

# Cours d'algèbre linéaire

Khaoula Ben Abdeljelil



# Table des matières

Table des matières . . . . .	i
<b>1 POLYNOMES</b>	<b>1</b>
1.1 Algèbre des polynômes . . . . .	1
1.1.1 Définition . . . . .	1
1.1.2 Opérations sur $\mathbf{K}[X]$ . . . . .	1
1.2 Division des polynômes . . . . .	2
1.2.1 Divisions suivant les puissances décroissantes . . . . .	2
1.2.2 Algorithme d'Euclide, PGCD . . . . .	3
1.2.3 Divisions suivant les puissances croissantes . . . . .	4
1.3 Racines d'un polynôme . . . . .	4
1.4 Factorisation . . . . .	5
1.4.1 Factorisation dans $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ . . . . .	5
1.4.2 Factorisation dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ . . . . .	5
1.4.3 Ordre de multiplicité . . . . .	5
1.5 Feuille d'exercices- Polynomes . . . . .	7
<b>2 Espace vectoriel</b>	<b>9</b>
2.1 Introduction au groupe . . . . .	9
2.2 Espace vectoriel . . . . .	11
2.3 Sous-espace vectoriel . . . . .	12
2.3.1 Définition . . . . .	12
2.3.2 Combinaisons linéaires . . . . .	13
2.3.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un espace vectoriel . . . . .	13
2.4 Feuille d'exercices-Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels . . . .	15
2.5 Applications linéaires . . . . .	16
2.5.1 Définitions . . . . .	16
2.5.2 Applications linéaires particulières . . . . .	16
2.5.3 Noyau et image d'une application linéaire . . . . .	17
2.6 Famille de vecteurs . . . . .	18
2.6.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs	18
2.6.2 Famille génératrice . . . . .	19
2.6.3 Famille libre, famille liée . . . . .	19
2.6.4 Base d'un espace vectoriel . . . . .	21
2.6.5 Composante dans une base . . . . .	21
2.7 Feuille d'exercices sur les applications linéaires, Famille libre, liée et base . . . . .	22

## TABLE DES MATIÈRES

2.7.1	Applications linéaires . . . . .	22
2.7.2	Image et noyau d'un endomorphisme . . . . .	22
2.7.3	Sous-espace engendré par une famille finie . . . . .	23
2.7.4	Famille libre . . . . .	23
2.7.5	Obtention de base . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Matrices</b>	<b>25</b>
3.1	Opérations sur les matrices . . . . .	25
3.1.1	Définition . . . . .	25
3.1.2	$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel . . . . .	27
3.1.3	Sous-espaces des matrices diagonales et triangulaires . . . . .	29
3.1.4	Propriétés du produit matriciel . . . . .	30
3.2	Représentations matricielles . . . . .	32
3.2.1	Matrice colonne des composantes d'un vecteur . . . . .	32
3.2.2	Matrice des composantes d'une famille de vecteurs . . . . .	33
3.2.3	Matrice d'une application linéaire . . . . .	34
3.2.4	Matrice d'un endomorphisme . . . . .	35
3.2.5	Image d'un vecteur . . . . .	36
3.2.6	Isomorphisme de représentation matricielle . . . . .	37
3.2.7	Composition d'une application linéaire . . . . .	37
3.2.8	Isomorphisme et matrice inversible . . . . .	37
3.3	Formule de changement de base . . . . .	37
3.3.1	Matrice de passage . . . . .	37
3.3.2	Nouvelle composante de vecteur . . . . .	38
3.3.3	Nouvelle représentation d'une application linéaire . . . . .	38
3.4	Rang d'une matrice . . . . .	39
3.4.1	Définition . . . . .	39
3.4.2	Propriétés du rang d'une matrice . . . . .	39
3.5	Série d'exercices . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Systèmes Linéaires, Méthode du Pivot de Gauss</b>	<b>47</b>
4.1	Transformations des matrices . . . . .	47
4.2	Réduction des matrices ; Méthode du Pivot Gauss . . . . .	47
4.3	Recherche de l'inverse d'une matrice carrée . . . . .	47
4.4	Systèmes linéaires . . . . .	47
4.5	Exercices . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Réduction des Matrices Carrées</b>	<b>49</b>
5.1	Valeurs propres, Vecteurs propres . . . . .	49
5.2	Diagonalisation d'un endomorphisme . . . . .	50
5.3	Diagonalisation d'une matrice carrée . . . . .	50
5.4	Séries d'exercices . . . . .	51

# Chapitre 1

## POLYNOMES

### 1.1 Algèbre des polynômes

#### 1.1.1 Définition

Soit  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

**Définition 1.1.** Un polynôme à coefficient dans  $\mathbf{K}$  est un élément de la forme

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n = \sum_{i=1}^n a_iX^i,$$

où  $n \in \mathbf{N}$  et les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont des éléments de  $\mathbf{K}$ . Le symbole  $X$  est appelé l'indéterminée (on pose  $X^0 = 1$ ). On note

$$\mathbf{K}[X] = \{ \text{polynômes à coefficients dans } \mathbf{K} \}.$$

On identifie  $\mathbf{K}$  à un sous ensemble de  $\mathbf{K}[X]$ .

**Exemple 1.2.** (1)  $P_1(X) = X^3 + 4X - 8$  et  $P_2(X) = 5$  sont deux polynômes.

(2)  $F(X) = X^4 + \sqrt{7X} + 11$  et  $G(X) = \frac{X^3 - X + 1}{X + 13}$  ne sont pas de polynômes.

#### 1.1.2 Opérations sur $\mathbf{K}[X]$

Sur  $\mathbf{K}[X]$  on définit les lois suivantes, si  $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$  et  $Q(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m$ , on pose alors :

$(P + Q)(X) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k)X^k$ $\lambda P(X) = \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k$ $(PQ)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \text{ tel que } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$
---

Avec la généralisation  $a_k = 0 \ \forall k \geq n + 1, b_k = 0 \ \forall k \geq m + 1$ .

$\mathbf{K}[X]$  est stable pour ces lois, on dit que c'est une algèbre (et on peut vérifier aussi qu'elle est commutative).

## Degré d'un polynôme

**Définition 1.3.** Soit  $P$  un polynôme non nul, on appelle degré de  $P$ , le plus grand indice de ses coefficients non nuls, et on le note  $\deg P$ . Ainsi  $\deg P = n \iff P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  avec  $a_n \neq 0$ ,  $a_n$  s'appelle coefficient dominant de  $P$ . Par convention  $\deg 0 = -\infty$ .

### Remarque 1.4.

$$P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \iff \deg P \leq n$$

### Théorème 1.5.

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q).$$

Avec l'égalité dans le cas où  $\deg P \neq \deg Q$  ou bien  $\deg P = \deg Q$  et  $a_{\deg P} \neq -b_{\deg Q}$ .

### Théorème 1.6.

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$

En particulier si  $\lambda$ , constante non nulle alors :

$$\deg \lambda P = \deg P.$$

**Exemple 1.7.**  $\deg P_1 = 3, \deg P_2 = 0, \deg P_1.P_1 = 9$ .

**Proposition 1.8.**  $\mathbf{K}[X]$  est intègre :

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X], P.Q = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

**Preuve:**

Si  $P.Q = 0$ , alors  $-\infty = \deg(P + Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ . Donc  $\deg(P) = -\infty$  ou  $\deg(Q) = -\infty$ .  $\square$

**Proposition 1.9.** Un polynôme  $P$  est inversible (c'est à dire qu'il existe un polynôme  $Q$  tel que  $P.Q = 1$ ) si et seulement si  $P$  est un polynôme constant non nul.

## 1.2 Division des polynômes

### 1.2.1 Divisions suivant les puissances décroissantes

**Définition 1.10.** Soit  $A, B$  deux polynômes non nuls, on dit que  $B$  divise  $A$  dans  $\mathbf{K}[X]$ , ou que  $A$  est un multiple de  $B$ , si et seulement si  $\exists Q \in \mathbf{K}[X]$  tel que  $B = AQ$ . On note  $B/A$ . On dit qu'un diviseur de  $P$  est trivial s'il est de la forme  $\lambda P$  ou bien  $\lambda$  avec  $\lambda$  un scalaire non nul.

**Définition 1.11.** On dit qu'un polynôme  $P$  est irréductible si  $\deg P \geq 1$  et tous les diviseurs de  $P$  sont triviaux. Autrement dit, si un polynôme  $A$  divise  $P$ , alors  $A = \lambda \in \mathbf{K}$ , soit  $A = \lambda P, \lambda \in \mathbf{K}$ .

**Théorème 1.12.**  $\forall (A, B) \in \mathbf{K}[X]$  tel que  $B \neq 0$ ,  $\exists ! (Q, R) \in \mathbf{K}[X]$  tel que  $A = BQ + R$  avec  $\deg R < \deg B$ .  $Q$  s'appelle le quotient de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  et  $R$  son reste.

**Preuve:**

- **Existence :** Fixons  $B = b_0 + b_1X + \dots + b_pX^p \in \mathbf{K}[X]$ . Le raisonnement se fait alors par récurrence sur le degré du polynôme  $A$ . L'hypothèse de récurrence au rang  $n$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est :

$$\forall A \in \mathbf{K}[X] \mid \deg(A) \leq n, \exists (Q, R) \in \mathbf{K}[X] \mid A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B).$$

On remarque si  $n < p$ , alors  $\mathcal{P}(n)$  est vraie :  $A = B \cdot 0 + A$ .

Soit  $n \geq p$  et supposons l'hypothèse de récurrence vraie pour tout  $k$  inférieur ou égal à  $n - 1$  et montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Le polynôme  $A$  s'écrit  $a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ , où  $a_n \neq 0$

Considérons alors le polynôme  $C = A - \frac{a_n}{b_p}X^{n-p}B$ . Le degré de  $C$  est inférieur ou égal à  $n - 1$ . Par hypothèse de récurrence on sait alors qu'il existe un couple de polynômes  $(Q, R)$  tel que :  $C = BQ + R$  et  $\deg(R) < \deg(B)$ .

Il s'en suit que  $A = B(Q + \frac{a_n}{b_p}X^{n-p}) + R$ , avec  $\deg(R) < \deg(B)$ .

- **Unicité** (Exercice)

□

**Exemple 1.13.** (1)  $2X^3 + 5X^2 + 7X + 8 = (X^2 + X + 2)(2X + 3) + 2$ .

$$(2) \quad 4X^4 + 3X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(4X^2 - 4X + 3) + (X - 2)$$

**Remarque 1.14.**  $B$  divise  $A$  si et seulement si le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est nul.

### 1.2.2 Algorithme d'Euclide, PGCD

Soit  $A, B$  deux polynômes non nuls, on effectue les divisions euclidiennes successives des quotients par leurs restes, jusqu'à arriver à un reste nul, alors le dernier reste non nul est un diviseur commun de  $A$  et  $B$  de degré minimal, ce reste une fois normalisé (lorsque le coefficient du degré de polynôme vaut 1<sup>1</sup>), s'appelle le *PGCD* de  $A$  et  $B$  et se note  $A \wedge B$ .

**Exemple 1.15.**  $\text{PGCD}(X^3 + 3X^2 + 3X + 1, X^3 + 2X^2 + 2X + 1) = X + 1$

**Définition 1.16.** Deux polynômes sont dits premiers entre eux si leur PGCD vaut 1.

**Remarque 1.17.** – le PGCD ne change pas si on multiplie l'un des polynômes par une constante.

---

1. On peut toujours normaliser un polynôme. Si  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ ,  $a_n \neq 0$  le normalisateur de  $P$  est  $\frac{1}{a_n}P$

- Si  $P$  est un polynôme irréductible et  $Q$  est un polynôme quelconque, alors  $P \wedge Q = 1$  ou  $P$ , en particulier deux polynômes irréductibles distincts sont toujours premiers entre eux.

**Théorème 1.18. (Bézout).** Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes non nuls et  $C = A \wedge B$ . Alors il existe deux polynômes  $U$  et  $V$  tel que  $C = UA + VB$ .

**Corollaire 1.19.** Deux polynômes  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe deux polynômes  $U$  et  $V$  tel que  $AU + BV = 1$ .

### 1.2.3 Divisions suivant les puissances croissantes

**Théorème 1.20. (Division suivant les puissances croissantes à l'ordre  $k$ )** Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes avec  $b_0$  (le terme de degré 0 de  $B$ ) non nul et  $k \in \mathbf{N}$ . Alors il existe deux polynômes  $R$  et  $Q$  uniques tels que  $A = QB + X^{k+1}R$  et  $\deg(Q) \leq k$ .

Par exemple :  $52X + 3X^2 - X^3 = (1 + 2X - X^3)(2X - X^2 + 3X^2 + X^4) + X^5(-4 - X)$ .

## 1.3 Racines d'un polynôme

**Définition 1.21.** A chaque polynôme  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbf{K}[X]$ , on associe la fonction

$$\begin{aligned} \widehat{P} : \mathbf{K} &\rightarrow \mathbf{K} \\ x &\mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \end{aligned}$$

appelée fonction polynomiale de  $P$  et on dit que  $a \in \mathbf{K}$  est une racine de  $P$  si et seulement si  $\widehat{P}(a) = 0$ , dans la suite on notera  $P(a)$  au lieu de  $\widehat{P}(a)$ .

