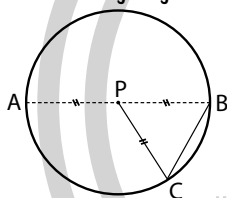


LINGKARAN DAN IRISAN KERUCUT



A. Unsur-unsur Lingkaran

Lingkaran adalah suatu daerah yang dibatasi oleh kurva tertutup berbentuk melingkar. Setiap titik pada tepi (sisi) lingkaran jaraknya sama dengan titik pusat lingkaran, jarak ini disebut jari-jari.



P = titik pusat

AB = diameter

AP = BP = CP = jari-jari

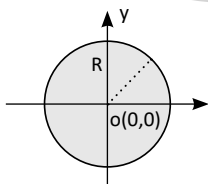
BC = tali busur

\widehat{BC} = busur lingkaran

Keliling dan luas lingkaran yaitu: $K = 2\pi \times r$ dan $L = \pi \times r^2$

B. Persamaan Lingkaran

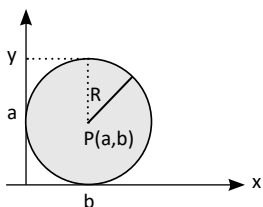
1. Persamaan lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari = R.



$$x^2 + y^2 = R^2$$



2. Persamaan lingkaran dengan pusat (a,b) dan jari-jari $= R$.



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

3. Bentuk umum persamaan lingkaran

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Syarat: koefisien x^2 dan y^2 harus sama dan tidak sama dengan nol.

Persamaan tersebut mempunyai:

- Pusat (P) = $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$
- Jari-jari (R) = $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

Rumus Jarak

a) Jarak titik (x_1, y_1) ke titik (x_2, y_2)

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

b) Jarak titik (x_1, y_1) ke garis $ax + by + c = 0$

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$



C. Kedudukan Titik terhadap Lingkaran

a) Kedudukan $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

- P di luar lingkaran: $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2$

- P pada lingkaran: $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$

- P di dalam lingkaran: $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$

b) Kedudukan $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Hitung $z = x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C$

- P di luar lingkaran: $z > 0$

- P pada lingkaran: $z = 0$

- P di dalam lingkaran: $z < 0$

D. Kedudukan Garis terhadap Lingkaran

Diberikan garis $g: y = mx + n$ dan lingkaran: $L \equiv x^2 + y^2 = R^2$.

Hubungan antara garis g dan lingkaran L dapat diselidiki dengan cara mensubstitusikan garis g ke L .

$$L \equiv x^2 + y^2 = R^2 \text{ dan } g \equiv y = mx + n$$

$$x^2 + (mx + n)^2 - R^2 = 0$$

$$x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 - R^2 = 0$$

$$(1+m^2)x^2 + 2mnx + n^2 - R^2 = 0$$

Persamaan di atas merupakan persamaan kuadrat dengan diskriminan:

$$D = 4m^2R^2 - 4n^2 + 4R^2$$



Selanjutnya, ada 3 kemungkinan yang terjadi, yaitu:

- (1) $D > 0$, maka garis memotong lingkaran pada dua titik
- (2) $D = 0$, maka garis memotong lingkaran pada satu titik (garis menyinggung lingkaran)
- (3) $D < 0$, maka garis tidak menyinggung lingkaran

E. Persamaan Garis Singgung (PGS) Lingkaran

1. Persamaan garis singgung lingkaran yang melalui sebuah titik (x_1, y_1) pada lingkaran, yaitu:

a. Untuk lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan berjari-jari r , yaitu: $x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = r^2$

b. Untuk lingkaran dengan pusat $P(a,b)$ dan berjari-jari r , yaitu: $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

c. Untuk lingkaran dengan bentuk umum

$$L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \text{ yaitu:}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2}A(x_1 + x) + \frac{1}{2}B(y_1 + y) + C = 0$$

2. Persamaan garis singgung lingkaran yang gradiennya diketahui, yaitu:

a. Untuk lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan berjari-jari r , yaitu: $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$ dengan m adalah gradien garis singgung

b. Untuk lingkaran dengan pusat $P(a,b)$ dan berjari-jari r , yaitu: $(y - b) = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$ dengan m adalah gradien garis singgung

c. Untuk lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$:

$$\left(y + \frac{B}{2}\right) = m\left(x + \frac{A}{2}\right) \pm \sqrt{(1+m^2)\left(\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C\right)}$$



F. Persamaan Garis Singgung (PGS) Lingkaran

Jika P_1 dan P_2 masing-masing adalah pusat lingkaran 1 dan 2, sedangkan r_1 dan r_2 adalah panjang jari-jari lingkaran 1 dan 2, maka:

1. Dua Lingkaran Berpotongan

Jarak $P_1 P_2 < r_1 + r_2$

2. Dua Lingkaran Bersinggungan

a. Bersinggungan di Luar: Jarak $P_1 P_2 = r_1 + r_2$

b. Bersinggungan di Dalam: Jarak $P_1 P_2 = |r_1 - r_2|$

3. Dua Lingkaran Sama Sekali Tidak Berpotongan

a. Kedua lingkaran saling asing: Jarak $P_1 P_2 > r_1 + r_2$

b. Salah satu lingkaran berada dalam lingkaran yang lain:
Jarak $P_1 P_2 < r_2 < r_1$

4. Dua Lingkaran Orthogonal

Dua lingkaran yang orthogonal adalah dua lingkaran yang saling berpotongan tegak lurus. Hal ini terjadi jika garis singgung kedua lingkaran membentuk sudut 90° (saling tegak lurus): $(P_1 P_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$

G. Pengertian Irisan Kerucut

Irisan kerucut adalah suatu kurva yang diperoleh dengan cara mengiris sebuah kerucut tegak menggunakan suatu bidang datar. Irisan kerucut juga merupakan tempat kedudukan sebuah titik yang bergerak sedemikian sehingga rasio jaraknya dari sebuah titik tetap adalah konstan. Titik tetap ini disebut dengan fokus dan garis tetap disebut dengan direktris.

