§2.1 向量、矩阵的范数

向量的范数

- 设$\mathbf{R}^n$为实n维向量空间, $\mathbf{C}^n$为复n维向量空间.
- 定义　若$\mathbf{R}^n$ (或$\mathbf{C}^n$) 上任一向量$\boldsymbol{x}$，对应一个非负实数$\|\boldsymbol{x}\|$，满足如下条件

(I) 非负性：$\|\boldsymbol{x}\|\geq 0$ 且 $\|\boldsymbol{x}\|=0 \Leftrightarrow x=\mathbf{0}$

(II) 齐次性：$\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$，$\forall\lambda\in\mathbf{R}$ (或$\mathbf{C}$)

(III) 三角不等式

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\| \quad ,\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n \text{ (或}\mathbf{C}^n\text{)}$$

则称$\|\boldsymbol{x}\|$为向量x的一种范数.

常用的向量范数

- 设$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$，

1-范数： $$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

2-范数： $$\|\boldsymbol{x}\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

∞-范数： $$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

p-范数： $$\|\boldsymbol{x}\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

范数的有关定理

- 定理2.1(范数连续性定理) 设$f(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|$为$\mathbf{R}^n$上任一向量范数, 则$f(\boldsymbol{x})$是$\boldsymbol{x}$的连续函数.
- 定理2.2(范数等价性定理) 设$\|\boldsymbol{x}\|_s$, $\|\boldsymbol{x}\|_t$为$\mathbf{R}^n$上任意两种向量范数, 则存在常数c_1 ,c_2>0，使得

  $$c_1\|\boldsymbol{x}\|_s\le\|\boldsymbol{x}\|_t\le c_2\|\boldsymbol{x}\|_s\ ,\quad \forall \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$$
- 定理2.3 向量序列$\{\boldsymbol{x}^k\}$收敛于$\boldsymbol{x}^*$的充分且必要条件是

  $$\|\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{x}^*\|\to 0,\ k\to\infty$$

  其中$\|\cdot\|$是任一向量范数.

例

- $\boldsymbol{x}=(3,-1,5,8)^{\mathrm{T}}$,求 $\|\boldsymbol{x}\|_1,\|\boldsymbol{x}\|_2,\|\boldsymbol{x}\|_\infty$
- 解 $\|\boldsymbol{x}\|_1=|3|+|-1|+|5|+|8|=17$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{3^2+(-1)^2+5^2+8^2}=\sqrt{99}=3\sqrt{11}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max\{|3|,|-1|,|5|,|8|\}=8$$

矩阵的范数

- 定义 若$\mathbf{R}^{n\times n}$ (或$\mathbf{C}^{n\times n}$)上任一矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$,对应一个非负实数$\|A\|$ ，满足以下条件:

（I）非负性： $\|\boldsymbol{A}\|\geq 0$ 且 $\|\boldsymbol{A}\|=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\mathbf{0}$

（II）齐次性：$\|\lambda\boldsymbol{A}\|=|\lambda|\cdot\|\boldsymbol{A}\|$, $\forall\lambda\in\mathbf{R}$ (或$\mathbf{C}$)

（III）三角不等式： $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\leq\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}$,$\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ (或$\mathbf{C}^{n\times n}$)

（IV） $\|\boldsymbol{AB}\|\leq\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|$, $\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ (或$\mathbf{C}^{n\times n}$)

则称 $\|A\|$为矩阵A的一种范数.

- 例 对于实矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$

$$\|A\|_F=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$$

是一种矩阵范数,称为矩阵的Frobenius范数,简称矩阵的F范数.

(视其为n^2维向量的2-范数,再利用矩阵乘法与Cauchy不等式证明条件（IV）即可)

- 定义 对于给定向量范数$\|\cdot\|$和矩阵范数$\|\cdot\|$，如果对任何向量$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ (或$\mathbf{C}^n$)和$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ (或$\mathbf{C}^{n\times n}$)，都有不等式$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$ 成立，则称所给的矩阵范数与向量范数是相容的.

