Vektor

A. PENDAHULUAN

- **Vektor** adalah besaran yang mempunyai nilai dan arah yang digambarkan dalam anak panah (garis).
- **Vektor** diberi nama dengan huruf kecil bergaris atas atau menyebut titik pangkal dan ujungnya.
  1) **Anak panah** menunjuk arah yang ditunjuk vektor.
  2) **Besar kecilnya vektor** dilambangkan dengan besar kecilnya anak panah.
- **Bentuk penulisan vektor:**
  1) **Vektor posisi**, ditulis dalam notasi vektor terhadap titik acuan.

     Contoh: vektor posisi titik A dari O adalah $\overline{OA}$.
  2) **Vektor basis**, ditulis dalam vektor satuan.

     Vektor satuan sumbu x adalah i, sumbu y adalah j, dan sumbu z adalah k.

     $$\bar{a} = x.i + y.j + z.k$$

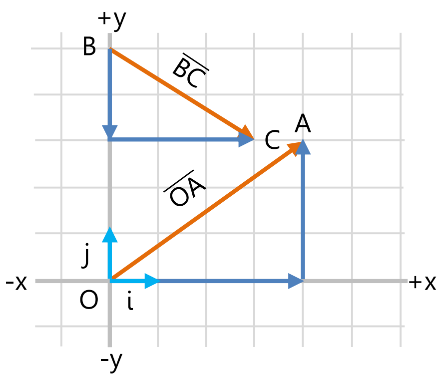
     Vektor satuan ($\bar{e}$) yang searah dengan vektor $\bar{a}$:

     $$\bar{e} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$$
  3) **Vektor kolom dan baris**, ditulis dalam matriks kolom atau baris.

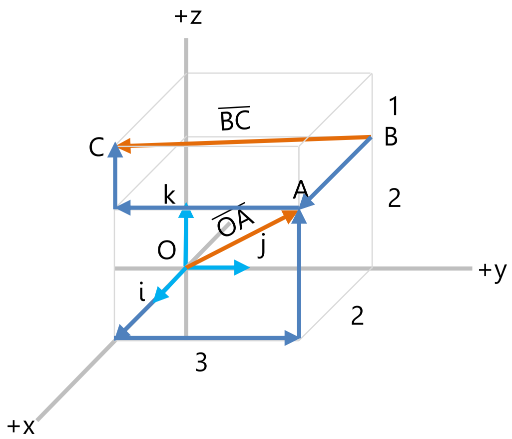
     $$\bar{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \bar{a} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$
- **Vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$** dikatakan **searah** apabila sejajar dan menunjuk arah yang sama ($\bar{a} = \bar{b}$), dan dikatakan **berlawanan** apabila sejajar namun menunjuk arah yang berlawanan ($\bar{a} = -\bar{b}$).
- **Dua vektor** dikatakan **sama besar** apabila searah, sama besar (panjang) dan sama vektor basisnya.

B. VEKTOR PADA BIDANG DAN RUANG

- **Vektor** pada bidang dinotasikan oleh sumbu x dan sumbu y dengan vektor satuan i dan j.



- **Vektor** pada ruang dinotasikan oleh sumbu x, y dan x dengan vektor satuan i, j dan k.



- **Vektor basis** dapat ditentukan dengan menghitung vektor satuan mulai dari ujung ke pangkal vektor.
- **Vektor basis AB** dengan koordinat titik A (x_1, y_1, z_1) dan B (x_2, y_2, z_2) diketahui dapat dihitung:

Dalam bidang

$$\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Dalam ruang

$$\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

- **Panjang vektor** dapat dihitung:

Dalam bidang

$$|\overline{AB}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Dalam ruang

$$|\overline{AB}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Contoh:

Nyatakan vektor OA dan BC (pada gambar 1) dalam vektor basis, dan tentukan panjangnya!

Jawab:

$\overline{OA}$ = $\underline{4i + 3j}$

$|\overline{OA}| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = \underline{5}$

$\overline{BC}$ = $\underline{3i - 2j}$

$|\overline{OA}| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

Contoh:

Nyatakan vektor OA dan BC (pada gambar 2) dalam vektor basis, dan tentukan panjangnya!

