Rapport de TP
Analyse numérique

Barbary Théo, Basile Thiry

Table des matières

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES HAUTS-DE-FRANCE

Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

TP1

Exercice 1

Nous avons la fonction suivante : $f(x) = \sqrt{1+x}$

Dans un premier temps nous devions retrouver le polynôme d'interpolation de Lagrange P vérifiant les « points » suivant :

$$P(0) = f(0), Pf\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right), P(1) = f(1)$$

Nous avons alors le tableau de point :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f(x)	1	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{2}$

Nous cherchons $P(x) = f(x0)L_0^2 + f(x1)L_1^2 + f(x2)L_2^2$

$$L_0^2 = \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(0-\frac{1}{2}\right)(0-1)},\ L_1^2 = \frac{(x-0)(x-1)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)},\ L_2^2 = \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1-0)\left(1-\frac{1}{2}\right)}$$

Donc

$$P(x) = \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(0-\frac{1}{2}\right)(0-1)} + \frac{\sqrt{6}}{2}\frac{(x-0)(x-1)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)} + \sqrt{2}\frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1-0)\left(1-\frac{1}{2}\right)}$$

Après quoi, nous avions dû créer un algorithme permettant de calculer et représenter graphiquement la fonction f(x) donnée dans l'énoncé et le polynôme P(x) calculé précédemment, puis l'erreur entre ces deux courbes :

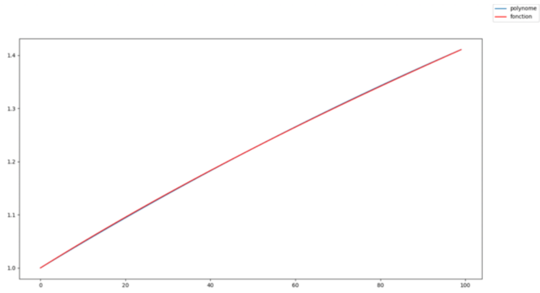

Figure 1: coubre f(x) et P(x)

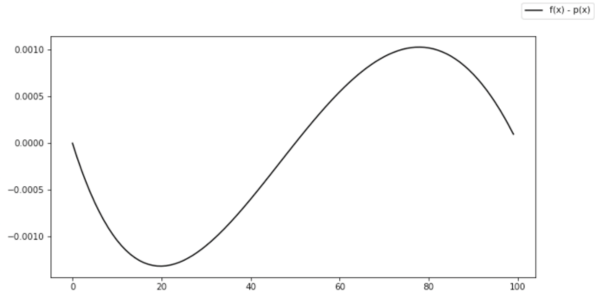

Figure 2: erreur entre les deux courbres)

Sur ces deux graphiques, on remarque que l'interpolation ressemble fortement à la fonction indiqué en cours, la courbe représentant l'erreur le prouve puisqu'on parle d'erreur à 0,001.

Il était aussi demandé de représenter l'erreur via un résultat du cours (majorant), soit l'inéquation suivante : $|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{2!}Max(f^2(x))|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|$

1) La dérivée $f''(x) = \frac{3}{8(x+1)^{\frac{5}{2}}}$
2) Création de l'algorithme permettant de représenter graphiquement $\frac{1}{2!}Max(f^2(x))|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|$

