常见的损失函数(loss function)总结

知 zhuanlan.zhihu.com/p/58883095

损失函数用来评价模型的**预测值**和**真实值**不一样的程度，损失函数越好，通常模型的性能越好。不同的模型用的损失函数一般也不一样。

损失函数分为**经验风险损失函数**和**结构风险损失函数**。经验风险损失函数指预测结果和实际结果的差别，结构风险损失函数是指经验风险损失函数加上正则项。

常见的损失函数以及其优缺点如下：

1. **0-1损失函数(zero-one loss)**

0-1损失是指预测值和目标值不相等为1， 否则为0:

$$L(Y,f(X))=\begin{cases}1, Y\neq f(X)\\0, Y=f(X)\end{cases}$$

特点：

(1)0-1损失函数直接对应分类判断错误的个数，但是它是一个非凸函数，不太适用.

(2)**感知机**就是用的这种损失函数。但是相等这个条件太过严格，因此可以放宽条件，即满足 时认为相等，

$$|Y-f(x)|<T$$

$$L(Y,f(X))=\begin{cases}1, |Y-f(X)|\geq T\\0, |Y=f(X)|<T\end{cases}$$

2. **绝对值损失函数**

绝对值损失函数是计算预测值与目标值的差的绝对值：

$$L(Y,f(x))=|Y-f(x)|\,\mathrm{r}$$

3. **log对数损失函数**

log对数损失函数的标准形式如下：

特点：

$$L(Y,P(Y|X))=-logP(Y|X)\,\mathrm{r}$$

(1) log对数损失函数能非常好的表征概率分布，
在很多场景尤其是多分类，如果需要知道结果属于每个类别的置信度，那它非常适合。

(2)健壮性不强，相比于hinge loss对噪声更敏感。

(3)**逻辑回归**的损失函数就是log对数损失函数。

4. 平方损失函数

平方损失函数标准形式如下：

$$L(Y|f(X))=\sum_N(Y-f(X))^2$$

特点：

(1)经常应用与回归问题

5. 指数损失函数（exponential loss）

指数损失函数的标准形式如下：

$$L(Y|f(X))=exp[-yf(x)]$$

特点：

(1)对离群点、噪声非常敏感。经常用在AdaBoost算法中。

6. Hinge 损失函数

Hinge损失函数标准形式如下：

$$L(y,f(x))=max(0,1-yf(x))$$ r

特点：

(1)hinge损失函数表示如果被分类正确，损失为0，否则损失就为 $1-yf(x)$ 。**SVM**就是使用这个损失函数。

(2)一般的 $f(x)$ 是预测值，在-1到1之间， y 是目标值(-1或1)。其含义是， $f(x)$ 的值在-1和+1之间就可以了，并不鼓励 $|f(x)|>1$ ，即并不鼓励分类器过度自信，让某个正确分类的样本距离分割线超过1并不会有任何奖励，从而**使分类器可以更专注于整体的误差。**

(3) 健壮性相对较高，对异常点、噪声不敏感，但它没太好的概率解释。

7. 感知损失(perceptron loss)函数

感知损失函数的标准形式如下：

特点：

$$L(y,f(x))=max(0,-f(x))$$ diag

(1)是Hinge损失函数的一个变种，Hinge loss对
判定边界附近的点(正确端)惩罚力度很高。而perceptron loss**只要样本的判定类别正确的话，它就满意，不管其判定边界的距离**。它比Hinge loss简单，因为不是max-margin boundary，所以模**型的泛化能力没 hinge loss**强。

8. 交叉熵损失函数 (Cross-entropy loss function)

交叉熵损失函数的标准形式如下**:**

$$C=-\frac{1}{n}\sum_{x}[y\ln a+(1-y)\ln(1-a)]$$

注意公式中 x 表示样本， y 表示实际的标签， a 表示预测的输出， n 表示样本总数量。

特点：

(1)本质上也是一种**对数似然函数**，可用于二分类和多分类任务中。

二分类问题中的loss函数（输入数据是softmax或者sigmoid函数的输出）：

$$loss=-\frac{1}{n}\sum_{x}[y\ln a+(1-y)\ln(1-a)]$$

多分类问题中的loss函数（输入数据是softmax或者sigmoid函数的输出）：

$$loss=-\frac{1}{n}\sum_{i}y_i lna_i$$

(2)当使用sigmoid作为激活函数的时候，常用**交叉熵损失函数**而不用**均方误差损失函数**，因为它可以**完美解决平方损失函数权重更新过慢**的问题，具有“误差大的时候，权重更新快；误差小的时候，权重更新慢”的良好性质。

最后奉献上交叉熵损失函数的实现代码：cross_entropy.

