第一章 线性空间与线性映射

1.1 线性空间

定义（线性空间）给定非空集合V及数域$\mathbb{F}$． 若有映射

$$\sigma: \quad V \times V \to V$$

$$(v_1, v_2) \mapsto \sigma(v_1, v_2)$$

称为V上的加法， 并记$\sigma(v_1, v_2) = v_1 + v_2$； 及映射

$$\tau: \quad V \times \mathbb{F} \to V$$

$$(v, k) \mapsto \tau(v, k)$$

称为V和$\mathbb{F}$之间的数乘法， 并记$\tau(v,k) = v \cdot k$， 且这两运算满足“通常的运算规则”， 则称V关于此$+$和$\cdot$是$\mathbb{F}$上的线性空间． 在无混淆时， 也简称V是线性空间． 表示数乘法的记号“$\cdot$”有时也省略． 线性空间中的元素也称为向量， 线性空间也称为向量空间．

注（数域$\mathbb{F}$）

注（集合的积）给定集合S_1及S_2，定义它们的积

$$S_1 \times S_2 = \{(s_1, s_2) : s_1 \in S_1, \text{且 } s_2 \in S_2\}$$

或

$$S_1 \times S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} : s_1 \in S_1, \text{且 } s_2 \in S_2 \right\}.$$

类似地，还可定义多个集合的积. 特别地，我们有

$$\mathbb{F}^n = \underbrace{\mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \cdots \times \mathbb{F}}_{n\text{个}} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

注 两种箭头记号 $f: S_1 \to S_2$； $f: a \mapsto b$.

另外，要习惯于将运算视为映射的观点. 例如，整数集合 $\mathbb{Z}$ 上的加法运算+就决定了如下映射

$$\begin{aligned} \sigma:\ & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ & (s,t) \mapsto s+t, \end{aligned}$$

如：$\sigma:(1,2) \mapsto 1+2$，即 $\sigma(1,2)=3$.

注（“通常的运算规则”）

加法满足:

(1). 交换律　(2). 结合律　(3). 有零元　(4). 有负元

数乘法满足:

(5). 数乘法对 V 中加法的分配律

(6). 数乘法对 $\mathbb{F}$ 中加法的分配律

(7). 数乘法与 $\mathbb{F}$ 中乘法的关系

(8). 用数 $1 \in \mathbb{F}$ 作数乘法

例（$\mathbb{F}$ 上的标准线性空间 $\mathbb{F}^n$）

加法和数乘法如下定义：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot k = \begin{bmatrix} x_1 k \\ x_2 k \\ \vdots \\ x_n k \end{bmatrix}$$

特别注意，数乘法可理解为矩阵乘法：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} [k]_{1\times 1}$$

例（几何空间作为线性空间）

集合

$$V = \{\text{几何空间中的有向线段}\}$$
$$= \{\overrightarrow{AB} : A, B\text{两点都取遍几何空间}\},$$

这里，经过平移能够重合的两个有向线段视为同一个抽象元素.

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

加法：依平行四边形法则或三角形法则进行.

数乘法：依数的正负号将有向线段同向或反向伸缩.

需验证，这样的加法和数乘法满足那些“通常的运算规则”.

8 条“通常的运算规则”，实质是用代数运算的语言描述了大量的几何性质.

正是因为这个例子，人们将任意线性空间中的元素也称为向量，线性空间也称为向量空间.

例（函数空间$\mathcal{F}(I,\mathbb{R}^n)$）这里，记号$I$表示数轴$\mathbb{R}$上的一个区间．集合

$$\mathcal{F}(I,\mathbb{R}^n)=\left\{f: f\text{是定义在}I\text{上,取值于}\mathbb{R}^n\text{的函数}\right\}.$$

给定$f,g\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R}^n)$，定义$f+g\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R}^n)$如下

$$f+g:\quad t\mapsto f(t)+g(t),$$

给定$f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R}^n)$，$k\in\mathbb{R}$ 定义$f\cdot k\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R}^n)$如下

$$f\cdot k:\quad t\mapsto f(t)\cdot k,$$

易见，$\mathcal{F}(I,\mathbb{R}^n)$是$\mathbb{R}$上的线性空间.

特别地，$\mathcal{F}(I,\mathbb{R}^n)$的子集合

$$\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)=\left\{f: f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R}^n),\text{且对任意}t\in I,\ f\text{在}t\text{点连续}\right\}$$

按上面定义的加法和数乘法也是$\mathbb{R}$上的线性空间.

定义（向量组及向量组拼成的抽象矩阵）

设V是$\mathbb{F}$上的线性空间. V中的有限序列$\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\}$，或简记为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$，称为$V$中的一个向量组，简称为向量组. 向量组按顺序排成的行置于方括号中，即以向量为元素的 1 行 p 列“矩阵”

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p\end{bmatrix}$$

称为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$拼成的抽象矩阵.

定义（向量组的线性相关性）

设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 是 V 中的一个向量组.

