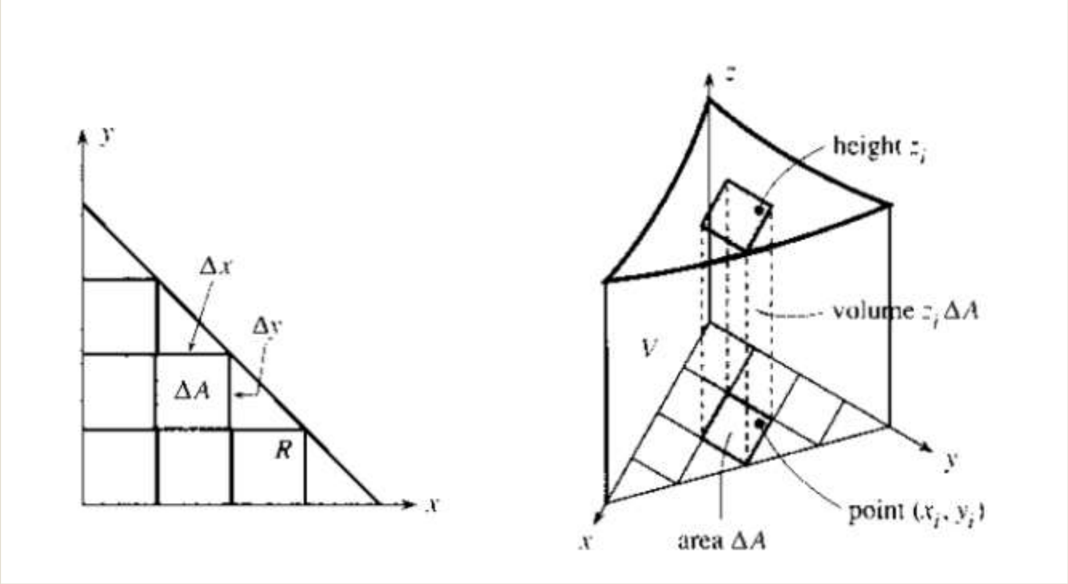
INTEGRAL LIPAT DUA

Kalkulus II
Prodi Informatika
Universitas Siliwangi

Euis Nur Fitriani Dewi, S.T., M.Kom.

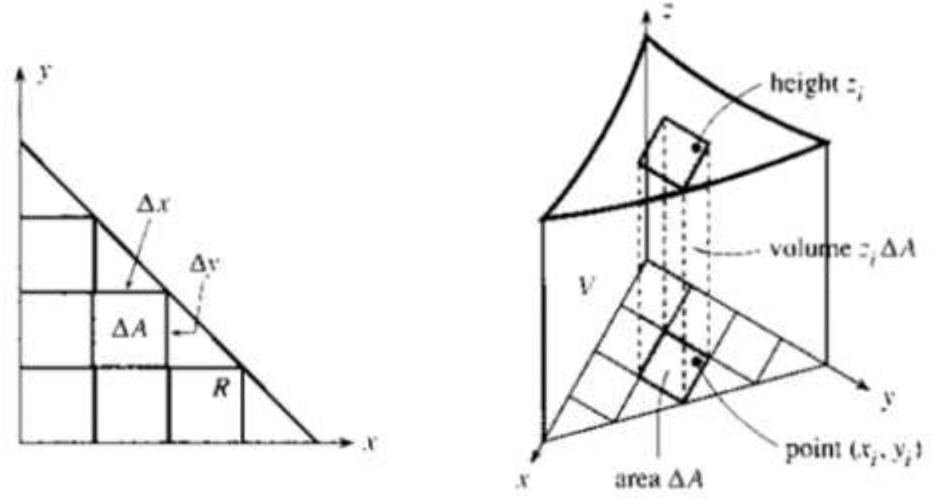
1. Definisi Integral Lipat Dua



Gambar Luasan di Bawah Permukaan f(x, y)

Pada integral tertentu $\int_b^a f(x)\,dx$ yang dapat didefinisikan, apabila f(x) terdefinisi pada interval [a,b].