Rasio tetap tersebut disebut dengan **keeksentrikan irisan kerucut** dan dilambangkan dengan e , di mana:

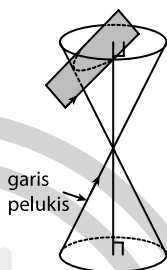
1. Jika $e = 1$, maka irisan kerucutnya berbentuk parabola



2. Jika $0 < e < 1$, maka irisan kerucutnya berbentuk elips
3. Jika $e > 1$, maka irisan kerucutnya berbentuk hiperbola.

H. Parabola

Untuk memperoleh irisan kerucut berbentuk parabola, bidang datar harus mengiris miring sejajar garis pelukis kerucut hingga memotong alas kerucut, seperti pada gambar di samping.



Persamaan parabola:

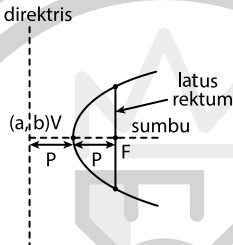
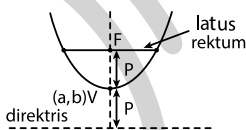
1. Dengan puncak $O(0,0)$

	Parabola Horizontal (terbuka ke kiri/ kanan)	Parabola Vertikal (terbuka ke atas/ bawah)
	$y^2 = 4px$	$x^2 = 4py$
Puncak	$V(0,0)$	$V(0,0)$
Fokus	$F(p,0)$	$F(0,p)$
Sumbu simetri	sumbu x	sumbu y
Direktris	$x = -p$	$y = -p$



Latus rektum	$AB = 4 p $	$AB = 4 p $
	$p > 0$ terbuka ke kanan $p < 0$ terbuka ke kiri	$p > 0$ terbuka ke atas $p < 0$ terbuka ke bawah

2. Dengan puncak (a,b)

	Parabola Horizontal (terbuka ke kiri /kanan)	Parabola Vertikal (terbuka ke atas /bawah)
		
	$(y - b)^2 = 4p(x - a)$	$(x - a)^2 = 4p(y - b)$
Puncak	$V(a,b)$	$V(a,b)$
Fokus	$F(a + p, b)$	$F(a, b + p)$
Sumbu simetri	$y = b$ sejajar sumbu x	$x = a$ sejajar sumbu y
Direktris	$x = a - p$	$y = b - p$
Latus rektum	$4 p $	$4 p $
	$p > 0$ terbuka ke kanan $p < 0$ terbuka ke kiri	$p > 0$ terbuka ke atas $p < 0$ terbuka ke bawah



Persamaan garis singgung parabola:

1. Diketahui titik singgungnya, yaitu $A(x_1, y_1)$

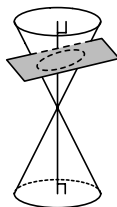
Persamaan Parabola	Persamaan Garis Singgung
$y^2 = 4px$	$y_1 \cdot y = 2px + 2px_1$
$(y - b)^2 = 4p(x - a)$	$(y_1 - b)(y - b) = 2px + 2px_1 - 4ap$
$x^2 = 4py$	$x_1 \cdot x = 2py + 2py_1$
$(x - a)^2 = 4p(y - b)$	$(x_1 - a)(x - a) = 2py + 2py_1 - 4bp$

2. Diketahui garis singgungnya (m)

Persamaan Parabola	Persamaan Garis Singgung
$y^2 = 4px$	$y = mx + \frac{p}{m}$
$(y - b)^2 = 4p(x - a)$	$(y - b) = m(x - a) + \frac{p}{m}$
$x^2 = 4py$	$y = mx - m^2p$
$(x - a)^2 = 4p(y - b)$	$(y - b) = m(x - a) - m^2p$

I. Elips

Untuk memperoleh irisan kerucut berbentuk elips, bidang datar harus mengiris miring sisi tegak lengkung kerucut dengan sudut kemiringan antara $0^\circ - 45^\circ$ terhadap sumbu simetri kerucut, seperti tampak pada gambar di samping.



Persamaan ellips:

1. Dengan pusat $O(0,0)$

Ellips Horizontal ($a > b > 0$)	Ellips Vertikal ($b > a > 0$)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
Titik potong sumbu x: $\pm a$ Titik potong sumbu y: $\pm b$ Fokus: $F_1(-c, 0)$ dan $F_2(c, 0)$ Hubungan: $c^2 = a^2 - b^2$ Keeksentrikan: $e = \frac{c}{a}, 0 < e < 1$ Direktris: $x = \pm \frac{a^2}{c}$ Sumbu utama (mayor): $y = 0$ Panjang sumbu mayor: $2a$ Panjang sumbu minor: $2b$	Titik potong sumbu x: $\pm b$ Titik potong sumbu y: $\pm a$ Fokus: $F_1(0, c)$ dan $F_2(0, -c)$ Hubungan: $c^2 = a^2 - b^2$ Keeksentrikan: $e = \frac{c}{a}, 0 < e < 1$ Direktris: $x = \pm \frac{a^2}{c}$ Sumbu utama (mayor): $x = 0$ Panjang sumbu mayor: $2a$ Panjang sumbu minor: $2b$



