

4 ANÁLISE DE SINAIS DISCRETIZADOS

Esta análise trata de sinais contínuos, porém amostrados no tempo. Os métodos das transformadas de Fourier e Laplace são muito úteis para tratar funções temporais contínuas, mas não para tratar sinais amostrados usando processamento digital.

4.1 Amostragem de sinais

Para poder explorar a capacidade de processamento digital de sinais e utilizar as técnicas das transformadas de Fourier, por exemplo, é preciso encontrar uma representação funcional para uma amostra do sinal. Isto é resolvido pela função impulso ou delta de Dirac $\delta(t)$, definida por:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \infty \quad \text{para} \quad t = 0, \\ \delta(t) &= 0 \quad \text{para} \quad t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt &= 1 \quad \text{para} \quad t = 0 \\ &= 0 \quad \text{para} \quad t \neq 0 \end{aligned}$$

Vê-se que a integral do impulso é a função pulso unitário na origem do tempo. Atrasando o impulso para um instante t_a qualquer, resulta:

$$\begin{aligned} \delta(t - t_a) &= \infty \quad \text{para} \quad t = t_a, \\ \delta(t - t_a) &= 0 \quad \text{para} \quad t \neq t_a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_a) \cdot dt &= 1 \quad \text{para} \quad t = t_a \\ &= 0 \quad \text{para} \quad t \neq t_a \end{aligned}$$



Figura 4.1 Impulso aplicado na origem do tempo e deslocado para t_a .

Através da integral da função $\delta(t)$ pode-se amostrar uma função contínua $f(t)$ em um instante $t=t_a$ qualquer, uma vez que a integral define o valor da função apenas para o instante $t = t_a$, sendo zero para qualquer outro instante, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_a) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_a)$$

Pela definição da Transformada de Fourier tem-se para a função impulso na origem:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad \text{para} \quad t=0 \\ &= e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1, 0 \angle 0 \quad \text{para} \quad -\infty < \omega < \infty \end{aligned}$$

o que quer dizer que o impulso na origem contém todas as frequências com igual amplitude e com fase nula. Essa é a razão pela qual, idealmente, basta aplicar um impulso na entrada de um sistema para se obter a resposta em frequência (como saída).

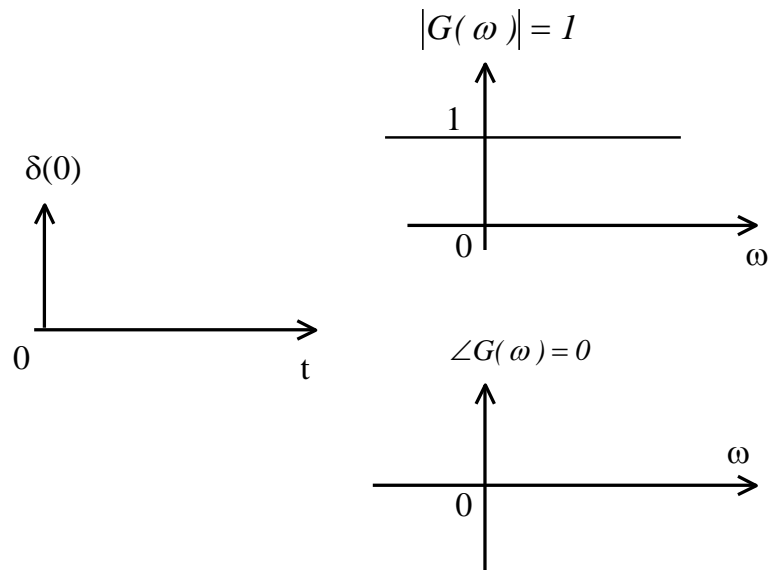


Figura 4.2 Transformada de Fourier do impulso na origem.

Se o impulso ocorre fora da origem, por exemplo, em $t = t_a$ teremos a TF:

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_a) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = e^{-j\omega t_a} = 1 \angle -\omega t_a.$$

Neste caso a fase não é mais zero, mas decresce proporcionalmente ao deslocamento t_a . A amplitude continua unitária para todo o espectro de frequências. Se $t_a \rightarrow 0$ resulta fase nula.

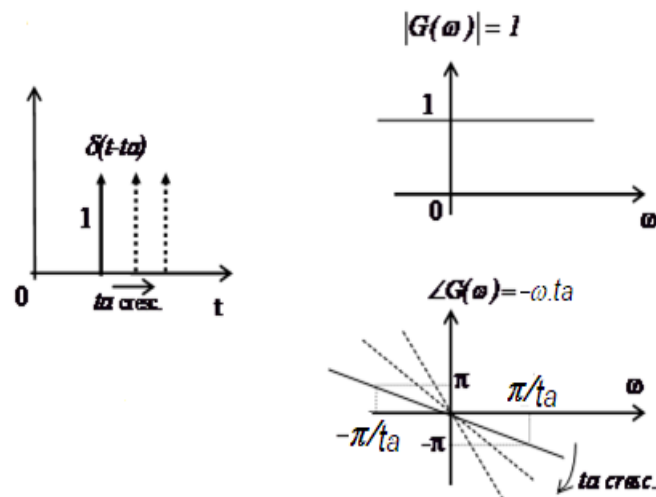


Figura 4.3 Efeito de rotação da fase para impulso se deslocando no tempo.

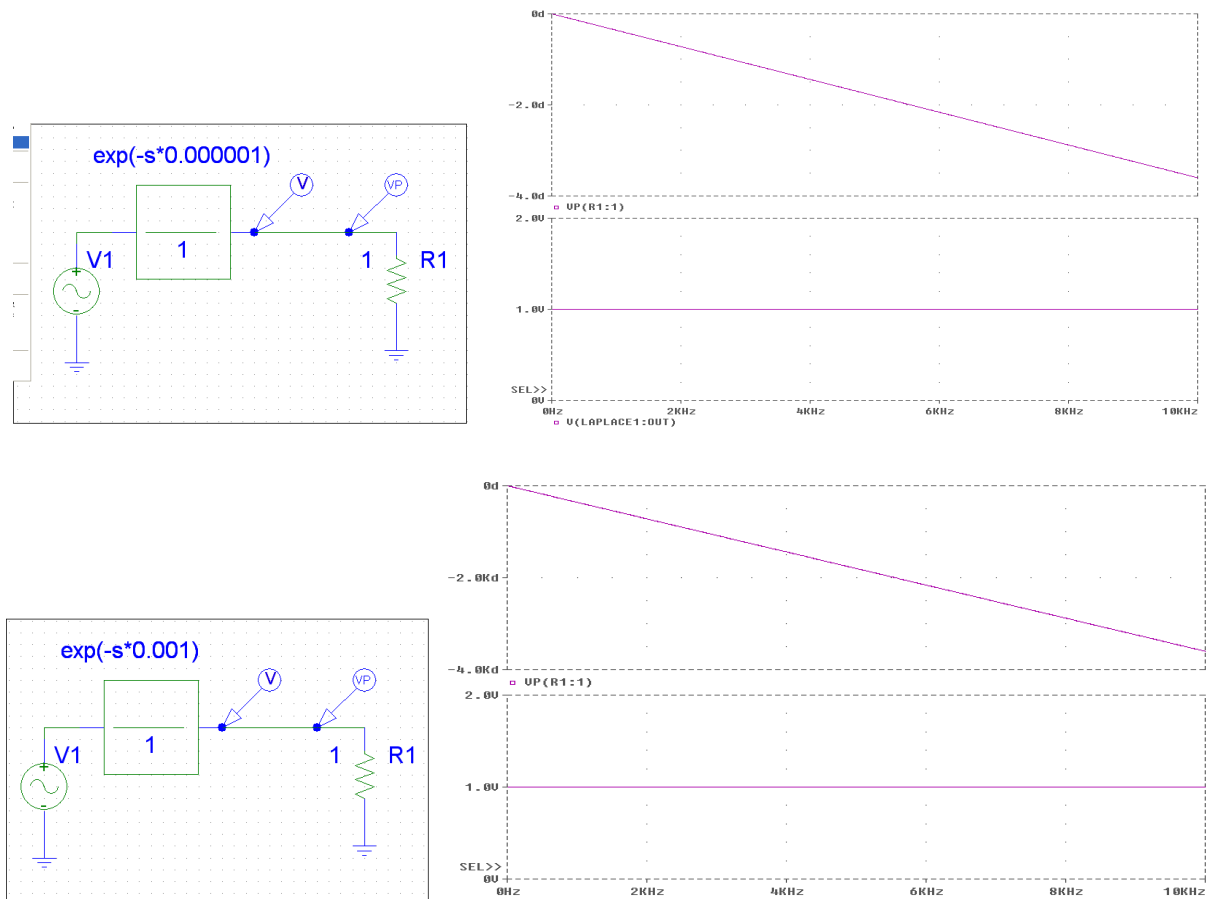


Figura 4.4 Resposta em frequência do impulso.
 Acima: impulso próximo da origem (ou quando $t \rightarrow 0$). Abaixo: impulso deslocado no tempo.
 Note que as escalas da fase são distintas.

14.2 Transformada Discreta de Fourier (TDF)

Seja o sinal $f(t)$, amostrado com intervalos regulares T , representado por:

$$f(nT) = x_0 \cdot \delta(t) + x_1 \cdot \delta(t - T) + x_2 \cdot \delta(t - 2T) + \dots + x_n \cdot \delta(t - nT) + \dots \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Como vale o princípio da superposição para integração, pode-se escrever diretamente a Transformada de Fourier correspondente:

$$\mathcal{F}(\omega) = x_0 + x_1 e^{-j\omega T} + x_2 e^{-j2\omega T} + \dots = \sum_{n=0,1,2,\dots} (x_n \cdot e^{-jn\omega T}) \quad -\infty < \omega < \infty \quad (4.1)$$

Essa é a chamada **Transformada Discreta de Fourier (TDF)**. Corresponde à soma das amostras temporais ponderadas pelo operador unitário de rotação angular ($e^{-j\omega T}$) da mesma ordem n da respectiva amostra. Apesar de ser fácil escrever a TDF para uma série de amostras de um sinal, a visualização da forma resultante para $\mathcal{F}(\omega)$ não é simples. Isso se deve a dois fatores:

- i) os termos $e^{-j\omega T}$ têm espectros contínuos que podem se superpor;
- ii) os termos $e^{-j\omega T}$, $e^{-j2\omega T}$, $e^{-jn\omega T}$ são periódicos *em frequência*, com período $\omega = 2\pi/T$, logo o espectro resultante também resulta periódico:

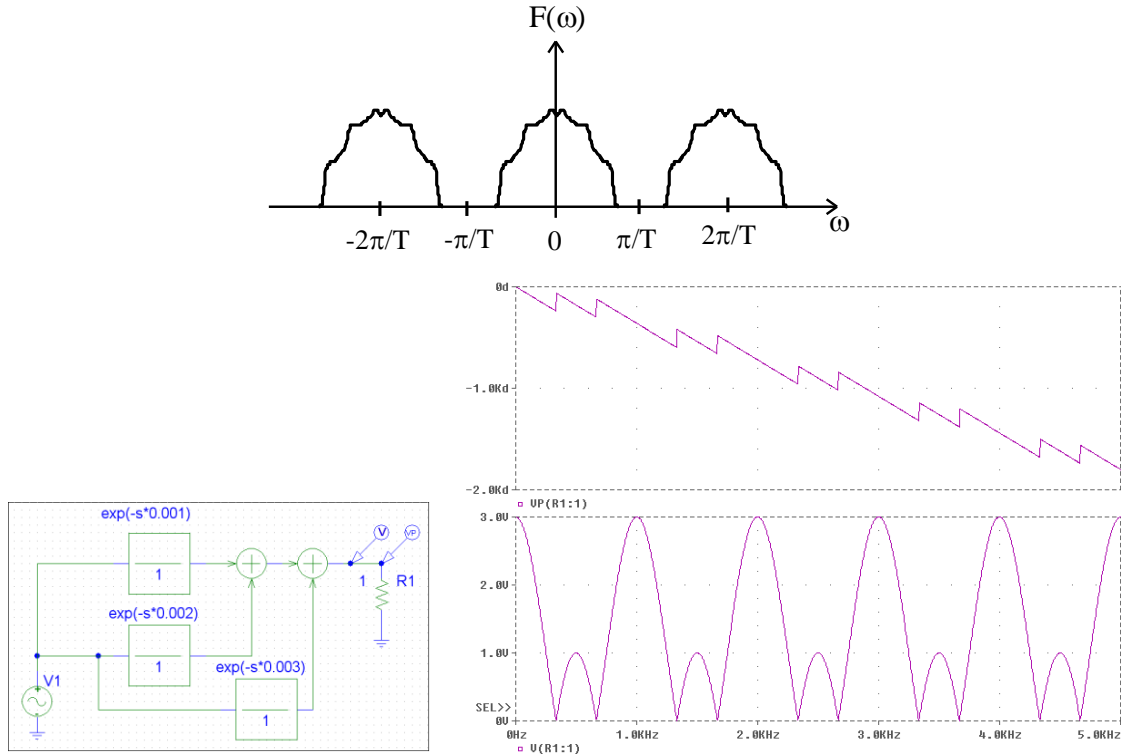


Figura 4.5 Espectro periódico de sinal amostrado com intervalo T .

Notar que quando $T \rightarrow 0$ (amostragem contínua), o intervalo de repetição em frequência tende a infinito, resultando um único espectro. No caso de sinal amostrado com intervalo T , ocorre a repetição desse espectro a cada $2\pi/T$. Nesse caso só se necessita conhecer o espectro de amplitudes entre $-\pi/T$ e π/T , que o restante será uma repetição desse espectro. O espectro das fases, por outro lado, recua de $2\pi/T$ para cada nova volta. Da hipótese anterior ($T \rightarrow 0$), conclui-se que o espectro entre $-\pi/T$ e π/T , representa o espectro do sinal contínuo (não amostrado), numa faixa mais restrita de frequências.

4.3 Exemplos de Espectros de Sinais Amostrados

Exemplo 1: Seja a onda cossenoidal: $f(t) = A \cdot \cos \omega_1 t$

O coeficiente de ordem 0 da TF dessa função contínua resulta:

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} A \cdot \cos \omega_1 t \cdot dt = 0 \quad \text{ou seja, o valor CC}=0$$

O coeficiente para $h=1$ (fundamental) vale:

$$a_1 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} A \cdot \cos \omega_1 t \cdot e^{-j\omega_1 t} \cdot dt = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} A \cdot \cos \omega_1 t \cdot (\cos \omega_1 t - j \sin \omega_1 t) \cdot dt$$

$$a_1 = \frac{A}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \frac{1}{2} (1 - \sin 2\omega_1 t) \cdot dt = \frac{A}{2T_1} \cdot T_1 = \frac{A}{2} \quad \text{vale para } h = \pm 1$$

Notar que o cada coeficiente que representa a fundamental (a_h para $h = \pm 1$) vale metade da amplitude do sinal temporal. Os coeficientes para as demais harmônicas resultam todos com média (integral) igual a zero:

$$a_h = \frac{A}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} (\cosh \omega_1 t) \cdot e^{-jh\omega_1 T_1} \cdot dt = 0 \quad \text{para } h \neq \pm 1$$

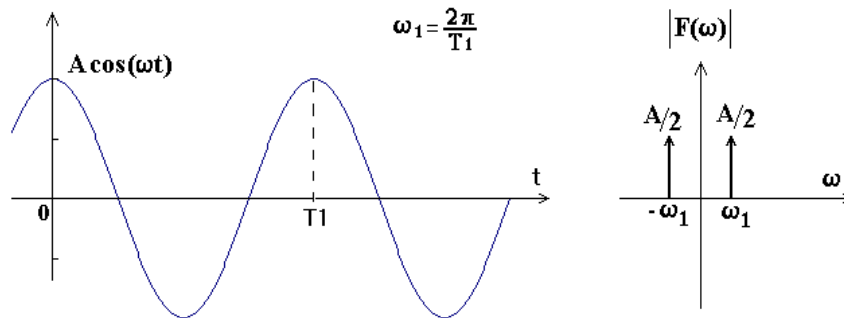


Figura 4.6 Sinal senoidal contínuo e seu espectro discreto.

Quando a mesma cossenóide é amostrada com intervalo T , o que muda no domínio da frequência é que esse mesmo espectro torna-se repetitivo e a frequência de repetição ($2\pi/T$) é definida pelo intervalo de amostragem T .

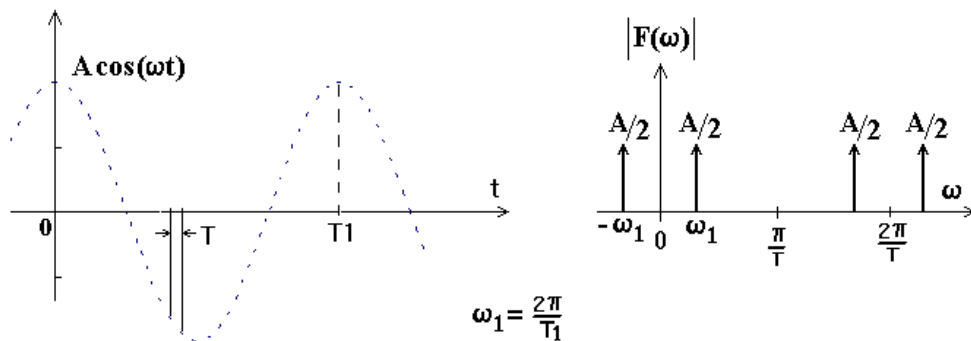


Figura 4.7 Sinal senoidal amostrado e espectro discreto periódico.

Exemplo 2: Trem de pulsos com período T_1 , amplitude A e duração 2τ

Como visto anteriormente, os coeficientes da série de Fourier deste sinal são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\tau}^{\tau} A \cdot dt = \frac{2\tau}{T_1} A$$

$$a_h = \frac{2\tau A}{T_1} \cdot \frac{\text{sen}(h\omega_1 \tau)}{h\omega_1 \tau} = \frac{2\tau A}{T_1} \cdot \frac{\text{sen}(h \frac{2\pi}{T_1} \tau)}{h \frac{2\pi}{T_1} \tau} \quad \text{para } h \neq 0$$

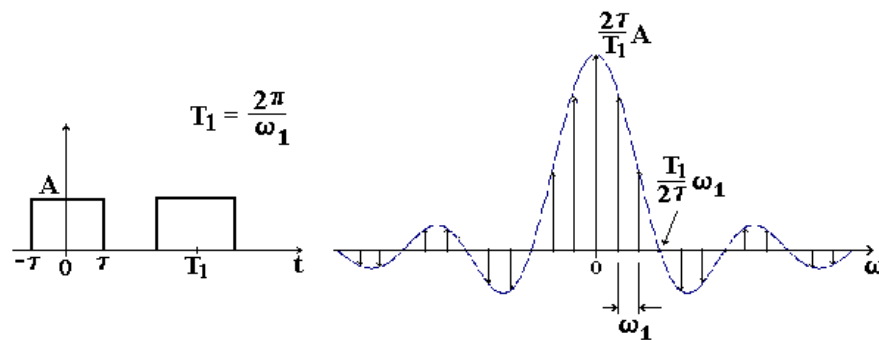


Figura 4.8 Trem de pulsos não amostrado e espectro discreto correspondente.

Se essa onda for amostrada com intervalo de amostragem T , tem-se a repetição desse espectro em torno de $\pm\pi/T$.

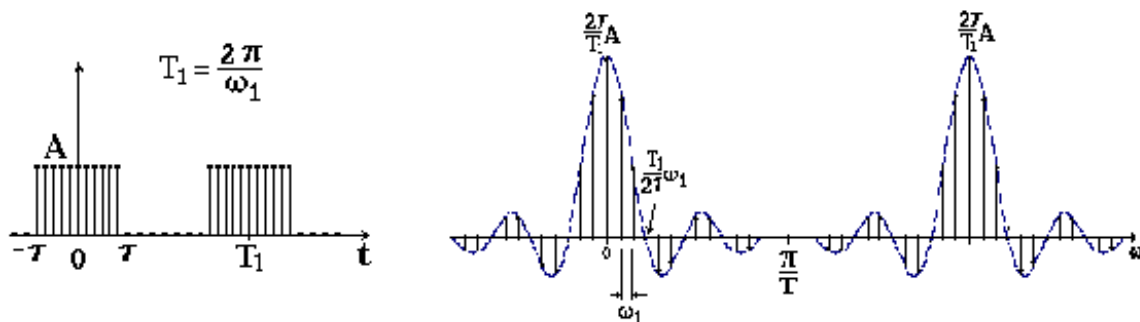


Figura 4.9 Onda retangular amostrada e respectivo espectro periódico.

Se na amostragem $T \rightarrow 0$, então $2\pi/T \rightarrow \infty$, ou seja, a repetitividade do espectro tende a sumir e volta-se ao sinal contínuo. Como se vê, o espectro que interessa encontra-se na faixa $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$. Como o espectro é simétrico em torno da origem, basta obter o espectro na faixa $0 \leq \omega \leq \pi/T$, lembrando porém que as amplitudes nessa faixa correspondem à metade daquelas do sinal real.

Se T aumenta (taxa de amostragem diminui), a distância entre as funções SINC diminui, criando superposição dos espectros, o que pode comprometer a filtragem para se isolar apenas o lóbulo central do espectro.

Exemplo 3: Sequência Finita de Amostras

Na prática, o processo de amostragem do sinal tem começo e fim, resultando uma sequência finita de amostras. É interessante verificar o efeito que essa limitação impõe sobre o espectro estimado. Para ilustrar, tome-se uma sequência de nove amostras com intervalo T :

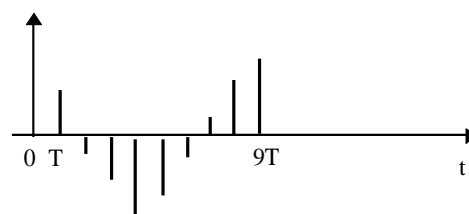


Figura 4.10 Sinal com 9 amostras.