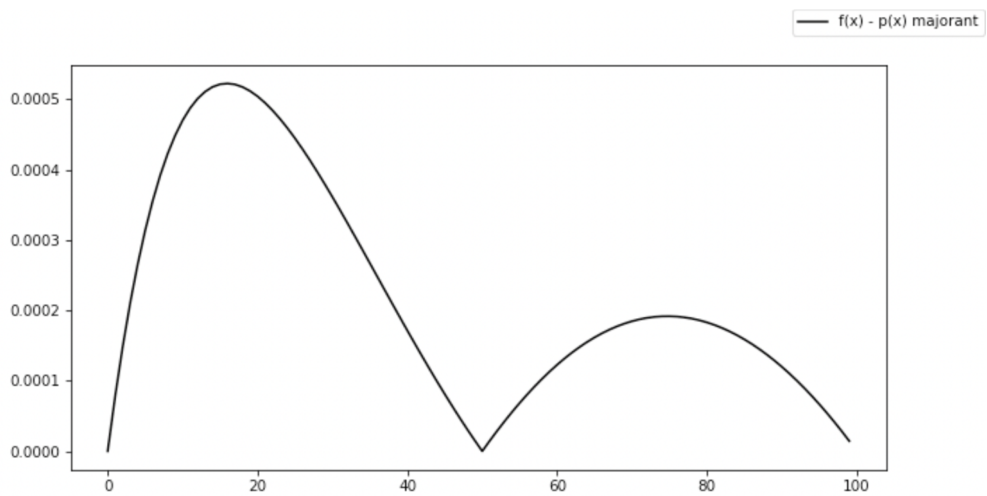

Figure 2: erreur via la méthode du cours (majorant)

On remarque quelle ressemble assez fortement à la première courbe d'erreur présenté un peu plus haut, si on ne prend pas en compte la valeur absolue bien sûr. Pour information l'erreur maximal est $8.709199.10^{-5}$.

Exercice 2

Dans un premier temps nous devions créer un programme permettant calculer les différences divisées des différents x_i et y_i données. Puis de trouver le polynôme d'interpolation grâce à l'algorithme d'Horner via les différences divisées.

Ensuite, en utilisant ces polynômes, on a pu les tracer en suivant 2 fonctions et les analyser :

- Pour la fonction : *f(x)* = $\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}$ sur [-2 ;2]

Equiréparti :

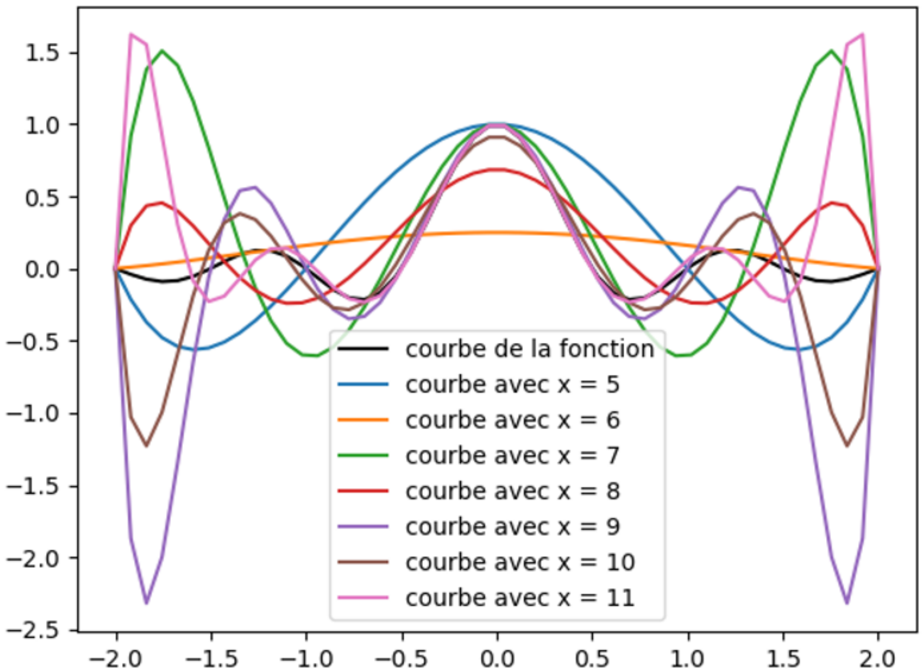

Figure 3: Equiparti pour f(x)

Tchebychev :

