Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский национальный технический университет
Факультет транспортных коммуникаций
Кафедра «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»

Отчет
по лабораторной работе №1
«Прямая и обратная геодезическая задача на сфере»
Вариант №3

Выполнил ст.гр.11405118
Вишняков Д.Н.
Проверил ст. преподаватель
Будо А.Ю.

Минск, 2021

Обратная геодезическая задача на сфере

При решении обратной геодезической задачи нам дано:

1. Широта первой точки φ_1,
2. Долгота первой точки λ_1,
3. Широта второй точки φ_2,
4. Долгота второй точки λ_2.

Необходимо найти:

1. Сферическое расстояние ψ_{12},
2. Прямой азимут A_{12},
3. Обратный азимут A_{21}.

Решение:

Из теоремы косинусов находим сферическое расстояние рассчитываем по формуле (1).

$$\psi_{12} = \arccos\left(\sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)+\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)\cdot\cos(\Delta\lambda_{12})\right) \tag{1}$$

где $\Delta\lambda_{12}$ находим по формуле (2)

$$\Delta\lambda_{12} = \lambda_2 - \lambda_1 \tag{2}$$

Прямой азимут рассчитывается по формуле (3)

$$A_{12} = \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{\sin(A_{12})}{\cos(A_{12})}\right|\right) \tag{3}$$

где $\sin(A_{12})$ находим по формуле (4), $\cos(A_{12})$ находим по формуле (5)

$$\sin(A_{12}) = \frac{\sin(\Delta\lambda_{12})\cdot\cos(\varphi_2)}{\sin(\psi_{12})} \tag{4}$$

$$\cos(A_{12}) = \frac{\sin(\varphi_2)-\sin(\varphi_1)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_1)\cdot\sin(\psi_{12})} \tag{5}$$

Обратный азимут рассчитывается по формуле (6)

$$A_{21} = 360^\circ - \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{\sin(A'_{21})}{\cos(A'_{21})}\right|\right) \tag{6}$$

где $\sin(A'_{21})$ находим по формуле (7), $\cos(A'_{21})$ находим по формуле (8)

$$\sin(A'_{21}) = \frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)} \tag{7}$$

$$\cos(A'_{21}) = \frac{\sin(\varphi_1)-\sin(\varphi_2)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)\cdot\sin(\psi_{12})} \tag{8}$$

Результаты вычислений приведены ниже

Дано:

$\varphi_1=54°54'00{,}0''$

$\lambda_1=26°42'00{,}0''$

$\varphi_2=54°30'00{,}0''$

$\lambda_2=26°54'00{,}0''$

ψ_{12}–?

A_{12}–?

A_{21}–?

Решение:

$$\psi_{12}=\arccos(\sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)+\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)\cdot\cos(\Delta\lambda_{12}))=$$
$$=0°24'58{,}9''$$

$\Delta\lambda_{12}=\lambda_2-\lambda_1=-0°12'00{,}0''$

$$A_{12}=360°-\mathrm{arctg}\left(\left|\frac{\sin(A_{12})}{\cos(A_{12})}\right|\right)=343°57'57{,}7''$$

$$\sin A_{12}=\frac{\sin(\Delta\lambda_{12})\cdot\cos(\varphi_2)}{\sin(\psi_{12})}=-0{,}278944$$

$$\cos A_{12}=\frac{\sin(\varphi_2)-\sin(\varphi_1)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_1)\cdot\sin(\psi_{12})}=0{,}960307$$

$$A_{21}=360°-\mathrm{arctg}\left(\left|\frac{\sin(A'_{21})}{\cos(A'_{21})}\right|\right)-180°=163°48'10{,}0''$$

$$\sin A'_{21}=\frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)}=-0{,}293225$$

$$\cos A'_{21}=\frac{\sin(\varphi_1)-\sin(\varphi_2)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)\cdot\sin(\psi_{12})}=-0{,}961098$$

Ответ: $\psi_{12}=0°24'58{,}9''$
$A_{12}=343°57'57{,}7''$
$A_{21}=163°48'10{,}0''$

Прямая геодезическая задача

Прямая задача определяется следующим образом

Дано: широта и долгота первой точки, сферическое расстояние и азимут между двумя точками.

$$\varphi_1 \quad \lambda_1 \quad \psi_{12} \quad A_{12}$$

Найти: широту, долготу второй точки, обратный азимут.

$$\varphi_2 \quad \lambda_2 \quad A_{21}$$

Решение: по теореме косинусов с учетом формул приведения можем найти широту второй точки (формула 9)

$$\varphi_2 = \arcsin(\sin(\varphi_1)\cdot\cos(\psi_{12}) + \cos(\varphi_1)\cdot\sin(\psi_{12})\cdot\cos(A_{12})) \tag{9}$$