Demikian juga dengan integral lipat dua: $\iint_R f(x,y)dx\,dy$ akan didefinisikan dengan menganggap terlebih dahulu menganggap f(x,y) terdfinisi pada daerah tertutup dan terbatas R di bidang xy.



Misalkan R suatu daerah tertutup dan terbatas pada bidang xy. Jika $f(x,y)$ adalah sebuah fungsi dua peubah yang terdefinisi pada R, maka integral lipat dua f pada R dinyatakan

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i .$$

Perhatikan bahwa bentuk $\iint_R f(x,y)dA$ dapat ditulis pula dengan bentuk $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ atau $\iint_R f(x,y)dydx$.

Sifat-sifat Integral Lipat Dua:

(i). $\iint C\, f(x,y)dxdy = C\iint_R f(x,y)dx\,dy$ dengan C adalah konstanta

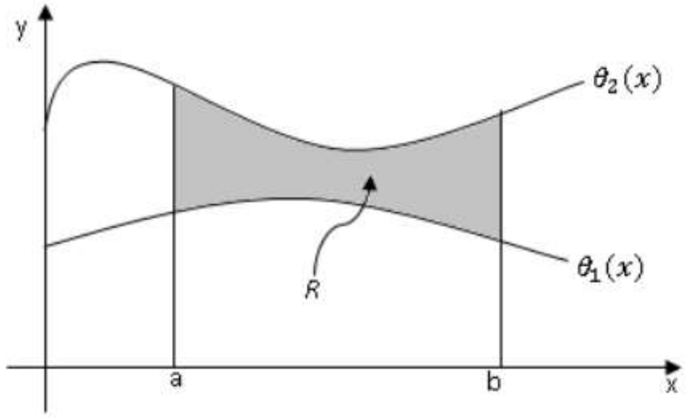
(ii). $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy + \iint_R g(x,y)\,dx\,dy$ asalkan f dan g fungsi-fungsi yang terintegral pada R.

(iii). Jika R dapat dipartisi menjadi R_1 dan R_2 maka :

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{R_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Pada umumnya menghitung integral Lipat Dua dengan menggunakan definisi di atas, biasanya sangat sukar menentukan nilainya. Teorema dasar kalkulus dapat membantu kita menghitung integral lipat dua dengan cara melakukan integral secara berulang sebagai berikut: suatu fungsi dua peubah diintegralkan pertama kali terhadap salah satu peubahnya dengan menganggap peubah yang lain sebagai konstanta, kemudian hasilnya diintegralkan terhadap peubah yang satunya lagi.

Dalam hal ini ada dua jenis daerah R yang biasa dijumpai :



Gambar pengintegralan jenis I

(1). **Daerah jenis I**: Jika R daerah tertutup dan terbatas pada bidang xy yang dibatasi oleh kurva-kurva mulus $y = \theta_1(x)$ dan $y = \theta_2(x)$, dengan $\theta_1(x) \leq \theta_2(x)$ untuk semua $x \in [a, b]$, atau $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \theta_1(x) \leq y \leq \theta_2(x)\}$,

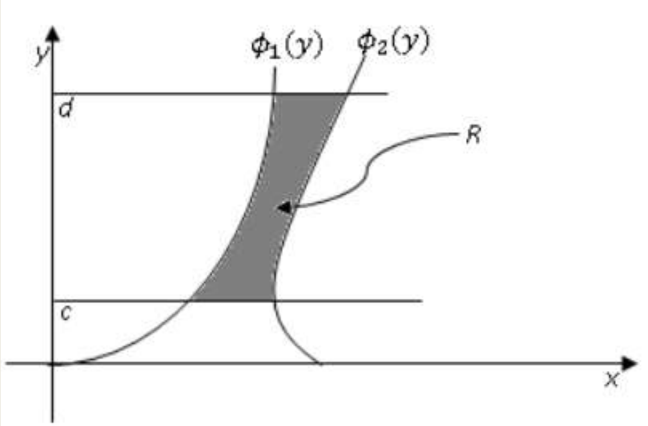
Perhatikan daerah gambar yang di arsir yang dibatasi oleh dua kurva dan dua garis tegak

maka :

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dydx = \int_a^b \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(x,y)dy \right\} dx$$

Integral dalam kurung diselesaikan lebih dahulu terhadap y (dengan menganggap x konstan), kemudian hasilnya diintegralkan terhadap x dari a ke b. Hal inilah yang dimaksud integral berulang.