（1）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 称为线性相关的，如果存在不全为零的 p 个数 $k_i\in\mathbb{F}$，$i=1,2,\ldots,p$，使得

$$\alpha_1k_1+\alpha_2k_2+\cdots+\alpha_pk_p=0,$$

这里，等号右端的“0”为零向量. 即

.

（2）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 称为线性无关的，如果它不是线性相关的. 换言之，如果只有当 p 个数 $k_i\in\mathbb{F}$，$i=1,2,\ldots,p$，全为零时，才有

$$\alpha_1k_1+\alpha_2k_2+\cdots+\alpha_pk_p=0.$$

或者说，可由上式推出 p 个数 $k_i\in\mathbb{F}$，$i=1,2,\ldots,p$，全为零.

注（向量组线性相关性的矩阵表达）

V 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 线性相关，就是以该向量组拼成的抽象矩阵为系数矩阵的抽象齐次线性方程组

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{bmatrix}=0,$$

有非零解

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_p\end{bmatrix}\in\mathbb{F}^p,\quad \begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_p\end{bmatrix}\neq 0,$$

这里，符号 $0\in\mathbb{F}^p$ 为 $\mathbb{F}^p$ 中的零元素.

另一方面，V 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 线性无关，就是以该向量组拼成的抽象矩阵为系数矩阵的抽象齐次线性方程组

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{bmatrix}=0$$

仅有零解

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_p\end{bmatrix}=0\in\mathbb{F}^p.$$

抽象矩阵乘法运算按

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p$$

定义（两个向量组之间的线性表示关系）

设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间， $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 和 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q$ 是 V 中的两个向量组， $\beta\in V$.

（1） 称向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 线性表示， 如果存在 p 个数 $k_i\in\mathbb{F}$ ， $i=1,2,\ldots,p$ ， 使得

$$\alpha_1k_1+\alpha_2k_2+\cdots+\alpha_pk_p=\beta .$$

（2） 称向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 线性表示， 如果每个 β_j 都可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 线性表示， $j=1,2,\ldots,q$.

注（两个向量组之间线性表示关系的矩阵表达）

向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 线性表示，就是以向量 β 为右端项（非奇次项），以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 拼成的抽象矩阵为系数矩阵的抽象非奇次线性方程组

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_p\end{bmatrix}=\beta,$$

有解

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_p\end{bmatrix}\in\mathbb{F}^p;$$

向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 线性表示，就是如下的以矩阵为未知量的抽象线性方程组

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1q}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2q}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pq}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_q\end{bmatrix}$$

有解

定义（向量组的极大线性无关子组）

设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ 是 V 中一个向量组．向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ 的一个子组 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_s$ 称为一个极大线性无关子组，如果：1）（无关性）；2）（极大性）

回忆：标准线性空间中，向量组的极大线性无关子组的找法．

易知，一向量组(“母组”)的极大线性无关子组不必是唯一的．然而，不同的极大线性无关子组所含向量的个数是唯一的：这个数是由母组决定的，是母组的一个内在属性，称它是母组的秩．下面来证明这个结论.

引理 （扁的齐次线性方程组必有非零解）

设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$， $1\leq m<n$. 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 必有非零解

$$x=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}\in\mathbb{F}^n, \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}\neq 0.$$

这里， $m<n$， 也就是方程的个数少于未知数的个数（不定方程）， 系数矩阵呈扁形.

定理

设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间， $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 和 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q$ 是 V 中两个向量组．若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 线性无关，且 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q$ 线性表示，则 $p\le q$．

定理 （向量组的秩）

向量组的任意两个极大线性无关子组所含向量的数目相同．该数目称为向量组的秩.

1.1 基与坐标

定义（有限维线性空间，基与坐标）设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间．若有正整数 n 及 V 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 使得

（1） $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，（无关性）

（2） 任取向量 $\alpha\in V$ 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表示（生成性）

$$\alpha=\alpha_1k_1+\alpha_2k_2+\cdots+\alpha_nk_n$$
$$=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix},$$

则称 V 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间．向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 称为 V 的一个基或坐标系；基向量组中向量(简称为基向量)的个数 n 称为 V 的维数，记为 $\dim V$；

称列向量

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

为向量 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的坐标

α 沿坐标系 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的展开式.

注（零维线性空间）

规定仅含一个元素的线性空间(零线性空间)为零维线性空间，其维数规定为 0. 零维线性空间也算作是有限维线性空间.

注（基矩阵）

由基向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 拼成的矩阵 $[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n]$ 称为基矩阵. 为说话方便，称一般的线性空间中的向量 $\alpha \in V$ 为抽象向量，并记展开式为

$$\begin{bmatrix} \text{抽} \\ \text{象} \\ \text{向} \\ \text{量} \end{bmatrix} = [\text{基矩阵}] \begin{bmatrix} \text{坐} \\ \text{标} \\ \text{向} \\ \text{量} \end{bmatrix}.$$

命题 (维数的唯一性)

若 V 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$ 是 V 的两个基, 则 $m=n$.