**Proposition 1.22.** Soient  $P \in \mathbf{K}[X]$  et  $a \in \mathbf{K}$  :  $a$  est une racine de  $P$  si et seulement si  $X - a$  divise  $P$ .

**Preuve:**

Effectuons la division euclidienne de  $P$  par  $X - a$  :  $P = (X - a)Q + R$  où le  $\deg R < \deg(X - a)$ . Le polynôme  $R$  est donc soit le polynôme nul soit le polynôme constant. L'évaluation en  $a$  indique que :  $R = R(a) = P(a) = 0$ . On déduit la proposition.  $\square$

### Conséquences

- Un polynôme, non nul de degré  $n \in \mathbf{N}$  admet au maximum  $n$  racines.
- Tout polynôme qui admet un nombre de racines supérieur strictement à son degré est nul, en particulier tout polynôme qui admet une infinité de racines est nul.



## 1.4 Factorisation

### 1.4.1 Factorisation dans $\mathbf{K} = \mathbf{C}$

**Théorème 1.23. (de d'Alembert-Gauss)** *Tout polynôme non constant de  $\mathbf{C}[X]$  admet une racine.*

**Corollaire 1.24.** *Les polynômes irréductibles de  $\mathbf{C}[X]$  sont exactement de degré 1. En particulier, dans  $\mathbf{C}[X]$  tout polynôme  $P$  de degré  $n \geq 1$  se factorise sous la forme suivante :*

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^n (X - a_k),$$

avec  $\lambda \in \mathbf{C}$  et  $\forall k \in \{1, \dots, n\}, a_k \in \mathbf{C}$ .

Par exemple,  $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$  et  $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$ .

### 1.4.2 Factorisation dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$

**Proposition 1.25.** *Soit  $a$  une racine d'un polynôme  $P \in \mathbf{R}[X]$ . Alors  $\bar{a}$  est aussi une racine de  $P$ .*

**Preuve:**

Si  $P \in \mathbf{R}[X]$  et si  $a \in \mathbf{C}$ , alors  $P(\bar{a}) = \overline{P(a)}$  et par conséquent si  $a \in \mathbf{C}$  est une racine de  $P$  alors  $\bar{a}$  est une racine de  $P$ .  $\square$

**Théorème 1.26.** *Dans  $\mathbf{R}[X]$ , tout polynôme de degré  $n \geq 1$  se factorise sous la forme :*

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^m (X - a_k) \prod_{l=1}^p (X^2 + \alpha_l X + \beta_l),$$

avec  $\lambda \in \mathbf{R}, \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad a_k \in \mathbf{R}$  et  $\forall l \in \{1, \dots, p\} \quad \alpha_l^2 - 4\beta_l < 0, \quad m + 2p = n$ .

**Preuve:**

Le résultat est évident pour un polynôme de degré 0 ou 1. Si  $\deg P \geq 2$ , on applique l'algorithme suivant :

Si  $P$  admet une racine réelle  $a$ , alors il existe un polynôme  $Q \in \mathbf{R}[X]$  tel que  $P = (X - a)Q$

Sinon (théorème de d'Alembert-Gauss)  $P$  admet une racine complexe  $a \in \mathbf{C}$ . Par conséquent  $\bar{a}$  est aussi une racine de  $P$ . Donc  $P = (X^2 - 2\Re(a)X + |a|^2)Q$ , où  $Q \in \mathbf{R}[X]$  et  $\Delta = -4\Im(a)^2 < 0$ .

$\square$

On remarquera que  $X^2 + 1$  et  $X^2 + X + 1$  sont irréductibles dans  $\mathbf{R}[X]$  mais pas dans  $\mathbf{C}[X]$  et sur  $\mathbf{R}[X]$  le polynôme  $P = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$  n'est pas irréductible et qu'il ne possède pas de racines.

### 1.4.3 Ordre de multiplicité

**Définition 1.27.** *Si  $a \in \mathbf{K}$  est une racine du polynôme  $P \in \mathbf{K}[X]$ , le plus grand entier  $m \geq 1$  tel que  $(X - a)^m$  divise  $P$  est appelé ordre de multiplicité de la racine  $a$ .*

**Proposition 1.28.** *Soit  $P \in \mathbf{K}[X]$  un polynôme de degré  $n \geq 1$ . Si  $P$  admet  $r$  racines 2 à 2 distinctes  $a_1, a_2, \dots, a_r$  dans  $\mathbf{K}$ , d'ordre de multiplicité  $m_1, m_2, \dots, m_r$  alors  $m_1 + m_2 + \dots + m_r \leq n$ .*

Par exemple, dans  $\mathbf{R}[X]$ , le polynôme  $P = (X^2 + 3)(X - 1)^2(X + 2)$  est de degré 5 et possède une racine simple et une racine double ( $1 + 2 = 3 \leq 5$ ). Dans  $\mathbf{C}[X]$  le polynôme  $P$  possède 4 racines trois simples et un double et  $P = (X + i\sqrt{3})(X - i\sqrt{3})(X - 1)^2(X + 2)$ .

**Définition 1.29.** *Un polynôme non constant est dit **sindé** si la somme des ordres de multiplicité de ses racines est égale au degré de ce polynôme.*

## 1.5 Feuille d'exercices- Polynomes

### Questions de cours

- (1) Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes de  $\mathbf{K}[X]$ , avec  $B \neq 0$ . Ecrire la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .
- (2) Que veut dire l'expression " $a$  est une racine d'ordre 3 de  $P$ " ?
- (3) Donner l'ensemble des polynômes irréductibles de  $\mathbf{C}[X]$  et  $\mathbf{R}[X]$ .
- (4) Le polynôme  $X^4 + X^2 + 1$  est-il irréductible ?

### Arithmétique des polynômes

**Exercice 1 :** Dans les cas suivants, effectuer la division euclidienne de  $A$  par  $B$  :

1.  $A(X) = X^3 + 4X^2 + 6X + 4$  et  $B(X) = X^2 + 1$
2.  $A(X) = X^5 + X^4 + 5X^3 + 6X^2 + 7X + 2$  et  $B(X) = X^4 + 2X^3 + X + 2$

**Exercice 2.** Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  dans les cas suivants :

1.  $A = X^2 - 4X + 3$  et  $B = X^3 + X^2 - 2$ .
2.  $A = X^5 + 1$  et  $B = X + 1$ .
3.  $A = 3X^7 - 2X^5 + X^3 - 4$  et  $B = 2X^2 - X + 3$ .

**Exercice 3.** Montrer les divisibilités suivantes et déterminer les quotients correspondants :

- (1)  $X - 1 \mid X^3 - 2X^2 + 3X - 2$
- (2)  $X - 2 \mid X^3 - 3X^2 + 3X - 2$
- (3)  $X + 1 \mid X^3 + 3X^2 - 2$ .

**Exercice 4.** En réalisant une division euclidienne, former une condition nécessaire et suffisante sur  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$  pour que  $X^2 + 2$  divise  $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ .

**Exercice 5.** Soit  $(a, b) \in \mathbf{K}^2$  tel que  $a \neq b$  et  $P \in \mathbf{K}[X]$ . Exprimer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  en fonction de  $P(a)$  et  $P(b)$ .

**Exercice 6.** Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre  $n$  de  $A$  et  $B$ , avec

- (1)  $n = 2$  et  $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$ ,  $B = X^2 + X + 1$ .
- (2)  $n = 3$  et  $A = 4(X + 1)$ ,  $B = (X + 1)^2 + 1$ .
- (3)  $n = 4$ ,  $A = 2 + 2X - X^2 + X^4$ ,  $B = 1 + X + X^2$ .

**Exercice 7.** Effectuer la division de  $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$  par  $B = X^3 + X^2 + 1$  :

- (1) Suivant les puissances décroissantes.
- (2) A l'ordre 4 (c'est à dire tel que le reste soit divisible par  $X^5$ ) suivant les puissances croissantes.

**Exercice 8.** Trouver le  $pgcd$  de  $P$  et  $Q$  dans les cas suivants :

(1)  $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$  et  $Q = X^3 + X^2 - X - 1$ .

(2)  $P = X^4 - 10X^2 + 1$  et  $Q = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$ .

(3)  $P = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$  et  $Q = X^4 + 2X^3 + X + 2$

**Exercice 9.** Montrer que les polynômes  $P$  et  $Q$  suivants sont premiers entre eux. Trouver  $U$  et  $V \in \mathbf{K}[X]$  tel que  $UP + VQ = 1$ .

(1)  $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$  et  $Q = X^2 + X + 1$ .

(2)  $P = X^3 + X^2 + 1$  et  $Q = X^3 + X + 1$ .

### Racines d'un polynôme

**Exercice 10.** Soit  $p$  et  $q$  deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.

Déterminer les racines et les pôles de  $F = \frac{X^p-1}{X^q-1}$  en précisant les multiplicités respectives.

### Factorisation de polynômes

**Exercice 11.** Factoriser dans  $\mathbf{C}[X]$  puis dans  $\mathbf{R}[X]$  les polynômes suivants :

(1)  $X^4 - 1$

(2)  $X^5 - 1$

(3)  $(X^2 - X + 1)^2 + 1$ .

**Exercice 12.** Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants :

(1)  $X^4 + X^2 + 1$

(2)  $X^4 + X^2 - 6$

(3)  $X^8 + X^4 + 1$ .

**Exercice 13.** Former la décomposition primaire dans  $\mathbf{R}[X]$  de  $P = X^{2n+1} - 1$  (avec  $n \in \mathbf{N}$ ).

section Algèbre des polynômes

# Chapitre 2

## Espace vectoriel

### 2.1 Introduction au groupe

**Définition 2.1.** Une loi de composition interne sur un ensemble  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $E$ .

**Exemple 2.2.** (1) L'addition ou la multiplication sont des lois de composition internes sur  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

(2) la soustraction définit une loi de composition interne sur  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ , ou  $\mathbf{C}$  mais sur  $\mathbf{N}$ .

(3) Le produit scalaire de deux vecteurs de  $\mathbf{R}^d$  n'est pas une loi de composition interne si  $d \geq 2$ .

(4) On note  $\mathcal{F}(E, E)$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $E$ , l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(E, E) \times \mathcal{F}(E, E) &\rightarrow \mathcal{F}(E, E) \\ (f, g) &\mapsto f \circ g\end{aligned}$$

( $f \circ g$  est défini par  $\forall x \in E, f \circ g(x) = f(g(x))$ ) est une loi de composition interne.

**Définition 2.3.** Un groupe est la donnée d'un ensemble  $G$  et d'une loi de composition interne notée  $*$  suivante :

$$\begin{aligned}G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x * y\end{aligned}$$

telle que  $(G, *)$  vérifie les trois propriétés suivantes :

(1) (Elément neutre) Il existe  $e \in G$  tel que  $\forall x \in G, e * x = x * e = x$ .

(2) (Associativité) Pour tout  $x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$ .

(3) (Elément inverse) Pour tout  $x \in G$ , il existe  $x' \in G$  tel que  $x * x' = x' * x = e$ .

Si de plus,  $\forall x, y \in G$ , on a  $x * y = y * x$ , on dit que  $*$  est commutative et  $(G, *)$  est un groupe commutatif ou abélien.

**Remarque 2.4.** On emploie aussi parfois le terme de symétrique au lieu de l'inverse.

**Exemple 2.5.** (1)  $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$  et  $\mathbf{C}$  sont des groupes abéliens : 0 est l'élément neutre, l'inverse de  $x$  est  $-x$ . Notons que  $(\mathbf{N}, +)$  n'est pas un groupe car la condition (3) de la définition 2.3 n'est pas vérifiée.

(2)  $\mathbf{Q}^*, \mathbf{R}^*, \mathbf{C}^*$  munis de la multiplication sont des groupes : 1 est l'élément neutre. Il en est de même pour  $\mathbf{T}$ , l'ensemble des nombres complexes de module 1. Si  $x$  est réel, alors l'inverse de  $x$  est  $\frac{1}{x}$ . Tout élément de  $\mathbf{C}^*$  possède un inverse pour la loi  $\times$  :

$$\forall z \in \mathbf{C}^*, \exists z' \in \mathbf{C}^* \mid z \times z' = z' \times z = 1$$

$$(Si \ z = x + iy \quad \text{alors} \ z' = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z} = z^{-1}).$$

(3) Soit  $E$  un ensemble et soit  $\mathcal{S}(E)$  l'ensemble des bijections de  $E$  sur  $E$ , soit  $\circ$  la loi de composition interne définie par la composition de deux bijections. Montrer à titre d'exercice que  $(\mathcal{S}(E), \circ)$  est un groupe et qu'il est non abélien et  $E$  a au moins trois éléments.

En particulier, pour  $n \in \mathbf{N}$ , soit  $E = \{1, \dots, n\}$ . Alors  $\mathcal{S}(E)$  est noté  $S_n$ .  $S_n$  est un groupe de cardinal  $n!$ . On l'appelle le groupe des permutations sur  $n$  éléments.

**Proposition 2.6.** (1) L'élément neutre est unique.

(2) L'inverse  $x'$  d'un élément  $x \in G$  est unique.

(3) L'inverse de l'inverse de  $x \in G$  est  $x$ , i.e.  $(x')' = x$ .

(4) Pour tout  $x, y \in G$ ,  $(x * y)' = y' * x'$ .

