§3.1 多项式插值

Lagrange插值公式

- Lagrange插值问题

  已知函数$y=f(x)$在$[a, b]$中$n+1$个互异点x_0, $x_1, \ldots, x_n$上的函数值分别为$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$，记$M_n$为次数$\leq n$的多项式集合,构造一个$L_n(x)\in M_n$，满足条件

$$L_n(x_i)=f(x_i) \qquad (i=0,1,\ldots n) \qquad (3.1.1)$$

- 定理**3.1** 满足插值条件(3.1.1)的多项式$L_n(x)\in M_n$是存在且唯一的.

- 证 首先构造n次多项式$l_i(x)$ (i=0,1,…n)，满足

$$l_i(x_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

设$l_i(x)=A(x\text{-}x_0)(x\text{-}x_1)\ldots(x\text{-}x_{i\text{-}1})(x\text{-}x_{i+1})\ldots(x\text{-}x_n)$

由插值条件$l_i(x_i)=1$得

$$A=\frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

从而 $$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

易知

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad (3.1.2)$$

若还有一个次数≤n的多项式$P_n(x)$满足插值条件(3.1.1),则$r(x)=L_n(x)-P_n(x)$是次数≤n的多项式，且$r(x_i)=0$, (i=0,1,…n), $r(x)$有n +1个零点,故必有$r(x)\equiv 0$，从而$L_n(x)=P_n(x)$, Lagrange插值问题的解存在且唯一.

称$l_i(x)$ (i=1,2,…n)为Lagrange插值基函数．称(3.1.2)为Lagrange插值多项式.

- 记$p_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{p_{n+1}(x)}{(x-x_i)p'_{n+1}(x_i)}f(x_i)$$

- 线性插值（一次插值）

  已知函数$y=f(x)$在两点x_0, x_1上的函数值分别为$f(x_0), f(x_1)$, 构造一个一次式$L_1(x)$，满足条件:

$$L_1(x_0)=f(x_0)，\ L_1(x_1)=f(x_1).$$

一次Lagrange插值多项式为

$$L_1(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)$$

其中

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \qquad l_1(x)=\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

- 抛物插值（二次插值）已知函数$y=f(x)$在三个互异点x_0, x_1, x_2上的函数值分别为$f(x_0), f(x_1), f(x_2)$，构造一个二次式$L_2(x)$，满足条件:

$$L_2(x_0)=f(x_0),\ L_2(x_1)=f(x_1),\ L_2(x_2)=f(x_2)$$

二次Lagrange插值多项式为

$$L_2(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+f(x_2)l_2(x)$$

其中

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \qquad l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

- Lagrange插值多项式的余项

定理3.2 设$L_n(x)$ 是满足插值条件(3.1.1)的n次Lagrange插值多项式，若$f(x)\in C^n[a,b]$, $f(x)$在(a, b)内存在$n+1$阶导数，其中$[a, b]$是包含点x_0, $x_1, \ldots, x_n$的一区间，则对任意给定的$x\in[a,b]$ ，总存在一点$\xi\in(a, b)$ (依赖于x)使

$$
\begin{aligned}
E(x) &= f(x) - L_n(x) \\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)
\end{aligned}
$$

- 证 当x为插值节点$x_0, x_1, \dots, x_n$中任一点时，结论显然成立.下面设x异于$x_0, x_1, \dots, x_n$， 由于$E(x)=f(x)-L_n(x)$ 满足$E(x_i)=0$， 故可设
  $E(x)=K(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$， 其中$K(x)$ 为待定函数.

固定x，作辅助函数

$$G(t)= f(t)-L_n(t) - K(x)(t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_n)$$

显然$G(t)$在$[a, b]$上有$n+2$个零点$x ,x_0, x_1, \dots, x_n$；

利用Rolle定理,知 $G'(t)$在(a, b)内至少有$n+1$零点;

反复利用Rolle定理:$G''(t)$在(a, b)内至少有n零点;

……

$G^{(n+1)}(t)$在(a, b)内至少有1零点;即存在一点$\xi \in(a, b)$， 使$G^{(n+1)}(\xi) =0$.