Suponha que esse sinal volta a se repetir, repetindo-se a cada intervalo $T_1 = 9T$.

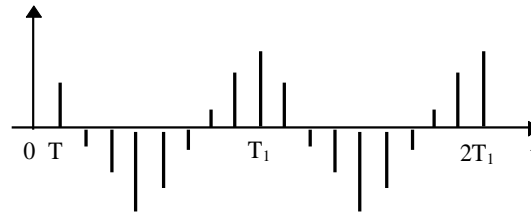


Figura 4.11 Sinal periódico com 9 amostras por período.

Como o sinal agora é periódico, pode-se determinar a frequência fundamental:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{9T} \quad \text{rd/s}$$

A 4ª harmônica será $\omega_4 = 4\omega_1 = \frac{8\pi}{9T}$ e a 5ª harmônica $\omega_5 = 5\omega_1 = \frac{10\pi}{9T}$. Portanto, se a informação do espectro está contida em $\omega \leq \pi/T$ só é possível obter o espectro até a 4ª harmônica. O restante é uma repetição espelhada desse espectro a partir de $\omega = \pi/T$.

Isso não é surpresa pois, pelo teorema de amostragem, necessita-se de pelo menos duas amostras por período para ter a informação de frequência e, com 9 amostras, só se pode obter o nível CC e mais 4 harmônicas.

Outra formulação equivalente é dizer que com N amostras pode-se obter $N/2$ frequências harmônicas.

4.4 Análise de sinais empregando a Transformada Discreta de Fourier (TDF)

A TDF é uma transformação que se aplica para sinais amostrados e que leva ao algoritmo de cálculo da Transformada Rápida de Fourier (em inglês FFT). O algoritmo da FFT permite calcular $N/2$ componentes do espectro contidos no intervalo $0 \leq \omega \leq \pi/T$, a partir do processamento de N amostras temporais do sinal, igualmente espaçadas de T . O espaçamento ou resolução em frequência ($\Delta\omega$) é dado por:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{\max}}{N/2} \quad \text{onde } \omega_{\max} = \pi/T \text{ e } T = \text{intervalo de amostragem}$$

portanto
$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{NT} \quad N = \text{número de amostras}$$

A frequência da h -ésima harmônica corresponde a $\omega_{hk} = \frac{2\pi h}{NT} \quad h = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Considere-se a transformada de Fourier do sinal amostrado $x(t)$ como sendo:

$$\mathcal{F}(\omega) = X(\omega) = x_0 + x_1 \cdot e^{-j\omega T} + x_2 \cdot e^{-j2\omega T} \dots + x_{N-1} \cdot e^{-j(N-1)\omega T}$$

A harmônica de ordem h pode ser representada por:

$$\begin{aligned} x_h(n) &= x_0 + x_1 \cdot e^{-j\frac{2\pi h n}{N}} + x_2 \cdot e^{-j2\left(\frac{2\pi h n}{N}\right)} \dots + x_{N-1} \cdot e^{-j(N-1)\left(\frac{2\pi h n}{N}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_h(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi h n}{N}} \quad h=0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

$n=0, 1, 2, \dots, N-1$ indica o contador das amostras temporais do sinal $x_h(n)$.

$h=0, 1, 2, \dots, N-1$ indica a ordem harmônica. A partir de $h = N/2$ o espectro se repete espelhado.

Assim, para obter a TDF do sinal amostrado tem-se que variar os valores de n e h . Para simplificar a notação, define-se o operador complexo de rotação que aparece em todas as N amostras como sendo:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)$$

Quanto maior o valor de N , menor é o deslocamento angular dado por W_N .

Usando a notação compacta, a TDF das N amostras fica sendo:

$$X_h(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x_h(n) \cdot W_N^{nh} \quad h=0,1,2,\dots,N-1 \quad \text{ordem harmônica}$$

Para calcular todos os valores espectrais de X tem-se N^2 operações de multiplicação complexa, além das $N(N-1)$ somas complexas.

O grande benefício da FFT é que esse número de operações cai para $2N \log_2 N$ multiplicações complexas, o que dá uma significativa redução de tempo de processamento. Exemplificando:

$$\begin{aligned} N &= 128 = 2^7 \\ N^2 &= 2^{14} = 16384 \\ 2N \log_2 N &= 256 \times 7 = 1792 \end{aligned} \quad \text{redução de 9:1 operações}$$

$$\begin{aligned} N &= 1024 = 2^{10} \\ N^2 &= 2^{20} = 1048576 \\ 2N \log_2 N &= 2048 \times 10 = 20480 \end{aligned} \quad \text{redução de 51:1 operações}$$

Para elaborar o algoritmo da FFT deve-se quebrar a sequência de amostras em subconjuntos pares/ímpares. Esses subconjuntos são transformados e subdivididos sucessivamente até se chegar à operação elementar entre duas amostras (dizimação no tempo). Essa decomposição requer que N seja potência inteira de 2.

Seja pois: $N = 2^v$

Como N é par, pode-se expressar a TDF separando x_n nas duas sequências de $N/2$ amostras pares e ímpares:

$$X(h) = \sum_{n=\text{par}}^{N-1} x_n \cdot W_N^{nh} + \sum_{n=\text{ímpar}}^{N-1} x_n \cdot W_N^{nh} \quad h = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Para explicitar os contadores de amostras pares e ímpares usa-se um novo contador r definido de forma que para $r = 0, 1, 2, 3, \dots, (N/2-1)$

$$\begin{aligned} n &= 2r & \text{para } n \text{ par} \\ n &= 2r+1 & \text{para } n \text{ ímpar} \end{aligned}$$

$$X(h) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2r} \cdot W_N^{2rh} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2r+1} \cdot W_N^{(2r+1)h}$$

Pode-se verificar que ocorrem redundâncias nesses operadores, por exemplo:

$$W_N^2 = (e^{-j2\pi/N})^2 = e^{-j4\pi/N} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$$

Levando em conta essa redundância conclui-se que cada somatório torna-se uma TDF de $N/2$ amostras:

$$X(h) = \underbrace{\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2r} \cdot W_{N/2}^{rh}}_{TDF \text{ par}} + W_N^h \underbrace{\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2r+1} \cdot W_{N/2}^{rh}}_{TDF \text{ ímpar}} \quad h = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Como $N/2$ continua sendo número par, pode-se repetir essa quebra, resultando 4 TDF de $N/4$ amostras. Continuando, chega-se a $N/2$ TDF de apenas 2 amostras. Esse processo de quebra das amostras temporais em subconjuntos é chamado dizimação temporal. A cada etapa tem-se uma relação entre as TDF de um estágio m para o seguinte, do tipo:

$$X_{m+1}^h(p) = X_m^h(p) + W_N^h \cdot X_m^h(q) \quad (4.2)$$

onde $X_{m+1}^h(p, q)$ = valores das TDF pares (p) e ímpares (q) no estágio m para harmônica h ;
 m = estágio da dizimação $m=1, 2, 3 \dots \nu$
 p, q = índices par e ímpar $p, q=0, 1, 2 \dots (N/2-1)$
 h = ordem harmônica $h=0, 1, 2 \dots N-1$

A expressão (14.2) dá os termos pares de X_{m+1}^h . Faltam os termos ímpares. Notar que o índice h deve variar até $N-1$, enquanto r varia somente até $(N/2-1)$. Para os demais termos de h , ($h=r+N/2$), os coeficientes da TDF irão se repetir, uma vez que:

$$W_N^{r+N/2} = e^{-j\left[2\pi\frac{(r+N/2)}{N}\right]} = e^{-j2\pi(r/N)} \cdot e^{-j\pi} = -e^{-j2\pi(r/N)} = -W_N^r.$$

Isto significa que basta calcular os operadores W_N^r para $r = 0, 1, 2, \dots (N/2-1)$ e usar o seguinte par de equações para $h = r = 0, 1, 2, \dots (N/2-1)$:

$$X_{m+1}^h(p) = X_m^h(p) + W_N^h \cdot X_m^h(q) \quad \text{para conjunto par}$$

$$X_{m+1}^h(q) = X_m^h(p) - W_N^h \cdot X_m^h(q) \quad \text{para conjunto ímpar}$$

Esse par de equações é chamado de operação borboleta devido à sua forma de representação gráfica, mostrada no exemplo a seguir.

Exemplo:

Supondo $N=2^3=8$ amostras, o cálculo da FFT pode ser representado pelo seguinte diagrama que terá $\nu=3$ estágios. A decomposição (dizimação) começa de trás para frente para se chegar à operação inicial entre duas amostras.

Primeira dizimação:

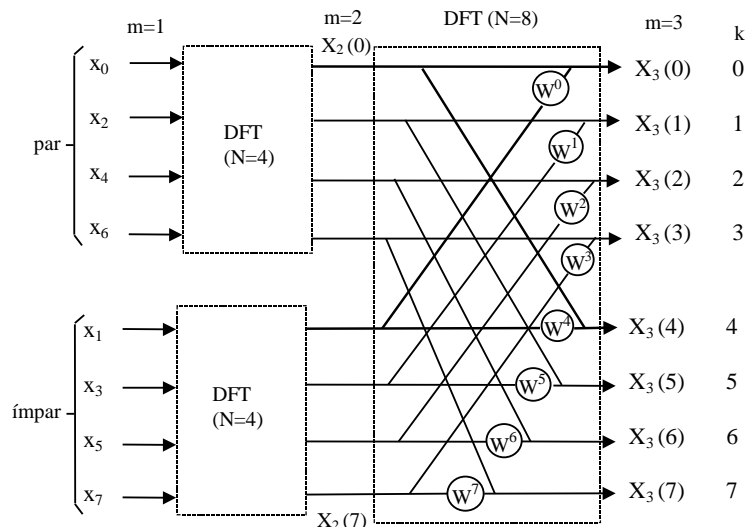


Figura 4.12 Primeiro estágio de dizimação.