(2) **Daerah Jenis II**: Jika R daerah tertutup dan terbatas pada bidang xy yang dibatasi garis-garis $y = c, y = d$ dan dibatasi kurva-kurva mulus $\phi_1(y)$ dan $\phi_2(y)$ dimana $\phi_1(y) \leq \phi_2(y)$ untuk nilai-nilai $y \in [c, d]$. Daerah R dapat dinyatakan sebagai $R = \{(x, y): c \leq y \leq d, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\}$.



$$\iint_R f(x, y)\, dAv = \iint_R f(x, y)\, dx dy = \int_c^d \left\{ \int_{\phi_1}^{\phi_2} f(x, y)\, dx \right\} dy.$$

Contoh :

Hitung Integral lipat $\int_1^2 \int_1^{x^2} (x^2 + y^2)\, dydx$.

Penyelesaian

$$\int_1^2 \int_1^{x^2} (x^2 + y^2) dydx = \int_1^2 \left\{ \int_1^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right\} dx$$

$$= \int_1^2 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_1^{x^2} dx$$

$$= \int_1^2 \left(x^4 - x^2 + \frac{x^6}{3} - \frac{1}{3} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{21} - \frac{x}{3} \right]_1^2$$

$$= \frac{1006}{105}.$$

Quiz:

1

2

3

BREAK...

Kartu Soal 1

1. $\int_0^2 \int_1^3 x^2 y \, dy \, dx$

2. $\int_1^2 \int_0^3 (xy + y^2) dx \, dy$

1.

$$\int_0^2 \left[\int_1^3 x^2 y\, dy\right] dx$$

$$\int_1^3 x^2 y dy = \left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)\Big|_{y=1}^{3} = \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 = 4x^2$$

$$\int_0^2 \left[\int_1^3 x^2 y\, dy\right] dx = \int_0^2 4x^2 dx = \frac{4}{3}x^3 \Big|_0^2 = \frac{32}{3} - 0 = \frac{32}{3}$$

2.

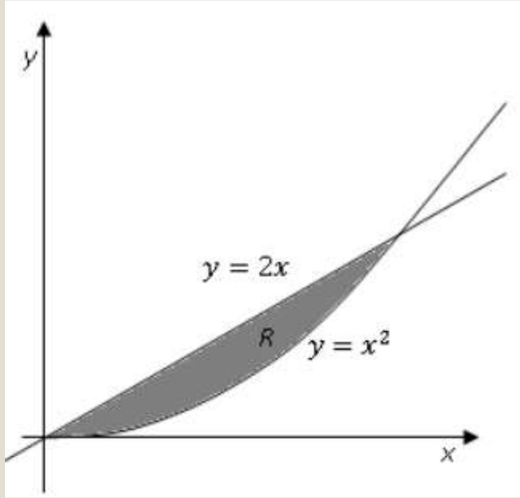
$$\int_1^2 \left[\int_0^3 (xy + y^2) dx\right] dy$$

$$\int_0^3 (xy + y^2) dx = \frac{1}{2}x^2y + y^2x \Big|_0^3 = \left(\frac{9}{2}y + 3y^2\right) - (0) = \frac{9}{2}y + 3y^2$$

$$\int_1^2 \left[\int_0^3 (xy + y^2) dx\right] dy = \int_1^2 \left[\frac{9}{2}y + 3y^2\right] dy = \frac{9}{4}y^2 + y^3 \Big|_1^2 = (9 + 8) - \left(\frac{9}{4} + 1\right) = \frac{55}{4}$$

Kartu soal 2

1. Carilah volume benda pejal yang terletak di bawah paraboloida $z = x^2 + y^2$ dan di atas daerah R di bidang xy yang dibatasi oleh garis $y = 2x$ serta parabola $y = x^2$.



Kartu soal 3

Tentukan integral lipat dalam koordinat polar berikut:

$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{4-x^2-y^2}$ dy dx

Klik di sini

Thank you

finish