Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский национальный технический университет
Факультет транспортных коммуникаций
Кафедра «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»

Отчет
по лабораторным работам за весенний семестр 2020-2021 учебного года по дисциплине
«Методы создания государственной геодезической основы»
Вариант №3

Выполнил ст.гр.11405118
Вишняков Д.Н.
Проверил ст. преподаватель
Будо А.Ю.

Минск, 2021

Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский национальный технический университет
Факультет транспортных коммуникаций
Кафедра «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»

Отчет
по лабораторной работе №1
«Прямая и обратная геодезическая задача на сфере»
Вариант №3

Выполнил ст.гр.11405118
Вишняков Д.Н.
Проверил ст. преподаватель
Будо А.Ю.

Минск, 2021

Обратная геодезическая задача на сфере

При решении обратной геодезической задачи нам дано:

1. Широта первой точки φ_1,
2. Долгота первой точки λ_1,
3. Широта второй точки φ_2,
4. Долгота второй точки λ_2.

Необходимо найти:

1. Сферическое расстояние ψ_{12},
2. Прямой азимут A_{12},
3. Обратный азимут A_{21}.

Решение:

Из теоремы косинусов находим сферическое расстояние рассчитываем по формуле (1).

$$\psi_{12} = \arccos\left(\sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)\cdot\cos(\Delta\lambda_{12})\right) \tag{1}$$

где $\Delta\lambda_{12}$ находим по формуле (2)

$$\Delta\lambda_{12} = \lambda_2 - \lambda_1 \tag{2}$$

Прямой азимут рассчитывается по формуле (3)

$$A_{12} = \mathrm{arctg}\left(\left|\frac{\sin(A_{12})}{\cos(A_{12})}\right|\right) \tag{3}$$

где $\sin(A_{12})$ находим по формуле (4), $\cos(A_{12})$ находим по формуле (5)

$$\sin(A_{12}) = \frac{\sin(\Delta\lambda_{12})\cdot\cos(\varphi_2)}{\sin(\psi_{12})} \tag{4}$$

$$\cos(A_{12}) = \frac{\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_1)\cdot\sin(\psi_{12})} \tag{5}$$

Обратный азимут рассчитывается по формуле (6)

$$A_{21} = 360^\circ - \mathrm{arctg}\left(\left|\frac{\sin(A'_{21})}{\cos(A'_{21})}\right|\right) \tag{6}$$

где $\sin(A'_{21})$ находим по формуле (7), $\cos(A'_{21})$ находим по формуле (8)

$$\sin(A'_{21}) = \frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)} \tag{7}$$

$$\cos(A'_{21}) = \frac{\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)\cdot\sin(\psi_{12})} \tag{8}$$

Результаты вычислений приведены ниже

Дано:

φ_1=54°54′00,0″

λ_1=26°42′00,0″

φ_2=54°30′00,0″

λ_2=26°54′00,0″

ψ_{12}–?

A_{12}–?

A_{21}–?

Решение:

$\psi_{12}= \arccos(\sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)+\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)\cdot\cos(\Delta\lambda_{12}))=$ =0°24′58,9″

$\Delta\lambda_{12}=\lambda_2-\lambda_1$=-0°12′00,0″

$A_{12}=360^\circ - \mathrm{arctg}\left(\left|\dfrac{\sin(A_{12})}{\cos(A_{12})}\right|\right)$ =343°57′57,7″

$\sin A_{12}=\dfrac{\sin(\Delta\lambda_{12})\cdot\cos(\varphi_2)}{\sin(\psi_{12})}$=-0,278944

$\cos A_{12}=\dfrac{\sin(\varphi_2)-\sin(\varphi_1)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_1)\cdot\sin(\psi_{12})}$=0,960307

$A_{21}=360^\circ - \mathrm{arctg}\left(\left|\dfrac{\sin(A'_{21})}{\cos(A'_{21})}\right|\right)$ -180° =163°48′10,0″

$\sin A'_{21}=\dfrac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)}$=-0,293225

$\cos A'_{21}=\dfrac{\sin(\varphi_1)-\sin(\varphi_2)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)\cdot\sin(\psi_{12})}$=-0,961098

Ответ: ψ_{12}=0°24′58,9″

A_{12}=343°57′57,7″

A_{21}=163°48′10,0″

Прямая геодезическая задача

Прямая задача определяется следующим образом

Дано: широта и долгота первой точки, сферическое расстояние и азимут между двумя точками.

$$\varphi_1 \quad \lambda_1 \quad \psi_{12} \quad A_{12}$$

Найти: широту, долготу второй точки, обратный азимут.

$$\varphi_2 \quad \lambda_2 \quad A_{21}$$

Решение: по теореме косинусов с учетом формул приведения можем найти широту второй точки (формула 9)

$$\varphi_2 = \arcsin\left(\sin(\varphi_1)\cdot\cos(\psi_{12}) + \cos(\varphi_1)\cdot\sin(\psi_{12})\cdot\cos(A_{12})\right) \tag{9}$$

А также долгота второй точки по формуле 10

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{12} \tag{10}$$

При этом $\Delta\lambda_{12}$ рассчитывается по формуле 11

$$\Delta\lambda_{12} = \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{\sin(\Delta\lambda_{12})}{\cos(\Delta\lambda_{12})}\right|\right) \tag{11}$$

где $\sin(\Delta\lambda_{12})$ и $\cos(\Delta\lambda_{12})$ высчитываем по формуле 12

$$\begin{gathered}\sin(\Delta\lambda_{12}) = \frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)}\\ \cos(\Delta\lambda_{12}) = \frac{\cos(\psi_{12}) - \sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)}{\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)}\end{gathered} \tag{12}$$

Обратный азимут

$$A_{21} = 360^\circ - \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{\sin(A'_{21})}{\cos(A'_{21})}\right|\right) \tag{13}$$

где $\sin(A'_{21})$ и $\cos(A'_{21})$ по формуле 14

$$\begin{gathered}\sin(A'_{21}) = \frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)}\\ \cos(A'_{21}) = \frac{\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)\cdot\sin(\psi_{12})}\end{gathered} \tag{14}$$

При нахождении прямых и обратных азимутов сначала вычисляется румб и затем уже с учетом четверти сам азимут.

Результаты вычислений приведены ниже

Дано:	Решение:
φ_1=54°54′00,0″	$\varphi_2 = \arcsin(\sin(\varphi_1)\cdot\cos(\psi_{12}) + \cos(\varphi_1)\cdot\sin(\psi_{12})\cdot\cos(A_{12})) =$ =54°30′00,0″
λ_1=26°42′00,0″	
ψ_{12}=0°24′58,9″	$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{12}$ =26°54′00,0″
A_{12}=344°01′03,7″	$\Delta\lambda_{12} = \mathrm{arctg}\left(\left\lvert\frac{\sin(\Delta\lambda_{12})}{\cos(\Delta\lambda_{12})}\right\rvert\right)$ =-0,200000
φ_2–?	$\sin\Delta\lambda_{12} = \frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)}$ =-0,003491
λ_2–?	$\cos\Delta\lambda_{12} = \frac{\cos(\psi_{12}) - \sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)}{\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)}$ =0,999994
A_{21}–?	
	$A_{21} = 360^\circ - \mathrm{arctg}\left(\left\lvert\frac{\sin(A'_{21})}{\cos(A'_{21})}\right\rvert\right)$ -180°=163°48′10,0″
	$\sin A'_{21} = \frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)}$ =-0,293225
	$\cos A'_{21} = \frac{\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)\cdot\sin(\psi_{12})}$ =-0,961098
	Ответ: φ_2=54°30′00,0″
	λ_2=26°54′00,0″
	A_{21}=163°48′10,0″

Нахождение кратчайшего расстояния между двумя точками

Для нахождения кратчайшего расстояния между двумя точками примем радиус сферы за R = 6371000 м, воспользуемся следующими формулами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ r\cos(\varphi)\sin(\lambda) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \lambda = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \varphi = \arcsin\left(\dfrac{z}{r}\right) \end{cases} \quad (15)$$

и

$$S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (16)$$

Также воспользуемся сферической формулой для нахождения кратчайшего расстояния между двумя точками

$$S_a = a \cdot R \quad (17)$$

Воспользуемся формулами 15 для первой и второй точки соответственно

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\phi_1)\,cos(\lambda_1) \\ r\,cos(\phi_1)\,sin(\lambda_1) \\ r\,sin(\phi_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3272739{,}634 \\ 1646016{,}555 \\ 5212431{,}850 \end{pmatrix} \text{ м}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\phi_2)\,cos(\lambda_2) \\ r\,cos(\phi_2)\,sin(\lambda_2) \\ r\,sin(\phi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3299346{,}338 \\ 1673853{,}932 \\ 5186729{,}967 \end{pmatrix} \text{ м}$$

Тогда, по формуле 16, S будет равно

$$S = 46297{,}117 \text{ м}$$

Воспользуемся формулой 17 и сравним значение, полученное по формуле 16.

$$S_a = a \cdot R = 0{,}01322414 \cdot 6371000 = 46297{,}218$$

$$S_a > S$$

$$46297{,}117 > 46297{,}218$$

Так как мы сравнили расстояния, найденные через формулы прямоугольного пространства и пространства на сфере можно сделать вывод о том, что расстояние на сфере между одними и теми же точками будет больше чем в прямоугольном пространстве из-за появления такой величины как сферический избыток.

Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский национальный технический университет
Факультет транспортных коммуникаций
Кафедра «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»

Отчет
по лабораторной работе №2
«Главная геодезическая задача на эллипсоиде»
Вариант №3

Выполнил: ст.гр.11405118
Вишняков Д.Н.
Проверил: ст. преподаватель
Будо А.Ю.

Минск, 2021

2.1. Обратная Геодезическая Задача (ОГЗ) на эллипсоиде WGS84

Исходными данными в ОГЗ на эллипсоиде являются:

Широта и долгота первой точки φ_1, λ_1.

Широта и долгота второй точки φ_2, λ_2.

Необходимо найти:

Длина геодезической линии S

Прямой азимут α_1.

Обратный азимут α_2.

Ход решения

Действие 1. Вычисление в радианах разности широт и долгот, а также среднее значение широты.

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \tag{2.1}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \tag{2.2}$$

$$\varphi_{cp} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \tag{2.3}$$

Действие 2. Вычисление радиуса кривизны первого вертикала и меридиана и вспомогательные величины, которые обеспечат компактный вид формул и уменьшат сложность вычислений остальных величин.