Devido à simetria do tipo $W_N^{r+\frac{N}{2}} = -W_N^r$ pode-se escrever:

$$W^4 = -W^0$$

$$W^5 = -W^1$$

$$W^6 = -W^2$$

$$W^7 = -W^3$$

e com isso a operação básica (borboleta) fica sendo:

Operação Básica:

$$X_3(0) = X_2(0) + W^0 X_2(4) \quad \text{para } h = 0 \text{ (primeiro termo par)}$$

$$X_3(4) = X_2(0) - W^0 X_2(4) \quad \text{para } h = 4 \text{ (primeiro termo ímpar)}$$

Repetindo as operações para as DFT menores, obtém-se para o segundo estágio da dizimação:

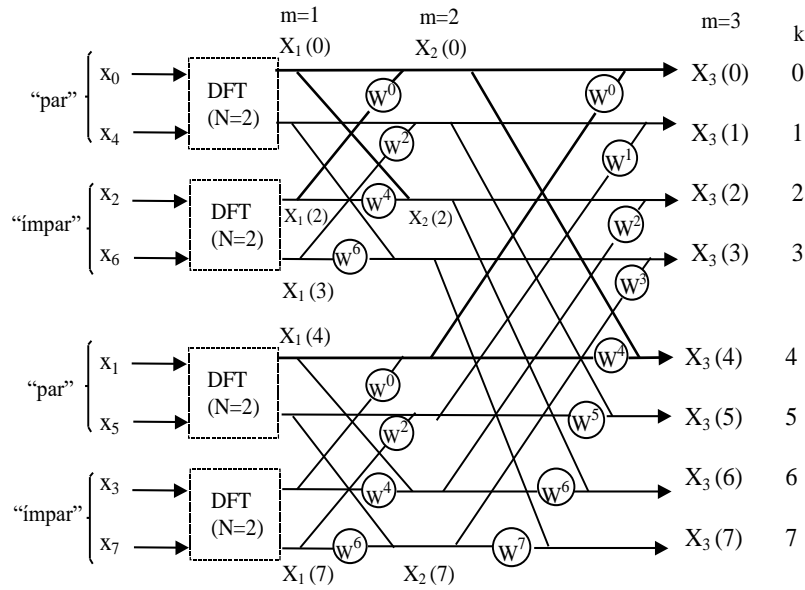


Figura 4.13 Segundo estágio de dizimação.

Operação Básica:

$$X_2(0) = X_1(0) + W^0 X_1(2)$$

$$X_2(2) = X_1(0) - W^0 X_1(2)$$

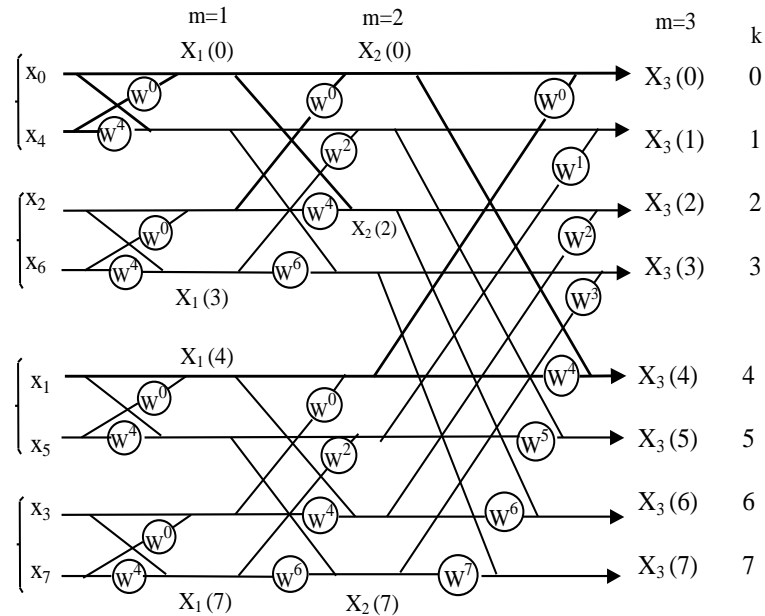


Figura 4.14 Terceiro estágio de dizimação.

Operação Básica:

$$\begin{aligned} X_1(0) &= X_0(0) + W^0 X_0(1) \\ X_1(1) &= X_0(0) - W^0 X_0(1) \end{aligned}$$

Portanto, o algoritmo para N=8 amostras pode ser reduzido às seguintes operações:

Ordem das amostras

Ordem das harmônicas

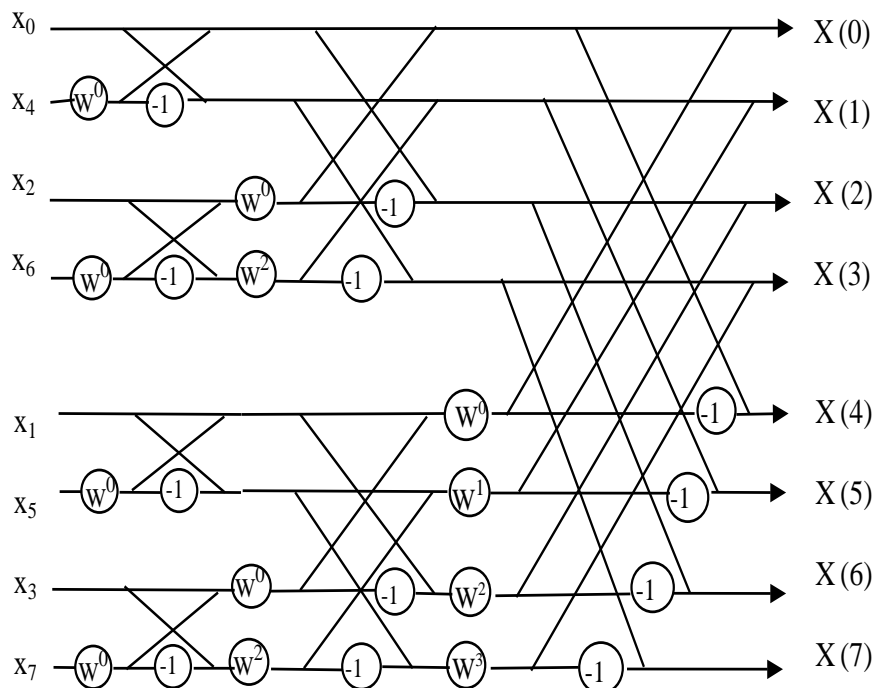


Figura 4.15 Conjunto de operações para dizimação de N=8 amostras.

Uma conclusão importante é que se as 8 amostras temporais forem reordenadas na sequência: $X_0, X_4, X_2, X_6, X_1, X_5, X_3, X_7$, então todos os cálculos podem ser feitos nas próprias posições no vetor de dados, de modo que ao final das operações se obtenha as componentes harmônicas ordenadas

automaticamente de 0 a $N-1$. Além disso, só é preciso calcular os seguintes operadores de rotação:

$$W^0, W^1, W^2 \text{ e } W^3 \quad W^r = e^{-j\frac{2\pi}{N}r} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}r\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}r\right) \quad r = 0, 1, 2 \dots \left(\frac{N}{2} - 1\right)$$

Para implementar a FFT tem-se que sistematizar alguns procedimentos:

- 1) escolher N como sendo potência de 2 (Ex: $N=2^3=8$); isto decide o número de estágios da decomposição ($\nu = 3$ estágios).
- 2) calcular previamente os operadores, com $W_N^r = e^{-j\frac{2\pi}{N}r} \quad r = 0, 1, 2 \dots \left(\frac{N}{2} - 1\right)$ usualmente isso é feito em termos de $\cos(\cdot) \pm j\sin(\cdot)$.
- 3) reordenar as amostras de modo que se possa operá-las diretamente. A sequência a ser usada depende do número de estágios, ou seja, do tamanho N do vetor a processar. Uma técnica usada nessa ordenação é a chamada "reversão de bits".

Exemplos de reordenação pelo método de reversão de bits:

$N=4$

Amostra	Ordem Inicial	Bits	Reverte	Ordem Final
x(1)	0	00	00	0
x(2)	1	01	10	2
x(3)	2	10	01	1
x(4)	3	11	11	3

$N=8$

Amostra	Ordem Inicial	Bits	Reverte	Ordem Final
x(1)	0	000	000	0
x(2)	1	001	100	4
x(3)	2	010	010	2
x(4)	3	011	110	6
x(5)	4	100	001	1
x(6)	5	101	101	5
x(7)	6	110	011	3
x(8)	7	111	111	7

- 4) uma vez ordenadas as amostras, realizam-se os cálculos das células da borboleta:

$$\begin{aligned} X_{m+1}(p) &= X_m(p) + W^r X_m(q) \\ X_{m+1}(q) &= X_m(p) - W^r X_m(q) \end{aligned}$$

para todos os conjuntos p, q e todos os estágios m , varrendo os operadores W^r requeridos.

4.5 Algoritmo para Reversão de Bits

Para fazer as trocas de posição que permitem o cálculo da FFT *in loco* e economizar memória e tempo do computador, utiliza-se um algoritmo clássico que faz essa reversão.

Seja o vetor de amostras temporais designado por: $X(I) = [1, 2, 3 \dots N]$. N é a quantidade de amostras e deve ser potência de dois. O algoritmo seguinte faz a troca de posições X_i de acordo com a regra da reversão de bits.

Nota importante: Ao invés dos contadores começarem em zero como nas equações apresentadas, nos algoritmos computacionais os contadores começam em 1. Isto significa que no

índice 1 da saída aparece a componente CC e as harmônicas aparecerão do índice 2 em diante.

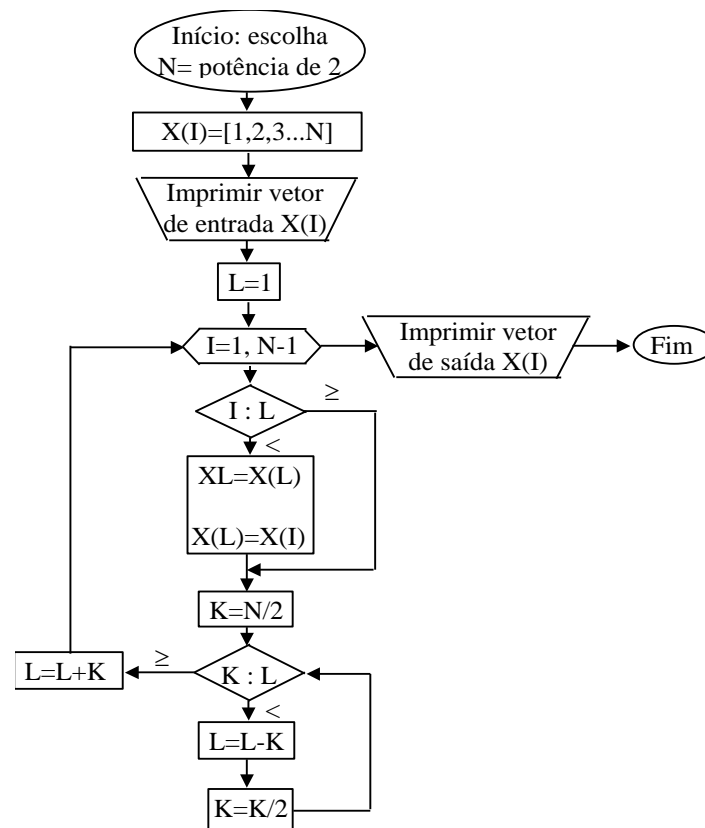


Figura 4.16 Algoritmo para troca de posição de dados, baseado na reversão de bits.