2. Dengan pusat $P(p,q)$

Ellips Horizontal $(a > b > 0)$	Ellips Vertikal $(b > a > 0)$
$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ dengan $a^2 > b^2$	$\frac{(y-q)^2}{a^2} + \frac{(x-p)^2}{b^2} = 1$ dengan $a^2 > b^2$
Fokus: $F(p \pm c, 0)$ Hubungan: $c^2 = a^2 - b^2$ Keeksentrikan: $e = \frac{c}{a}, 0 < e < 1$ Direktris: $x = p \pm \frac{a^2}{c}$ Sumbu utama (mayor): $y = q$ Panjang sumbu mayor: $2a$ Panjang sumbu minor: $2b$	Fokus: $F(0, q \pm c)$ Hubungan: $c^2 = a^2 - b^2$ Keeksentrikan: $e = \frac{c}{a}, 0 < e < 1$ Direktris: $y = q \pm \frac{a^2}{c}$ Sumbu utama (mayor): $x = p$ Panjang sumbu mayor: $2a$ Panjang sumbu minor: $2b$

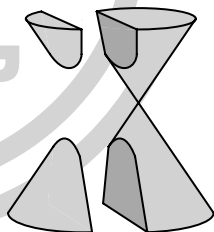


Persamaan garis singgung elips:

Persamaan Elips	Persamaan garis singgung
Elips dengan Pusat $O(0,0)$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	melalui titik $A(x_1, y_1)$: $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ dengan gradien m : $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$
Elips dengan Pusat $P(p, q)$ $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$	melalui titik $A(x_1, y_1)$: $\frac{(x_1-p)(x-p)}{a^2} + \frac{(y_1-q)(y-q)}{b^2} = 1$ dengan gradien m : $(y-q) = m(x-p) \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$

J. Hiperbola

Untuk memperoleh irisan kerucut berbentuk hiperbola, bidang datar harus mengiris mulai dari alas kerucut atas sampai ke alas kerucut bawah dengan bidang datar yang tidak melalui pusat kerucut ganda, seperti yang diperlihatkan pada gambar berikut.



Persamaan hiperbola:

1. Dengan pusat $O(0,0)$

	Hiperbola Horizontal	Hiperbola Vertikal
Persamaan	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p>dengan $a^2 > b^2$ Koefisien bagian x^2 positif</p>	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ <p>dengan $a^2 > b^2$ Koefisien bagian y^2 positif</p>
Titik potong sumbu x	$V_1(-a, 0)$ dan $V_2(a, 0)$	tidak ada
Titik potong sumbu y	tidak ada	$V_1(0, -a)$ dan $V_2(0, a)$
Fokus	$F_1(-c, 0)$ dan $F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c)$ dan $F_2(0, c)$
Hubungan	$c^2 = a^2 + b^2; c > a$	$c^2 = a^2 + b^2; c > a$
Panjang sumbu mayor	$2a$	$2a$
Panjang sumbu minor	$2b$	$2b$



2. Dengan pusat P(p,q)

	Hiperbola Horizontal	Hiperbola Vertikal
Persamaan	$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ dengan $a^2 > b^2$ Koefisien x^2 positif	$\frac{(y-q)^2}{a^2} - \frac{(x-p)^2}{b^2} = 1$ dengan $a^2 > b^2$ Koefisien y^2 positif
Fokus	$(p \pm c, q)$	$(p, q \pm c)$
Hubungan	$c^2 = a^2 + b^2; c > a$	$c^2 = a^2 + b^2; c > a$

Asimtot hiperbola:

Asimtot hiperbola adalah suatu garis lurus yang tidak pernah dipotong oleh hiperbola, melainkan hanya didekati ketika nilai x terus membesar untuk hiperbola horizontal atau nilai y terus membesar untuk hiperbola vertikal.

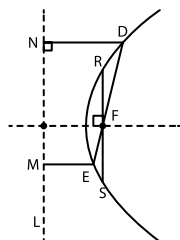
Persamaan asimtot hiperbola yaitu:

	Horizontal	Vertikal
Pusat O(0,0)	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$
Pusat P(p,q)	$y - q = \pm \frac{b}{a}(x - p)$	$y - q = \pm \frac{a}{b}(x - p)$

Eksentrisitas dan latus rectum hiperbola:

Pada gambar di samping, D pada hiperbola, F adalah fokus, dan N adalah titik pada direktris, maka rasio atau nilainya tetap, dan disebut dengan eksentrisitas.

Nilai eksentrisitas: $e = \frac{c}{a} > 1$



Latus rectum adalah segmen garis yang ujung-ujungnya terletak pada cabang hiperbola, melalui fokus F dan tegak lurus terhadap sumbu mayor.

