
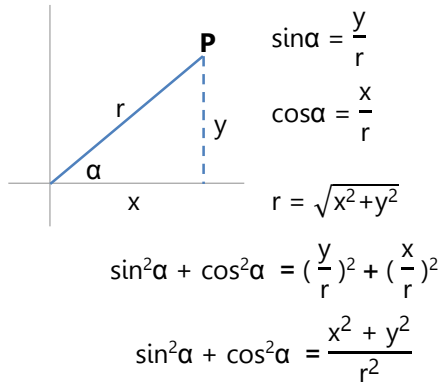


# Identitas dan Persamaan Trigonometri

## A. IDENTITAS TRIGONOMETRI

 **Identitas trigonometri** digunakan untuk membuktikan kebenaran suatu persamaan trigonometri.

 **Identitas nilai perbandingan trigonometri** didapat dari:



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

 **Identitas nilai perbandingan trigonometri** lain didapat dari:


$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

## B. PERSAMAAN TRIGONOMETRI

 **Hubungan** antara dua persamaan sinus mempunyai penyelesaian.

$$\sin x = \sin a$$

apabila,


$$x = a + k.360$$

(kuadran I)

$$x = (180 - a) + k.360$$

(kuadran II)

dengan k merupakan bilangan bulat.

 **Hubungan** antara dua persamaan cosinus mempunyai penyelesaian.

$$\cos x = \cos a$$

apabila,


$$x = a + k.360$$

(kuadran I)

$$x = -a + k.360$$

(kuadran IV)

dengan k merupakan bilangan bulat.

 **Hubungan** antara dua persamaan tangen mempunyai penyelesaian.

$$\tan x = \tan a$$

apabila,

$$x = a + k.180$$

dengan k merupakan bilangan bulat.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari:

a.  $\sin(2x) + \cos(x-15) = 0$ , dengan  $90^\circ < x < 360^\circ$

b.  $\cos(3x) + \cos(x) = 0$ , dengan  $-\pi < x < \pi$

Jawab:

a.  $\sin(2x) = -\cos(x - 15)$

$$\sin(2x) = \sin(270 + (x - 15)) \quad (\text{kuadran IV})$$

$$\sin(2x) = \sin(255 + x)$$

Himpunan penyelesaian di kuadran I:

$$2x = 255 + x + k.360$$

$$x = 255 + k.360$$

(masukkan nilai k)

$$x = \{-105, 255, 615\}$$

$$k = -1 \quad k = 0 \quad k = 1$$

Himpunan penyelesaian di kuadran II:

$$2x = 180 - (255 + x) + k.360$$

$$2x = -75 - x + k.360$$

$$3x = -75 + k.360$$

$$x = -25 + k.120$$

(masukkan nilai k)

$$x = \{-25, 95, 215, 335, 455\}$$

$$k = 0 \quad k = 1 \quad k = 2 \quad k = 3 \quad k = 4$$

Himpunan penyelesaian akhir:

$$x = \{95, 215, 255, 335\}$$

b.  $\sin(2x) = -\cos(x - 15)$

$$\sin(2x) = \sin(270 + (x - 15)) \quad (\text{kuadran IV})$$

$$\sin(2x) = \sin(255 + x)$$

Himpunan penyelesaian di kuadran I:

$$2x = 255 + x + k.360$$

$$x = 255 + k.360$$

(masukkan nilai k)

$$x = \{-105, 255, 615\}$$

Himpunan penyelesaian di kuadran II:

$$2x = 180 - (255 + x) + k.360$$

$$2x = -75 - x + k.360$$

$$3x = -75 + k.360$$

$$x = -25 + k.120$$

(masukkan nilai k)

$$x = \{-25, 95, 215, 335, 455\}$$

$$k = 0 \quad k = 1 \quad k = 2 \quad k = 3 \quad k = 4$$

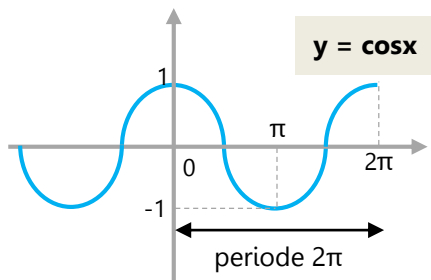
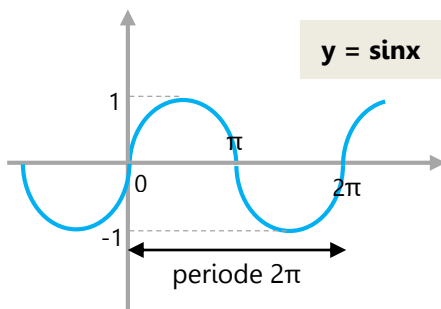
Himpunan penyelesaian akhir:

