主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2019 年秋季学期

矩阵分析试题

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得　分											
阅卷人											

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 100 分。

姓名 学号 班号 学院

密 封 线

一、 (20 分) $\mathbb{R}[x]_n$ 表示所有次数小于 n 的实系数多项式的集合, 它是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间(以多项式为"向量"). (1) 证明向量组

$$f_1(x)=x,\ f_2(x)=x-1,\ f_3(x)=x^2+1,\ f_4(x)=x^3$$

是 $\mathbb{R}[x]_4$ 的一个基, 向量组

$$g_1(x)=1,\ g_2(x)=x+2,\ g_3(x)=x^2,\ g_4(x)=x^3-1,\ g_5(x)=2x^4$$

是 $\mathbb{R}[x]_5$ 的一个基. (2) 定义映射 $\mathcal{A}:\mathbb{R}[x]_4\to\mathbb{R}[x]_5$ 如下:

$$\mathcal{A}(f(x))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)-2\int_0^x f(t)dt,$$

证明 $\mathcal{A}$ 是线性映射. (3) 求 $\mathcal{A}$ 在(1)中给出的一对基下的矩阵表示.

二、(20 分) (1) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，写出 A 的不变子空间的定义，并证明 $\mathrm{im}A$ 是 A 的一个不变子空间. (2) 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix},$$

求子空间 $\mathrm{im}A$ 的一个基; (3). 将(2)中求出的基扩张成 $\mathbb{R}^3$ 的一个基; (4).求 A 所确定的 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $x \mapsto y = Ax$ 在(3)中给出的基下的矩阵表示.

三、(10 分) (1) 什么是λ矩阵的等价？什么是λ矩阵的 Smith 标准型？ (2) 什么是单位模阵？ (3) 求λ矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 0\\ 0 & \lambda+1\end{bmatrix}$$

的 Smith 标准型. (4) 写出将 $A(\lambda)$ 化为其 Smith 标准型的单位模阵.

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

四、(10 分) (1) 什么是矩阵的初等因子? (2) 求复数域$\mathbb{C}$上的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

的所有初等因子. (3) 求 A 的 Jordan 标准型.

五、(20 分) (1) 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 写出 V 上的内积的定义. (2) 什么是内积空间中向量组的 Gram 矩阵? (3) 设 $V=\mathcal{L}^2([0,1],\mathbb{R})$, 定义 V 上的内积

$$< f,g >=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

这里 $f,g\in V$. 求 V 中的向量组 $f_1(x)=1, f_2(x)=x, f_3(x)=x^2$ 的 Gram 矩阵. (4) 对(3)中给出的向量组实施 Gram-Schmidt 正交化. (5) 求 V 中的向量 $h(x)=x^3+1$ 在子空间 $\mathrm{span}\{f_1(x),f_2(x)\}$ 上的正交投影

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

六、(20)　(1) 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 写出 V 上的范数的定义.　(2) 写出 $\mathbb{R}^n$ 上 p-范数的定义, 并证明它是范数, 这里 $p \geq 1$.　(3) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 写出由向量的 p-范数导出的矩阵范数的定义. (4) 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

计算由向量的 2-范数导出的 A 的矩阵范数.

姓名________

学号________

班号________

学院________

密　封　线