数值分析

哈尔滨工业大学（深圳）理学院数学学科
杨云云 副教授

误差理论

误差的来源

- 固有误差

1.模型误差：建立数学模型时产生的误差

2.观测误差：参与计算的数是近似的

- 计算误差

1. 舍入误差 例如计算机上表示π,e…等无理数时产生的误差.

2. 截断误差

很多情况下不是对得到的数学问题进行求解，而是对它的某一近似问题求解. 例计算

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

用 $S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 近似e^x

- 对于一个算法，误差分析十分重要，它是衡量一个算法是否有效的关键. 一个算法只有误差在所允许范围内，才是有效的，否则毫无意义.

误差的概念

- 绝对误差

假设某一量的准确值为x，其近似值为x^*，则称$x-x^*$为近似数x^*的绝对误差或简称误差.

- 绝对误差界

如果$|x-x^*|\leq\eta$，则称η为近似值x^*的绝对误差界或简称误差界.

- 相对误差

称$\frac{x-x^*}{x}$ 为近似值x^*的相对误差.

在实际问题中常取 $\frac{x-x^*}{x^*}$为近似值x^*的相对误差.

- 相对误差界

如果$\left|\frac{x-x^*}{x}\right| \le \delta$，则称$\delta$为近似值$x^*$的相对误差界.

若x的某一近似值x^*的绝对误差界是某一位的半个单位，则从这一位起直到左边第一个非零数字为止的所有数字都称为x^*的有效数字。

- 有效数字

设准确值x的近似值x^*可表示为

$$x^*=\pm 0.a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \times 10^m$$

其中m是整数， a_i是0到9之间的一个数字

且$a_1 \neq 0$，如果$\left|x-x^*\right| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$

则称近似值x^*具有n位有效数字，也可以说它精确到第n位.

有效数字越多，绝对误差界越小.

- 例题

例1 $x=10\pm1$，$y=1000\pm5$.

则 $x^*=10$，$|E(x^*)|\le 1$； $y^*=1000$，$|E(y^*)|\le 5$ 绝对误差限

$\frac{1}{10}=10\%$ $\qquad$ $\frac{5}{1000}=0.5\%$ 相对…

y^* 精确程度更高

例2. $x=\pi=3.14159265\cdots$

取3位 $x_3^*=3.14$ $\qquad \frac{1}{2}\times10^{-2}$

取5位 $x_5^*=3.1416$ $\qquad \frac{1}{2}\times10^{-4}$

例3. 按四舍五入原则分别写出数 0.0378355l，$e=2.718281828\cdots$，0.00203000Z具有5位有效数字的近似数

解: 0.037836， 2.7183， 0.0020300 $\qquad$ 5位 $\frac{1}{2}\times10^{-7}$

0.00203 $\qquad$ 3位 $\frac{1}{2}\times10^{-5}$

有效数字与相对误差的联系

- 定理　若准确值x的近似值

$$x^*=\pm 0.\, a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots \times 10^m$$

具有n位有效数字，则其相对误差满足

$$\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right| \le \frac{1}{2a_1}\times 10^{-n+1}$$

反之，若x^*满足 $\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right| \le \frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-n+1}$

则x^*至少具有n位有效数字。

有效数字越多，相对误差界越小.

数值计算中应注意的一些问题

- 防止有效数字损失（要避免两个相近的数相减，　要避免大数“吃掉”小数，要避免除数绝对值远远小于被除数绝对值的除法）；
- 注意简化运算步骤，减少运算次数.
- 要使用数值稳定的算法;