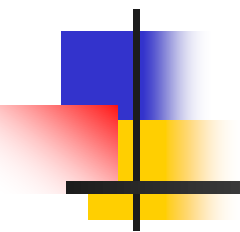




数值分析

哈尔滨工业大学（深圳）理学院数学学科
杨云云 副教授



误差理论



误差的来源

- 固有误差

1. 模型误差：建立数学模型时产生的误差
2. 观测误差：参与计算的数是近似的

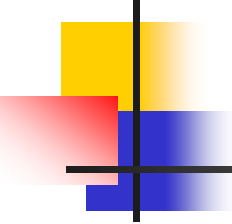
- 计算误差

1. 舍入误差 例如计算机上表示 π, e, \dots 等无理数时产生的误差.
2. 截断误差

很多情况下不是对得到的数学问题进行求解，而是对它的某一近似问题求解. 例计算

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

用 $S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ 近似 e^x

- 
-
- 对于一个算法，误差分析十分重要，它是衡量一个算法是否有效的关键. 一个算法只有误差在所允许范围内，才是有效的，否则毫无意义.



误差的概念

■ 绝对误差

假设某一量的准确值为 x ，其近似值为 x^* ，则称 $x-x^*$ 为近似数 x^* 的绝对误差或简称误差。

■ 绝对误差界

如果 $|x-x^*| \leq \eta$ ，则称 η 为近似值 x^* 的绝对误差界或简称误差界。



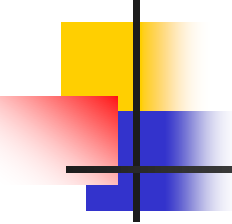
■ 相对误差

称 $\frac{x - x^*}{x}$ 为近似值 x^* 的相对误差.

在实际问题中常取 $\frac{x - x^*}{x^*}$ 为近似值 x^* 的相对误差.

■ 相对误差界

如果 $\left| \frac{x - x^*}{x} \right| \leq \delta$, 则称 δ 为近似值 x^* 的相对误差界.



若 x 的某一近似值 x^* 的绝对误差界是某一位的半个单位，则从这一位起直到左边第一个非零数字为止的所有数字都称为 x^* 的有效数字。

■ 有效数字

设准确值 x 的近似值 x^* 可表示为

$$x^* = \pm 0. a_1 a_2 \dots a_n \dots \times 10^m$$

其中 m 是整数， a_i 是0到9之间的一个数字

且 $a_1 \neq 0$ ，如果 $|x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$

则称近似值 x^* 具有 n 位有效数字，也可以说它精确到第 n 位。

有效数字越多，绝对误差界越小。

例1 $x=10\pm 1$, $y=1000\pm 5$.

则 $x^*=10$, $|E(x^*)|\leq 1$; $y^*=1000$, $|E(y^*)|\leq 5$ 绝对误差限

$$\frac{1}{10} = 10\%$$

$$\frac{5}{1000} = 0.5\% \text{ 相对...}$$

y^* 精确程度更高

例题

例2. $x=\pi=3.14159265\dots$

取3位

$$x_3^*=3.14$$

$$\frac{1}{2}\times 10^{-2}$$

取5位

$$x_5^*=3.1416$$

$$\frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

例3. 按四舍五入原则分别写出数 0.03783551 , $e=2.718281828\dots$,

0.002030002 具有5位有效数字的近似数

解: 0.037836 , 2.7183 , 0.0020300

$$5\text{位 } \frac{1}{2}\times 10^{-7}$$

$$0.00203$$

$$3\text{位 } \frac{1}{2}\times 10^{-5}$$



有效数字与相对误差的联系

- 定理 若准确值 x 的近似值

$$x^* = \pm 0. a_1 a_2 \dots a_n \dots \times 10^m$$

具有 n 位有效数字，则其相对误差满足

$$\left| \frac{x - x^*}{x^*} \right| \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$$

反之，若 x^* 满足 $\left| \frac{x - x^*}{x^*} \right| \leq \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-n+1}$

则 x^* 至少具有 n 位有效数字。

有效数字越多，相对误差界越小。



数值计算中应注意的一些问题

- 防止有效数字损失（要避免两个相近的数相减，要避免大数“吃掉”小数，要避免除数绝对值远远小于被除数绝对值的除法）；
- 注意简化运算步骤，减少运算次数.
- 要使用数值稳定的算法；