(5) Pour tout  $x, y, z \in G$ , si  $x * y = x * z$  alors  $y = z$ .

**Preuve:**

(1) Soient  $e', e \in G$  deux éléments neutres de  $G$ . En appliquant la propriété d'un élément neutre à  $e$  et  $e'$ , on obtient :

$$\begin{cases} e' * e = e * e' = e, \\ e * e' = e' * e = e'. \end{cases}$$

Par conséquent  $e = e'$ .

(2) Soit  $x'' \in G$  tel que  $x'' * x = x * x'' = e$ . on a alors  $x'' * x * x' = x'$  ce qui implique que  $x'' = x'$  (puisque  $x * x' = e$ ).

(3) Soit  $(x')'$  l'inverse de l'inverse de  $x'$ , on a  $(x')' * x' = e$ . Puisque  $x * x' = e$  et d'après la deuxième propriété de cette proposition, on a  $x = (x')'$ .

(4) On a

$$(x * y) * (y' * x') = x * y * y' * x' = x * x' = e$$

donc  $(x * y)' = y' * x'$ .

(5) On a

$$x' * (x * y) = x' * (x * z) \implies (x * x') * y = (x * x') * z \implies y = z.$$

□

**Notation :** Soit  $(G, *)$  un groupe, on note souvent  $xy$  au lieu de  $x * y$ , 1 au lieu de  $e$  et  $x^{-1}$  l'inverse de  $x$ , pour tout  $x \in G$ .

## 2.2 Espace vectoriel

L'ensemble  $\mathbf{K}$  désigne toujours  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

**Définition 2.7.** On appelle  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel (ou espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$ ) tout ensemble non vide  $E$  muni d'une loi de composition interne notée  $+$

$$\begin{aligned}\mathbf{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x\end{aligned}$$

telles que :

- (1)  $(E, +)$  est un groupe abélien.
- (2)  $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \forall x \in E$ , on a  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ .
- (3)  $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall x, y \in E$ , on a  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ .
- (4)  $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \forall x \in E$ , on a  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ .
- (5)  $\forall x \in E$ , on a  $1x = x$ .

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés vecteurs ; et les éléments de  $\mathbf{K}$  sont appelés scalaires.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion, on dira espace vectoriel au lieu de  $\mathbf{K}$  espace vectoriel.

**Exemple 2.8.** (1) L'ensemble des vecteurs du plan est un espace vectoriel.

- (2)  $\mathbf{K}$  est un  $\mathbf{K}$  espace vectoriel.
- (3) Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$  espace vectoriel et  $X$  un ensemble non vide quelconque. Considérons  $\mathcal{F}(X, E)$  l'ensemble des applications de  $X$  dans  $E$ . Pour  $f, g \in \mathcal{F}(X, E)$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ , on définit  $f + g, \lambda f \in \mathcal{F}(X, E)$  par :

$$\forall x \in X, (f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda f)(x) := \lambda(f(x))$$

alors  $\mathcal{F}(X, E)$  muni de ces lois est un  $\mathbf{K}$  espace vectoriel.

- (4) Sur  $\mathbf{R}^2$ , on définit les deux lois suivantes : pour  $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y') \text{ et } \lambda(x, y) := (\lambda x, \lambda y)$$

alors  $\mathbf{R}^2$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

- (5) Plus généralement : Si  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sont  $n$  espaces vectoriels, alors l'espace produit  $E := E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  est un espace vectoriel pour les lois suivantes : Pour tous  $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in E$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ , on définit

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

- (6) L'ensemble  $\mathbf{P}_n[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  additionné du polynôme nul est un espace vectoriel.

**Proposition 2.9.** Pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$  et pour tout  $x, y \in E$ , on a :

- (1)  $\lambda x = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0$ .
- (2)  $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$ .
- (3)  $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$ .
- (4)  $(-\lambda)(-x) = \lambda x$ .

## 2.3 Sous-espace vectoriel

Dans toute la suite l'ensemble  $E$  désignera un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$ .

### 2.3.1 Définition

**Définition 2.10.** Soit  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . On dit que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si  $F$  possède les propriétés suivantes :

- (1)  $0 \in F$  ;
- (2)  $\forall x, y \in F, x + y \in F$ . Autrement dit  $F$  est stable par l'addition ;
- (3)  $\forall x \in F$  et  $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \lambda x \in F$ . Autrement dit,  $F$  est stable par la multiplication par scalaire.

**Remarque 2.11.** Tout sous-espace vectoriel de  $E$ , est un espace vectoriel pour les lois induites par  $E$ .

**Exemple 2.12.** (1) Si  $E$  est un espace vectoriel, alors  $\{0\}$  et  $E$  sont des sous-espaces vectoriel de  $E$ .

(2) Si  $E = \mathbf{R}^2$ , alors  $F = \{(x, 0); x \in \mathbf{R}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . De même, si  $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ , alors  $F\{(\lambda x_0, \lambda y_0); \lambda \in \mathbf{R}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

(3) L'ensemble  $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$ .

(4)  $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ . En effet  $\mathbf{R}_n$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de vecteur nul  $0 = (0, \dots, 0)$ .  $H \subset \mathbf{R}_n$  et  $0 = (0, \dots, 0) \in H$  car  $0 + \dots + 0 = 0$ . Soient  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$  et  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in H$ . On a  $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$ . Or  $(\lambda x_1 + \mu y_1) + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda(x_1 + \dots + x_n) + \mu(y_1 + \dots + y_n) = 0$  car  $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n = 0$  puisque  $x, y \in H$  donc  $\lambda x + \mu y \in H$ .

**Corollaire 2.13.** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F$  un sous-ensemble de  $E$  ( $F \subset E$ ). Si  $F$  vérifie les propriétés (1) et (2) suivantes alors  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  :

- (1)  $F$  est non vide ( $F$  contient l'élément neutre de  $E$ ).
- (2)  $\forall (x, y) \in F \times F, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}$ , alors  $\lambda x + \mu y \in F$ .

**Exemple 2.14.** Les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^2$  :

- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 1\}$  car ne contient pas le vecteur nul ;
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 0\}$  car non stable par addition ;
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y \in \mathbf{Z}\}$  car non stable par produit extérieur.

**Proposition 2.15.** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $E_1, \dots, E_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors l'intersection  $F = \bigcap_{k=1}^n E_k$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Preuve:**

Pour tout  $i$ , on a  $0 \in E_i$ , donc  $0 \in F$ . Soient  $x, y \in F$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$  alors pour tout  $i$ , on a  $\lambda x + \mu y \in E_i$  donc  $\lambda x + \mu y$  est dans l'intersection de tout les  $E_i$ .  $\square$



**Remarque 2.16.** La réunion de deux sous-espace vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel. En effet, si  $E = \mathbf{R}^2$ , les sous-ensembles  $E_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0\}$  et  $E_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - y = 0\}$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^2$  mais  $E_1 \cup E_2$  n'est pas un sous-espace vectoriel (par exemple, soient  $x, y \in \mathbf{R}^*$ , on a  $(x, -x) \in E_1$  et  $(y, y) \in E_2$  mais  $(x, -x) + (y, y)$  n'appartient ni à  $E_1$  ni à  $E_2$ ).

### 2.3.2 Combinaisons linéaires

Soit  $\{x_1, \dots, x_p\}$  une famille de vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ . Tout vecteur de  $E$  de la forme  $a_1x_1 + \dots + a_px_p = \sum_{k=1}^p a_kx_k$ , où les  $a_k \in \mathbf{R}$  est appelé *combinaison linéaire* des vecteurs  $x_k, k = 1, \dots, p$ .

**Remarque 2.17.** On peut généraliser cette notion à une famille infinie de vecteurs, mais dans ce cas il faut que la suite des scalaires soit à support fini.

### 2.3.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un espace vectoriel

Soit  $A$  un sous-ensemble non-vidé de l'espace vectoriel  $E$ . On note  $\text{vect}(A)$ , l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $A$ . On a donc

$$\text{vect}(A) = \left\{ \sum_{a \in A} \lambda_a a \mid (\lambda_a) \text{ est une famille de scalaires à support fini} \right\}.$$

Donc un élément  $x$  de  $E$  appartient à  $\text{vect}(A)$ , si et seulement si, il existe  $x_1, \dots, x_n \in A$  et des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , tels que :  $x = \lambda_1x_1 + \dots + \lambda_nx_n$ .

**Théorème 2.18.** Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel  $E$ .  $\text{vect}(A)$  est l'unique sous-espace vectoriel de  $E$  vérifiant :

- (1)  $A \subset \text{vect}(A)$ ,
- (2)  $\text{vect}(A)$  est inclus dans tout sous-espaces vectoriels contenant  $A$ .

Le sous-espace vectoriel  $\text{vect}(A)$  se comprend comme étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant  $A$ , on l'appelle *espace vectoriel engendré par  $A$* .

**Corollaire 2.19.**  $\text{vect}(A)$  est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriel de  $E$  contenant  $A$ .

**Corollaire 2.20.**  $A$  est un sous-espace vectoriel, si et seulement si,  $\text{vect}(A) = A$ .

**Exemple 2.21.** (1)  $\text{vect}\{\text{ensemble vide}\} = \{0\}$  car l'espace nul est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$ .

(2)  $\text{vect}(E) = E$  car  $\text{vect}E$  est le plus petit sous-espace vectoriel contenant  $E$ .

(3) Soit  $A = \{u\}$ . Montrons que  $\text{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u$ .

Puisque  $u \in A \subset \text{vect}(A)$  et puisque  $\text{vect}(A)$  est un sous-espace vectoriel on a  $\lambda u \in \text{vect}(A)$ , pour tout  $\lambda \in \mathbf{K}$ . Ainsi  $\mathbf{K}u \subset \text{vect}\{u\}$ . Par double inclusion on obtient  $\mathbf{K}u = \text{vect}\{u\}$ .

(4) Soit  $A = \{u, v\}$ . Par double inclusion, on montre comme ci-dessus que  $\text{vect}\{u, v\} = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u + \mathbf{K}v$ .

**Proposition 2.22.** *Si  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$  alors  $A \subset B \implies \text{vect}(B) \subset \text{vect}(A)$ .*

**Preuve:**

Supposons que  $A \subset B$ . On a alors  $A \subset \text{vect}(B)$  or  $\text{vect}(B)$  est un sous-espace vectoriel donc  $\text{vect}(A) \subset \text{vect}(B)$ .  $\square$

**Proposition 2.23.** *Si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $E$  alors  $\text{vect}(A \cup B) = \text{vect}(A) + \text{vect}(B)$ .*

**Exemple 2.24.** *Pour  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .  $\text{vect}(F \cup G) = F + G$ . Ainsi  $F + G$  apparait comme étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant  $F$  et  $G$ .*

## 2.4 Feuille d'exercices-Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

**Exercice 1.** Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

On munit le produit cartésien  $E \times E$  de l'addition usuelle :  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$  et de la multiplication externe  $*$  par les complexes définie par :  $(a + i.b) * (x, y) = (a.x - b.y, a.y + b.x)$ .

Montrer que  $E \times E$  est alors un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel.

Celui-ci est appelé complexifié de  $E$ .

**Exercice 2.** Soit  $\mathbf{R}_+^*$  muni de la loi interne définie par  $a \oplus b = a.b, \forall a, b \in \mathbf{R}_+^*$  et de la loi externe  $\otimes$  telle que :  $\lambda \otimes a = a^\lambda, \forall a \in \mathbf{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbf{R}$ .

Montrer que  $(\mathbf{R}_+^*, \oplus, \otimes)$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice 3.** Sur  $\mathbf{R}^2$ , on définit les deux lois suivantes : pour tous  $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$  et  $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ , on pose

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad \lambda \star (x, y) = (\lambda x, 0).$$

Le triplet  $(\mathbf{R}^2, +, \star)$  est-il un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  ?

**Exercice 4.** Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^2$  ?

- (a)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq y\}$  ;
- (b)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 0\}$  ;
- (c)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$  ;
- (d)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 1\}$ .

**Exercice 5.** Soient  $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$  et  $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ .

- (a) Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^3$ .
- (b) Déterminer  $F \cap G$ .

**Exercice 6.** Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  ?

- (a)  $\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\}$  ;
- (b)  $\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\}$  ;
- (c)  $\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\}$  ;
- (d)  $\{(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique}\}$ .

**Exercice 7.** Soient  $u_1, \dots, u_n$  des vecteurs d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

Montrer que l'ensemble  $F = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E = \text{vect}(u_1, \dots, u_n)$ .

**Exercice 8.** Soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Montrer que  $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$ .

**Exercice 9.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Montrer que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , si et seulement si,  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

**Exercice 10.** Comparer  $\text{vect}(A \cap B)$  et  $\text{vect}(A) \cap \text{vect}(B)$ .

**Exercice 11.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

Montrer que  $\text{vect}(A \cup B) = \text{vect}(A) + \text{vect}(B)$ .

## 2.5 Applications linéaires

### 2.5.1 Définitions

**Définition 2.25.** Soient  $(E, +, \cdot)$  et  $(F, +)$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels. On dit que  $f : E \rightarrow F$  est linéaire (ou est un morphisme d'espace vectoriel) si :

- (1)  $\forall x, y \in E$ , on a  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  ;
- (2)  $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall x \in E$ , on a  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ .

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ .

**Proposition 2.26. [Caractérisation usuelle des applications linéaires] :** Soit  $f : E \rightarrow F$ . L'application  $f$  est linéaire, si et seulement si,  $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \forall x, y \in E$ ,  $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ .

**Exemple 2.27.** Soit  $f : E \rightarrow F$  définie par  $f : x \mapsto 0_F$ . L'application  $f$  est linéaire.

**Proposition 2.28.** Soient  $E, E_1, \dots, E_n$ , ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) des  $\kappa$  espaces vectoriels. L'application

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow E_1 \times \dots \times E_n \\ x &\mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)). \end{aligned}$$

$f$  est linéaire de  $E$  dans  $E_1 \times \dots \times E_n$ , si et seulement si,  $f_1, \dots, f_n$  sont des applications linéaires de respectivement de  $E$  dans  $E_1, \dots$ , de  $E$  dans  $E_n$ .

**Exemple 2.29.** Montrons que  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  définie par  $f(x, y) = (x + y, x - y, 2y)$  est une application linéaire. Soient  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ , et  $a = (x, y), b = (x', y') \in \mathbf{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} f(\lambda a + \mu b) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' - \lambda y + \mu y', 2\lambda y + 2\mu y') \\ &= \lambda(x + y, x - y, 2y) + \mu(x' + y', x' - y', 2y') \\ &= \lambda f(a) + \mu f(b). \end{aligned}$$

**Proposition 2.30.** Soient  $(E, +, \cdot), (F, +, \cdot), (G, +, \cdot)$  des  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels.

- (1) Si l'application  $f : E \rightarrow F$  est linéaire alors  $f(0_E) = 0_F$  ;
- (2) Si  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  sont linéaires alors  $g \circ f : E \rightarrow G$  est linéaire.
- (3) Si  $e_1, \dots, e_n$  sont des vecteurs de  $E$  alors  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}, f(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(e_k)$ .

### 2.5.2 Applications linéaires particulières

#### Formes linéaires

**Définition 2.31.** On appelle forme linéaire sur un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$ , toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbf{K}$ . On note  $E^*$ , au lieu de  $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ , l'ensemble des formes linéaires sur  $E$ .

**Exemple 2.32.** Pour  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}$  fixé, l'application  $f : \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}$  définie par  $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  est une forme linéaire sur  $\mathbf{K}^n$ . En effet, c'est une application de  $\mathbf{K}^n$  vers  $\mathbf{K}$  et c'est aussi une application linéaire car on vérifie aisément que  $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \forall x, y \in \mathbf{K}^n$ , on a  $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ .

### Endomorphisme

**Définition 2.33.** On appelle endomorphisme de  $E$ , toute application linéaire de  $E$  dans lui-même. On note  $\mathcal{L}(E)$ , au lieu de  $\mathcal{L}(E, E)$ , l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

**Exemple 2.34.** L'application identité  $\text{Id}_E : E \rightarrow E$  est un endomorphisme de  $E$ .

**Proposition 2.35.** Si  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ , alors  $f \circ g$  est aussi un endomorphisme de  $E$ .

### Isomorphisme

**Définition 2.36.** On appelle isomorphisme d'un  $\mathbf{K}$  espace vectoriel  $E$  vers un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $F$  toute application linéaire bijective de  $E$  vers  $F$ . On note  $\text{Iso}(E, F)$  l'ensemble des isomorphismes de  $E$  dans  $F$ .

**Exemple 2.37.** L'application  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}$  définie par  $f(a, b) = a + ib$  est un isomorphisme de  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. En effet, cette application est  $\mathbf{R}$ -linéaire et bijective.

**Proposition 2.38.** Si  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  sont des isomorphismes alors la composée  $g \circ f : E \rightarrow G$  est un isomorphisme.

**Proposition 2.39.** Si  $f : E \rightarrow F$  est un isomorphisme alors son application réciproque  $f^{-1} : F \rightarrow E$  est un isomorphisme.

**Exemple 2.40.** L'application  $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par  $g : z \mapsto (\Re(z), \Im(z))$  est l'isomorphisme réciproque de l'application  $f : (a, b) \in \mathbf{R}^2 \mapsto a + ib \in \mathbf{C}$ .

### Automorphisme

**Définition 2.41.** On appelle automorphisme de  $E$ , toute application linéaire bijective de  $E$  dans  $E$ . On note  $\text{Gl}(E)$  l'ensemble d'automorphismes de  $E$ .

**Proposition 2.42.** Si  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  sont des automorphismes alors la composée  $g \circ f : E \rightarrow G$  est un automorphisme.

**Proposition 2.43.** Si  $f : E \rightarrow F$  est un automorphisme alors son application réciproque  $f^{-1} : F \rightarrow E$  est un automorphisme.

### 2.5.3 Noyau et image d'une application linéaire

**Théorème 2.44.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Si  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  alors  $f(V)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .  
Si  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $F$  alors  $f^{-1}(W)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Définition 2.45.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire.

- (1) On appelle image de  $f$  l'espace  $\text{Im } f = f(E)$ .
- (2) On appelle noyau de  $f$  l'espace  $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ .

**Proposition 2.46.** (1)  $\text{Im } f$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

(2)  $\ker f$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Remarque 2.47.** (1) Pour déterminer l'image d'une application linéaire  $f$ , on détermine les valeurs prises par  $f$ , i.e., les  $y \in F$  tels qu'il existe  $x \in E$  pour lequel  $y = f(x)$ .

(2) Pour déterminer le noyau d'une application linéaire  $f$ , on résout l'équation  $f(x) = 0_F$  d'inconnue  $x \in E$ .

**Exemple 2.48.** Déterminons le noyau et l'image de l'application linéaire  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par  $f : (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$ . Soit  $a = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ . .....  $\ker f = \{x, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$

$\text{Im } f = \{(x, -x) \mid x \in \mathbf{R}\}$ .

**Théorème 2.49.** Si  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire alors

(1)  $f$  est surjective, si et seulement si,  $\text{Im } f = F$

(2)  $f$  est injective, si et seulement si,  $\ker f = \{0_E\}$ .

**Preuve:**

□

## 2.6 Famille de vecteurs

### 2.6.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ .

**Définition 2.50.** On appelle combinaison linéaire des vecteurs de la famille  $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  tout vecteurs  $x$  de  $E$  pouvant s'écrire  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des scalaires de  $\mathbf{K}$  bien choisis.

**Définition 2.51.** On appelle espace vectoriel engendré par la famille  $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ , le sous-espace vectoriel engendré par la partie  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . On le note  $\text{vect } \mathcal{F}$ ,  $\text{vect}(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  ou  $\text{vect}(e_1, \dots, e_n)$ .

**Exemple 2.52.** Le sous-espace vectoriel engendré par la famille vide est l'espace nul  $\{0\}$ .

**Théorème 2.53.** Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille de vecteurs de  $E$  alors  $\text{vect}(e_1, \dots, e_n)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs  $e_1, \dots, e_n$ , c'est-à-dire :

$$\text{vect}(e_1, \dots, e_n) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}\}.$$

**Exemple 2.54.** (1) Cas  $n = 1$ ,  $\mathfrak{X}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u$ .

(2) Cas  $n = 2$ ,  $\mathfrak{X}(u, v) = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u + \mathbf{K}v$ .

(3) Dans  $\mathbf{R}^3$ , considérons  $u = (1, 1, 1)$ ,  $v = (0, -1, 2)$ .

$\text{vect}(u, v) = \{(\lambda, \lambda + \mu, 2\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbf{K}\}$ .

**Remarque 2.55.** Il est efficace d'établir qu'une partie est un sous-espace vectoriel en observant que celle-ci est engendrés par une famille de vecteurs.

**Exemple 2.56.** (1) Dans  $\mathbf{R}^3$ , considérons  $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ . Puisque  $P = \text{vect}(u, v)$ , avec  $u = (1, 1, 0)$  et  $v = (1, -1, 2)$ ,  $P$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$ .

(2) Dans  $\mathbf{R}^3$ , considérons  $P = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$ . Puisque  $x + y - z = 0 \Leftrightarrow z = x + y$ , on a  $P = \text{vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ . ainsi  $P$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^3$ .

## 2.6.2 Famille génératrice

**Définition 2.57.** On dit qu'une famille  $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de vecteurs de  $E$  est génératrice de  $E$ , si tout vecteur  $x$  de  $E$  s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \mid x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

**Remarque 2.58.** La famille  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$ , si et seulement si,  $\text{vect}(\mathcal{F}) = E$ .

**Exemple 2.59.** (1) Dans  $E = \mathbf{R}^n$ , on pose  $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$  où 1 se situe en  $i$ ème position. La famille  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est génératrice de  $\mathbf{R}^n$ . En effet  $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ , on peut écrire  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ .

(2) Dans  $E = \mathbf{R}$ , la famille (1) est génératrice. En effet,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $x = x.1$ .

(3) Dans  $E = \mathbf{C}$  vu comme  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, la famille  $\mathcal{F} = (1, i)$  est génératrice. En effet, pour tout  $z \in \mathbf{C}$ , on peut écrire  $z = a.1 + b.i$ , avec  $a = \Re(z)$  et  $b = \Im(z)$ .

**Proposition 2.60.** Si  $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$  est une famille génératrice et si  $e_{n+1} \in \mathfrak{X}(e_1, \dots, e_n)$  alors la sous-famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est génératrice.

## 2.6.3 Famille libre, famille liée

**Définition 2.61.** Un vecteur  $u$  est dit colinéaire à un vecteur  $v$  de  $E$  s'il existe  $\alpha \in \mathbf{K}$  tel que  $u = \alpha v$ . Deux vecteurs  $u$  et  $v$  sont dits colinéaires si l'un des deux est colinéaire à l'autre.

### Attention

$u$  est colinéaire à  $v$  n'équivaut pas à  $v$  est colinéaire à  $u$ . En effet, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteurs mais tout vecteurs n'est pas colinéaire au vecteur nul.

**Définition 2.62.** (1) On dit que la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs de  $E$  est libre si elle vérifie  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . On dit que les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$  sont linéairement indépendants

(2) On dit que la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est liée si elle n'est pas libre ce qui signifie  $\exists \lambda_1, \lambda_n \in \mathbf{K}, \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ . Une égalité  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tous nuls est appelée relation linéaire sur les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$ .

**Exemple 2.63.** Soit  $u \in E$ , étudions la liberté de la famille  $(u)$ . Si  $u \neq 0$  alors  $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \lambda u = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ . Par suite, la famille  $(u)$  est libre. Si  $u = 0$  alors on peut écrire  $\lambda u = 0$  avec  $\lambda = 1 \neq 0$ . Par suite, la famille  $(0)$  est liée.

**Proposition 2.64.** Soient  $n \geq 2$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . On a équivalence entre :

- (i)  $(e_1, \dots, e_n)$  est liée ;
- (ii) L'un des vecteurs  $e_1, \dots, e_n$  est combinaison linéaire des autres.

**Exemple 2.65.** (1) Soient  $u, v \in E$ .

$(u, v)$  est liée, si et seulement si,  $(\exists \alpha \in \mathbf{K}, u = \alpha v)$  ou  $(\exists \beta \in \mathbf{K}, v = \beta u)$ .  
Ansi, la famille  $(u, v)$  est liée, si et seulement si,  $u$  et  $v$  sont colinéaires.

- (2) Dans  $E = \mathbf{R}^3$ , considérons les vecteurs  $u = (1, 2, 1), v = (1, -1, 1), w = (1, 1, 0)$  et la famille  $\mathcal{F} = (u, v, w)$ . Étudions la liberté de la famille  $\mathcal{F}$ . Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ .

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0. \end{array} \right.$$

Après résolution du système, on obtient  $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ , la famille  $\mathcal{F}$  est donc libre.

- (3) Dans  $E = \mathbf{R}^3$ , considérons les vecteurs  $u = (1, -1, 0), v = (2, -1, 1), w = (0, 1, 1)$  et la famille  $\mathcal{F} = (u, v, w)$ . Étudions la liberté de la famille  $\mathcal{F}$ . Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ .

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0. \end{array} \right.$$

Après résolution du système, on obtient  $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -2\beta \\ \gamma = -\beta. \end{array} \right.$

On en déduit que la famille  $\mathcal{F}$  est liée car on a notamment la relation linéaire  $-2u + v - w = 0$ .

- (4) Dans  $E = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ , considérons les fonctions  $f : x \mapsto 1, g : x \mapsto \cos x, h : x \mapsto \sin x$  et montrons que la famille  $(f, g, h)$  est libre. Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ . Supposons  $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$ . Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , on a  $\alpha + \beta \cos x + \gamma \sin x = 0$ . Pour  $x = 0$ , on obtient l'équation  $\alpha + \beta = 0$  (1). Pour  $x = \pi/2$ , on obtient l'équation  $\alpha + \gamma = 0$  (2). Pour  $x = \pi$ , on obtient l'équation  $\alpha - \beta = 0$  (3). On a (1) et (3) donnent  $\alpha = \beta = 0$  et par (2) on obtient  $\gamma = 0$ . Finalement la famille  $(f, g, h)$  est libre.

**Remarque 2.66.** (1) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

- (2) Toute sur-famille d'une famille liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul est liée.



(3) Une sur-famille d'une famille libre n'est pas nécessairement libre.

