# Элементы теории рядов

2014

# Содержание

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Учебное пособие написано на основе курса лекций по математическому анализу, читаемых автором на факультете прикладной математики и информатики НГТУ. Основой для изложения теоретического материала послужили следующие издания: «Основы математического анализа» В.А. Ильина и Э.Г. Позняка, «Курс математического анализа» Л.Д. Кудрявцева и «Задачи и упражнения по математическому анализу» И.А. Виноградовой.

Пособие охватывает основные разделы теории числовых и функциональных рядов. Оно содержит все необходимые для изучения курса определения и теоремы и может быть использовано как для самостоятельного изучения курса, так и в качестве расширенного конспекта лекций.

Весь теоретический материал проиллюстрирован примерами, раскрывающими его суть и облегчающими восприятие курса в целом. Изложение математического анализа ведётся на уровне, доступном широкому кругу студентов. Материал, помеченный знаком «*», является в некотором роде дополнительным и предназначен для более глубокого изучения. Как правило, это разделы математического анализа, не обязательные для базового курса. При первом (ознакомительном) прочтении глав пособия указанные разделы рекомендуется пропускать и возвращаться к ним только после разбора основной части материала по данной теме.

Автор выражает глубокую благодарность студентам факультета ФПМИ А.Н. Игнатьеву и Д.В. Шилаку за активную помощь в создании данного учебного пособия.

# Глава 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

## 1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть задана некоторая числовая последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$$

Формально образованное из элементов этой последовательности выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (1.1)$$

называют ***числовым рядом***, а входящие в него слагаемые – ***членами числового ряда***.

Сумму первых $n$ членов данного ряда называют ***частичной суммой ряда*** и обозначают $S_n$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k ,$$

а ряд $r_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называют ***$n$-м остатком ряда*** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Ряд (1.1) называется ***сходящимся***, если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда имеет конечный предел $S$, при этом $S$ называют ***суммой*** данного ***ряда***. Таким образом, для сходящегося ряда формально можно записать

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k ,$$

где $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда расходится, то ряд называется ***расходящимся***.

Замечание 1. Понятие «сумма ряда» определено только для сходящегося ряда и в отличие от понятия «частичная сумма ряда» вводится посредством предельного перехода.

Замечание 2. Если ряд (1.1) имеет сумму $S$, то верно равенство $S = S_n + r_n$, из которого следует, что остаток *сходящегося* ряда $r_n$ равен погрешности замены суммы ряда $S$ частичной суммой $S_n$.

Изучение числовых рядов есть новая форма изучения числовых последовательностей, так как:

1) каждому ряду однозначно соответствует последовательность его частичных сумм;

2) каждой данной последовательности $\{S_n\}$ однозначно соответствует ряд, для которого эта последовательность является последовательностью частичных сумм:

$$a_1 = S_1; \quad \forall k > 1 \;\; a_k = S_k - S_{k-1}.$$

Следующие примеры показывают взаимосвязь понятий ряда и последовательности, суммы ряда и предела последовательности.

Пример 1.1. Исследуем сходимость ***геометрического ряда***

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}.$$

▸ 1. При $q = 1$ очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

2. При $q = -1$ $S_{2m-1} = 1$, $S_{2m} = 0$ $\forall m$, поэтому последовательность $S_n$ не имеет предела при $n \to \infty$.

3. При $|q| \neq 1$ частичная сумма $S_n$ этого ряда вычисляется по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Следовательно, при $|q| < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$, а при $|q| > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ при $|q| < 1$ сходится к числу $\dfrac{1}{1-q}$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \dfrac{1}{1-q}$, а при $|q| \geq 1$ – расходится. ◂

Пример 1.2. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$.

▸ Вычислим частичную сумму этого ряда:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] + \ldots = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$, данный ряд сходится к 1. ◂

В приведенных примерах последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм соответствующего ряда выражалась достаточно просто, так что существование и величина предела $S_n$ устанавливались непосредственно. Обычно такой анализ последовательности $\{S_n\}$ невозможен, поэтому ***основными задачами в теории числовых рядов*** являются установление сходимости или расходимости данного ряда без вычисления его частичных сумм и оценка зависимости величины остатка $r_n$ от номера $n$ (***скорость сходимости ряда***).

### Критерий Коши сходимости ряда

Так как вопрос о сходимости ряда по определению эквивалентен вопросу о сходимости последовательности его частичных сумм, можно получить необходимое и достаточное условие сходимости данного ряда, сформулировав критерий сходимости Коши для последовательности его частичных сумм.

**Теорема 1.1 (критерий Коши).** Для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \forall p \;\; \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon .$$

▸ Для доказательства достаточно заметить, что

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = S_{n+p} - S_n . \blacktriangleleft$$

Замечание. Критерий сходимости Коши представляет в основном теоретический интерес и редко используется для доказательства сходимости конкретных рядов из-за технических трудностей.

Пример 1.3. Пользуясь критерием Коши, докажем расходимость ***гармонического ряда*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$. Ряд расходится, так как

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \;\; \forall n_0 \;\; \exists n = n_0 \;\; \exists p = n \;\; \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right| \geq \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2} .$$

**Теорема 1.2.** Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то последовательность остатков ряда $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ является бесконечно малой.

▸ Пусть $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left(S - S_n\right) = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0. \text{◂}$$

**Теорема 1.3 (необходимое условие сходимости ряда).** Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ необходимо, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0. \qquad (1.2)$$

▸ Пусть $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$. Так как $\forall k > 1\ \ a_k = S_k - S_{k-1}$, то

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\left(S_k - S_{k-1}\right) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S - S = 0. \text{◂}$$

Замечание. Гармонический ряд – это пример расходящегося ряда, для которого выполнено условие (1.2), следовательно, это условие не является достаточным для сходимости ряда.

Пример 1.4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k$ расходится, так как предел $a_k = \sin k$ при $k \to \infty$ не существует, т.е. нарушено необходимое условие сходимости. Доказанная ранее расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$, $|q| \ge 1$, также может быть обоснована невыполнением необходимого условия сходимости.

### Основные свойства сходящихся рядов

**1.** Отбрасывание или добавление конечного числа членов не влияет на сходимость ряда.

**2.** Если $c \ne 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(ca_k\right)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, причем в случае сходимости $\sum_{k=1}^{\infty}\left(ca_k\right) = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

**3.** Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся, то сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \pm b_k\right)$, причем $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \pm b_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Если один из рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, а второй расходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \pm b_k\right)$ расходится. Если оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходятся, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \pm b_k\right)$ может как сходиться, так и расходиться.

▸ Доказательства этих свойств основаны на использовании соответствующих свойств числовых последовательностей. ◂

Замечание. Согласно свойству 1 всюду в формулировках условий сходимости или расходимости ряда можно требование «для всех членов ряда» заменить требованием «для всех членов ряда, начиная с некоторого номера». В дальнейшем такая замена будет подразумеваться без специальной оговорки.

Пример 1.5. Ряд знакопостоянный $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+5^k}{20^k}$ сходится, так как каждый из рядов $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{20}\right)^k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k$ сходится (см. пример 1.1).

Пример 1.6. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{20^k+5^k k}{20^k k}$ расходится, так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится (см. пример 1.3).

Пример 1.7. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ сходится (см. пример 1.2), хотя

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

и оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}=\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходятся.

## 1.2. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Рассмотрим ***знакопостоянные*** ряды, т.е. ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ такие, что $\forall k \;\; a_k \geq 0$ или $a_k \leq 0$. С учетом свойства 2 сходящихся рядов можно ограничиться рассмотрением только рядов с неотрицательными членами. Те случаи, когда неравенство $a_k \geq 0$ необходимо заменить неравенством $a_k > 0$, будем оговаривать особо.

**Теорема 1.4 (основное свойство рядов с неотрицательными членами).** Для того чтобы ряд с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.

▸ Очевидно, что последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами является неубывающей, а для неубывающей последовательности ее сходимость и ограниченность эквивалентны. ◂

**Теорема 1.5.** Если знакопостоянный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а последовательность $\{d_k\}$ ограничена, т.е. $\forall n \;\; |d_n| \leq L$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k d_k$ также сходится.

▸ Для доказательства используем критерий Коши. Пусть последовательность $\{d_k\}$ ограничена числом $L$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ получим, что

$$\exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \forall p \;\; \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{L},$$

следовательно,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k d_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k |d_k| \leq L \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = L \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon. \text{ ◂}$$

### 1.2.1. Признаки сравнения

**Теорема 1.6 (первый признак сравнения).** Пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ таковы, что $\forall k \;\; 0 \le a_k \le b_k$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, а из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

▸ Пусть $A_n$ и $B_n$ – соответствующие $n$-е частичные суммы рядов, тогда $A_n \le B_n$. Следовательно, ограниченность $\{B_n\}$ влечет ограниченность $\{A_n\}$, а неограниченность $\{A_n\}$ влечет неограниченность $\{B_n\}$. Отсюда с учетом теоремы 1.4 получаем требуемое утверждение. ◂

**Следствие.** Теорема остается справедливой, если неравенство $0 \le a_k \le b_k$ заменить неравенством $0 \le a_k \le cb_k$, $c \in \mathbb{R}^+$, так как ряды $\sum_{k=1}^{\infty} cb_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и расходятся одновременно.

**Теорема 1.7 (второй признак сравнения).** Пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ таковы, что $\forall k \;\; a_k > 0, b_k > 0$ и существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = c$, $0 \le c \le +\infty$. Тогда если:

1) $0 \le c < +\infty$, то из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$;

2) $0 < c \le +\infty$, то из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$;

3) $0 < c < +\infty$, то оба ряда сходятся и расходятся одновременно.

▸ 1. Пусть $0 \le c < +\infty$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Положим $d_k = \frac{a_k}{b_k}$. Очевидно, что $\forall k \;\; d_k > 0$. По условию последовательность $\{d_k\}$ имеет конечный предел $c$, а значит, ограничена. В силу теоремы 1.5 из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k d_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. Пусть $0 < c \le +\infty$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится. Предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Тогда, введя в рассмотрение последовательность $d_k = \frac{b_k}{a_k}$ ($\forall k \;\; d_k > 0$) и повторив рассуждения из предыдущего пункта, получим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k d_k$ сходится, что противоречит условию. Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

3. Утверждение является следствием первых двух. ◂

Замечание. Согласно второму признаку сравнения, если $a_k \sim b_k$ при $k \to \infty$, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и расходятся одновременно.

**Теорема 1.8 (третий признак сравнения).** Пусть $\forall k$ $a_k > 0,\; b_k > 0$ и $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le \frac{b_{k+1}}{b_k}$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, а из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

▸ Положим $d_k = \frac{a_k}{b_k}$. Тогда из условия теоремы

$$\forall k \;\; 0 < d_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \le \frac{a_k}{b_k} = d_k .$$

Следовательно, последовательность $\{d_k\}$ – невозрастающая, ограниченная, поэтому в силу теоремы 1.5 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k d_k$ сходится.

Утверждения «из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$» и «из расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$» эквивалентны, поэтому можно считать, что теорема доказана полностью. ◀

### 1.2.2. Интегральный признак Коши – Маклорена

**Теорема 1.9 (интегральный признак Коши – Маклорена).** Пусть $f(x) \geq 0$ и *не возрастает* всюду на полупрямой $x \geq m$. Тогда для сходимости числового ряда $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f(k)$ необходимо и достаточно существование конечного предела при $n \to \infty$ последовательности

$$a_n = \int\limits_m^n f(x)\,dx \tag{1.3}$$

или, что то же самое, сходится несобственный интеграл $\int\limits_m^{+\infty} f(x)\,dx$.

▶ Пусть $k \geq m+1$, $x \in [k-1, k]$. Тогда

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1). \tag{1.4}$$

Так как функция $f(x)$ на сегменте $[k-1, k]$ ограничена и не возрастает, то она интегрируема на $[k-1, k]$. Учитывая свойства интегралов, из (1.4) получим

$$f(k) = \int\limits_{k-1}^{k} f(k)\,dx \leq \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq \int\limits_{k-1}^{k} f(k-1)\,dx = f(k-1).$$

Сложив эти неравенства для $k = m+1, m+2, \ldots, n$, получим

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leq \int\limits_m^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k). \tag{1.5}$$

Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=m}^{n} f(k)$. Тогда учитывая (1.3), можно записать (1.5) в виде:

$$S_n - f(m) \le a_n \le S_{n-1}. \qquad (1.6)$$

Из условия теоремы следует, что последовательность $\{a_n\}$ не убывает, поэтому для ее сходимости этой необходимо и достаточно ее ограниченности. Из неравенств (1.6) вытекает, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничена последовательность $\{S_n\}$, что эквивалентно ее сходимости. ◀

**Следствие.** Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, а ряд $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f(k)$ сходится, тогда остаток ряда можно оценить по формуле

$$\int\limits_{n_0+1}^{\infty} f(x)dx \le r_{n_0} \le \int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)dx, \quad r_{n_0} = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} f(k)$$

▶ Неравенство (1.5) можно записать в виде

$$\sum_{k=n_0+2}^{n} f(k) \le \int\limits_{n_0+1}^{n} f(x)dx \le \sum_{k=n_0+1}^{n-1} f(k) \le \int\limits_{n_0}^{n-1} f(x)dx.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим требуемую формулу. ◀

### 1.2.3. Обобщенный гармонический ряд

**Теорема 1.10.** ***Обобщенный гармонический ряд***

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \qquad (1.7)$$

*сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.*

▶ Обобщенный гармонический ряд (1.7) можно рассматривать как ряд вида $\sum\limits_{k=m}^{\infty} f(k)$, если положить $m = 1$, $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$. Функция $f(x)$ убывает и положительна на $[1, +\infty)$, поэтому в силу признака Коши – Маклорена вопрос о сходимости ряда (1.7) эквивалентен вопросу о сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{x^{\alpha}} dx$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. ◀

**Пример 1.8.** Найдем сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$ с точностью до $10^{-2}$.

▸ Задача корректна, так как данный ряд сходится, поэтому, согласно интегральному признаку Коши, получим

$$r_n = S - S_n \le \int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3n^3}.$$

Так как $r_n \le 10^{-2}$ при $n \ge 4$, для вычисления ряда с заданной погрешностью достаточно взять

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4}. \blacktriangleleft$$

Обобщенный гармонический ряд часто используется при исследовании сходимости рядов с помощью теорем сравнения.

**Пример 1.9.** Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\exp\left\{\frac{\sqrt[3]{k}+2}{k^2+3}\right\}-1\right).$$

▸ Так как $\frac{\sqrt[3]{k}+2}{k^2+3} \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$\exp\left\{\frac{\sqrt[3]{k}+2}{k^2+3}\right\}-1 \sim \frac{\sqrt[3]{k}+2}{k^2+3} \sim \frac{1}{k^{5/3}} \text{ при } k \to \infty.$$

В силу второго признака сравнения с учетом сходимости обобщенного гармонического ряда при $\alpha = 5/3$ получаем сходимость исходного ряда. ◂

Элементарные функции – показательная $e^x$ и логарифмическая $\ln x$ – при $x \to +\infty$ не являются бесконечно большими степенного порядка, а именно для любого $\alpha > 0$ справедливы соотношения $x^\alpha = o\left(e^x\right)$ и $\ln x = o\left(x^\alpha\right)$, $x \to +\infty$. Иногда возможно получить оценку общего члена такого ряда через степенную функцию и, пользуясь теоремой сравнения, сделать вывод о поведении этого ряда.

Пример 1.10. Исследуем сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\sqrt{k}}$.

▸ Функция $e^{-\sqrt{k}}$ убывает быстрее, чем любая отрицательная степень показателя $\sqrt{k}$, т.е. $e^{-\sqrt{k}} = o\left(k^{-\alpha/2}\right)$ при $k \to \infty$ $(\alpha > 0)$. Если $\alpha_0 > 6$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2-\alpha_0/2}$ сходится, а значит, в силу теоремы сравнения сходится и исходный ряд. ◂

Замечание. Оценка $e^{-\sqrt{k}} = o\left(k^{-\alpha/2}\right)$ верна и для $0 < \alpha_0 < 6$, но такая оценка не информативна в вопросе о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\sqrt{k}}$.

Пример 1.11*. Исследуем сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^q}$, $q > 0$.

▸ Из неравенства $\frac{\ln k}{k^q} > \frac{1}{k^q}$, $k > 3, q > 0$, в силу теоремы сравнения следует, что данный ряд расходится при $0 < q \le 1$. Пусть $q > 1$. Так как $\forall \alpha > 0$ $\ln k = o\left(k^{\alpha}\right)$ при $k \to \infty$, для каждого $\alpha > 0$ найдется номер $K(\alpha)$ такой, что для всех $k > K(\alpha)$

$$\frac{\ln k}{k^q} < \frac{1}{k^{q-\alpha}}. \tag{1.8}$$

Обобщенный гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{q-\alpha}}$ сходится при $q - \alpha > 1$, поэтому, выбирая для каждого *фиксированного* значения $q > 1$ зависящее от него значение $\alpha = \frac{q-1}{2}$, получим, что $\forall k > K(\alpha)$ справедливо неравенство (1.8). Отсюда в силу теоремы сравнения 1.6 делаем вывод, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^q}$ сходится.

Итак, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^q}$ сходится при $q > 1$ и расходится при $0 < q \le 1$. ◂

### 1.2.4. Признаки Даламбера и Коши

Эти признаки сходимости основаны на сравнении рассматриваемого ряда с рядом, составленным из элементов геометрической прогрессии, а именно со сходящимся рядом $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$, $|q|<1$ или расходящимся рядом $\sum_{k=1}^{\infty} 1$.

**Теорема 1.11 (признак Даламбера).** Если $\forall k \;\; a_k > 0$ и справедливо неравенство $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le q < 1$ (или $\frac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1$), то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (расходится).

▸ Пусть $b_k = q^k$ ($b_k = 1$). Тогда $\frac{b_{k+1}}{b_k} = q < 1$ $\left(\frac{b_{k+1}}{b_k} = 1\right)$.

Из условия теоремы получим

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \le q = \frac{b_{k+1}}{b_k} < 1 \quad \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1 = \frac{b_{k+1}}{b_k}\right). \tag{1.9}$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} q^k$, $q<1$, сходится $\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 \text{ расходится}\right)$, на основании 3-го признака сравнения получаем, что неравенства (1.9) гарантируют сходимость (расходимость) ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. ◂

Замечание. Неравенство $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le q < 1$ *нельзя* заменить неравенством $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$. Например, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, хотя $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} < 1$.

**Теорема 1.12 (признак Даламбера в предельной форме).** Пусть

$$\forall k \;\; a_k > 0 \text{ и } \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q \in \mathbb{R}.$$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится при $q<1$ и расходится при $q>1$. При $q=1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

▸ Если $q<1$, то $\exists\varepsilon>0$ $q=1-2\varepsilon$ и $q+\varepsilon=1-\varepsilon$. По определению предела последовательности для *указанного* $\varepsilon$

$$\exists k_0 \quad \forall k \geq k_0 \quad \frac{a_{k+1}}{a_k}<q+\varepsilon=1-\varepsilon,$$

значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (по признаку Даламбера).

Если $q>1$, то $\exists\varepsilon>0$ $q=1+\varepsilon$ и $q-\varepsilon=1$. По определению предела последовательности для *указанного* $\varepsilon$

$$\exists k_0 \quad \forall k \geq k_0 \quad 1=q-\varepsilon<\frac{a_{k+1}}{a_k},$$

значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится (по признаку Даламбера).

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится, а гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится, хотя для каждого из них $q=1$. ◂

**Теорема 1.13 (обобщенный признак Даламбера).** Пусть $\forall k$ $a_k>0$. Тогда, если:

1) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{a_{k+1}}{a_k}=L<1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

2) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{a_{k+1}}{a_k}=L>1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

**Теорема 1.14 (радикальный признак Коши).** Если $\forall k$ $a_k \geq 0$ и справедливо неравенство

$$\sqrt[k]{a_k} \leq q<1 \quad (\sqrt[k]{a_k} \geq 1), \tag{1.10}$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (расходится).

▸ Если положить $b_k=q^k$ $(b_k=1)$, то из неравенств (1.10) получим:

1. $\sqrt[k]{a_k} \leq q<1 \Rightarrow a_k \leq b_k \overset{\text{теорема сравнения}}{\Rightarrow}$ сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. $\sqrt[k]{a_k} \geq 1 \Rightarrow a_k \geq b_k \overset{\text{теорема сравнения}}{\Rightarrow}$ расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. ◂

Замечание. Как и в признаке Даламбера, неравенство $\sqrt[k]{a_k} \leq q<1$ нельзя заменить неравенством $\sqrt[k]{a_k}<1$.

