2018 矩阵考试参考答案，聂才，如有错误请于本人联系

一、

(1)设

$$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+k_3f_3(x)+k_4f_4(x)=0$$

可得$k_3=k_4=0$，又由$f_1(x)$和$f_2(x)$线性无关可得$k_1=k_2=0$，进而得知向量组线性无关。

$\mathrm{P}[x]_4$中的任一向量a可以示为$b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$，则该向量可以由这组向量组这样表示：

$$a=[f_1(x)\quad f_2(x)\quad f_3(x)\quad f_4(x)]\begin{bmatrix}\frac{b_0+b_1-b_3}{2}\\ \frac{b_1+b_3-b_0}{2}\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

可见向量组$f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)$是$\mathrm{P}[x]_4$的一个基。

同理设

$$k_1g_1(x)+k_2g_2(x)+k_3g_3(x)+k_4g_4(x)+k_5g_5(x)=0$$

明显$k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=0$，向量组线性无关。

$\mathrm{P}[x]_5$中的任一向量a可以示为$b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4$，则该向量可以由这组向量组这样表示：

$$a=[g_1(x)\quad g_2(x)\quad g_3(x)\quad g_4(x)\quad g_5(x)]\begin{bmatrix}b_0-2b_1\\ b_1\\ b_2\\ b_3\\ \frac{b_4}{2}\end{bmatrix}$$

可见向量组$g_1(x),g_2(x),g_3(x),g_4(x),g_5(x)$是$\mathrm{P}[x]_5$的一个基。

(2) 证明：

由：

$$\mathrm{A}\big(f_1(x)+f_2(x)\big)=2\tfrac{d}{dx}\big(f_1(x)+f_2(x)\big)-\textstyle\int_0^x\big(f_1(t)+f_2(t)\big)\,dt$$

$$=2\frac{d}{dx}f_1(x)+2\frac{d}{dx}f_2(x)-\int_0^x f_1(t)\,dt-\int_0^x f_2(t)\,dt$$

$$=\mathrm{A}\big(f_1(x)\big)+\mathrm{A}\big(f_2(x)\big)$$

和

$$\mathrm{A}(f(x)\cdot k)=2\frac{d}{dx}(f(x)\cdot k)-\int_0^x f(t)\cdot k\,dt=\mathrm{A}\big(f(x)\big)\cdot k$$

得A是线性映射

(3)

$$\mathrm{A}\big(f_1(x)\big)=2\frac{d}{dx}(x+1)-\int_0^x t+1\,dt$$

$$=2-\frac{x^2}{2}-x$$

$$=[g_1(x)\quad g_2(x)\quad g_3(x)\quad g_4(x)\quad g_5(x)]\begin{bmatrix}4\\-1\\-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}$$

同理

$$\mathrm{A}\big(f_2(x)\big)=[g_1(x)\quad g_2(x)\quad g_3(x)\quad g_4(x)\quad g_5(x)]\begin{bmatrix}0\\1\\-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}\big(f_3(x)\big)=[g_1(x)\quad g_2(x)\quad g_3(x)\quad g_4(x)\quad g_5(x)]\begin{bmatrix}-8\\4\\0\\-\frac{1}{3}\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}\big(f_4(x)\big)=[g_1(x)\quad g_2(x)\quad g_3(x)\quad g_4(x)\quad g_5(x)]\begin{bmatrix}2\\-1\\6\\0\\-\frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

故A在(1)中给出的一对基下的矩阵表示为:

$$\begin{bmatrix}4&0&-8&2\\-1&1&4&-1\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&6\\0&0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&0&-\frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

二、

(1) 设矩阵$\mathrm{A}\in P^{n\times n}$，如果子空间$W\subseteq F^n$满足$\mathrm{A}(W)\subseteq W$，则$W$称为A的不变子空间。由$\mathrm{A}(ker\mathrm{A})=0\subseteq ker\mathrm{A}$，可得$ker\mathrm{A}$ 是 A的一个不变子空间。

(2)由$\mathrm{A}x=0$可以求得$ker\mathrm{A}$的一个基为$\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$。

(3) $\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$可以扩张为$P^3$的一个基为$\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$。

(4)基矩阵为

$$\mathrm{X}=\begin{bmatrix}-2&-3&1\\1&0&2\\0&1&3\end{bmatrix}$$

设该矩阵表示为B，由AX = XB得：

$$B = X^{-1}AX$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & \frac{-25}{2} \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

三、

(1)设$A(\lambda) \in F^{m\times n}[\lambda]$，正整数$k \le \operatorname{rank}(A(\lambda))$，$A(\lambda)$的$k$阶行列式因子是指$A(\lambda)$的所有$k$阶子式的最高公因式。$A(\lambda)$的Smith标准型上对角线的非0元素称为$A(\lambda)$的不变因子。

(2)设多项式矩阵为$U(\lambda) \in F^{n\times n}[\lambda]$，若存在$V(\lambda) \in F^{n\times n}[\lambda]$使

$$U(\lambda)V(\lambda) = V(\lambda)U(\lambda) = I_n$$

则称$U(\lambda)$为单位模阵。

(3)不为 0 的一阶子式有

$$\lambda, \lambda(\lambda+1), (\lambda+1)^2$$

则$D_1(\lambda)$为公因子1。

不为 0 的二阶子式有

$$\begin{vmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+1), \begin{vmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 \\ 0 & (\lambda+1)^2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)^3,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & (\lambda+1)^2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)^2$$

则$D_2(\lambda)$为公因子$\lambda(\lambda+1)$。

而$D_3(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+1)^3$

于是

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda) = 1,$$
$$d_2(\lambda) = D_2(\lambda)/D_1(\lambda) = \lambda(\lambda+1),$$
$$d_3(\lambda) = D_3(\lambda)/D_2(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2$$