$\overline{OA}$ = $\underline{2i + 3j + 2k}$

$|\overline{OA}| = \sqrt{2^2+3^2+2^2} = \underline{\sqrt{17}}$

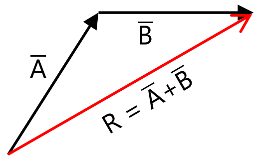
$\overline{BC}$ = $\underline{2i - 3j + k}$

$|\overline{OA}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \underline{\sqrt{14}}$

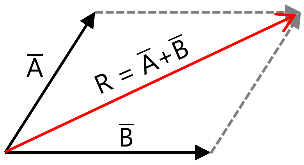
C. PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN VEKTOR

- **Penjumlahan dan pengurangan** vektor digunakan untuk mencari resultan vektor.
- **Resultan vektor** dapat dicari dengan menghubungkan pangkal vektor awal dengan ujung vektor akhir.

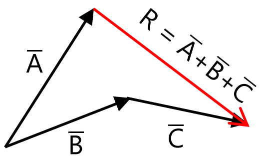
1) **Cara segitiga** (dua vektor)



2) **Cara jajar genjang** (dua vektor)



3) **Cara poligon** (lebih dari dua vektor)



- **Sudut antara dua vektor** adalah sudut yang terbentuk ketika pangkal dua vektor dihubungkan.
- **Penjumlahan dan pengurangan** vektor dengan panjang vektor dan sudut vektor:

$$|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos\theta}$$

$$|\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos\theta}$$

- **Penjumlahan dan pengurangan** vektor dengan vektor basis dengan $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ dan $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ diketahui dapat dihitung:

$$\bar{a} + \bar{b} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \qquad \bar{a} - \bar{b} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}$$

- **Sifat penjumlahan dan pengurangan** vektor adalah komutatif.

A + B = B + A

D. PERKALIAN SKALAR DAN VEKTOR

- **Perkalian matriks** dengan suatu bilangan dioperasikan dengan:

$$k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.x \\ k.y \\ k.z \end{pmatrix} \qquad k.\bar{a} = k.|\bar{a}|$$

- **Perkalian skalar/titik (•)** menghasilkan besaran skalar, memiliki definisi:

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = |a||b|\cos\theta$$

- **Perkalian skalar** dengan vektor basis dengan $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ dan $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ diketahui dapat dihitung:

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = \begin{pmatrix} x_1 . x_2 \\ y_1 . y_2 \\ z_1 . z_2 \end{pmatrix}$$

- **Sifat-sifat perkalian skalar:**

Identitas	$a \bullet a = \|a\|^2$
Vektor satuan	$i \bullet i = j \bullet j = k \bullet k = 1$ $i \bullet j = j \bullet k = k \bullet i = 0$
Komutatif	$a \bullet b = b \bullet a$
Distributif	$a \bullet (b \pm c) = (a \bullet b) \pm (a \bullet c)$
Asosiatif	$(m.a) \bullet (n.b) = (m.n)(a \bullet b)$
Tegak lurus	$a \bullet b = 0$, maka $a \perp b$

- **Perkalian vektor/silang (×)** menghasilkan besaran vektor yang tegak lurus terhadap dua vektor yang dikali silang, memiliki definisi:

$$\bar{a} \times \bar{b} = |a||b|\sin\theta\ \bar{e}$$

- **Perkalian vektor** dengan vektor basis dengan $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ dan $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ diketahui dapat dihitung:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = (y_1.z_2 - y_2.z_1)\ i + (z_1.x_2 - z_2.x_1)\ j + (y_1.x_2 - y_2.x_1)\ k$$