**Теорема 1.15 (радикальный признак Коши в предельной форме).** Если $\forall k\ \ a_k \geq 0$ и существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=q$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится при $q<1$ и расходится при $q>1$. При $q=1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

▸ Доказательство совпадает с доказательством признака Даламбера в предельной форме, если в рассуждениях заменить $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ на $\sqrt[k]{a_k}$. ◂

**Теорема 1.16 (обобщенный радикальный признак Коши).** Если $\forall k\ \ a_k \geq 0$ и существует предел $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{a_k}=q$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится при $q<1$ и расходится при $q>1$.

Замечание 1. Признаки Коши и Даламбера

– применимы только для рядов с *неотрицательными* членами;

– являются *достаточными* и не являются необходимыми.

Замечание 2. Так как для частичных пределов последовательности с положительными членами справедливо неравенство

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{a_{k+1}}{a_k}\leq\underline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{a_k}\leq\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{a_k}\leq\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{a_{k+1}}{a_k},$$

признак Коши является более сильным, чем признак Даламбера, т.е. всякий раз, когда действует признак Даламбера, действует и признак Коши. При этом существуют ряды, для которых действует признак Коши и не действует признак Даламбера.

▸ Например, для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k+3}{2^k}$ имеем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(2n-1)+1}}{a_{(2n-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3}{2^{2n}}\cdot\frac{2^{2n-1}}{-1+3}=1,$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+3}{2^{2n+1}}\cdot\frac{2^{2n}}{1+3}=\frac{1}{4},$$

следовательно, признак Даламбера не дает информации ни о сходимости, ни о расходимости данного ряда, тогда как признак Коши доказывает сходимость ряда $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{a_k}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a_{2n}}=\dfrac{1}{2}$. ◂

### 1.2.5. Построение новых признаков сходимости*

Малая чувствительность признака сходимости Даламбера объясняется тем, что он основан на сравнении исследуемого ряда с таким резко расходящимся рядом, как арифметическая прогрессия, или же с таким быстро сходящимся рядом, как геометрическая прогрессия. Поэтому естественно попытаться построить признаки сходимости рядов, основанные на сравнении их членов с членами рядов, сходящихся или расходящихся медленнее, чем указанные ранее (доказательство существования таких рядов приведено выше).

**Теорема 1.17 (признак Куммера).** Пусть даны расходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{c_k}$ и последовательность $\{a_k\}$, $\forall k \;\; a_k > 0$, $c_k > 0$. Обозначим через $K_k$ величину

$$K_k = c_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - c_{k+1}. \tag{1.11}$$

Тогда, если $\forall k$ выполняется неравенство $K_k \geq \delta > 0$:

1) $K_k \geq \delta > 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

2) $K_k \leq 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

▶ 1. Пусть $\forall k \quad K_k = c_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - c_{k+1} \geq \delta > 0$. Умножив обе части этого неравенства на $a_{k+1}$, получим

$$c_k a_k - c_{k+1} a_{k+1} \geq \delta a_{k+1}, \tag{1.12}$$

значит, $c_k a_k - c_{k+1} a_{k+1} > 0$. Отсюда вытекает, что величина $c_k a_k$ монотонно убывает и, следовательно, стремится к конечному пределу (так как она ограничена снизу нулем).

Итак, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k a_k - c_{k+1} a_{k+1}\right)$ сходится, так как сумма его $n$ первых членов $c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1}$ имеет конечный предел. Но тогда из неравенства (1.12) в силу теоремы сравнения следует, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \delta a_k$, а с ним и исходный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. Пусть $\forall k \quad K_k = c_k \dfrac{a_k}{a_{k+1}} - c_{k+1} \le 0$. Тогда $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \ge \dfrac{1/c_{k+1}}{1/c_k}$. Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_k}$ предположен расходящимся, согласно теореме сравнения, то расходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. ◂

**Следствие (признак Куммера в предельной форме).** Допустим, что предел $\lim\limits_{k\to\infty} K_k = K$. Тогда при $K > 0$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а при $K < 0$ – расходится.

Признак Куммера можно рассматривать как общую схему для получения конкретных признаков. Выбирая различным образом расходящийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_k}$, мы будем получать различные признаки сходимости. Продемонстрируем такой способ построения признаков на следующих примерах.

**Признак Даламбера.** Положив в формуле (1.11) $c_k = 1$, получим

$$K_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 = \frac{1}{D_k} - 1,$$

где $D_k = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$. Если $\lim\limits_{k\to\infty} D_k = D$, то $\lim\limits_{k\to\infty} K_k = \dfrac{1}{D} - 1$. При $D > 1$ имеем $K < 0$, и по признаку Куммера ряд расходится; если же $D < 1$, то $K > 0$, и ряд сходится.

**Признак Раабе.** Положив в формуле (1.11) $c_k = k$, получим

$$K_k = k\frac{a_k}{a_{k+1}} - (k+1) = R_k - 1,$$

где $R_k = k\left(\dfrac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right)$. Если $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = R$, то $\lim\limits_{k\to\infty} K_k = R - 1$. При $R < 1$ имеем $K < 0$, и по признаку Куммера ряд расходится; если же $R > 1$, то $K > 0$, и ряд сходится.

**Признак Бертрана.** Положим в формуле (1.11) $c_k = k \ln k$. Расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c_k}$ вытекает из интегрального признака Коши – Маклорена. Выражение для $K_k$ в этом случае примет вид:

$$K_k = k \ln k \cdot \frac{a_k}{a_{k+1}} - (k+1)\ln(k+1) =$$

$$= \ln k \left[ k \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) - 1 \right] - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} = B_k - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1},$$

где $B_k = \ln k \left[ k \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) - 1 \right] = \ln k (R_k - 1)$.

Если $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = B$, то $\lim\limits_{k\to\infty} K_k = B - 1$. При $B < 1$ имеем $K < 0$, и по признаку Куммера ряд расходится; если же $B > 1$, то $K > 0$, и ряд сходится.

Докажем теперь несколько признаков, основанных на тех, что построены ранее.

**Признак Гаусса.** Допустим, что соотношение $\frac{a_k}{a_{k+1}}$ может быть представлено в виде $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \lambda + \frac{\mu}{k} + \frac{\theta_k}{k^2}$, где $\lambda$ и $\mu$ – постоянные, а $\theta_k$ – ограниченная величина. Тогда, если $\lambda > 1$ или $\lambda = 1$, $\mu > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится; если $\lambda < 1$ или $\lambda = 1$, $\mu \le 1$, то он расходится.

▸ Случаи $\lambda > 1$ и $\lambda < 1$ приводят к признаку Даламбера, так как $\lim\limits_{k\to\infty} D_k = \frac{1}{\lambda}$.

Если $\lambda = 1$, то $R_k = \mu + \frac{\theta_k}{k}$ и $R = \mu$, а значит, случаи $\mu > 1$ и $\mu < 1$ исчерпываются признаком Раабе.

Если $\lambda = 1$, $\mu = 1$, то имеем $B_k = \frac{\ln k}{k}\theta_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = 0$, так как $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k}$ стремится к 0 при $k \to \infty$, а величина $\theta_k$ ограничена. Следовательно, по признаку Бертрана ряд расходится. ◂

**Логарифмический признак.** Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to\infty}\left(k\ln\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)=r,\ -\infty\le r\le+\infty$$

,

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, если $r>1$, и расходится, если $r<1$.

▸ Доказательство основано на использовании неравенств

$$\forall k\ \ \frac{1}{k+1}<\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{k}. \qquad (1.13)$$

1. Пусть $r>1$, $1<\rho<r$ – фиксировано. По определению предела последовательности

$$\exists k_0\ \ \forall k\ge k_0\ \ k\ln\frac{a_k}{a_{k+1}}\ge\rho \text{ или } \ln\frac{a_k}{a_{k+1}}\ge\frac{\rho}{k}. \qquad (1.14)$$

Учитывая (1.13), из (1.14) получим

$$\ln\frac{a_k}{a_{k+1}}>\rho\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\ \Leftrightarrow\ \frac{a_k}{a_{k+1}}>\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\rho}\ \Leftrightarrow\ \frac{a_{k+1}}{a_k}<\frac{\frac{1}{(k+1)^{\rho}}}{\frac{1}{k^{\rho}}}.$$

Так как обобщенный гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{p}}$ сходится при $\rho>1$, по третьему признаку сравнения сходится и исходный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ .

2. Если $r<1$, то по определению предела последовательности

$$\exists k_0\ \ \forall k\ge k_0\ \ k\ln\frac{a_k}{a_{k+1}}\le 1.$$

Учитывая (1.14), получим

$$\ln\frac{a_k}{a_{k+1}}\le\frac{1}{k}<\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{a_k}{a_{k+1}}<\frac{k}{k-1}\ \Leftrightarrow\ \frac{a_{k+1}}{a_k}>\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}}.$$

Следовательно, по признаку сравнения исходный ряд расходится. ◂

Пример 1.12. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{1}{2k+1}.$$

▸ Рассмотрим отношение $\dfrac{a_k}{a_{k+1}}$:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{(2k+2)!!(2k+3)(2k-1)!!}{(2k+1)!!(2k)!!(2k+1)}=\frac{(2k+2)(2k+3)}{(2k+1)^2}.$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_k}{a_{k+1}}=1$, для решения вопроса о сходимости данного ряда метод Даламбера неприменим. Воспользуемся методом Гаусса:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{4k^2+10k+6}{4k^2+4k+1}=1+\frac{6k+5}{4k^2+4k+1}=1+\frac{3}{2}k-\frac{1+{}^{3}\!/_{2k}}{4k^2+4k+1}=$$

$$=1+\frac{3}{2}k+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\text{ при } k\to\infty.$$

Поскольку $\lambda=1$ и $\mu=\dfrac{3}{2}>1$, рассматриваемый ряд сходится. ◂

Пример 1.13. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)},\ \alpha>0.$$

▸ Так как

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{a_{k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha+1+k}{k+1}=1,$$

метод Даламбера неприменим для решения вопроса о сходимости данного ряда. Воспользуемся в данном случае методом Гаусса:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{\alpha+1+k}{k+1}=1+\frac{\alpha}{k+1}=1+\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha/k}{k+1}=1+\frac{\alpha}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\text{ при } k\to\infty.$$

Таким образом, рассматриваемый ряд сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$. ◂

### 1.2.6. Отсутствие универсального ряда сравнения

Признаки Коши и Рабе сильнее признака Даламбера. Признак Бертрана сильнее признака Раабе. Эта цепь все более и более чувствительных (но и более сложных) признаков может быть неограниченно продолжена. Возникает вопрос: существует ли сходящийся (или расходящийся) ряд, сравнение с которым позволило бы сделать заключение о сходимости (или расходимости) любого наперед взятого знакопостоянного ряда.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\tilde{a}_k$ называется ***сходящимся*** (***расходящимся***) ***медленнее***, чем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r_n}{\tilde{r}_n}=0$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tilde{S}_n}{S_n}=0\right)$, где символами $r_n$ и $\tilde{r}_n$ ($S_n$ и $\tilde{S}_n$) обозначены соответственно их $n$-е остатки (частичные суммы).

**Теорема 1.18.** Для каждого сходящегося (расходящегося) ряда существует ряд, сходящийся (расходящегося) медленнее этого ряда.

▸ 1. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ – сходящийся ряд. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}\right)$, где $r_0=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$, $r_k=\sum\limits_{n=k}^{\infty}a_n$ сходится медленнее, чем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$, так как

$$\tilde{r}_n=\left(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}}\right)+\left(\sqrt{r_{n+1}}-\sqrt{r_{n+2}}\right)+\ldots=\sqrt{r_n} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{\tilde{r}_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{r_n}=0.$$

2. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ – расходящийся ряд, $S_n$ – его $n$-я частичная сумма. Тогда ряд $\sqrt{a_1}+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\sqrt{S_k}-\sqrt{S_{k-1}}\right)$, сходится медленнее, чем ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$, так как

$$\tilde{S}_n=\sqrt{S_1}+\left(\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}\right)+\ldots+\left(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\right)=\sqrt{S_n} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{S}_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{S_n}}=0. \blacktriangleleft$$

**Следствие.** Никакой сходящийся (расходящийся) ряд не может служить «универсальным рядом», сравнение с которым устанавливает сходимость (расходимость) произвольного знакопостоянного ряда.

▸ Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ – сходящийся ряд, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\tilde{a}_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}\right)$ сходится, хотя $\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}>>a_k$ ($\frac{a_k}{\tilde{a}_k}=\frac{r_{k-1}-r_k}{\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}}=\sqrt{r_{k-1}}+\sqrt{r_k}\to 0$).

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ – расходящийся ряд, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\tilde{a}_k=\sqrt{a_1}+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\sqrt{S_k}-\sqrt{S_{k-1}}\right)$ расходится, хотя $\sqrt{S_k}-\sqrt{S_{k-1}}<<a_k$ ($\frac{a_k}{\tilde{a}_k}=\frac{S_k-S_k}{\sqrt{S_k}-\sqrt{S_{k-1}}}=\sqrt{S_k}+\sqrt{S_{k-1}}\to\infty$). ◂

## 1.3. РЯДЫ ОБЩЕГО ВИДА

В этой главе мы откажемся от введенного ранее условия знакопостоянности ряда и будем рассматривать как знакопостоянные, так и знакопеременные ряды.

### 1.3.1. Группировка членов ряда

Пусть дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Сгруппировать члены этого ряда – это значит вместо ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ рассмотреть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k = \sum_{n=N_{k-1}}^{N_k - 1} a_n$, $1 = N_0 < N_1 < \ldots < N_k < \ldots$, т.е. $A_k$ для каждого $k$ есть сумма $k$-й группы (скобки) членов ряда. Пусть $S_n$ – частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\tilde{S}_n$ – частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$. Для конечных сумм раскрытие скобок законно, поэтому

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{N_1-1} a_k + \sum_{k=N_1}^{N_2-1} a_k + \ldots + \sum_{k=N_{n-1}}^{N_n-1} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{N_n-1} = S_{N_n-1},$$

т.е. последовательность $\left\{\tilde{S}_n\right\}$ – это подпоследовательность последовательности $S_n$.

Из теории пределов последовательностей известны следующие утверждения.

1. Если последовательность $S_n$ сходится, то любая ее подпоследовательность (в том числе и $\tilde{S}_n = S_{N_n-1}$) сходится к тому же пределу. Значит, сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ влечет сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, причем суммы обоих рядов равны.

2. Сходимость подпоследовательности $\tilde{S}_n = S_{N_n-1}$, вообще говоря, не влечет сходимости последовательности $S_n$, поэтому из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ в общем случае не следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

На основании этих утверждений можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 1.19.** В *сходящемся* ряде допустима произвольная расстановка скобок. Полученный ряд будет сходиться к сумме исходного ряда.

### 1.3.2. Ряды лейбницевского типа

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ называется ***рядом лейбницевского типа***, если:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$;
2) $\forall k \;\; a_k \ge a_{k+1} \ge 0$ (или $\forall k \;\; a_k \le a_{k+1} \le 0$).

**Теорема 1.20 (признак Лейбница).** Ряд лейбницевского типа сходится, причем его сумма $S$ не превышает $a_1$, т.е. $0 \le S \le a_1$ (или $a_1 \le S \le 0$).

▸ Рассмотрим случай $\forall k \;\; a_k \ge a_{k+1} \ge 0$. Частичные суммы четного порядка для данного ряда можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - a_{2n} \qquad (1.15)$$

или

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}a_k = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}). \qquad (1.16)$$

С учетом условия $a_k \ge a_{k+1} \ge 0$ из (1.16) следует, что рассматриваемая последовательность частичных сумм возрастает, т.е. $S_{2n} \le S_{2(n+1)}$, а из (1.15) следует ее ограниченность сверху числом $a_1$. Значит, данная последовательность сходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} + a_{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. ряд лейбницевского типа сходится. ◂

**Следствие.** Для остатка ряда лейбницевского типа справедливы неравенства

$$|r_n| \le |a_{n+1}| \text{ и } r_n a_{n+1} \ge 0,$$

т.е. остаток ряда не превосходит по абсолютной величине значения первого отбрасываемого слагаемого и совпадает с ним по знаку.

▸ Остаток ряда лейбницевского типа также является рядом лейбницевского типа, поэтому, если $a_{n+1} > 0$, то выполняется неравенство $0 \le r_n \le a_{n+1}$, а если $a_{n+1} < 0$, то $a_{n+1} \le r_n \le 0$. ◂

### 1.3.3. Абсолютная и условная сходимость

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется ***условно сходящимся***.

Замечание 1. Из определения видно, что если знакопостоянный ряд сходится, то он сходится абсолютно, поэтому понятия «абсолютно сходящийся ряд» и «условно сходящийся ряд» имеют смысл только для знакочередующихся рядов.

Замечание 2. Согласно определению, если знакопеременный ряд сходится, то он сходится либо абсолютно, либо условно.

Замечание 3. Для исследования абсолютной сходимости ряда могут быть применены все признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

**Теорема 1.21.** Абсолютно сходящийся ряд сходится.

▸ Утверждение теоремы следует из критерия Коши и неравенства

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| \le \left|a_{n+1}\right| + \left|a_{n+2}\right| + \ldots + \left|a_{n+p}\right|. \blacktriangleleft$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется безусловно сходящимся, если для любой перестановки $\varphi(k)$ натурального ряда ($\varphi$ есть биекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ сходится. В дальнейшем будет показано, что понятия абсолютной и безусловной сходимости ряда эквивалентны.

**Теорема 1.22.** Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, то он сходится безусловно, причем его сумма при перестановке членов не меняется.

* ▸ Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1.17}$$

сходится абсолютно и сумма этого ряда равна $S$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} \tag{1.18}$$

получен из ряда (1.17) с помощью перестановки $\varphi$. Докажем, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n\ge N\ \left|\sum_{k=1}^{n}a_{\varphi(k)}-S\right|<\varepsilon.$$

Исходя из абсолютной сходимости ряда (1.17)

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_0\ \forall p\ \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p}\left|a_k\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1.19}$$

и

$$\left|\sum_{k=1}^{N_0}a_k-S\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.20}$$

Выберем $N$ так, чтобы $\forall k\le N_0\ \varphi(k)\le N$. Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_{\varphi(k)}-S\right|\le\left|\sum_{k=1}^{n}a_{\varphi(k)}-\sum_{k=1}^{N_0}a_k\right|+\left|\sum_{k=1}^{N_0}a_k-S\right|. \tag{1.21}$$

Покажем, что при

$$\forall n\ge N\ \left|\sum_{k=1}^{n}a_{\varphi(k)}-\sum_{k=1}^{N_0}a_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для этого рассмотрим разность $\sum_{k=1}^{n}a_{\varphi(k)}-\sum_{k=1}^{N_0}a_k$, представляющую собой сумму $(n-N_0)$ членов ряда (1.17) с номерами, большими $N_0$. Выбирая $p$ так, чтобы номер $N_0+p$ превосходил все эти номера, получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_{\varphi(k)}-\sum_{k=1}^{N_0}a_k\right|\le\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p}\left|a_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.22}$$

Из неравенств (1.20) – (1.22) получаем $\left|\sum_{k=1}^{n}a_{\varphi(k)}-S\right|<\varepsilon$, а значит, ряд (1.18) сходится и имеет сумму, равную $S$. ◂

Замечание. Эта теорема часто используется в одной из следующих формулировок: «при любой перестановке абсолютно сходящегося ряда сумма полученного ряда равна сумме исходного» или «сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка его членов». Последняя формулировка удобна, если речь идет о сумме некоторого счетного множества чисел, нумерация которого еще не установлена или устанавливается произвольно.

**Теорема 1.23 (теорема Коши об абсолютно сходящемся ряде).** Если ряд сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из данного ряда посредством некоторой перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и данный ряд.

* ▸ Данная теорема является следствием предыдущей. Для доказательства абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$, полученного перестановкой членов исходного ряда, достаточно применить теорему 1.22 к рядам $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}|$. ◂

**Теорема 1.24 (теорема Римана об условно сходящемся ряде).** Если ряд *сходится условно*, то, каково бы ни было наперед взятое число $L$ (конечное или бесконечное), можно так переставить члены этого ряда, чтобы преобразованный ряд сходился к числу $L$.