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \left(\sin\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2}} \tag{2.4}$$

$$M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\left(1 - e^2 \cdot \left(\sin\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.5}$$

где e^2 – квадрат эксцентриситета и равен

$$e^2 = 2 \cdot f - f^2 \tag{2.6}$$

a, f – параметры эллипсоида WGS84

Вспомогательные величины рассчитываются по следующим формулам

$$t = \mathrm{tg}\left(\varphi_{cp}\right) \tag{2.7}$$

$$\eta^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \left(\cos\left(\varphi_{cp}\right)^2\right) \tag{2.8}$$

$$V^2 = 1 + \eta^2 \tag{2.9}$$

$$f_1 = \frac{1}{M} \tag{2.10}$$

$$f_2 = \frac{1}{N} \tag{2.11}$$

$$f_3 = \frac{1}{24} \tag{2.12}$$

$$f_4 = \frac{1+\eta^2 - 9\cdot\eta^2\cdot t^2}{24\cdot V^4} \tag{2.13}$$

$$f_5 = \frac{1 - 2\cdot\eta^2}{24} \tag{2.14}$$

$$f_6 = \frac{\eta^2\cdot\left(1 - t^2\right)}{8\cdot V^4} \tag{2.15}$$

$$f_7 = \frac{1+\eta^2}{12} \tag{2.16}$$

$$f_8 = \frac{3 + 8\cdot\eta^2}{24\cdot V^4} \tag{2.17}$$

Действие 3. Вычисление трех вспомогательных величин.

$$S\cdot\sin(\alpha)\ \ S\cdot\cos(\alpha)\ \ \Delta\alpha$$

по формулам

$$S\cdot\sin(\alpha) = \frac{1}{f_2}\cdot\Delta\lambda\cdot\cos(\varphi_{cp})\cdot\left(1 - f_3\cdot\left(\Delta\lambda\cdot\sin(\varphi_{cp})\right)^2 + f_4\cdot(\Delta\varphi)^2\right) \tag{2.18}$$

$$S\cdot\cos(\alpha) = \frac{1}{f_1}\cdot\Delta\varphi_{cp}\cdot\cos\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)\cdot\left(1 - f_5\cdot\left(\Delta\lambda\cdot\sin(\varphi_{cp})\right)^2 + f_6\cdot(\Delta\varphi)^2\right) \tag{2.19}$$

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda\cdot\sin(\varphi_{cp})\cdot\left(1 + f_7\cdot\left(\Delta\lambda\cdot\cos(\varphi_{cp})\right)^2 + f_8\cdot(\Delta\varphi)^2\right) \tag{2.20}$$

Действие 4. Вычисления окончательных значений величин

Длина геодезической линии

$$S = \sqrt{\left(S\cdot\sin(\alpha)\right)^2 + \left(S\cdot\cos(\alpha)\right)^2} \tag{2.21}$$

Величина азимута вычисляется стандартно, т.е. как румб с учетом четверти.

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{S\cdot\sin(\alpha)}{S\cdot\cos(\alpha)}\right|\right) \tag{2.22}$$

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{\Delta\alpha}{2} \tag{2.23}$$

$$\alpha_2 = \alpha + \frac{\Delta\alpha}{2} + \pi \tag{2.24}$$

Значение азимутов должно находится в интервале

$$0 \le \alpha \le 2\pi \tag{2.25}$$

Результаты расчетов приведены ниже

Дано:	Решение:
$\varphi_1=54^\circ54'00''$	***Действие 1. Вычисление в радианах разности широт***
$\varphi_2=54^\circ30'00''$	***и долгот, а также среднее значение широты***
$\lambda_1=26^\circ42'00''$	$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0{,}006981$ рад
$\lambda_2=26^\circ54'00''$	$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = -0.003491$ рад
S-?	$\varphi_{cp} = \dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = 0{,}954695$ рад
α_1-?	***Действие 2. Вычисление радиуса кривизны первого***
α_2-?	***вертикала и меридиана***

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot\left(\sin\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2}} = 6392404{,}778 \text{ м}$$

$$M = \frac{a\cdot(1-e^2)}{\left(1-e^2\cdot\left(\sin\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 6378051{,}299 \text{ м}$$

$$t = \operatorname{tg}\left(\varphi_{cp}\right) = 1{,}412350$$

$$\eta^2 = \frac{e^2}{1-e^2}\cdot\left(\cos\left(\varphi_{cp}\right)^2\right) = 0.047439$$

$$V^2 = 1+\eta^2 = 1.001125$$

$$f_1 = \frac{1}{M} = 0{,}0000001$$

$$f_2 = \frac{1}{N} = 0{,}0000001$$

$$f_3 = \frac{1}{24} = 0{,}0416666$$

$$f_4 = \frac{1+\eta^2-9\cdot\eta^2\cdot t^2}{24\cdot V^4} = 0{,}039897$$

$$f_5 = \frac{1-2\cdot\eta^2}{24} = 0{,}041479$$

$$f_6 = \frac{\eta^2\cdot\left(1-t^2\right)}{8\cdot V^4} = -0.000279$$

$$f_7 = \frac{1+\eta^2}{12} = 0.083521$$

$$f_8 = \frac{3+8\cdot\eta^2}{24\cdot V^4} = 0.125186$$

Действие 3. Вычисления трех вспомогательных

величин

$$S \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{f_2} \cdot \Delta\lambda \cdot \cos(\varphi_{cp}) \cdot \left(1 - f_3 \cdot (\Delta\lambda \cdot \sin(\varphi_{cp}))^2 + f_4 \cdot (\Delta\varphi)^2\right) =$$

= -12894,164 (м)

$$S \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{f_1} \cdot \Delta\varphi_{cp} \cdot \cos\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right) \cdot \left(1 - f_5 \cdot (\Delta\lambda \cdot \sin(\varphi_{cp}))^2 + f_6 \cdot (\Delta\varphi)^2\right) =$$

= -44527,137 (м)

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda \cdot \sin(\varphi_{cp}) \cdot \left(1 + f_7 \cdot (\Delta\lambda \cdot \cos(\varphi_{cp}))^2 + f_8 \cdot (\Delta\varphi)^2\right) =$$

= -0,163229 (рад)

Действие 4. Вычисления окончательных значений

Величин

$$\mathrm{S} = \sqrt{(S \cdot \sin(\alpha))^2 + (S \cdot \cos(\alpha))^2} = 46356{,}503 \text{ (м)}$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\left|\frac{S \cdot \sin(\alpha)}{S \cdot \cos(\alpha)}\right|\right) = 5{,}88962 \text{ рад}$$

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{\Delta\alpha}{2} = 5{,}89317 \text{ рад} = 163^\circ 46' \, 06{,}36''$$

$$\alpha_2 = \alpha + \frac{\Delta\alpha}{2} - \pi = 2{,}74447 \text{ рад} = 343^\circ 55' \, 53{,}98''$$

Ответ: S = 46356,503 м

α_1 = 163°46′ 06,36″

α_2 = 343°55′ 53,98″

2.2. Прямая Геодезическая Задача (ПГЗ) на эллипсоиде WGS84

Исходными данными в ПГЗ на эллипсоиде являются:

Широта и долгота первой точки φ_1, λ_1.

Длина геодезической линии S

Прямой азимут α_1.

Необходимо найти:

Широта и долгота второй точки φ_2, λ_2.

Обратный азимут α_2.

Ход решения

Действие 1. Вычисляем приблизительные координаты точки 2

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{S \cdot \cos(\alpha_1)}{M_1} \tag{2.26}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{S \cdot \sin(\alpha_1)}{N_1 \cdot \cos(\varphi_1)} \tag{2.27}$$

Действие 2. В ходе итерационного процесса вычисляются обратный азимут, широта и долгота второй точки по формулам.

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda \cdot \sin(\varphi_{cp}) \cdot \left(1 + f_7 \cdot (\Delta\lambda \cdot \cos(\varphi_{cp}))^2 - f_4 \cdot \Delta\varphi^2\right) \tag{2.28}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\Delta\alpha}{2} \tag{2.29}$$

$$\alpha_2 = \alpha + \frac{\Delta\alpha}{2} + \pi \tag{2.30}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + f_2 \cdot \frac{S \cdot \sin(\alpha)}{\cos(\varphi_{cp})} \cdot \left(1 + f_3 \cdot (\Delta\lambda \cdot \sin(\varphi_{cp}))^2 - f_4 \cdot \Delta\varphi^2\right) \tag{2.31}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + f_1 \cdot \frac{S \cdot \cos(\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\Delta\lambda}{2}\right)} \cdot \left(1 - f_5 \cdot (\Delta\lambda \cdot \cos(\varphi_{cp}))^2 - f_6 \cdot \Delta\varphi^2\right) \tag{2.32}$$

Перед началом каждой итерации перевычисляются значения формул (2.1 – 2.5), а также все необходимые для их вычисления вспомогательные величины (2.7 – 2.17). Итерации следует продолжать до тех пор, пока значения текущей и предыдущей итераций не будут отличаться на пренебрегаемо малую величину, которая зависит от вида выполняемых работ.

Дано:

φ_1=54°54′0″

λ_1=26°42′0″

α_1 = 163°46′ 06,36″

S = 46356,503 м

φ_2-?

λ_2-?

α_2-?

Решение:

Действие 1. Вычисление приблизительных координат точки 2

$$N_1 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot(\sin(\varphi_1))^2}} = 6392404{,}778 \text{ м}$$

$$M_1 = \frac{a\cdot(1-e^2)}{\left(1-e^2\cdot(\sin(\varphi_1))^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 6378051{,}299 \text{ м}$$

$$\varphi_2{}' = \varphi_1 + \frac{S\cdot\cos(\alpha_1)}{M_1} = 0{,}951204 \text{ рад}$$

$$\lambda_2{}' = \lambda_1 + \frac{S\cdot\sin(\alpha_1)}{N_1\cdot\cos(\varphi_1)} = 0{,}469494 \text{ рад}$$

Действие 2. В ходе итерационного процесса вычисляем обратный азимут, широта и долгота 2-ой точки

I итерация

$$\Delta\varphi = \varphi_2{}' - \varphi_1 = 0{,}006978 \text{ рад}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_2{}' - \lambda_1 = -0{,}003525 \text{ рад}$$

$$\varphi_{ср}{}' = \frac{\varphi_1 + \varphi_2{}'}{2} = 0{,}954696 \text{ рад}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot\left(\sin\left(\varphi_{ср}{}'\right)\right)^2}} = 6392404{,}809 \text{ м}$$

$$M = \frac{a\cdot(1-e^2)}{\left(1-e^2\cdot\left(\sin\left(\varphi_{ср}{}'\right)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 6378051{,}393 \text{ м}$$

$$t = \operatorname{tg}\left(\varphi_{ср}{}'\right) = 1{,}412355$$

$$\eta^2 = \frac{e^2}{1-e^2}\cdot\left(\cos\left(\varphi_{ср}{}'\right)^2\right) = 0{,}002250$$

$$V^2 = 1+\eta^2 = 1{,}002250$$

$$f_1 = \frac{1}{M} = 0{,}0000001567$$

$f_2 = \dfrac{1}{N}$ = 0,0000001564

$f_3 = \dfrac{1}{24}$ =0,041666

$f_4 = \dfrac{1+\eta^2-9\cdot\eta^2\cdot t^2}{24\cdot V^4}$ =0,039897

$f_5 = \dfrac{1-2\cdot\eta^2}{24}$ =0,041479

$f_6 = \dfrac{\eta^2\cdot(1-t^2)}{8\cdot V^4}$ = -0,000278

$f_7 = \dfrac{1+\eta^2}{12}$ = 0,083521

$f_8 = \dfrac{3+8\cdot\eta^2}{24\cdot V^4}$ = 0,125186

$\Delta\alpha = \Delta\lambda\cdot\sin(\varphi_{cp})\cdot\left(1+f_7\cdot(\Delta\lambda\cdot\cos(\varphi_{cp}))^2-f_4\cdot\Delta\varphi^2\right)=$

= -0,002877 рад

$\alpha = \alpha_1 + \dfrac{\Delta\alpha}{2}$ = 2,859736 рад

$\alpha_2 = \alpha + \dfrac{\Delta\alpha}{2} - \pi$ =6,002768 рад = 163°46′06,35″