**Proposition 2.67.** Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille libre et si  $e_{n+1} \notin \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$  alors la sur-famille  $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$  est libre.

### 2.6.4 Base d'un espace vectoriel

**Définition 2.68.** On dit qu'une famille  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n} = (e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs de  $E$  est une base de  $E$  si celle-ci est libre et génératrice.

**Exemple 2.69.** (1) Dans  $E = \mathbf{K}^n$ , on pose  $e_i = (1, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{K}^n$  où 1 se situe en  $i$ ème position. On a déjà vu que  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est génératrice de  $\mathbf{K}^n$ ; montrons qu'elle est libre. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ . Supposons que  $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ . On a  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$  et donc  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Finalement, la famille  $\mathcal{B}$  est libre et génératrice de  $\mathbf{K}^n$ , c'est une base de  $\mathbf{K}^n$ .

(2) Considérons la famille  $(1, i)$  d'éléments du  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{C}$ . On a déjà vu que cette famille est génératrice; montrons qu'elle est libre. Soient  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ . Supposons que  $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot i = 0$ . En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient  $\lambda = \mu = 0$ . Finalement, la base  $\mathcal{B}$  est libre et génératrice du  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{C}$ , c'est une base de  $\mathbf{C}$ .

**Remarque 2.70.** La famille  $(1, i)$  est liée dans le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $\mathbf{C}$ . Elle n'est pas donc une base du  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $\mathbf{C}$ .

### 2.6.5 Composante dans une base

**Théorème 2.71.** Si  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de  $E$  alors  $\forall x \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ .

**Définition 2.72.** Avec les notations ci-dessous, les scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont appelés les composantes de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  (ou encore les composantes de  $x$ ).

**Remarque 2.73.** Les composantes d'un vecteur dépendent de la base dans laquelle on travaille.

**Exemple 2.74.** (1) Dans  $E = \mathbf{K}^n$ , considérons la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et le vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Puisque  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ , les composantes du vecteur  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont les scalaires  $x_1, \dots, x_n$ .

(2) Dans le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{C}$ , les composantes de  $z \in \mathbf{C}$  dans la base canonique  $(1, i)$  sont  $\Re(z)$  et  $\Im(z)$ .

**Théorème 2.75.** Si  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E$  alors pour tout vecteur  $x$  et  $y$  de composantes  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$  dans  $\mathcal{B}$ , les composantes de  $x + y$  sont  $x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n$  et celle de  $\lambda x$  sont  $\lambda x_1, \dots, \lambda x_n$ . Ainsi l'application  $x \in E \mapsto x_i \in \mathbf{K}$  est une forme linéaire sur  $E$ .

## 2.7 Feuille d'exercices sur les applications linéaires, Famille libre, liée et base

### 2.7.1 Applications linéaires

**Exercice 1 :** Les applications entre  $\mathbf{R}$ -espace vectoriels suivantes sont-elles linéaires :

- (1)  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x, y, z) = x + y + 2z$  ;
- (2)  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x, y) = x + y + 1$  ;
- (3)  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x, y, z) = xy$  ;
- (4)  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x, y, z) = x - z$  ;

**Exercice 2 :** Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par  $f(x, y) \rightarrow (x + y, x - y)$ .

Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbf{R}^2$  et déterminer son automorphisme réciproque.

**Exercice 3 :** Soit  $\Phi : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  définie par  $\Phi(f) = f'' - 3f' + 2f = 0$ . Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme et préciser son noyau.

**Exercice 4 :** Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications indéfiniment dérivables sur  $\mathbf{R}$ . Soient  $\Phi : E \rightarrow E$  et  $\Psi : E \rightarrow E$  les applications définies par :  $\Phi(f) = f'$  et  $\Psi(f)$  est donnée par :  $\forall x \in \mathbf{R}, \Psi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ .

- (a) Montrer que  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des endomorphismes de  $E$ .
- (b) Exprimer  $\Phi \circ \Psi$  et  $\Psi \circ \Phi$ .
- (c) Déterminer les images et les noyaux de  $\Phi$  et de  $\Psi$ .

**Exercice 5 :** Soit  $f$  l'application linéaire d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$  vers un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $F$ .

Montrer que pour toute partie  $A$  de  $E$ , on a  $f(\text{vect}(A)) = \text{vect}(f(A))$ .

**Exercice 6 :** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$  nilpotent, c'est-à-dire il existe  $n \in \mathbf{N}^*$  pour lequel  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ . Montrer que  $\text{Id} - f$  est inversible et exprimer son inverse en fonction de  $f$ .

**Exercice 7 :** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $A, B$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que  $f(A) \subset f(B) \iff A + \ker f \subset B + \ker f$ .

### 2.7.2 Image et noyau d'un endomorphisme

**Exercice 8 :** Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Montrer que  $g \circ f = 0$ , si et seulement si,  $\text{Im}(f) \subset \ker(g)$ .

**Exercice 9 :** Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

- (a) Comparer  $\ker(f) \cap \ker(g)$  et  $\ker(f + g)$  ;
- (b) Comparer  $\text{Im}(f) + \text{Im}(g)$  et  $\text{Im}(f + g)$  ;
- (c) Comparer  $\ker(f)$  et  $\ker(f^2)$  ;
- (d) Comparer  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Im}(f^2)$ .

**Exercice 10 :** Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Montrer que

- (a)  $\text{Im}(f) \cap \ker(f) \iff \ker(f) = \ker(f^2)$  ;
- (b)  $E = \text{Im}(f) + \ker(f) \iff \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ .

### 2.7.3 Sous-espace engendré par une famille finie

**Exercice 11 :** On considère les vecteurs de  $\mathbf{R}^3$  suivants  $u = (1, 1, 1)$  et  $v = (1, 0, -1)$ .

Montrer que  $\text{vect}(u, v) = \{(2\alpha, \alpha + \beta, 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$ .

**Exercice 12 :** Dans  $\mathbf{R}^3$ , on considère  $x = (1, -1, 1)$  et  $y = (0, 1, a)$  où  $a \in \mathbf{R}$ .

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  pour que  $u = (1, 1, 2)$  appartiennent à  $\text{vect}(x, y)$ . Comparer alors  $\text{vect}(x, y)$ ,  $\text{vect}(u, x)$  et  $\text{vect}(u, y)$ .

### 2.7.4 Famille libre

**Exercice 13 :** Les familles suivantes de  $\mathbf{R}^3$  sont-elles libres ?

Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :

- (a)  $(x_1, x_2)$  avec  $x_1 = (1, 0, 1)$  et  $x_2 = (1, 2, 2)$  ;
- (b)  $(x_1, x_2, x_3)$  avec  $x_1 = (1, 0, 0)$ ,  $x_2 = (1, 1, 0)$  et  $x_3 = (1, 1, 1)$  ;
- (c)  $(x_1, x_2, x_3)$  avec  $x_1 = (1, 2, 1)$ ,  $x_2 = (2, 1, -1)$  et  $x_3 = (1, -1, -2)$  ;
- (d)  $(x_1, x_2, x_3)$  avec  $x_1 = (1, -1, 1)$ ,  $x_2 = (2, -1, 3)$  et  $x_3 = (-1, 1, -1)$  ;

**Exercice 14 :** On pose  $f_1, f_2, f_3, f_4$  les fonctions définies par :  $f_1(x) = \cos x$ ,  $f_2(x) = x \cos x$ ,  $f_3(x) = \sin x$  et  $f_4(x) = x \sin x$ .

Montrer que la famille  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  est libre.

**Exercice 15 :** Pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ , on pose  $f_k : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonction définie par :  $f_k(x) = e^{kx}$ .

Montrer que la famille  $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une famille libre de  $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ .

**Exercice 16 :** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et soient  $x, y, z$  trois vecteurs de  $E$  tel que la famille  $x, y, z$  soit libre.

On pose :  $u = y + z$ ,  $v = z + x$  et  $w = x + y$ .

Montrer que la famille  $(u, v, w)$  est libre.

**Exercice 17 :** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$  une famille de vecteurs de  $E$ . Etablir :

- (a) Si  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre et  $u_{n+1} \notin \text{vect}(u_1, \dots, u_n)$  alors  $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$  est libre ;
- (b) Si  $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$  est génératrice et  $u_{n+1} \in \text{vect}(u_1, \dots, u_n)$  alors  $(u_1, \dots, u_n)$  est génératrice.

**Exercice 18 :** Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille libre de vecteurs de  $E$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$ .

On pose  $u = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$  et  $\forall 1 \leq i \leq n, y_i = x_i + u$ .

A quelle condition sur les  $\alpha_i$ , la famille  $(y_1, \dots, y_n)$  est-elle libre ?

**Exercice 19 :** Soit  $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ . Les fonctions  $x \mapsto \sin(x+a)$ ,  $x \mapsto \sin(x+b)$ ,  $x \mapsto \sin(x+c)$  sont-elles indépendantes ?

### 2.7.5 Obtention de base

**Exercice 20 :** On pose  $e_1 = (1, 1, 1)$ ,  $e_2 = (1, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 1, 1)$ . Montrer que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbf{R}^3$ .

**Exercice 21 :** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $B = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ .

On pose  $u = e_1 + 2e_2 + 2e_3$  et  $v = e_2 + e_3$ .

Montrer que la famille  $(u, v)$  est libre et compléter celle-ci en une base de  $E$ .

**Exercice 22 :** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $B = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ .

On pose  $u = e_1 + 2e_3$  et  $v = e_3 - e_1$  et  $w = e_1 + 2e_2$ .

Montrer que  $(u, v, w)$  est une base de  $E$ .

**Exercice 23 :** soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel muni de la base  $B = (e_1, \dots, e_n)$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on pose  $u_i = e_1 + \dots, e_i$ .

- (a) Montrer que  $B' = (u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$ ;
- (b) Exprimer les composantes dans  $B'$  d'un vecteur de  $E$  en fonction de ces composantes dans  $B$ .

# Chapitre 3

## Matrices

### 3.1 Opérations sur les matrices

#### 3.1.1 Définition

**Définition 3.1.** Soient  $n, p \in \mathbf{N}^*$ . On appelle matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbf{K}$ , un tableau à  $n$  lignes et  $p$  colonnes d'éléments de  $\mathbf{K}$ . On note une telle matrice

$$M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

- On dit que  $M$  est une matrice colonne si  $p = 1$ .
- On dit que  $M$  est une matrice ligne si  $n = 1$ .
- On dit que  $M$  est une matrice carrée si  $n = p$ .

#### Notations :

- On note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbf{K}$ .
- Si  $p = n$ , on note  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  l'ensemble des matrices carrées à  $n$  lignes et à  $n$  colonnes.
- Un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  est dite matrice carrée de taille  $n$ .
- Soit  $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ , alors  $a_{ij}$  est le coefficient situé sur la  $i^{\text{ième}}$  ligne et la  $j^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $M$ .

**Définition 3.2.** Soit  $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice carrée de taille  $n$ . On dit que :

- (1)  $M$  est une matrice triangulaire supérieure (resp. strictement supérieure) si

$a_{ij} = 0$  pour tout  $i > j$  (resp.  $i \geq j$ ). C'est-à-dire :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, (\text{resp. } M = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}).$$

(2)  $M$  est une matrice inférieure (resp. strictement inférieure) si  $a_{ij} = 0$  pour tout  $i < j$  (resp.  $i \leq j$ ). C'est-à-dire :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}, (\text{resp. } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}).$$

(3)  $M$  est une matrice diagonale si  $a_{ij} = 0$  pour tout  $i \neq j$ . C'est-à-dire :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(4)  $M$  est symétrique (resp. antisymétrique) si  $a_{ij} = a_{ji}$  (resp.  $a_{ij} = -a_{ji}$ ) pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ . C'est-à-dire :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, (\text{resp. } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}).$$

**Définition 3.3.** Soit  $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ . On appelle transposée de  $M$  la matrice  ${}^tM = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$  où  $b_{ij} = a_{ij}$ . C'est-à-dire :

$${}^tM = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, les  $n$  lignes de  $M$  sont les  $n$  colonnes de  ${}^tM$  et les  $p$  colonnes de  $M$  sont les  $p$  lignes de  ${}^tM$ .

**Remarque 3.4.** (1) Une matrice carrée  $M$  est symétrique, si et seulement si,  $M = {}^tM$ .

(2) Une matrice carrée  $M$  est antisymétrique, si et seulement si,  $M = -{}^tM$ .

### 3.1.2 $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel

#### Opérations

Soit  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  et  $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ . On définit la matrice  $A+B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  de la façon suivante :  $A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ . Ainsi

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Remarque 3.5.** On ne somme que des matrices de même types.

**Définition 3.6.** Soit  $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  et soit  $\lambda \in \mathbf{K}$ . On définit la matrice  $\lambda A$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  par  $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ . Ainsi

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}.$$

**Théorème 3.7.**  $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, \cdot)$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel d'élément nul  $0 = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ .

#### Dimension

**Définition 3.8.** Soit  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ . On appelle matrice élémentaire d'indice  $(i, j)$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  la matrice  $E_{ij}$ , dont tous les coefficients sont nuls sauf à la  $i^{\text{ième}}$  ligne et la  $j^{\text{ième}}$  colonne qui vaut 1.

**Exemple 3.9.** (1) Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ , les matrices élémentaires sont  $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(2) Dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$  les matrices élémentaires sont :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{n1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Théorème 3.10.** La famille  $B = (E_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p)$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ .

**Preuve:**

$\forall X = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ , on a  $X = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} E_{ij}$ . Donc  $B$  est une famille génératrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ . Montrons maintenant que  $B$  est libre. Soient  $\lambda_{ij} \in \mathbf{K}$ ,  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ , tel que  $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_{ij} E_{ij} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})}$  et montrons que  $\lambda_{ij} = 0, \forall 1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ . On a  $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_{ij} E_{ij} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})}$  est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Par identification on obtient  $\lambda_{ij} = 0, \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ . □

**Corollaire 3.11.** La dimension de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  est  $mp$ . En particulier  $\dim \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = n^2$  et  $\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) = \dim \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K}) = n$ .

**Exemple 3.12.** (1) Soient  $A_1, A_2, A_3, A_4$  les matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons que  $B = (A_1, A_2, A_3, A_4)$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ . Nous remarquons que  $\text{card}(B) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ . Donc pour que  $B$  soit une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  il suffi que  $B$  soit libre sur  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbf{R}$ , tel que  $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0$ . Montrons que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_4 = 0$ . On a  $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = 0$  est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_3 - \lambda_4 \\ \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Qui est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

On déduit facilement que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ .



(2) Montrons que :

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & -a+b \\ 2a+b & -a+2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{K} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ b & 2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{K} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{K} \right\} \\ &= \text{vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Par suite  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ .

(3) Soit  $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c+d=0, \forall a, b, c, d \in \mathbf{K} \right\}$ . Montrons que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ . Soit  $f$  l'application suivante

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_2(\mathbf{K}) &\rightarrow \mathbf{K} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto a+b+c+d. \end{aligned}$$

Il est facile à vérifier que  $f$  est une application linéaire, c'est-à-dire, pour tous  $\lambda, \beta \in \mathbf{K}$ ,  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$  on a  $f(\lambda A + \beta B) = \lambda f(A) + \beta f(B)$ . On a

$$\begin{aligned} \ker f &= \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K}) \mid f(M) = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c+d=0 \right\} \end{aligned}$$

On remarque que  $\ker f = H$  et on sait que le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel. On déduit alors que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ .

### 3.1.3 Sous-espaces des matrices diagonales et triangulaires

**Proposition 3.13.**  $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$  l'ensemble des matrices diagonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  de dimension  $n$ .

**Remarque 3.14.** Une base de  $\mathcal{D}_n(\mathbf{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid M = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbf{K}\}$  est  $B_1 = (E_{11}, \dots, E_{nn})$ .

**Proposition 3.15.** (1)  $\mathbf{T}_n^{\geq}(\mathbf{K})$  (resp.  $\mathbf{T}_n^{\leq}(\mathbf{K})$ ) est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

(2)  $\mathbf{T}_n^>(\mathbf{K})$  (resp.  $\mathbf{T}_n^<(\mathbf{K})$ ) est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

**Remarque 3.16.** (1)  $\mathbf{T}_n^{\geq}(\mathbf{K}) = \text{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq i \leq j \leq n)$ ;

(2)  $\mathbf{T}_n^>(\mathbf{K}) = \text{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq i < j \leq n)$ ;

(3)  $\mathbf{T}_n^{\leq}(\mathbf{K}) = \text{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq j \leq i \leq n)$ ;

(4)  $\mathbf{T}_n^<(\mathbf{K}) = \text{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq j < i \leq n)$ .

**Exercice** Montrer que :

(1)  $\mathbf{T}_n^{\geq}(\mathbf{K}) \oplus \mathbf{T}_n^<(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ;

(2)  $\mathbf{T}_n^{\leq}(\mathbf{K}) \oplus \mathbf{T}_n^>(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

### 3.1.4 Propriétés du produit matriciel

Soient  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ ,  $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ . On définit la matrice  $C = A \times B = AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ , par  $\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq q$ ,  $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$ .

**Exemple** Vérifier que pour tous  $E_{ij}, E_{kl} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , on a  $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ .

**Attention :** Pour une cette multiplication matricielle soit possible il est nécessaire que le nombre de colonnes de  $A$  soit égal au nombre de ligne de  $B$ . On peut retirer  $\text{type}(n,p) \times \text{type}(p,q) = \text{type}(n,q)$ .

**Exemple 3.17.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 0 + 2 \times 1 & 0 + 2 \times -1 \\ -1 \times 1 + 1 \times 2 & 0 + 1 \times 1 & 0 + 1 \times -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Remarque 3.18.** Si les types de  $A$  et  $B$  permettent de calculer  $AB$  et  $BA$ , alors en général on n'a pas  $AB = BA$ . Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 3.19.** (1) Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{q,m}$ , on a  $(AB)C = A(CB)$ ;

(2) pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ , on a  $(A+B)C = AC + BC$ ;

(3) pour tous  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  et  $B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ , on a  $A(B+C) = AB + AC$ ;

(4) Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ , et pour tout  $\lambda \in \mathbf{K}$ , on a  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ .

**Remarque 3.20.** Dans l'ensemble des matrices  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  des matrices carrées, la multiplication est une loi de composition interne. Elle admet comme élément neutre la matrice diagonale

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

### Puissance d'une matrice

**Définition 3.21.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , on note  $A^0 = I_n$ ,  $A^1 = A$ ,  $A^2 = A \times A$ ,  $\dots$ ,  $A^m = A \times \dots \times A$  ( $m$  termes).

**Attention :**  $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ .  
 $(A + B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + Ba^2 + AB^2 + BAB + B^3$ .

### Matrices inversibles

**Définition 3.22.** Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  est dite inversible s'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  vérifiant  $AB = BA = I_n$ . Cette matrice  $B$  est alors unique, c'est l'inverse de  $A$  noté  $A^{-1}$ .

**Exemple 3.23.** La matrice  $I_n$  est inversible et  $I_n^{-1} = I_n$ .

**Proposition 3.24.** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

- (1) Si  $A$  et  $B$  sont inversibles alors  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- (2) Si  $A$  est inversible alors  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

**Définition 3.25.** On note  $\mathbf{GL}(n)(\mathbf{K})$  l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

**Proposition 3.26.**  $(\mathbf{GL}(n)(\mathbf{K}), \times)$  est un groupe appelé groupe linéaire d'ordre  $n$ .

**Exemple 3.27.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . On vérifie par le calcul que  $A^2 - 5A = 2I_2$ .  
 Par suite  $A(\frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2) = I_2$ . On conclut alors que  $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2$ .

**Remarque 3.28.** La somme de deux matrices inversibles n'est pas toujours une matrice inversible. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Détermination pratique de l'inverse d'une matrice carrée inversible

**Lemme 3.29.** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  si  $AX = BX$ ,  $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$  alors  $A = B$ .

**Comment chercher l'inverse d'une matrice carrée**  $A \in \text{Gl}_n(\mathbf{K})$  : Soit  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbf{GL}(n)(\mathbf{K})$ . On introduit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$  et  $Y =$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ . On a

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Qui est équivalent à

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Si cela est possible, on résout ce système dont les inconnus sont  $x_1, \dots, x_n$  et on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n \\ \vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n. \end{cases} \quad (3.1)$$

Soit  $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbf{GL}(n)(\mathbf{K})$ . Le système (3.1) est équivalent à  $X = BY$ . Ainsi  $I_n X = BAX, \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ , d'après le lemme 3.29 on a  $I_n = BA$  donc  $A^{-1} = B$ .

**Exemple 3.30.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ . Déterminons  $A^{-1}$  ? Soient  $X =$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ , tel que  $Y = AX$ . On a :

$$\begin{cases} y_1 = x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_3 \\ y_3 = x_1 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_1 - x_3 \\ x_3 = \frac{1}{2}(y_2 - y_3 + y_1) \\ x_1 = y_3 - y_1 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3) \\ x_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3) \\ x_1 = \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3) \end{cases}$$

On déduit alors que  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

## 3.2 Représentations matricielles

### 3.2.1 Matrice colonne des composantes d'un vecteur

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $B = (e_1, \dots, e_n), \forall x \in E, \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}$ , tel que  $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ .

**Définition 3.31.** On appelle matrice des composantes dans  $B$  du vecteur  $x$  la matrice colonne de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$  telles que ses coefficients sont  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , qui sont les composantes de  $x$  dans la base  $B$ . On la note  $\text{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ .

**Remarque 3.32.** Puisque les composantes d'un vecteur dépend de la base choisie, il est nécessaire de préciser la base.

**Exemple 3.33.** Soit le  $\mathbf{R}$  espace vectoriel  $\mathbf{R}^n$  muni de sa base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$ .

On a :  $\text{Mat}_B(e_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . Soit  $x = (1, 2, 3, \dots, n) \in \mathbf{R}^n$ , on a  $\text{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ .

### 3.2.2 Matrice des composantes d'une famille de vecteurs

Soit  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$  une famille de vecteurs d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$  muni d'une base  $B = (e_1, \dots, e_n)$ . Pour tout  $1 \leq i \leq p$  notons  $c_i$  la colonne des composantes dans  $B$  du vecteur  $x_i$ .

**Définition 3.34.** On appelle matrice des composantes dans la base  $B$  de la famille des vecteurs  $\mathcal{F}$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  dont les colonnes sont  $c_1, \dots, c_p$ , on la note  $\text{Mat}_B(\mathcal{F}) = \text{Mat}_B(x_1, \dots, x_p)$ .

**Remarque 3.35.** Si  $p = 1$ , on retrouve la définition de la matrice des composantes du vecteur  $x_1$  dans la base  $B$ .

**Exemple 3.36.** (1) Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel muni de la base  $B = (v_1, \dots, v_n)$ .  
On a

$$\text{Mat}_B(B) = \text{Mat}_B(v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Soit  $E = \mathbf{K}^3$  muni de sa base canonique  $B = (e_1, e_2, e_3)$  et soient  $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ , où  $x_1 = (1, 2, 3)$ ,  $x_2 = (-1, 5, 6)$ ,  $x_3 = (4, 7, 9)$ ,  $x_4 = (4, -6, -7)$ .

$$\text{Mat}_B(\mathcal{F}) = \text{Mat}_B(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & -6 \\ 3 & 6 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

(3) Soit  $E = \mathbf{R}_3[X]$  muni de sa base canonique  $B = (1, X, X^2, X^3)$ . Soient  $\mathcal{F} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ ,  $P_0 = (1 + X)^0 = 1$ ,  $P_1 = (1 + X)^1 = 1 + X$ ,  $P_2 = (1 + X)^2 =$

$1 + 2X + X^2, P_3 = (1 + X)^3 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$ . On a

$$\text{Mat}_B(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3.2.3 Matrice d'une application linéaire

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels muni respectivement des bases  $B = (e_1, \dots, e_n)$  et  $C = (v_1, \dots, v_p)$ .

**Définition 3.37.** On appelle *matrice représentative dans les bases  $B$  et  $C$  d'une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$*  la matrices des composantes dans  $C$  de la famille image  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ , on la note  $\text{Mat}_{B,C}u = \text{Mat}_C(u(e_1), \dots, u(e_n)) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ .

**Remarque 3.38.** La matrice représentative de  $u$  dépend du choix des bases  $B$  et  $C$ , il est donc nécessaire de préciser ces derniers.

**Exemple 3.39.** (1) Soit  $u$  l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} u : \quad \mathbf{R}^3 &\rightarrow \quad \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + 2y - z, x - y). \end{aligned}$$

On muni  $\mathbf{R}^3$  de la base canonique  $B = (e_1, e_2, e_3)$  ( $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ ) et soit  $C = (v_1, v_2)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^2$  ( $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)$ ).  
Déterminons la matrice représentative de  $u$  dans les bases  $B$  et  $C$ . On a

$$\begin{aligned} u(e_1) &= (1, 1) = v_1 + v_2, \\ u(e_2) &= (2, -1) = 2v_1 - v_2, \\ u(e_3) &= (-1, 0) = -v_1 + 0v_2. \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Mat}_C(u(B)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Soient  $a, b \in \mathbf{R}$  (fixés) et  $u$  l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} u : \quad \mathbf{R}_3[X] &\rightarrow \quad \mathbf{R}^3 \\ P &\mapsto (P(a), P(b), P(c)). \end{aligned}$$

On muni  $\mathbf{R}_3[X]$  de sa base canonique  $B = (P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2, P_3 = X^3)$  et on muni  $\mathbf{R}^3$  de sa base canonique  $C = (e_1, e_2, e_3)$ . Déterminons la matrice représentative de  $u$  dans les bases  $B$  et  $C$ . On a

$$\begin{aligned} u(P_0) &= (1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3, \\ u(P_1) &= (a, b, c) = ae_1 + be_2 + ce_3, \\ u(P_2) &= (a^2, b^2, c^2) = a^2e_1 + b^2e_2 + c^2e_3, \\ u(P_3) &= (a^3, b^3, c^3) = a^3e_1 + b^3e_2 + c^3e_3. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\text{Mat}_C(u(B)) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{pmatrix}.$$

### 3.2.4 Matrice d'un endomorphisme

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et muni de la base  $B = (e_1, \dots, e_n)$ .

