Limit

A. PENDAHULUAN

- **Limit** adalah batas nilai suatu fungsi f(x) untuk nilai x mendekati a dari kanan (a^+) dan kiri (a^-), dapat dinotasikan:

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

B. LIMIT FUNGSI ALJABAR

- **Limit fungsi aljabar** dapat dicari dengan memasukkan nilai x ke dalam fungsi.
- **Limit fungsi aljabar** tak dapat berupa bentuk tak tentu, yaitu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, dan $\infty - \infty$.
- **Limit fungsi aljabar** $x \to a$ dengan bentuk tak tentu, dapat diselesaikan dengan cara menghilangkan pembuat nol, dengan:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

1) **Pemfaktoran**.
2) Perkalian dengan **bentuk sekawan**.
3) **Dalil L'Hospital** dengan turunan, yaitu:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- **Contoh** pengerjaan yang dapat langsung dimasukkan nilai x nya:

Contoh 1:

$$\lim_{x\to 3} x^2-5x+4 = (3)^2 - 5(3) + 4 = \underline{-2}$$

Contoh 2:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{0} = \underline{\infty}$$

- **Contoh** pengerjaan dengan pemfaktoran:

Contoh 1:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 1 + 1 = \underline{2}$$

Contoh 2:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \frac{(2+2)}{(2+3)} = \frac{4}{5}$$

- **Contoh** pengerjaan dengan perkalian sekawan:

Contoh 1:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-\sqrt{6-x}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)(x+\sqrt{6-x})}{x^2-(6-x)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{6-x})}{x^2+x-6}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)(x+\sqrt{6-x})}{\cancel{(x-2)}(x+3)}$$

$$= \frac{(2+2)(2+\sqrt{6-2})}{(2+3)} = \frac{16}{5}$$

Contoh 2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}{x^2-x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x\sqrt{x}+x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x-2\sqrt{x}+1)}{\cancel{x}(x-1)}$$

$$= \frac{(0-2\sqrt{0}+1)}{(0-1)} = \underline{-1}$$

- **Contoh** pengerjaan dalil L'Hospital:

Contoh 1:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{6x^2-10x-2}{12x^2-26x+4}$$

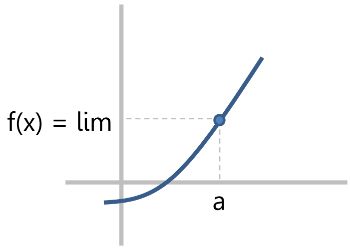
$$= \frac{6(3)^2-10(3)-2}{12(3)^2-26(3)+4} = \frac{11}{17}$$

Contoh 2:

$$\lim_{x\to 3} \frac{4x-6-\sqrt{x^2+3x+18}}{3-x} = \lim_{x\to 3} \frac{4-\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+18}}}{-1}$$

$$= \frac{4-\frac{2(3)+3}{2\sqrt{(3)^2+3(3)+18}}}{-1} = -\frac{13}{4}$$

- **Grafik limit fungsi aljabar** dapat menggambarkan nilai f(x) kontinu dan diskontinu pada limit.
- **Nilai f(x) kontinu** adalah nilai dimana grafik limit di sekitar titik x = a berkelanjutan.



- **Syarat f(x) kontinu** di x = a:

1) Nilai f(a) dan limit f(x) $x \to a$ **terdefinisi**.
2) Nilai f(x) **sama dengan** nilai limit f(x) $x \to a$.

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

Contoh:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}, & x \neq -2 \\ 3a+6, & x = -2 \end{cases}$$

Jika f(x) kontinu di x = -2, maka nilai a adalah?

Jawab:

Nilai f(-2) dicari menggunakan persamaan 2, sedangkan nilai limit f(x) $x \to -2$ dicari menggunakan persamaan 1.

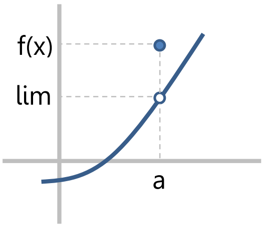
$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2} = \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-1)(\sqrt{x+6}-2)}{\cancel{x+6-4}}$$

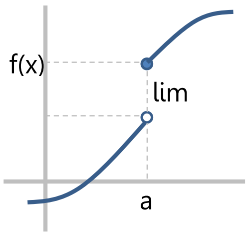
$$= (-2-1)(\sqrt{-2+6}-2) = -12$$

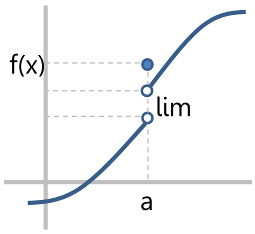
$f(-2) = \lim_{x\to -2} f(x)$

$3a + 6 = -12$ $\qquad$ $\underline{a = -6}$

- **Nilai f(x) diskontinu** adalah nilai dimana grafik di sekitar titik x = a tidak terdefinisi dan tidak mempunyai nilai limit.







Contoh:

Pada interval berapa $f(x) = \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2-4x-5}}$ diskontinu?

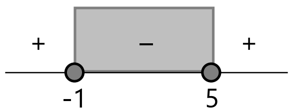
Jawab:

Agar f(x) tidak terdefinisi (bentuk $\frac{a}{0}$ dan $\sqrt{<0}$), maka dapat dibuat:

$x^2 - 4x - 5 \leq 0$

$(x - 5)(x + 1)$

$x = 5 \quad x = -1$



f(x) tak terdefinisi pada interval $\underline{-1 \leq x \leq 5}$.