Panjang latus rectum: $RS = \frac{2b^2}{a}$

Persamaan garis singgung parabola:

Hiperbola	Persamaan garis singgung
Hiperbola dengan Pusat O(0,0)	<p>melalui titik $A(x_1, y_1)$:</p> $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \text{ atau } \frac{y_1 y}{a^2} - \frac{x_1 x}{b^2} = 1$ <p>dengan gradien m:</p> $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2} \text{ atau } y = mx \pm \sqrt{b^2 m^2 - a^2}$
Hiperbola dengan Pusat P(p,q)	<p>melalui titik $A(x_1, y_1)$:</p> $\frac{(x_1 - p)(x - p)}{a^2} - \frac{(y_1 - q)(y - q)}{b^2} = 1$ <p>dengan gradien m:</p> $y - q = m(x - p) \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$ <p>atau $y - q = m(x - p) \pm \sqrt{b^2 m^2 - a^2}$</p>



LATIHAN SOAL

1. SOAL UTBK 2019

Persamaan lingkaran yang pusatnya terletak pada garis $2x + 3y - 5 = 0$ menyinggung sumbu X negatif dan sumbu Y positif adalah

- A. $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 25 = 0$
- B. $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$
- C. $x^2 + y^2 - 10x + 10y - 15 = 0$
- D. $x^2 + y^2 + 5x + 10y + 15 = 0$
- E. $x^2 + y^2 + 5x - 10y + 15 = 0$

2. SOAL UTBK 2019

Jika lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ menyinggung garis

$ax + by = 2b$, maka $\frac{a^2}{a^2 + b^2} = \dots$

- A. $1/4$
- B. $1/2$
- C. $3/4$
- D. 1
- E. 2

3. SOAL UTBK 2019

Sebuah lingkaran memiliki pusat (a,b) dengan jari-jari 12 dan menyinggung garis $3x + 4y = 5$. Nilai $3a + 4b$ yang mungkin adalah

- A. -65 dan 75
- B. -60 dan 70
- C. -55 dan 65
- D. -50 dan 60
- E. -45 dan 55

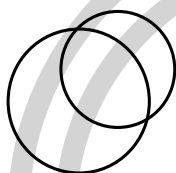


4. SOAL SBMPTN 2018

Diketahui dua lingkaran $x^2 + y^2 = 2$ dan $x^2 + y^2 = 4$. Garis ℓ_1 menyinggung lingkaran pertama di titik $(1, -1)$. Garis ℓ_2 menyinggung lingkaran kedua dan tegak lurus dengan garis ℓ_1 . Titik potong garis ℓ_1 dan ℓ_2 adalah

- A. $(1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$ D. $(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 2)$
B. $(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$ E. $(1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} + 2)$
C. $(1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} + 1)$

5. SOAL SBMPTN 2017



Diketahui suatu lingkaran kecil dengan radius $3\sqrt{2}$ melalui pusat suatu lingkaran besar yang mempunyai radius 6.

Ruas garis yang menghubungkan dua titik potong lingkaran merupakan diameter dari lingkaran kecil, seperti pada gambar. Luas daerah irisan kedua lingkaran adalah

- A. $18\pi + 18$ D. $14\pi - 15$
B. $18\pi - 18$ E. $10\pi + 10$
C. $14\pi + 14$

6. SOAL SBMPTN 2015

Misalkan titik A dan B pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 2y + k = 0$, sehingga garis singgung lingkaran di titik A dan B berpotongan di $C(8, 1)$. Jika luas segi empat yang melalui A, B, C, dan pusat lingkaran adalah 12, maka $k = \dots$

- A. -1 C. 1 E. 3
B. 0 D. 2



7. SOAL SIMAK UI 2019

Diketahui persamaan lingkaran C_1 dan C_2 berturut-turut adalah $x^2 + y^2 = 25$ dan $(x - a)^2 + y^2 = r^2$. Lingkaran C_1 dan C_2 bersinggungan di titik $(5,0)$. Jika garis l adalah garis singgung lingkaran C_1 di titik $(3,-4)$ yang merupakan garis singgung juga untuk lingkaran C_2 di titik (m,n) , nilai $m + n = \dots$

- A. 5 C. 7 E. 9
B. 6 D. 8

8. SOAL SIMAK UI 2018

Diketahui $sx - y = 0$ adalah garis singgung sebuah lingkaran yang titik pusatnya di kuadran ketiga dan berjarak 1 satuan ke sumbu x . Jika lingkaran tersebut menyinggung sumbu x dan titik pusatnya dilalui garis $x = -2$, nilai $3s$ adalah

- A. $\frac{1}{6}$ C. 3 E. 6
B. $\frac{4}{3}$ D. 4

9. SOAL UM UGM 2019

Diberikan lingkaran pada bidang koordinat dengan titik pusat (a,b) dan memotong sumbu- x di titik $(3,0)$ dan $(9,0)$. Jika garis yang melalui titik $(0,3)$ menyinggung lingkaran di titik $(3,0)$, maka nilai dari $a^2 - b^2$ adalah

- A. 9 C. 27 E. 45
B. 18 D. 36



10 SOAL UM UGM 2018

Diberikan garis $y = \frac{x}{3}$ dan $y = 3x$. Persamaan lingkaran yang menyinggung dua garis tersebut, berpusat di $(-a, -a)$, $a > 0$ dan berjari-jari $\frac{6}{\sqrt{10}}$ adalah

A. $x^2 + y^2 + 6x + 6y + \frac{72}{5} = 0$

B. $x^2 + y^2 + 6x + 6y + \frac{82}{5} = 0$

C. $x^2 + y^2 + 8x + 8y + \frac{72}{5} = 0$

D. $x^2 + y^2 + 9x + 9y + \frac{62}{5} = 0$

E. $x^2 + y^2 + 9x + 9y + \frac{82}{5} = 0$

11. SOAL UTBK 2019

Jika garis $y = mx$ tidak berpotongan dengan hiperbola $-3x^2 + 4y^2 = 12$, maka nilai m adalah