**Définition 3.40.** On appelle *matrice représentative dans la base  $B$  d'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$*  la *matrice représentative dans la base  $B$  au départ et à l'arrivée de  $u$* , on la note  $\text{Mat}_{B,B}u = \text{Mat}_Bu \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

**Exemple 3.41.** (1) Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $B = (e_1, \dots, e_n)$  et  $u = \text{Id}_E$  l'identité de  $E$ . On a  $\text{Mat}_Bu = I_n$ .

(2) Soit  $B = (e_1, e_1, e_3)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^3$  et soit  $u$  l'endomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} u : \quad \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + z, z + x, x + y). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} u(e_1) &= (0, 1, 1) = e_2 + e_3, \\ u(e_2) &= (1, 0, 1) = e_1 + e_3, \\ u(e_3) &= (1, 1, 0) = e_1 + e_2. \end{aligned}$$

Alors

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 1, 0)$ ,  $v_3 = (1, 0, 0)$ , vérifions que  $B' = (v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbf{R}^3$ , pour cela il suffit de montrer que  $B'$  est libre, car  $\text{card}(B') = \dim \mathbf{R}^3 = 3$ . Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ , tel que  $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbf{R}^3}$  et montrons que  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . On a  $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbf{R}^3}$  est équivalent à

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Donc  $B'$  est libre. Déterminons  $\text{Mat}_{B'}u$ . On a

$$\begin{aligned} u(v_1) &= (2, 2, 2) = 2v_1, \\ u(v_2) &= (1, 1, 2) = 2v_1 - v_2, \\ u(v_3) &= (0, 1, 1) = v_1 + v_3. \end{aligned}$$

Alors

$$\text{Mat}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### 3.2.5 Image d'un vecteur

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels munis des bases  $B = (e_1, \dots, e_n)$  et  $C = (v_1, \dots, v_p)$ . Pour  $x \in E$  et  $y \in F$ , par convention on note  $X$  et  $Y$  les deux colonnes de  $x$  et  $y$  dans les bases  $B$  et  $C$ .

**Théorème 3.42.** *Pour  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , la matrice de  $u$  dans les bases  $B$  et  $C$  est l'unique matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$  vérifiant  $\forall x \in E, \forall y \in F, y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX$ .*

**Exemple 3.43.** *Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel muni d'une base  $B = (e_1, e_2, e_3)$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans  $B$  est*

$$\text{Mat}_B u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

*Soit  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in E$ . On peut calculer le vecteur  $u(x)$  par produit matriciel.*

$$\text{Mat}_B u(x) = AX = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

*On peut alors étudier le noyau de  $u$  en résolvant l'équation matricielle  $AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})}$ .*

$$AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_3 = -x_1. \end{cases}$$

*Ainsi  $\ker u = \{x_1(e_1 + e_2 - e_3) \mid x_1 \in \mathbf{K}\} = \text{vect}(e_1 + e_2 - e_3)$ .*

*On peut aussi facilement déterminer l'image de  $u$ .*

*En effet, par le théorème du rang, on a  $\text{Rg } u = \dim E - \dim \ker u = 2$ . On peut donc déterminer une base de  $\text{Im } u$  en considérant deux vecteurs libres de l'image de  $u$ . Or les colonnes de  $A$  sont formées par les composantes des vecteurs  $u(e_1)$ ,  $u(e_2)$  et  $u(e_3)$ , qui sont des éléments de l'image et puisque  $u(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$  et  $u(e_2) = e_1 - e_2$  sont libres alors  $\text{Im}(u) = \text{vect}(u(e_1), u(e_2))$ .*



### 3.2.6 Isomorphisme de représentation matricielle

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels munis de bases  $B = (e_1, \dots, e_n)$  et  $C = (v_1, \dots, v_p)$ .

**Théorème 3.44.** *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{B,C} : \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \\ u &\mapsto \text{Mat}_{B,C}u \end{aligned}$$

*est un isomorphisme de  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels.*

**Corollaire 3.45.** *Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies alors l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim F \times \dim E$ . En particulier,  $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$  et  $\dim E^* = \dim \mathbf{K} \times \dim E = \dim E$ .*

**Remarque 3.46.** *Par l'isomorphisme de représentation matricielle, introduire une application linéaire  $u$  de  $E$  vers  $F$  équivaut à introduire sa représentation matricielle relative à des bases données de  $E$  et  $F$ . C'est très souvent ainsi que sont introduit des applications linéaires en dimension finie.*

### 3.2.7 Composition d'une application linéaire

Soient  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels munis des bases  $B = (e_1, \dots, e_p)$ ,  $C = (v_1, \dots, v_n)$  et  $D = (w_1, \dots, w_m)$ .

**Théorème 3.47.** *Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ , on a :  $\text{Mat}_{B,D}(v \circ u) = \text{Mat}_{C,D}v \times \text{Mat}_{B,C}u$ .*

### 3.2.8 Isomorphisme et matrice inversible

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels munis des bases  $B = (e_1, \dots, e_p)$  et  $C = (v_1, \dots, v_n)$ .

**Théorème 3.48.** *Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $A = \text{Mat}_{B,C}u$  on a équivalence entre*

- (1)  *$u$  est un isomorphisme ;*
- (2)  *$A$  est inversible.*

*De plus,  $\text{Mat}_{C,B}(u^{-1}) = A^{-1}$ .*

## 3.3 Formule de changement de base

### 3.3.1 Matrice de passage

Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  muni de deux bases  $B = (e_1, \dots, e_n)$  et  $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ .

**Définition 3.49.** *On appelle matrice de passage de la base  $B$  à la base  $B'$  la matrice  $P = \text{Mat}_B(B') = \text{Mat}_B(e'_1, \dots, e'_n)$ .*

**Exemple 3.50.** soit le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{R}^3$  muni de la base canonique  $B = (e_1, e_2, e_3)$  et de la base  $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ , où  $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$ ,  $e'_2 = e_2 - e_3$  et  $e'_3 = -2e_1 + 2e_2 - e_3$ . La matrice de passage de la Base  $B$  à la base  $B'$  est

$$\text{Mat}_B B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 3.51.** Si  $P$  est la matrice de passage de la base  $B$  à la base  $B'$  alors  $P = \text{Mat}_B(\text{Id}_E(B'))$ .

**Attention :** Ici la matrice de l'endomorphisme  $\text{Id}_E$  n'est pas l'identité car la représentation matricielle de l'identité est formée en choisissant une base à l'arrivée qui n'est a priori la même au départ.

**Proposition 3.52.** Si  $P$  est la matrice de passage de la base  $B$  à la base  $B'$  alors  $P$  est inversible et  $P^{-1}$  est la matrice de passage  $B'$  à la base  $B$ .

**Exemple 3.53.** Reprenons les notations de l'exemple précédent.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_2 - e_3 \\ e'_3 = -2e_1 + 2e_2 - e_3 \end{cases} \quad \text{et } P = \text{Mat}_B B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour former la matrice de passage inverse  $P^{-1}$ , il suffit d'exprimer les vecteurs de la base  $B$  en fonction de ceux de la base  $B'$ . A l'aide du système précédent on obtient :

$$\begin{cases} e_1 = e'_1 + e'_2 \\ e_2 = 2e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ e_3 = 2e'_1 + e'_3 \end{cases} \quad \text{et donc } P^{-1} = \text{Mat}_{B'} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3.3.2 Nouvelle composante de vecteur

**Théorème 3.54.** Soient  $B$  et  $B'$  deux bases d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  si  $x$  est un vecteur de  $E$  dont on note  $X$  et  $X'$  les colonnes des composantes dans  $B$  et  $B'$  de  $x$  alors on a  $X = \text{Mat}_B B' X'$ .

**Remarque 3.55.** On retient la formule suivante  $\text{Mat}_B x = \text{Mat}_B B' \times \text{Mat}_{B'} x$ .

**Corollaire 3.56.**  $X' = \text{Mat}_{B'} B X$ .

### 3.3.3 Nouvelle représentation d'une application linéaire

**Théorème 3.57.** Soient  $B$  et  $B'$  deux bases d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $C$  et  $C'$  deux bases d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $F$ . Si  $f$  est une application linéaire de  $E$  vers  $F$  dont on note  $A = \text{Mat}_C(f(B))$  et  $A' = \text{Mat}_{C'}(f(B'))$  alors on a  $A' = Q^{-1}AP$ , où  $P$  est la matrice de passage de la base  $B$  à la base  $B'$  et  $Q$  est la matrice de passage de la base  $C$  à la base  $C'$ .

**Remarque 3.58.** On peut retrouver la formule du théorème 3.57 à l'aide du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (E, B) & \xrightarrow{f} & (F, C) \\ \downarrow \text{Id}_E & & \downarrow \text{Id}_F \\ (E, B') & \xrightarrow{f} & (F, C') \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} \text{Id}_F \circ f &= f \circ \text{Id}_E \Leftrightarrow \text{Mat}_{C'} \text{Id}_F(C)A = A' \text{Mat}_{B'} \text{Id}_E(B) \\ &\Leftrightarrow A' = \text{Mat}_{C'} \text{Id}_f(C)A \text{Mat}_B \text{Id}_E(B') \\ &\Leftrightarrow A' = Q^{-1}AP. \end{aligned}$$

## 3.4 Rang d'une matrice

### 3.4.1 Définition

**Rappel :** Si  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  est une famille de vecteurs d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$  alors on appelle rang de la famille  $\mathcal{F}$  la dimension de l'espace engendré par  $\mathcal{F}$ .  $\text{Rg } \mathcal{F} = \dim \text{vect}(x_1, \dots, x_n)$ .

Si  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  alors on appelle rang de l'application linéaire  $u$  la dimension de  $\text{Im } u$ . C'est à dire :  $\text{Rg } u = \dim \text{Im } u$ .

Ces deux concepts sont liés puisque si  $B = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  alors  $\text{Rg } u = \text{Rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ .

**Définition 3.59.** Soit  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  de colonnes  $C_1, \dots, C_p$ . On appelle rang de  $A$  le rang de la famille  $(C_1, \dots, C_p)$ . On note  $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(C_1, \dots, C_p)$ .

**Théorème 3.60.** Si  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$  une famille de vecteurs d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$  et si  $A$  est la matrice de la famille  $\mathcal{F}$  dans une certaine base  $B$  de  $E$  alors  $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(x_1, \dots, x_p)$ .

**Théorème 3.61.** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{K}$ -espaces vectoriels. Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $A$  est la matrice de  $u$  relative à des bases  $B$  de  $E$  et  $C$  de  $F$  alors  $\text{Rg}(u) = \text{Rg}(A)$ .

### 3.4.2 Propriétés du rang d'une matrice

**Proposition 3.62.** Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ ,  $\text{Rg}(A) \leq \min(n, p)$ .

**Proposition 3.63.** pour tous  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ , on a  $\text{Rg}(AB) \leq \min(\text{Rg}(A), \text{Rg}(B))$ . De plus

- (a) Si  $A$  est une matrice carrée inversible alors  $\text{Rg}(AB) = \text{Rg}(B)$  ;
- (b) Si  $B$  est une matrice carrée inversible alors  $\text{Rg}(AB) = \text{Rg}(A)$ .

**Remarque 3.64.** On ne modifie pas le rang d'une matrice en multipliant celle-ci par une matrice inversible.

**Théorème 3.65.** *Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . On a équivalence entre :*

- (i)  $A$  est inversible ;*
- (ii)  $\text{Rg}(A) = n$ .*

**Remarque 3.66.** *Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ , on a  $\text{Rg}(A) = \text{Rg}({}^t A)$ .*

### 3.5 Série d'exercices

**Exercice 0 :** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer  $A^t A$  ou  ${}^t A A$ .
- (b) En déduire que  $A$  est inversible et donner l'expression de  $A^{-1}$ .

**Exercice 1 :** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose  $B = A - I_3$ .

Calculer  $B^n$  pour  $n \in \mathbf{N}$  et en déduire l'expression de  $A^n$ .

**Exercice 2 :** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer  $A^2 - 3A + 2I$ . En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse.
- (b) Pour  $n \geq 2$ , déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$ .
- (c) En déduire l'expression de la matrice  $A^n$ .

**Exercice 3 :** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ . Observer que  $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0$ .

A quelle condition  $A$  est-elle inversible ? Déterminer alors  $A^{-1}$ .

**Exercice 4 :** Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes :

(a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

(b)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

(c)  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

**Exercice 5 :** Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires  $f$  suivantes :

(a)

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y, y - 2x + z). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (y + z, z + x, x + y). \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}_3[X] &\rightarrow \mathbf{R}_3[X] \\ P &\mapsto P(X + 1). \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}_3[X] &\rightarrow \mathbf{R}^4 \\ P &\mapsto (P(1), P(2), P(3), P(4)). \end{aligned}$$

**Exercice 6 :** On considère les sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbb{R}^3$  suivants :

$P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$  et  $D = \text{Vect}(w)$  où  $w = (1, 0, -1)$ .

On note  $\mathcal{B} = (i, j, k)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^3$ .

On note  $p$  la projection vectorielle sur  $P$  parallèlement à  $D$ ,  $q$  celle sur  $D$  parallèlement à  $P$ , et enfin,  $s$  la symétrie vectorielle par rapport à  $P$  et parallèlement à  $D$ .

(a) Former la matrice de  $p$  dans  $\mathcal{B}$ .

(b) En déduire les matrices, dans  $\mathcal{B}$ , de  $q$  et de  $s$ .

**Exercice 7 :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 \neq 0$  et  $f^3 = 0$ .

Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 8 :** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbf{N}^*$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .

(a) Justifier qu'il existe  $x \in E$  tel que  $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$  forme une base de  $E$ .

(b) Déterminer les matrices de  $f, f^2, \dots, f^{n-1}$  dans cette base.

(c) En déduire que

$$\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\} = \text{vect}(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1}).$$

**Exercice 9 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est  $A$ .

On pose  $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\varepsilon_2 = (1, -1, 0)$ ,  $\varepsilon_3 = (1, 0, 1)$  et  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ .

- (a) Montrer que  $\mathcal{B}'$  constitue une base de  $\mathbf{R}^3$ .
- (b) Ecrire la matrice de  $f$  dans cette base.
- (c) Déterminer une base de  $\ker f$  et de  $\operatorname{Im} f$ .

**Exercice 10 :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $\mathcal{B} = (i, j, k)$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer  $A^2$ . Qu'en déduire sur  $f$ ?
- (b) Déterminer une base de  $\operatorname{Im} f$  et  $\ker f$ .
- (c) Quelle est la matrice de  $f$  relativement à une base adaptée à la supplémentarité de  $\operatorname{Im} f$  et  $\ker f$ ?

**Exercice 11 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^3$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbf{R}^3$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est  $A$ .

- (a) Déterminer  $\ker f$  et  $\operatorname{Im} f$ . Démontrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans  $\mathbf{R}^3$ .
- (b) Déterminer une base adaptée à cette supplémentarité et écrire la matrice de  $f$  dans cette base.
- (c) Décrire  $f$  comme composée de transformations vectorielles élémentaires.

**Exercice 12** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$  représenté dans la base canonique  $\mathcal{B}$  par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Soit  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  avec  $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\varepsilon_2 = (-1, 1, 0)$ ,  $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$ . Montrer que  $\mathcal{C}$  est une base.

- (b) Déterminer la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{C}$ .  
 (c) Calculer la matrice de  $f^n$  dans  $\mathcal{B}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 13 :** Soit  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  la famille définie par

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= e_1 + e_2 - e_3; \\ \varepsilon_2 &= e_1 - e_3; \\ \varepsilon_3 &= e_1 - e_2. \end{aligned}$$

- (a) Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $E$  et former la matrice  $D$  de  $f$  dans  $\mathcal{B}'$ .  
 (b) Exprimer la matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  et calculer  $P^{-1}$ .  
 (c) Quelle relation lie les matrices  $A, D, P$  et  $P^{-1}$ ?  
 (d) Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 14 :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ . Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  de  $E$  dans laquelle la matrice représentative de  $f$  est une matrice diagonale  $D$  de coefficients diagonaux : 1, 2 et 3.  
 (b) Déterminer la matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ . Calculer  $P^{-1}$ .  
 (c) Quelle relation lie les matrices  $A, D, P$  et  $P^{-1}$ ?  
 (d) Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 15 :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ .

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A$ .



- (a) Montrer qu'il existe une base  $\mathbf{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  de  $E$  telle que la matrice de  $f$  dans  $\mathbf{C}$  soit  $D$ .
- (b) Déterminer la matrice  $P$  de  $\mathbf{GL}(3)(\mathbf{R})$  telle que  $A = PDP^{-1}$ . Calculer  $P^{-1}$ .
- (c) Calculer pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $A^n$ .
- (d) En déduire le terme général des suites  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 0, \\ z_0 = 0, \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n), \\ y_{n+1} = x_n - z_n, \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n. \end{cases}$$

**Exercice 16 :** Calculer le rang de familles de vecteurs suivantes de  $\mathbb{R}^3$  :

- (a)  $(x_1, x_2, x_3)$  avec  $x_1 = (1, 1, 0)$ ,  $x_2 = (1, 0, 1)$  et  $x_3 = (0, 1, 1)$ .
- (b)  $(x_1, x_2, x_3)$  avec  $x_1 = (2, 1, 1)$ ,  $x_2 = (1, 2, 1)$  et  $x_3 = (1, 1, 2)$ .
- (c)  $(x_1, x_2, x_3)$  avec  $x_1 = (1, 2, 1)$ ,  $x_2 = (1, 0, 3)$  et  $x_3 = (1, 1, 2)$ .

**Exercice 17 :** Calculer le rang des applications linéaires suivantes :

- (a)  $f : \mathbf{K}^3 \rightarrow \mathbf{K}^3$ , définie par  $f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$ .
- (b)  $f : \mathbf{K}^3 \rightarrow \mathbf{K}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$ .
- (c)  $f : \mathbf{K}^4 \rightarrow \mathbf{K}^4$  définie par  $f(x, y, z, t) = (x + y - t, x + z + 2t, 2x + y - z + t, -x + 2y + z)$ .

**Exercice 18 :** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ . Soit  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on considère les vecteurs  $v_1 = -e_1 - e_2 + e_3$ ,  $v_2 = e_1 - \lambda e_2 - e_3$  et  $v_3 = e_1 - e_2 - \lambda e_3$ .

- (a) Soit  $f_\lambda$  l'application linéaire de  $E$  dans  $E$ , définie par

$$f_\lambda(e_1) = v_1, \quad f_\lambda(e_2) = v_2, \quad f_\lambda(e_3) = v_3.$$

Déterminer la matrice  $A_\lambda$  de  $f_\lambda$  dans la base  $B$ .

- (b) Déterminer suivant les valeurs de  $\lambda$  le rang de  $f_\lambda$ .
- (c) Calculer, suivant les valeurs de  $\lambda$ , le noyau de  $f_\lambda$ .
- (d) Montrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

- (e) Montrer que  $A_0 = PBP^{-1}$ , où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En déduire que  $f_0^3 = f_0$ .



# Chapitre 4

## Systèmes Linéaires, Méthode du Pivot de Gauss

4.1 Transformations des matrices

4.2 Réduction des matrices ; Méthode du Pivot Gauss

4.3 Recherche de l'inverse d'une matrice carrée

4.4 Systèmes linéaires

## 4.5 Exercices

**Exercice 1 :** Transformer les matrices suivantes en matrices échelonnées réduites :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & m \\ -m & 1 & m \\ 1 & -m & -1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2 :** Calculer lorsque c'est possible l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3 :** Résoudre dans  $\mathbf{R}$  les systèmes par la méthode du pivot de Gauss.

$$(S_1) : \begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ -3x + 5y = 1, \\ 7x - 11y = -1, \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} x - y + 3z = 6, \\ 3x - 2y + 7z = 14, \\ x + 3y - 3z = -4. \end{cases}$$

**Exercice 4 :** Pour  $\lambda \in \mathbf{R}$ , résoudre le système  $(S_\lambda) : \begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ -x + 6y + 2z = 5, \\ 7x + 3y + z = \lambda. \end{cases}$

**Exercice 5 :** Résoudre en fonction du paramètre  $m \in \mathbf{C}$ , les systèmes suivants d'inconnues complexes :

$$(a) \begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1. \end{cases}$$

**Exercice 6 :** Soit  $a, b \in \mathbf{C}$ . Résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

# Chapitre 5

## Réduction des Matrices Carrées

### 5.1 Valeurs propres, Vecteurs propres

**Définition 5.1.** Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel,  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ . S'il existe  $x$  un vecteur non nul de  $E$  tel que  $f(x) = \lambda x$ , on dit que :

- (1)  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$ .
- (2)  $x$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Dans ce cas :

$$E_\lambda = \ker(f - \lambda \text{id}) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$$

est appelé le sous-espace propre associé à  $\lambda$ .

**Remarque 5.2.**  $\lambda$  est une valeur propre de  $f \Leftrightarrow \ker(f - \lambda \text{id}_E) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow \dim E \neq 0$ .

**Exemple 5.3.** (1) Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto 2x$ . On a 2 est une valeur propre de  $f$ .

- (2) Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto (x, 2y)$ . On a  $f(1, 0) = 1(1, 0)$  et  $f(0, 1) = 2(0, 1)$ . Donc 1 et 2 sont deux valeurs propres de  $f$  et  $(1, 0)$  (resp.  $(0, 1)$ ) est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 (resp. 2).

**Remarque 5.4.** Soient  $\lambda_1, \lambda_2$  deux valeurs propres différentes de  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$ .

**Proposition 5.5.** Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Si  $x_1, \dots, x_p$  sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres deux à deux distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  alors la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre.

**Corollaire 5.6.** Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

- (1) Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont des valeurs propres de  $f$  distinctes deux à deux et  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$  sont les sous-espaces propres associés, alors la somme  $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p}$  est directe et  $\sum_{i=1}^p \dim E_{\lambda_i} \leq n$ .
- (2)  $f$  admet au plus  $n$  valeurs propres.

## 5.2 Diagonalisation d'un endomorphisme

Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de base  $B = (e_1, \dots, e_n)$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Notons  $A = \text{Mat}_B(f(B))$ . Si  $A$  est diagonale avec  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  alors  $f(e_i) = \lambda_i e_i, \forall 1 \leq i \leq n$ . Donc les valeurs propres de  $f$  sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et  $e_1, \dots, e_n$  sont des vecteurs propres de  $f$  associés respectivement à  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Réciproquement :

Si  $\forall 1 \leq i \leq n, e_i$  est un vecteur propre de  $f$  associée à la valeur propre  $\lambda_i$ , alors

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Définition 5.7.** Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On dit que  $f$  est diagonalisable s'il existe une base  $B$  de  $E$  telle que la matrice de  $f$  dans cette base est diagonale (c'est-à-dire, il existe une base de  $E$  formée par les valeurs propres de  $f$ ).

**Théorème 5.8.** Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ , qui possède  $p$  valeurs propres distinctes. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est diagonalisable.
- (ii)  $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$ .
- (iii) Il existe une base  $B$  de  $E$  telle que  $A' = \text{Mat}_B f(B)$  est diagonale.

**Corollaire 5.9.** Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Si  $f$  possède  $n$  valeurs propres distinctes alors  $f$  est diagonalisable.

## 5.3 Diagonalisation d'une matrice carrée

**Définition 5.10.** Soient  $A$  une matrice carrée de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ . S'il existe  $X \in \mathbf{K}^n$ , (on identifie  $\mathbf{K}^n$  avec  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ ) tel que  $AX = \lambda X$  alors

- (1)  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ .
- (2)  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Dans ce cas :  $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \mid AX = \lambda X\}$  est l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Proposition 5.11.** Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ .
- (ii)  $A - \lambda I_n$  n'est pas inversible.
- (iii)  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ .

**Preuve:**

Nous démontrons que (i) implique (ii). On a  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , donc il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$  un vecteur propre non nul associé à la valeur propre  $\lambda$ . On a  $AX - \lambda X = (A - \lambda I_n)X = 0$ . Si on suppose que  $A - \lambda I_n$  est inversible, on a  $(A - \lambda I_n)^{-1}(A - \lambda I_n)(X) = 0$ . Ceci implique que  $X$  est nul ce qui est absurde.  $\square$

## 5.4 Séries d'exercices

**Exercice 1 :** Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(3x + 4y, 4x - 3y).$$

- (1) Ecrire la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^2$ . On la notera  $A$ .
- (2) Montrer que le vecteur  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  $f$ . Quelle est la valeur propre associée ?
- (3) Montrer que le vecteur  $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  est également vecteur propre de  $f$ . Quelle est la valeur propre associée ?
- (4) Ecrire  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  en fonction de  $v_1$  et  $v_2$ . On déduire son image par  $f$ .
- (5) Montrer que la famille  $(v_1, v_2)$  est une base de  $\mathbf{R}^2$ .
- (6) Quelle la matrice de  $f$  dans la base  $(v_1, v_2)$  ? On la notera  $D$ .
- (7) Ecrire  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $(v_1, v_2)$ . Calculer  $P^{-1}$ .
- (8) Quelle est la relation entre  $P$ ,  $A$ ,  $P^{-1}$  et  $D$ .
- (9) Calculer  $A^n$ , pour  $n \in \mathbf{N}$ . Même exercice avec la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  et les vecteurs  $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,

**Exercice 2 :** Déterminer le polynôme caractéristique des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3** Rechercher les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a^2 & 0 \\ -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}, (a \neq 0).$$

**Exercice 4 :** Trouver une matrice carrée inversible  $P$  telle que  $b = PAP^{-1}$  soit diagonale, et écrire la matrice  $B$  obtenue, pour les matrices  $A$  suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$



**Exercice 5 :** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

qui représente  $f$ , un endomorphisme de  $\mathbf{R}^3$  dans une base canonique.

- (1) (a) Montrer que les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 1$  et  $\lambda_3 = 3$ .  
 (b) En déduire que l'on peut diagonaliser  $A$ .
- (2) (a) Déterminer une base  $B' = (v_1, v_2, v_3)$  de vecteurs propres tel que la matrice de  $f$  dans la base  $B'$  soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

- (b) Préciser la matrice de passage  $P$  de la base canonique  $B$  à la base  $B'$ ; quelle relation lie les matrices  $A, P, P^{-1}$  et  $D$ ?
- (3) Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbf{N}$ , on a  $A^n = PD^nP^{-1}$ .
- (4) Après avoir donné, calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

**Exercice 6 :** Soit la matrice matrice  $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (1) Calculer une base et la dimension de chaque sous-espace propre de  $A$ .
- (2)  $A$  est diagonalisable; justifier cette affirmation et diagonaliser  $A$ .