Seja $N=4$

Amostras $X(1)$ $X(2)$ $X(3)$ $X(4)$

$L=1$

$I=1 \quad \rightarrow \quad Y(1)=X(1) \quad (\text{não muda})$

$I=L$

$K=N/2=2$

$K>L$

$L=L+K=1+2=3$

$I=2$

$I<L$

$XL=X(3)$

$X(3)=X(2) \quad \rightarrow \quad Y(3)=X(2) \quad [\text{antigo } X(2)]$

$X(2)=XL \quad \rightarrow \quad Y(2)=X(3) \quad [\text{antigo } X(3)]$

$K=N/2=2$

$K<L$

$L=L-K=3-2=1$

$K=K/2=1$

$K=L$

$L=L+K=1+1=2$

$I=3$

$I>L$

$K=N/2=2$

$K=L$

$L=L+K=2+2=4$

$I=4 \quad \rightarrow \quad Y(4)=X(4) \quad (\text{não muda})$

Fim do programa

4.6 Algoritmo da Transformada Rápida de Fourier (FFT)

Supondo que o vetor de entrada já tenha sido revertido, podem-se operar os termos Y_i segundo a regra da borboleta, varrendo os diversos estágios da dizimação ordenadamente. O algoritmo apresentado a seguir realiza essas operações para um vetor $[Y]$, definido como complexo, de tamanho $N=2^M$. Nesse algoritmo o vetor $Y(I)$ deve ser definido como variável complexa, assim como U e W .

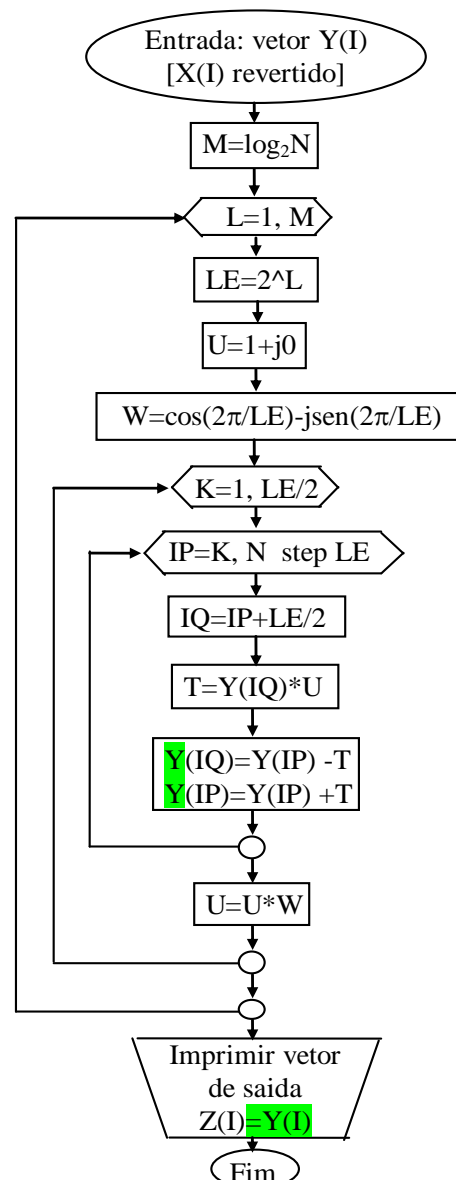


Figura 4.17 Algoritmo das operações "borboleta" da FFT.

14.7 Entrada e Saída da FFT

Para testar todo o processo da FFT precisa-se inicialmente gerar a sequência de amostras do sinal de entrada e no final converter o vetor de saída em espectro de amplitude e fase das harmônicas.

Geração do Sinal Amostrado:

Por facilidade, considere-se um sinal de espectro conhecido: $x(t)=A_1.\text{sen}2\pi f_1 t$, com frequência fundamental f_1 dada, e N amostras por período T_1 .

Para analisar o espectro do sinal, basta tomar as N amostras espaçadas em intervalos iguais a T de modo que:

$$T = \frac{T_1}{N} = \frac{1}{Nf_1} \rightarrow f_1 = \frac{1}{NT}$$

As amostras de $x(t)$, tomadas a intervalos T , podem ser expressas pela função discreta:

$$x(nT) = A_1.\text{sen}2\pi f_1(nT) = A_1.\text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \triangleq x(n) \quad n = 1,2,3 \dots N$$

Acrescentando-se uma harmônica de ordem h , pode-se escrever, por semelhança, a série de amostras como sendo:

$$y(n) = A_1.\text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + A_h.\text{sen}\left(\frac{2\pi h}{N}n\right) \quad n = 1,2,3 \dots N$$

Basta, então, definir valores para N , h , A_1 , A_h de modo a obter um período do sinal, amostrado N vezes.

Notar que a frequência fundamental não aparece explicitamente. Essa informação está implícita no período $(2\pi n/N)$ para $n=N$, considerando o intervalo entre amostras consecutivas como:

$$T = \frac{1}{f_1 N}$$

Amostrando um ciclo com N amostras, a máxima frequência observável (frequência de Nyquist) é:

$$f_{max} = \frac{1}{2T} = \frac{N}{2} f_1$$

ou seja, são necessárias 2 amostras por período para poder identificar sua frequência.

Mantida a frequência de amostragem T , para amostrar dois ciclos da fundamental são necessárias $2N$ amostras.

A **Resolução Espectral**, que é a capacidade de identificar frequências distintas, é inversamente proporcional à quantidade de ciclos amostrados.

Assim, se foram amostrados 2 ciclos da fundamental, a resolução será de $f_1/2$, ou seja, será possível verificar se existem componentes até a segunda harmônica.

Amostrando um ciclo de 60 Hz com $N=64$ amostras, resulta $f_{max}=32 \times 60=1920$ Hz. Portanto, $n=0,1,2 \dots 31$ representam as harmônicas de 60 Hz que são observáveis se tomarmos um período com 64 amostras.

Anteriormente foi verificado que o espectro se repete a partir de $\omega = \pi/T$, logo:

$$\omega_{max} = \frac{\pi}{T} = 2\pi f_{max} \quad \therefore \quad f_{max} = \frac{1}{2T}$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{max}}{N/2} = \frac{2\pi}{NT} \quad \therefore \quad \Delta f = \frac{1}{NT} = \frac{f_{max}}{N/2}$$

Para melhorar (aumentar) a resolução em frequência, o que se pode fazer é aumentar o número de ciclos amostrados com a mesma taxa de amostragem. No caso de amostrarmos 6 ciclos em vez de 1, a resolução em frequência será 6 vezes maior, pois:

$$\Delta f = \frac{f_{max}}{6(N/2)} = \frac{f_1}{6} = 10\text{Hz}$$

Essa informação é útil para se converter o vetor de saída para a escala de frequências correspondentes:

$$\text{Escala em Hz} = n^{\circ} \text{ de ciclos} \times \Delta f = n^{\circ} \text{ de ciclos} / (NT)$$

4.7.1 Saída da FFT

No algoritmo anterior, uma vez obtido o vetor de saída $Z(I)$, $I=1,2,...N$ correspondente às entradas $Y(I)$ operadas pela FFT, resultam valores complexos que precisam ser interpretados no domínio da frequência.

Como se usou o processo de cálculo da TDF na forma exponencial complexa, cada magnitude da saída deve ser dividida pelo número N de multiplicações realizadas pela FFT :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\text{Abs}(Z_1)}{N} && \text{para } I=1 \text{ resulta o nível CC.} \\ A_{I-1} &= \frac{\text{Abs}(Z_I)}{N} && \text{para } I>1 \text{ resulta metade das amplitudes das harmônicas.} \\ \theta_{I-1} &= \text{tg} \left[\frac{\text{Im}(Z_I)}{\text{Re}(Z_I)} \right] && \text{para } I>1 \text{ dependendo do quadrante e de } \text{Re}(\cdot) \neq 0. \end{aligned}$$

Observação: para obter precisão na fase é preciso sobre-amostrar o sinal. Para $N=512$ pontos por ciclo, o erro no ângulo (em graus) é aproximadamente igual à ordem harmônica, ou seja:

$$\begin{aligned} I=2 \text{ (Componente fundamental)} & \quad \varepsilon \cong 1^{\circ} \\ I=6 \text{ (quinta harmônica)} & \quad \varepsilon \cong 5^{\circ} \end{aligned}$$

Exemplo

Seja uma onda quadrada com 4 amostras por período ($N=4$):

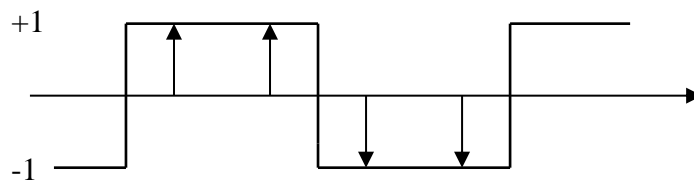


Figura 4.18 Onda quadrada com 4 amostras por período.

I	X(I)	Y(I) após reversão de bits
1	1	1
2	1	-1
3	-1	1
4	-1	-1

Seguindo o algoritmo da FFT tem-se:

$N=4$ $M=2$ $L=1$ até M $LE=2^L=2$ $U=1+j0$ $W=\cos(\pi)-j\sin(\pi)=-1$ $K=1$ até $LE/2=1$, ou seja, faz só uma “passada” no caso $IP=K=1$	RETORNA AO LOOP L $L=2$ $LE=4$ $U=1$ $W=-j$ $K=1$ $IP=1$
--	---

$IQ=IP+LE/2=1+1=2$ $T=Y(IQ)*U=Y(2)*U=-1$ $Y(IQ)=Y(IP)-T=1+1 \rightarrow Y(2)=2$ $Y(IP)=Y(IP)+T=1-1 \rightarrow Y(1)=0$ $IP=1+LE=3$ $IQ=3+1=4$ $T=Y(4)*U=-1$ $Y(IQ)=1+1 \rightarrow Y(4)=2$ $Y(IP)=1-1 \rightarrow Y(3)=0$ $IP=3+LE=5$ SAI DO LOOP IP SAI do LOOP K	$IQ=3$ $T=0$ $Y(3)=0$ $Y(1)=0$ $U=-j$ $K=2$ $IP=2$ $IQ=4$ $T=-2j$ $Y(4)=2+j2$ $Y(2)=2-j2$ SAI DO LOOP L FIM
---	---

A sequência de mudanças no vetor é:

	Y(1)	Y(2)	Y(3)	Y(4)
Entrada do algoritmo	1	-1	1	-1
	1	2	1	-1
	0	2	1	-1
	0	2	1	2
	0	2	0	2
	0	2	0	2
	0	2	0	2
	0	2	0	2+j2
Saída do algoritmo Z(i)=Y(i)	0	2-j2	0	2+j2

Saída (coeficientes da TF):

$$A_0=0$$

$$A_1 = \frac{Abs(Z_2)}{N} = \frac{\sqrt{8}}{4} = 0,707 \quad (\text{metade do valor real})$$

$$A_2=0$$

$$A_3 = \frac{Abs(Z_4)}{N} = \frac{\sqrt{8}}{4} = 0,707 \quad (\text{espelho de } A_1)$$

O valor A_0 corresponde ao valor médio ou CC. Devido ao uso da série na forma complexa bilateral, as amplitudes das harmônicas são metade do valor real. A_1 corresponde à frequência fundamental, A_2 corresponde à segunda harmônica e assim sucessivamente.