* ▸ Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1.23}$$

сходится условно. В этом случае можно утверждать, что он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов (иначе, отбрасывая конечное число членов ряда, мы бы получили знакопостоянный ряд, который сходится абсолютно). Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots$ – положительные, а $q_1, q_2, q_3, \ldots$ – отрицательные члены ряда (1.23), выписанные в таком порядке, в каком они стоят в этом ряду.

Введем в рассмотрение два знакопостоянных ряда: $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$. Пусть $P_n$ и $Q_n$ – соответствующие суммы всех положительных и отрицательных членов ряда (1.23), составляющие его частичную сумму $S_n$. Очевидно, что $S_n = P_n + Q_n$. Так как ряд (1.23) сходится условно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(P_n + Q_n\right) = S, \tag{1.24}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(P_n - Q_n\right) = \infty. \tag{1.25}$$

Сопоставляя (1.24) и (1.25), получим, что $\lim_{n\to\infty} P_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} Q_n = \infty$, т.е. ряды $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ расходятся, следовательно,

$$\forall E > 0\ \forall N \quad \exists m_1 \sum_{k=N+1}^{N+m_1} p_k > E \text{ и } \exists m_2 \sum_{k=N+1}^{N+m_2} q_k < -E.$$

Пусть $|L| < \infty$. Переставим члены ряда (1.23) таким образом, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$. Для этого сначала выберем из ряда ровно столько положительных членов $p_1, ..., p_{n_1}$, чтобы их сумма $\sum\limits_{k=1}^{n_1} p_k$ превзошла $L$. Затем добавим ровно столько отрицательных членов $q_1, ..., q_{n_2}$, чтобы общая сумма $\sum\limits_{k=1}^{n_1} p_k + \sum\limits_{k=1}^{n_2} q_k$ стала меньше $L$. После этого снова добавим положительные члены $p_{n_1+1}, ..., p_{n_3}$ так, чтобы сумма $\sum\limits_{k=1}^{n_3} p_k + \sum\limits_{k=1}^{n_2} q_k$ оказалась больше $L$. Продолжая аналогичные рассуждения, мы получим ряд, в состав которого войдут все члены исходного ряда (1.23).

Докажем, что полученный ряд сходится к $L$. Для этого достаточно заметить, что величина $|S_n - L|$ не превосходит модуля последнего члена последней полностью завершенной группы членов полученного ряда одного знака, а исходя из сходимости ряда (1.23) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n - L| = 0$, что и требовалось доказать.

Если $L = +\infty$, то, взяв последовательность возрастающих до бесконечности чисел $\{L_n\}$, перегруппируем члены ряда так, что после каждой группы положительных чисел следует ровно одно отрицательное число, причем $k$-я группа положительных чисел заканчивается, когда частичная сумма ряда превысит $L_k$. При этом получится ряд, сумма которого равна $+\infty$. Аналогично можно получить и ряд с суммой $-\infty$. ◂

Таким образом, из теоремы Римана следует, что если ряд сходится условно, то он сходится «небезусловно» (случай бесконечного $L$). Далее, если ряд сходится неабсолютно, то он сходится условно (согласно определению). Следовательно, из неабсолютной сходимости ряда вытекает его «небезусловная» сходимость. Теорема Коши при этом утверждает, что из абсолютной сходимости ряда следует его безусловная сходимость. В результате можно считать доказанной эквивалентность понятий абсолютной и безусловной сходимости.

На практике при исследовании сходимости обычно вместо термина «неабсолютная» используют термин «условная», а вместо термина «безусловная» – термин «абсолютная».

Замечание. Теоремы Римана и Коши подчеркивают тот факт, что неабсолютная (условная) сходимость осуществляется лишь благодаря взаимному погашению положительных и отрицательных членов и потому существенно зависит от порядка, в котором они следуют один за другим, между тем как абсолютная сходимость основана на быстроте убывания этих членов и от порядка их не зависит.

Пример 1.14. Найдем ***множества абсолютной и условной сходимости ряда*** (множества значений $\alpha$, при которых ряд сходится абсолютно и условно)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}}. \tag{1.26}$$

▸ При $\alpha \le 0$ ряд (1.26) расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости. В силу признака Лейбница, при $\alpha > 0$ данный ряд сходится, причем при $0 < \alpha \le 1$ – условно, а при $\alpha > 1$ абсолютно, так как обобщенный гармонический ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. ◂

**Преобразование Абеля для конечных сумм***

Пусть задана сумма $S = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. Положим

$$B_1 = b_1,\ \ B_2 = b_1 + b_2,\ \ \ldots,\ \ B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

тогда

$$b_1 = B_1,\ b_2 = B_2 - B_1,\ \ldots,\ b_n = B_n - B_{n-1},$$

$$S = a_1B_1 + a_2\left(B_2 - B_1\right) + \ldots + a_n\left(B_n - B_{n-1}\right).$$

Раскрывая скобки и группируя по-новому члены, получим равенство

$$S = \left(a_1 - a_2\right)B_1 + \left(a_2 - a_3\right)B_2 + \ldots + \left(a_{n-1} - a_n\right)B_{n-1} + a_nB_n.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} a_kb_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k - a_{k+1}\right)B_k + a_nB_n. \tag{1.27}$$

Такое преобразование конечных сумм называется ***преобразованием Абеля***.

**Неравенство Абеля***

Если

$$a_k \geq a_{k+1} > 0 \left(a_k \leq a_{k+1} < 0\right),\ k = \overline{1, n-1}, \tag{1.28}$$

$$\left|b_1 + \ldots + b_k\right| \leq B,\ k = \overline{1, n}, \tag{1.29}$$

то

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq B\left|a_1\right|. \tag{1.30}$$

▸ Согласно условиям (1.28), все разности $a_k - a_{k+1}$ – одного знака, поэтому из (1.29) и (1.27) получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n-1}\left|a_k - a_{k+1}\right| \cdot \left|B_k\right| + \left|a_n\right| \cdot \left|B_n\right| \leq$$

$$\leq B\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left|a_k - a_{k+1}\right| + \left|a_n\right|\right) = B\left|a_1\right|. \blacktriangleleft$$

**Признаки сходимости знакопеременных числовых рядов**

**Теорема 1.25 (признак Дирихле).** Если последовательность $\{a_k\}$ монотонно сходится к нулю, а последовательность частичных сумм $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ ограничена, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

* ▸ В силу ограниченности последовательности $\{B_n\}$

$$\exists B \in \mathbb{R}^+ \ \ \forall n \ \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leq B,$$

значит:

$$\forall n > 1 \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k\right| = \left|B_{n+p} - B_{n-1}\right| \leq \left|B_{n+p}\right| + \left|B_{n-1}\right| \leq 2B. \tag{1.31}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как по условию $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, найдется номер $n(\varepsilon)$ такой, что $\forall n \geq n(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left|a_n\right| \leq \frac{\varepsilon}{2B}. \tag{1.32}$$

Применив неравенство Абеля (1.30) к сумме $\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k$, с учетом (1.31) и (1.32) получим

$$\forall n \geq n(\varepsilon) \ \forall p \in \mathbb{N} \ \left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| \leq 2B|a_n| < \varepsilon .$$

Отсюда, согласно критерию Коши, следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится. ◀

**Теорема 1.26 (признак Абеля).** Если последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

* ▶ В силу ограниченности последовательности $\{a_n\}$

$$\exists A \in \mathbb{R}^{+} \ \forall n \ |a_n| \leq A .$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ вытекает, что

$$\exists n(\varepsilon) \ \forall n \geq n(\varepsilon) \ \forall p \in \mathbb{N} \ \left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{A} .$$

Следовательно, $\forall n \geq n(\varepsilon)$ $\forall p \in \mathbb{N}$ согласно неравенству Абеля (1.30) справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| < \frac{\varepsilon}{A}|a_n| \leq \varepsilon ,$$

а значит, согласно критерию Коши, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится. ◀

Замечание. На практике в качестве последовательности $\{b_k\}$ чаще всего берется или последовательность $\left\{(-1)^{\varphi(k)}\right\}$, или одна из последовательностей $\{\cos(k\alpha)\}$ и $\{\sin(k\alpha)\}$. Ограниченность последовательности $\left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\varphi(k)}\right\}$ при данной функции $\varphi(k)$ устанавливается непосредственно. Покажем ограниченность последовательностей $B_n = \left\{\sum_{k=1}^{n}\cos(k\alpha)\right\}$ и $\tilde{B}_n = \left\{\sum_{k=1}^{n}\sin(k\alpha)\right\}$ при $\alpha \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Так как

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot B_n=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{(2n-1)\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2},$$

получаем, что

$$\forall\alpha\neq 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\qquad \left|B_n\right|=\left|\frac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Точно так же получаем, что

$$\forall\alpha\neq 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\qquad \left|\tilde{B}_n\right|=\left|\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

Пример 1.15. Исследуем на абсолютную и условную сходимость ряды

$$1)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left((-k)^k\right)}{\sqrt[4]{k^7+3k}};\qquad 2)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k(k+1)/2}}{k^{2/3}}.$$

▸ 1. Данный ряд сходится абсолютно по признаку Вейерштрасса, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{arctg}\left((-k)^k\right)}{\sqrt[4]{k^7+3k}}\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{2\sqrt[4]{k^7+3k}}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{2k^{7/4}},$$

а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{2k^{7/4}}$ сходится.

2. Данный ряд не сходится абсолютно, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{k(k+1)/2}}{k^{2/3}}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2/3}},$$

а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2/3}}$ расходится. При этом он сходится по признаку Дирихле, так как последовательность $u_k=\frac{1}{k^{2/3}}$ монотонно сходится к 0 при $k\to\infty$, а $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k(k+1)/2}\right|\le 2$. Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k(k+1)/2}}{k^{2/3}}$ сходится условно.◀

Пример 1.16. Исследуем на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{2\sqrt[3]{k^2}}\right)$.

▶Используя асимптотическую формулу $\ln(1+t)=t+O(t^2)$ при $t\to 0$, получим $a_k=\frac{(-1)^k}{2\sqrt[3]{k^2}}+b_k$, где $|b_k|\le\frac{C}{k^{4/3}}$, $C>0$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ сходится абсолютно. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\sqrt[3]{k^2}}$ сходится согласно признаку Лейбница, причем условно, так как $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt[3]{k^2}}$ расходится. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится условно.◀

Пример 1.17. Найдем множества абсолютной и условной сходимости рядов:

$$1)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\beta k)}{k};\quad 2)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\beta/k)}{k}.$$

▶ 1. При $\beta=\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$ все члены ряда равны нулю и ряд сходится абсолютно.

Исследуем данный ряд на абсолютную сходимость при остальных значениях $\beta$.

Так как $\left|\sin(\beta k)\right| \ge \sin^2(\beta k)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(\beta k)}{k}\right| \ge \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\beta k)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2\beta k)}{2k} .$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2\beta k)}{2k}$ сходится по признаку Дирихле, так как последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2\beta k)\right\}$ ограничена по модулю числом $\left|\frac{1}{\sin\beta}\right|$, а последовательность $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ монотонно сходится к 0 при $n \to \infty$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ расходится. Так как ряд, являющийся суммой сходящегося и расходящегося рядов, расходится, исследуемый ряд не сходится абсолютно при $\beta \ne \pi m, m \in \mathbb{Z}$.

По признаку Дирихле можно доказать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\beta k)}{k}$ сходится при $\beta \ne 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\beta k)}{k}$ сходится абсолютно при $\beta = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, а при остальных значениях $\beta$ сходится условно.

2. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\beta/k)}{k}$ сходится абсолютно $\forall\beta \in \mathbb{R}$, так как $\left|\frac{\sin(\beta/k)}{k}\right| \sim \frac{|\beta|}{k^2}$ при $k \to \infty$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\beta|}{k^2}$ сходится $\forall\beta \in \mathbb{R}$. ◂

Замечание. Множества абсолютной и условной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k(\beta)$ не пересекаются, а их объединение образует все множество сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k(\beta)$. Таким образом, все множество допустимых значений $\alpha$ разбивается на три непересекающихся множества (некоторые могут быть пустыми): множество расходимости ряда, множество условной сходимости ряда и множество абсолютной сходимости ряда.

# Глава 2. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ*

Пусть задана некоторая числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ Формально образованное из элементов этой последовательности выражение вида $a_1 a_2 a_3 \cdots a_k \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} a_k$ называют ***бесконечным произведением (БП)***, а входящие в него сомножители – ***членами произведения***.

Произведение $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ первых $n$ членов данного БП называют ***$n$-м частичным произведением***, а бесконечное произведение $Q_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k$ – ***$n$-м остаточным произведением***.

БП называется ***сходящимся***, если последовательность $\{P_n\}$ имеет конечный предел $P$, *отличный от нуля.* В случае сходимости БП указанный предел $P$ называют ***значением этого БП*** и пишут

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Замечание 1. Условная договоренность, что при $P = 0$ БП расходится (***расходится к нулю***), позволяет провести четкую аналогию между сходимостью рядов и сходимостью бесконечных произведений. Поэтому далее будем рассматривать только БП с ненулевыми членами.

Замечание 2. На сходимость БП не влияет удаление или добавление конечного числа ненулевых членов этого произведения.

Замечание 3. Рассмотрение бесконечных произведений (так же как и рядов) представляет собой новую форму изучения числовых последовательностей, ибо каждому данному БП однозначно соответствует последовательность его частичных произведений, а каждой числовой последовательности $\{P_n\}$, все элементы которой отличны от 0, однозначно соответствует БП, для которого эта последовательность является последовательностью частичных произведений:

$$a_1 = P_1, \; a_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}, \; k = 2,3,....$$

Пример 1.1. Вычислим $\prod_{k=8}^{\infty}\frac{k^2-9}{k^2-4}$.

▸ $P_n=\prod_{k=8}^{n}\frac{k^2-9}{k^2-4}=\prod_{k=8}^{n}\frac{(k-3)(k+3)}{(k-2)(k+2)}=\frac{\prod_{k=8}^{n}(k-3)\prod_{k=8}^{n}(k+3)}{\prod_{k=8}^{n}(k-2)\prod_{k=8}^{n}(k+2)}=$

$$=\frac{\frac{(n-3)!}{4!}\cdot\frac{(n+3)!}{10!}}{\frac{(n-2)!}{5!}\cdot\frac{(n+2)!}{9!}}=\frac{5(n+3)}{10(n-2)}\to\frac{1}{2}.$$

$$\prod_{k=8}^{\infty}\frac{k^2-9}{k^2-4}=\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{1}{2}.$$ ◂

**Теорема 1.1 (необходимое условие сходимости БП).** Если БП $\prod_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, то

$$\lim_{k\to\infty}a_k=1,\qquad \lim_{n\to\infty}Q_n=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=n+1}^{\infty}a_k=1.$$

▸ Пусть $P=\prod_{k=1}^{\infty}a_k$, $P\neq 0$. Тогда $\lim_{k\to\infty}P_{k-1}=\lim_{k\to\infty}P_k=P\neq 0$, следовательно:

1) $\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\frac{P_k}{P_{k-1}}=\frac{\lim_{k\to\infty}P_k}{\lim_{k\to\infty}P_{k-1}}=\frac{P}{P}=1$,

2) $\lim_{n\to\infty}Q_n=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=n+1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{k=1}^{\infty}a_k}{\prod_{k=1}^{n}a_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{P}{\prod_{k=1}^{n}a_k}=\frac{P}{\lim_{n\to\infty}P_n}=\frac{P}{P}=1$. ◂

**Следствие**. Если БП сходится, то, начиная с некоторого номера, все его члены положительны

Замечание. Так как на сходимость БП не влияет удаление конечного количества сомножителей, в дальнейшем будем рассматривать лишь БП.

**Теорема 1.2.** Для того чтобы БП $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$, $\forall k\ a_k > 0$ сходилось, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k$. Причем, если $\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k = S \in \mathbb{R}$, то $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = e^S$. и, наоборот, если $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = P \in \mathbb{R}$, то $\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k = \ln P$.

▸ Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k$, $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$, тогда $S_n = \ln P_n$, а значит, $P_n = e^{S_n}$. В силу непрерывности показательной и логарифмической функций последовательность $\{P_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $\{S_n\}$, причем если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = e^S$, и наоборот, если $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln P$. ◂

При исследовании БП оказывается удобным представить его в виде

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k) = (1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_3)\cdots, \tag{2.1}$$

где $a_k > -1$, $k = 1,2,3,...$ Тогда вопрос о сходимости этого произведения согласно теореме 1.2 эквивалентен вопросу о сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + a_k). \tag{2.2}$$

***БП*** $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$, $\forall k\ a_k > 0$, такое, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + a_k)$ сходится абсолютно (условно), называется ***абсолютно (условно) сходящимся***.

Замечание 1. Теоремы Коши и Римана позволяют заключить, что абсолютно сходящееся произведение обладает переместительным свойством, в то время как условно сходящееся произведение заведомо им не обладает.

Замечание 2. Для расходимости БП (2.1) к нулю, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + a_k) = -\infty$.

**Теорема 1.3 (о сходимости бесконечного произведения).**

I. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ знакопостоянный. Тогда для БП $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$, *необходимо и достаточно*, чтобы сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

II. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ знакопеременный. Тогда:

1) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, то сходится и БП $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$;

2) если оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходятся, то сходится и БП $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$;

3) если один из рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходится, а другой расходится, то расходится и БП $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$;

4) если оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ расходятся, то о сходимости БП $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ ничего сказать нельзя.

▸ Согласно теореме 1.2, БП $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+a_k)$ сходятся и расходятся одновременно, поэтому докажем все утверждения теоремы для ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+a_k)$.

Условие $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ является необходимым и для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+a_k)$, а значит, невыполнение этого условия гарантирует расходимость обоих рядов.

I. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – знакопостоянный. Из того, что $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, следует, что $\ln(1+a_k) \sim a_k$ при $k\to\infty$, а значит, в силу теоремы сравнения, ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+a_k)$ сходятся и расходятся одновременно.

II. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – знакопеременный. Так как $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, то

$$\ln\left(1+a_k\right) = a_k - a_k^2 / 2 + o\left(a_k^2\right).$$

В силу теоремы сравнения ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-a_k^2 / 2 + o\left(a_k^2\right)\right)$ сходятся и расходятся одновременно.

Таким образом, если оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходятся, то сходится и их сумма, если из рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ один сходится, а второй расходится, то их сумма – расходящийся ряд.

1) Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, то для него выполняется необходимое условие сходимости, поэтому $\forall k \ge k_0 \;\; a_k^2 < \left|a_k\right| < 1$, а значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходится.

2), 3). Эти утверждения вытекают из основных свойств рядов.

4) Приведем примеры соответствующих рядов.

- Пусть $a_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{k}}, \; n = 2k-1; \\ \dfrac{1}{\sqrt{k}} + \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k\sqrt{k}}, \; n = 2k. \end{cases}$. Тогда

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{2m-1} + a_{2m}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) > \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ расходятся, так как $a_k^2 \sim \dfrac{1}{k}$ при $k \to \infty$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+a_k\right)$ сходится, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+a_k\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \ln\left(1+a_{2m-1}\right)\ln\left(1+a_{2m}\right) =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \ln\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m\sqrt{m}}\right)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{m^2}\right).$$

• Пусть $a_k=\dfrac{1}{k^{1/6}}$, тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^{1/6}}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^{1/3}}$ расходятся.

Так как $\dfrac{1}{k^{1/6}}-\dfrac{1}{2k^{1/3}}\sim\dfrac{1}{k^{1/6}}$ при $k\to\infty$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k-\dfrac{a_k^2}{2}\right)$, а значит, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+a_k\right)$, расходится. ◂

Замечание. Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ в общем случае не следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$, и наоборот. Например, если $a_k=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{k}}$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$ расходится, а если $a_k=\dfrac{1}{k}$, то наоборот, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ расходится.

**Следствие 1**. Если $\forall k\ -1<a_k<0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ расходится, то БП (2.1) расходится к нулю.

▸ Так как все члены расходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ отрицательны, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=-\infty$, а значит, $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+a_k\right)=\exp\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\right\}=0$ ◂

**Следствие 2**. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится условно, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$ расходится, то БП (2.1) расходится к нулю.

