2017 矩阵考试参考答案，聂才，如有错误请于本人联系

一、

(1)若有正整数以及线性空间V中的向量组$a_1, a_2, \dots, a_n$使得

1. $a_1, a_2, \dots, a_n$线性无关；
2. 任取向量$a \in V$均可由$a_1, a_2, \dots, a_n$线性表示，

则向量组$a_1, a_2, \dots, a_n$称为V的一个基。

(2)设

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + k_3 f_3(x) + k_4 f_4(x) = 0$$

可得$k_3 = k_4 = 0$，又由$f_1(x)$和$f_2(x)$线性无关可得$k_1 = k_2 = 0$，进而得知向量组线性无关。

$\mathrm{P}[x]_4$中的任一向量a可以示为$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$，则该向量可以由这组向量组这样表示：

$$a = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad f_3(x) \quad f_4(x)] \begin{bmatrix} \frac{b_0 + b_1 - b_3}{2} \\ \frac{b_1 + b_3 - b_0}{2} \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

可见向量组$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$是$\mathrm{P}[x]_4$的一个基。

(3)设V_1, V_2是F上的两个线性空间，如果映射$\mathrm{A}: V_1 \to V_2$满足：

1. 对任意$a_1, a_2 \in V_1$有$\mathrm{A}(a_1 + a_2) = A(a_1) + A(a_2)$；
2. 对任意$a \in V_1, k \in F$有$\mathrm{A}(a \cdot k) = A(a) \cdot k$，

则其成为V_1到V_2的线性映射。

(4)证明：

由：

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\big(f_1(x) + f_2(x)\big) &= \tfrac{d}{dx}\big(f_1(x) + f_2(x)\big) - 2\textstyle\int_0^x \big(f_1(t) + f_2(t)\big)\, dt \\ &= \frac{d}{dx} f_1(x) + \frac{d}{dx} f_2(x) - 2\int_0^x f_1(t)\, dt - 2\int_0^x f_2(t)\, dt \\ &= \mathrm{A}\big(f_1(x)\big) + \mathrm{A}\big(f_2(x)\big) \end{aligned}$$

和

$$\mathrm{A}(f(x) \cdot k) = \frac{d}{dx}(f(x) \cdot k) - 2\int_0^x f(t) \cdot k\, dt = \mathrm{A}\big(f(x)\big) \cdot k$$

得A是线性映射

(5) 给定F上的线性空间V_1, V_2，及线性映射$\mathrm{A}: V_1 \to V_2$，设$\dim V_1 = n, \dim V_2 = m$,并设

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$$

为V_1的一个基（称为入口基）；

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$$

为V_2的一个基（称为出口基）。记第j个入口基向量$\varepsilon_j \in V_1$在A下的像$\mathrm{A}(\varepsilon_j) \in V_2$在出口基$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$下的坐标为

$$a_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}\epsilon F^m$$

即

$$\mathrm{A}\left(\varepsilon_j\right)=[\eta_1\quad\eta_2\quad\cdots\quad\eta_m]\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix},j=1,2,\dots n$$

则由F^m中的向量组$a_1,a_2,\dots,a_n$拼成的矩阵

$$\mathrm{A}=[a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n]=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

称为A在相应的入口基和出口基下的表示。

(6)

$$\begin{aligned}\mathrm{A}\left(f_1(x)\right)&=\frac{d}{dx}(x+1)-2\int_0^x t+1\,dt\\&=1-x^2-2x\\&=[f_1(x)\quad f_2(x)\quad f_3(x)\quad f_4(x)]\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\-1\\0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

同理

$$\mathrm{A}\left(f_2(x)\right)=[f_1(x)\quad f_2(x)\quad f_3(x)\quad f_4(x)]\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}\left(f_3(x)\right)=[f_1(x)\quad f_2(x)\quad f_3(x)\quad f_4(x)]\begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}\\0\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

因为$\mathrm{A}\left(f_4(x)\right)=3x^2-\frac{x^4}{2}-2x$无法用$f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)$的线性组合表示出来，所以出口基选择$f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)$时，这个线性映射无法进行矩阵表示。

二、

(1)两个矩阵$\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathrm{F}^{m\times n}$，如果存在$n$阶非奇异矩阵$\mathrm{P}\in F^{n\times n}$和$m$阶非奇异矩阵$\mathrm{Q}\in\mathrm{F}^{m\times m}$使得$\mathrm{AP}=\mathrm{QB}$,则称这两个矩阵等价。

(2)把$x=\mathrm{P}\tilde{x},y=\mathrm{Q}\tilde{y}$带入$y=\mathrm{A}x$得$\tilde{y}=\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AP}\tilde{x}$，即$\mathrm{AP}=\mathrm{QB}$，要求B为等价标准型。

$\ker A$的补子空间的基为$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，$\ker A$为 0 空间，$\mathrm{im}A$的补子空间的基为$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$。

故设P为

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

Q为

$$\left[A\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\quad A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix}\right]=\begin{bmatrix}2&0&-1&0\\\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&1\end{bmatrix}$$

