Matriks

A. PENDAHULUAN

- **Matriks** adalah kelompok bilangan yang disusun dalam suatu jajaran berbentuk persegi atau persegi panjang.

  Contoh:

  $$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

- **Komponen-komponen matriks:**

1) **Elemen**

   Elemen adalah bilangan-bilangan yang menyusun suatu matriks, ditulis dalam tanda kurung.

2) **Baris dan kolom**

   Baris adalah susunan elemen yang ditulis mendatar/horizontal.

   Kolom adalah susunan elemen yang ditulis menurun/vertikal.

   Contoh:

   $$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad\quad k_1 & k_2 \end{array} & \end{array}$$

3) **Ordo**

   Ordo menyatakan banyak baris (m) diikuti banyak kolom (n).

   Ordo matriks = m x n

4) **Diagonal**

   Diagonal matriks terdapat pada matriks persegi, yaitu diagonal utama dan diagonal samping.

   $$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 9 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{d. samping} \\ \\ \text{d.utama} \end{array}$$

B. JENIS-JENIS MATRIKS

- **Matriks** berdasarkan ukuran dibagi menjadi:

1) **Matriks baris**

   $A = (a \quad b \quad c)$

2) **Matriks kolom/lajur**

   $$A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

3) **Matriks persegi**

   $$A_{2x2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A_{3x3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

   a. **Matriks segitiga atas**

   $$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

   b. **Matriks segitiga bawah**

   $$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

   c. **Matriks diagonal**

   $$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

   d. **Matriks identitas**

   $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C. KESAMAAN DAN TRANSPOS MATRIKS

- **Kesamaan dua buah matriks** adalah dimana kedua matriks berordo sama dan elemen seletaknya bernilai sama.

  jika $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, maka
  a = e
  b = f
  c = g
  d = h

- **Kesamaan dua buah matriks** dapat digunakan untuk menentukan elemen yang tidak diketahui.

  Contoh:

  $$A = \begin{pmatrix} 4a-1 & 2b+6 \\ 3 & a+3c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

  Jika A = B, tentukan nilai a, b, dan c!

  Jawab:

4a – 1 = 7	2b + 6 = 5	a + 3c = 8
4a = 8	2b = -1	3c = 8 – 2
<u>a = 2</u>	<u>b = $-^1/_2$</u>	<u>c = 2</u>

- **Transpos matriks (A' atau A^t)** adalah putaran matriks dari ordo m x n menjadi n x m.

- **Transpos matriks** mengubah kolom matriks asli menjadi barisnya.

  $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

  Contoh:

  $$H = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$, tentukan transposnya!

  Jawab:

  $$H' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 7 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matriks** yang matriks asalnya sama dengan transposnya disebut matriks simetris/setangkup.

D. OPERASI HITUNG MATRIKS

- **Penjumlahan dan pengurangan** matriks dapat dilakukan pada matriks berordo sama.

- **Penjumlahan dan pengurangan** matriks dilakukan dengan menjumlah atau mengurang elemen-elemen seletak matriks yang dioperasikan.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\pm e & b\pm f \\ c\pm g & d\pm h \end{pmatrix}$$

- **Sifat penjumlahan dan pengurangan** matriks adalah komutatif.

$$A + B = B + A$$

Contoh:

Jika $\begin{pmatrix} 2y-3 & 8 \\ -1 & 4z+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 1 \\ -2 & y+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x \\ a & 0 \end{pmatrix}$

Tentukan nilai a, x, y dan z!

Jawab:

$a = -1 + (-2)$

$\underline{a = -3}$

$2y - 3 + z = -1$

$x = 8 + 1$

$\underline{x = 9}$

$4z + 1 + y + 5 = 0$

$4z + y + 6 = 0$

$$\begin{array}{rl} 2y + z - 3 & = -1 \\ 8z + 12 + 2y & = 0 \quad + \\ \hline -7z - 15 & = -1 \\ \underline{z} & \underline{= -2} \end{array}$$

$4(-2) + y + 6 = 0$

$y = -6 + 8$

$\underline{y = 2}$

- **Perkalian matriks** dengan suatu bilangan dioperasikan dengan:

$$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.a & k.b \\ k.c & k.d \end{pmatrix}$$

