= \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{\pi} \right) - 0 = \frac{3\pi + 8}{8\pi}
 \end{aligned}$$

Jawaban: D

16 PEMBAHASAN CERDIK:

Diketahui:

$$\int f(x) dx = ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow f(x) = 2ax + b$$

$$\Rightarrow f(a) = 2a \cdot a + b = 2a^2 + b \dots(i)$$

$$\Rightarrow f(b) = 2ab + b \dots(ii)$$

Jika a , $f(a)$, $2b$ membentuk barisan aritmetika, maka:

$$f(a) = \frac{a+2b}{2} \dots(iii)$$

Dari (i) dan (iii), maka:

$$2a^2 + b = \frac{a+2b}{2} \Rightarrow 4a^2 + 2b = a + 2b$$

$$\Rightarrow 4a^2 - a = 0 \Rightarrow a(4a - 1) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ atau } a = \frac{1}{4}$$



Karena $a \neq 0$, maka $a = \frac{1}{4}$.

Dari soal, $f(b) = 6$ dan (iii), maka:

$$6 = 2ab + b \Rightarrow 6 = 2\left(\frac{1}{4}\right)b + b$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{1}{2}b + b \Rightarrow 6 = \frac{3}{2}b \Rightarrow b = 4$$

Sehingga, persamaan $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{4}x + 4 = \frac{1}{2}x + 4$

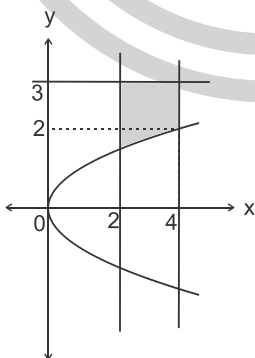
Jadi, nilai dari:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{1}{2}x + 4 dx \\ &= \frac{1}{4}x^2 + 4x \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{4} + 4\right) - 0 = \frac{17}{4}\end{aligned}$$

Jawaban: A

17. PEMBAHASAN CERDIK:

Daerah yang di batasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, garis $x = 2$, garis $x = 4$ dan garis $y = 3$ adalah:



Daerah arsiran diputar mengelilingi sumbu x , maka volume benda putar yang terjadi,

$$= \pi \int_2^4 3^2 - (\sqrt{x})^2 dx$$

$$= \pi \int_2^4 9 - x dx$$

$$= \pi \left(9x - \frac{1}{2}x^2 \right)_2^4$$

$$= \pi((36 - 8) - (18 - 2)) = 12\pi$$

Jawaban: E

THE KING
EDUCATION



1. Group Belajar UTBK GRATIS)

Via Telegram, Quis Setiap Hari, Drilling Soal Ribuan, Full Pembahasan Gratis. Link Group: t.me/theking_utbk

2. Instagram Soal dan Info Tryout UTBK

[@theking.education](https://www.instagram.com/theking.education)

[@video.trik_tpa_tps](https://www.instagram.com/video.trik_tpa_tps)

[@pakarjurusan.ptn](https://www.instagram.com/pakarjurusan.ptn)

3. DOWNLOAD BANK SOAL

www.edupower.id

www.theking-education.id

4. TOKO ONLINE ORIGINAL

SHOPEE, nama toko: [forumedukasiofficial](https://www.shopee.co.id/forumedukasiofficial)

5. Katalog Buku

www.bukuedukasi.com

WA Layanan Pembaca:
0878-397-50005



@theking.education