Последовательности
Основные определения

Последовательность $\{x_n\}$ называется:	
– ***неубывающей***, если $\forall n\ x_n \le x_{n+1}$;	– ***невозрастающей***, если $\forall n\ x_n \ge x_{n+1}$;
– ***возрастающей***, если $\forall n\ x_n < x_{n+1}$;	– ***убывающей***, если $\forall n\ x_n > x_{n+1}$;
– ***монотонной***, если она является неубывающей, невозрастающей, убывающей или возрастающей.	
– ***ограниченной сверху***, если $\exists c\ \forall n\ x_n \le c$;	– ***неограниченной сверху***, если $\forall c\ \exists\ \ x_n > c$;
– ***ограниченной снизу***, если $\exists c\ \forall n\ x_n \ge c$;	– ***неограниченной снизу***, если $\forall c\ \exists n\ \ x_n < c$;
– ***ограниченной***, если $\exists c\ \forall n\ \|x_n\| \le c$;	– ***неограниченной***, если $\forall c\ \exists n\ \ \|x_n\| > c$;
– ***бесконечно большой* (ББП)**, если $\forall E > 0\ \ \exists n_0\ \ \forall n \ge n_0\ \ \|x_n\| > E$;	– ***не является бесконечно большой***, если $\exists E > 0\ \ \forall n_0\ \ \exists n \ge n_0\ \ \|x_n\| \le E$;
– ***бесконечно малой* (БМП)**, если $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0\ \ \forall n \ge n_0\ \ \|x_n\| < \varepsilon$;	– ***не является бесконечно малой***, если $\exists \varepsilon > 0\ \ \forall n_0\ \ \exists n \ge n_0\ \ \|x_n\| \ge \varepsilon$.
– ***сходящейся*** (или ***сходящейся к*** a), если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$;	
– ***сходящейся к*** ∞, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; – ***сходящейся к*** $+\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; – ***сходящейся к*** $-\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.	
– ***фундаментальной*** (или ***последовательностью Коши***), если $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0\ \ \forall n \ge n_0\ \ \forall m \ge n_0\ \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon$ или $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0\ \ \forall n \ge n_0\ \ \forall k \in \mathbb{N}\ \ \|x_{n+k} - x_n\| < \varepsilon$.	

Примечание: В таблице n, n_0, m, k – натуральные, а остальные величины вещественные.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0\ \ \forall n \ge n_0\ \ \|x_n - a\| < \varepsilon$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \iff \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0\ \ \forall n\ \ n \ge n_0\ \ \|x_n\| > \varepsilon$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0\ \ \forall n\ \ n \ge n_0\ \ x_n > \varepsilon$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0\ \ \forall n\ \ n \ge n_0\ \ x_n < -\varepsilon$.	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne a \iff \exists \varepsilon > 0\ \ \forall n_0\ \ \exists n \ge n_0\ \ \|x_n - a\| \ge \varepsilon$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne \infty \iff \exists \varepsilon > 0\ \ \forall n_0\ \ \exists n\ \ n \ge n_0\ \ \|x_n\| \le \varepsilon$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne +\infty \iff \exists \varepsilon > 0\ \ \forall n_0\ \ \exists n\ \ n \ge n_0\ \ x_n \le \varepsilon$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ne -\infty \iff \exists \varepsilon > 0\ \ \forall n_0\ \ \exists n\ \ n \ge n_0\ \ x_n \ge -\varepsilon$.
$\inf x_n = i \iff$ $\begin{cases} \forall n\ \ x_n \ge i, \\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n\ \ x_n < i + \varepsilon. \end{cases}$ или $\begin{cases} \forall n\ \ x_n \ge i, \\ \forall i' > i\ \ \exists n\ \ x_n < i'. \end{cases}$.	$\sup x_n = s \iff$ $\begin{cases} \forall n\ \ x_n \le s, \\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n\ \ x_n > s - \varepsilon. \end{cases}$ или $\begin{cases} \forall n\ \ x_n \le s, \\ \forall s' < s\ \ \exists n\ \ x_n > s'. \end{cases}$.
$\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k \overset{df}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\ge n} x_k$	$\varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k \overset{df}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\ge n} x_k$

Примечание: В таблице m, n, n_0 – натуральные, а остальные величины вещественные.

Свойства сходящихся последовательностей

1. Основное свойство последовательностей. Конечное число элементов (их добавление или удаление) не влияет на сходимость последовательности, причем значение предела сходящейся последовательности остается неизменным.

2. Сходящаяся последовательность имеет только *один* предел.

3. Необходимое условие сходимости. Сходящаяся последовательность ограничена, или, другими словами, всякая неограниченная последовательность расходится.

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ и $l \neq 0, x_n \neq 0$, то последовательность $\{1/x_n\}$ ограничена.

5. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R}$. Тогда

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$; г) если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}$

6. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда если

– $\forall n\ x_n > c$ (или $x_n \geq c$), то $a \geq c$.

– $\forall n\ x_n < c$ (или $x_n \leq c$), то $a \leq c$.

Замечание. Элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ могут удовлетворять строгому неравенству $x_n > c$ ($x_n < c$), однако при этом предел a может оказаться равным c.

7. Если все элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ находятся на сегменте $[a, b]$, то и ее предел также находится на этом сегменте.

8. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Если, начиная с некоторого номера, элементы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, удовлетворяют неравенству $x_n < y_n$ (или $x_n \leq y_n$), то $a \leq b$.

9. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $a \in \mathbb{R}$. Если, начиная с некоторого номера, элементы последовательности $\{z_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n \leq z_n \leq y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

10. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет конечный предел.

11. Лемма Больцано-Вейерштрасса. Каждая *ограниченная* последовательность действительных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность. Всякая *неограниченная* последовательность имеет *частичный* предел, равный либо $+\infty$, либо $-\infty$.

12. Критерий Коши сходимости последовательности). Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

13. Критерий Коши расходимости последовательности). Для расходимости последовательности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы она не была фундаментальной, т.е.

$\exists \varepsilon > 0\ \ \forall n_0\ \ \exists n \geq n_0\ \ \exists m \geq n_0\ \ |x_n - x_m| \geq \varepsilon$ или $\exists \varepsilon > 0\ \ \forall n_0\ \ \exists n \geq n_0\ \ \exists k\ \ |x_{n+k} - x_n| \geq \varepsilon$.

Супремум и инфимум

Для множества X:

$s=\sup X=\sup\limits_{x\in X} x \Leftrightarrow 1)\,\forall x\in X \quad x\le s$; $2)\,\forall\varepsilon>0\ \exists x'\in X\ \ x'>s-\varepsilon$ или $\forall s'<s\ \exists x'\in X\ \ s'<x'$.

$i=\inf X=\inf\limits_{x\in X} x \Leftrightarrow 1)\,\forall x\in X \quad i\le x$; $2)\,\forall\varepsilon>0\ \exists x'\in X\ \ x'<i+\varepsilon$ или $\forall i'>i\ \exists x'\in X\ \ x'<i'$.

Для последовательности $\{x_n\}$

$s=\sup x_n=\sup\limits_{n} x_n \Leftrightarrow 1)\,\forall n\ \ x_n\le s$; $2)\,\forall\varepsilon>0\ \exists n\ \ x_n>s-\varepsilon$ или $\forall s'<s\ \exists n\ \ s'<x_n$.

$i=\inf x_n=\inf\limits_{n} x_n \Leftrightarrow 1)\,\forall n\ \ i\le x_n$; $2)\,\forall\varepsilon>0\ \exists n\ \ x_n<i+\varepsilon$ или $\forall i'>i\ \exists n\ \ x_n<i'$.

Для функции $f(x)$ на множестве X

$s=\sup\limits_{x\in X} f(x) \Leftrightarrow 1)\,\forall x\in X \quad f(x)\le s$; $2)\,\forall\varepsilon>0\ \exists x'\in X\ \ f(x')>s-\varepsilon$ или $\forall s'<s\ \exists x'\in X\ \ s'<f(x')$.

$i=\inf\limits_{x\in X} f(x) \Leftrightarrow 1)\,\forall x\in X \quad i\le f(x)$; $2)\,\forall\varepsilon>0\ \exists x'\in X\ \ f(x')<i+\varepsilon$ или $\forall i'>i\ \exists x'\in X\ \ f(x')<i'$.

Свойства:

1. $\sup\{-x \mid x\in X\}=-\inf X$, $\quad \inf\{-x \mid x\in X\}=-\sup X$.

2. $\sup\{x+y \mid x\in X, y\in Y\}=\sup X+\sup Y$, $\quad \inf\{x+y \mid x\in X, y\in Y\}=\inf X+\inf Y$.

3. $\sup\{x-y \mid x\in X, y\in Y\}=\sup X-\inf Y$.

4. Если $\lambda\ge 0$, то $\sup\{\lambda x \mid x\in X\}=\lambda\sup X$, $\inf\{\lambda x \mid x\in X\}=\lambda\inf X$.