- **Limit fungsi aljabar** $x \to \infty$ dengan bentuk tak tentu, dapat diselesaikan dengan:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^n+bx^{n-1}+\ldots}{px^m+qx^{m-1}+\ldots} = \frac{\infty}{\infty}$$

n = pangkat x tertinggi (derajat) pembilang

m = pangkat x tertinggi (derajat) penyebut

1) **Jika n = m**,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{p}$$

Untuk mempercepat hitungan, hanya hitung x yang mungkin memiliki pangkat tertinggi.

2) **Jika n > m**,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

3) **Jika n < m**,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- **Contoh** pengerjaan:

Contoh 1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+1}{(1-3x)(x+2)} = \frac{2x^2\ldots}{-3x^2\ldots} = -\frac{2}{3}$$

Contoh 2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x-3}{x+1} = \frac{2x^2\ldots}{x\ldots} = \infty$$

- **Limit fungsi aljabar** $x \to \infty$ dengan bentuk tak tentu:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^n+bx^{n-1}+\ldots} - \sqrt{px^n+qx^{n-1}+\ldots} = \infty - \infty$$

dapat diselesaikan dengan:

1) **Jika a = p**,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = \frac{b-q}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

2) **Jika a > p**,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = +\infty$$

3) **Jika a < p**,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = -\infty$$

Contoh:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+x+1}-2x+3 = \lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{(2x-3)^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-12x+9}$$

$$= -\frac{1}{12}$$

- **Sifat-sifat operasi** bilangan tak hingga (∞):

1. $a \pm \infty = \pm\infty$
2. $a.\infty = \infty$
3. $\infty.\infty = \infty$
4. $k^\infty = \infty$
5. $\frac{a}{\infty} = 0$
6. $\frac{a}{0} = \infty$, $a \neq 0$

C. LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

- **Limit fungsi trigonometri** dapat dicari dengan memasukkan nilai x ke dalam fungsi.
- **Limit fungsi trigonometri** tak dapat berupa bentuk tak tentu, yaitu $\frac{0}{0}$.

Limit fungsi trigonometri dengan bentuk tak tentu, dapat diselesaikan dengan cara menghilangkan pembuat nol, dengan:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$$

1) Fungsi trigonometri istimewa ($x \to a$)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin h}{h}=\lim_{x\to a}\frac{h}{\sin h}=1$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\tan h}{h}=\lim_{x\to a}\frac{h}{\tan h}=1$$

2) Mengubah fungsi trigonometri lain menjadi fungsi trigonometri istimewa dengan menggunakan identitas dan rumus trigonometri.

Identitas

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + \cot^2\alpha = \mathrm{cosec}^2\alpha$ | $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

Rumus sudut rangkap

$\sin 2A = 2.\sin A.\cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

Rumus jumlah dan selisih sudut

$\sin(A + B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B$

$\sin(A - B) = \sin A.\cos B - \cos A.\sin B$

$\cos(A + B) = \cos A.\cos B - \sin A.\sin B$

$\cos(A - B) = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$

Rumus jumlah dan selisih fungsi

$\sin A + \sin B = 2.\sin\frac{1}{2}(A + B).\cos\frac{1}{2}(A - B)$

$\sin A - \sin B = 2.\cos\frac{1}{2}(A + B).\sin\frac{1}{2}(A - B)$

$\cos A + \cos B = 2.\cos\frac{1}{2}(A + B).\cos\frac{1}{2}(A - B)$

$\cos A - \cos B = -2.\sin\frac{1}{2}(A + B).\sin\frac{1}{2}(A - B)$

3) Jika seluruh fungsi pada limit adalah fungsi sinus dan tangen, keduanya dapat dicoret (dianggap 1), lalu limit dikerjakan seperti biasa.

Contoh pengerjaan limit trigonometri:

Contoh 1:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{\cos x-\sin x}}{(\cancel{\cos x-\sin x})(\cos x+\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos x+\sin x)}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Contoh 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3.\sin 4x}{5.\tan 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{3.\cancel{\sin}4x}{5.\cancel{\tan}6x}=\frac{3.4x}{5.6x}=\frac{2}{5}$$

Contoh 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x.\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2 2x)}{x.\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{\sin}^2 2x)}{x.\cancel{\tan}3x}$$

$$=\frac{2(2x)^2}{x.3x}=\frac{8}{3}$$

Contoh 4:

$$\lim_{x\to a}\frac{(2a+x)\sin(a-x)}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{(2a+x)\cancel{\sin(a-x)}}{-\cancel{(-x+a)}(x+a)}$$

$$=\frac{(2a+a)}{-(a+a)}=-\frac{3}{2}$$

Contoh 5:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-9x^2}{\sin(9-x^2)}=\lim_{x\to 3}\frac{-x^2\cancel{(-x^2+9)}}{\cancel{\sin(9-x^2)}}=-(3)^2=-9$$

Contoh 6:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+2\cos^2 x-1}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}2\cos x=0$$

D. SIFAT-SIFAT LIMIT

Sifat-sifat operasi hitung limit:

1) **Penjumlahan dan pengurangan**

$$\lim_{x\to a}f(x)\pm g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

2) **Perkalian dan pembagian**

$$\lim_{x\to a}f(x).g(x)=\lim_{x\to a}f(x).\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$$

3) **Perpangkatan**

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^2=[\lim_{x\to a}f(x)]^2$$