$$x = \{95, 215, 255, 335\}$$

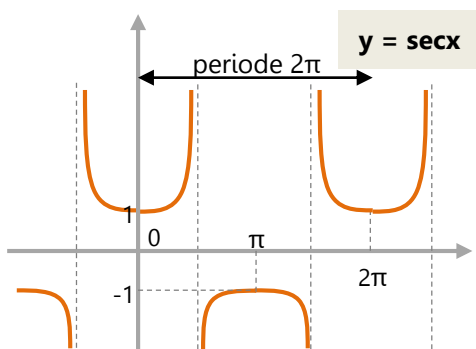
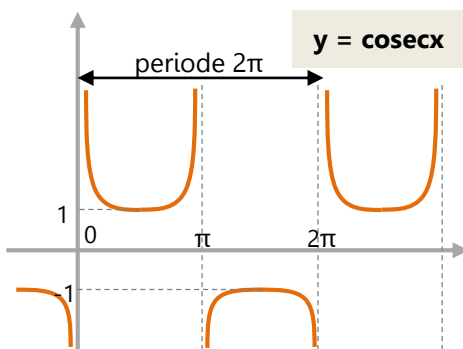
### C. PERSAMAAN FUNGSI TRIGONOMETRI

 **Grafik fungsi trigonometri** antara lain:

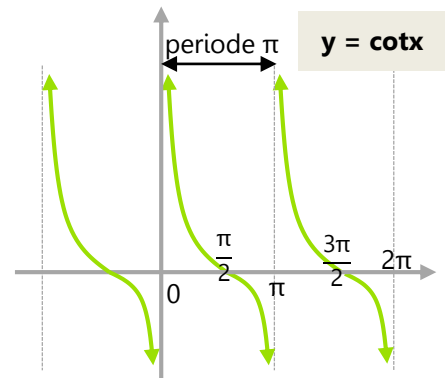
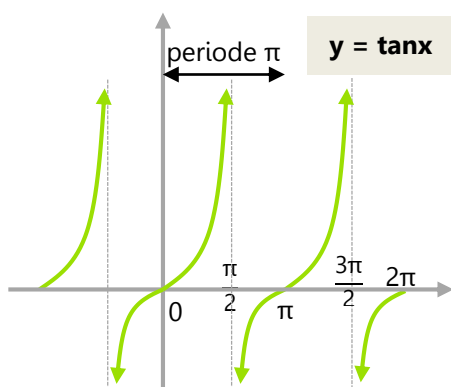
#### 1) Fungsi sinus dan cosinus



#### 2) Fungsi cosecan dan secan




#### 3) Fungsi tangen dan cotangen



 **Bentuk umum** persamaan fungsi sinus dan cosinus:

$$y = \pm a \cdot \sin(bx \pm c) \pm d \quad y = \pm a \cdot \cos(bx \pm c) \pm d$$

 **Makna** persamaan fungsi sinus dan cosinus:

##### 1) Amplitudo fungsi

$$\pm a$$

**Jika  $a > 0$  (positif)**, maka grafik bergerak naik ke amplitudo tertinggi lebih dulu.

**Jika  $a < 0$  (negatif)**, maka grafik bergerak turun ke amplitudo terendah lebih dulu.

##### 2) Periode fungsi

$$\frac{360^\circ}{b}$$

**Satu periode** dibagi menjadi 4 daerah yang sama besar.

##### 3) Pergeseran horizontal grafik

$$\frac{c}{b}$$

**Jika  $c/b > 0$  (positif)**, maka grafik bergeser ke kiri sebesar  $c/b$ .

**Jika  $c/b < 0$  (negatif)**, maka grafik bergeser ke kanan sebesar  $c/b$ .

##### 4) Pergeseran vertikal grafik

$$d$$

**Jika  $d > 0$  (positif)**, maka grafik naik ke atas sebesar  $d$ .

**Jika  $d < 0$  (negatif)**, maka grafik turun ke bawah sebesar  $d$ .


##### 5) Nilai maksimum dan minimum grafik

Nilai maksimum:

Nilai minimum:

$$|a| + d$$

$$-|a| + d$$

 **Hubungan** persamaan fungsi sinus dan cosinus:

- 1) Sudut persamaan sinus ke cosinus ditambah  $270^\circ$  sesuai konsep sudut berelasi.
- 2) Sudut persamaan cosinus ke sinus ditambah  $90^\circ$  sesuai konsep sudut berelasi.