这里需要更正一点，**对数损失函数和交叉熵损失函数应该是等价的！！！**

个人理解对数损失函数和交叉熵损失函数是互通的，他们的桥梁就是最大似然估计，有的说法是最大似然损失函数。

对于**对数损失函数**，假设各个样本都是独立同分布的，有

$$L_{log}=-\log P(Y|X)=-\log\prod_i P(y_i|x_i)=-\sum_i \log P(y_i|x_i)$$

对于**交叉熵损失函数**，用CE_i表示第i个样本的交叉熵，

$$L_{CE}=\sum_i CE_i$$

$$CE_i=-\sum_j c_{ij}\cdot log(a_{ij})$$

其中，c_{ij}为第i个样本属于类j的真实概率，由于通常采用one-hot编码，c_{ij}中只有1个为1（和真实标签y_i对应，这里设$c_{ik}=1$），其余为0，而a_{ij}为第i个样本属于类j的预测概率，则

$$CE_i=-\sum_j c_{ij}\cdot log(a_{ij})=-log(a_{ik})$$

考虑到k其实和真实标签y_i对应，因此$a_{ik}=P(y_i|x_i)$，即模型计算出来分类到标签y_i上的概率大小，所以，

$$L_{CE}=\sum_i CE_i=\sum_i -log(a_{ik})=-\sum_i \log P(y_i|x_i)=L_{log}$$

综上，两者是等价的。

相关高频问题：

1.交叉熵函数与最大似然函数的联系和区别？

区别：**交叉熵函数**使用来描述模型预测值和真实值的差距大小，越大代表越不相近；**似然函数**的本质就是衡量在某个参数下，整体的估计和真实的情况一样的概率，越大代表越相近。

联系：**交叉熵函数**可以由最大似然函数在伯努利分布的条件下推导出来，或者说**最小化交叉熵函数**的本质就是**对数似然函数的最大化**。

怎么推导的呢？我们具体来看一下。

设一个随机变量 X 满足伯努利分布，

$$P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$$

则 X 的概率密度函数为：

$$P(X)=p^X(1-p)^{1-X}$$

因为我们只有一组采样数据 D ，我们可以统计得到 X 和 $1-X$ 的值，但是 p 的概率是未知的，接下来我们就用**极大似然估计**的方法来估计这个 p 值。

对于采样数据 D ，其**对数似然函数**为:

$$\begin{aligned} logP(D) &= log\prod_i^N P(D_i) \\ &= \sum_i logp(D_i) \\ &= \sum_i (D_i logp + (1-D_i)log(1-p)) \end{aligned}$$

可以看到上式和**交叉熵函数**的形式几乎相同，**极大似然估计**就是要求这个式子的最大值。而由于上面函数的值总是小于0，一般像神经网络等对于损失函数会用最小化的方法进行优化，所以一般会在前面加一个负号，得到**交叉熵函数**（或**交叉熵损失函数**）：

$$loss = -\sum_i (D_i logp + (1-D_i)log(1-p))\,\mathrm{r}$$

这个式子揭示了**交叉熵函数**与**极大似然估计**的联系，**最小化交叉熵函数**的本质就是**对数似然函数的最大化。**

现在我们可以用求导得到极大值点的方法来求其**极大似然估计**，首先将对数似然函数对 p 进行求导，并令导数为0，得到

$$\sum_i (D_i \frac{1}{p} + (1-D_i)\frac{1}{p-1}) = 0$$

消去分母，得：

$$\sum_i^N (p-D_i) = 0\,\mathrm{r}$$

所以:

$$p = \frac{1}{N}\sum_i D_i$$

这就是伯努利分布下**最大似然估计**求出的概率 p 。

2. 在用sigmoid作为激活函数的时候，为什么要用**交叉熵损失函数**，而不用**均方误差损失函数**？

其实这个问题求个导，分析一下两个误差函数的参数更新过程就会发现原因了。

对于**均方误差损失函数**，常常定义为：

$$C = \frac{1}{2n}\sum_x (a-y)^2$$

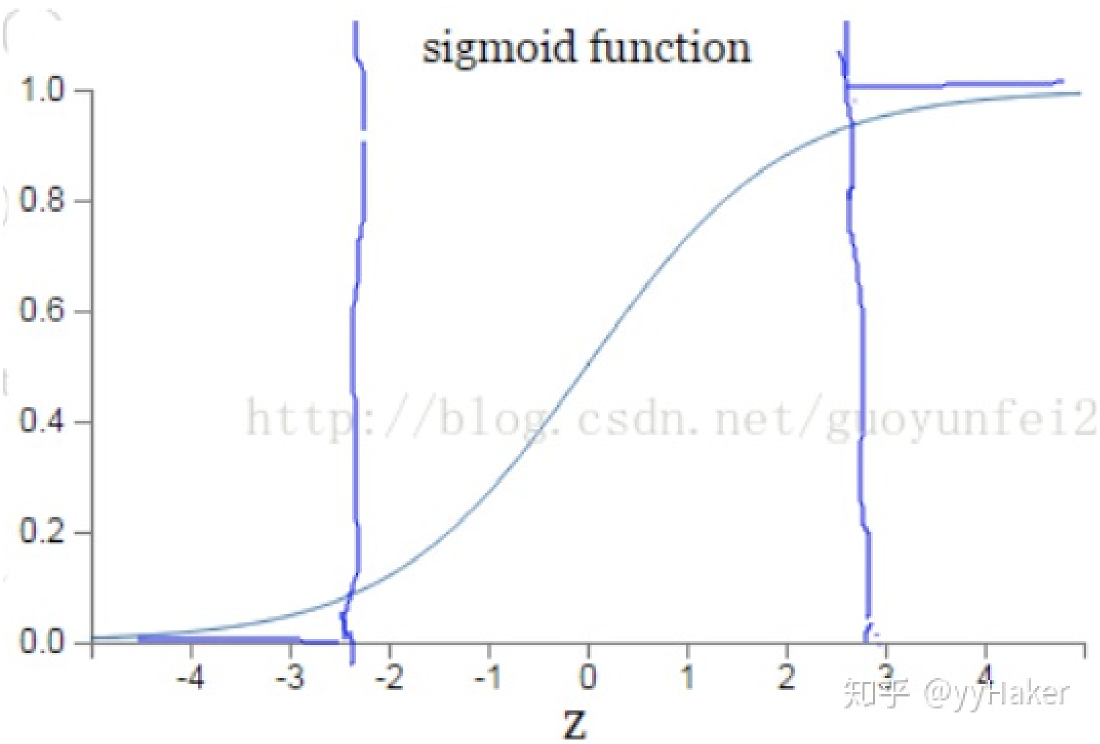
其中 y 是我们期望的输出， a 为神经元的实际输出（ ）。 $a = \sigma(z), z = wx + b$
在训练神经网络的时候我们使用梯度下降的方法来更新 w 和 b ，因此需要计算代价函数对 w 和 b 的导数：

$$\frac{\partial C}{\partial w} = (a-y)\sigma'(z)x$$
$$\frac{\partial C}{\partial b} = (a-y)\sigma'(z)$$

然后更新参数 w 和 b ：

$$w = w - \eta\frac{\partial C}{\partial w} = w - \eta(a-y)\sigma'(z)x$$
$$b = b - \eta\frac{\partial C}{\partial b} = b - \eta(a-y)\sigma'(z)$$

因为sigmoid的性质，导致 $\sigma'(x)$ 在 z 取大部分值时会很小（如下图标出来的两端，几乎接近于平坦），这样会使得很小，导致参数 w 和 b 更新非常慢。 $\eta(a-y)\sigma'(z)$



那么为什么**交叉熵损失函数**就会比较好了呢？同样的对于**交叉熵损失函数**，计算一下参数更新的梯度公式就会发现原因。**交叉熵损失函数**一般定义为：

$$C = -\frac{1}{n}\sum_x [y \ln a + (1-y)\ln(1-a)]$$

其中 y 是我们期望的输出， a 为神经元的实际输出（ ）。 $a = \sigma(z), z = wx + b$
同样可以看看它的导数：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial a} &= -\frac{1}{n}\sum_x [y\frac{1}{a} + (y-1)\frac{1}{1-a}] \\
&= -\frac{1}{n}\sum_x [\frac{1}{a(1-a)}y - \frac{1}{1-a}] \\
&= -\frac{1}{n}\sum_x [\frac{1}{\sigma(x)(1-\sigma(x))}y - \frac{1}{1-\sigma(x)}]
\end{aligned}$$

另外，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial z} &= \frac{\partial C}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z} \\
&= -\frac{1}{n}\sum_x[\frac{1}{\sigma(x)(1-\sigma(x))}y - \frac{1}{1-\sigma(x)}] \bullet \sigma'(x) \\
&= -\frac{1}{n}\sum_x[\frac{1}{\sigma(x)(1-\sigma(x))}y - \frac{1}{1-\sigma(x)}] \bullet \sigma(x)(1-\sigma(x)) \\
&= -\frac{1}{n}\sum_x(y-a)
\end{aligned}
$$

所以有：

$$
\frac{\partial C}{\partial w} = \frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w} = (a-y)x
$$

$$
\frac{\partial C}{\partial b} = \frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b} = (a-y)
$$

所以参数更新公式为：

$$
\begin{aligned}
w &= w - \eta\frac{\partial C}{\partial w} = w - \eta(a-y)x \\
b &= b - \eta\frac{\partial C}{\partial b} = b - \eta(a-y)
\end{aligned}
$$

可以看到参数更新公式中没有 $\sigma'(x)$ 这一项，权重的更新受 $(a-y)$ 影响，受到误差的影响，所以***当误差大的时候，权重更新快；当误差小的时候，权重更新慢***。这是一个很好的性质。

所以当使用sigmoid作为激活函数的时候，常用**交叉熵损失函数**而不用**均方误差损失函数**。