No entanto, sabe-se que com quatro amostras é possível identificar somente até a segunda harmônica, ou seja, após esta frequência os resultados não têm significado. Neste exemplo, o valor da componente A_3 , que corresponderia à terceira harmônica, é o espelho da primeira.

Quando se analisa o valor da componente fundamental ($2 \times 0,707 = 1,414$), observa-se que o mesmo não corresponde ao valor esperado para onda quadrada unitária que é de $4/\pi = 1.273$. Ou seja, a amostragem muito reduzida, embora permita identificar corretamente a frequência, não é capaz de calcular corretamente a amplitude.

Na verdade, o valor identificado corresponde ao de uma senóide de mesma frequência e com amplitude $\sqrt{2} = 1.414$, amostrada nos ângulos de 45° , 135° , 225° e 315° , ou seja, com os mesmo valores das amostras da onda quadrada original.

A figura a seguir mostra o resultado do algoritmo da FFT, sempre tomando apenas 4 amostras por ciclo, um único ciclo (resolução de 60 Hz) e analisando quatro ciclos (resolução de 15 Hz). Os resultados devem ser considerados até a componente A_2 , que acertam nas frequências detectadas, porém as amplitudes continuam apresentando o mesmo erro. Mudou apenas a resolução em frequência. O termo A_3 pode ser analisado como a reflexão do espectro em frequência em torno da

frequência de Nyquist, ou seja, a máxima frequência observável (120 Hz, neste caso).

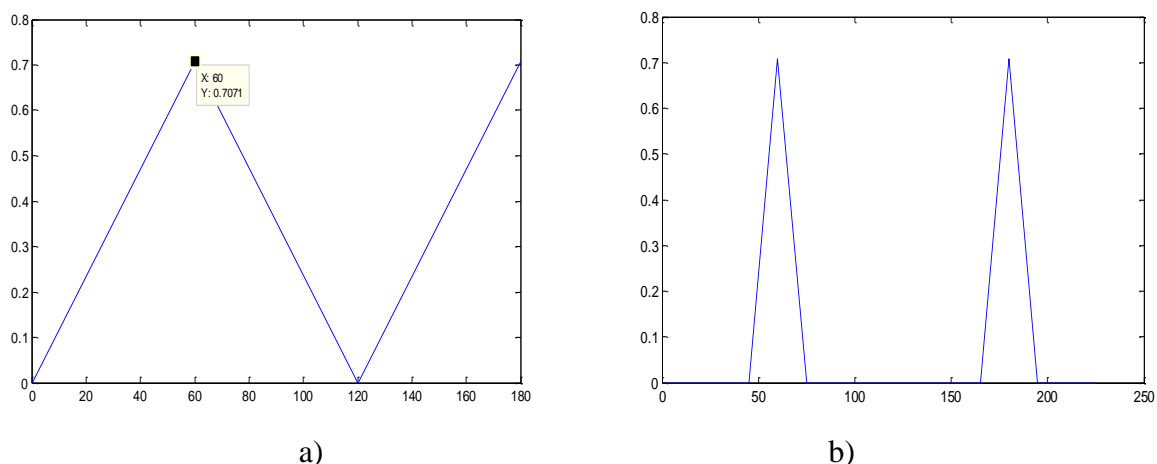


Figura 4.19 FFT de onda quadrada em 60 Hz, amplitude unitária, com quatro amostras por ciclo:
a) Um ciclo de observação; b) Quatro ciclos de observação (resolução de 15 Hz).

Quando se amplia a quantidade de amostras por ciclo, aumenta a resolução ou capacidade de detecção de frequências mais elevadas, bem como a precisão de estimação das amplitudes das componentes harmônicas de baixa ordem. O erro na estimativa da amplitude persiste para as componentes de ordem elevada devido à menor amostragem relativa.

O espectro a seguir foi obtido com 32 amostras por período da onda quadrada, o que implica numa frequência de Nyquist de 960 Hz (16ª harmônica), a partir da qual o espectro se mostra espelhado. A componente fundamental (metade do valor real) foi de 0,6376, quando esse valor deveria ser $2/\pi = 0,6366$. Devido à maior riqueza espectral da onda quadrada, pode haver interferência entre o espectro e seu correspondente espelhado, o que compromete a precisão dos valores.

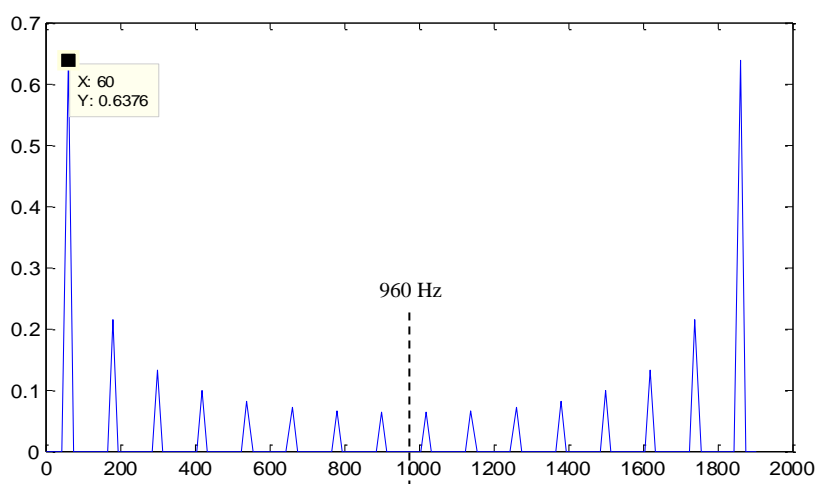


Figura 4.20 FFT de onda quadrada em 60 Hz, amplitude unitária e 32 amostras por ciclo.
Espectro analisável até $16 \times 60 = 960$ Hz.

Tome-se agora para análise uma onda senoidal (amplitude unitária) com 20 % de 5ª harmônica (300 Hz), 10% de nona harmônica (540 Hz), e de um nível CC unitário. O sinal e o respectivo espectro são mostrados a seguir.

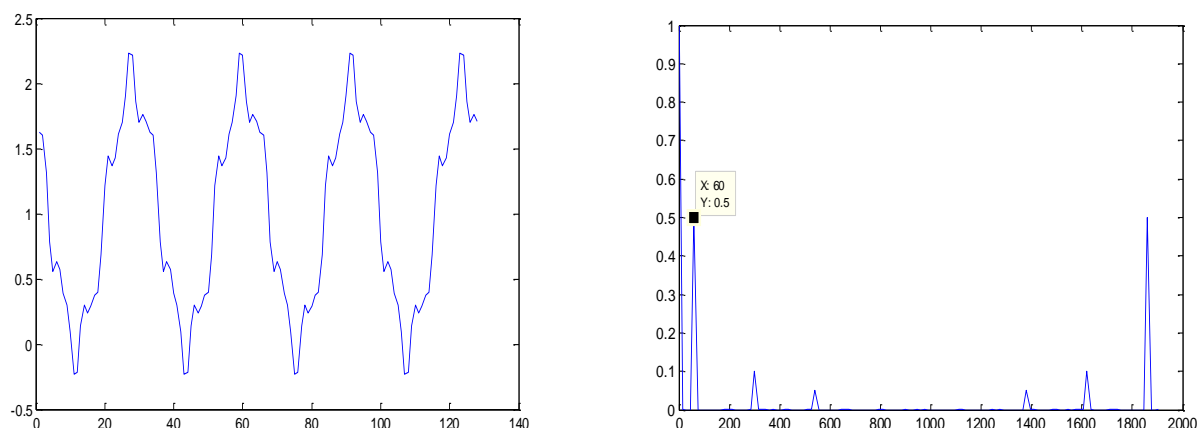


Figura 4.21 Forma de onda e respectivo espectro obtido com 32 amostras por ciclo.

O algoritmo identifica exatamente o nível CC, bem como as componentes oscilatórias, tanto em termos de frequência quanto de amplitude. A amostragem leva a uma frequência de Nyquist de 960 Hz, o que garante, neste exemplo, que não há interferência entre os componentes dos espectros, de modo que os valores de amplitude são corretamente estimados.

Ao reduzir a taxa de amostragem para 16 amostras por ciclo, a frequência em torno da qual se dá o espelhamento do espectro se reduz para 480 Hz, como mostra a figura 4.22, impossibilitando qualquer análise acima desta frequência. O nível CC continua adequadamente estimado, no entanto há um “embaralhamento” nas componentes de ordem elevada, pois a componente vista em 420 Hz não existe no sinal, sendo o reflexo da nona harmônica. Neste caso em particular, como não há coincidências entre as componentes originais e as refletidas, as amplitudes são corretas.

4.7.2 Uso de filtro anti-aliasing

Uma vez escolhida a taxa de amostragem ($T=T_1/N$) conhece-se a frequência máxima observável ou de Nyquist ($f_1.N/2$). Para eliminar as componentes acima dessa frequência eventualmente contidos no sinal a ser analisado, usa-se filtros *anti-aliasing* (AAF) antes do amostrador para restringir a largura de banda do sinal de modo a, aproximadamente ou completamente, satisfazer o teorema de amostragem sobre a banda de interesse.

A reconstrução inequívoca do sinal a partir de suas amostras é possível apenas quando não existam componentes espectrais além da frequência de Nyquist. Assim, se o sinal original possuir componentes além deste limite, a informação obtida pela FFT não é confiável.

O filtro anti-aliasing nada mais é do que um filtro passa-baixas que elimine (ou minimize) a faixa do espectro não identificável em função da amostragem adotada. O resultado do uso do AAF é mostrado na figura 4.23. Note-se que o sinal, após a filtragem, tem formato mais “suave” por não mais conter altas frequências. Por outro lado o espectro apresenta apenas as componentes que efetivamente podem ser avaliadas pela FFT. Foi utilizado um filtro Butterworth de quarta ordem sintonizado na frequência de $(5,32.\omega_1)$. Com isso se preserva a quinta harmônica e se atenua fortemente a nona harmônica.

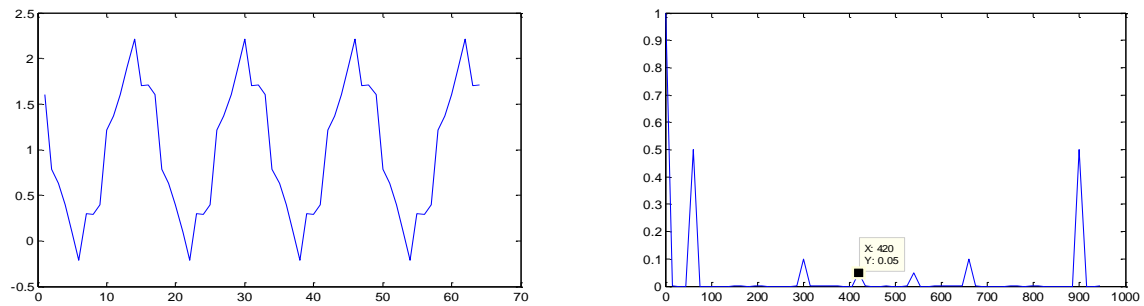


Figura 4.22 Forma de onda e respectivo espectro obtido com 16 amostras, sem filtro.