- **Sifat-sifat perkalian vektor:**

Identitas	$a \times a = 0$
Vektor satuan	$i \times i = j \times j = k \times k = 0$ $i \times j = k \quad j \times k = i \quad k \times i = j$ $j \times i = -k \quad k \times j = -i \quad i \times k = -j$
Anti-Komutatif	$a \times b \neq b \times a \qquad a \times b = -(b \times a)$
Distributif	$a \times (b \pm c) = (a \times b) \pm (a \times c)$ $(b \pm c) \times a = (b \times a) \pm (c \times a)$

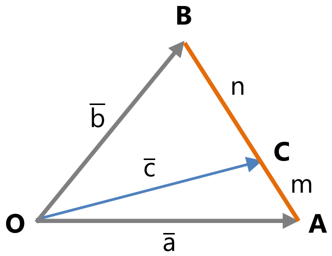
- **Sudut dua vektor** dapat dicari menggunakan perkalian skalar.

$$\cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

E. PERBANDINGAN VEKTOR

- **Perbandingan vektor** pada ruas garis dapat memenuhi dua ketentuan:

1) Titik C membagi ruas garis AB **pada ruas garis**



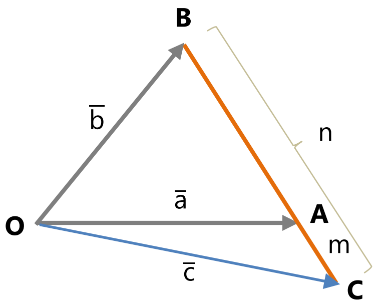
Perbandingan ruas garis

$$\overline{AC} : \overline{CB} = m : n$$ (sama tanda)

Vektor pembagi ruas garis

$$\bar{c} = \frac{m.\bar{b}+n.\bar{a}}{m+n}$$

2) Titik C membagi ruas garis AB **di luar ruas garis**



Perbandingan ruas garis

$$\overline{AC} : \overline{CB} = m : -n$$

Vektor pembagi ruas garis

$$\bar{c} = \frac{m.\bar{b}-n.\bar{a}}{m-n}$$

- **Ketentuan perbandingan vektor** menurut letaknya:

1) **Kolinear**, yaitu ketiga titik satu terletak pada satu garis, berlaku:

$\overline{AB} = k.\overline{AC}$	$\overline{AC} = m.\overline{AB}$	$\overline{AC} = n.\overline{CB}$

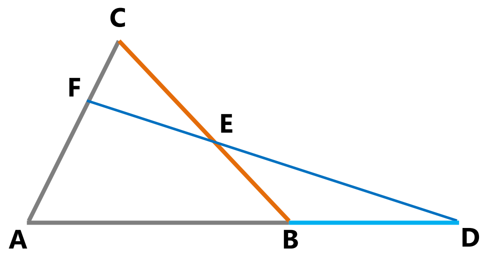
dst.

2) **Koplanar**, yaitu ketiga titik terletak pada satu bidang, berlaku:

$\bar{a} = m.\bar{b}+n.\bar{c}$	$\bar{b} = p.\bar{a}+q.\bar{c}$	$\bar{c} = r.\bar{a}+s.\bar{b}$

dst.

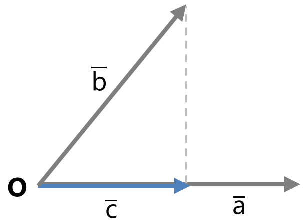
- **Dalil Menelaus** pada perbandingan ruas garis:



$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \qquad \frac{AC}{CF} \cdot \frac{FE}{ED} \cdot \frac{DB}{BA} = 1$$

F. PROYEKSI VEKTOR

- **Proyeksi vektor** adalah penjatuhan ujung suatu vektor secara tegak lurus terhadap suatu acuan.



- **Proyeksi vektor** pada suatu vektor/ruas garis lain disebut **proyeksi ortogonal.**
- **Proyeksi ortogonal** terdiri dari:

1) **Proyeksi vektor ortogonal**, adalah vektor baru hasil penjatuhan vektor secara tegak lurus.

$$\bar{c} = \left[\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2}\right].\bar{b}$$

2) **Proyeksi skalar ortogonal**, adalah panjang vektor baru.

$$|\bar{c}| = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$$