A. $|m| < \frac{2}{\sqrt{3}}$

C. $|m| < \frac{3}{\sqrt{2}}$

E. $|m| < \sqrt{3}$

B. $|m| < \sqrt{\frac{2}{3}}$

D. $|m| < \frac{\sqrt{3}}{2}$

12. SOAL STANDAR UTBK 2019

Salah satu persamaan garis singgung pada elips $16x^2 + 9y^2 + 64x - 54y + 1 = 0$ yang sejajar garis $x - y + 4 = 0$ adalah

A. $y = x + 10$

D. $y = x - 2$

B. $y = -x - 2$

E. $y = x - 10$

C. $y = -x$



13 SOAL SBMPTN 2017

Diketahui $f(x) = \frac{10}{x^2 - ax + b}$, $a \neq 0$ memiliki asimtot

tegak di $x = ab$ dan $x = -\frac{2a}{b}$. Maka nilai b adalah

- A. 2 atau -1
- B. -2 atau 1
- C. 2 atau 1
- D. 3 atau 1
- E. -3 atau 1

14 SOAL SBMPTN 2017

Lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ menyinggung hiperbola

$\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$. Jika asimtot hiperbola tersebut

mempunyai gradien 2, maka nilai $b^2 - a^2 = \dots$

- A. 3
- B. 6
- C. 9
- D. 12
- E. 27

15 SOAL STANDAR UTBK 2019

Titik $K\left(k, \frac{11}{5}\right)$ terletak pada elips dengan persamaan

$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$, untuk $k > 2$.

Persamaan garis singgung yang melalui K adalah

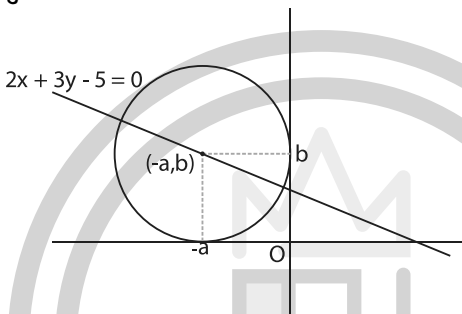
- A. $2x - 5y + 35 = 0$
- B. $2x - 5y - 35 = 0$
- C. $3x - 5y - 35 = 0$
- D. $3x + 5y - 35 = 0$
- E. $3x + 5y + 35 = 0$



PEMBAHASAN

1. PEMBAHASAN CERDIK:

Misalkan pusat lingkaran adalah $(-a,b)$, maka dapat digambarkan berikut ini.



Jari-jari $= r = b = a$

$(-a, b)$ melalui $2x + 3y - 5 = 0$

$$\Rightarrow -2a + 3b = 5$$

$$\Rightarrow -2a + 3a = 5 \Rightarrow a = 5 \text{ dan } b = 5$$

Maka, pusat lingkaran $(-5, 5)$ dan $r = 5$

Persamaan lingkarannya:

$$(x+5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 25$$

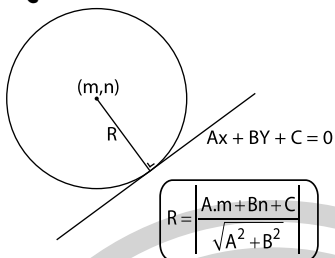
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10x - 10y + 25 = 0$$

Jawaban: A



2. PEMBAHASAN CERDIK:

Ingat!



Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ menyinggung garis
 $ax + by - 2b = 0$

Berlaku:

$$1 = \left| \frac{-2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4b^2 \Rightarrow a^2 = 3b^2$$

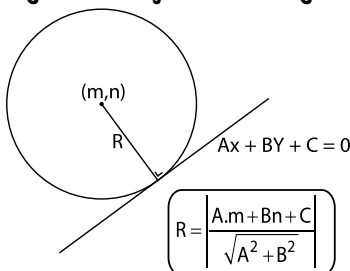
Maka,

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{3b^2}{3b^2 + b^2} = \frac{3b^2}{4b^2} = \frac{3}{4}$$

Jawaban: C

3. PEMBAHASAN CERDIK:

Ingat! Rumus jarak titik ke garis.



Dari soal bisa kita peroleh:

$$12 = \left| \frac{3a+4b-5}{\sqrt{3^2+4^2}} \right| = \left| \frac{3a+4b-5}{5} \right|$$

$$\Rightarrow 3a+4b-5 = 12 \times (\pm 5)$$

$$\Rightarrow 3a+4b = 12 \times (\pm 5) + 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a+4b = 12 \times (5) + 5 = 65 \\ 3a+4b = 12 \times (-5) + 5 = -55 \end{cases}$$

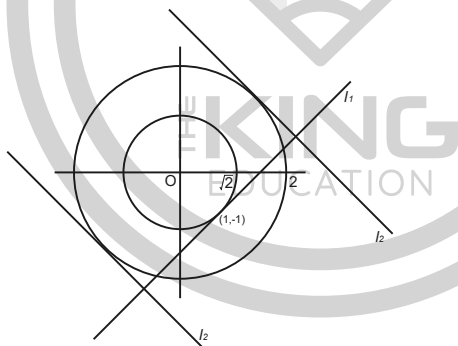
Jawaban: C

4. PEMBAHASAN CERDIK:

Diketahui dua lingkaran yaitu:

$$x^2 + y^2 = 2 \text{ dan } x^2 + y^2 = 4$$

Garis ℓ_1 menyinggung lingkaran pertama dititik $(1, -1)$, maka:



Persamaan Garis ℓ_1 :