▸ Так как все члены расходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$ положительны, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{-a_k^2}{2}=-\infty$, а значит,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+a_k\right)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+a_k\right)\right\}=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k-\frac{a_k^2}{2}+o\left(a_k^2\right)\right)\right\}=$$

$$=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{a_k^2}{2}+o\left(a_k^2\right)\right)\right\}=\exp\left\{A-\infty\right\}=0. ◂$$

# Глава 3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

## 3.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

***Функциональной последовательностью*** (***ФП***) называют последовательность $\{f_n(x)\}$, элементами которой являются функции

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots,$$

определенные на некотором множестве $A$, называемой ***областью определения*** этой последовательности.

ФП $\{f_n(x)\}$ называется ***равномерно ограниченной на множестве A***, если выполняется одно из двух эквивалентных условий:

1) $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall n\ \forall x \in A\ \ |f_n(x)| < C$;

2) $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall n\ \sup\limits_{x\in A}|f_n(x)| < C$.

ФП $\{f_n(x)\}$ называется ***возрастающей на множестве*** $A$ (или ***возрастающей в каждой точке множества*** $A$), если

$$\forall x \in A\ \forall n\ f_{n+1}(x) < f_n(x).$$

Аналогично определяются ***убывающая***, ***невозрастающая*** и ***неубывающая ФП***.

ФП $\{f_n(x)\}$ называется ***сходящейся в точке*** $x_0 \in A$, если числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится.

ФП называется ***сходящейся*** (или ***поточечно сходящейся***) ***на множестве*** $A$, если она сходится в каждой точке этого множества. Если ФП $\{f_n(x)\}$ на множестве $A$ сходится поточечно к ***предельной функции*** $f(x)$, то символически это записывают следующим образом:

$$\forall x \in A\ \ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{или} \quad f_n(x) \underset{A}{\to} f(x).$$

Пример 3.1. Предельная функция $f(x)$ последовательности

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^{4n} + x^{-2n} + 4^n}$$

имеет вид $f(x) = \max\{x^4, x^{-2}, 4\} = \begin{cases} x^{-2},\ 0 < |x| < 0{,}5; \\ 3,\ 0{,}5 \le |x| \le \sqrt{2}; \\ x^4,\ |x| > \sqrt{2}. \end{cases}$

## 3.2. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

Последовательность $\{f_n(x)\}$ ***сходится*** к $f(x)$ ***равномерно на множестве*** $A$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n \ge n_0 \;\; \forall x \in A \;\; \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon. \qquad (3.1)$$

Обозначение: $f_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$.

Сущность равномерной сходимости ФП состоит в том, что $\forall \varepsilon > 0$ можно выбрать такой номер $n_0(\varepsilon)$, зависящий *только от заданного* $\varepsilon$ и не зависящий от выбора точки $x \in A$, что при $n \ge n_0(\varepsilon)$ неравенство

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

будет выполняться всюду на множестве $A$, т.е. «графики» функций $f_n(x)$ расположены в «$\varepsilon$-полоске», окружающей график функции $f(x)$ (рис. 1).

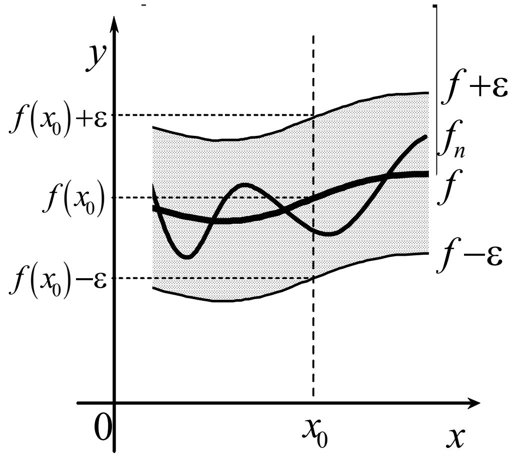

*Рис. 1*

Таким образом, в случае равномерной сходимости $\forall \varepsilon > 0$ при всех достаточно больших $n$ (а именно при $n \ge n_0(\varepsilon)$) значения функции $f_n(x)$ приближают функцию $f(x)$ с погрешностью, меньшей $\varepsilon$, сразу на всем множестве $A$.

**Лемма 3.1.** Если $f_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$, то $f_n(x) \underset{A}{\to} f(x)$.

Если условие равномерной сходимости не выполняется, т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \;\; \forall k \;\; \exists n \ge k \;\; \exists x \in A \;\; \left|f_n(x) - f(x)\right| \ge \varepsilon_0, \qquad (3.2)$$

то ФП $\{f_n(x)\}$ ***не сходится равномерно к*** $f(x)$ ***на множестве A.*** В этом случае пишут $f_n(x) \underset{A}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

Если $f_n(x) \underset{A}{\to} f(x)$, но $f_n(x) \underset{A}{\not\rightrightarrows} f(x)$, то говорят, что ФП $\{f_n(x)\}$ ***сходится к*** $f(x)$ ***на множестве A неравномерно.***

Равномерная сходимость ФП на множестве $A$ является глобальным свойством, характеризующим поведение последовательности на множестве «в целом», т.е. множество рассматривается как единый объект. Поэтому недопустима формулировка локального типа: «последовательность равномерно (неравномерно) сходится *в точках* множества $A$». В то же время определение равномерной сходимости имеет смысл и для множества $A$, состоящего из одной точки: $A=\{x_0\}$, и эквивалентно в этом случае сходимости последовательности в точке $x_0$. Если мы хотим говорить о равномерной сходимости в таком случае, то формулировка должна быть следующей:

«ФП сходится равномерно на множестве $A=\{x_0\}$»

(т.е. не в точке $x_0$, а на множестве, состоящем из одной точки $x_0$).

Для практического исследования равномерной сходимости удобно использовать следующую теорему.

**Теорема 3.1.** $f_n(x)\underset{A}{\rightrightarrows} f(x) \iff \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in A}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0$.

▶ $f_n(x)\underset{A}{\rightrightarrows} f(x) \iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0\ \forall x\in A\ \left|f_n(x)-f(x)\right|\leq\varepsilon \iff$

$$\iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0\ \sup_{x\in A}\left|f_n(x)-f(x)\right|\leq\varepsilon \iff$$

$$\iff \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in A}\left|f_n(x)-f(x)\right|\right)=0. \blacktriangleleft$$

Пример 3.2. Покажем, что на множестве $[0,1)$ ФП $f_n(x)=x^n$ сходится к функции $f(x)=0$ неравномерно, но на любом полуинтервале $[0,\alpha)$, $\alpha<1$, сходимость равномерная.

▶ Очевидно, что $\forall x\in[0,1)\ \lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$, поэтому для определения характера сходимости вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,\alpha)}\left|f_n(x)-f(x)\right|$. Так как

$$\sup_{x\in[0,\alpha)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\sup_{x\in[0,\alpha)}\left|x^n\right|=\sup_{x\in[0,\alpha)}x^n=\alpha^n, \tag{3.3}$$

получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,\alpha)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\begin{cases}0,\ \alpha\in[0,1);\\ 1,\ \alpha=1.\end{cases}$$

Следовательно, на полуинтервале $[0,\alpha)$, $\alpha<1$, сходимость равномерная, а на полуинтервале $[0,1)$ – неравномерная. ◀

**Теорема 3.2 (критерий Коши равномерной сходимости).** Для того чтобы ФП $\{f_n(x)\}$ равномерно на множестве $A$ сходилась к некоторой предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\ \forall n,m\ge n_0\ \ \forall x\in A\ \left|f_n(x)-f_m(x)\right|<\varepsilon \qquad (3.4)$$

или

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\ \forall n\ge n_0\ \ \forall p\in\mathbb{N}\ \forall x\in A\ \left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon. \quad (3.5)$$

▸ *Необходимость.* Пусть $\varepsilon>0$ задано. По определению равномерной сходимости $\exists n_0(\varepsilon)\ \forall n\ge n_0\ \ \forall x\in A\ \ \left|f_n(x)-f(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тогда $\forall m\ge n_0(\varepsilon)\ \forall x\in A$

$$\left|f_n(x)-f_m(x)\right|\le\left|f_n(x)-f(x)\right|+\left|f_m(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

*Достаточность.* Выполнение условий теоремы означает сходимость ФП $\{f_n(x)\}$ при любом фиксированном $x\in A$ и существование предельной функции $f(x)$. Перейдя к пределу в неравенстве $\left|f_n(x)-f_m(x)\right|<\varepsilon$ при $m\to\infty$, получим $\left|f_n(x)-f(x)\right|\le\varepsilon$. ◂

Замечание. Утверждения (3.4) и (3.5) можно записать в виде:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\ \forall n,m\ge n_0\ \sup_{x\in A}\left|f_n(x)-f_m(x)\right|<\varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\ \forall n\ge n_0\ \ \forall p\in\mathbb{N}\ \sup_{x\in A}\ \left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon.$$

**Теорема 3.3.** Если все члены ФП непрерывны на *замкнутом* множестве $A$, а сама ФП сходится равномерно на множестве $\operatorname{int}A$ его внутренних точек, то ФП сходится равномерно и на множестве $A$.

▸ Утверждение теоремы следует из критерия Коши, если учесть, что для всякой непрерывной на *замкнутом* множестве функции

$$\sup_{x\in A}f(x)=\sup_{x\in\operatorname{int}A}f(x). \ ◂$$

**Следствие.** Если ФП непрерывных на *замкнутом* множестве $A$ функций сходится на множестве его внутренних точек и расходится хотя бы в одной из его граничных точек, то сходимость на $A$ неравномерная.

Пример 3.3. Последовательность $f_n(x)=\dfrac{n}{n^2x+1}$ сходится к функции $f(x)=0$ неравномерно на $(0,1)$, так как числовая последовательность $f_n(0)=n$ расходится.

## 3.3. СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

### 1. Основные свойства

**1.** Если $f_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$ и $g_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} g(x)$, то:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} \alpha f(x) + \beta g(x);$$

**2.** Если $|f_n(x)| \underset{A}{\rightrightarrows} |f(x)|$, то $f_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$.

**3**. Если $f_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$, то $\forall B \subset A \ f_n(x) \underset{B}{\rightrightarrows} f(x)$.

**Следствие.** Если ФП $\{f_n(x)\}$, определена на множестве $Q$ и для некоторого $A \subset Q \ f_n(x) \underset{A}{\not\rightrightarrows} f(x)$, то $\forall B \ A \subset B \subset Q \ f_n(x) \underset{B}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

**4**. Если $f_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$ и $f_n(x) \underset{B}{\rightrightarrows} f(x)$, то $f_n(x) \underset{A \cup B}{\rightrightarrows} f(x)$. *Для бесконечного объединения это утверждение неверно.*

**5**. Числовую последовательность можно рассматривать как ФП, каждый элемент которой есть константа на данном множестве. Сходимость такой ФП на любом множестве равномерна.

**6.** Если $f_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$ и функция $g(x)$ ограничена на множестве $A$, то $f_n(x) g(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x) g(x)$.

**7**. Если $f_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$ и все члены ФП являются многочленами степени не выше $k$, то и предельная функция этой ФП также многочлен степени не выше $k$.

**8.** Если $f_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$ и все члены ФП являются ограниченными на множестве $A$ функциями, то и предельная функция будет ограничена на множестве $A$ .

**9**. Если $f_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$ и функция $f(x)$ ограничена на множестве $A$, то при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ ФП $g_n(x) = f_{n_0+n}(x)$ равномерно ограничена на $A$.

## 2. Предельный переход

**Теорема 3.4.** Пусть $a$ – произвольная предельная точка множества $A$. Если $f_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$ и все элементы ФП $\{f_n(x)\}$ имеют в точке $a$ *конечное* предельное значение, то и предельная функция $f(x)$ имеет в точке $a$ предельное значение, причем

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right),$$

т.е. символ $\lim\limits_{n\to\infty}$ предела последовательности и символ $\lim\limits_{x\to a}$ предельного значения функции можно переставлять местами (или, как говорят, ***к пределу*** при $x \to a$ можно ***переходить поэлементно***).

## 3. Непрерывность предельной функции

**Теорема 3.5.** Если $f_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$ и все члены ФП являются непрерывными на $[a,b]$ функциями, то и предельная функция $f(x)$ будет непрерывна на $[a,b]$.

Замечание 1. В теореме 3.5 вместо сегмента $[a,b]$ можно взять интервал, полуинтегрвал, луч или всю вещественную прямую.

▸ Пусть $A$ произвольный промежуток и $f_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$. Покажем, что из непрерывности элементов ФП следует непрерывность предельной функции. Пусть $x_0$ – произвольная точка множества $A$. Тогда существует отрезок $[a,b]$ такой, что $x_0 \in [a,b]$ и $[a,b] \subset A$. Для этого отрезка все условия теоремы 3.5 выполнены, следовательно, $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, и в частности в точке $x_0$. В силу произольности выбора точки $x_0$, получаем непрерывность $f(x)$ на всем множестве $A$. ◂

Замечание 2. Теорема 3.5 может быть использована для доказательства неравномерности сходимости. Если рассматривается *сходящаяся* ФП, члены которой непрерывны на множестве $A$, но предельная функция является разрывной, то ФП сходится *неравномерно* на множестве $A$.

Пример 3.4. На сегменте $[0,1]$ последовательность непрерывных функций $f_n(x)=x^n$ сходится к разрывной функции $f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$ поэтому сходимость неравномерная (Отметим, что в примере 3.2 неравномерность сходимости была доказана по определению).

Замечание 3. Требование равномерной сходимости в тексте теоремы не может быть опущено, доказательством этого может служить предыдущий пример. Однако равномерная сходимость фигурирует в теореме лишь как достаточное условие непрерывности предельной функции.

Пример 3.5. Покажем, что $\dfrac{nx}{1+n^2x^4} \underset{[0,1]}{\not\rightrightarrows} 0$.

$$\blacktriangleright \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\frac{nx}{1+n^2x^4}=\left[\left(\frac{nx}{1+n^2x^4}\right)'_x=\frac{n\left(1-3n^2x^4\right)}{\left(1+n^2x^4\right)^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{3n^2}}}{1+n^2\cdot\dfrac{1}{3n^2}}\not\to 0.\blacktriangleleft$$

**Теорема 3.6 (признак Дини для ФП).** Пусть ФП $\{f_n(x)\}$ не убывает (или не возрастает) в каждой точке сегмента $[a,b]$ и сходится на этом сегменте к предельной функции $f(x)$. Тогда, если все элементы ФП $\{f_n(x)\}$ и предельная функция $f(x)$ непрерывны на $[a,b]$, то сходимость ФП $\{f_n(x)\}$ является равномерной на $[a,b]$.

Замечание. В теореме 3.6 существенно условие монотонности.

$\blacktriangleright$ Например, ФП $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^4}$ не монотонна на $[0,1]$ (она возрастает при $n\le\left[\dfrac{1}{x^2}\right]$ и убывает при $n>\left[\dfrac{1}{x^2}\right]$) и при этом $f_n(x)\underset{[0,1]}{\not\rightrightarrows} 0$ (см. замечание 3 к теореме 3.5). $\blacktriangleleft$

## 4. Почленное интегрирование

**Теорема 3.7.** Если ФП $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к функции $f(x)$, а каждая из функций $f_n(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то предельная функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\forall x_0 \in [a,b] \quad \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \Big( \lim_{n\to\infty} f_n(t) \Big) dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt. \qquad (3.6)$$

З а м е ч а н и е 1. В теореме 3.7 существенно условие равномерной сходимости.

▸ $\dfrac{nx}{1+n^2x^4} \underset{[0,1]}{\not\rightrightarrows} 0$ (см. пример 3.5), но при этом

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nt}{1+n^2t^4}\,dt = \lim_{n\to\infty}\left( \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(nt)\Big|_0^1 \right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{4}. \text{ ◂}$$

З а м е ч а н и е 2. Теорема дает лишь достаточное условие возможности почленного интегрирования последовательности.

▸ Ранее было показано (см. пример 3.2), что ФП $f_n(x) = x^n$ на сегменте $[0,1]$ сходится *неравномерно* к разрывной функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1); \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Но при этом справедливость равенства (3.6) легко доказать непосредственным интегрированием. ◂

**Теорема 3.8.** Если все члены ФП $\{f_n(x)\}$ имеют первообразную на сегменте $[a,b]$ и $f_n(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$, то функция $f(x)$ также имеет первообразную на $[a,b]$. Более того, если $x_0 \in [a,b]$, то последовательность первообразных $\Phi_n(x)$ функций $f_n(x)$, удовлетворяющих условию $\Phi_n(x_0) = 0$, сходится равномерно на $[a,b]$ к первообразной $\Phi(x)$ функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $\Phi(x_0) = 0$.

**5. Почленное дифференцирование**

**Теорема 3.9.** Если ФП $\{f_n(x)\}$ дифференцируемых на $[a,b]$ функций сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$, а ФП $\{f_n'(x)\}$ сходится равномерно на $[a,b]$, то сама ФП $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к некоторой дифференцируемой функции $f(x)$ и

$$\forall x \in [a,b] \;\; f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Замечание 1. В теореме 3.9 под существованием производных подразумевается существование производной на $(a,b)$, правой производной в точке $a$ справа и левой производной в точке $b$ слева.

## 3.4. СХОДИМОСТЬ В СРЕДНЕМ

***ФП*** $\{f_n(x)\}$ интегрируемых с квадратом функций ***сходится в среднем на*** $[a,b]$ к интегрируемой с квадратом функции $f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \; \forall n > N \;\; \int_a^b \left(f_n(x) - f(x)\right)^2 dx < \varepsilon,$$

или, что тоже самое,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(f_n(x) - f(x)\right)^2 dx = 0.$$

Замечание 1. Сходимость в среднем также называют средне квадратичной сходимостью.

Замечание 2. В определении предполагается, что функции $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ и функция $f(x)$ интегрируемы с квадратом на $[a,b]$, а значит, и функция

$$\left(f_n(x) - f(x)\right)^2 = f_n^2(x) + f^2(x) - 2f_n(x)f(x)$$

будет интегрируема на $[a,b]$.

**Лемма**. Если ФП $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к функции $f(x)$ на множестве $A$, то эта ФП сходится в среднем к $f(x)$ и на любом множестве $B \subset A$.

**Теорема 3.10.** Если ФП $\{f_n(x)\}$ сходится на $[a,b]$ к функции $f(x)$ равномерно, то она сходится к этой же функции в среднем. Обратное, в общем случае, неверно.

▶ Так как по условию $f_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} f(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} \left| f_n(x) - f(x) \right| = 0.$$

Следовательно,

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left( f_n(x) - f(x) \right)^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| f_n(x) - f(x) \right|^2 dx \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} \left| f_n(x) - f(x) \right|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{x\in[a,b]} \left| f_n(x) - f(x) \right|^2 \int_a^b dx \right\} = 0.$$

Для доказательства второго утверждения достаточно рассмотреть ФП $f_n(x) = x^n$ на $[0,1]$. Ранее было показано, что эта ФП сходится **не**равномерно к фунции $f(x) = 0$ на множестве $(0,1] \subset [0,1]$. Но при этом она сходится в среднем на $[0,1]$ к функции $f(x) = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left( f_n(x) - f(x) \right)^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^{2n} dx < \left. \frac{x^{2n}}{2n} \right|_0^1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. ◀$$

Замечание. Если ФП $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем на $[a,b]$ к функции $f(x)$, то она сходится в среднем на $[a,b]$ к любой функции, отличной от $f(x)$ не более, чем в конечном количестве точек сегмента $[a,b]$.

**Теорема 3.11 (почленное интегрирование ФП).** Если ФП $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем на $[a,b]$ к функции $f(x)$, то эту последовательность можно почленно интегрировать на $[a,b]$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

▸ Доказательство теоремы основано на неравенстве Коши-Буняковского:

$$\left|\int_a^b h(x)g(x)dx\right|\le\sqrt{\int_a^b h^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx}.$$

Пусть $h(x)=f_n(x)-f(x)$, $g(x)\equiv 1$. Тогда

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b\left(f_n(x)-f(x)\right)dx\right|\le$$

$$\le\sqrt{\int_a^b\left(f_n(x)-f(x)\right)^2dx\int_a^b dx}=\sqrt{(b-a)\int_a^b\left(f_n(x)-f(x)\right)^2dx}.$$

Так как по условию $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем на $[a,b]$ к функции $f(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{(b-a)\int_a^b\left(f_n(x)-f(x)\right)^2dx}=0,$$

а значит,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx. \blacktriangleleft$$

# Глава 4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

## 4.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

***Функциональным рядом*** (***ФР***) называют формально записанную сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots, \tag{3.7}$$

в которой все функции $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x), \ldots$ определены на некотором множестве $A$, называемом ***областью определения*** этого ряда. Так же как и в теории числовых рядов, конечную сумму $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ называют ***n-й частичной суммой ФР*** (3.7).