$\varphi_2 = \varphi_1 + f_1\cdot\dfrac{S\cdot\cos(\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\Delta\lambda}{2}\right)}\cdot\left(1-f_5\cdot(\Delta\lambda\cdot\cos(\varphi_{cp}))^2-f_6\cdot\Delta\varphi^2\right)=$

=0,951204 рад = 54°29′59,9″

$\lambda_2 = \lambda_1 + f_2\cdot\dfrac{S\cdot\sin(\alpha)}{\cos(\varphi_{cp})}\cdot\left(1+f_3\cdot(\Delta\lambda\cdot\sin(\varphi_{cp}))^2-f_4\cdot\Delta\varphi^2\right)=$

= 0,469493 рад = 26°53′59,9″

II итерация

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ = 0,006981 рад

$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ = -0,003490 рад

$\varphi_{cp} = \dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ = 0,954695 рад

$N = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot(\sin(\varphi_{cp}))^2}}$ = 6392404,777 м

$$M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\left(1 - e^2 \cdot \left(\sin\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 6378051{,}298 \text{ м}$$

$$t = \mathrm{tg}\left(\varphi_{cp}\right) = 1{,}412350$$

$$\eta^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \left(\cos\left(\varphi_{cp}\right)^2\right) = 0{,}002250$$

$$V^2 = 1 + \eta^2 = 1{,}002250$$

$$f_1 = \frac{1}{M} = 0{,}0000001567$$

$$f_2 = \frac{1}{N} = 0{,}0000001564$$

$$f_3 = \frac{1}{24} = 0{,}041666$$

$$f_4 = \frac{1 + \eta^2 - 9 \cdot \eta^2 \cdot t^2}{24 \cdot V^4} = 0{,}039897$$

$$f_5 = \frac{1 - 2 \cdot \eta^2}{24} = 0{,}041479$$

$$f_6 = \frac{\eta^2 \cdot \left(1 - t^2\right)}{8 \cdot V^4} = -0{,}000278$$

$$f_7 = \frac{1 + \eta^2}{12} = 0{,}083520$$

$$f_8 = \frac{3 + 8 \cdot \eta^2}{24 \cdot V^4} = 0{,}125186$$

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda \cdot \sin\left(\varphi_{cp}\right) \cdot \left(1 + f_7 \cdot \left(\Delta\lambda \cdot \cos\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2 - f_4 \cdot \Delta\varphi^2\right) =$$

$$= -0{,}002848 \text{ рад}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\Delta\alpha}{2} = 2{,}859722 \text{ рад}$$

$$\alpha_2 = \alpha + \frac{\Delta\alpha}{2} - \pi = 6{,}002739 \text{ рад} = 163^\circ 51' 00{,}0''$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + f_1 \cdot \frac{S \cdot \cos(\alpha)}{\cos\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)} \cdot \left(1 - f_5 \cdot \left(\Delta\lambda \cdot \cos\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2 - f_6 \cdot \Delta\varphi^2\right) =$$

$$= 0{,}951204 \text{ рад} = 54^\circ 29' 59{,}91''$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + f_2 \cdot \frac{S \cdot \sin(\alpha)}{\cos\left(\varphi_{cp}\right)} \cdot \left(1 + f_3 \cdot \left(\Delta\lambda \cdot \sin\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2 - f_4 \cdot \Delta\varphi^2\right) =$$

=0,469493 рад = 26˚53′59,88″

III итерация

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ = 0,006981 рад

$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ = -0,003490 рад

$\varphi_{cp} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ = 0,954695 рад

$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \left(\sin\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2}}$ = 6392404,777 м

$M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\left(1 - e^2 \cdot \left(\sin\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ = 6378051,298 м

$t = \mathrm{tg}\left(\varphi_{cp}\right)$=1,412350

$\eta^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \left(\cos\left(\varphi_{cp}\right)^2\right)$= 0,002250

$V^2 = 1 + \eta^2$ = 1,002250

$f_1 = \frac{1}{M}$ = 0,0000001567

$f_2 = \frac{1}{N}$ = 0,0000001564

$f_3 = \frac{1}{24}$ = 0,041666

$f_4 = \frac{1 + \eta^2 - 9 \cdot \eta^2 \cdot t^2}{24 \cdot V^4}$ = 0,039897

$f_5 = \frac{1 - 2 \cdot \eta^2}{24}$ = 0,041479

$f_6 = \frac{\eta^2 \cdot \left(1 - t^2\right)}{8 \cdot V^4}$ = -0,000278

$f_7 = \frac{1 + \eta^2}{12}$ =0,083520

$f_8 = \frac{3 + 8 \cdot \eta^2}{24 \cdot V^4}$ 0,125186

$\Delta\alpha = \Delta\lambda \cdot \sin\left(\varphi_{cp}\right) \cdot \left(1 + f_7 \cdot \left(\Delta\lambda \cdot \cos\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2 - f_4 \cdot \Delta\varphi^2\right) =$

= -0,002842 рад

$\alpha = \alpha_1 + \frac{\Delta\alpha}{2}$ = 2,859722 рад

$$\alpha_2 = \alpha + \frac{\Delta\alpha}{2} - \pi = 6{,}002739 \text{ рад} = 343^\circ 55' 53{,}8''$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + f_1 \cdot \frac{S \cdot \cos(\alpha)}{\cos\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)} \cdot \left(1 - f_5 \cdot \left(\Delta\lambda \cdot \cos(\varphi_{cp})\right)^2 - f_6 \cdot \Delta\varphi^2\right) =$$

$$= 0{,}951204 \text{ рад} = 54^\circ 29' 59{,}91''$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + f_2 \cdot \frac{S \cdot \sin(\alpha)}{\cos(\varphi_{cp})} \cdot \left(1 + f_3 \cdot \left(\Delta\lambda \cdot \sin(\varphi_{cp})\right)^2 - f_4 \cdot \Delta\varphi^2\right) =$$

$$= 0{,}469493 \text{ рад} = 26^\circ 53' 59{,}88''$$

Ответ: $\alpha_2 = 343^\circ 55' 53{,}8''$

$\varphi_2 = 54^\circ 29' 59{,}91''$

$\lambda_2 = 26^\circ 53' 59{,}88''$

2.3. Вычисление кратчайшего расстояния между двумя исходными точками, проверить правильность пересчета и сравнить полученное значение с кратчайшим расстоянием на сфере.

Чтобы решить данную задачу необходимо воспользоваться описанием формы эллипсоида в параметрическом виде.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(\varphi)\cdot\cos\varphi\sin\lambda \\ N(\varphi)\cdot\cos\varphi\cos\lambda \\ N(\varphi)(1-e^2)\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

где $N(\varphi)$–первый вертикал

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot(\sin(\varphi))^2}} \tag{2.34}$$

Тогда координаты первой точки равны

X_1 = 3283771,430 м

Y_1 = 1651564,970 м

Z_1 = 5194990,366 м

Второй точки

X_2 = 3310394,529 м

Y_2 = 1679458,999 м

Z_2 = 5169260,039 м

Кратчайшее расстояние между двумя исходными точками находится по формуле

$$S = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2} \tag{2.35}$$

S = 46356,401 м

Для проверки правильности нахождения расстояния необходимо пространственные прямоугольные координаты перевести в геодезические. Для этого воспользуемся следующими формулами.

$$\lambda = \mathrm{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right) \tag{2.36}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{Z + \varepsilon\, b\sin^3(q)}{p - e^2\, a\cos^3(q)}\right) \tag{2.37}$$

$$\varepsilon = \frac{e^2}{1-e^2} \tag{2.40}$$

$$b = a\,(1-f) \tag{2.41}$$

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} \tag{2.42}$$

$$q = arctg\left(\frac{Z\,a}{p\,b}\right) \tag{2.43}$$

Тогда геодезические координаты будут равны соответственно

$\varepsilon = 0{,}006739$

$b = 6356752{,}314$ м $\qquad \varphi_1 = 54°54'0''$

$p_1 = 3675706{,}960$ м $\qquad \lambda_1 = 27°42'0''$

$q_1 = 0{,}956604$

$\varepsilon = 0{,}006739$

$b = 6356752{,}314$ м $\qquad \varphi_2 = 54°30'00''$

$p_2 = 3712047{,}207$ м $\qquad \lambda_2 = 26°54'00''$

$q_2 = 0{,}949615$

Сравним расстояния на сфере и на эллипсоиде

$S_{сф} = 46356{,}503$ м

$S_{эл} = 46356{,}401$ м

Вывод: расстояние на эллипсоиде зависит многих параметров, таких как, например, вдоль какой оси расположена линия. В случае с моим вариантом, расстояние на эллипсоиде вышло большим чем на сфере.

Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский национальный технический университет
Факультет транспортных коммуникаций
Кафедра «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»

Отчет
по лабораторной работе №3
«Уравнивание геодезического четырехугольника»
Вариант №3

Выполнил: ст.гр.11405118
Вишняков Д.Н.
Проверил: ст. преподаватель
Будо А.Ю.

Минск, 2021

Цель работы: Выполнить уравнивание линейно-угловой сети в виде геодезического четырехугольника и выполнить оценку точности, схема сети представлена на рисунке 1.

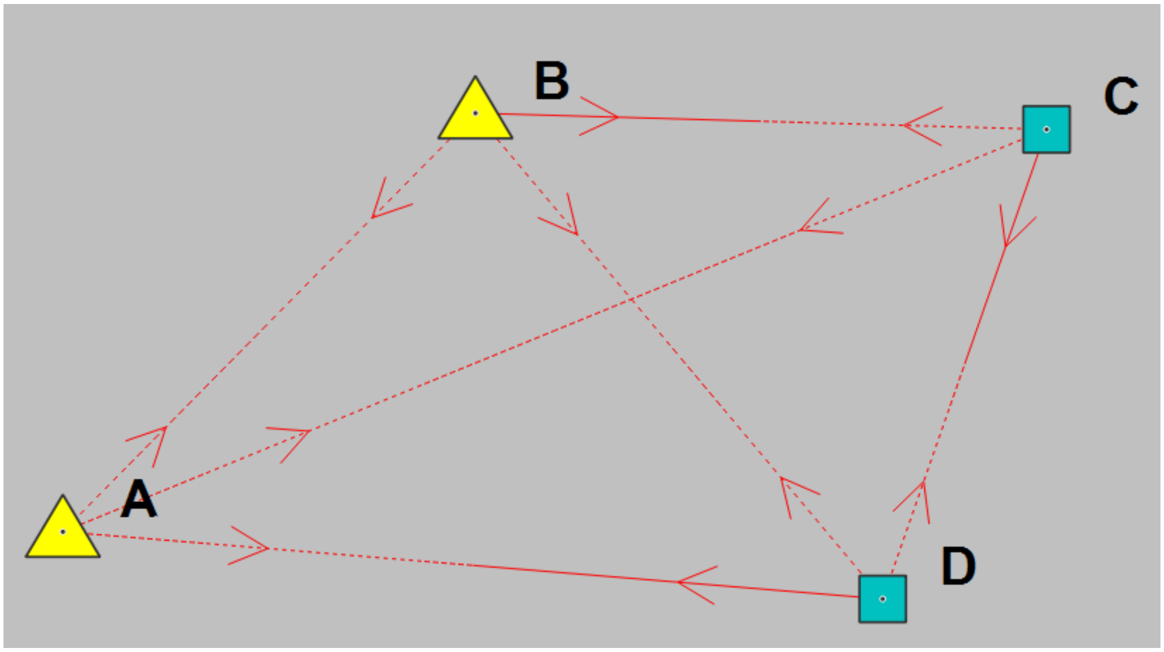

Рисунок 1 – Схема линейно-угловой сети

Исходные данные представлены в таблице 1, 2, 3.