5. Пусть $X\subset\{x \mid x\ge 0\}$, $Y\subset\{y \mid y\ge 0\}$. Тогда

$$\sup\{xy \mid x\in X, y\in Y\}=\sup X\sup Y, \quad \inf\{xy \mid x\in X, y\in Y\}=\inf X\inf Y.$$

Наиболее важные пределы

<table>
<tr><td colspan="4">Последовательности</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^n}=0,\ a>1,$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0,$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0,\ a>1, k\in N,$</td><td>$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0,$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$</td><td>$\lim\limits_{n\to\infty} na^n=0,\ |a|<1,$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0,\ a>1,$
Если $x_n\ge -1$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $k\in\mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{1+x_n}=1$.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Функции</td></tr>
<tr><td colspan="2">Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$</td><td colspan="2">Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$,
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1$,</td><td>$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=1$,
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$</td><td>$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$,
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$,
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$</td><td>$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$</td></tr>
</table>

Свойства нижних и верхних пределов

1. Для любых последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$:

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} x_k + \underline{\lim_{k\to\infty}} y_k \le \underline{\lim_{k\to\infty}}(x_k + y_k) \le \overline{\lim_{k\to\infty}}(x_k + y_k) \le \overline{\lim_{k\to\infty}} x_k + \overline{\lim_{k\to\infty}} y_k .$$

2. Для любых последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ с неотрицательными членами:

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} x_k \cdot \underline{\lim_{k\to\infty}} y_k \le \underline{\lim_{k\to\infty}}(x_k \cdot y_k) \le \overline{\lim_{k\to\infty}}(x_k \cdot y_k) \le \overline{\lim_{k\to\infty}} x_k \cdot \overline{\lim_{k\to\infty}} y_k .$$

3. Если $\forall n\ x_n > 0$, то $\underline{\lim_{k\to\infty}} \dfrac{x_{k+1}}{x_k} \le \underline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{x_k} \le \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{x_k} \le \overline{\lim_{k\to\infty}} \dfrac{x_{k+1}}{x_k}$..

4. Для произвольной последовательности $\{x_k\}$

$$\inf x_k \le \underline{\lim_{k\to\infty}} x_k \le \overline{\lim_{k\to\infty}} x_k \le \sup x_k .$$

5. Для произвольной последовательности $\{x_k\}$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} x_k = \inf L, \qquad \overline{\lim_{k\to\infty}} x_k = \sup L,$$

где $L \subset \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$ – множество всех частичных пределов последовательности.

Свойства левых и правых пределов

Пусть $A \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$, $B \in \{+\infty, -\infty\}$, $C = \{+\infty, -\infty, \infty\}$, тогда

1. $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = -\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

4. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

5. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \in C$ и $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) \in C$.

4. Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in C$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \in C$.

▸ Все эти свойства сразу следуют из определений соответствующих пределов.◂

Теорема о пределе композиции функций. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{y\to a} g(y) = b \in \mathbb{R}$, причем $f(x) \ne a$ при $x \ne x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = b = \lim\limits_{y\to a} g(y)$. Таким образом, если функция $g(y)$ определена в точке $y = a$, то $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to a} g(y) = g\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$.

Теорема Коши о существовании предела функции в точке. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка множества A и $f : A \to \mathbb{R}$. Предел функции f в точке x_0 существует тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in \overset{0}{B}(x_0, \delta) \bigcap A \quad |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Связь между односторонними пределами и точными гранями для монотонных функций. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ возрастает (убывает) на ограниченном множестве X таком, что $\alpha = \inf X$, $\beta = \sup X$, причем $\alpha \notin X$, $\beta \notin X$, тогда

$\lim\limits_{x\to\alpha+} f(x) = \inf\limits_{x\in X} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to\beta-} f(x) = \sup\limits_{x\in X} f(x)$ ($\lim\limits_{x\to\alpha+} f(x) = \sup\limits_{x\in X} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to\beta-} f(x) = \inf\limits_{x\in X} f(x)$).

Предел показательно-степенной функции

$$\lim_{x\to S}\left[u(x)\right]^{v(x)}=\exp\left\{\lim_{x\to S}\left[v(x)\cdot\ln u(x)\right]\right\}.$$

$\lim\limits_{x\to S}u(x)$	$\lim\limits_{x\to S}v(x)$	$\lim\limits_{x\to S}\left[u(x)\right]^{v(x)}$
$b>0$	c	b^c
0	$c>0$ (или $+\infty$)	0
	$c<0$ (или $-\infty$)	$+\infty$
	0	неопределенность 0^0
$0<b<1$	$+\infty$	0
	$-\infty$	$+\infty$
1	c	1
	$+\infty$, $-\infty$, ∞	неопределенность 1^∞
$b>1$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	0
$+\infty$	$c>0$ (или $+\infty$)	$+\infty$
	$c<0$ (или $-\infty$)	0
	0	неопределенность ∞^0

Примечание: $b, c\in\mathbb{R}$, для всех рассматриваемых значений $u(x)>0$.

Неопределенные выражения

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0$$

.

Основные асимптотические разложения

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n=$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o\left(x^n\right)$$