所以Smith标准型为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

四、

(1)设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，由$\lambda I-A$的不变因子

$$d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=\lambda-1,d_3(\lambda)=\ (\lambda-1)^2$$

可得$\lambda I-A$的Smith标准型为

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

则$\lambda I-A$的第二规范型为

$$\begin{bmatrix}\lambda-1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

同时也为该矩阵的第三规范型。则A的Jordan标准型为

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=J$$

设相似变换矩阵为P，即$P^{-1}AP=J$，将P按照Jordan块大小进行列分块为$[P_1\quad P_2]$，易得A的特征向量为$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，特征值为1。可知$P_1$为特征向量其中一个。再把$P_2$列分块为$[p_1\quad p_2]$，由

$$(\lambda I-A)p_1=0$$
$$(\lambda I-A)p_2=p_1$$

得p_1为另一个特征向量，而$\lambda I-A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，所以$p_1$不能为$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，则可得$p_1$为$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$p_2$为$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，进而$P_1$为$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，所求的变换矩阵$P$为：

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

五、

(1)设子空间$\mathrm{span}(a_1,a_2)$的基矩阵$[a_1\quad a_2]$为W，先求得β到子空间$\mathrm{span}(a_1,a_2)$的投影x为：

$$x=W(W^HW)^{-1}W^H\beta$$
$$=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\\0&1\\2&0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&-1&0&2\\-1&2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\\0&1\\2&0\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&-1&0&2\\-1&2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\\0&1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&-3\\-3&6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-1&0&2\\-1&2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix}=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\end{bmatrix}$$

则

$$\min_{x_1,x_2\in P}\|\beta-a_1x_1-a_2x_2\|=\|\beta-x\|$$

$$=\left\|\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{2}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\end{bmatrix}\right\|$$

$$=\left\|\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\right\|=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

(2)首先将a_1,a_2标准正交化为$\widetilde{a_1},\widetilde{a_2}$:

$$\widetilde{a_1}=\frac{a_1}{\|a_1\|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{a_2}=\frac{a_2-a_1\frac{\langle a_2,a_1\rangle}{\langle a_1,a_1\rangle}}{\left\|a_2-a_1\frac{\langle a_2,a_1\rangle}{\langle a_1,a_1\rangle}\right\|}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{18}}\\ \frac{3}{\sqrt{18}}\\ \frac{2}{\sqrt{18}}\\ \frac{2}{\sqrt{18}}\end{bmatrix}$$

则正交投影矩阵为

$$[\widetilde{a_1}\quad \widetilde{a_2}][\widetilde{a_1}\quad \widetilde{a_2}]^H$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{3}{\sqrt{18}} & \frac{2}{\sqrt{18}} & \frac{2}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 4 & -6 & -2 & 4 \\ -6 & 12 & 6 & 0 \\ -2 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

六、

(1)设$A \in C^{n\times r}$列满秩，则存在唯一的一对矩阵$Q \in C^{n\times r}$和$R \in C^{r\times r}$满足：

1. $A = QR$；
2. $Q^H Q = I_r$；
3. R是对角线为正实数的上三角矩阵。

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{45}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{45}}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{45}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{45}}{3} \end{bmatrix}$$

七、

(1)若一个复方阵与它的共轭转置矩阵可以交换，则称为正规矩阵。即$A \in C^{n\times n}$，若$AA^H = A^H A$，则A为正规矩阵。

(2)任一复方阵均可以酉相似于上三角矩阵。

$$P^{-1}AP = J$$

J为对角阵，先将P做正交三角分解：

$$P = UT$$

则

$$U^{-1}AU = TJT^{-1}$$

其U为酉矩阵，TJT^{-1}为上三角矩阵。

(3) $U \in C^{n\times n}$为酉矩阵与下列条件等价：

1. U^H也为酉矩阵；
2. $U^H U = I_n$；
3. $UU^H = I_n$；
4. 对任意$x, y \in C^n, \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$；
5. 对任意$x \in C^n, \|Ux\| = \|x\|$。

设U为酉矩阵，λ为其一个特征值，x为对应的特征向量，即$Ux = \lambda x$，则

$$(Ux)^H Ux = \lambda^2 x^H x$$
$$x^H U^H Ux = \lambda^2 x^H x$$
$$x^H x = \lambda^2 x^H x$$
$$\lambda^2 = 1$$

故可得酉矩阵的所有特征值的模均为1。

八、

(1)设$A \in C^{m\times n}$，则存在m阶酉矩阵U和n阶酉矩阵V，使得：

$$U^H AV = \begin{bmatrix} \sum_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

其中$r = rank(A)$，r阶对角矩阵：

$$\sum_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}, \sigma_i > 0, i = 1, \dots, r$$

(2)设矩阵$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，则存在酉矩阵$V$使以下式子成立：

$$V^{\mathrm{H}} A^H AV = V^H \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

设矩阵U为$AV\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}} \end{bmatrix}$，易得$U$为酉矩阵。则可得奇异值分解：

$$U^H AV = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{bmatrix} = B$$

由$y = Ax$可得：

$$\|x\|^2 = \|A^{-1}y\|^2 = \|(UBV^H)^{-1}y\|^2 = \|VB^{-1}(U^H y)\|^2 = \|B^{-1}\tilde{y}\|^2$$
$$= \frac{|\widetilde{y_1}|^2}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \frac{|\widetilde{y_2}|^2}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = 1$$

其中$\tilde{y} = Uy$，即在新的标准正交基U下，像A(S)是标准椭圆方程，其长半轴为$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$，短半轴为$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$