

Министерство образования Республики Беларусь  
Белорусский национальный технический университет  
Факультет транспортных коммуникаций  
Кафедра «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»

Отчет  
по лабораторной работе №3  
«Уравнивание геодезического четырехугольника»  
Вариант №3

Выполнил: ст.гр.11405118  
Вишняков Д.Н.  
Проверил: ст. преподаватель  
Будо А.Ю.

Минск, 2021

Цель работы: Выполнить уравнивание линейно-угловой сети в виде геодезического четырехугольника и выполнить оценку точности, схема сети представлена на рисунке 1.

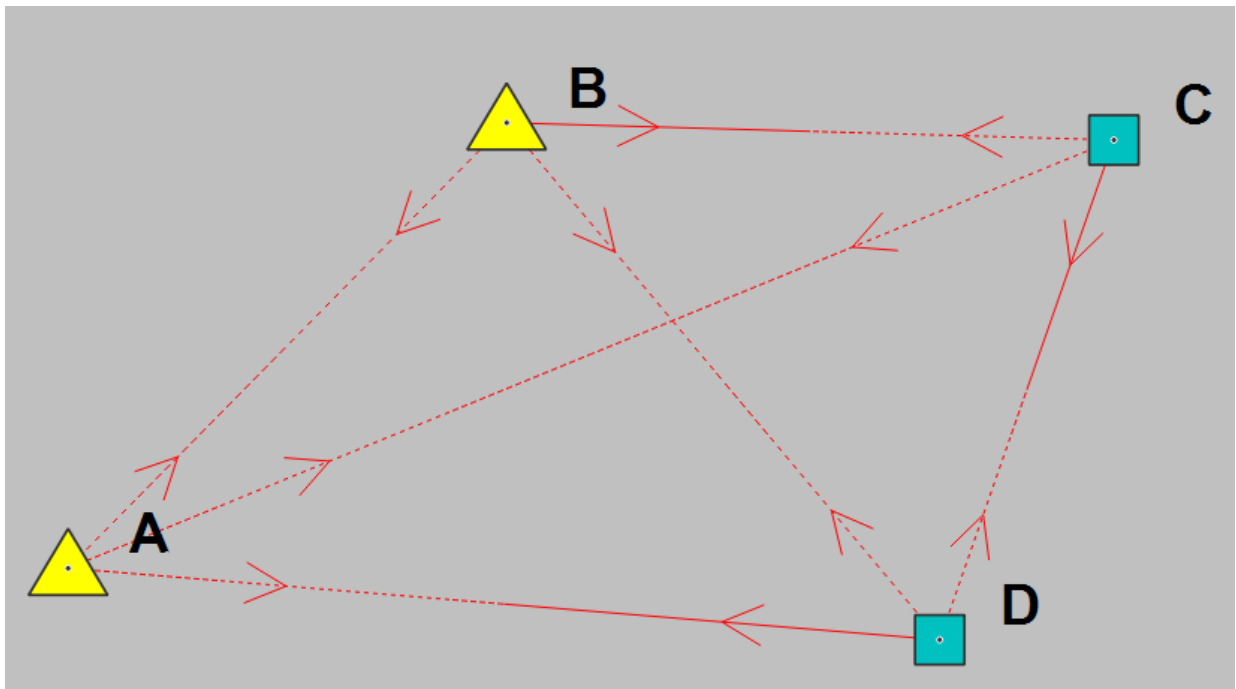


Рисунок 1 – Схема линейно-угловой сети

Исходные данные представлены в таблице 1, 2, 3.

Таблица 1. Исходные координаты

| Пункт                       | Координаты исх.пунктов |      |       |       |
|-----------------------------|------------------------|------|-------|-------|
|                             | N, м                   | E, м | N, дм | E, дм |
| A                           | 1097                   | 106  | 10970 | 1060  |
| B                           | 1641                   | 643  | 16410 | 6430  |
| Приблиз. координаты пунктов |                        |      |       |       |
| C                           | 1619                   | 1386 | 16190 | 13860 |
| D                           | 1009                   | 1172 | 10090 | 11720 |

Таблица 2. Измеренные стороны

| Элемент | Изм. Стороны, м | Изм. Стороны, дм |
|---------|-----------------|------------------|
| BC      | 743,084         | 7430,840         |
| CD      | 646,870         | 6468,700         |
| BD      | 824,574         | 8245,740         |

