Cholesky分解法(平方根法)

- i）记D=diag$(u_{11},u_{22},\ldots,u_{nn})$, $\hat{U}= D^{-1}U$

  $A=LU=(LD)(D^{-1}U)=LD\hat{U}$ (分解惟一)

其中L是单位下三角阵，$\hat{U}$是单位上三角阵.

- 如果A是对称正定的，则$\hat{U}=L^{T}$,

$$A = LDL^{T} = (LD^{\frac{1}{2}})(LD^{\frac{1}{2}})^{T} = \bar{L}\bar{L}^{T}$$

其中$\bar{L}$是下三角阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{l}_{21} & \bar{l}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \cdots & \bar{l}_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & \bar{l}_{21} & \cdots & \bar{l}_{n1} \\ 0 & \bar{l}_{22} & \cdots & \bar{l}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{l}_{nn} \end{pmatrix}=\bar{\boldsymbol{L}}\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}$$

称为矩阵的Cholesky分解.

利用矩阵运算比较两边得其分解公式: 对k=1,2,3,…n，

$$\begin{cases} \bar{l}_{kk}=(a_{kk}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}\bar{l}_{kr}^{2})^{1/2} \\ \bar{l}_{ik}=(a_{ik}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}\bar{l}_{ir}\bar{l}_{kr})/\bar{l}_{kk} \quad (i=k+1,k+2,\cdots,n) \end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{1}^{0}=0$

求解$Ax=b \Leftrightarrow$求解 $\begin{cases} \bar{L}y = b \\ \bar{L}^{T}x=y \end{cases}$

- ii）求解方程组 $\bar{L}y=b$，即

$$\begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{l}_{21} & \bar{l}_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \cdots & \bar{l}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

其计算公式为

$$y_k = \left(b_k - \sum_{r=1}^{k-1} \bar{l}_{kr} y_r \right) \Big/ \bar{l}_{kk} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

其中$\sum_{r=1}^{0} = 0$

- iii）求解方程组 $\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$，即

$$\begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & \bar{l}_{21} & \cdots & \bar{l}_{n1} \\ 0 & \bar{l}_{22} & \cdots & \bar{l}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{l}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

其计算公式为

$$x_k = (y_k - \sum_{r=k+1}^{n} \bar{l}_{rk} x_r) \Big/ \bar{l}_{kk} \quad (k = n, n-1, \cdots, 2, 1)$$

其中 $\sum_{r=n+1}^{n} = 0$

- Cholesky分解法的存储可利用原系数矩阵(对称)的存储单元，它没有增加储存单元，存储形式.

$$\begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & & \cdots & \\ \bar{l}_{21} & \bar{l}_{22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{l}_{n1} & \bar{l}_{n2} & \cdots & \bar{l}_{nn} \end{pmatrix} \to A$$

- 平方根法是用于解系数矩阵为正定矩阵的线性方程组.

- 例 用平方根法（Cholesky分解）解方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

解 由于系数矩阵A对称正定，故一定有分解形式 $A = \bar{L}\bar{L}^T$
其中$\bar{L}$为下三角阵.

（1）对系数矩阵进行Cholesky分解$A = \bar{L}\bar{L}^T$，即

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{l}_{11} & & \\ \bar{l}_{21} & \bar{l}_{22} & \\ \bar{l}_{31} & \bar{l}_{32} & \bar{l}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{l}_{11} & \bar{l}_{21} & \bar{l}_{31} \\ & \bar{l}_{22} & \bar{l}_{32} \\ & & \bar{l}_{33} \end{bmatrix}$$

由公式得 $\bar{l}_{11}=\sqrt{3},\quad \bar{l}_{21}=\dfrac{2}{\sqrt{3}},\quad \bar{l}_{31}=\sqrt{3}$

$\bar{l}_{22}=\sqrt{\dfrac{2}{3}},\quad \bar{l}_{32}=-\sqrt{6},\quad \bar{l}_{33}=\sqrt{3}$

解方程组 $\bar{L}y=b$ ，即

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & & \\ \dfrac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{\dfrac{2}{3}} & \\ \sqrt{3} & -\sqrt{6} & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

得 $\boldsymbol{y}=(\dfrac{5}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})^{\mathrm{T}}$

解方程组 $\bar{L}^T x=y$ ，即

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \dfrac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} \\ & \sqrt{\dfrac{2}{3}} & -\sqrt{6} \\ & & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{5}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

得 $\boldsymbol{x}=(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3})^{\mathrm{T}}$

改进的Cholesky分解法(改进的平方根法)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & 1 & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=LDL^{\mathrm{T}}$$

利用矩阵运算比较两边得其分解公式:对$k=1,2,3,\ldots n$,

$$\begin{cases} d_k = a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}^2 d_r \\ l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} d_r l_{kr}) / d_k \quad (i=k+1, k+2, \cdots, n) \end{cases}$$

其中 $\sum_{r=n+1}^{n} = 0$

- ii）求解方程组$\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$

$$y_k = b_k - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} y_r \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

其中 $$\sum_{r=1}^{0} = 0$$

- iii）求解方程组$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}= \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{y}$

$$x_k = y_k / d_k - \sum_{r=k+1}^{n} l_{rk} x_r \quad (k = n, n-1, \cdots, 2, 1)$$

其中 $$\sum_{r=n+1}^{n} = 0$$

- 改进的Cholesky分解法的存储可利用原系数矩阵(对称)的存储单元，它没有增加储存单元，存储形式.

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \cdots & \\ l_{21} & d_2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & d_n \end{pmatrix} \to A$$

- 例 用改进的平方根法解方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 30 \end{bmatrix}$$

- 解系数矩阵是对称的，故可分解为LDL^{T}，设有分解

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ & 1 & l_{32} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

- 由公式得

$$d_1 = 3, \quad l_{21} = 1, \quad l_{31} = \frac{5}{3}$$

$$d_2 = 2, \quad l_{32} = 2, \quad d_3 = \frac{2}{3}$$

解方程组$\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$，即

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ \frac{5}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 30 \end{bmatrix}$$

得 $\boldsymbol{y}=(10, 6, \frac{4}{3})^{\mathrm{T}}$

解方程组$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{y}$，即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{3} \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

得 $\boldsymbol{x}=(1, -1, 2)^{\mathrm{T}}$