定义 设$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ (或$\mathbf{C}^n$)和$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ (或$\mathbf{C}^{n\times n}$)，且给定一种向量范数$\|\cdot\|_v$，称

$$\|A\|_v = \max_{\boldsymbol{x}\neq 0}\frac{\|A\boldsymbol{x}\|_v}{\|\boldsymbol{x}\|_v} \quad \text{或} \quad \|A\|_v = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_v=1}\|A\boldsymbol{x}\|_v$$

为矩阵A的由向量范数$\|\boldsymbol{x}\|_v$产生的从属范数或算子范数.

单位矩阵的任一种从属范数都为1.
从属范数一定与所给定的向量范数相容.
矩阵的从属范数$\|A\|_v$依赖于向量范数$\|\boldsymbol{x}\|_v$的具体含义.

由向量1-范数,2-范数, ∞ -范数产生的从属范数分别为

- 定理　设n阶方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，则

1-范数：$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

2-范数：$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\rho(A^H A)}$，$A^H$是$A$的共轭转置

∞-范数：$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

矩阵的谱半径

- 定义设n阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$，则称

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$$

为$\boldsymbol{A}$的谱半径（$|\lambda_i|$为λ_i的模）.

对于任意从属范数$\|\cdot\|$， $\rho(\boldsymbol{A})\le\|\boldsymbol{A}\|$

但当$\boldsymbol{A}$是正规矩阵，即$A\ A^H = A^H\ A$时，

$$\rho(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_2$$

显然若$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，则$\rho(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_2$

矩阵范数也有相应向量范数三个定理的结论.

例

- 计算方阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix}$

的各种常用范数 $\|A\|_1,\|A\|_\infty,\|A\|_2,\|A\|_F$

- 解

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le 3}\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|=\max\{1,4,8\}=8$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le 3}\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|=\max\{1,6,6\}=6$$

$$\|A\|_F=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{41}$$

$$A^H A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\0&4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&4\\0&-2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&8&0\\0&0&32\end{bmatrix}$$

$A^H A$的特征方程为

$$\left|\lambda \boldsymbol{E}\text{-}\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-8&0\\0&0&\lambda-32\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-8)(\lambda-32)=0$$

所以$\rho(A^H A)$=32， $\|A\|_2=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

§2.4　矩阵的条件数及误差分析

矩阵的条件数

- 设A为非奇异矩阵，称数$\operatorname{cond}(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$为矩阵$A$的条件数.

$$\operatorname{cond}(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|\geq\|AA^{-1}\|=1$$

- 条件数与所取范数有关 ,因此有时详细记为 $\operatorname{cond}_v(A)=\|A\|_v\|A^{-1}\|_v$

- 计算3阶Hilbert矩阵

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

的条件数$\mathrm{cond}_\infty(H_3)$

- 解

$$H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$

$\|H_3\|_\infty = 11/6$, $\|H_3^{-1}\|_\infty = 408$,

$\mathrm{cond}_\infty(H_3) = \|H_3\|_\infty \|H_3^{-1}\|_\infty = 748$

$$Ax=b \qquad (1)$$

$$A'x'=b' \qquad (2)$$

- (2)是(1)的近似方程组，研究二者解的近似程度.
- 上面问题相当于研究$Ax=b$的精确解x与$(A+\delta A)(x+\delta x)=b+\delta b$ 的精确解$x+\delta x$的差δx与扰动δA和δb的关系.

- 方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

记为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其精确解为$x=(2,0)^{\mathrm{T}}$

- 当常数项有微小变化时，即考虑方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix}$$

记为$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b}$，$\delta\boldsymbol{b}=(0,0.0001)^{\mathrm{T}}$

其精确解为$\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}=(1,1)^{\mathrm{T}}$

- 本节讨论所采用的矩阵范数是算子范数.