- 3) Sudut yang terlalu kecil atau terlalu besar dapat disederhanakan menggunakan konsep:

$$\alpha = \alpha \pm k.360^\circ$$

dengan k merupakan bilangan bulat.

Contoh:

Ubah ke persamaan berikut ke sinus atau cosinus!

- a.  $y = 2. \sin(3x + 100)$   
 $y = 2. \cos(270 + (3x + 100))$   
 $y = 2. \cos(370 + 3x)$        $y = 2. \cos(3x + 10)$
- b.  $y = -3. \cos(x + 4)$   
 $y = -3. \sin(90 + (x + 4))$        $y = -3. \sin(x + 94)$

### Cara menggambar grafik sinus dan cosinus:

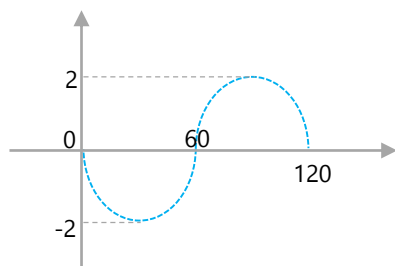
Contoh:

Buatlah gambar grafik satu periode dari persamaan fungsi  $y = -2. \sin(3x - 60) + 1$ !

#### Langkah 1:

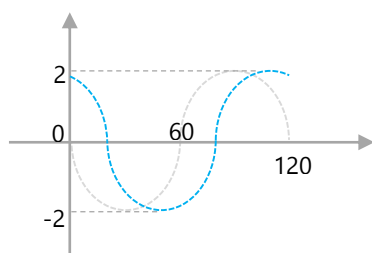
Buat grafik dasar sebelum pergeseran, yaitu persamaan menjadi  $y = -2. \sin(3x)$ , dengan:

- Amplitudo grafik adalah 2 dan grafik bergerak turun ke -2 lebih dulu.
- Periode grafik adalah  $\frac{360^\circ}{3}$  atau  $120^\circ$ .



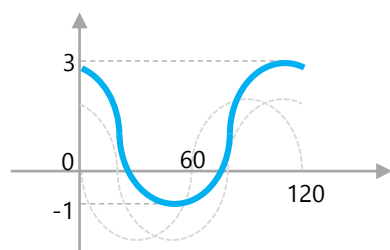
#### Langkah 2:


Buat grafik persamaan  $y = -2. \sin(3x - 60)$ , dengan pergeseran horizontal ke kiri sebesar  $20^\circ$ .



#### Langkah 3:

Buat grafik persamaan  $y = -2. \sin(3x - 60) + 1$ , dengan pergeseran vertikal ke atas sebesar 1.



-  **Grafik fungsi sinus dan cosinus** juga dapat diubah menjadi sebuah persamaan, dengan:

**Nilai a**

$$a = \frac{a_{\text{maks}} - a_{\text{min}}}{2}$$

**Nilai b**

$$b = \frac{360^\circ}{p}$$

**Nilai c**

Fungsi sinus

$$c = 90 - b. x_{\text{puncak}}$$

Fungsi cosinus

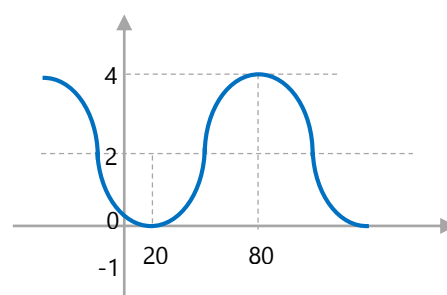
$$c = -b. x_{\text{puncak}}$$

**Nilai d**

$$d = \frac{a_{\text{maks}} + a_{\text{min}}}{2}$$

-  **Cara menentukan persamaan fungsi sinus dan cosinus dari grafik:**

Contoh:



Tentukan persamaan fungsi grafik di atas!

Jawab:

$$a = \frac{4-0}{2} = 2$$

Periode grafik di atas adalah 2 kali jarak antar puncak, yaitu  $120^\circ$ .

$$b = \frac{360^\circ}{120^\circ} = 3$$

$$c = 90 - 3.80 = 90 - 240 = -150$$

$$d = \frac{4+0}{2} = 2$$

Maka persamaan yang dapat dibentuk:

$$y = 2. \sin(3x - 150) + 2 \quad (\text{fungsi sinus})$$

$$y = 2. \cos(3x + 120) + 2 \quad (\text{fungsi cosinus})$$