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 2 \Rightarrow x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2 \dots (1)$$

\Rightarrow Gradien ℓ_1 : $m = 1$,

maka gradien ℓ_2 : $m = -1$ (tegak lurus)

$$\text{Persaman Garis } \ell_2 : y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$y = -x \pm 2\sqrt{2} \dots (2)$$

Eliminasi (1) dan (2)

$$y = x - 2$$

$$y = -x + 2\sqrt{2} +$$

$$2y = 2\sqrt{2} - 2 \Rightarrow y = \sqrt{2} - 1$$

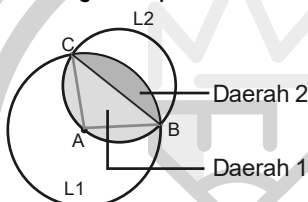
$$\Rightarrow x = \sqrt{2} + 1$$

Titik potong garis ℓ_1 dan ℓ_2 adalah $(1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$

Jawaban: A

5. PEMBAHASAN CERDIK:

Sketsa lingkaran pada soal:



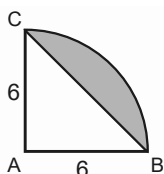
Ruas garis yang menghubungkan dua titik potong lingkaran merupakan diameter dari lingkaran kecil. Artinya:

$$\begin{aligned} (\text{Luas}_{\text{Daerah 1}}) &= \frac{1}{2} (\text{Lingkaran kecil}) \\ &= \frac{1}{2} \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot (3\sqrt{2})^2 = 9\pi \end{aligned}$$

Selanjutnya perhatikan hubungan pada segitiga ABC, dengan $AB = AC = 6$, dan $CB = 6\sqrt{2}$

Artinya, ABC siku-siku di A.

Luas daerah 2 adalah:



(Luas Daerah 2)

= Luas yang diarsir

$$= \frac{1}{4}(\text{Luas lingkaran besar}) - \text{Luas } \triangle ABC$$

$$= \frac{1}{4}(\pi \cdot 6^2) - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6$$

$$= 9\pi - 18$$

$$\text{Luas keseluruhan} = 9\pi - 18 + 9\pi$$

$$= 18\pi + 18$$

Jawaban: A

6. PEMBAHASAN CERDIK:

Ingat!!

Bentuk umum lingkaran:

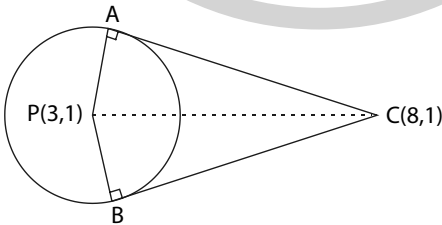
$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \text{ pusat} = \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$$

$$\text{dan jari-jari} = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

Persamaan lingkaran: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + k = 0$

Sehingga, didapat koordinat titik pusat:

$$P = \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = \left(-\frac{1}{2}(-6), -\frac{1}{2}(-2)\right) = (3, 1)$$



$$\text{Panjang PC} = \sqrt{(8-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{5^2} = 5$$



$$\begin{aligned}\text{Jari-jari } (r) &= \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} \\ &= \sqrt{\frac{(-6)^2}{4} + \frac{(-2)^2}{4} - k} \\ &= \sqrt{10 - k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Panjang AC} &= \sqrt{(\overline{PC})^2 - (\overline{AP})^2} \\ &= \sqrt{5^2 - (10 - k)} \\ &= \sqrt{15 + k}\end{aligned}$$

$$\text{Luas}_{ABCD} = 2 \left(\frac{1}{2} \overline{AP} \cdot \overline{AC} \right)$$

$$\Leftrightarrow 12 = \sqrt{10 - k} \cdot \sqrt{15 + k}$$

$$\Leftrightarrow 144 = 150 - 5k - k^2$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 5k - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k + 6)(k - 1) = 0 \Leftrightarrow k = -6 \text{ atau } k = 1$$

Jawaban: C

7. PEMBAHASAN CERDIK:

Lingkaran C_1 dengan pusat $(0,0)$ dan jari-jari 5.

Lingkaran C_2 dengan pusat $(a,0)$ dan jari-jari r .

Persamaan garis singgung yang melalui titik (m,n) pada lingkaran C_1 adalah:

$$x_1x + y_1y = R^2 \Leftrightarrow 3x - 4y = 25$$

Oleh karena persamaan garis singgung juga melalui titik (m,n) yang terletak di lingkaran C_2 maka diperoleh

$$3m - 4n = 25$$

$$\text{Dipilih } m = 7 \text{ dan } n = -1$$

Dengan demikian:

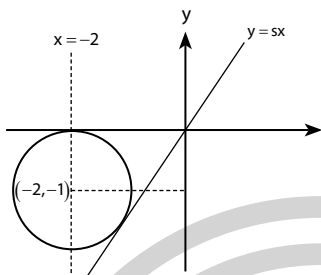
$$m + n = 7 + (-1) = 6$$

Jawaban: B



8. PEMBAHASAN CERDIK:

Perhatikan sketsa lingkaran berikut.



