Student Name:

Student ID:

答题内容写在边线外视为无效

Major:

哈尔滨工业大学（深圳）

2018 年秋季学期期末考试试卷

HIT Shenzhen Examination Paper

Course Name: 矩阵分析 **Lecturer:** 严质彬

Question	One	Two	Three	Four	Five	Six	Seven	Eight	Nine	Ten	Total
Mark											

一、(20 分) $\mathbb{R}[x]_n$ 表示所有次数小于 n 的实系数多项式的集合，它是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间(以多项式为"向量"). (1). 证明向量组

$$f_1(x)=x+1,\ f_2(x)=x-1,\ f_3(x)=x^2,\ f_4(x)=x^3+1$$

是 $\mathbb{R}[x]_4$ 的一个基，向量组

$$g_1(x)=1,\ g_2(x)=x+2,\ g_3(x)=x^2,\ g_4(x)=x^3,\ g_5(x)=2x^4$$

是 $\mathbb{R}[x]_5$ 的一个基; (2). 定义映射 $\mathcal{A}:\mathbb{R}[x]_4\to\mathbb{R}[x]_5$ 如下:

$$\mathcal{A}(f(x))=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)-\int_0^x f(t)dt,$$

证明 $\mathcal{A}$ 是线性映射; (3). 求 $\mathcal{A}$ 在(1)中给出的一对基下的矩阵表示.

二、(20 分) (1). 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，写出 A 的不变子空间的定义，并证明 $\ker A$ 是 A 的一个不变子空间; (2). 设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\\frac{1}{2}&1&\frac{3}{2}\end{bmatrix},$$

求子空间 $\ker A$ 的一个基; (3). 将(2)中求出的基扩张成 $\mathbb{R}^3$ 的一个基; (4).求 A 所确定的 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $x\mapsto y=Ax$ 在(3)中给出的基下的矩阵表示.

三、(10 分) (1). 什么是 λ 矩阵的行列式因子和不变因子? (2). 什么是单位模阵? (3). 求 λ 矩阵

$$\begin{bmatrix}\lambda^2-1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda^2-2\lambda+1\end{bmatrix}$$

的 Smith 标准型.

四、(10 分) 求复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准型，并求出相应的相似变换矩阵.

五、(10 分) (1). 已知 $\mathbb{R}^4$ 中三个向量

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},$$

求解最小值问题 $\min\limits_{x_1,x_2\in\mathbb{R}}\|\beta-\alpha_1x_1-\alpha_2x_2\|$; (2). 求 $\mathbb{R}^4$ 到子空间 $\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 的正交投影矩阵.

六、(10 分) (1). 写出矩阵的正交-三角分解定理; (2). 求矩阵

$$\begin{bmatrix}1&2\\\frac{1}{2}&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

的正交-三角分解.

七、(10) (1). 什么是正规矩阵? (2). 写出关于正规矩阵的 Schur 定理; (3). 写出酉矩阵的四个等价条件，并证明酉矩阵的所有特征值的模均为 1.

八、(10 分) (1). 什么是矩阵的奇异值分解? (2) 定义映射 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 如下

$$\begin{aligned}y&=\mathcal{A}(x)\\&=\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}x\end{aligned}$$

证明单位圆周

$$S=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}:x_1^2+x_2^2=1\right\}$$

在映射 $\mathcal{A}$ 下的像 $\mathcal{A}(S)$ 是椭圆，并求出该椭圆的长半轴和短半轴.