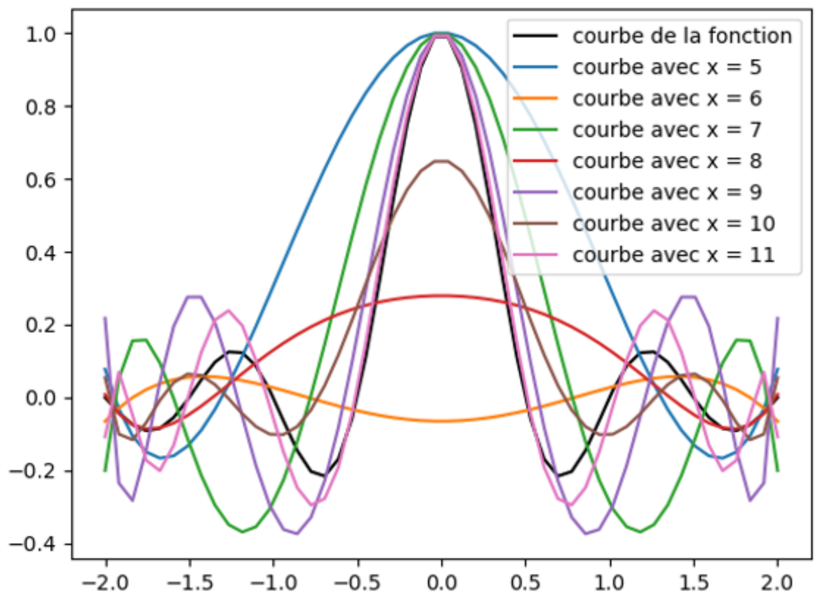

Figure 4: Techerbychev avec f(x)

- Pour la fonction : f(x) = $\frac{1}{1+x^2}$ sur [-5,5]

Equiréparti :

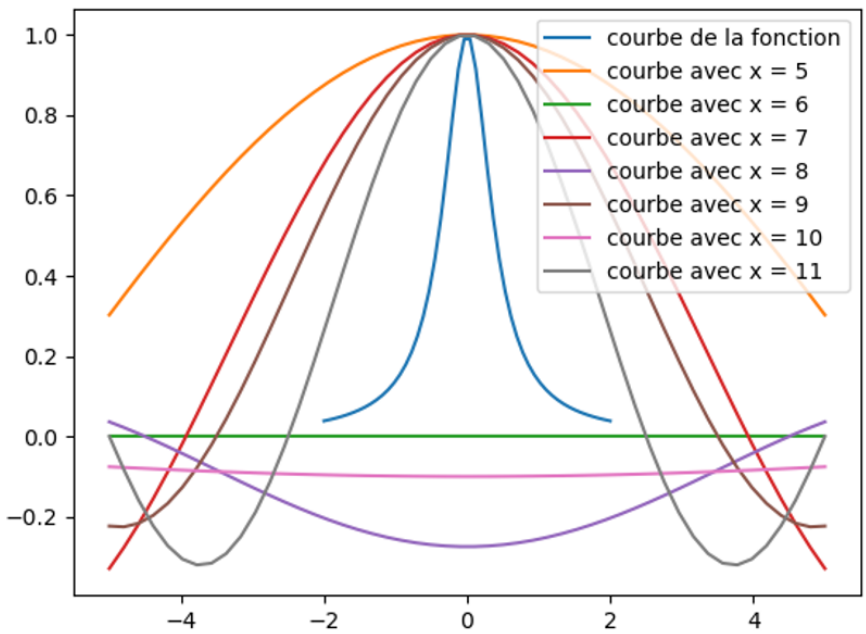

Figure 5 : équiparti avec g(x)

Tchebychev :