Таблица 1. Исходные координаты

Пункт	Координаты исх.пунктов			
	N, м	E, м	N, дм	E, дм
A	1097	106	10970	1060
B	1641	643	16410	6430
	Приближ. координаты пунктов			
C	1619	1386	16190	13860
D	1009	1172	10090	11720

Таблица 2. Измеренные стороны

Элемент	Изм. Стороны, м	Изм. Стороны, дм
BC	743,084	7430,840
CD	646,870	6468,700
BD	824,574	8245,740

Таблица 3. Измеренные направления

Элемент	Изм. направления
AB	0˚00′00,00″
AC	23˚10′24,80″
AD	50˚06′36,80″
BC	0˚00′00,00″
BD	48˚23′49,50″
BA	132˚56′47,20″
CD	0˚00′00,00″
CA	48˚31′13,60″
CB	72˚23′56,90″
DA	0˚00′00,00″
DB	45˚20′23,30″
DC	104˚32′34,0″

Необходимо вычислить СКП измеренных расстояний и направлений по формуле 1

$$m = a + b \cdot D \tag{1}$$

где a = 2 мм, b = 3 ppm, также эти величины являются исходными данными.

СКП угла тахеометра m_β =2″, СКП горизонтальных направлений вычисляем по формуле 2

$$m_M = \frac{m_\beta}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

Результаты вычислений СКП измеренных направлений и расстояний сведем в таблицу 4.

Далее составляется матрица P, т.е. матрица весов измерений размерности $N \times N$, где N – количество измеренных величин и вес рассчитывается по формуле

$$P_i = \frac{1}{m_i^2} \tag{3}$$

Сама матрица выглядит следующим образом:

$$P =$$
$$\begin{vmatrix}
0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 559 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 644 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500
\end{vmatrix}$$

Таблица 4. СКП измеренных направлений и расстояний

Элемент	СКП, мм	СКП, дм
BC	4,22930	0,0422930
CD	3,94060	0,0394060
DA	4,47370	0,0447370
Элемент	СКП направлений	
AB	1,4142″	
AC	1,4142″	
AD	1,4142″	
BC	1,4142″	
BD	1,4142″	
BA	1,4142″	
BA	1,4142″	
CD	1,4142″	
CA	1,4142″	
CB	1,4142″	
DA	1,4142″	
DB	1,4142″	
DC	1,4142″	

Затем составим матрицу *A*. Для этого заполняем матрицу частными производными по измеренным направлениям по следующим формулам 4, 5, 6, 7:

$$a_{AB} = -\rho \frac{E_B - E_A}{S_{AB}^2} \qquad (4)$$

$$b_{AB} = \rho \frac{N_B - N_A}{S_{AB}^2} \qquad (5)$$

$$S_{AB} = \sqrt{(N_B - N_A)^2 + (E_B - E_A)^2} \qquad (6)$$

$$\rho = \frac{180^\circ}{\pi \cdot 3600''} \qquad (7)$$

Для измеренных расстояний будем рассчитывать по формулам 8 и 9

$$c_{AB} = \frac{N_B - N_A}{S_{AB}} \qquad (8)$$

$$d_{AB} = \frac{E_B - E_A}{S_{AB}} \qquad (9)$$

Матрица А выглядит следующим образом:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -13{,}8 & 5{,}6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19{,}2 & -1{,}6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -27{,}7 & -0{,}8 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16{,}1 & -19{,}2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -10{,}5 & 30{,}0 & 10{,}6 & -30{,}1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -13{,}8 & 5{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -27{,}7 & -0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -19{,}2 & -1{,}6 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -16{,}1 & -19{,}2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -10{,}6 & 30{,}0 & 10{,}6 & -30{,}1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -0{,}03 & 1{,}00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}94 & 0{,}33 & -0{,}94 & -0{,}33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}77 & 0{,}64 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Для вычисления вектора свободных членов для измеренных направлений необходимо рассчитать на каждой станции дирекционный (ориентирующий) угол нулевого направления по формуле 10

$$Z_0 = \frac{(\alpha_{AD} - M_{AD}) + (\alpha_{AC} - M_{AC}) + (\alpha_{AB} - M_{AB})}{N} \qquad (10)$$

При этом необходимо следить за тем, чтобы значение в скобке $(\alpha - M)$ лежало в интервале от 0 до 2π, иначе необходимо добавить 360˚ к полученному дирекционному углу.

Например, в направлении DC был получен дирекционный угол α = 19˚14′39,2″, тогда выражение $(\alpha_{DC} - M_{DC})$<0

Для нахождения дирекционных углов направлений можно воспользоваться решением обратной геодезической задачи (далее ОГЗ). Результат решения ОГЗ для направления *AB* приведен в таблице 5

Таблица 5. Результат решения ОГЗ

№ точки	Координаты		Приращения		$r_{1\text{-}2}$	$\alpha_{1\text{-}2}$	*S, дм*
	X, дм	*Y, дм*	*ΔX, дм*	*ΔY, дм*			
A	10970,00	1060,00	5440,00	5370,00	44˚34′37,7″	44˚34′37,7″	7665,25
B	16410,00	6430,00					

Дирекционные углы остальных направлений сведем в таблицу 6

Таблица 6. Дирекционные углы остальных направлений

Направление	α
AC	67˚44′44,7″
AD	85˚17′38,4″
BC	88˚23′7,3″
BD	39˚56′51″
BA	44˚34′37,7″
CD	19˚14′39,2″
CA	67˚44′44,7″
CB	88˚23′7,3″
DA	85˚17′38,4″
DB	39˚56′51″
DC	19˚14′39,2″

Затем по рассчитанным значениям дирекционных углов и ориентирующих углов, вычислят значения направлений $M_{ij}^{выч}$ по формуле 11

$$M_{AD}^{выч} = \alpha_{AD} - Z_0 \tag{11}$$

Результаты вычислений формул 10 и 11 приведем в таблице 7

Далее можно вычислить вектор свободных членов L по формуле 12

$$L = \begin{bmatrix} \left(M_{AB}^{выч} - M_{AB}^{изм}\right) \cdot 3600 \\ \left(M_{AC}^{выч} - M_{AC}^{изм}\right) \cdot 3600 \\ \dots \\ S_{BC}^{выч} - S_{BC}^{изм} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Результаты вычислений вектора L

$$L = \begin{vmatrix} 10{,}612593 \\ 50{,}962050 \\ -61{,}574643 \\ 44{,}106117 \\ -39{,}712974 \\ -4{,}393143 \\ 88{,}278909 \\ -50{,}564355 \\ -37{,}714554 \\ -96{,}949122 \\ -57{,}881717 \\ 154{,}830839 \\ 2{,}416352 \\ -4{,}212395 \\ -3{,}986546 \end{vmatrix}$$

Вектор поправок в приближенные значения искомых пунктов вычисляются по формуле 13

$$\delta = -\left(A^T PA\right)^{-1} A^T PL \tag{13}$$

Результат вычислений поправок приведен ниже

$$\delta = \begin{vmatrix} 0{,}1882 \\ -0{,}2360 \\ -0{,}3938 \\ 0{,}1503 \\ 11{,}3336 \\ -5{,}2818 \\ -89{,}1190 \\ -23{,}3530 \end{vmatrix}$$

Процесс уравнивания плановой сети является итерационным процессом, итерации продолжают до тех пор, пока поправки не будут меньше значения чем из предыдущей итерации на 0,0001 м. Прежде чем проводить вторую и последующие итерации необходимо заменить значения приближенных координат искомых пунктов на значения предыдущей итерации (см таблицу8)

Таблица 8 Координаты исходных пунктов для второй итерации

Пункт	Координаты исходных пунктов	
	N, м	E, м
A	1097	106
B	1641	643
	Приближенные координаты пунктов	
C	1619,188	1385,764
D	1008,606	1172,150

В таблице 9 приведены уравненные координаты исходных и искомых пунктов после 3 итерации

Таблица 9. Уравненные координаты

Пункт	Координаты исходных пунктов	
	N, м	E, м
A	1097	106
B	1641	643
	Уравненные координаты пунктов	
C	1619,1881	1385,7638
D	1008,6061	1172,1504

Оценка точности

Вычислим СКП единицы веса по формуле 14

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T P V}{N - u}} \tag{14}$$

где N – число измерений;

u – число определяемых параметров, это число мы берем из вектора поправок, то есть u будет равно количеству строк из вектора поправок.

Результат вычислений

$$\mu = \sqrt{\frac{4,616}{15 - 8}} = 0,812$$

Ковариационная матрица определяемых параметров по формуле 15

$$Q = \left(A^T PA\right)^{-1} \tag{15}$$

Ковариационная матрица измерений по формуле 16

$$Q_y = AQA^T \tag{16}$$

Результат вычислений формул 15 и 16 соответственно приведены ниже

$$Q = \begin{vmatrix} 0,003 & 0,000 & 0,002 & 0,001 & -0,025 & -0,044 & -0,057 & -0,049 \\ 0,000 & 0,001 & 0,000 & 0,000 & 0,002 & -0,004 & 0,007 & 0,010 \\ 0,002 & -0,001 & 0,002 & 0,001 & -0,021 & -0,033 & -0,036 & -0,041 \\ 0,001 & 0,001 & 0,001 & 0,002 & -0,013 & -0,034 & -0,036 & -0,046 \\ -0,025 & 0,002 & -0,021 & -0,013 & 0,927 & 0,428 & 0,523 & 0,513 \\ -0,044 & -0,004 & -0,033 & -0,034 & 0,428 & 1,470 & 0,946 & 0,966 \\ -0,057 & 0,007 & -0,036 & -0,036 & 0,523 & 0,946 & 1,974 & 1,183 \\ -0,049 & 0,001 & -0,046 & -0,046 & 0,513 & 0,966 & 1,183 & 1,970 \end{vmatrix}$$