方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的右端$\boldsymbol{b}$的扰动对解的影响

- 设$\delta\boldsymbol{b}$为$\boldsymbol{b}$的扰动， 引起解$\boldsymbol{x}$的扰动为$\delta\boldsymbol{x}$，则

$$A(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b} \quad , \quad \delta\boldsymbol{x}=A^{-1}\delta\boldsymbol{b}$$

$$\|\delta\boldsymbol{x}\|\le\|A^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{b}\|$$

$$\|\boldsymbol{x}\|\ge\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|A\|}=\frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|A\|}$$

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\le\|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}=\mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

方程组$Ax=b$的系数阵A的扰动对解的影响

设δA为A的扰动， 引起解x的扰动为δx，则

$$(A+\delta A)(x+\delta x)=b\,, \qquad A\delta x+\delta A(x+\delta x)=0$$

$$\delta x=-A^{-1}\delta A(x+\delta x)$$

$$\|\delta x\|\le\left\|A^{-1}\right\|\|\delta A\|(\|x\|+\|\delta x\|)$$

假设δA足够小，使$\left\|A^{-1}\right\|\|\delta A\|<1$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le\frac{\left\|A^{-1}\right\|\|\delta A\|}{1-\left\|A^{-1}\right\|\|\delta A\|}=\frac{\|A\|\left\|A^{-1}\right\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\|A\|\left\|A^{-1}\right\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}=\frac{\operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

- 总之，$\mathrm{cond}(A)$愈小，由A(或b)的相对误差引起解的相对误差就愈小；$\mathrm{cond}(A)$愈大，由A(或b)的相对误差引起解的相对误差就有可能愈大.所以，量$\mathrm{cond}(A)$实际刻画了解对原始数据变化的敏感程度，即刻画了方程组的病态程度.

- 对于一个确定的线性方程组，系数矩阵的条件数较小（接近1）时，方程组是良态的；反之，条件数较大（>>1）时，则方程组是病态的．条件数越大，则病态越严重．用一个稳定的方法去解一个良态方程组，必然得到精度很高的解．同样，用一个稳定的方法去解一个病态方程组，结果就可能很差．

- 设x'是方程组的近似解，则称$r=b-Ax'$为误差(剩余)向量. 近似解x'的精度不仅依赖于r的“大小”,而且依赖于的A条件数. 当A时病态时,即使有很小的r，也不能保证x'是高精度的近似解.

$$\frac{\|x-x'\|}{\|x\|} \le cond(A)\cdot\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

§ 2.5 解线性方程组的迭代法

- 将方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \qquad (2.5.1)$$

改写成等价方程组

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{g} \qquad (2.5.2)$$

建立迭代格式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{Bx}^{(k)}+\boldsymbol{g} \qquad (k=0,1,2,\ldots) \qquad (2.5.3)$$

向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$为初始预估解向量,用公式(2.5.3)逐步迭代求解的方法叫做迭代法.$\boldsymbol{B}$称为迭代矩阵.

如果产生的序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$对于任意初始向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$均收敛于$\boldsymbol{x}^*$，则称迭代法是收敛的.

显然$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$的极限$\boldsymbol{x}^*$为方程组(2.5.2)的精确解.

迭代法的误差

- 记

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^* \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

称为第k步迭代的误差向量.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^* =\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

其中$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}=\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{x}^*$为初始误差向量.

考察收敛性，就要研究$\boldsymbol{B}$在什么条件下$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\to\mathbf{0}$ $(k\to\infty)$，即就要研究$\boldsymbol{B}$满足什么条件时有

$$\boldsymbol{B}^k\to\mathbf{0}(k\to\infty).$$

迭代法的收敛性

- 定理　设$\boldsymbol{B}\in\mathbf{K}^{n\times n}$, $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = \mathbf{0}$

的充分必要条件是$\rho(\boldsymbol{B})<1$.

- 定理（迭代法的基本收敛定理）迭代过程

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{g}$$

对于任意初始向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$及右端向量$\boldsymbol{g}$均收敛的充分必要条件是迭代矩阵$\boldsymbol{B}$的谱半径$\rho(\boldsymbol{B})<1$, 并且$\rho(\boldsymbol{B})$ 愈小，收敛速度愈快.

由此可知：迭代法的收敛性与收敛速度与迭代矩阵$\boldsymbol{B}$有关，而与右端向量$\boldsymbol{g}$和初始向量$\boldsymbol{x}^{(0)}$无关.