Таблица 3. Измеренные направления

| Элемент | Изм. направления |
|---------|------------------|
| AB      | 0°00'00,00"      |
| AC      | 23°10'24,80"     |
| AD      | 50°06'36,80"     |
| BC      | 0°00'00,00"      |
| BD      | 48°23'49,50"     |
| BA      | 132°56'47,20"    |
| CD      | 0°00'00,00"      |
| CA      | 48°31'13,60"     |
| CB      | 72°23'56,90"     |
| DA      | 0°00'00,00"      |
| DB      | 45°20'23,30"     |
| DC      | 104°32'34,0"     |

Необходимо вычислить СКП измеренных расстояний и направлений по формуле 1

$$m = a + b \cdot D \quad (1)$$

где  $a = 2$  мм,  $b = 3$  ppm, также эти величины являются исходными данными.

СКП угла тахеометра  $m_\beta = 2''$ , СКП горизонтальных направлений вычисляем по формуле 2

$$m_M = \frac{m_\beta}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

Результаты вычислений СКП измеренных направлений и расстояний сведем в таблицу 4.

Далее составляется матрица  $P$ , т.е. матрица весов измерений размерности  $N \times N$ , где  $N$  – количество измеренных величин и вес рассчитывается по формуле

$$P_i = \frac{1}{m_i^2} \quad (3)$$

Сама матрица выглядит следующим образом:

[illegible]

Таблица 4. СКП измеренных направлений и расстояний

|         |                 |           |
|---------|-----------------|-----------|
| Элемент | СКП, мм         | СКП, дм   |
| BC      | 4,22930         | 0,0422930 |
| CD      | 3,94060         | 0,0394060 |
| DA      | 4,47370         | 0,0447370 |
| Элемент | СКП направлений |           |
| AB      | 1,4142"         |           |
| AC      | 1,4142"         |           |
| AD      | 1,4142"         |           |
| BC      | 1,4142"         |           |
| BD      | 1,4142"         |           |
| BA      | 1,4142"         |           |
| BA      | 1,4142"         |           |
| CD      | 1,4142"         |           |
| CA      | 1,4142"         |           |
| CB      | 1,4142"         |           |
| DA      | 1,4142"         |           |
| DB      | 1,4142"         |           |
| DC      | 1,4142"         |           |

Затем составим матрицу  $A$ . Для этого заполняем матрицу частными производными по измеренным направлениям по следующим формулам 4, 5, 6, 7:

$$a_{AB} = -\rho \frac{E_B - E_A}{S_{AB}^2} \quad (4)$$

$$b_{AB} = \rho \frac{N_B - N_A}{S_{AB}^2} \quad (5)$$

$$S_{AB} = \sqrt{(N_B - N_A)^2 + (E_B - E_A)^2} \quad (6)$$

$$\rho = \frac{180^\circ}{\pi \cdot 3600''} \quad (7)$$

Для измеренных расстояний будем рассчитывать по формулам 8 и 9

$$c_{AB} = \frac{N_B - N_A}{S_{AB}} \quad (8)$$

$$d_{AB} = \frac{E_B - E_A}{S_{AB}} \quad (9)$$

Матрица A выглядит следующим образом:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -13,8 & 5,6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19,2 & -1,6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -27,7 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16,1 & -19,2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -10,5 & 30,0 & 10,6 & -30,1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -13,8 & 5,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -27,7 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -19,2 & -1,6 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -16,1 & -19,2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -10,6 & 30,0 & 10,6 & -30,1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -0,03 & 1,00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,94 & 0,33 & -0,94 & -0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,77 & 0,64 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Для вычисления вектора свободных членов для измеренных направлений необходимо рассчитать на каждой станции дирекционный (ориентирующий) угол нулевого направления по формуле 10

$$Z_0 = \frac{(\alpha_{AD} - M_{AD}) + (\alpha_{AC} - M_{AC}) + (\alpha_{AB} - M_{AB})}{N} \quad (10)$$

При этом необходимо следить за тем, чтобы значение в скобке  $(\alpha - M)$  лежало в интервале от 0 до  $2\pi$ , иначе необходимо добавить  $360^\circ$  к полученному дирекционному углу.