则

$$\mathrm{AP}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&\frac{1}{2}\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&-1&0\\\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\mathrm{Q}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

易得P可逆，由矩阵核的补子空间与像同构，可得Q可逆，即为所求。

(3)设矩阵$\mathrm{A}\in F^{n\times n}$，如果子空间$W\subseteq F^n$满足$\mathrm{A}(W)\subseteq W$，则$W$称为A的不变子空间。

(4)求特征多项式：

$$|A-\lambda E|=\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)$$

得到A的特征向量$\lambda_1=\frac{3}{2},\lambda_2=\frac{1}{2}$，再根据$(A-\lambda_1E)x=0,(A-\lambda_2E)x=0$分别求得对应的一个特征向量为$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$，则$A$的所有一维不变子空间为$\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right\},\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right\}$。

三、

(1)设$A(\lambda)\in F^{m\times n}[\lambda]$，正整数$k\le\mathrm{rank}\big(A(\lambda)\big)$，$A(\lambda)$的$k$阶行列式因子是指$A(\lambda)$的所有$k$阶子式的最高公因式。$A(\lambda)$的Smith标准型上对角线的非0元素称为$A(\lambda)$的不变因子。

(2)设多项式矩阵为$U(\lambda)\in F^{n\times n}[\lambda]$，若存在$V(\lambda)\in F^{n\times n}[\lambda]$使

$$U(\lambda)V(\lambda)=V(\lambda)U(\lambda)=I_n$$

则称$U(\lambda)$为单位模阵。

(3)不为 0 的一阶子式有

$$\lambda,\lambda(\lambda+1),(\lambda+1)^2$$

则$D_1(\lambda)$为公因子1。

不为 0 的二阶子式有

$$\begin{vmatrix}\lambda(\lambda+1) & 0\\ 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+1),\begin{vmatrix}\lambda(\lambda+1) & 0\\ 0 & (\lambda+1)^2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)^3,$$

$$\begin{vmatrix}\lambda & 0\\ 0 & (\lambda+1)^2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)^2$$

则$D_2(\lambda)$为公因子$\lambda(\lambda+1)$。

而$D_3(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda(\lambda+1) & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+1)^3$

于是

$$\begin{aligned}d_1(\lambda)&=D_1(\lambda)=1,\\ d_2(\lambda)&=D_2(\lambda)/D_1(\lambda)=\ \lambda(\lambda+1),\\ d_3(\lambda)&=D_3(\lambda)/D_2(\lambda)=\ \lambda(\lambda+1)^2\end{aligned}$$

所以Smith标准型为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

四、

(1)设两个矩阵$A,B\in \mathrm{F}^{n\times n}$，如果存在$n$阶非奇异矩阵$\mathrm{P}\in \mathrm{F}^{n\times n}$使得$A\mathrm{P}=\mathrm{P}B$，则称这两个矩阵相似。

(2)矩阵$A,B\in \mathrm{F}^{n\times n}$相似与以下命题等价：

1. $\lambda I-A,\lambda I-B\in \mathrm{F}^{n\times n}[\lambda]$作为多项式矩阵等价；
2. $\lambda I-A,\lambda I-B\in \mathrm{F}^{n\times n}[\lambda]$具有相同的行列式因子；
3. $\lambda I-A,\lambda I-B\in \mathrm{F}^{n\times n}[\lambda]$具有相同的不变因子；
4. $\lambda I-A,\lambda I-B\in \mathrm{F}^{n\times n}[\lambda]$具有相同的Smith标准型；
5. $\lambda I-A,\lambda I-B\in \mathrm{F}^{n\times n}[\lambda]$具有相同的第二规范型；
6. $\lambda I-A,\lambda I-B\in \mathrm{F}^{n\times n}[\lambda]$具有相同的第三规范型；
7. $\lambda I-A,\lambda I-B\in \mathrm{F}^{n\times n}[\lambda]$具有相同的初等因子组。

(3)设该矩阵为A，由$\lambda I-A$的不变因子

$$d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=1,d_3(\lambda)=\ (\lambda-1)^3$$

可得$\lambda I-A$的Smith标准型为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^3\end{bmatrix}$$

同时该矩阵也为$\lambda I-A$的第二和第三规范型，则A的Jordan标准型为

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

五、

(1)如果一个映射$\tau: V\times V\to R$，记$\tau(v_1,v_2)=\langle v_1,v_2\rangle$，满足：

1. 对称性：对任意$v_1, v_2 \in V, \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$;
2. 对第二个变元的线性性：对任意$v_1, v_2, v_3 \in V, k, l \in R$,
$$\langle v_1, v_2 k + v_3 l \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle k + \langle v_1, v_3 \rangle l$$
3. 正定性：对任意$v \in V, v \neq 0, \langle v, v \rangle > 0$,

则称其为V上的一个内积。

(2)

$$G(a_1, a_2, \dots, a_s) \coloneqq \left[\langle a_i, a_j \rangle\right]_{s \times s} \in P^{s \times s}$$

称为该向量组的Gram矩阵。

(3)Cauchy − Schwartz不等式：对任意向量α, β, $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$。