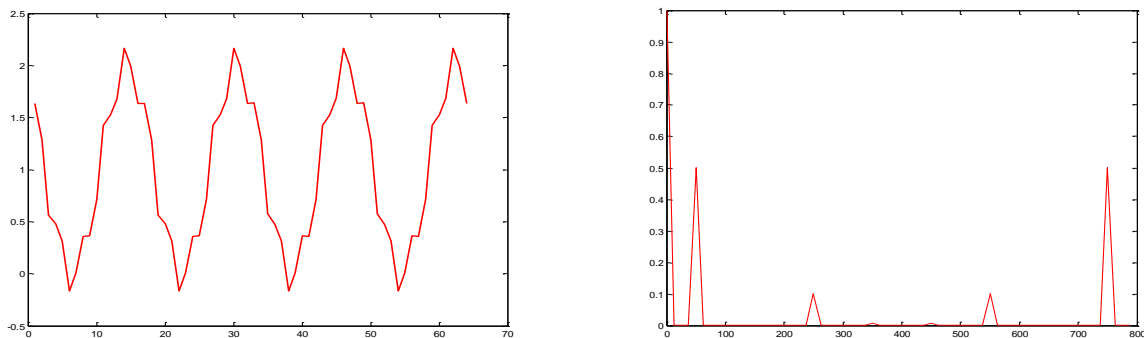
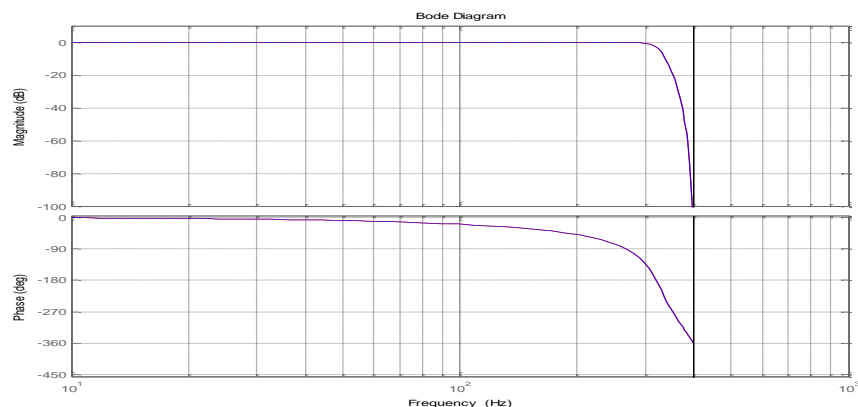


Figura 4.23 Forma de onda e respectivo espectro obtido com 16 amostras após filtragem do sinal.

A resposta em frequência do filtro está na figura 4.24. Note-se a resposta plana para o ganho (característica dos filtros Butterworth). O ajuste realizado garante ganho praticamente unitário para a 5ª harmônica.



4.24 Resposta do filtro de Butterworth, quarta ordem.

4.8 Unidades para Amplitudes Relativas

Uma vez que em muitas aplicações é necessário conhecer a relação sinal/ruído, sendo que o ruído pode ser várias ordens de grandeza menor que o sinal, é comum que se representem as amplitudes relativas em escala logarítmica, o que permite comprimir a escala para abranger várias décadas. A unidade decibel (dB) (criada por Graham Bell) é usada para medir relações de amplitudes ou de potências em escala logarítmica. Define-se o decibel como sendo:

$$1dB \triangleq 20 \cdot \log_{10} (\text{razão de amplitudes}) = 10 \cdot \log_{10} (\text{razão de potências})$$

Para verificar essa relação basta assumir que a potência P associada a um sinal é proporcional ao quadrado da sua amplitude A :

Sejam $P = kA^2$ e $P_0 = kA_0^2$, segue que:

$$10\log\left(\frac{P}{P_0}\right) = 10\log\left(\frac{kA^2}{kA_0^2}\right) = 20\log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

Valores comumente usados em escala dB e as razões correspondentes são dados na tabela seguinte:

dB	Razão(A)	Razão(P)
40	100	10^4
20	10	100
10	$\sqrt{10}$	10
3	$\sqrt{2}$	2
0	1	1
-3	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,5
-10	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	0,1
-20	0,1	0,01
-40	0,01	10^{-4}

Obs: Notar que 20 dB corresponde a 1 década (10 vezes) em amplitudes e que 3 dB corresponde à razão 2 de potências.

4.9 Janelas de Ponderação das Amostras

Quando se conhece a priori a frequência fundamental do sinal a ser analisado fica fácil escolher o número de amostras por ciclo e, portanto, a frequência máxima a ser analisada. Quando a frequência fundamental não é conhecida exatamente, como é típico em SEE, o número de amostras pode não cobrir ciclos inteiros do sinal amostrado. Nesse caso o espectro calculado irá apresentar o fenômeno de vazamento espectral ("leakage") que se traduz no seguinte erro básico: *as amplitudes calculadas sofrem um achatamento e um espalhamento em torno das raiais espectrais originais.*

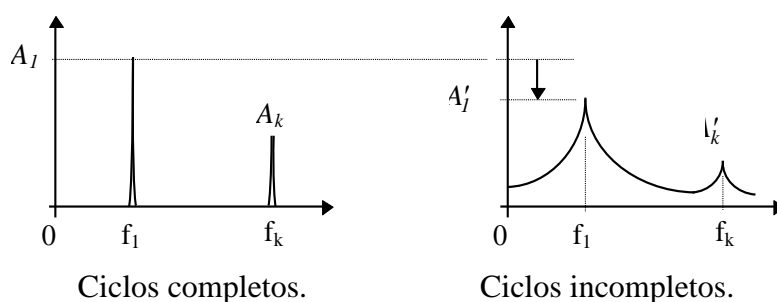


Figura 4.25 Saída de FFT a partir de amostras que não se referem a ciclos completos do sinal.

Este efeito pode ser visualizado no sinal a seguir, que apresenta a mesma forma de onda mostrada anteriormente, mas com um número não inteiro de ciclos, bem como o respectivo espectro. Notar que a identificação da frequência ainda se mostrou correta (o que nem sempre acontece, pois pode haver um deslocamento do pico), mas com grande erro de amplitude.

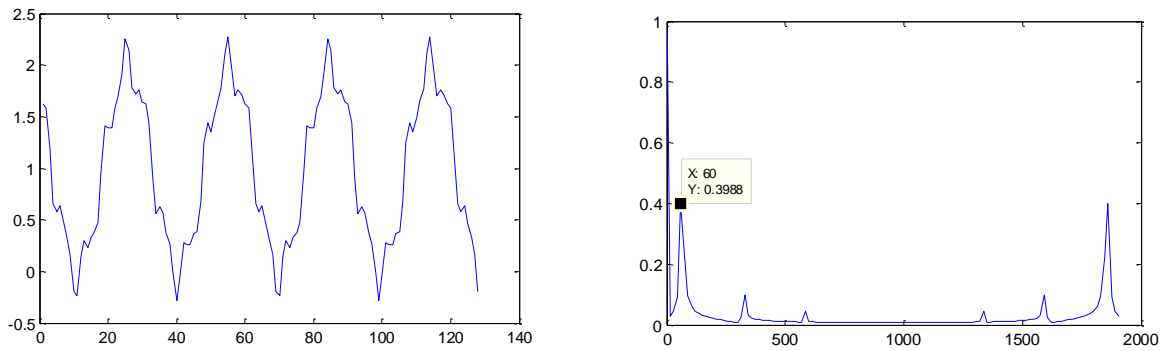
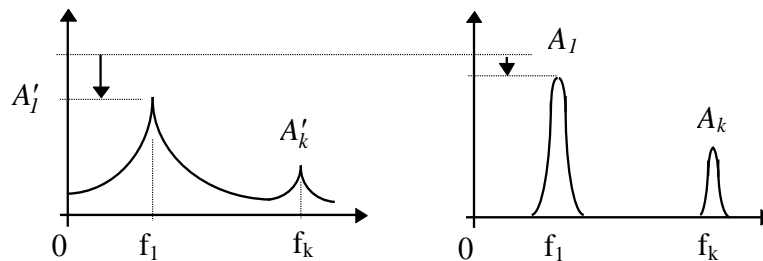


Figura 4.26 Amostragem de ciclos fracionários e respectivo espectro.

Como esse erro é devido basicamente ao truncamento do sinal, uma forma usual de se contornar tal efeito é utilizar funções de ponderação ou janelas ("windows") para atenuar o impacto de truncamento. Essas janelas, porém, alteram a energia do sinal e, por isso, introduzem um fator adicional de escala de amplitude.

Existem muitos tipos de janelas e cada uma produz um efeito particular sobre o espectro do sinal. Pode-se dizer que uma janela causa dois efeitos principais sobre o espectro:

- reduz o efeito de vazamento e, portanto, atenua as raiais laterais do espectro calculado, melhorando a identificação de frequências;
- "alarga" a banda em torno das raiais principais, afetando a identificação da amplitude.



Sem Janela de Ponderação.

Com Janela de Ponderação.

Figura 4.27 Efeito sobre o espectro ao se aplicar "janelas" no sinal amostrado com ciclos fracionários.

O que distingue uma janela da outra é o compromisso entre esses dois efeitos. Por exemplo:

$$\text{Janela retangular} \begin{cases} W(k)=1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ W(k)=0 & \text{diferente} \end{cases}$$

$$\text{Janela triangular} \begin{cases} W(k)=\frac{2k}{N} & 0 \leq k \leq N/2 \\ W(k)=2-\frac{2k}{N} & N/2 \leq k \leq N \end{cases}$$

$$\text{Janela Hamming} \begin{cases} W(k)=0,54-0,46\cos\left(2\pi\frac{k}{N}\right) & 0 \leq k \leq N-1 \\ W(k)=0 & \text{diferente} \end{cases}$$

Na figura 4.28 mostra-se o resultado de aplicar a janela de Hamming no exemplo anterior. Comparando-se os espectros das figuras 4.26 e 4.28, nota-se um menor espalhamento. A identificação de frequências é mais precisa, embora tenha aumentado o erro de amplitude, o que é esperado, pois o sinal amostrado sofre atenuação nas bordas, exatamente para reduzir seu efeito no cálculo da FFT.

Com o aumento na quantidade de ciclos, mesmo que haja truncamento, o efeito relativo do ciclo incompleto se torna desprezível.

