Student Name:

Student ID:

答题内容写在边线外视为无效

Major:

哈尔滨工业大学深圳研究生院

2017 年 秋 季学期期末考试试卷

HIT Shenzhen Graduate School Examination Paper

Course Name: 矩阵分析　　**Lecturer:** 严质彬

Question	One	Two	Three	Four	Five	Six	Seven	Eight	Nine	Ten	Total
Mark											

一、 (20 分) $\mathbb{R}[x]_4$ 表示所有次数小于 4 的实系数多项式的集合，它是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间(以多项式为"向量"). (1). 写出一般向量空间基的定义； (2). 证明向量组

$$f_1(x)=x+1,\ f_2(x)=x-1,\ f_3(x)=x^2,\ f_4(x)=x^3+1$$

是 $\mathbb{R}[x]_4$ 的一个基； (3). 写处线性映射的定义； (4). 定义映射 $\mathcal{A}:\mathbb{R}[x]_4\to\mathbb{R}[x]_4$ 如下:

$$\mathcal{A}(f(x))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)-2\int_0^x f(t)dt,$$

证明 $\mathcal{A}$ 是线性映射; (5). 写出线性映射的矩阵表示的定义; (6). 求(4)中定义的线性映射 $\mathcal{A}$ 在入口基和出口基都选为(2)中给出的基时的矩阵表示.

二、(20 分) (1). $\mathbb{R}^{m\times n}$ 表示实数域上所有 $m\times n$ 矩阵的集合. 设 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$，写出 A 与 B 等价的定义; (2). 设 $y=Ax$，这里

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&\frac{1}{2}\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

求可逆矩阵 P,Q 使得经变量代换 $x=P\tilde{x},y=Q\tilde{y}$ 后，$\tilde{y}$ 和 $\tilde{x}$ 之间的关系是"解耦的"：即 $\tilde{y}_1$ 只依赖于 $\tilde{x}_1$，$\tilde{y}_2$ 只依赖于 $\tilde{x}_2$,...... 这里

$$\tilde{x}=\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\\tilde{x}_2\\\vdots\\\tilde{x}_n\end{bmatrix},\quad \tilde{y}=\begin{bmatrix}\tilde{y}_1\\\tilde{y}_2\\\vdots\\\tilde{y}_m\end{bmatrix}.$$

(3). 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，写出 A 的不变子空间的定义； (4) 设

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}$$

求出 A 的所有一维不变子空间.

三、(10 分) (1). 什么是 λ 矩阵的行列式因子和不变因子？ (2). 什么是单位模阵？ (3). 求 λ 矩阵

$$\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda^2+2\lambda+1\end{bmatrix}$$

的 Smith 标准型.

四、(10 分) (1). 写出两个矩阵相似的定义； (2). 写出矩阵相似的三个等价条件； (3). 求复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准型.

五、(10 分) (1). 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 写出 V 上的内积的定义; (2). 设 V 是实内积空间, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 是 V 中的一个向量组，写出该向量组的 Gram 矩阵的定义; (3). 写出并证明实内积空间中的 Cauchy-Schwartz 不等式.

六、(10 分) (1). 写出矩阵的正交-三角分解定理； (2). 求矩阵

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&1\end{bmatrix}$$

的正交-三角分解.

七、(10) (1). 什么是正规矩阵？ (2). 写出关于正规矩阵的 Schur 定理； (3). 证明 Hermite 矩阵的特征值都是实数.

八、(10 分) (1). 什么是矩阵的奇异值分解？ (2) 定义映射 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 如下

$$y=\mathcal{A}(x)=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}x,$$

证明单位圆周

$$S=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}: x_1^2+x_2^2=1\right\}$$

在映射 $\mathcal{A}$ 下的像 $\mathcal{A}(S)$ 是椭圆，并求出该椭圆的长半轴和短半轴.