Как и в случае числовых рядов, каждому ФР согласно определению соответствует ФП его частичных сумм $\{S_n(x)\}$. И наоборот, каждой ФП $\{S_n(x)\}$ соответствует ФР с членами

$$u_1(x) = S_1(x),\ u_k(x) = S_k(x) - S_{k-1}(x) \text{ при } k \ge 2,$$

для которого эта последовательность является последовательностью частичных сумм.

Поэтому любую теорему, доказанную для ФП, можно переформулировать в соответствующую теорему для ФР, и наоборот.

ФР $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется ***сходящимся в точке*** $x_0 \in A$, если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$.

ФР называется ***сходящимся*** (или ***поточечно сходящимся***) ***на множестве*** $A$, если он сходится в каждой точке этого множества.

Множество всех точек $x_0$, в которых сходится данный ФР, называется ***множеством сходимости*** (или ***множеством поточечной сходимости***) ФР. На множестве сходимости ФР определены: ***сумма ряда*** $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и ***n-й остаток ряда*** $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$.

## 4.2. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

***ФР*** называется ***равномерно сходящимся на множестве*** $A$ к своей сумме $S(x)$, если $S_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} S(x)$.

**Лемма 4.2.** ФР равномерно сходится на множестве $A$ к своей сумме $S(x)$ тогда и только тогда, когда его остаток равномерно на $A$ сходится к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left|S(x) - S_n(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left|r_n(x)\right| = 0,\ n\to\infty.$$

### 1. Критерий Коши равномерной сходимости ФР

**Теорема 4.1.** Для того чтобы ФР $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно на множестве $A$ сходился к некоторой сумме, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in A \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon,$$

или, что тоже самое,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)\ \forall p \in \mathbb{N}\ \sup_{x\in A} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

▸ Утверждение теоремы получается, если критерий Коши для ФП, применить к последовательности частичных сумм ФР. ◂

**Теорема 4.2.** Если ФР, все члены которого непрерывны на *замкнутом* множестве $A$, сходится равномерно на множестве $\operatorname{int} A$, то он сходится равномерно и на самом множестве $A$.

**Следствие.** Если ФР, все члены которого непрерывны на *замкнутом* множестве $A$, сходится на множестве $\operatorname{int} A$ и расходится хотя бы в одной из граничных точек множества $A$, то ФР сходится на $A$ неравномерно.

Замечание. Утверждения теорем 4.1, 4.2 получаются из теорем 3.2, 3.3, если применить последние к последовательности частичных сумм ряда.

П р и м е р 4.1. Исследуем на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2x^2+k},\ x\in(0,1] \tag{3.8}$$

▸ Поскольку $\dfrac{1}{k^2x^2+k}\sim\dfrac{1}{k^2x^2}$ при $k\to\infty$, ряд (3.8) сходится в силу признака сравнения.

Все члены ряда (3.8) непрерывны на отрезке $[0,1]$ и в точке $x=0$ данный ряд расходится, следовательно, согласно следствию из теоремы 4.2, ряд сходится на $(0,1]$ неравномерно. ◂

П р и м е р 4.2. Исследуем на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arcctg}(kx)}{k},\ x\in(0,+\infty). \tag{3.9}$$

▸ Ряд сходится на $(0,+\infty)$, так как

$$\forall x>0\quad 0<\frac{\operatorname{arcctg}(kx)}{k}=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{kx}\right)\le\frac{1}{k^2x}.$$

Поскольку все члены ряда (3.9) непрерывны на $[0,+\infty)$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arcctg}(0)}{k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\pi}{2k}$ расходится, то делаем вывод, что на луче $(0,+\infty)$ исходный ряд сходится неравномерно. ◂

### 2. Необходимое условие равномерной сходимости ФР

**Теорема 4.3.** Если ФР $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится равномерно на множестве $A$, то $u_n(x)\underset{A}{\rightrightarrows}0$.

▸ Из равномерной сходимости ряда и леммы 4.2 следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}\left|S(x)-S_n(x)\right|=0.$$

Тогда, учитывая, что

$$\left|u_n(x)\right|=\left|S_n(x)-S_{n-1}(x)\right|\le\left|S_n(x)-S(x)\right|+\left|S(x)-S_{n-1}(x)\right|,,$$

получим $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in A}\left|u_n(x)\right|=0$, а значит, $u_n(x)\underset{A}{\rightrightarrows}0$ ◂

Замечание. Условие $u_n(x)\underset{A}{\rightrightarrows}0$, не является достаточным даже для того, чтобы множество $A$ входило во множество сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$. Например, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x+k}$ расходится в каждой точке интервала $(0,1)$ и при этом

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{1}{x+k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0.$$

### 3. Достаточные признаки равномерной сходимости

**Теорема 4.4 (признак Вейерштрасса).** Если ФР $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ определен на множестве $A$ и существует сходящийся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$, называемый ***мажорантой*** ФР $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$, такой, что

$$\forall n\ \forall x\in A\quad |u_n(x)|\le c_n,$$

то ФР $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится равномерно и абсолютно на множестве $A$.

▸ Утверждение теоремы справедливо в силу критерия Коши:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\ \ \forall n>n_0(\varepsilon)\ \ \forall p\in\mathbb{N}\ \ \forall x\in A$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|\le\sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k(x)|<\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k\right|=\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k<\varepsilon.$$ ◂

**Следствие 1.** Если к ряду $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ применим признак Вейерштрасса, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(x)|$ также будет равномерно сходящимся.

**Следствие 2.**. Если ФР $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится абсолютно в точках $a$ и $b$, а функции $u_k(x)$ монотонны на $[a,b]$, то ФР сходится абсолютно и равномерно на $[a,b]$.

Замечание. При анализе сходимости ФР $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве $A$ с помощью признака Вейерштрасса оптимальным – с наиболее точной оценкой – мажорирующим рядом является ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x\in A} |u_k(x)|$. Однако часто бывает достаточно более грубой, но легче получаемой оценки для $|u_k(x)|$.

Пример 4.3. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2\left(x^k + x^{-k}\right)}{\sqrt{k!}},\ x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right].$$

▸ Так как $\sup\limits_{x\in\left[\frac{1}{2},2\right]} \left(x^k + x^{-k}\right) = 2^k + 2^{-k} < 2^{k+1}$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}k^2}{\sqrt{k!}}$ мажорирует исходный ряд и по теореме Вейерштрасса из его сходимости будет следовать равномерная сходимость данного ряда.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}k^2}{\sqrt{k!}}$ сходится по признаку Даламбера:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+2}(k+1)^2}{\sqrt{(k+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{k!}}{2^{k+1}k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2(k+1)^2}{k^2\sqrt{k+1}} = 0 < 1,$$

а значит, исходный ряд сходится равномерно. ◂

Возможны случаи, когда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно, будучи условно (см. пример 4.5) или даже абсолютно сходящимся, но ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$ все же сходится неравномерно (см. примеры 4.7 и 4.1). Подобные случаи заведомо не охватываются признаком Вейерштрасса. Признаки, позволяющие исследовать такие ряды, будут рассмотрены ниже. Следующий пример показывает, что даже в случае знакопостоянных рядов, признак Вейерштрасса не является необходимым.

Пример 4.4. Покажем, что существует знакопостоянный ряд, для которого нет мажорирующего сходящегося числового ряда.

▸ Определим функцию $u_k(x)$ следующим образом (рис. 2):

– $u_k(x)=0$ на лучах $\left(-\infty,\dfrac{1}{k+1}\right],\ \left[\dfrac{1}{k},+\infty\right)$;

– $u_k(x)=\dfrac{1}{k}$ в середине отрезка $\left[\dfrac{1}{k+1},\dfrac{1}{k}\right]$;

– $u_k(x)$ линейна и непрерывна на каждом из отрезков

$$\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}\right)\right],\quad \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}\right),\frac{1}{k}\right].$$

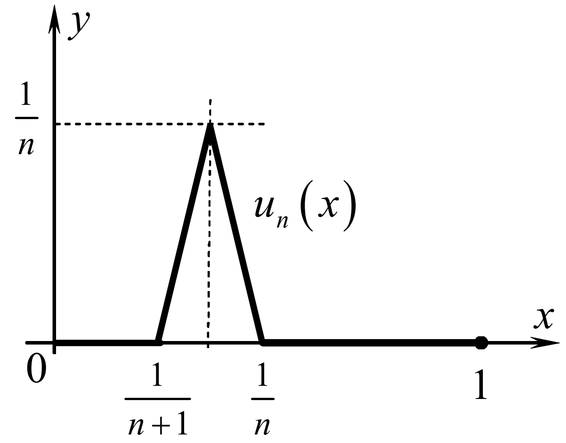

*Рис. 2*

Покажем, что ФР $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится равномерно на [0,1]. Действительно, если

$$r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)$$

остаток этого ряда, то для любого $x\in[0,1]$ среди его членов существует не более одного, для которого

$$u_k(x)\neq 0,\ k\geq n+1.$$

При этом очевидно $0\leq u_k(x)\leq\dfrac{1}{k}\leq\dfrac{1}{n+1}$, поэтому $0\leq r_n(x)\leq\dfrac{1}{n+1}$, следовательно, $r_n(x)\underset{(0,1)}{\rightrightarrows}0$ при $n\to\infty$, т.е. рассматриваемый ряд равномерно сходится на отрезке $[0,1]$.

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ – такой числовой ряд, что $\forall x\in[0,1]\ \ 0\leq u_k(x)\leq a_k$, то $\dfrac{1}{k}=\max\limits_{[0,1]}u_k(x)\leq a_k$, а значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ расходится.

Таким образом, в рассмотренном случае числового ряда, удовлетворяющего по отношению к функциональному ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ условиям признака Вейерштрасса, заведомо нет. ◂

**Признак Дирихле и признак Абеля**

| Признак Дирихле | Признак Абеля |
|---|---|
| Пусть функции $u_n(x)$, $v_n(x)$, $x \in A$, удовлетворяют условиям: | |
| 1) ФП $u_n(x) \underset{A}{\rightrightarrows} 0$, $n \to \infty$; | 1) ФП $\{u_n(x)\}$ равномерно ограничена на $A$; |
| 2) $\forall x \in A$ числовая последовательность $\{u_n(x)\}$ монотонна относительно параметра $n$; | |
| 3) ФП частичных сумм $\{V_n(x)\}$, $V_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k(x)$ равномерно ограничена на $A$. | 3) ФР $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ сходится равномерно на $A$. |
| Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) v_k(x)$ сходится равномерно на множестве $A$. | |

▸ Доказательства приведенных выше признаков равномерной сходимости проводятся так же, как и доказательства соответствующих признаков сходимости числовых рядов. ◂

Замечание 1. Признаки Дирихле и Абеля, в отличие от признака Вейерштрасса, применимы и к условно сходящимся рядам.

Замечание 2. В признаках Дирихле и Абеля характер монотонности при разных $x$ может быть различным (см. пример 4.6).

Пример 4.5. Исследуем на множестве $[0, +\infty)$ сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k} + x}. \tag{3.10}$$

▸ Ряд (3.10) сходится равномерно на $[0, +\infty)$ в силу признака Дирихле, так как выполняются соответствующие условия:

1. Последовательность частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k$ равномерно ограничена на $[0, +\infty)$ числом 1.

2. $\forall x \in [0,\infty)$ последовательность $\dfrac{1}{\sqrt{k}+x}$ убывает по $k$.

3. $\dfrac{1}{\sqrt{k}+x} \underset{[0,+\infty)}{\rightrightarrows} 0$, так как $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \dfrac{1}{\sqrt{k}+x} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}} = 0$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{k}+x}\right|$ расходится $\forall x \in [0,\infty)$, так как $\left|\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}+x}\right| \sim \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ при $k\to\infty$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ расходится.

Таким образом, исходный ряд сходится на множестве $[0,+\infty)$ условно и равномерно. ◂

Пример 4.6. Исследуем на множестве $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right)}{\sqrt{k}+x}. \qquad (3.11)$$

▸ Ряд (3.11) сходится равномерно на $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ в силу признака Абеля, так как выполняются соответствующие условия:

1. Равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}+x}$ на $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ доказана в предыдущем примере.

2. $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ функция $\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right)$ монотонна по $k$ (при $x>0$ возрастает, при $x<0$ убывает, а при $x=0$ $\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right) \equiv 0$).

3. $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ $\left|\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right)\right| < 1$.

Ряд (3.11) сходится условно, так как $\left|\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right)}{\sqrt{k}+x}\right| \sim \dfrac{|x|}{k}$ при $k \to \infty$,

а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{|x|}{k}$ расходится $\forall x \neq 0$.

Таким образом, на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ ряд (3.11) сходится равномерно, при этом на множестве $\left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ сходимость условная, а в точке $x = 0$ абсолютная. ◂

П р и м е р 4.7. Исследуем на множестве $(0,1]$ сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 x^2 + k}. \tag{3.12}$$

▸ Поскольку $|u_k(x)| = \dfrac{1}{k^2 x^2 + k} \sim \dfrac{1}{k^2 x^2}$ при $k \to \infty$, ряд (3.12) сходится абсолютно в силу признака сравнения.

Покажем теперь равномерную сходимость ряда на $(0,1]$. Действительно,

1) последовательность частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k$ равномерно ограничена на $(0,1]$ числом 1;

2) $\forall x \in (0,1]$ последовательность $\dfrac{1}{k^2 x^2 + k}$ убывает по $k$;

3) $\dfrac{1}{k^2 x^2 + k} \underset{(0,1]}{\rightrightarrows} 0$, так как $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in(0,1]} \left|\dfrac{1}{k^2 x^2 + k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k} = 0$.

Таким образом, в силу признака Дирихле ряд (3.12) сходится равномерно на $(0,1]$. ◂

## 4.3. СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ[1]

### 1. Основные свойства

**1.** Если ФР $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u(x)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) = v(x)$ сходятся равномерно на множестве $A$, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ФР $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha u_k(x) + \beta v_k(x)\right)$ сходится равномерно на $A$ к функции $\alpha u(x) + \beta v(x)$;

**2.** Если ФР $\sum_{k=1}^{\infty} \left|u_k(x)\right|$ сходится равномерно на множестве $A$, то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $A$.

**3**. Если ФР сходится равномерно на множестве $A$, то сходимость будет равномерной на любом его подмножестве.

**4**. Если ФР сходится равномерно на каждом из множеств $A_1$ и $A_2$, то на множестве $A = A_1 \cup A_2$ этот ФР сходится равномерно. *Для бесконечного объединения это утверждение неверно.*

**5**. Числовой ряд можно рассматривать как ФР, каждый элемент которого есть константа на данном множестве. Сходимость такого ФР на любом множестве равномерна.

**6**. Если ФР $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве $A$ сходится равномерно к функци $u(x)$, а функция $v(x)$ равномерно ограничена на $A$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(u_k(x) v(x)\right)$ сходится равномерно на $A$ к функции $u(x)v(x)$.

---

[1] Все свойства и теоремы этой главы получаются из соответствующих свойств и теорем для функциональных последовательностей, если применить последние к последовательности частичных сумм ряда.

**2. Предельный переход**

**Теорема 4.5.** Пусть $a$ – произвольная предельная точка множества $A$. Если ФР $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве $A$ к сумме $S(x)$ и у всех членов этого ряда существует в точке $a$ *конечное* предельное значение, то сумма ряда $S(x)$ имеет в точке $a$ предельное значение, причем

$$\lim_{x\to a} S(x) = \lim_{x\to a} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to a} u_k(x),$$

т.е. символ $\lim$ предела и символ $\Sigma$ суммирования можно переставлять местами (или, как говорят, ***к пределу*** можно ***переходить почленно***).

**3. Непрерывность суммы ряда**

Сумма конечного числа непрерывных функций непрерывна. Для бесконечного количества слагаемых это утверждение не всегда выполняется.

Пример 4.8. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x)$, $0 \le x \le 1$. При $x=1$ все члены ряда, а с ними и сумма ряда обращаются в 0; при $x<1$, суммируя прогрессию, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1.$$

Хотя члены ряда непрерывны на сегменте $[0,1]$, но сумма ряда в точке $x=1$ терпит разрыв! Отметим, что сходимость ряда здесь неравномерна, так как остаток ряда $r_n(x)$, равный $x^n$ (для $x<1$), стремится к 0 неравномерно (см. пример 3.2).

**Теорема 4.6.** Если все члены ФР $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и ряд сходится равномерно на $[a,b]$ к своей сумме $S(x)$, то и эта сумма будет непрерывна на $[a,b]$.

Замечание 1. В теореме 4.6 вместо сегмента $[a,b]$ можно взять интервал, полуинтегрвал, луч или всю вещественную прямую.

Замечание 2. Теорема 4.6 может быть использована для доказательства неравномерности сходимости. Если рассматривается *сходящийся* ФР, члены которого непрерывны на множестве $A$, но сумма ряда является разрывной, то ФР сходится *неравномерно* на множестве $A$.

Замечание 3. Требование равномерной сходимости в тексте теоремы не может быть опущено, доказательством этого может служить предыдущий пример. Однако равномерная сходимость фигурирует в теореме лишь как достаточное условие непрерывности предельной функции.

Пример 4.9. Покажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^x}$ сходится неравномерно на множестве $(1,+\infty)$ и при этом сумма ряда $S(x)$ непрерывна на этом множестве.

▸ Ранее (см. пример 1.11) было показано, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^x}$ сходится при $x>1$. Так как члены ряда суть непрерывные функции, то в силу следствия из теоремы 4.2 и с учетом расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k}$ получаем, что исходный ряд сходится на $(1,+\infty)$ неравномерно. Таким образом, на основании теоремы 4.6 сделать вывод о непрерывности суммы ряда нельзя.

Докажем непрерывность другим способом. Обозначим через $S(x)$ сумму ряда. Функция $S(x)$ непрерывна на луче $x>1$, если она непрерывна в каждой точке $x_0>1$.

Пусть $x_0>1$. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^q}$, где $q=\frac{1+x_0}{2}>1$. Этот *числовой* ряд сходится и мажорирует исходный ряд на луче $[q,+\infty)$. Поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^x}$, согласно признаку Вейерштрасса, сходится равномерно на луче $[q,+\infty)$, и с учетом непрерывности членов ряда получаем непрерывность функции $S(x)$ на луче $[q,+\infty)$, а значит, и в точке $x_0\in[q,+\infty)$.

В силу произвольности выбора точки $x_0$ мы доказали, что $S(x)$ непрерывна в каждой точке $x_0>1$. ◂

**Теорема 4.7 (признак Дини для ФР).** Если все члены ФР непрерывны и *неотрицательны* на сегменте $[a,b]$ и сумма этого ряда также непрерывна на $[a,b]$, то указанный ряд сходится к своей сумме равномерно на $[a,b]$.

▶ Неотрицательность членов ряда обеспечивает монотонность последовательности частичных сумм. Далее, применяя признак Дини для ФП (теорема 3.6), получим требуемое утверждение. ◀

Замечание. Теорема 4.7 может быть использована для доказательства разрывности суммы ФР: если рассматривается неравномерно сходящийся ФР, члены которого непрерывны и неотрицательны на замкнутом множестве $A$, то сумма ФР является разрывной.

Пример 4.10. Покажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^2 e^{-k^2 x^2}$ сходится на отрезке $[-1,1]$, причем к разрывной на этом отрезке функции.

▶ Поскольку

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 x^2 e^{-n^2 x^2}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} x^{\frac{2}{n}} e^{-nx^2} = 0,$$

ряд сходится согласно признаку Коши и его сумма $S(x)$ всюду определена на $\mathbb{R}$. Так как

$$\sup_{x\in[-1,1]} u_n(x) \geq u_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1},$$

на отрезке $[-1,1]$ не выполнено необходимое условие равномерной сходимости ряда. Следовательно, рассматриваемый ряд сходится неравномерно на $[-1,1]$ и его сумма $S(x)$ не обязана быть непрерывной на отрезке $[-1,1]$.