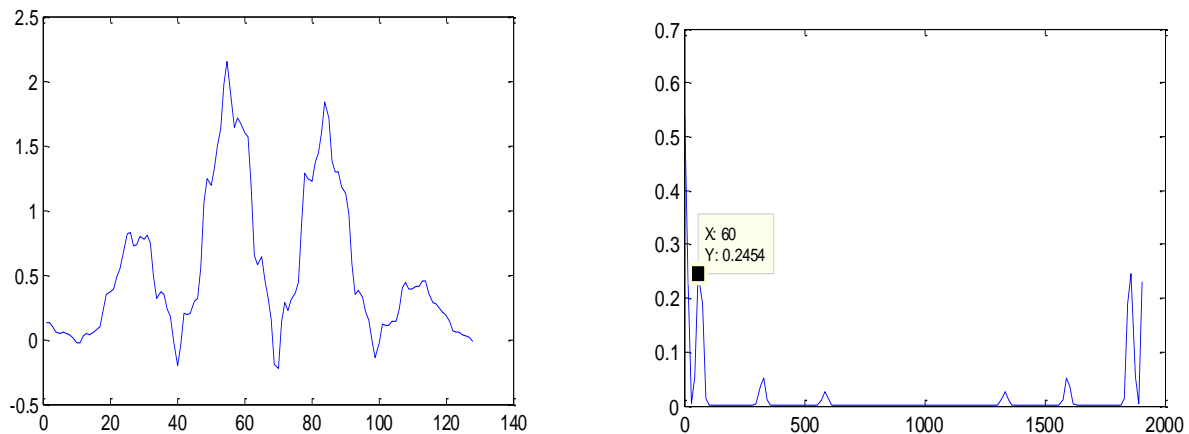
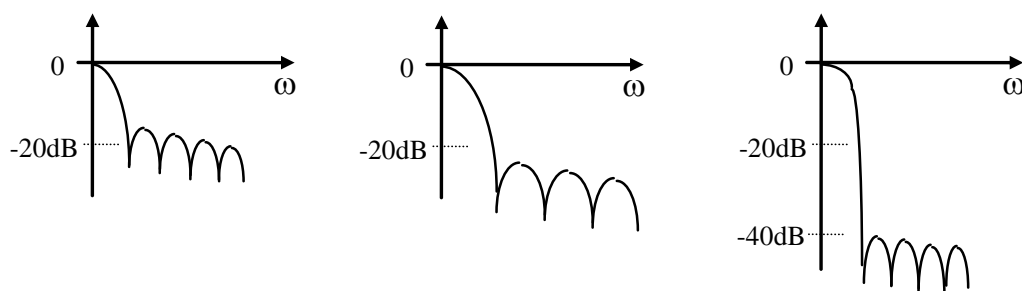


Figura 4.28 Aplicação da janela de Hamming em sinal amostrado e seu efeito sobre o espectro.



a) Janela retangular b) Janela triangular c) Janela de Hamming.

Figura 4.29 Os espectros das janelas mencionadas.

Existem vários outros tipos de janelas de ponderação (Blackman, Hanning, Exponencial, etc.). Quanto maior for a atenuação dos lóbulos laterais do espectro da janela, melhor é a janela. Mas também é desejável que o lóbulo principal seja o mais plano possível para introduzir menor atenuação em torno das frequências contidas no sinal que se deseja analisar.

A figura 4.30 mostra que, com número inteiro de ciclos, a aplicação da janela é indiferente. A FFT calcula com precisão a amplitude (o aplicativo presente no osciloscópio já fornece o valor eficaz da harmônica) e identifica corretamente a frequência. Já com número fracionário de ciclos, a frequência não é bem identificada, bem como há erro na amplitude.

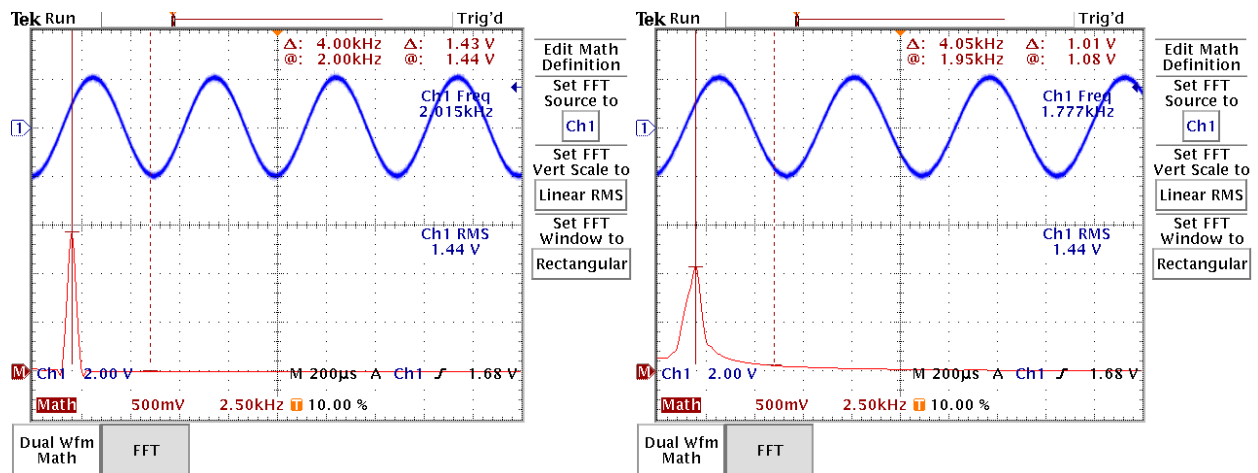


Figura 4.30 Janela retangular com número inteiro (esq.) e fracionário (dir.) de ciclos.

Ao aumentar a quantidade de ciclos, mesmo não havendo um número de ciclos, os erros de frequência e de amplitude são minimizados, como mostra a figura a seguir.

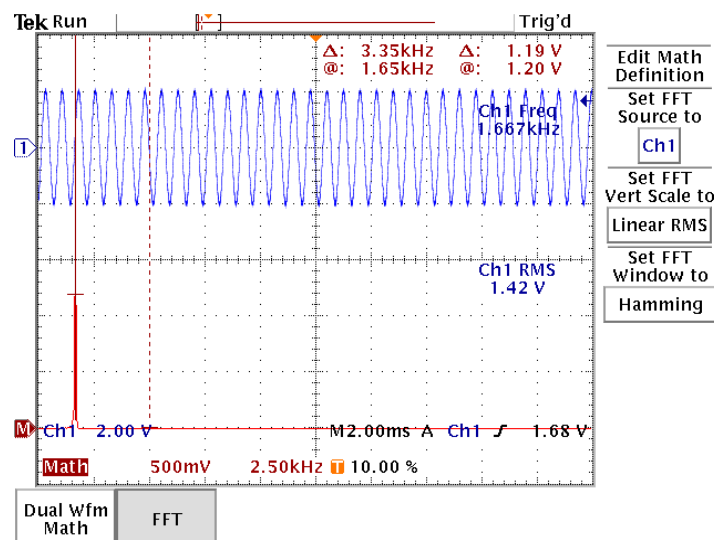


Figura 4.31 FFT com grande quantidade de ciclos com janela Hamming.

Considerando uma onda quadrada, quando se tem uma quantidade de ciclos inteiros, a identificação da frequência é correta, assim como a amplitude. No caso ilustrado na figura a seguir, a onda quadrada tem 2 V de amplitude, o que leva a uma fundamental com 2,546 V de amplitude e 1,8 V de valor eficaz. No entanto, para ciclos fracionários, repetem-se os erros na identificação da frequência e no valor da amplitude.

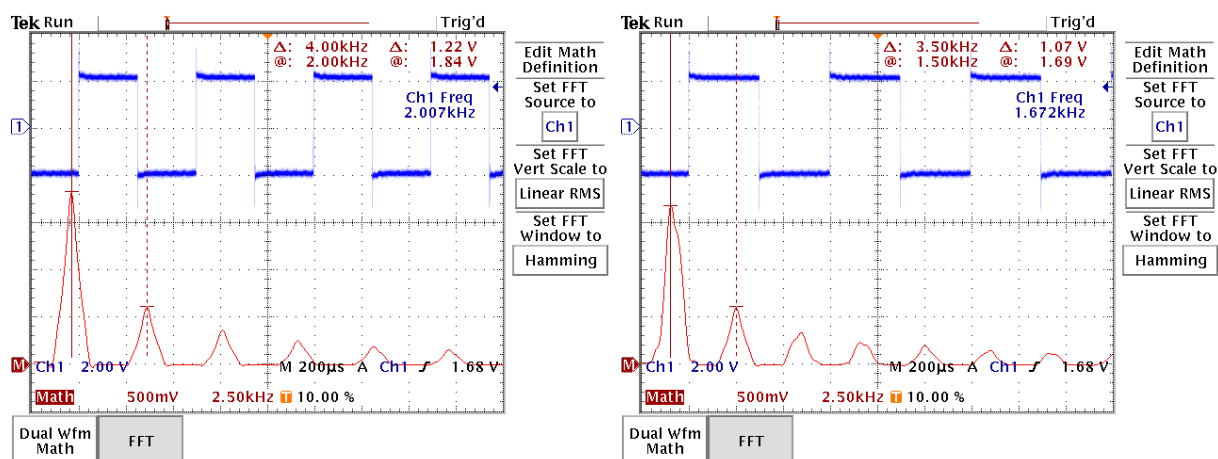


Figura 4.32 Janela Hamming com número inteiro (esq) e fracionário (dir) de ciclos.

Novamente, com uma grande quantidade de ciclos, o erro na identificação da frequência se reduz mas persiste o erro de estimativa da amplitude.

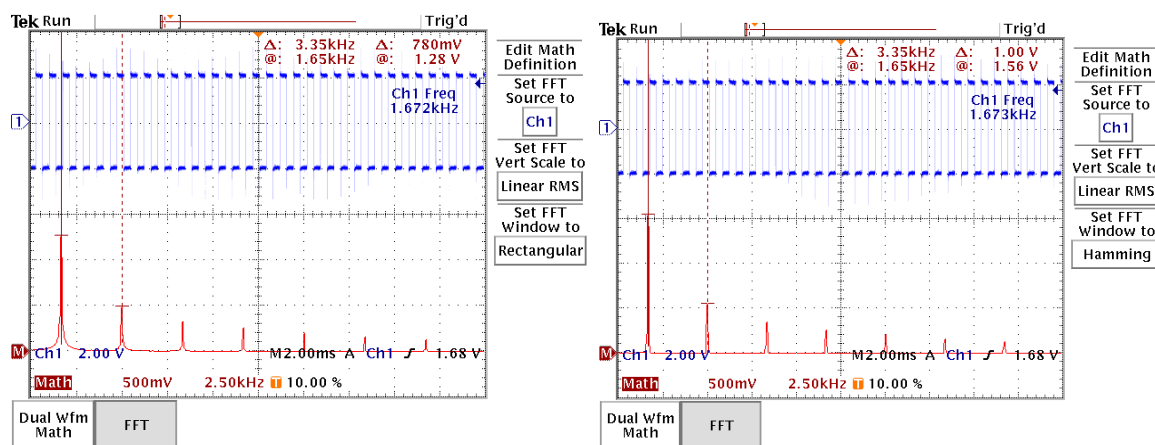


Figura 4.33 Efeito do aumento do número de ciclos, para janelas retangular (esq) e Hamming (dir).