由于$G^{(n+1)}(t)= f^{(n+1)}(t) -(n+1)!\, K(x)$， 从而 $K(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

所以

$$E(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$$|R(x)| = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{|p_{n+1}(x)|}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

- 线性插值多项式的余项

$$E(x) = f(x) - L_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$|E(x)| = |f(x) - L_1(x)| \le \frac{(x_1-x_0)^2}{8} \max_{a\le x\le b} |f''(x)|$$

- 抛物插值多项式的余项

$$E(x) = f(x) - L_1(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

- Lagrange插值公式为

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

- Runge现象

给定函数

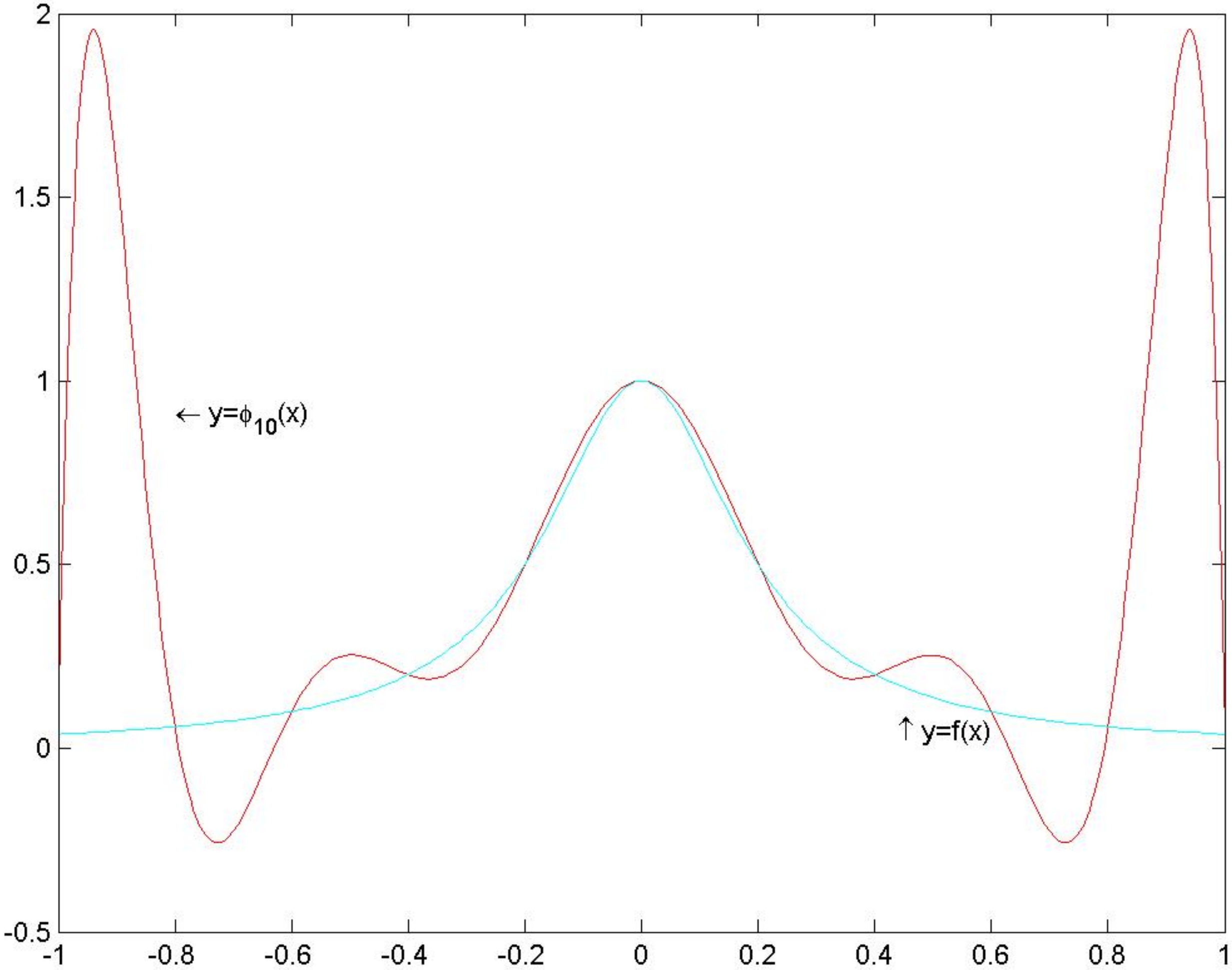
$$f(x)=\frac{1}{1+25x^2}\qquad -1\le x\le 1$$

取等距插值基点

$$x_i=-1+\frac{2}{10}i\quad (i=0,1,2,\cdots,10)$$

建立10次插值多项式

$$y_{10}(x)=\sum_{i=0}^{10}f(x_i)l_i(x)$$


← $y=\phi_{10}(x)$
↑ $y=f(x)$
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

- (1) 节点的不断加密，构造出的高次插值多项式并不一定能很好地逼近函数$f(x)$，所以，在实际应用中，高次多项式很少被采用。
- (2)如果不是在[-1,1]区间上直接构造插值多项式，而是将区间[-1,1]等分为若干个小区间，在每一个小区间上分别作低次插值来避免Runge现象，这就是分段插值的思想.
- (3)既然$L_n(x)$发生激烈的变化，是否应该考虑修改插值条件. 对插值函数的导数进行限制, 这便是Hermite插值的思想.