$$Q_y = \begin{vmatrix} 0,93 & 0,57 & 0,50 & -0,26 & -0,17 & 0,43 & 0,00 & 0,17 & -0,17 & -0,09 & -0,08 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & -0,01 \\ 0,57 & 0,78 & 0,65 & 0,21 & -0,05 & -0,16 & -0,02 & -0,09 & 0,07 & -0,09 & -0,06 & 0,15 & 0,00 & -0,01 & 0,00 \\ 0,50 & 0,65 & 0,85 & 0,05 & 0,22 & -0,27 & -0,02 & -0,08 & 0,09 & 0,00 & 0,14 & -0,14 & 0,00 & 0,01 & 0,01 \\ -0,26 & 0,21 & 0,10 & 1,14 & 0,61 & 0,24 & -0,13 & -0,15 & 0,28 & 0,08 & -0,02 & 0,10 & 0,00 & -0,01 & 0,01 \\ -0,17 & -0,05 & 0,16 & 0,61 & 1,10 & 0,29 & 0,21 & -0,21 & -0,00 & -0,19 & 0,24 & -0,04 & -0,01 & 0,01 & -0,00 \\ 0,43 & -0,16 & -0,26 & 0,24 & 0,29 & 1,47 & -0,08 & 0,36 & -0,28 & 0,27 & -0,22 & 0,06 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -0,02 & -0,11 & -0,13 & 0,21 & -0,08 & 1,16 & 0,46 & 0,38 & -0,34 & -0,05 & 0,39 & 0,01 & 0,01 & -0,01 \\ 0,17 & -0,09 & -0,03 & -0,15 & -0,21 & 0,36 & 0,46 & 0,90 & 0,65 & 0,26 & -0,06 & -0,19 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,17 & 0,07 & 0,14 & 0,28 & -0,00 & -0,28 & 0,38 & 0,65 & 0,97 & 0,09 & 0,11 & -0,20 & 0,01 & -0,01 & 0,01 \\ -0,09 & -0,09 & 0,10 & 0,08 & -0,19 & 0,27 & -0,34 & 0,26 & 0,09 & 1,02 & 0,65 & 0,33 & 0,00 & 0,00 & 0,01 \\ -0,08 & -0,06 & 0,11 & -0,02 & 0,24 & -0,22 & -0,05 & -0,06 & 0,11 & 0,65 & 0,88 & 0,47 & -0,01 & 0,00 & -0,00 \\ 0,01 & 0,15 & -0,21 & 0,10 & -0,04 & -0,06 & 0,39 & -0,19 & -0,20 & 0,33 & 0,47 & 1,20 & 0,01 & -0,01 & -0,01 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,01 & 0,00 & 0,01 & 0,00 & 0,01 & 0,00 & -0,01 & 0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -0,01 & 0,01 & -0,01 & 0,01 & 0,00 & 0,01 & 0,00 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,01 & 0,00 & 0,01 & 0,01 & -0,00 & 0,00 & -0,01 & 0,00 & 0,01 & 0,01 & -0,00 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{vmatrix}$$

СКП уравненных параметров по формуле 17

$$m_i = \mu \cdot \sqrt{Q_{i,i}} \tag{17}$$

Результат вычислений

$$m_{NC} = 0{,}03 \text{ дм} = 0{,}0030 \text{ м}$$
$$m_{EC} = 0{,}02 \text{ дм} = 0{,}0019 \text{ м}$$
$$m_{ND} = 0{,}03 \text{ дм} = 0{,}0025 \text{ м}$$
$$m_{ED} = 0{,}03 \text{ дм} = 0{,}0028 \text{ м}$$

СКП уравненных измерений по формуле 18

$$m_{yi} = \mu \cdot \sqrt{Q_{y_{i,i}}} \tag{18}$$

Результат вычислений представлены в таблице 10
СКП уравненных измерений по формуле 18

$$m_{yi} = \mu \cdot \sqrt{Q_{y_{i,i}}} \tag{18}$$

Результат вычислений представлены в таблице 10

Таблица 10. СКП уравненных измерений

Элемент	СКП уравненных измерений
	Угловых измерений, ″
AB	0,553
AC	0,508
AD	0,529
BC	0,614
BD	0,602
BA	0,697
CD	0,618
CA	0,544
CB	0,566
DA	0,581
DB	0,539
DC	0,629

Расчет эллипсов ошибок

Для расчетов параметров эллипсов ошибок вычислим вспомогательную величину *W* по формуле 19

$$W = \sqrt{\left(Q_{i,i} - Q_{i+1,i+1}\right)^2 + 4 \cdot \left(Q_{i\,,\,i+1}\right)^2} \tag{19}$$

Для точки C

W_C= 0,002 дм =0,000163 м

Для точки D

W_D = 0,002 дм = 0,000220 м

Угол поворота большой полуоси эллипса относительно северного направления находим по формуле 20

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{2 \cdot Q_{i,i+1}}{W}\right) \tag{20}$$

Для точки C и D соответственно

φ_C= 91˚32′50,6″
φ_D= 50˚17′47,4″

Большая полуось эллипса ошибок рассчитаем по формуле 21

$$a = \mu \cdot \sqrt{\frac{Q_{i,i} + Q_{i+1,i+1} + W}{2}} \tag{21}$$

Для точки C и D соответственно

a_C = 0,03 дм = 0,0030 м
a_D = 0,03 дм =0,0032 м

Малая полуось эллипса ошибок считаем по формуле 22

$$b = \mu \cdot \sqrt{\frac{Q_{i,i} + Q_{i+1,i+1} - W}{2}} \tag{22}$$

Для точки C и D соответственно

b_C = 0,02 дм = 0,0019 м
b_D = 0,02 дм =0,0018 м

Статистический тест Хи-квадрат

В данной работе примем вероятность P =95%, тогда

$$\chi^2_{лев} = ХИ2.ОБР\left(\frac{q}{2}; r\right) = 1{,}69$$

$$\chi^2_{прав} = ХИ2.ОБР\left(1 - \frac{q}{2}; r\right) = 16{,}01$$

где r – число степеней свободы и $r = N\text{-}u$

$$\sqrt{\frac{\chi^2_{\text{лев}}}{r}} \le \mu \le \sqrt{\frac{\chi^2_{\text{прав}}}{r}}$$

$$0{,}491 \le 0{,}575 \le 1{,}512$$

Вывод: Статистический тест Хи-квадрат выполняется.

Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский национальный технический университет
Факультет транспортных коммуникаций
Кафедра «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»

Отчет
по лабораторной работе №4
«Уравнивание ГНСС измерений»
Вариант №3

Выполнил: ст.гр.11405118
Вишняков Д.Н.
Проверил: ст. преподаватель
Будо А.Ю.

Минск, 2021

Цель работы: выполнить уравнивание базовых линий ГНСС.

Исходные данные представлены в таблице 1, а измеренные линии приведены в приложении А

Таблица 1

Название пункта	X	Y	Z
Козлово	3160588.107	2036825.323	5134982.406
Белка	3154622.788	2040574.467	5137107.392

Сначала составляем ковариационную матрицу K.

После составляем матрицу весов измерений P размерности N×N, где N – количество измеренных величин

$$P = K^{-1} \tag{1}$$

Затем составляем матрицу A. Для этого заполняем данную матрицу значениями 1; 0; -1.

$$A = \begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}$$

Далее составляем вектор свободных членов L:

$$L_{\Delta X} = X_{\text{выч}} - X_{\text{изм}},$$
$$L_{\Delta Y} = Y_{\text{выч}} - Y_{\text{изм}}, \qquad (2)$$
$$L_{\Delta Z} = Z_{\text{выч}} - Z_{\text{изм}};$$

$$L = \begin{vmatrix} 4118.083824600000 \\ -719.282604600000 \\ -2187.684231000000 \\ 3157982.574715800118 \\ 2041187.983638399979 \\ 5134798.812220199965 \\ 3092.151444000000 \\ 2078.488230900000 \\ -2663.379709400000 \\ 3162100.642755500041 \\ 2040468.663138000062 \\ 5132611.108187099919 \\ 3162100.634578499943 \\ 2040468.667633000063 \\ 5132611.073205400258 \\ -3159008.477762799710 \\ -2038390.180741300108 \\ -5135274.435796200298 \\ -3159008.512671700213 \\ -2038390.219383599935 \\ -5135274.511449200101 \end{vmatrix}$$

Вычисляем вектор свободных поправок в наши измерения:

$$X = -\left(A^T PA\right)^{-1} \cdot A^T PL. \qquad (3)$$

$$X = \begin{vmatrix} 3162100.636505041271 \\ 2040468.673371245619 \\ 5132611.081701763906 \\ 3157982.566087765619 \\ 2041187.969279423356 \\ 5134798.791991681792 \\ 3159008.487177125644 \\ 2038390.190316871041 \\ 5135274.455587484874 \end{vmatrix}$$

Определяем вектор поправок по следующей формуле:

$$V = A \cdot X + L. \qquad (4)$$

$$V = \begin{vmatrix} 0.013407324348 \\ 0.013303577737 \\ 0.026058917886 \\ 0.008628034499 \\ 0.014358976623 \\ 0.020228518173 \\ 0.002116084373 \\ 0.005176525422 \\ -0.005823679032 \\ 0.006250458770 \\ -0.010233245557 \\ 0.026485336013 \\ -0.001926541328 \\ -0.005738245556 \\ -0.008496363647 \\ 0.009414325934 \\ 0.009575570934 \\ 0.019791284576 \\ -0.025494574569 \\ -0.029066728894 \\ -0.055861715227 \end{vmatrix}$$

Вычислим СКП

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T PV}{N-k}}\ , \tag{5}$$

где N – число параметров измерений, а k – число определяемых параметров.

$$\mu = 40.016060840361$$

Ковариационная матрица определяемых параметров:

$$Q = \left(A^T PA\right)^{-1} \tag{6}$$

Ковариационная матрица измерений

$$Q_y = AQA^T \tag{7}$$

Вычисляем СКП уравненных параметров

$$m_i = \mu \cdot \sqrt{Q_i} \tag{8}$$

Результат вычислений:

$$m_{X\_База} = 0.009439628737,$$
$$m_{Y\_База} = 0.007948294555,$$
$$m_{Z\_База} = 0.014347050125;$$
$$m_{X\_0876} = 0.015721760420,$$
$$m_{Y\_0876} = 0.012939861813,$$
$$m_{Z\_0876} = 0.020192259784;$$
$$m_{X\_0687} = 0.007557573800,$$
$$m_{Y\_0687} = 0.006628919386,$$
$$m_{Z\_0687} = 0.012907090482.$$

Проведем статистический тест Хи-квадрат.

$$\chi^2_{лев} = ХИ2.ОБР\left(\frac{q}{2};r\right) = 4.403788506982$$

$$\chi^2_{прав} = ХИ2.ОБР\left(1-\frac{q}{2};r\right) = 23.336664158645$$

$$\sqrt{\frac{\chi^2_{\text{лев}}}{r}} \leq \mu \leq \sqrt{\frac{\chi^2_{\text{прав}}}{r}}$$
$$0{,}60579 \leq 40.016061 \leq 1{,}39453$$

То есть статистический тест не выполняется

Коэффициент τ вычисляется по формуле:

$$\tau = \frac{t_{\alpha/2,r-1\cdot\sqrt{r}}}{\sqrt{r-1+\left(t_{\alpha/2,r-1}\right)^2}}$$

где r – число степеней свободы;

t – коэффициент стьюдента с вероятностью 95%

τ = 2.518042164717

После проведения сравнения нормативных поправок с коэффициентом τ грубых ошибок не выявлено.

То есть статистический тест выполняется

Вывод: в данной работе выполнялось уравнивание базовых линий ГНСС. В ходе оценки точности был проведен статистический тест Хи-квадрат, который показал, что данные измерения подходят под нормальный закон распределения. Так же было выявлено отсутствие грубых ошибок

Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский Национальный Технический Университет
Факультет транспортных коммуникаций
Кафедра «геодезии и аэрокосмических геотехнологий»

Расчетно-графичееская работа
«Калибровка участка»
Вариант 17

Выполнил: ст. гр. 11405118
Вишняков Д.Н.
Проверил: старший преподаватель
Будо А.Ю

Минск, 2021

Цель работы: Вычислить параметры преобразования координат из WGS-84 в плоские местные.