- **Perkalian** matriks dapat dilakukan pada matriks berordo m x n dengan ordo n x p (jumlah kolom matriks 1 = jumlah baris matriks 2).
- **Perkalian** matriks berordo m x n dengan ordo n x p menghasilkan matriks berordo m x p.

$$\underset{m \times n}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \underset{n \times p}{\begin{pmatrix} e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix}} = \underset{m \times p}{\begin{pmatrix} ae+bh & af+bi & ag+bj \\ ce+dh & cf+di & cg+dj \end{pmatrix}}$$

- **Sifat-sifat perkalian** matriks:

Identitas	**A.I = I.A = A**	
Tidak komutatif	**A.B ≠ B.A**	
Distributif	**A.(B ± C) = A.B ± A.C**	
	(B ± C).A = B.A ± C.A	
Pangkat	**A^2 = A.A**	**$A^3 = A^2.A = I$**
Transpos	**$(A.B)^t = B^t.A^t$**	

Contoh:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, maka $A^2.B$ adalah?

Jawab:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-8 & 2+6 \\ -4-12 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -16 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2.B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -16 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7+24 & 7+0 & 16+(-16) \\ -16-48 & 16+0 & -32+32 \end{pmatrix}$$

$$A^2.B = \underline{\begin{pmatrix} 17 & 7 & 0 \\ -64 & 16 & 0 \end{pmatrix}}$$

E. MINOR, KOFAKTOR DAN ADJOINT MATRIKS

- **Minor** adalah nilai dari elemen lain yang tidak sebaris dan tidak sekolom dengan suatu elemen.
- **Minor** elemen pada matriks persegi:

Ordo 2x2

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ minor a = d minor c = b; minor b = c minor d = a

Ordo 3x3

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

minor a = $\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$ minor b = $\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$

minor c = $\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$ minor d = $\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$

minor e = $\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}$ minor f = $\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

minor g = $\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$ minor h = $\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$

minor i = $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$

- **Kofaktor** elemen ditentukan dari minor.
  1) Jika nomor baris + nomor kolom ganjil, maka kofaktor bernilai negatif.
  2) Jika nomor baris + nomor kolom genap, maka kofaktor bernilai positif.
- **Kofaktor** elemen pada matriks persegi:

Ordo 2x2

$$C = \begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{pmatrix}$$

Ordo 3x3

$$C = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

F. DETERMINAN MATRIKS

- **Determinan matriks (|A|)** adalah hasil penjumlahan elemen matriks yang dikalikan dengan kofaktornya.
- **Determinan matriks** hanya berlaku pada matriks persegi, dan ditulis dalam tanda mutlak.

Determinan matriks menurut aturan Sarrus:

Ordo 2x2

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$|A| = a.d - b.c$$

Ordo 3x3

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

Berdasarkan determinannya, matriks persegi dibagi menjadi:

1) **Matriks singular**, determinannya bernilai nol, dan tidak mempunyai invers.
2) **Matriks non-singular**, determinannya bernilai bukan nol, dan mempunyai invers.

Sifat-sifat determinan matriks:

1) Determinan A sama dengan determinan A'.

$$|A| = |A'|$$

2) Jika salah satu baris atau kolom matriks dikali dengan k, maka determinannya menjadi:

$$\text{det A baru} = k.|A|$$

3) Jika seluruh elemen matriks dikali dengan k, maka determinannya menjadi:

$$\text{det } A_{n \times n} \text{ baru} = k^n.|A|$$

4) Jika dua buah baris atau dua buah kolom saling bertukar posisi dalam matriks, maka determinannya menjadi:

$$\text{det A baru} = -|A|$$

Operasi hitung antar baris atau kolom pada matriks tidak mengubah nilai determinan.

Apabila baris ke i ditambah dengan k kali baris ke j atau kolom ke m ditambah dengan k kali kolom n, nilai determinan tidak berubah.