Например, в направлении DC был получен дирекционный угол  $\alpha = 19^\circ 14' 39,2''$ , тогда выражение  $(\alpha_{DC} - M_{DC}) < 0$

Для нахождения дирекционных углов направлений можно воспользоваться решением обратной геодезической задачи (далее ОГЗ). Результат решения ОГЗ для направления AB приведен в таблице 5

Таблица 5. Результат решения ОГЗ

| № точки | Координаты     |                | Приращения            |                       | $r_{1-2}$             | $\alpha_{1-2}$        | $S, \text{ м}$ |
|---------|----------------|----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|
|         | $X, \text{ м}$ | $Y, \text{ м}$ | $\Delta X, \text{ м}$ | $\Delta Y, \text{ м}$ |                       |                       |                |
| A       | 10970,00       | 1060,00        | 5440,00               | 5370,00               | $44^\circ 34' 37,7''$ | $44^\circ 34' 37,7''$ | 7665,25        |
| B       | 16410,00       | 6430,00        |                       |                       |                       |                       |                |

Дирекционные углы остальных направлений сведем в таблицу 6

Таблица 6. Дирекционные углы остальных направлений

| Направление | $\alpha$              |
|-------------|-----------------------|
| AC          | $67^\circ 44' 44,7''$ |
| AD          | $85^\circ 17' 38,4''$ |
| BC          | $88^\circ 23' 7,3''$  |
| BD          | $39^\circ 56' 51''$   |
| BA          | $44^\circ 34' 37,7''$ |
| CD          | $19^\circ 14' 39,2''$ |
| CA          | $67^\circ 44' 44,7''$ |
| CB          | $88^\circ 23' 7,3''$  |
| DA          | $85^\circ 17' 38,4''$ |
| DB          | $39^\circ 56' 51''$   |
| DC          | $19^\circ 14' 39,2''$ |

Затем по рассчитанным значениям дирекционных углов и ориентирующих углов, вычислят значения направлений  $M_{ij}^{блч}$  по формуле 11

$$M_{AD}^{блч} = \alpha_{AD} - Z_0 \quad (11)$$

Результаты вычислений формул 10 и 11 приведем в таблице 7

Далее можно вычислить вектор свободных членов  $L$  по формуле 12

$$L = \begin{bmatrix} (M_{AB}^{блч} - M_{AB}^{изм}) \cdot 3600 \\ (M_{AC}^{блч} - M_{AC}^{изм}) \cdot 3600 \\ \dots \\ S_{BC}^{блч} - S_{BC}^{изм} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Результаты вычислений вектора  $L$

$$L = \begin{bmatrix} 10,612593 \\ 50,962050 \\ -61,574643 \\ 44,106117 \\ -39,712974 \\ -4,393143 \\ 88,278909 \\ -50,564355 \\ -37,714554 \\ -96,949122 \\ -57,881717 \\ 154,830839 \\ 2,416352 \\ -4,212395 \\ -3,986546 \end{bmatrix}$$

Вектор поправок в приближенные значения искомых пунктов вычисляются по формуле 13

$$\delta = -(A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (13)$$

Результат вычислений поправок приведен ниже

$$\delta = \begin{bmatrix} 0,1882 \\ -0,2360 \\ -0,3938 \\ 0,1503 \\ 11,3336 \\ -5,2818 \\ -89,1190 \\ -23,3530 \end{bmatrix}$$

Процесс уравнивания плановой сети является итерационным процессом, итерации продолжают до тех пор, пока поправки не будут меньше значения чем из предыдущей итерации на 0,0001 м. Прежде чем проводить вторую и последующие итерации необходимо заменить значения приближенных координат искомых пунктов на значения предыдущей итерации (см таблицу8)

Таблица 8 Координаты исходных пунктов для второй итерации

| Пункт                           | Координаты исходных пунктов |          |
|---------------------------------|-----------------------------|----------|
|                                 | N, м                        | E, м     |
| A                               | 1097                        | 106      |
| B                               | 1641                        | 643      |
| Приближенные координаты пунктов |                             |          |
| C                               | 1619,188                    | 1385,764 |
| D                               | 1008,606                    | 1172,150 |

В таблице 9 приведены уравненные координаты исходных и искомых пунктов после 3 итерации

Таблица 9. Уравненные координаты

| Пункт                         | Координаты исходных пунктов |           |
|-------------------------------|-----------------------------|-----------|
|                               | N, м                        | E, м      |
| A                             | 1097                        | 106       |
| B                             | 1641                        | 643       |
| Уравненные координаты пунктов |                             |           |
| C                             | 1619,1881                   | 1385,7638 |
| D                             | 1008,6061                   | 1172,1504 |

### Оценка точности

Вычислим СКП единицы веса по формуле 14

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T P V}{N - u}} \quad (14)$$

где  $N$  – число измерений;

$u$  – число определяемых параметров, это число мы берем из вектора поправок, то есть  $u$  будет равно количеству строк из вектора поправок.