Pada gambar tersebut dapat diketahui lingkaran berpusat di titik $(-2, -1)$ dan berjari-jari 1, maka persamaan lingkaran adalah:

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1^2, y = sx$$

$$(x+2)^2 + (sx+1)^2 = 1$$

$$x^2 + 4x + 4 + s^2x^2 + 2sx + 1 - 1 = 0$$

$$(s^2 + 1)x^2 + (2s + 4)x + 4 = 0$$

Garis menyinggung lingkaran, maka $D = 0$, yaitu:

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(2s+4)^2 - 4(s^2+1)4 = 0$$

$$4s^2 + 16s + 16 - 16s^2 - 16 = 0$$

$$-12s^2 + 16s = 0$$

$$-4s(3s - 4) = 0$$

$$-4s = 0 \text{ atau } 3s = 4$$

Jawaban: D



9. PEMBAHASAN CERDIK:

Persamaan lingkaran dengan pusat (a,b) yaitu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Diketahui memotong sumbu-x di titik $(3,0)$ dan $(9,0)$ maka diperoleh:

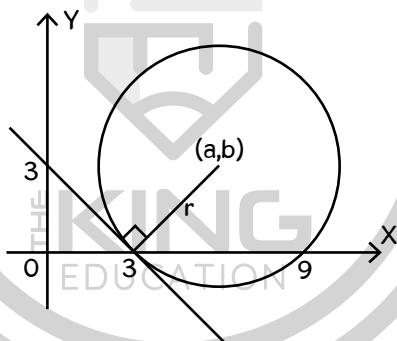
$$(3-a)^2 + (0-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 + b^2 = r^2$$

$$(9-a)^2 + (0-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow a^2 - 18a + 81 + b^2 = r^2$$

$$12a - 72 = 0$$

$$a = 6$$

Diketahui garis yang melalui titik $(0,3)$ menyinggung lingkaran di titik $(3,0)$, maka garis yang melalui titik $(0,3)$ dan $(3,0)$ tegak lurus dengan garis yang melalui $(3,0)$ dan (a,b) .



$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\frac{0-3}{3-0} \cdot \frac{b-0}{a-3} = -1$$

$$-1 \cdot \frac{b}{6-3} = -1$$

$$b = 3.$$

$$\text{Maka: } a^2 - b^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$

Jawaban: C



10 PEMBAHASAN CERDIK:

Perhatikan persamaan $y = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{1}{3}x - y = 0$

Jarak titik $(-a, -a)$ terhadap garis $\frac{1}{3}x - y = 0$ adalah

$\frac{6}{\sqrt{10}}$ (sepanjang jari-jari lingkaran), maka:

$$\begin{array}{l} \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{-\frac{1}{3}a + a}{\sqrt{\frac{1}{9} + 1}} \\ \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{\frac{2}{3}a}{\sqrt{\frac{10}{9}}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{\sqrt{10}}{3}} \\ \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{2a}{\sqrt{10}} \\ 2a = 6 \\ a = 3 \end{array}$$

Diperoleh koordinat pusat lingkaran yaitu $(-3, -3)$

Jadi, persamaan lingkaran yang dimaksud yaitu:

$$\begin{aligned} (x+3)^2 + (y+3)^2 &= \left(\frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2 \\ x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 &= \frac{36}{10} \\ x^2 + y^2 + 6x + 6y + 18 - \frac{36}{10} &= 0 \\ x^2 + y^2 + 6x + 6y + \frac{144}{10} &= 0 \\ x^2 + y^2 + 6x + 6y + \frac{72}{5} &= 0 \end{aligned}$$

Jawaban: A



11. PEMBAHASAN CERDIK:

Garis $y = mx$ tidak berpotongan dengan hiperbola

$-3x^2 + 4y^2 = 12$, maka:

$$-3x^2 + 4(mx)^2 = 12$$

$$-3x^2 + 4m^2x^2 - 12 = 0$$

$$(-3 + 4m^2)x^2 - 12 = 0$$

Syarat tidak berpotongan adalah $D < 0$, maka diperoleh:

$$0 - 4(-3 + 4m^2)(-12) < 0$$

$$(48)(-3 + 4m^2) < 0$$

$$-3 + 4m^2 < 0$$

$$4m^2 < 3$$

$$m^2 < \frac{3}{4}$$

$$|m| < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Jawaban: D

12. PEMBAHASAN CERDIK:

Ingat!!

Persamaan garis singgung elips

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \text{ dengan gradien } m \text{ adalah:}$$

$$(y-q) = m(x-p) \pm \sqrt{b^2 m^2 + a^2}$$



Persamaan elips: $16x^2 + 9y^2 + 64x - 54y + 1 = 0$

dapat diubah menjadi:

$$16x^2 + 9y^2 + 64x - 54y + 1 = 0$$

$$16x^2 + 64x + 9y^2 - 54y + 1 = 0$$

$$16(x^2 + 4x + 4) - 64 + 9(y^2 - 6y + 9) - 81 + 1 = 0$$

$$16(x+2)^2 + 9(y-3)^2 = 144$$

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

Gradien garis $x - y + 4 = 0$ adalah $m = 1$

Jadi, persamaan garis singgung pada elips

$16x^2 + 9y^2 + 64x - 54y + 1 = 0$ yang sejajar

garis $x - y + 4 = 0$ adalah:

$$(y - q) = m(x - p) \pm \sqrt{b^2 m^2 + a^2}$$

$$(y - 3) = 1(x + 2) \pm \sqrt{(16)(1) + (9)}$$

$$(y - 3) = (x + 2) \pm 5$$

$$g_1: y - 3 = x + 7 \Rightarrow y = x + 10$$

$$g_2: y - 3 = x - 3 \Rightarrow y = x$$

Jawaban: A

13 PEMBAHASAN CERDIK:

Ingat!!