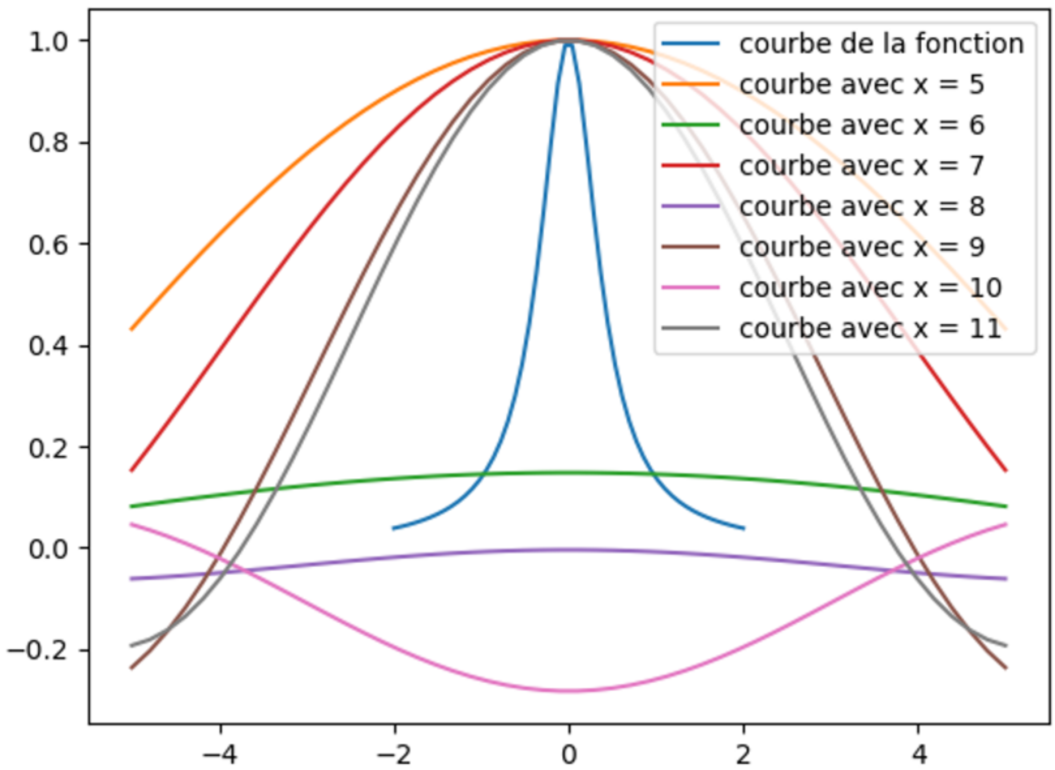

Figure 6 : Techerbychev g(x)

On remarque que dans le cas de Tchebychev, les courbes sont plus précises.
Car par exemple pour la fonction n°2, pour obtenir la valeur de -4, la courbe donnée par le polynôme de Tchebychev est plus proche de la réalité (on doit obtenir environ -0.066)

TP2

Dans un premier temps, le but du TP était de réaliser un programme permettant de résoudre *Ax = b* avec A la matrice carré représentant un système d'équation. Pour cela, la solution indiquée était de passer par la décomposition *LU* de la matrice *A*.

Création de l'algorithme

Pour vérifier la cohérence de mes résultats, nous d'abord créé un problème et nous l'avons résolu à la main, cela nous permettra de comparer avec le résultat de notre programme une fois réalisé. Le problème créé est le suivant :

Nous cherchons à résoudre Ax = b avec

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Avant tout, nous allons appliquer la décomposition *LU* de la matrice *A* en redéfinissant b, ce qui nous donne :

$$A^{(2)} = U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ avec } M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi nous pouvons déduire L tel que :

$$L = (M^{(1)})^{-1}(M^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Après quoi, nous appliquons la remonté sur $A^{(2)}$ donc définir b :

$$A_{remonté} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Enfin, nous pouvons déduire le résultat de x, y et z :

$$\begin{cases} 1x + 0\,y + 0z = 2 \\ 0x + 1\,y + 0z = \frac{5}{3} \\ 0x + 0\,y + 3z = -1 \end{cases} => \begin{cases} x = 2 \\ 1\,y = \frac{5}{3} \\ 3z = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Le programme réalisé donne bien les mêmes résultats pour chacune des étapes :

```
L :
1   0.0 0
2.0 1.0 0.0
1.0 1.0 1.0

U :
1   0   3
0.0 1.0 -4.0
0.0 0.0 3.0

A après pivot de Gauss:
1.0 0.0 0.0
0.0 1.0 0.0
0.0 0.0 3.0

x :  [2.0, 1.6666666666666667, -1.0]
```

Figure 7 : résultat de l'algorithme pour le problème créé

Problème du sujet

Cette fois le problème est de trouver les tensions T_i dans une structure métallique. Pour cela on nous fournit un système à 11 équations et 11 inconnues.

De cette manière nous pouvons définir sa forme matricielle qui est la suivante :

$$AT = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \\ T5 \\ T6 \\ T7 \\ T8 \\ T9 \\ T10 \\ T11 \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans le sujet il est dit qu'il est impossible de trouver une solution au problème via ce système, et ainsi qu'il faudrait déplacer la première ligne à la fin. Cependant, dans le programme que nous avons réalisé, les lignes sont directement déplacées si la valeur de la diagonale est nulle, ainsi sur chacune des valeurs de la diagonale nous avons des valeurs différentes de 0. C'est pourquoi nous n'avons pas rencontré le problème indiqué dans le sujet.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES HAUTS-DE-FRANCE

Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

Voici donc les éléments une fois sortie de notre algorithme :

- A après transposition des lignes (si élément de la diagonal = 0, changer la ligne avec une autre différente de 0)

```
-0.8660254037844387 0   0.7071067811865476  1   0   0   0   0   0   0   0
0   -1  -0.7071067811865476 0   0.7071067811865476  1   0   0   0   0   0
-0.49999999999999994    0   0.7071067811865475  0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   -1  -0.7071067811865476 0   0.7071067811865476  1   0   0   0
0   0   0.7071067811865475  0   0.7071067811865475  0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   -1  -0.7071067811865476 0   0.7071067811865476  1   0
0   0   0   0   -0.7071067811865475 0   -0.7071067811865475 0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   -1  -0.7071067811865476 0   0.8660254037844387
0   0   0   0   0   0   0.49999999999999994 0   0.7071067811865475  0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   -1  -0.8660254037844387
0   0   0   0   0   0   0   0   -0.7071067811865475 0   -0.49999999999999994
```

Figure 8 : A après transposition

- L :

```
L :
1.0 0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   1.0 0   0   0   0   0   0   0   0   0
0.5773502691896256  0   1.0 0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   1.0 0   0   0   0   0   0   0
0   0   2.3660254037844384  -1.3660254037844382 1.0 0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   1.0 0   0   0   0   0
0   0   0   0   2.73205080756888    0   1.0 0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   1.0 0   0   0
0   0   0   0   0   0   -0.14942924536134217    0.5576775358252053  1.0 0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   1.0 0
0   0   0   0   0   0   0   0   -0.6419813966632275 0   1.0
```

Figure 9: Matrice L

- U :

```
U :
-0.8660254037844387 0   0.7071067811865476  1   0   0   0   0   0   0   0
0   -1.0    -0.7071067811865476 0   0.7071067811865476  1.0 0   0   0   0   0
0   0   0.2988584907226845  -0.5773502691896256 0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   -1.0    -0.7071067811865476 0   0.7071067811865476  1.0 0   0   0
0   0   0   0   -0.2588190451025205 0   0.965925826289068   1.3660254037844382  0   0   0
0   0   0   0   0   -1.0    -0.7071067811865476 0   0.7071067811865476  1.0 0
0   0   0   0   0   0   -3.346065214951233  -3.7320508075688794 0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   -1.0    -0.7071067811865476 0   0.8660254037844387
0   0   0   0   0   0   0   0   1.101444348483954   0   -0.482962913144534
0   0   0   0   0   0   0   0   0   -1.0    -0.8660254037844387
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   -0.810053205517069
```

Figure 10: Matrice U

- A après la remonté :

```
A après pivot de Gauss:
-0.8660254037844388 0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   -1.0   0   0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0.2988584907226845  0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   -1.0   0   0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   -0.2588190451025205 0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   -1.0   0   0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   -3.346065214951233  0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   -1.0   0   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   1.101444348483954   0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   -1.0   0
0   0   0   0   0   0   0   0   0   0   -0.810053205517069
```

Figure 11: Matrice A après le pivot de Gauss et la remonté

- Résultat des tensions :

```
T 1  =   -50860.254226789715
T 2  =   50860.254226789715
T 3  =   12410.76339329327
T 4  =   -21496.072757899874
T 5  =   7087.78234110554
T 6  =   2131.89128901004
T 7  =   -91632.29055777047
T 8  =   17232.290179879798
T 9  =   9824.982474577691
T 10  =   -10924.834208658678
T 11  =   10218.749856290891
```

$$b = \begin{pmatrix} -50860{,}25 \\ 50860.25 \\ 12410{,}76 \\ -21496{,}07 \\ 7087{,}78 \\ 2131.89 \\ -91632{,}29 \\ 17232{,}29 \\ 9824{,}98 \\ -10924{,}83 \\ 10218{,}75 \end{pmatrix}$$

Figure 12: Matrice b résultat

De cette manière nous pouvons déduire si chacune des « tensions » sont des tensions ou des compressions :

Tensions	Compressions
$T_2,\ T_3,\ T_5,\ T_6,\ T_8,\ T_9,\ T_{11}$	$T_1,\ T_4,\ T_7,\ T_{10}$