Результат вычислений

$$\mu = \sqrt{\frac{4,616}{15 - 8}} = 0,812$$



Ковариационная матрица определяемых параметров по формуле 15

$$Q = (A^T P A)^{-1} \quad (15)$$

Ковариационная матрица измерений по формуле 16

$$Q_y = A Q A^T \quad (16)$$

Результат вычислений формул 15 и 16 соответственно приведены ниже

$$Q = \begin{bmatrix} 0,003 & 0,000 & 0,002 & 0,001 & -0,025 & -0,044 & -0,057 & -0,049 \\ 0,000 & 0,001 & 0,000 & 0,000 & 0,002 & -0,004 & 0,007 & 0,010 \\ 0,002 & -0,001 & 0,002 & 0,001 & -0,021 & -0,033 & -0,036 & -0,041 \\ 0,001 & 0,001 & 0,001 & 0,002 & -0,013 & -0,034 & -0,036 & -0,046 \\ -0,025 & 0,002 & -0,021 & -0,013 & 0,927 & 0,428 & 0,523 & 0,513 \\ -0,044 & -0,004 & -0,033 & -0,034 & 0,428 & 1,470 & 0,946 & 0,966 \\ -0,057 & 0,007 & -0,036 & -0,036 & 0,523 & 0,946 & 1,974 & 1,183 \\ -0,049 & 0,001 & -0,046 & -0,046 & 0,513 & 0,966 & 1,183 & 1,970 \end{bmatrix}$$

$$Q_y = \begin{bmatrix} 0,93 & 0,57 & 0,50 & -0,26 & -0,17 & 0,43 & 0,00 & 0,17 & -0,17 & -0,09 & -0,08 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & -0,01 \\ 0,57 & 0,78 & 0,65 & 0,21 & -0,05 & -0,16 & -0,02 & -0,09 & 0,07 & -0,09 & -0,06 & 0,15 & 0,00 & -0,01 & 0,00 \\ 0,50 & 0,65 & 0,85 & 0,05 & 0,22 & -0,27 & -0,02 & -0,08 & 0,09 & 0,00 & 0,14 & -0,14 & 0,00 & 0,01 & 0,01 \\ -0,26 & 0,21 & 0,10 & 1,14 & 0,61 & 0,24 & -0,13 & -0,15 & 0,28 & 0,08 & -0,02 & 0,10 & 0,00 & -0,01 & 0,01 \\ -0,17 & -0,05 & 0,16 & 0,61 & 1,10 & 0,29 & 0,21 & -0,21 & -0,00 & -0,19 & 0,24 & -0,04 & -0,01 & 0,01 & -0,00 \\ 0,43 & -0,16 & -0,26 & 0,24 & 0,29 & 1,47 & -0,08 & 0,36 & -0,28 & 0,27 & -0,22 & 0,06 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -0,02 & -0,11 & -0,13 & 0,21 & -0,08 & 1,16 & 0,46 & 0,38 & -0,34 & -0,05 & 0,39 & 0,01 & 0,01 & -0,01 \\ 0,17 & -0,09 & -0,03 & -0,15 & -0,21 & 0,36 & 0,46 & 0,90 & 0,65 & 0,26 & -0,06 & -0,19 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ -0,17 & 0,07 & 0,14 & 0,28 & -0,00 & -0,28 & 0,38 & 0,65 & 0,97 & 0,09 & 0,11 & -0,20 & 0,01 & -0,01 & 0,01 \\ -0,09 & -0,09 & 0,10 & 0,08 & -0,19 & 0,27 & -0,34 & 0,26 & 0,09 & 1,02 & 0,65 & 0,33 & 0,00 & 0,00 & 0,01 \\ -0,08 & -0,06 & 0,11 & -0,02 & 0,24 & -0,22 & -0,05 & -0,06 & 0,11 & 0,65 & 0,88 & 0,47 & -0,01 & 0,00 & -0,00 \\ 0,01 & 0,15 & -0,21 & 0,10 & -0,04 & -0,06 & 0,39 & -0,19 & -0,20 & 0,33 & 0,47 & 1,20 & 0,01 & -0,01 & -0,01 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,01 & 0,00 & 0,01 & 0,00 & 0,01 & 0,00 & -0,01 & 0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -0,01 & 0,01 & -0,01 & 0,01 & 0,00 & 0,01 & 0,00 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,01 & 0,00 & 0,01 & 0,01 & -0,00 & 0,00 & -0,01 & 0,00 & 0,01 & 0,01 & -0,00 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$$