命题（坐标系实现有限维抽象线性空间与标准线性空间的一一对应）
设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间， $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 V 的一个选定的坐标系
则由下式

$$\mathcal{A}:\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \mapsto \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \cdots + \alpha_n k_n$$

决定的映射 $\mathcal{A}:\mathbb{F}^n \to V$ 是一一对应(可逆映射).

注（映射可逆的条件） 回忆映射 $\tau: S \to T$ 为一一对应(可逆映射):
(1) τ 是满的(或称映上的)： 对任意 $t\in T$， 存在 $s\in S$ 使得 $\tau(s)=t$；
(2) τ 是单的(或称一对一的的)： 对任意 $s_1,s_2\in S$， $s_1\neq s_2$， 都有 $\tau(s_1)\neq\tau(s_2)$.

抽象的线性空间V在选定基后，同构于标准的线性空间$\mathbb{F}^n$

注（笛卡尔坐标系，解析几何的基础）

笛卡尔正是借助于坐标系，将欧几里德几何空间中的问题（“几何问题”）一对一（既不增多，也不减少）地转化为标准线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中的问题（“代数问题”）．这是数学史上的伟大事件．我们看到，坐标系这一观念，可视为线性无关性这一代数概念的几何渊源．

例（无限维线性空间的例）存在不是有限维的线性空间(简称为无限维的线性空间). 记 $\mathbb{R}[x]$：以x为自变量的实系数多项式的全体

$$\mathbb{R}[x]=\{f \mid f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\text{且}f\text{可写成实系数多项式}\}.$$

这里，函数“f 可写成实系数多项式”，是指存在 $k\geq 0$ 及 $k+1$ 个实数 $a_0,a_1,\dots,a_k$，使得对任意 $x\in\mathbb{R}$，

$$f(x)=a_0+xa_1+\cdots+x^k a_k .$$

注意这里我们将系数写在右边，这也是为了与将数乘法的数写在右边的约定相配合，其好处下面立见.

又记

$$\mathbb{R}[x]_n=\{f \mid f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\text{且}f\text{可写成次数}<n\text{的实系数多项式}\}.$$

按照线性空间 $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 的加法和数乘法，易知 $\mathbb{R}[x]$ 和 $\mathbb{R}[x]_n$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

下证 $\mathbb{R}[x]_n$ 是 n 维线性空间；而 $\mathbb{R}[x]$ 不是有限维的线性空间.

证：$\mathbb{R}[x]_n$ 是n维线性空间.

$\mathbb{R}[x]_n$ 是n维的，$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$

(2) 生成性 即证 $\forall f \in \mathbb{R}[x]_n$，$f$ 可由 $[1, x, \dots, x^{n-1}]$ 线性表示.

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = [1\ x\ \dots\ x^{n-1}]\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix},$$

(1) 无关性：即证 $[1\ x\ \dots\ x^{n-1}]\begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{bmatrix} = 0$ 只有零解.

证 $k_0 + k_1 x_1 + \dots + k_{n-1}x^{n-1} = 0$ 只有零解.

等式相等 $\Leftrightarrow$ 系数对应相等
等式恒为0 $\Leftrightarrow$ 系数恒为0
是有条件的：
要求是一个无限域

理解为函数等式，而不是形式上相等（系数对应相等）

$$[1\ x\ \dots\ x^{n-1}]\begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{bmatrix} = 0.$$

，可以取 $x=$ n个不同的值 c_i 得
函数相等 $\Rightarrow$ 数相等

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \cdots & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \cdots & c_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \cdots & c_n^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{bmatrix} = 0.$$

$$\therefore \begin{vmatrix} c_1^0 & c_1 & \cdots & c_1^{n-1} \\ c_2^0 & c_2 & \cdots & c_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1}^0 & c_{n-1} & \cdots & c_{n-1}^{n} \end{vmatrix} = \prod_{j<i}(c_i - c_j)$$

范德蒙行列式 $\neq 0$，说明单项式 x^i 是线性无关的.

例（标准线性空间的标准基与一般基）
如下的向量组

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}, \ldots, e_n=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

是标准线性空间 $\mathbb{F}^n$ 的一个基，称为标准基．特别注意，标准基矩阵恰为 n 阶单位矩阵 I_n．任一向量 $v\in\mathbb{F}^n$ 在标准基下的坐标就是它自己：

$$v=\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & \cdots & e_n\end{bmatrix}v=I_n v.$$

例：$\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot 3+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot 4=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

[4] 可表示向量，可表示坐标.

$[\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n]x = b$ 几何意义：向量 b 在基 $[\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n]$ 下的坐标 x

向量组 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ 构成 $\mathbb{F}^n$ 的基的充要条件是该向量组拼成的矩阵 $[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$（这回是一个真正的矩阵！）是非奇异的矩阵．此时，任意向量 $v \in \mathbb{F}^n$ 在该基下的坐标是下面非齐次线性方程组的解：

$$[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]x = v.$$

反过来说，我们可以将具有非奇异系数矩阵的非齐次线性方程组的求解这一代数问题解释成将右端向量沿系数矩阵的列向量组构成的坐标系展开这一几何问题．此观点有助于领悟许多“矩阵技巧”．