Asimtot tegak adalah sebuah garis dengan persamaan $x = h$ di mana garis tersebut tidak akan pernah dipotong ataupun disinggung oleh kurva. Hal ini berlaku pada fungsi rasional dan berbentuk pecahan yang digambarkan pada sebuah bidang Cartesius. Cara mencari asimtot tegaknya kita tinggal membentuk sebuah pembuat nol dari penyebut.



Diketahui $f(x) = \frac{10}{x^2 - ax + b}$, $a \neq 0$ memiliki asimtot

tegak di $x = ab$ dan $x = -\frac{2a}{b}$

Artinya, $x = ab$ dan $x = -\frac{2a}{b}$ adalah akar-akar persamaan $x^2 - ax + b = 0$

Selanjutnya gunakan rumus jumlahan akar-akar:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, maka diperoleh

$$(ab) + \left(-\frac{2a}{b}\right) = -\frac{(-a)}{1} \quad (\text{kedua ruas dibagi } a)$$

$$\Rightarrow b - \frac{2}{b} = 1 \quad (\text{kedua ruas dikali } b)$$

$$\Rightarrow b^2 - b - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (b-2)(b+1) = 0$$

$$\Rightarrow b = 2 \text{ atau } b = -1$$

Jawaban: A

14 PEMBAHASAN CERDIK:

Ingat!!

Hiperbola horizontal

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \text{titik pusatnya} = (p, q)$$

Persamaan asimtotnya adalah:

$$y - q = \pm \frac{b}{a}(x - p), \text{ gradiennya} = \pm \frac{b}{a} \dots (1)$$



Dari soal diketahui persamann hiperbola:

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1.$$

Artinya, pusatnya adalah $(2,-1)$ dan gradien asimtot hiperbola = 2.

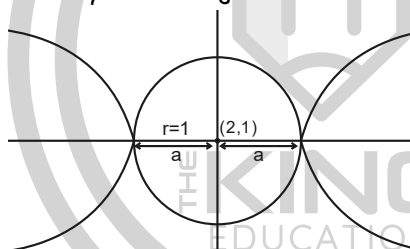
Artinya, dari (1) bisa kita simpulkan bahwa $\pm \frac{b}{a} = 2$

Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$

menyinggung hiperbola $\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1.$

Lingkaran tersebut memiliki pusat $(2,-1)$ dan jari-jarinya 1. Terlihat bahwa lingkaran dan hiperbola pusatnya sama, yaitu $(2,-1)$.

Grafiknya bisa kita gambarkan berikut.



Terlihat bahwa $a = r = 1$.

Dengan demikian karena $\pm \frac{b}{a} = 2$, maka $b = \pm 2$

Jadi, $b^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$

Jawaban: A

15 PEMBAHASAN CERDIK:

Ingat!!

Persamaan garis singgung elips yang melalui sebuah

$$\text{titik: } \frac{(x_1 - p)(x - p)}{a^2} + \frac{(y_1 - q)(y - q)}{b^2} = 1$$

$$\text{Diketahui elips: } \frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

Karena $a > b > 0$, maka elips tersebut adalah elips horizontal, dengan $a^2 = 25$ dan $b^2 = 16$.

- Menentukan nilai k

Diketahui titik $K\left(k, \frac{11}{5}\right)$ melalui elips, sehingga titik

K memenuhi persamaan elips:

$$\frac{(k-5)^2}{25} + \frac{\left(\frac{11}{5} + 1\right)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(k-5)^2}{25} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(k-5)^2}{25} + \frac{16^2}{25 \cdot 16} = 1$$

$$\frac{(k-5)^2}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

$$(k-5)^2 + 16 = 25$$

$$(k-5)^2 = 9$$

$$k-5 = 3$$

$$k = 8$$



- Menentukan persamaan garis singgung elips
Persamaan garis singgung elips yang melalui titik

$K\left(8, \frac{11}{5}\right)$ dengan $a^2 = 25$ dan $b^2 = 16$ adalah:

$$\frac{(x_1 - p)(x - p)}{a^2} + \frac{(y_1 - q)(y - q)}{b^2} = 1$$

$$\frac{(8 - 5)(x - 5)}{25} + \frac{\left(\frac{11}{5} + 1\right)(y + 1)}{16} = 1$$

$$\frac{3(x - 5)}{25} + \frac{\frac{16}{5}(y + 1)}{16} = 1$$

$$\frac{3(x - 5)}{25} + \frac{(y + 1)}{5} = 1$$

$$3(x - 5) + 5(y + 1) = 25$$

$$3x - 15 + 5y + 5 = 25$$

$$3x + 5y - 10 = 25$$

$$3x + 5y - 35 = 0$$

Jawaban: D



1. Group Belajar UTBK GRATIS)

Via Telegram, Quis Setiap Hari, Drilling Soal Ribuan, Full Pembahasan Gratis. Link Group: t.me/theking_utbk

2. Instagram Soal dan Info Tryout UTBK

[@theking.education](https://www.instagram.com/theking.education)

[@video.trik_tpa_tps](https://www.instagram.com/video.trik_tpa_tps)

[@pakarjurusan.ptn](https://www.instagram.com/pakarjurusan.ptn)

3. DOWNLOAD BANK SOAL

www.edupower.id

www.theking-education.id

4. TOKO ONLINE ORIGINAL

SHOPEE, nama toko: [forumedukasiofficial](https://www.shopee.co.id/forumedukasiofficial)

5. Katalog Buku

www.bukuedukasi.com

WA Layanan Pembaca:
0878-397-50005



@theking.education