СКП уравненных параметров по формуле 17

$$m_i = \mu \cdot \sqrt{Q_{i,i}} \quad (17)$$

Результат вычислений

$$m_{NC} = 0,03 \text{ дм} = 0,0030 \text{ м}$$

$$m_{EC} = 0,02 \text{ дм} = 0,0019 \text{ м}$$

$$m_{ND} = 0,03 \text{ дм} = 0,0025 \text{ м}$$

$$m_{ED} = 0,03 \text{ дм} = 0,0028 \text{ м}$$

СКП уравнированных измерений по формуле 18

$$m_{yi} = \mu \cdot \sqrt{Q_{yi,i}} \quad (18)$$

Результат вычислений представлены в таблице 10

СКП уравнированных измерений по формуле 18

$$m_{yi} = \mu \cdot \sqrt{Q_{yi,i}} \quad (18)$$

Результат вычислений представлены в таблице 10

Таблица 10. СКП уравнированных измерений

| Элемент | СКП уравнированных измерений |
|---------|------------------------------|
|         | Угловых измерений, "         |
| AB      | 0,553                        |
| AC      | 0,508                        |
| AD      | 0,529                        |
| BC      | 0,614                        |
| BD      | 0,602                        |
| BA      | 0,697                        |
| CD      | 0,618                        |
| CA      | 0,544                        |
| CB      | 0,566                        |
| DA      | 0,581                        |
| DB      | 0,539                        |
| DC      | 0,629                        |

### Расчет эллипсов ошибок

Для расчетов параметров эллипсов ошибок вычислим вспомогательную величину  $W$  по формуле 19

$$W = \sqrt{(Q_{i,i} - Q_{i+1,i+1})^2 + 4 \cdot (Q_{i,i+1})^2} \quad (19)$$

Для точки С

$$W_C = 0,002 \text{ дм} = 0,000163 \text{ м}$$

Для точки D

$$W_D = 0,002 \text{ дм} = 0,000220 \text{ м}$$

Угол поворота большой полуоси эллипса относительно северного направления находим по формуле 20

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{2 \cdot Q_{i,i+1}}{W}\right) \quad (20)$$

Для точки C и D соответственно

$$\varphi_C = 91^\circ 32' 50,6''$$

$$\varphi_D = 50^\circ 17' 47,4''$$

Большая полуось эллипса ошибок рассчитаем по формуле 21

$$a = \mu \cdot \sqrt{\frac{Q_{i,i} + Q_{i+1,i+1} + W}{2}} \quad (21)$$

Для точки C и D соответственно

$$a_C = 0,03 \text{ дм} = 0,0030 \text{ м}$$

$$a_D = 0,03 \text{ дм} = 0,0032 \text{ м}$$

Малая полуось эллипса ошибок считаем по формуле 22

$$b = \mu \cdot \sqrt{\frac{Q_{i,i} + Q_{i+1,i+1} - W}{2}} \quad (22)$$

Для точки C и D соответственно

$$b_C = 0,02 \text{ дм} = 0,0019 \text{ м}$$

$$b_D = 0,02 \text{ дм} = 0,0018 \text{ м}$$

**Статистический тест Хи-квадрат**

В данной работе примем вероятность  $P = 95\%$ , тогда

$$\chi^2_{лев} = \text{ХИ2.ОБР}\left(\frac{q}{2}; r\right) = 1,69$$

$$\chi^2_{прав} = \text{ХИ2.ОБР}\left(1 - \frac{q}{2}; r\right) = 16,01$$

где  $r$  – число степеней свободы и  $r = N - u$

$$\sqrt{\frac{\chi^2_{лев}}{r}} \leq \mu \leq \sqrt{\frac{\chi^2_{прав}}{r}}$$
$$0,491 \leq 0,575 \leq 1,512$$

Вывод: Статистический тест Хи-квадрат выполняется.