Софт: Программы «Leica Captivate» (эмулятор контроллера), geoid-calculator.

Исходные данные: координаты точек в WGS-84 и местной СК.

Калибровка – это процесс настройки спроецированных (плоских) координат в соответствии с местными контрольными координатами. При калибровке вычисляются параметры для преобразования координат WGS-84 в плоские местные координаты (NEH).

Ход выполнения работы:

Вся работа будет производиться в программе Leica Captivate

1. Создаем проект, в котором будут храниться точки в системе WGS-84 (рис. 1):

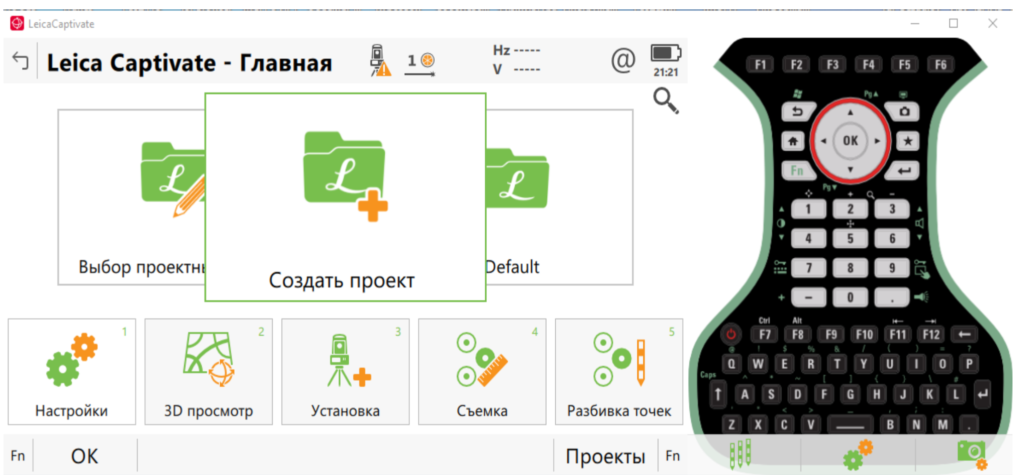

Рисунок 1– Команда создания проекта

2. Систему координат не устанавливаем (рис. 2):

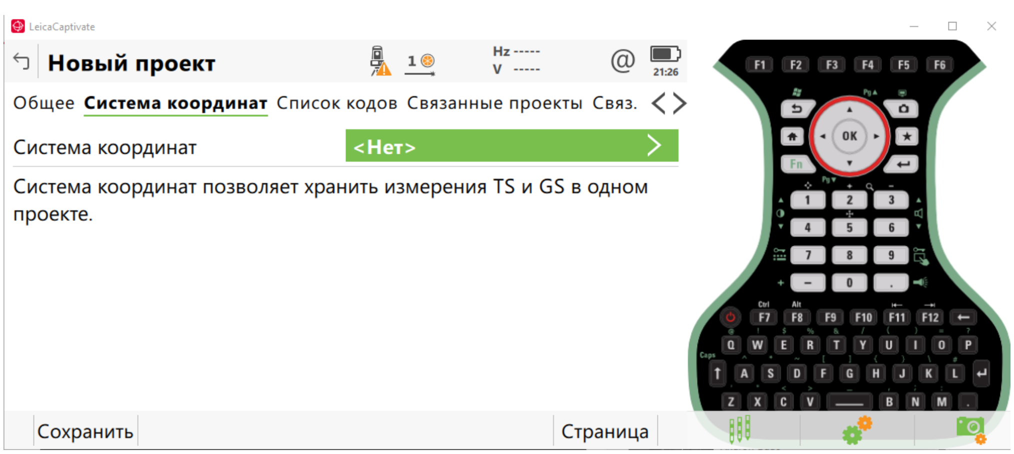

Рисунок 2 – Задание системы координат

3. Присваиваем проекту имя и сохраняем его (рис. 3):

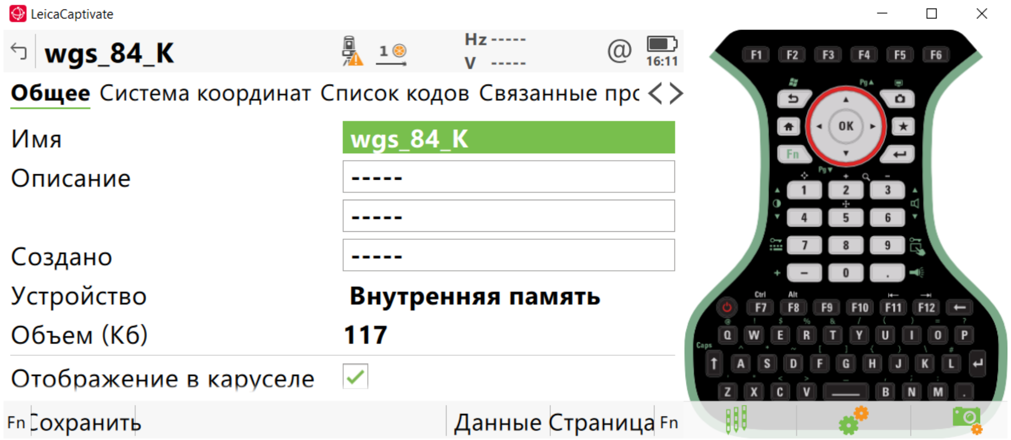

Рисунок 3 – Создание проекта

4. Выбираем созданный проект→ просмотр и редактирование данных (рис. 4):

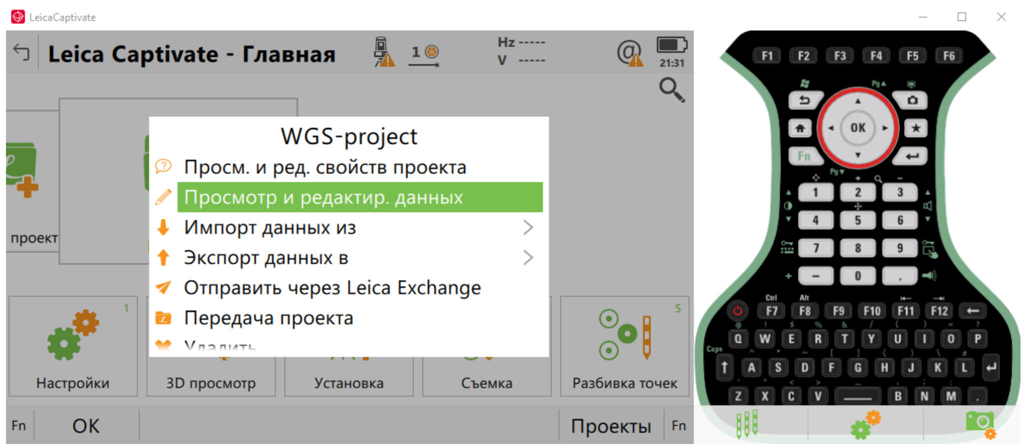

Рисунок 4 – Операции над проектом

5. Выбираем активным панель 3D просмотр. Нажимаем правую клавишу мыши и появляется окно для создания точки. Нажимаем его и переходим в окно редактирования параметров создаваемой точки (рис. 5):

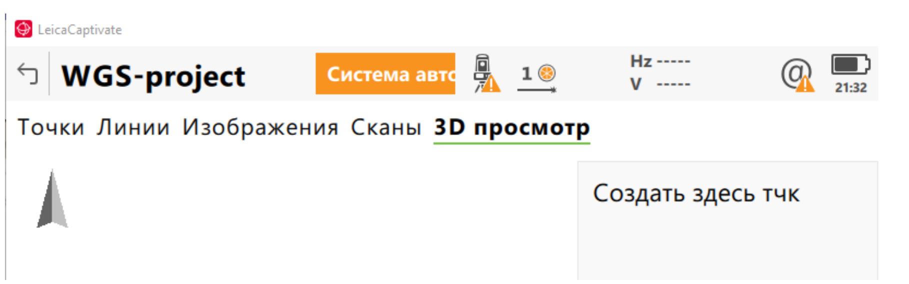

Рисунок 5 – Панель 3D просмотра

6. Из файла вводим значение координат и эллипсоидальной высот точки в системе WGS-84 и сохраняем значения (рис. 6):

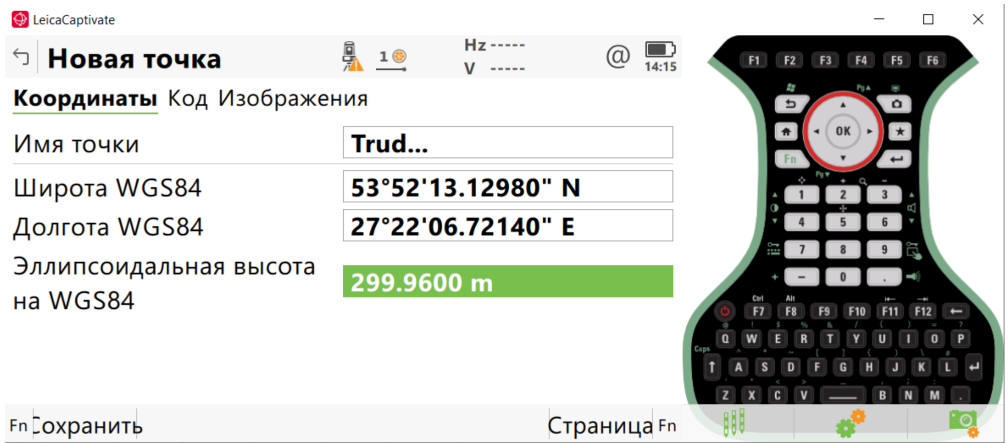

Рисунок 6 – Создание точки

Таким же образом создаем все 8 исходных точек. На данном этапе стоит быть очень внимательным, т.к. зачастую грубые ошибки появляются на этапе ручного ввода данных.