Покажем разрывность $S(x)$ на этом отрезке. Действительно, в рассматриваемом ряде члены непрерывны и неотрицательны на отрезке $[-1,1]$; если бы функция $S(x)$ была непрерывной на этом отрезке, то согласно признаку Дини ряд сходился бы на $[-1,1]$ равномерно. Но было показано, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^2 e^{-k^2 x^2}$ сходится неравномерно на $[-1,1]$, а значит, $S(x)$ разрывна на $[-1,1]$. ◀

**4. Почленное интегрирование**

**Теорема 4.8.** Если ФР $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, а каждая из функций $u_k(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(x)dx$, где $x_0 \in [a,b]$, сходится равномерно на $[a,b]$ и

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt,$$

т.е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ можно интегрировать почленно.

Пример 4.11. Найдем сумму $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k(2k+1)}$.

▸ Рассмотрим ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$. Этот ряд сходится на интервале $(-1,1)$, а его сумма равна $\frac{1}{1+x^2}$. На отрезке $[-q,q]$, $0<q<1$, ряд сходится равномерно, а его члены – непрерывные функции. Интегрируя этот ряд почленно от $0$ до $x$, где $x \in (-1,1)$, получим

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left(-t^2\right)^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt,$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k(2k+1)} = \sqrt{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}}{(2k+1)} = \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}. \blacktriangleleft$$

## 5. Почленное дифференцирование

**Теорема 4.9.** Если функции $u_k(x)$ имеют производные на $[a,b]$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, его сумма имеет производную на $[a,b]$, причем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

(т.е. ряд можно почленно дифференцировать).

Пример 4.12. Найдем сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k}$.

▸ Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$. Члены этого ряда являются непрерывными функциями; ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$, составленный из производных членов этого ряда, сходится равномерно на отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$, а его сумма равна $\frac{1}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$. Дифференцируя почленно ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = f(x)$, получим

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x},$$

$$\int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln|1-x| = -\ln(1-x).$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$, $-1 < x < 1$, а значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln 2. \blacktriangleleft$$

# Глава 5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Пусть $\{a_n\}$ – последовательность действительных чисел, $x_0 \in \mathbb{R}$. ***Степенным рядом*** (***СР***) называется функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n, \ x \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Числа $a_n, n = 0, 1, 2, ...,$ называются коэффициентами степенного ряда. Поскольку исследование сходимости ряда (4.1) эквивалентно исследованию сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \ x \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

в дальнейшем будем рассматривать ряды вида (4.2).

Отметим, что частичные суммы СР являются многочленами.

## 5.1. СХОДИМОСТЬ СТЕПЕННОГО РЯДА

Любой степенной ряд (4.2) при $x = 0$ сходится абсолютно.

**Лемма Абеля.** Пусть $\{a_n\}$, $\tilde{x} \neq 0$, таковы, что последовательность $\{a_n \tilde{x}^n\}$ ограничена. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно для $|x| < |\tilde{x}|$.

▸ Возьмем любое $x$, для которого $|x| < |\tilde{x}|$, и составим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. Так как по условию последовательность $\{a_n \tilde{x}^n\}$ ограничена, можно записать

$$|a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \left|\frac{x^n}{\tilde{x}^n}\right| \leq C \left|\frac{x^n}{\tilde{x}^n}\right|, \ C \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, члены ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ оказываются меньшими соответствующих членов сходящегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C \left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|^n$ (так как $\left|\frac{x}{\tilde{x}}\right| < 1$), а значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно. ◂

**Следствие.** Для каждого СР $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ существует некоторое $r$ (конечное или бесконечное), такое что при $|x| < r$ ряд сходится абсолютно, а при $|x| > r$ – расходится. Такое $r$ называют ***радиусом сходимости СР***. Если $r < \infty$, то интервал $(-r, r)$ называют ***интервалом сходимости СР.*** Так как согласно теореме множество сходимости СР может отличаться от интервала сходимости СР лишь в граничных точках последнего, то для нахождения промежутка сходимости СР достаточно найти радиус сходимости СР и выяснить сходится ли СР на границах интервала сходимости.

**Теорема 5.1 (теорема Коши – Адамара).** Положим

$$\rho := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}, \; 0 \le \rho \le +\infty; \; r := 1/\rho. \tag{4.3}$$

Тогда:

а) при $r = 0$ ряд (4.2) расходится $\forall x \ne 0$;

б) при $r = +\infty$ ряд (4.2) сходится абсолютно;

в) при $0 < r < +\infty$ ряд (4.2) сходится абсолютно для $\forall x \;\; |x| < r$ и расходится для $\forall x \;\; |x| > r$.

* ▸ а) $r = 0 \Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$.

Следовательно, существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, для которой $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to +\infty$ при $k \to +\infty$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 = k_0(\varepsilon) \; \forall k \ge k_0 \;\; \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \varepsilon.$$

Пусть $x$ – фиксировано. Учитывая, что по условию $x \ne 0$, для $\varepsilon = \frac{1}{|x|}$ можно утверждать, что $\exists k_0 \; \forall k \ge k_0 \;\; \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|x|}$.

Следовательно,

$$\forall x \ne 0 \; \exists \varepsilon = \frac{1}{|x|} \; \exists k_0 \; \forall k \ge k_0 \; \left|a_{n_k} x^{n_k}\right| > 1,$$

поэтому $a_n x^n \not\to 0$ при $n \to \infty$, т.е. не выполняется необходимое условие сходимости.

б) $r=+\infty \Leftrightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0$.

Так как $|a_n|>0$, из равенства $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\ \forall n\ge n_0\ \ \sqrt[n]{|a_n|}<\varepsilon.$$

Пусть $x$ – фиксировано, тогда для $\varepsilon=\dfrac{1}{2|x|}$ можно утверждать, что $\exists n_0\ \forall n\ge n_0\ \ \sqrt[n]{|a_n|}<\dfrac{1}{2|x|}$. Следовательно,

$$\forall x\ne 0\ \ \exists n_0(x)\ \forall n\ge n_0\ \ |a_n x^n|<\frac{1}{2^n}.$$

Из признаков сравнения, учитывая сходимость геометрического ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$, получаем абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.

в) $0<r<+\infty \Leftrightarrow 0<\rho=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<+\infty$.

1. Пусть $|x|>r$, т.е. $\rho>\dfrac{1}{|x|}$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, что

$$\forall k\ge 1\ \ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow |a_{n_k}x^{n_k}|>1.$$

Таким образом, $a_n x^n \not\to 0$, $n\to\infty$.

2. Пусть теперь $|x|<r$, т.е. $\rho|x|<1$. Рассмотрим $\alpha$ такое, что $\rho|x|<\alpha<1$. Поскольку $\rho<\dfrac{\alpha}{|x|}$, то

$$\exists n_0\ \ \forall n\ge n_0\ \sqrt[n]{|a_n|}<\frac{\alpha}{|x|}\Leftrightarrow |a_n x^n|<\alpha^n.$$

Отсюда, как и выше (учитывая, что $\alpha<1$), получаем абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. ◄

Замечание. Радиус сходимости СР $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ может быть вычислен как по формуле (4.3), так и по следующей формуле:

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

▸ По признаку Даламбера для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ получим

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}x|}{|a_n|} = \frac{|x|}{r}.$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно для всех $x$ таких, что $\frac{|x|}{r} < 1$, и расходится при $\frac{|x|}{r} > 1$.. ◂

Замечание. Для степенных рядов общего вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ радиус сходимости не зависит от $x_0$, его значение определяют коэффициенты $a_n$. ***Интервалом сходимости СР общего вида*** будет интервал, симметричный относительно $x_0$, длинной $2r$: $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Пример 5.1. Вычислим радиусы и множества сходимости следующих рядов:

$$1)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k + (-3)^k}{k+1} x^k;\quad 2)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(2+(-1)^k\right)^k}{k} (x+1)^k.$$

▸ 1. Ряд сходится на интервале $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$, так как

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{5^{n+1} + (-3)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + (-3/5)^n}{5(1 - 3(-3/5)^n)} \cdot \frac{1 + 2/n}{1 + 1/n} = \frac{1}{5},$$

Для нахождения множества сходимости исследуем поведение ряда на границах интервала сходимости.

При $x=\frac{1}{5}$ получим числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+\left(-3/5\right)^k}{k+1}$, который расходится, так как:

1) $\frac{1+\left(-3/5\right)^k}{k+1}\sim\frac{1}{k+1}$ при $k\to\infty$,

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$ расходится.

При $x=-\frac{1}{5}$ получим числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k+\left(3/5\right)^k}{k+1}$, который можно представить как сумму сходящихся рядов: ряда Лейбница $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{k+1}$ и сходящегося по признаку Абеля ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(3/5\right)^k}{k+1}$, а значит, этот ряд сходится.

Таким образом, множеством сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k+\left(-3\right)^k}{k+1}x^k$ будет промежуток $\left[-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$.

2. Предел отношения $\frac{\left|a_n\right|}{\left|a_{n+1}\right|}$ при $n\to\infty$ не существует, так как:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|a_{2k}\right|}{\left|a_{2k+1}\right|}=\lim_{k\to\infty}\frac{3^{2k}\left(2k+1\right)}{2k}=\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|a_{2k-1}\right|}{\left|a_{2k}\right|}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k}{\left(2k-1\right)\cdot 3^{2k}}=0.$$

Поэтому радиус сходимости вычислим по теореме Коши –Адамара:

$$\frac{1}{r}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{\left(2+\left(-1\right)^n\right)^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}=3.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2+(-1)^k\right)^k}{k}(x+1)^k$ сходится при $|x+1|<\frac{1}{3}$ и расходится при $|x+1|>\frac{1}{3}$. Исследуем поведение ряда на границах интервала сходимости.

При $x=-\frac{4}{3}$ получим числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2+(-1)^k\right)^k}{k}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$. Этот ряд расходится, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2+(-1)^k\right)^k}{k}\left(-\frac{1}{3}\right)^k=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(2+(-1)^{2m}\right)^{2m}}{2m}\left(-\frac{1}{3}\right)^{2m}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(2+(-1)^{2m-1}\right)^{2m-1}}{2m-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{2m-1}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2m-1}}{(2m-1)3^{2m-1}}.$$

Первый ряд в сумме расходится, а второй сходится по признаку Абеля, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2+(-1)^k\right)^k}{k}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$ расходится.

При $x=-\frac{2}{3}$ получим числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2+(-1)^k\right)^k}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k$, расходимость которого доказывается аналогично доказательству расходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2+(-1)^k\right)^k}{k}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$.

Таким образом, множеством сходимости степенного ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(2+(-1)^k\right)^k}{k}(x+1)^k$ будет интервал $\left(-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$. ◄

## 5.2. СВОЙСТВА СТЕПЕННОГО РЯДА

**Теорема 5.2 (теорема Абеля о равномерной сходимости).** Степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится равномерно на любом *отрезке* вида $[-q, q]$, содержащемся во множестве сходимости.

▶ Пусть $r$ – радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и $|q| < r$. Так как числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k q^k$ сходится абсолютно (в силу теоремы 5.1), являясь мажорантой ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ на отрезке $[-q, q]$, то по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на $[-q, q]$.

Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится и в точках $x_0 = \pm q$, то равномерную сходимость ряда на промежутке, содержащем точку $x_0$, получаем с помощью признака Абеля с учетом равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k \left( \frac{x}{x_0} \right)^k . \blacktriangleleft$$

Замечание. Согласно теоремам 5.1 и 5.2 степенной ряд на любом *отрезке*, целиком содержащемся внутри интервала сходимости, сходится абсолютно и равномерно.

**Теорема 5.3.** Сумма степенного ряда непрерывна на его множестве сходимости.

▶ Пусть $x$ – произвольная точка множества сходимости $A$. Выберем некоторый отрезок, такой что

$$x \in [\alpha, \beta] \text{ и } [\alpha, \beta] \subset A .$$

На $[\alpha, \beta]$ члены ряда непрерывны, а сам ряд сходится равномерно в силу предыдущей теоремы. Тогда, согласно теореме 4.6, его сумма непрерывна на $[\alpha, \beta]$, а значит, и в точке $x$. Таким образом, мы доказали, что сумма ряда непрерывна в произвольной точке множества сходимости, т.е. на всем множестве сходимости. ◀

**Теорема 5.4.** Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = S(x), x \in A$, – степенной ряд с радиусом сходимости $r$ и множеством сходимости $A$. Тогда:

1) $S(x) \in C^{(1)}((-r,r))$ и $\forall x \in (-r,r)$ $S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$,

2) $\forall x \in A$ $\int_0^x S(u)\,du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$,

причем радиус сходимости полученных рядов равен $r$.

▸ Доказательство следует из теоремы Абеля 5.2 и теорем 4.9 и 4.8 о почленном дифференцировании и интегрировании ФР. Утверждение о радиусе сходимости следует из теоремы Коши – Адамара 5.1:

1) $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|(k+1)a_{k+1}|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_{k+1}|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k-1]{|a_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left[\sqrt[k]{|a_k|}\right]^{\frac{k}{k-1}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$;

2) $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{|a_{k-1}|}{k}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_{k-1}|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k+1]{|a_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left[\sqrt[k]{|a_k|}\right]^{\frac{k}{k+1}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$. ◂

**Следствие.** На множестве сходимости степенной ряд можно интегрировать и дифференцировать почленно произвольное число раз. Полученные при этом степенные ряды будут иметь тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

## 5.3. РАЗЛОЖЕНИЕ В СТЕПЕННОЙ РЯД

Говорят, что функция $f(x)$ на интервале $(x_0 - r, x_0 + r)$ может быть разложена в СР, если существует СР $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, сходящийся к $f(x)$ в указанном интервале.

**Теорема 5.5 (необходимое условие разложимости функции в степенной ряд).** Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в степенной ряд на интервале $(x_0 - r, x_0 + r)$, *необходимо*, чтобы эта функция имела на указанном интервале производные любого порядка.

**Теорема 5.6.** Пусть степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x - x_0\right)^k = S\left(x\right) \tag{4.4}$$

имеет радиус сходимости $r$. Тогда

$$\forall k \geq 0 \;\; a_k = \frac{S^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}. \tag{4.5}$$

▸ Подставляя $x = x_0$ в формулу (4.4), получим $a_0 = S\left(x_0\right)$. После почленного дифференцирования получим

$$S'\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \left(x - x_0\right)^{k-1}.$$

Следовательно, $a_1 = S'\left(x_0\right)$ и т.д. ◂

**Теорема 5.7.** Если функция $f\left(x\right)$ на интервале $\left(-r, r\right)$ *может быть разложена* в степенной ряд, то этот ряд единственен.

▸ Эта теорема является следствием теоремы 5.6, так как коэффициенты степенного ряда (если он существует) однозначно определяются формулой (4.5). ◂

**Следствие.** Разложение четной (нечетной) функции в степенной ряд может содержать лишь четные (нечентные) степени $x$.

Замечание 1. СР $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(x - x_0\right)^k$, коэффициенты которого определяются формулой $a_k = \dfrac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}$, называется ***рядом Тейлора*** функции $f\left(x\right)$. Таким образом, если функция $f\left(x\right)$ может быть разложена на интервале $\left(x_0 - r, x_0 + r\right)$ в СР, то этот ряд является рядом Тейлора функции $f\left(x\right)$.

Замечание 2. Теорема позволяет строить разложения в СР для функций являющихся суперпозициями некоторых более прострых функций с известным разложением, а также использовать свойства степенных рядов как функциональных для построения разложения одних функций по известным разложениям других. Более подробно эти приемы будут рассмотрены в примерах: 5.3, 5.5 – 5.9.

З а м е ч а н и е  3. Существуют функции, имеющие на интервале $(x_0 - r, x_0 + r)$ непрерывные производные любого порядка, но не разложимые на этом интервале в степенной ряд, например[♦],

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

* ▶ Функция $f(x)$ непрерывна, так как $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$. Для $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f''(x) = -\frac{6}{x^4} e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^6} e^{-1/x^2},$$

$$f'''(x) = \frac{24}{x^5} e^{-1/x^2} - \frac{36}{x^7} e^{-1/x^2} + \frac{8}{x^9} e^{-1/x^2}.$$

Продолжая операцию дифференцирования, получим, что при $x \neq 0$ производная $f^{(n)}(x)$, есть сумма выражений вида $\frac{A}{x^m} e^{-1/x^2}$. Из равенства $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^m} e^{-1/x^2} = 0$ и непрерывности функции $f$ в нуле следует, что функция $f'$ в нуле существует и равна нулю, и таким образом, непрерывна. Точно так же получаем, что функция $f''$ в нуле существует, равна нулю и непрерывна. Продолжая эти рассуждения, получим, что функция $f$ имеет в любой точке $x \in \mathbb{R}$ производные всех порядков, причем в нуле все ее производные равны нулю. Следовательно, ряд Тейлора функции $f$ в нуле имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^k.$$

Согласно теореме Коши – Адамара радиус сходимости этого ряда $r = +\infty$, т.е. ряд сходится при любом $x \in \mathbb{R}$, но сумма его есть тождественный нуль и ни в какой точке, кроме нуля, не равна $f(x)$. А поскольку единственным степенным рядом, представляющим в некоторой окрестности нуля функцию $f(x)$, может быть только ее ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$, то, следовательно, функция $f(x)$ не представляется степенным рядом в окрестности нуля. ◀

[♦] Пример взят из книги В.А. Ильина, Э.Г. Позняка «Основы математического анализа».

**Теорема 5.8 (достаточное условие разложимости функции в степенной ряд).** Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $0 < r \le +\infty$. Тогда, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x) \in \mathbb{C}^{(\infty)}\left((x_0 - r, x_0 + r)\right)$;

2) $\exists C \in \mathbb{R}\ \ \forall k \ge 1\ \ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)\ \left|f^{(k)}(x)\right| \le C^k$,

то

$$\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \qquad (4.6)$$

причем для $r < +\infty$ сходимость ряда равномерна на $(x_0 - r, x_0 + r)$, а для $r = +\infty$ сходимость равномерна на любом сегменте вида $[x_0 - \tilde{r}, x_0 + \tilde{r}]$, $\tilde{r} < +\infty$.

* ▸ Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, $\forall n\ \ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \qquad (4.7)$$

где $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ \theta \in (0,1).$$

Для $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, учитывая условие 2, имеем

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{C^{n+1}}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1}.$$

Так как $\frac{C^{n+1}}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, формула (4.6) следует из (4.7) при $n \to \infty$.

Докажем теперь утверждение о равномерной сходимости. Пусть $r \in \mathbb{R}$. Так как $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)\ \left|x - x_0\right| < r$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in (x_0 - r,\, x_0 + r)} \left|R_n(x)\right| \le \lim_{n\to\infty} \frac{C^{n+1}}{(n+1)!} r^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(Cr)^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

т.е. остаток степенного ряда равномерно сходится к нулю, значит, сам ряд сходится тоже равномерно. Аналогичным образом доказывается равномерная сходимость ряда на отрезке $[x_0 - \tilde{r}, x_0 + \tilde{r}]$, $\tilde{r} < +\infty$, в случае $r = +\infty$ ◂

Приведенная теорема дает метод разложения функций в ряд Тейлора. Однако условия этой теоремы не всегда выполняются или не могут быть просто проверены. Тогда эффективным методом получения разложения является использование свойств СР.

Пример 5.2. Разложим в ряд функцию $f(x)=e^x$.

▶ Так как $f^{(n)}(x)=e^x$, то $\forall h>0 \;\; \forall x\in(-h,h) \;\; \forall n\geq 0 \;\; 0<f^{(n)}(x)<e^h$. Таким образом, условия теоремы 5.8 выполнены ($x_0=0$), поэтому функция $e^x$ раскладывается в ряд Тейлора на любом конечном интервале, а значит, и на всей действительной оси.

Так как $f^{(n)}(0)=e^0=1$, согласно формуле (4.6) разложение $e^x$ имеет вид

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}. \blacktriangleleft \tag{4.8}$$

Пример 5.3. Разложим в ряд функции sh$x$ и ch$x$.

▶ Заменив в формуле (4.8) $x$ на $-x$, получим

$$e^{-x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!}. \tag{4.9}$$

Складывая и вычитая формулы (4.8) и (4.9), получим

$$\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

В силу единственности разложения функций в СР правые части этих формул являются рядами Тейлора функций $\mathrm{sh}\,x$ и $\mathrm{ch}\,x$. ◀

Пример 5.4. Разложим в ряд функции $\sin x$ и $\cos x$.

▶ Пусть $f(x)=\sin x$. Тогда $\left|f^{(k)}(x)\right|=\left|\sin(x+\pi k/2)\right|\leq 1$.

