

Student Name:

Student ID:

Major:

答题内容为写在边线外视为无效

哈尔滨工业大学深圳研究生院
2017 年 秋 季学期期末考试试卷

HIT Shenzhen Graduate School Examination Paper

Course Name: 矩阵分析

Lecturer: 严质彬

Question	One	Two	Three	Four	Five	Six	Seven	Eight	Nine	Ten	Total
Mark											

一、(20 分) $\mathbb{R}[x]_4$ 表示所有次数小于 4 的实系数多项式的集合, 它是 \mathbb{R} 上的向量空间(以多项式为"向量")。 (1). 写出一般向量空间基的定义; (2). 证明向量组
 $f_1(x) = x + 1, f_2(x) = x - 1, f_3(x) = x^2, f_4(x) = x^3 + 1$

是 $\mathbb{R}[x]_4$ 的一个基; (3). 写处线性映射的定义; (4). 定义映射 $\mathcal{A}: \mathbb{R}[x]_4 \rightarrow \mathbb{R}[x]_4$ 如下:

$$\mathcal{A}(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x) - 2 \int_0^x f(t) dt,$$

证明 \mathcal{A} 是线性映射; (5). 写出线性映射的矩阵表示的定义; (6). 求(4)中定义的线性映射 \mathcal{A} 在入口基和出口基都选为(2)中给出的基时的矩阵表示.

二、(20 分) (1). $\mathbb{R}^{m \times n}$ 表示实数域上所有 $m \times n$ 矩阵的集合. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 写出 A 与 B 等价的定义; (2). 设 $y = Ax$, 这里

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求可逆矩阵 P, Q 使得经变量代换 $x = P\tilde{x}, y = Q\tilde{y}$ 后, \tilde{y} 和 \tilde{x} 之间的关系是"解耦的": 即 \tilde{y}_1 只依赖于 \tilde{x}_1 , \tilde{y}_2 只依赖于 \tilde{x}_2 ,..... 这里

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_m \end{bmatrix}.$$

(3). 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 写出 A 的不变子空间的定义; (4) 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

求出 A 的所有一维不变子空间.

三、(10 分) (1). 什么是 λ 矩阵的行列式因子和不变因子? (2). 什么是单位模阵? (3). 求 λ 矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{bmatrix}$$

的 Smith 标准型.

四、(10 分) (1). 写出两个矩阵相似的定义; (2). 写出矩阵相似的三个等价条件; (3). 求复数域 \mathbb{C} 上的矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准型.

五、(10 分) (1). 设 V 是实数域 \mathbb{R} 上的线性空间. 写出 V 上的内积的定义; (2). 设 V 是实内积空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 V 中的一个向量组, 写出该向量组的 Gram 矩阵的定义; (3). 写出并证明实内积空间中的 Cauchy-Schwartz 不等式.

六、(10 分) (1). 写出矩阵的正交-三角分解定理; (2). 求矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

的正交-三角分解.

七、(10) (1). 什么是正规矩阵? (2). 写出关于正规矩阵的 Schur 定理; (3). 证明 Hermite 矩阵的特征值都是实数.

八、(10 分) (1). 什么是矩阵的奇异值分解? (2) 定义映射 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 如下

$$y = \mathcal{A}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x,$$

证明单位圆周

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

在映射 \mathcal{A} 下的像 $\mathcal{A}(S)$ 是椭圆, 并求出该椭圆的长半轴和短半轴.