证明：若$\langle \alpha, \beta \rangle = 0$，显然成立。故证明当$\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$时：

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\| \leftrightarrow (2\langle \alpha, \beta \rangle)^2 \leq 4\|\alpha\|^2 \cdot \|\beta\|^2$$

即

$$(2\langle \alpha, \beta \rangle)^2 \leq 4\langle \alpha, \alpha \rangle \cdot \langle \beta, \beta \rangle$$

等价于满足构造的二次函数

$$f(t) = \langle \alpha, \alpha \rangle t^2 + 2\langle \alpha, \beta \rangle t + \langle \beta, \beta \rangle \geq 0$$

又因

$$\begin{aligned}
&f(t) = \langle \alpha, \alpha \rangle t^2 + 2\langle \alpha, \beta \rangle t + \langle \beta, \beta \rangle \\
&= \langle \alpha t, \alpha t \rangle + 2\langle \alpha t, \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle \\
&= \langle \alpha t, \alpha t \rangle + \langle \alpha t, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha t \rangle + \langle \beta, \beta \rangle \\
&= \langle \alpha t, \alpha t + \beta \rangle + \langle \beta, \alpha t + \beta \rangle \\
&= \langle \alpha t + \beta, \alpha t + \beta \rangle
\end{aligned}$$

所以$f(t) \geq 0$，得证。

六、

(1)设$A \in C^{n \times r}$列满秩，则存在唯一的一对矩阵$Q \in C^{n \times r}$和$R \in C^{r \times r}$满足：

1. $A = QR$;
2. $Q^H Q = I_r$;
3. R是对角线为正实数的上三角矩阵。

(2)首先将$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$Gram − Schmidt正交化:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$单位化的结果:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{3}{\sqrt{10}}\\\frac{3}{\sqrt{10}}&-\frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{10}&0\\0&\frac{\sqrt{10}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{3}{\sqrt{10}}\\\frac{3}{\sqrt{10}}&-\frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{10}&\frac{\sqrt{10}}{2}\\0&\frac{\sqrt{10}}{2}\end{bmatrix}$$

即

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{3}{\sqrt{10}}\\\frac{3}{\sqrt{10}}&-\frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}\sqrt{10}&\frac{\sqrt{10}}{2}\\0&\frac{\sqrt{10}}{2}\end{bmatrix}$$

七、

(1)若一个复方阵与它的共轭转置矩阵可以交换，则称为正规矩阵。即$A\in C^{n\times n}$，若$AA^H=A^HA$，则A为正规矩阵。

(2)任一复方阵均可以酉相似于上三角矩阵。

$$P^{-1}AP=J$$

J为对角阵，先将P做正交三角分解：

$$P=UT$$

则

$$U^{-1}AU=TJT^{-1}$$

其U为酉矩阵，TJT^{-1}为上三角矩阵。

(3)设A为Hermite矩阵，λ为其中一个特征值，α为对应的特征向量，则：

$$\alpha^HA\alpha=\alpha^H\lambda\alpha=\lambda\alpha^H\alpha$$

同时

$$\alpha^HA\alpha=\alpha^HA^H\alpha=(A\alpha)^H\alpha=(\lambda\alpha)^H\alpha=\bar{\lambda}\alpha^H\alpha$$

即

$$\bar{\lambda}\alpha^H\alpha=\lambda\alpha^H\alpha$$
$$\left(\bar{\lambda}-\lambda\right)\alpha^H\alpha=0$$

又因$\alpha^H\alpha\neq 0$，所以$\bar{\lambda}=\lambda$，即λ为实数。

八、

(1)设$A\in C^{m\times n}$，则存在m阶酉矩阵U和n阶酉矩阵V，使得：

$$U^HAV=\begin{bmatrix}\sum_r&0_{r\times(n-r)}\\0_{(m-r)\times r}&0_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}$$

其中$r=rank(A)$，r阶对角矩阵：

$$\sum_r=\begin{bmatrix}\sigma_1&&\\&\ddots&\\&&\sigma_r\end{bmatrix},\sigma_i>0,i=1,\dots,r$$

(2)设矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$，则存在酉矩阵$V$使以下式子成立：

$$V^HA^HAV=V^H\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}V=\begin{bmatrix}\frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0\\0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}$$

设矩阵U为$AV\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}} & 0\\0 & \frac{1}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}\end{bmatrix}$，易得$U$为酉矩阵。则可得奇异值分解：

$$U^HAV=\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} & 0\\0 & \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\end{bmatrix}=B$$

由$y=Ax$可得：

$$\|x\|^2=\|A^{-1}y\|^2=\|(UBV^H)^{-1}y\|^2=\|VB^{-1}(U^Hy)\|^2=\|B^{-1}\tilde{y}\|^2$$

$$=\frac{|\widetilde{y_1}|^2}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+\frac{|\widetilde{y_2}|^2}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=1$$

其中$\tilde{y}=Uy$，即在新的标准正交基U下，像A(S)是标准椭圆方程，其长半轴为$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$，短半轴为$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$。