А также долгота второй точки по формуле 10

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{12} \tag{10}$$

При этом $\Delta\lambda_{12}$ рассчитывается по формуле 11

$$\Delta\lambda_{12} = \mathrm{arctg}\left(\left|\frac{\sin(\Delta\lambda_{12})}{\cos(\Delta\lambda_{12})}\right|\right) \tag{11}$$

где $\sin(\Delta\lambda_{12})$ и $\cos(\Delta\lambda_{12})$ высчитываем по формуле 12

$$\begin{gathered}\sin(\Delta\lambda_{12}) = \frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)}\\ \cos(\Delta\lambda_{12}) = \frac{\cos(\psi_{12}) - \sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)}{\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)}\end{gathered} \tag{12}$$

Обратный азимут

$$A_{21} = 360^\circ - \mathrm{arctg}\left(\left|\frac{\sin(A'_{21})}{\cos(A'_{21})}\right|\right) \tag{13}$$

где $\sin(A'_{21})$ и $\cos(A'_{21})$ по формуле 14

$$\begin{gathered}\sin(A'_{21}) = \frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)}\\ \cos(A'_{21}) = \frac{\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)\cdot\sin(\psi_{12})}\end{gathered} \tag{14}$$

При нахождении прямых и обратных азимутов сначала вычисляется румб и затем уже с учетом четверти сам азимут.

Результаты вычислений приведены ниже

Дано:

φ_1=54°54′00,0″

λ_1=26°42′00,0″

ψ_{12}=0°24′58,9″

A_{12}=344°01′03,7″

φ_2–?

λ_2–?

A_{21}–?

Решение:

$$\varphi_2 = \arcsin(\sin(\varphi_1)\cdot\cos(\psi_{12}) + \cos(\varphi_1)\cdot\sin(\psi_{12})\cdot\cos(A_{12})) =$$
=54°30′00,0″

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{12} = 26°54'00{,}0''$$

$$\Delta\lambda_{12} = \mathrm{arctg}\left(\left|\frac{\sin(\Delta\lambda_{12})}{\cos(\Delta\lambda_{12})}\right|\right) = -0{,}200000$$

$$\sin\Delta\lambda_{12} = \frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)} = -0{,}003491$$

$$\cos\Delta\lambda_{12} = \frac{\cos(\psi_{12}) - \sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)}{\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)} = 0{,}999994$$

$$A_{21} = 360^\circ - \mathrm{arctg}\left(\left|\frac{\sin(A'_{21})}{\cos(A'_{21})}\right|\right) - 180^\circ = 163°48'10{,}0''$$

$$\sin A'_{21} = \frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} = -0{,}293225$$

$$\cos A'_{21} = \frac{\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)\cdot\sin(\psi_{12})} = -0{,}961098$$

Ответ: φ_2=54°30′00,0″

λ_2=26°54′00,0″

A_{21}=163°48′10,0″

Нахождение кратчайшего расстояния между двумя точками

Для нахождения кратчайшего расстояния между двумя точками примем радиус сферы за R = 6371000 м, воспользуемся следующими формулами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ r\cos(\varphi)\sin(\lambda) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \lambda = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \varphi = \arcsin\left(\dfrac{z}{r}\right) \end{cases} \tag{15}$$

и

$$S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{16}$$

Также воспользуемся сферической формулой для нахождения кратчайшего расстояния между двумя точками

$$S_a = a \cdot R \tag{17}$$

Воспользуемся формулами 15 для первой и второй точки соответственно

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\phi_1)\,cos(\lambda_1) \\ r\,cos(\phi_1)\,sin(\lambda_1) \\ r\,sin(\phi_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3272739{,}634 \\ 1646016{,}555 \\ 5212431{,}850 \end{pmatrix} м$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,cos(\phi_2)\,cos(\lambda_2) \\ r\,cos(\phi_2)\,sin(\lambda_2) \\ r\,sin(\phi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3299346{,}338 \\ 1673853{,}932 \\ 5186729{,}967 \end{pmatrix} м$$

Тогда, по формуле 16, S будет равно

$$S = 46297{,}117 \text{ м}$$

Воспользуемся формулой 17 и сравним значение, полученное по формуле 16.

$$S_a = a \cdot R = 0{,}01322414 \cdot 6371000 = 46297{,}218$$

$$S_a > S$$

$$46297{,}117 > 46297{,}218$$

Так как мы сравнили расстояния, найденные через формулы прямоугольного пространства и пространства на сфере можно сделать вывод о том, что расстояние на сфере между одними и теми же точками будет больше чем в прямоугольном пространстве из-за появления такой величины как сферический избыток.