Согласно теореме 5.8 отсюда следует, что функция $\sin x$ раскладывается в СР на всей действительной оси. Аналогично функция $\cos x$ раскладывается в СР на всей действительной оси. Таким образом, получаем

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}. \blacktriangleleft \tag{4.10}$$

Дифференцируя или интегрируя известные разложения в ряд Тейлора, можно получать разложения новых функций в степенные ряды.

Пример 5.5. Разложим в ряд функцию $f(x)=\ln(1+x)$.

▸ Заметив, что $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, разложим $f'(x)$ в ряд по формуле для суммы членов геометрической прогрессии

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k,\ |x|<1.$$

Интегрируя этот ряд от 0 до $x$, $|x|<1$, получим

$$f(x)=\ln(1+x)=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k\right)dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}.$$

Рассмотрим теперь полученный ряд в граничных точках интервала сходимости. При $x=1$ мы получаем сходящийся ряд Лейбница, а при $x=-1$ – расходящийся ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{k+1}$. Таким образом, множеством сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ является множество $-1<x\le 1$.

Функция $f$ непрерывна при $x=1$, поэтому согласно теореме 5.3 сумма ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$, являясь непрерывной функцией на $(-1,1]$, совпадает с ней и в точке $x=1$. ◂

Пример 5.6. Разложим в ряд функцию $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$.

▸ Поступая при $|x|<1$ аналогично предыдущему примеру, получим

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\right)dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \quad (4.11)$$

Отметим, что полученный ряд при $x=\pm1$ по признаку Лейбница сходится, поскольку сходится знакопеременный ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Функция $f$ непрерывна при $x=\pm1$, поэтому согласно теореме 5.3 сумма ряда $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, являясь непрерывной функцией на $[-1,1]$, совпадает с ней и в концевых точках $x=\pm1$.

Отметим, что хотя функция $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ определена на всей действительной числовой оси, ее разложение в степенной ряд (4.11) справедливо только на отрезке $[-1,1]$. Вне этого отрезка ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$ расходится согласно теореме Коши – Адамара. ◀

Замечание. Так как разложение в степенной ряд функции $f(x)$ определяется единственным образом, его радиус сходимости может быть вычислен как по теореме Коши – Адамара, так и с помощью теорем, сформулированных для определения сходимости функциональных рядов, примененных к ряду Тейлора данной функции (см. примеры 5.7 и 5.8).

Приведем некоторые наиболее часто используемые при решении задач разложения.

<table>
<tr><td colspan="2">Разложения со множеством сходимости $\mathbb{R}$<br>$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$    $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$    $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Разложения со множеством сходимости $-1 < x \le 1$<br>$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Разложения со множеством сходимости $-1 < x < 1$<br>$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$, $-1 < x < 1$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$</td><td>$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k$</td><td>$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} x^{k+1}$</td><td>$\sqrt{1-x} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} x^{k+1}$</td></tr>
</table>

Пример 5.7. Разложим в ряд функцию $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+2)(9-x)}$.

▸ Представим функцию $f(x)$ в виде
$$f(x)=\frac{1}{83}\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{9}{x^2+2}+\frac{1}{9-x}\right).$$
Учитывая, что
$$\frac{1}{x^2+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2^k}\ \text{при}\ \left|\frac{x^2}{2}\right|<1,$$
$$\frac{1}{9-x}=\frac{1}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{9}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{9^{k+1}}\ \text{при}\ \left|\frac{x}{9}\right|<1,$$
получим
$$f(x)=\frac{1}{83}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{k+1}}+9\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{9^{k+1}}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$$
при $|x|<\sqrt{2}$, где
$$a_{2m}=\frac{1}{83}\left[\frac{9\cdot(-1)^m}{2^{m+1}}+\frac{1}{9^{2m+1}}\right],\ a_{2m+1}=\frac{1}{83}\left[\frac{(-1)^m}{2^{m+1}}+\frac{1}{9^{2m+2}}\right],\ m=0,1,2\ldots.\ ◂$$

Пример 5.8. Разложим в ряд функцию $f(x)=\ln\dfrac{5+x^3}{4-x^2}$.

▸ Представим функцию $f(x)$ в виде
$$f(x)=\ln(5+x^3)-\ln(4-x^2).$$

Раскладывая в ряд каждую из функций $\ln(5+x^3)$ и $\ln(4-x^2)$, получим
$$\ln(5+x^3)=\ln 5+\ln\left(1+\frac{x^3}{5}\right)=\ln 5+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{3k}}{5^k k},\ -1<\frac{x^3}{5}\le 1,$$
$$\ln(4-x^2)=\ln 4+\ln\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=\ln 4+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k-1}x^{2k}}{4^k k}=$$
$$=\ln 4-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{4^k k},\ -1<\frac{x^2}{4}\le 1.$$

Следовательно,

$$f(x)=\ln 5-\ln 4+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k-1}x^{3k}}{5^{k}k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{4^{k}k}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}x^{k}\,,\ -2<x\le 2\,,$$

где $a_0=\ln 5-\ln 4$, $a_k=\dfrac{1}{k}\left[\dfrac{\left(-1\right)^{k/2-1}2}{5^{k/2}}+\dfrac{3}{4^{k/3}}\right]$ при $k\vdots 6$, $a_k=\dfrac{\left(-1\right)^{k/3-1}3}{5^{k/3}k}$ при $k\vdots 3$ и $k\not\vdots 2$, $a_k=\dfrac{2}{4^{k/2}k}$ при $k\vdots 2$ и $k\not\vdots 3$. ◄

В заключение покажем несколько практических применений теории степенных рядов.

Пример 5.9. Найдем разложение в СР «неберущегося» (в элементарных функциях) интеграла $\Phi\left(x\right)=\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$.

► Подынтегральная функция $e^{-x^2}$ раскладывается во всюду сходящийся степенной ряд следующим образом:

$$e^{-x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}x^{2k}}{k!}.$$

Согласно теореме 5.4 степенной ряд внутри множества сходимости можно интегрировать почленно, следовательно:

$$\Phi\left(x\right)=\int\limits_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}t^{2k}}{k!}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^x\frac{\left(-1\right)^{k}t^{2k}}{k!}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}x^{2k+1}}{k!\left(2k+1\right)}. \tag{4.12}$$ ◄

Пример 5.10. Вычислим «неберущийся» интеграл $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ с точностью до $10^{-3}$ в точке $x=1$.

► Согласно формуле (4.12) для $\Phi\left(1\right)$ получим числовой ряд лейбницевского типа

$$\Phi\left(1\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k!\left(2k+1\right)}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\ldots$$

Так как $\left|r_5\left(1\right)\right|<\dfrac{1}{1320}<10^4$, то $\Phi\left(1\right)\approx S_5\left(1\right)\approx 0.746$ и все три знака верные. ◄

Пример 5.11. Найдем выражение для производной $n$-го порядка функции $y=\dfrac{1}{9x^2+36x+40}$ в точке $x=-2$.

▸ Построим разложение в окрестности точки $x=-2$:

$$y=\frac{1}{9x^2+36x+40}=\frac{1}{9\left(x+2\right)^2+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{9}{4}\left(x+2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\left(\frac{3}{2}\right)^{2k}\left(x+2\right)^{2k}.$$

Так как полученный СР можно дифференцировать в достаточно малой окрестности точки $x=-2$, в самой точке $x=-2$ получим

$$y^{(2k-1)}\left(-2\right)=0,\ y^{(2k)}\left(-2\right)=\frac{\left(-1\right)^k\left(2k\right)!}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}.$$ ◂

## 5.4. РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ♦

**Теорема 5.9 (теорема Вейерштрасса о равномерном приближении многочленами непрерывной функции).** Если функция $f\left(x\right)$ непрерывна на сегменте $\left[a,b\right]$, то существует последовательность многочленов $\left\{P_n\left(x\right)\right\}$, равномерно сходящаяся на $\left[a,b\right]$ к функции $f\left(x\right)$, то есть $\forall\varepsilon>0$ найдется многочлен $P_n\left(x\right)$ с номером $n$, зависящим от $\varepsilon$, такой, что

$$\forall x\in\left[a,b\right]\ \left|P_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon.$$

* ▸ Не ограничивая общности, можно ввести следующие ограничения.

1. Вместо сегмента $\left[a,b\right]$ рассматривать сегмент $\left[0,1\right]$, так как он преобразуется в сегмент $\left[a,b\right]$ линейной заменой:

$$x=\left(b-a\right)t+a.$$

♦В.А. Ильин, Э.Г. Позняк «Основы математического анализа».

2. Рассматривать лишь те функции, для которых

$$f(0)=f(1)=0. \qquad (4.13)$$

Так как если функция не удовлетворяет условию (4.13), то, положив

$$g(x)=f(x)-f(0)-x\left[f(1)-f(0)\right],$$

мы получили бы непрерывную на сегменте $[0,1]$ функцию $g(x)$, удовлетворяющую условию $g(0)=g(1)=0$, и из возможности представления $g(x)$ в виде предела равномерно сходящейся последовательности многочленов вытекало бы, что и $f(x)$ представима в виде предела равномерно сходящейся последовательности многочленов (так как разница $f(x)-g(x)$ является многочленом первой степени).

Итак, пусть $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$ и $f(0)=f(1)=0$. Продолжим эту функцию на всю числовую прямую, положив ее равной нулю за пределами сегмента $[0,1]$, причем полученная функция будет равномерно непрерывной на всей числовой прямой.

Рассмотрим следующую конкретную последовательность неотрицательных многочленов степени $2n$:

$$Q_n(x)=c_n\left(1-x^2\right)^n, \qquad n=1,2,3,\ldots, \qquad (4.14)$$

у каждого из которых постоянная $c_n$ выбрана так, что выполняется равенство

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx=1, \qquad n=1,2,3,\ldots \qquad (4.15)$$

Не вычисляя точного значения постоянной $c_n$, оценим ее сверху. Для этого заметим, что $\forall n \ \forall x\in[-1,1]$ справедливо неравенство

$$\left(1-x^2\right)^n \ge 1-nx^2. \qquad (4.16)$$

Применяя неравенство (4.16) и учитывая, что $\forall n \ \dfrac{1}{\sqrt{n}} \le 1$, получим

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx = 2\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx \ge 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}}\left(1-x^2\right)^n dx \ge$$

$$\ge 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}}\left(1-nx^2\right)dx = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}. \qquad (4.17)$$

Из (4.14), (4.15) и (4.17) заключаем, что для всех номеров $n = 1, 2, 3, \ldots$ справедлива следующая оценка сверху для постоянной $c_n$:

$$c_n < \sqrt{n}. \qquad (4.18)$$

Из (4.18) и (4.14) вытекает, что $\forall \delta > 0 \ \forall x \in [\delta, 1]$ справедливо неравенство

$$0 \le Q_n(x) \le \sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n. \qquad (4.19)$$

Из (4.19) следует, что при любом фиксированном $\delta > 0$ последовательность неотрицательных многочленов $\{Q_n(x)\}$ сходится к нулю равномерно на сегменте $\delta \le x \le 1$.

Положим для любого $x \in [0,1]$

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)\,Q_n(t)\,dt, \qquad (4.20)$$

и убедимся в том, что для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ функция $P_n(x)$ есть многочлен степени $2n$, причем $\{P_n(x)\}$ и является искомой последовательностью многочленов, равномерно сходящейся на сегменте $0 \le x \le 1$ к функции $f(x)$.

Так как изучаемая функция $f(x)$ равна нулю за пределами сегмента $[0,1]$, интеграл (4.20) можно записать в виде

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\,Q_n(t)\,dt.$$

Заменяя в последнем интеграле переменную $t$ на $t-x$, получим

$$P_n(x)=\int_0^1 f(t)Q_n(t-x)\,dt. \tag{4.21}$$

Из (4.21) и (4.14) ясно, что функция $P_n(x)$ представляет собой многочлен степени $2n$.

Остается доказать, что последовательность $\{P_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[0,1]$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Для фиксированного $\varepsilon$ в силу равномерной непрерывности $f(x)$ на всей бесконечной прямой, найдется $\delta>0$ такое, что

$$\left|f(x)-f(y)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ при } |x-y|<\delta. \tag{4.22}$$

Заметим еще, что так как $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0,1]$, она и ограничена на этом сегменте, а стало быть, и всюду на бесконечной прямой. Это означает, что существует постоянная $A$ такая, что для всех $x$

$$\left|f(x)\right|\le A. \tag{4.23}$$

Используя (4.15), (4.19), (4.22) и (4.23) и учитывая неотрицательность $Q(x)$, оценим разность $P_n(x)-f(x)$. $\forall x\in[0,1]$

$$\left|P_n(x)-f(x)\right|=\left|\int_{-1}^{1}\left[f(x+t)-f(x)\right]Q_n(t)\,dt\right|\le$$

$$\le\int_{-1}^{1}\left|f(x+t)-f(x)\right|Q_n(t)\,dt\le$$

$$\le 2A\int_{-1}^{-\delta}Q_n(t)\,dt+\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}Q_n(t)\,dt+2A\int_{\delta}^{1}Q_n(t)\,dt\le 4A\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что для всех достаточно больших номеров $n$ справедливо неравенство

$$4A\sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n<\frac{\varepsilon}{2}. \blacktriangleleft$$

# Глава 6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

## 6.1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Простейшей из периодических функций (если не считать постоянной) является функция $A\sin(\omega t+\varphi)$, где $A,\omega,\varphi$ – постоянные. Эту функцию называют ***гармоникой с амплитудой*** $|A|$, ***частотой*** $\omega$ и ***начальной фазой*** $\varphi$. Период гармоники – $T=2\pi/\omega$.

**Свойства периодических функций.**

**1.** Если $T$ – период функции, то величина $Tk$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$ также является периодом этой функции.

**2.** Если $T_1$ и $T_2$ – периоды функции, то $T_1\pm T_2$ также периоды этой функции.

**3.** Константа является периодической функцией с произвольным периодом.

**4.** Сумма, разность, произведение и частное периодических функций с одним и тем же периодом $T$ – периодические функции с тем же периодом.

**5.** Если $\varphi(t)$ – периодическая с периодом $T$ интегрируемая на любом конечном промежутке функция, то

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\quad \int_{\alpha}^{\alpha+T}\varphi(t)\,dt=\int_{0}^{T}\varphi(t)\,dt.$$

**6.** Сумма конечного числа гармоник с общим периодом $T$

$$\varphi_n(t)=A_0+\sum_{k=1}^{n}A_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t+\alpha_k\right), \qquad (5.1)$$

является $T$-периодической функцией, причем если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t+\alpha_k\right)$, то функция-сумма $\varphi(t)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)$ также является $T$-периодической.

Замечание. Применив к равенству (5.1) формулу синуса суммы и положив $a_0=2A_0$, $a_k=A_k\sin(\alpha_k)$, $b_k=A_k\cos(\alpha_k)$, $k\in\mathbb{N}$, получим общий вид ***тригонометрического многочлена*** степени $n$:

$$\varphi_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right). \qquad (5.2)$$

и, соответственно, ***тригонометрического ряда***:

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right). \qquad (5.3)$$

## 6.2. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ

*Формально* построенный для $T$-периодической функции $\varphi(t)$ тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right), \qquad (5.4)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T\varphi(t)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt,\ k\in\mathbb{Z}^+, \qquad (5.5)$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T\varphi(t)\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt,\ k\in\mathbb{N}. \qquad (5.6)$$

называется ***тригонометрическим рядом Фурье функции*** $\varphi(t)$.

Замечание 1. Сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $\varphi(t)$, вообще говоря, не означает, что функция-сумма $\tilde{\varphi}(t)$ этого ряда будет совпадать с $\varphi(t)$, поэтому договоримся о следующем обозначении: запись

$$\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right) \qquad (5.7)$$

означает лишь то, что функции $\varphi(t)$ *соответствует* ряд Фурье, стоящий справа. Знак «~» можно заменить знаком «=» только тогда, когда будет доказана сходимость ряда и равенство его суммы функции $\varphi(t)$.

Замечание 2. Если в качестве новой независимой переменной $T$-периодичной функции $\varphi(t)$ взять переменную $x=\frac{2\pi}{T}t=\omega t$, то получим $2\pi$-периодичную функцию $f(x)=\varphi\left(\frac{x}{\omega}\right)$, а разложение (5.7) примет вид

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right). \qquad (5.8)$$

поэтому, не нарушая общности, при изложении теории можно рассматривать лишь $2\pi$-периодичные функции.

**Определение коэффициентов тригонометрического ряда по методу Эйлера-Фурье**

Для тригонометрических функций, участвующих в разложении (5.8), справедливы следующие соотношения[2]

$$\forall m\in\mathbb{Z}\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx=\begin{cases}0, m\neq 0\\ 2\pi, m=0\end{cases},\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\,dx=0, \tag{5.9}$$

$$\forall k,n\in\mathbb{N}\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(nx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx=\begin{cases}0, k\neq n\\ \pi, k=n\end{cases}. \tag{5.10}$$

**Теорема 6.1.** Пусть сумма тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(nx)+b_k\sin(nx)\right)=S(x) \tag{5.11}$$

определена на сегменте $[-\pi,\pi]$, абсолютно интегрируема на нем, а сам ряд *допускает почленное интегрирование*. Тогда этот ряд является тригонометрическим рядом Фурье своей суммы, т.е.

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(x)\cos(kx)\,dx,\ k\in\mathbb{Z}^{+}, \tag{5.12}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(x)\sin(kx)\,dx,\ k\in\mathbb{N}. \tag{5.13}$$

▸ Для нахождения $a_0$ проинтегрируем выражение (5.11) почленно от $-\pi$ до $\pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}S(x)\,dx=a_0\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\,dx\right)=a_0\pi.$$

---

[2] Эти соотношения легко доказываются непосредственным интегрированием с использованием известных формул тригонометрии

$$\sin(kx)\sin(nx)=\frac{1}{2}\left[\cos((k-n)x)-\cos((k+n)x)\right],$$

$$\cos(kx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left[\cos((k-n)x)+\cos((k+n)x)\right],$$

$$\sin(kx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left[\sin((k-n)x)+\sin((k+n)x)\right].$$

Для нахождения $a_k$ ($b_k$) умножим обе части равенства (5.11) на $\cos(kx)$ ($\sin(kx)$) и проинтегрируем почленно по тому же промежутку. Учитывая (5.9), (5.10), получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos(kx)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(kx)\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(kx)\,dx\right) = a_k\pi.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\sin(kx)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(kx)\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(kx)\,dx\right) = b_k\pi.$$

Из полученных соотношений непосредственно вытекают формулы (5.12), (5.13). ◀

**Следствие 1.** Если равенство (5.11) выполняется всюду за исключением, быть может, конечного числа значений (для одного периода), то утверждение теоремы остается справедливым.

**Следствие 2.** Пусть сумма тригонометрического ряда (5.11) определена на сегменте $[-\pi, \pi]$, причем сам ряд сходится *равномерно* на этом сегменте. Тогда этот ряд является тригонометрическим рядом Фурье своей суммы.

▶ Утверждение теоремы основывается на том, что равномерная сходимость является достаточным условием сходимости ряда к непрерывной, а значит абсолютно интегрируемой функции, и возможности его почленного интегрирования. ◀

Пример 6.1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k^2}$ равномерно сходится по признаку Вейерштрасса, так как ограничен сходящимся числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Следовательно, является рядом Фурье своей суммы.

**Теорема Римана.** Если функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на $(a,b)$, конечном или бесконечном, то[3]

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(t)\cos(pt)\,dt=\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(t)\sin(pt)\,dt=0.$$

**Следствие.** Коэффициенты Фурье $a_k, b_k$ *абсолютно интегрируемой* на $[a,b]$ функции при $k\to\infty$ стремятся к нулю.

### Четные и нечетные функции.

Если функция $f(x)$ нечетная, то коэффициенты $a_k$, как интегралы от нечетных функций по симметричному промежутку, равны нулю, а значит, разложение в ряд Фурье содержит только синусы:

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin(kx),\quad b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(kx)\,dx,\ k\in\mathbb{N};$$

Аналогично, если функция $f(x)$ является четной, то ряд Фурье содержит только косинусы:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kx),\quad a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(kx)\,dx,\ k\in\mathbb{Z}^+.$$

## 6.3. СХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ

### 6.3.1. Интегральное представление частичной суммы ряда Фурье. Принцип локализации

Для того чтобы исследовать поведение ряда Фурье $2\pi$-периодичной функции $f(x)$ в какой-нибудь определенной точке $x=x_0$, составим удобное выражение для его частичной суммы:

$$S_n(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx_0)+b_k\sin(kx_0)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\cos(kx)\cos(kx_0)+\sin(kx)\sin(kx_0)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k(x-x_0))\right\}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)D_n(x-x_0)\,dx.$$

Функция $D_n(\alpha)=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(k\alpha)$ называется ***ядром Дирихле***.