Contoh:

$$\text{det A} = \begin{vmatrix} 20 & 25 & 30 \\ 23 & 31 & 35 \\ 24 & 36 & 41 \end{vmatrix}$$ dapat disederhanakan untuk mempermudah perhitungan dengan:

$$\text{det A} = 5.\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 23 & 31 & 35 \\ 24 & 36 & 41 \end{vmatrix} \quad (k = 5 \text{ dari baris 1})$$

$$\text{det A} = 5.\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad (b_2 - 6.b_1 \text{ dan } b_3 - 7.b_1)$$

agar makin mempermudah hitungan, buat matriks mengandung banyak bilangan 0.

$$\text{det A} = 5.\begin{vmatrix} 4 & 5 & 11 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (k_3 + k_2)$$

maka, determinan A adalah,

$$\text{det A} = 5.\begin{vmatrix} 4 & 5 & 11 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 5 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 5.(-11-11)$$

$$\text{det A} = -110$$

Determinan matriks berordo 3x3 atau lebih dapat dihitung dengan mudah menggunakan ekspansi matriks.

Determinan matriks menurut ekspansi matriks:

1) Pilih satu baris atau satu kolom matriks.
2) Jumlahkan seluruh elemen dalam baris atau kolom tersebut yang dikalikan kofaktornya masing-masing.

Contoh:

$$|Z| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$ mempunyai determinan 4. Buktikan dengan cara ekspansi bahwa determinannya sama!

Jawab:

Pertama, sederhanakan matriks dengan operasi hitung antar baris dan kolom.

$$|Z| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad (b_1 - 2b_2 \text{ dan } b_2 - b_3)$$

Lalu, pilih baris 1 agar mempermudah hitungan. Jumlahkan seluruh elemen dalam baris tersebut yang dikalikan kofaktornya masing-masing.

$$|Z| = +1.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|Z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2.1 - (-1).2 = \underline{4}$$

G. ADJOINT DAN INVERS MATRIKS

Adjoint (Adj A) adalah transpos matriks dari kofaktor suatu matriks persegi.

Adjoint matriks pada matriks persegi:

Ordo 2x2

$$\textbf{Adj A} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ordo 3x3

$$\textbf{Adj A} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t$$

Transpos dari kofaktor matriks berordo 3x3 sebaiknya dilakukan setelah kofaktor tiap elemen dihitung agar tidak ada kekeliruan.

- **Invers matriks (A^{-1})** adalah kebalikan dari suatu matriks persegi.
- **Invers matriks** pada matriks persegi:

Rumus umum

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\text{Adj } A$$

Ordo 2x2

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ordo 3x3

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t$$

- **Sifat-sifat invers matriks:**

Involusi	$(A^{-1})^{-1} = A$
Identitas	$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$
Transpos	$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
Determinan	$\lvert A^{-1}\rvert = \frac{1}{\lvert A\rvert}$
Invers perkalian	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
	$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
Lain-lain	Jika **AB = I**, maka: $A = B^{-1}$ $B = A^{-1}$
	Jika **AB = C**, maka: $A = C.B^{-1}$ $B = A^{-1}.B$
	Jika **ABC = D**, maka: $A = D(BC)^{-1}$ $B = A^{-1}DC^{-1}$ $C = (AB)^{-1}D$

Contoh:

Tentukan invers dari $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$!

Jawab:

$|A| = 5.2 – 2.4 = 2$ Adj $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = {}^1/_2 \times \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

H. SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL DAN TIGA VARIABEL

- **Sistem persamaan linear** dapat diselesaikan menggunakan matriks.
- **Bentuk sistem persamaan linear** dalam matriks (ordo matriks koefisien variabel mengikuti jumlah variabel):

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

- **Penyelesaian sistem persamaan linear** menggunakan matriks dapat dihitung dengan determinan.
- **Penyelesaian SPLDV** dapat ditentukan:

Determinan matriks

$$x = \frac{Dx}{D} \qquad y = \frac{Dy}{D} \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$Dx = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad Dy = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

D = determinan matriks koefisien variabel
Dx = D dengan mengganti koefisien x menjadi konstantanya
Dy = D dengan mengganti koefisien y menjadi konstantanya

Invers matriks

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1.b_2-b_1.a_2}.\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $2x – 3y = 1$ dan $x + 2y = 4$.

Jawab:

$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 – (-3).1 = 7$

$Dx = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 – (-3).4 = 14$

$Dy = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2.4 – 1.1 = 7$

$x = \frac{14}{7} = \underline{2}$

$y = \frac{7}{7} = \underline{1}$