7. Далее создаем проект, в котором будут храниться точки в локальной СК, аналогично созданию проекта «WGS-project» (рис. 7):

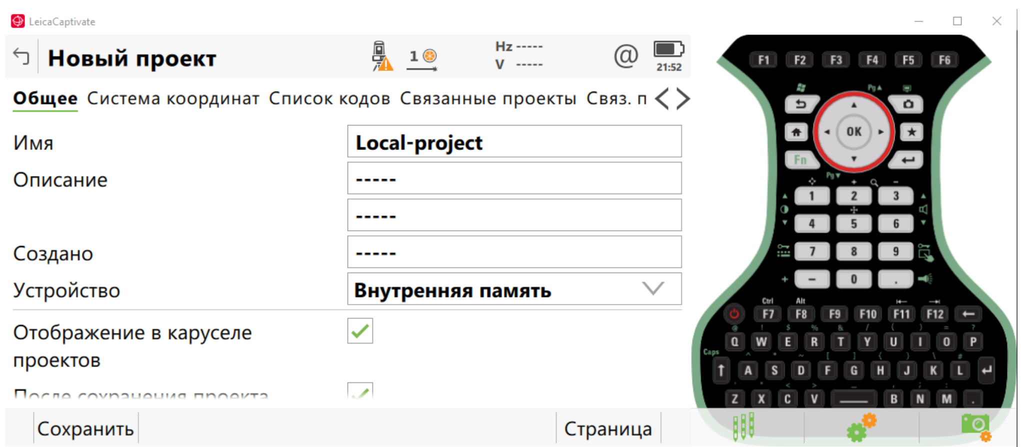

Рисунок 7 – Создание проекта локальной СК

8. Выбираем созданы проект → импорт данных из→ASCII / GSI и импортируем данные с координатами точек в СК Минск из текстового файла, предварительно разместив этот файл в расположении программы по следующему пути: C:\Users\Public\Documents\Leica Captivate\CS\USB Memory Device\Data (рис. 8):

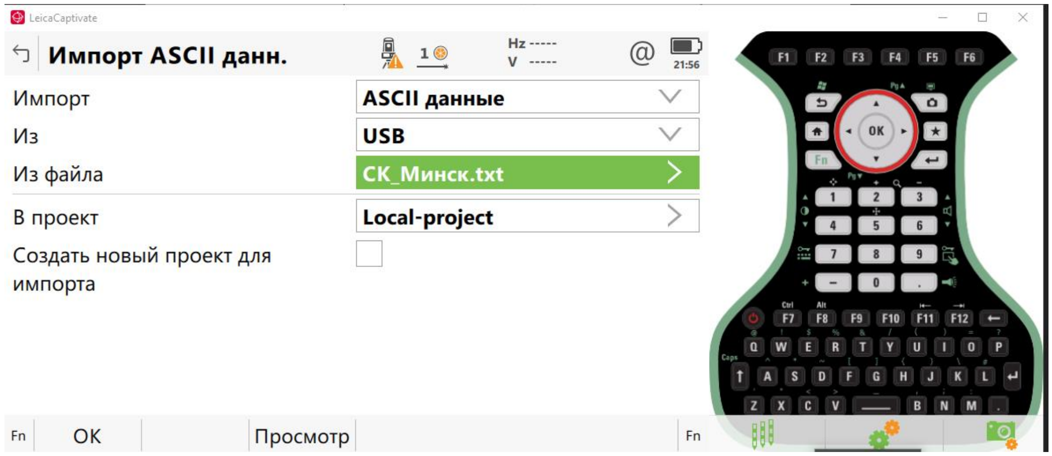

Рисунок 8 – Импорт данных в проект

9. В настройках параметра импорта высот указываем как продемонстрированно на рисунке 9:

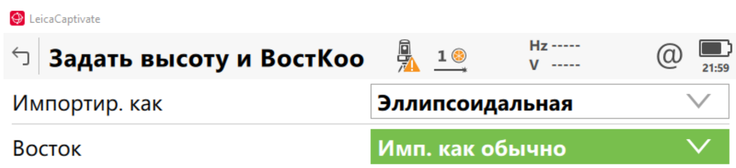

Рисунок 9 – Параметры импорта высоты

10. В настройках импорта меняем местами север и восток и указываем разделитель значений – запятая (рис. 10):

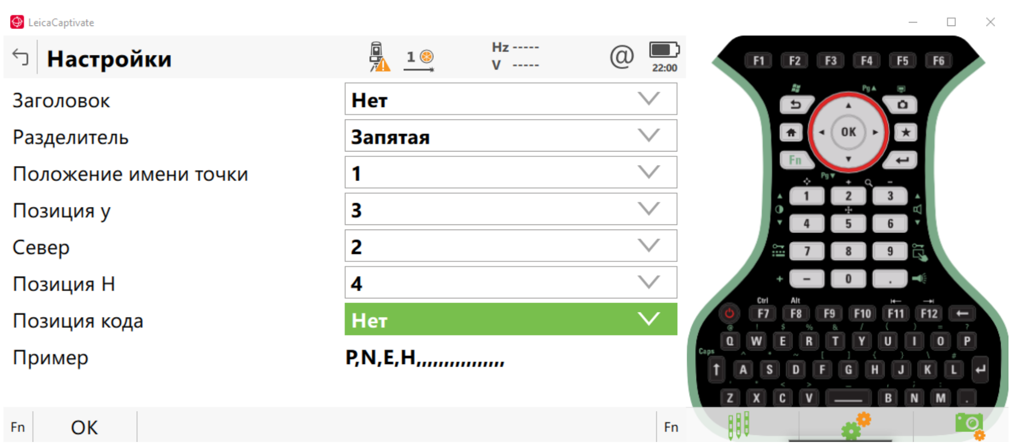

Рисунок 10 – Настройка параметров импорта

11. При успешном импорте точек должно появиться следующее окно (рис. 11):

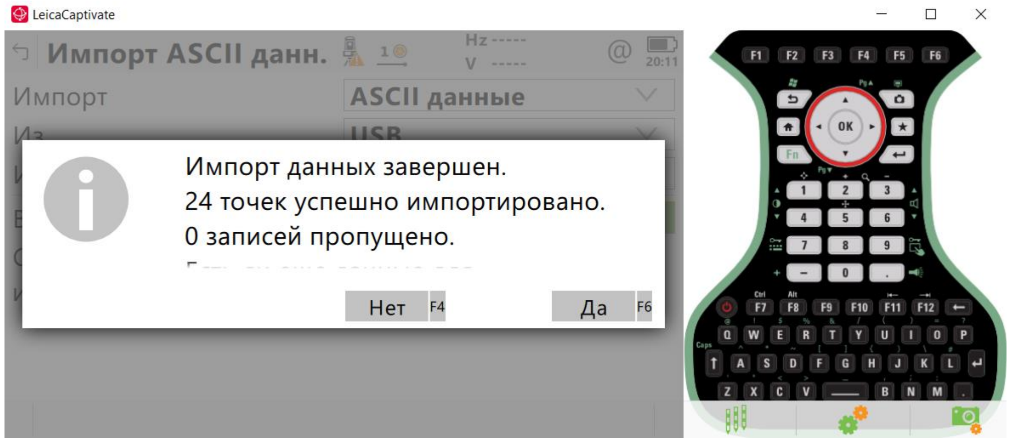

Рисунок 11 – Уведомление об импорте

12. Открываем проект и убеждаемся в правильном импорте всех точек (рис. 12):

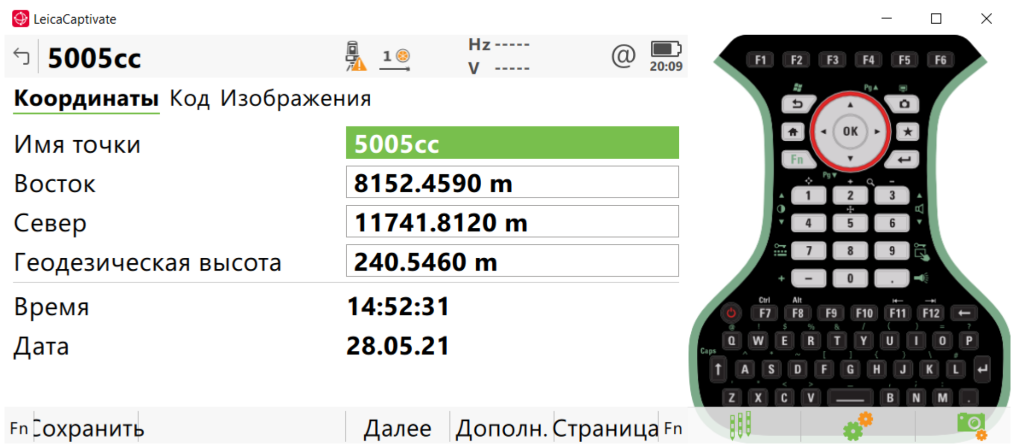

Рисунок 12 – Проверка корректности импорта данных

13. Далее на главном меню выбираем команду создать СК (рис. 13):

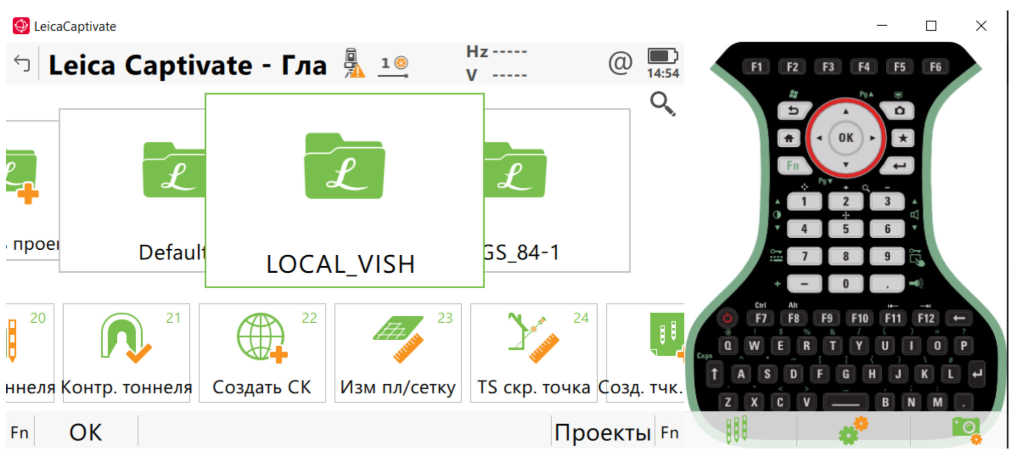

Рисунок 13 – Выбор команды создания СК

14. Метод создания – 1 шаг (рис. 14):

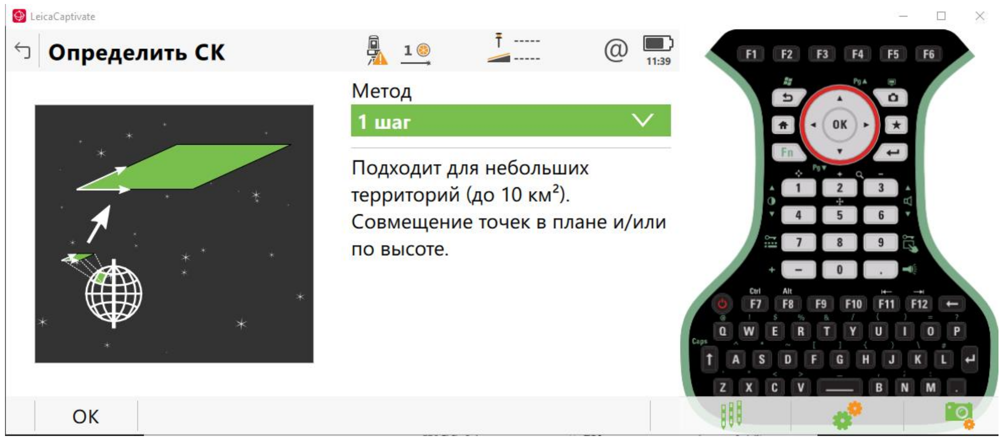

Рисунок 14 – Выбор метода создания СК

15. Присваиваем создаваемой СК название и указываем проекты, содержащие координаты в WGS-84 и в локальной СК и применяем (рис. 15):