---

[3] Доказательство можно прочесть в [4]

**Лемма (о свойствах ядра Дирихле).**

1) Ядро Дирихле – четная непрерывная $2\pi$-периодическая функция, причем $D_n(0) = n + 1/2$,

2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 2\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt = \pi$;

3) $\forall \alpha \neq 2\pi k, k \in Z \quad D_n(\alpha) = \dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, $n = 0,1,2,...$; (5.15)

4) $\forall \delta \in (0,\pi) \int\limits_{\delta}^{\pi} D_n(t)\,dt \to 0$ при $n \to \infty$.

▸ Первые два свойства непосредственно следуют из определения ядра Дирихле, поэтому их доказывать не будем. Третье свойство доказано в параграфе 1.3.3. Последнее свойство следует из леммы Римана, если взять $f(t) = \dfrac{1}{\sin(t/2)}$, $p = n + 1/2$. ◂

Учитывая $2\pi$-периодичность ядра Дирихле, для частичной суммы ряда Фурье получим

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(x - x_0)\,dx = [t = x - x_0] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(x_0+t) D_n(t)\,dt = \begin{bmatrix} \text{функции } f \text{ и } D_n \\ 2\pi - \text{периодичные} \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t) D_n(t)\,dt.$$

Разбивая интеграл на два $\int\limits_{0}^{\pi} + \int\limits_{-\pi}^{0}$ и приводя второй интеграл путем изменения знака переменной к промежутку $[0,\pi]$, получим

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \left[ f(x_0 + t) + f(x_0 - t) \right] D_n(t)\,dt. \qquad (5.16)$$

Таким образом, если $f(x)$ – $2\pi$-периодичная функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi,\pi]$ , то сходимость ее ряда Фурье определяется сходимостью интеграла (5.16), зависящего от параметра $n$.

Замечание. *Перейти к пределу под знаком интеграла нельзя, так как предел ядра Дирихле при $n \to \infty$ не существует.*

**Теорема 6.2 (теорема Римана, принцип локализации).** Поведение ряда Фурье $2\pi$-периодической функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на $[-\pi,\pi]$, в некоторой точке $x_0$ зависит исключительно от значений, принимаемых этой функцией в непосредственной близости рассматриваемой точки, т.е. в сколь угодно малой ее окрестности.

▸ Взяв произвольное $0<\delta<\pi$, разобьем интеграл в (5.16) на два $\int_0^{\pi}=\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}$. Если второй из них переписать в виде

$$\int_{\delta}^{\pi}\frac{\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)\right]}{2\sin(t/2)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt, \qquad (5.17)$$

то станет ясно, что множитель при синусе

$$g(t)=\frac{\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)\right]}{2\sin(t/2)} \qquad (5.18)$$

является абсолютно интегрируемой на $[\delta,\pi]$ функцией, так как на сегменте $[\delta,\pi]$ функция $f(x)$ – абсолютно интегрируема, а функция $\dfrac{1}{2\sin(t/2)}$ – непрерывна, а значит, ограничена.

Согласно лемме Римана, интеграл (5.17) при $n\to\infty$ стремится к нулю. Следовательно, и существование предела для частичной суммы ряд Фурье $S_n(x_0)$, и величина этого предела целиком определяются поведением интеграла

$$\rho_n(\delta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)\right]D_n(t)\,dt.$$

Но в этот интеграл входят лишь значения функции $f(x)$, отвечающие изменению аргумента в промежутке от $x_0-\delta$ до $x_0+\delta$. ◂

**Следствие.** Если значения двух функций в некоторой окрестности $x_0$ совпадают, то независимо от их значений вне этой окрестности, соответствующие им ряды Фурье ведут себя в точке $x_0$ одинаково: либо оба сходятся (к одной и той же сумме), либо оба расходятся, причем сами коэффициенты Фурье этих рядов могут оказаться совершенно различными.

### 6.3.2. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Докажем сначала следующую теорему.

**Теорема 6.3.** Для $2\pi$-периодической функции $f$, абсолютно интегрируемой на $[-\pi,\pi]$, интегралы

$$\int_0^\delta \frac{|f(x)|}{x}dx,\ \delta\in(0,\pi] \quad \text{и} \quad \int_0^\pi \frac{|f(x)|}{2\sin\frac{x}{2}}dx$$

сходятся и расходятся одновременно.

▸ Пусть $\delta\in(0,\pi]$. Функция $\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$ непрерывна, а значит, интегрируема по Риману на $[\delta,\pi]$. Функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[\delta,\pi]$, следовательно, $\dfrac{|f(x)|}{2\sin\frac{x}{2}}$ – интегрируема на $[\delta,\pi]$, т.е. $\forall\delta\in(0,\pi]$ интеграл $\displaystyle\int_\delta^\pi \frac{|f(x)|}{2\sin\frac{x}{2}}dx$ сходится.

Выберем $\delta$ так, чтобы на любом отрезке $[\varepsilon,\delta]$, $0<\varepsilon<\delta$ функция $f$ была интегрируема по Риману (такое $\delta$ есть, так как по условию $f$ абсолютно интегрируема).

Из интегрируемости по Риману на $[\varepsilon,\delta]$ функции $f$ следует интегрируемость на этом отрезке функций $\dfrac{f(x)}{x}$ и $\dfrac{f(x)}{2\sin\frac{x}{2}}$. Кроме этого,

$$\frac{f(x)}{x}\sim\frac{f(x)}{2\sin\frac{x}{2}} \text{ при } x\to 0.$$

Следовательно, интегралы $\displaystyle\int_0^\delta \frac{|f(x)|}{x}dx$, $0<\delta\le\pi$ и $\displaystyle\int_0^\pi \frac{|f(x)|}{2\sin\frac{x}{2}}dx$ сходятся и расходятся одновременно. ◂

**Теорема 6.4 (признак Дини).** Пусть $f(x)$ – $2\pi$-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на $[-\pi,\pi]$. Тогда, если $x$ является точкой непрерывности или точкой разрыва первого рода функции $f(x)$ и при некотором $\delta\in(0,\pi)$ сходится интеграл

$$\int_0^{\delta}\frac{\left|f(x+t)-f(x+0)+f(x-t)-f(x-0)\right|}{t}dt, \tag{5.19}$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке $x$ к значению

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{5.20}$$

▸ Пусть $f_x^* = f(x+t)-f(x+0)+f(x-t)-f(x-0)$. Тогда, учитывая (5.16), получим

$$S_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]D_n(t)\,dt-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]D_n(t)\,dt-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}D_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]D_n(t)\,dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]D_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f_x^*(t)D_n(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f_x^*(t)}{2\sin(t/2)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt$$

Так как при $t\to 0$ $\dfrac{1}{2\sin(t/2)}\sim\dfrac{1}{t}$, то из сходимости интеграла (5.19) следует сходимость интеграла $\displaystyle\int_0^{\delta}\frac{\left|f_x^*(t)\right|}{2\sin(t/2)}dt$. Интеграл $\displaystyle\int_{\delta}^{\pi}\frac{\left|f_x^*(t)\right|}{2\sin(t/2)}dt$ сходится, так как $f_x^*(t)$ – абсолютно интегрируема, а $\dfrac{1}{2\sin(t/2)}$ – ограничена $[\delta,\pi]$, $0<\delta<\pi$.

Следовательно, сходится интеграл

$$\int_0^{\pi}\frac{\left|f_x^*(t)\right|}{2\sin(t/2)}dt=\int_0^{\delta}\frac{\left|f_x^*(t)\right|}{2\sin(t/2)}dt+\int_{\delta}^{\pi}\frac{\left|f_x^*(t)\right|}{2\sin(t/2)}dt,$$

а значит, функция $\dfrac{f_x^*(t)}{2\sin(t/2)}$ абсолютно интегрируема на $[0,\pi]$. Тогда, применяя лемму Римана, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f_x^*(t)}{2\sin(t/2)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt=0. ◂$$

З а м е ч а н и е. Вместо существования интеграла (5.19) достаточно предположить существование интегралов

$$\int_0^{\delta}\frac{\left|f(x+t)-f(x+0)\right|}{t}dt \text{ и } \int_0^{\delta}\frac{\left|f(x-t)-f(x-0)\right|}{t}dt. \qquad (5.21)$$

▸ Сходимость интеграла (5.19) следует из сходимости интегралов (5.21) в силу неравенства треугольника: $|x+y|\le|x|+|y|$. ◂

**Следствие 1.** Если условия теоремы выполнены, то в любой регулярной точке[4] функции $f$ (в частности, во всех ее точках непрерывности) ряд Фурье этой функции сходится к ее значению в рассматриваемой точке, а в точках разрыва 1-го рода к значению

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \qquad (5.22)$$

**Следствие 2.** Функции $f(x)$ и $g(x)$, имеющие одинаковые точки разрыва и отличающиеся друг от друга лишь в этих точках, представимы одним и тем же рядом Фурье.

Используя различные признаки сходимости, из признака Дини можно получить ряд частных признаков сходимости ряда Фурье.

---

[4] Точка $x_0$ называется ***регулярной по Лебегу***, если $f(x_0)=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

**Теорема 6.5 (признак Липшица).** Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и для достаточно малых $t$ выполняется условие Липшица $\left|f(x_0 \pm t) - f(x_0)\right| \le Lt^{\alpha}$, где $L > 0$ и $0 < \alpha \le 1$ – некоторые константы, то её ряд Фурье сходится в точке $x_0$ к $f(x_0)$.

▸ При $\alpha = 1$ интегралы (5.21) сходятся как собственные. Если $\alpha < 1$, то

$$\left|\frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t}\right| \le \frac{L}{t^{1-\alpha}}, \tag{5.23}$$

и, так как справа стоит интегрируемая функция, то интегралы (5.21) существуют, даже если являются несобственными. ◂

**Следствие.** Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, или, по крайней мере, имеет обе конечные односторонние производные, то ряд Фурье сходится, причем сумма его равна $f(x_0)$.

▸ Так как

$$f'_+(x_0) = \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0-t) - f(x_0)}{t},$$

то наличие конечных односторонних производных обеспечивает выполнение условий (5.23). ◂

**Теорема 6.6 (признак Дирихле-Жордана).** Если функция $f(x)$ на некотором промежутке, содержащим точку $x_0$ имеет ограниченное изменение, то ее ряд Фурье в точке $x_0$ сходится к $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

### 6.3.3. Характер сходимости рядов Фурье

Рассмотрим ряды Фурье для интегрируемых функций, квадрат которых также интегрируем (в собственном или несобственном смысле) на отрезке $[-\pi, \pi]$.

**Теорема 6.7** Если функция интегрируема с квадратом, то она абсолютно интегрируема. Обратное, вообще говоря, неверно.

▸ Первое утверждение вытекает из неравенства $|f| \le \dfrac{1+f^2}{2}$. Для доказательства второго утверждения достаточно рассмотреть функцию $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. ◂

**Теорема 6.8 (минимальное свойство коэффициентов Фурье).** Пусть функция $f$ интегрируема с квадратом на $[-\pi,\pi]$. Тогда если $S_n(x)$ – ее сумма Фурье степени $n$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-S_n(x)\right]^2 dx=\min_{T_n(x)}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-T_n(x)\right]^2 dx \qquad (5.24)$$

где минимум в правой части равенства берется по всем тригонометрическим многочленам $T_n(x)$ степени не выше $n$.

▸ Пусть $T_n(x)=\dfrac{A_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(A_k\cos(kx)+B_k\sin(kx)\right)$. Тогда, открывая квадратные скобки в выражении

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-T_n(x)\right]^2 dx \qquad (5.25)$$

и используя соотношения (5.9), (5.10) получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-T_n(x)\right]^2 dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\pi\left(\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^2+B_k^2\right)\right)-$$

$$-2\left[\frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\sum_{k=1}^{n}A_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)dx+B_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(kx)dx\right]=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\pi\left(\frac{A_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^2+B_k^2\right)\right)-2\pi\left[\frac{a_0A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_kA_k+b_kB_k\right)\right]=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right]+$$

$$+\pi\left[\frac{\left(A_0-a_0\right)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\left(A_k-a_k\right)^2+\left(B_k-b_k\right)^2\right)\right].$$

Из полученного выражения видно, что выражение (5.25) достигает минимума тогда, когда слагаемое

$$\pi\left[\frac{\left(A_0-a_0\right)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\left(A_k-a_k\right)^2+\left(B_k-b_k\right)^2\right)\right]$$

принимает наименьшее значение, т.е. когда

$$A_0=a_0,\ A_k=a_k,\ B_k=b_k,\ k=1,2,\ldots$$

Следовательно, $T_n(x)$ является суммой Фурье $S_n(x)$ порядка $n$ функции $f$. ◂

**Следствие.** Если $a_0, a_k, b_k, k \in \mathbb{N}$ суть коэффициенты Фурье функции $f$, то справедливо ***неравенство Бесселя***:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \qquad (5.26)$$

▸ Из полученного при доказательстве теоремы соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - S_n(x)\right]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right],$$

следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right] \ge 0.$$

Это неравенство справедливо при любом натуральном $n$. Переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство Бесселя. ◂

**Теорема 6.9 (теорема Ляпунова[5]).** Если $f$ интегрируема с квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - S_n(x)\right]^2 dx = 0,$$

(т.е. ряд Фурье функции $f$ сходится к ней в смысле средне квадратичного) и справедливо ***равенство Парсеваля***

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right). \qquad (5.27)$$

**Теорема 6.10 (достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье) [3].** Если функция $f$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f$ равномерно и абсолютно на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ сходится к самой функции $f$.

▸ Исходя из теории сходимости функциональных рядов, достаточно доказать, что ряд, составленный из модулей членов тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|a_k\cos(kx)\right| + \left|b_k\sin(kx)\right|\right) \qquad (5.28)$$

сходится равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$.

[5] Доказательство этого факта будет рассмотрено в курсе функционального анализа

В силу признака Вейерштрасса для доказательства равномерной сходимости ряда (5.28) достаточно доказать сходимость мажорирующего его числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|+|b_k|\right). \tag{5.29}$$

Обозначим через $\alpha_k$ и $\beta_k$ тригонометрические коэффициенты функции $f'(x)$, доопределив эту функцию произвольным образом в конечном числе точек, в которых не существует производная функции $f(x)$ (например, полусуммой правого и левого предельных значений производной).

Производя интегрирование по частям и учитывая, что функция $f(x)$ непрерывна на всем отрезке $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi)=f(\pi)$, получим следующие соотношения, связывающие тригонометрические коэффициенты Фурье функций $f'(x)$ и $f(x)$:

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(kx)\,dx=k\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx=kb_k,$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(kx)\,dx=-k\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx=-ka_k.$$

Таким образом,

$$|a_k|+|b_k|=\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k},$$

и для доказательства сходимости ряда (5.29) достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k}\right). \tag{5.30}$$

Сходимость ряда (5.30) вытекает из неравенств

$$\frac{|\alpha_k|}{k}\le\frac{1}{2}\left(\alpha_k^2+\frac{1}{k^2}\right),\quad \frac{|\beta_k|}{k}\le\frac{1}{2}\left(\beta_k^2+\frac{1}{k^2}\right)$$

и из сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, первый из которых сходится в силу равенства Парсеваля (5.27) для кусочно-непрерывной функции $f'(x)$, а второй – в силу интегрального признака Коши-Маклорена. ◄

## 6.4. ОПЕРАЦИИ НАД РЯДАМИ ФУРЬЕ

**Теорема 6.11 (линейность).** Если

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos kx + b_k \sin kx \right),$$

$$g(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos kx + B_k \sin kx \right),$$

то $cf(x) + qg(x) \sim \dfrac{ca_0 + qA_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left( ca_k + qA_k \right) \cos kx + \left( cb_k + qB_k \right) \sin nx$.

**Теорема 6.12 (о почленном интегировании ряда Фурье).** Пусть для абсолютно интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ функции построен ряд Фурье (сходящийся или расходящийся)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos kx + b_k \sin kx \right).$$

Тогда

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \ \int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \left[ a_k \cos kx + b_k \sin kx \right] dx. \quad (5.31)$$

▸ Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx, \ x \in [-\pi, \pi], \quad (5.32)$$

Она является непрерывной (и, следовательно, абсолютно интегрируемой на $[-\pi, \pi]$) и

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \pi a_0 = 0.$$

Согласно теореме 6.10 тригонометрический ряд Фурье функции $F(x)$ равномерно сходится к этой функции, т.е.

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos kx + B_k \sin kx \right). \quad (5.33)$$

Вычислим коэффициенты ряда (5.33):

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx\,dx = \frac{1}{\pi} F(x) \frac{\sin kx}{k} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx = -\frac{b_k}{k},$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin kx\,dx = -\frac{1}{\pi} F(x) \frac{\cos kx}{k} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx = \frac{a_k}{k}.$$

Для нахождения $A_0$ в (5.33) положим $x=0$:

$$F(0)=0=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k,$$

$$\frac{A_0}{2}=-\sum_{k=1}^{\infty}A_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}$$

(сходимость этого ряда доказана при доказательстве теоремы 6.10).

Подставив в (5.33) найденные значения коэффициентов, с учетом (5.32), получим

$$\int_0^x\left[f(x)-\frac{a_0}{2}\right]dx=F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\sin kx+b_k(1-\cos kx)}{k},$$

и, следовательно, выполняется (5.31). ◀

**Следствие.** Если $f$ абсолютно интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ функция, то для любого сегмента $[x',x'']$ такого, что $-\pi\le x'<x''\le\pi$

$$\int_{x'}^{x''}f(x)dx=\int_{x'}^{x''}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x'}^{x''}[a_k\cos kx+b_k\sin kx]dx,$$

причем ряд, стоящий справа сходится равномерно.

**Теорема 6.13 (о почленном дифференцировании ряда Фурье).** Пусть на $[-\pi,\pi]$ задана *непрерывная* функция $f(x)$, удовлетворяющая условию $f(-\pi)=f(\pi)$ и имеющая (исключая не более, чем конечное множество точек) производную $f'(x)$. Пусть для нее построен ряд Фурье:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Тогда ряд Фурье для производной $f'(x)$ может быть получен почленным дифференцированием:

$$f'(x)\sim-\sum_{k=1}^{\infty}(a_k k\sin kx+b_k k\cos kx)=\frac{a_0'}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k'\cos kx+b_k'\sin kx),$$

т.е. $a_k'=kb_k$, $b_k'=-ka_k$.

Замечание. При дифференцировании сходимость полученного ряда Фурье надо устанавливать отдельно. При дифференцировании порядок малости коэффициентов понижается и ухудшаются шансы на сходимость. При интегрировании наоборот, порядок малости увеличивается, а значит, сходимость получающегося ряда обусловлена сходимостью исходного. При решении с помощью рядов Фурье задач математической физики часто приходится дифференцировать эти ряды (даже неоднократно). Поэтому существуют специальные методы обеспечения сходимости получаемых рядов. Например, «выделение плохо сходящихся частей по методу Крылова» [7]. При этом сумма выделенной части, известная в конечном виде, дифференцируется непосредственно, а для остающегося ряда стараются добиться столь высокого порядка малости коэффициентов, чтобы и после дифференцирования получить равномерно сходящиеся ряды.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Виноградова И. А.*, *Олехник С. Н.*, *Садовничий В. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн.: Кн.1: Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: Учеб. пособие для ун-тов, пед. вузов/ Под ред. В. А. Садовничего – М.: Высш. шк., 2000.

2. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ: Справ. пособие. – Киев: Вища шк., 1985.

3. *Ильин В.А.*, *Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. В 2 ч.: Учеб. для вузов. – М.: Наука; Физматлит, 1998.

4. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: Учеб. для студентов ун-тов и вузов. В 3 т. – М.: Высш. шк., 1998.

5. Сборник задач по математическому анализу: Учеб. Пособие/ *Л.Д. Кудрявцев*, *А.Д. Кутасов*, *В.И. Чехлов*, *М.И. Шабунин*; В 3 т. /Под ред. Л.Д. Кудрявцева – М.: Наука, 2003.

6. *Математический* анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие/ В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин; Под ред. В. Ф. Бутузова. – 4-е изд. – М.: Физматлит, 2001.

7. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. – М.: Наука, 1969.