迭代法的误差估计

- 定理　设x^*为方程组$Ax=b$的精确解. 若迭代法

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$$

的迭代矩阵B满足$\|B\|<1$, 其中$\|.\|$是某种算子范数，则对于任意的初始向量$x^{(0)}$与右端向量g迭代法收敛， 且有如下两个误差估计式：

（1）
$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\| \tag{2.5.4}$$

（2）
$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\| \le \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\| \tag{2.5.5}$$

$$k>\left[\ln\frac{\varepsilon(1-\|B\|)}{\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|}/\ln\|B\|\right]$$

- 证 $\rho(\boldsymbol{B})\le\|\boldsymbol{B}\|<1$，故对于任意的$x^{(0)}$与$g$迭代收敛.

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*)$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)})$$

$$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^*\|\le\|\boldsymbol{B}\|\cdot\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|$$

$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\|\le\|\boldsymbol{B}\|\cdot\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}\|$， 利用$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\ge\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\|$

$$\|\boldsymbol{B}\|\cdot\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}\|\ge\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\|\ge\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|-\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^*\|$$

$$\ge(1-\|\boldsymbol{B}\|)\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|$$

(1)成立.再反复利用$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\|\le\|\boldsymbol{B}\|\cdot\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}\|$得(2)成立.

- 定理　超松弛法收敛的必要条件为$0<\omega<2$
- 证　设其迭代矩阵$\boldsymbol{B}_\omega$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$，

由于迭代收敛,故有$\rho(\boldsymbol{B}_\omega)<1$

从而 $$\left|\det \boldsymbol{B}_\omega\right| = \left|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\right| \le (\max_{1\le i\le n}\left|\lambda_i\right|)^n < 1$$

又 $$\left|\det \boldsymbol{B}_\omega\right| = \left|\det((\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1})\cdot\det((1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U})\right|$$

$$= \left|\frac{1}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}\cdot(1-\omega)^n a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\right| = \left|(1-\omega)^n\right|$$

因此$|1-\omega|<1$,即$0<\omega<2$

关于解某些特殊方程组迭代法的收敛性

定理　若线性方程组$Ax=b$的系数矩阵A为对称正定阵，则Gauss-Seidel迭代法收敛.

定理　若线性方程组$Ax=b$的系数矩阵A为对称正定阵，则当$0<\omega<2$时, SOR方法收敛.

- 称方阵$A=(a_{ij})_{nn}$为严格对角占优的，如果

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}| \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

- 定理 若线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的系数方阵$A=(a_{ij})_{nn}$是按行(或按列)严格对角占优的，则Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法都是收敛的.

- 定理 若线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$为严格对角占优矩阵，则当$0<\omega\leq 1$时,SOR方法收敛.
- 定理 设$\boldsymbol{A}$是具有正对角线元素的对称矩阵，则解线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的Jacobi迭代法收敛的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$和$2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$都为对称正定阵.

- Jacobi迭代法

收敛的充要条件: $\rho(\boldsymbol{B}_J)<1$

$\boldsymbol{A}$和$2\boldsymbol{D}$-$\boldsymbol{A}$都为对称正定阵($\boldsymbol{A}$是具有正对角线元素的对称矩阵).

充分条件：$\|\boldsymbol{B}_J\|<1$ （$\|.\|$是某种算子范数)

$\boldsymbol{A}$是严格对角占优的

- Gauss-Seidel迭代法

收敛的充要条件: $\rho(\boldsymbol{B}_G)<1$

充分条件：$\|\boldsymbol{B}_G\|<1$ （$\|.\|$是某种算子范数)

$\boldsymbol{A}$是严格对角占优的

$\boldsymbol{A}$为对称正定阵

- SOR方法

收敛的充要条件: $\rho(\boldsymbol{B}_\omega)<1$

充分条件：$\|\boldsymbol{B}_\omega\|<1$ （$\|.\|$是某种算子范数)

$\boldsymbol{A}$是严格对角占优的，且$0<\omega\le 1$

$\boldsymbol{A}$为对称正定阵， $0<\omega<2$

必要条件：$0<\omega<2$