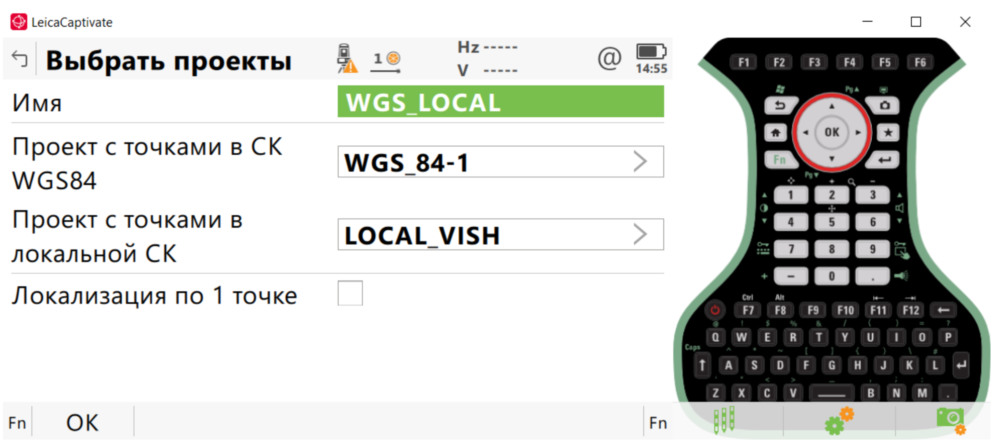

Рисунок 15 – Импорт данных в проект

16. Далее выбираем нужный тип высот и применяем (рис. 16):

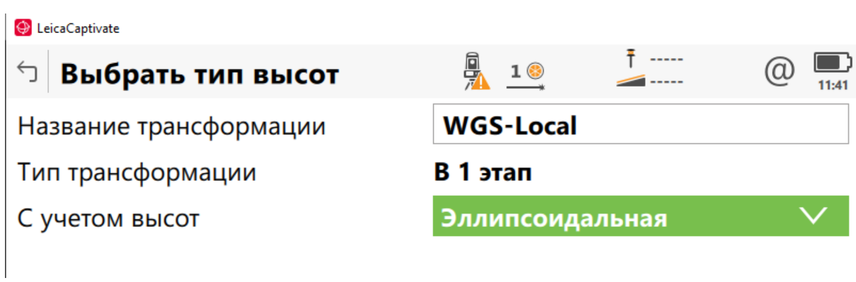

Рисунок 6.16 – Настройка типа высот в создаваемой СК

17. Модель геоида не задаем и применяем создание СК. В появившемся окне выбираем команду авто (программа автоматически создаст связующие точки) → вычисл (программа вычислит элементы перехода из WGS-84 в СК

Минск) (рис. 17):

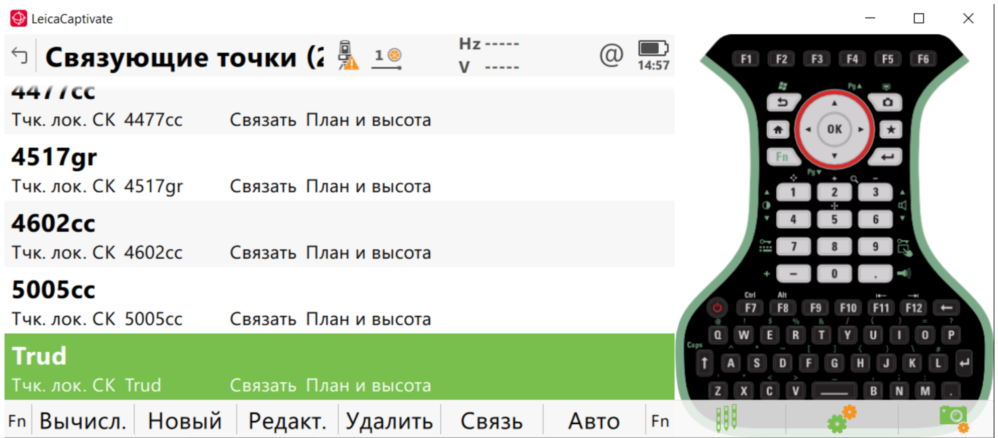

Рисунок 17 – Создание связующих точек

Результат трансформации в плане (рис. 18):

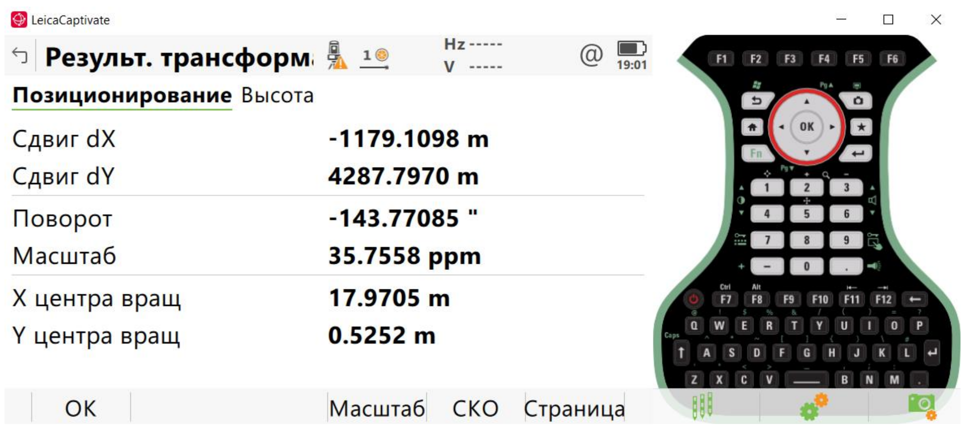

Рисунок 18 – Импорт данных в проект

Результат трансформации по высоте (рис. 19):

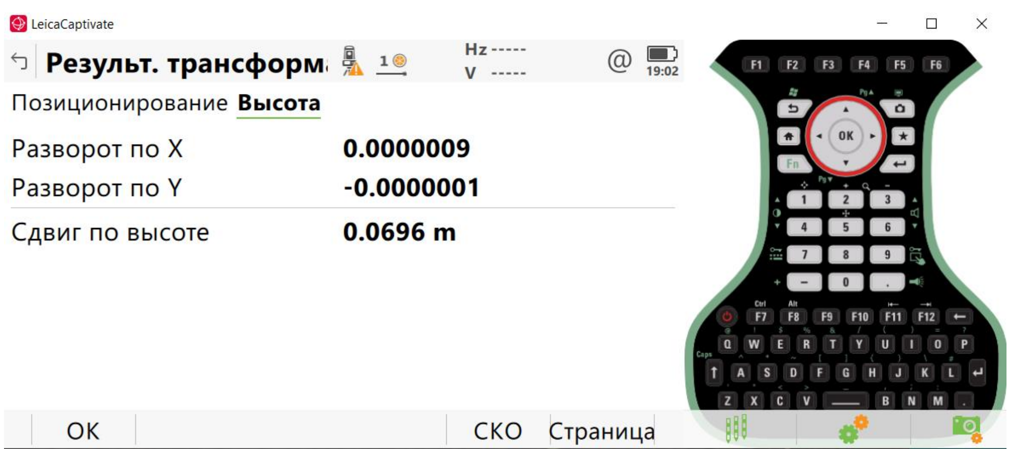

Рисунок 19 – Импорт данных в проект

СКО найденных параметров преобразования в плане (рис. 20):

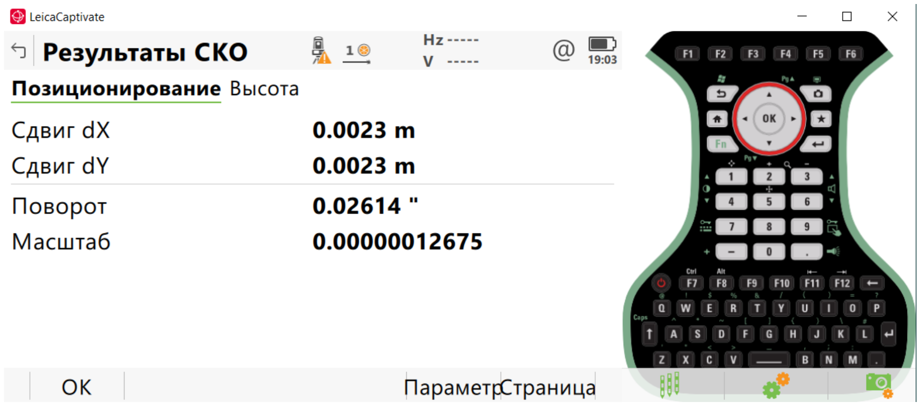

Рисунок 20 – СКО калибровки в плане

СКО найденных параметров преобразования по высоте (рис. 21):

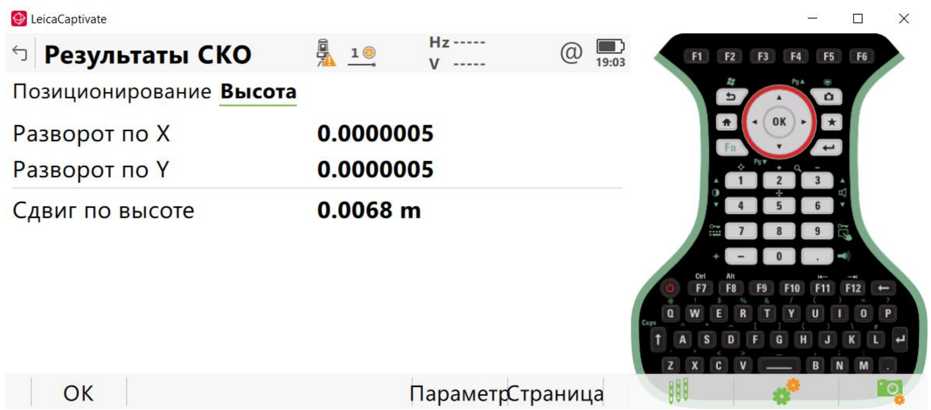

Рисунок 21 – СКО калибровки по высоте

19. Зайдя в свойства проекта «WGS-project» можно увидеть, что к нему теперь привязана созданная система координат, т.е. при измерении планового и высотного положения приемником система будет автоматически пересчитывать координаты в СК Минска (рис. 26):

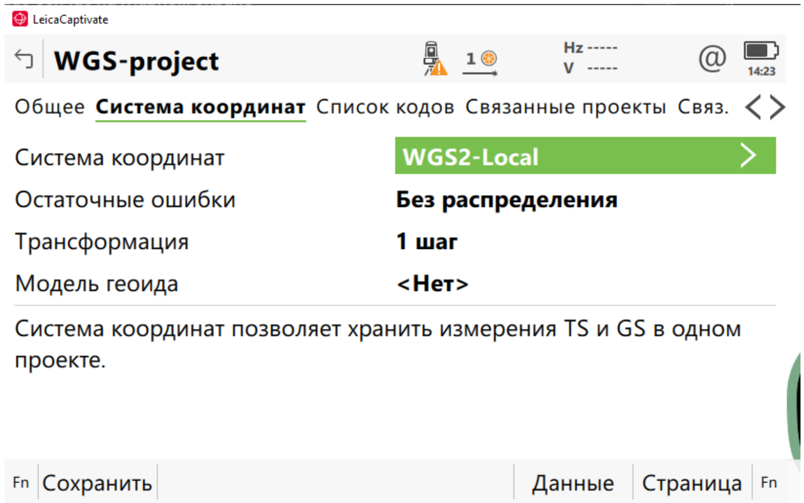

Рисунок 26 – Созданная СК в проекте

Данную трансформацию можно производить для любой СК и разными способами, чтобы повысить точность получаемых параметров пересчета.

Выводы: в ходе выполнения работы научились работать с контроллером спутникового приемника и выполнили калибровку координат, что в дальнейшем исключит необходимость пересчета координат и тем самым упростит работу.