Список задач, рекомендуемых для подготовки к экзамену по дисциплине «Математический анализ» (2 семестр)

Большинство задач взяты из следующих учебников.

1. [В]иноградова И.А, Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. (Все задачи, кроме несобственных интегралов, из первого тома)
2. [К]удрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных.
3. [Д]емидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.
4. [Б]утузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах.

Примечание. Знаком “*” отмечены задачи повышенной сложности. В основном комплекте билетов их нет.

Определенный интеграл

1. Интеграл с переменным верхним пределом − см. Д:2231-2233, 2234

Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$. Доказать, что $\int_0^x e^{t^2}dt \sim \dfrac{1}{2x}e^{x^2}$.

2. Теоремы о среднем − см. Д: 2316-2317, 2323-2325:

Определить знаки следующих определенных интегралов:

1) $\int_0^{2\pi} x\sin x dx$, 2) $\int_0^{2\pi} \dfrac{\sin x}{x}dx$, 3) $\int_{-2}^{2} x^3 2^x dx$, 3) $\int_{1/2}^{1} x^2 \ln x dx$.

Определить какой интеграл больше: 1) $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} xdx$ или $\int_0^{\pi/2} \sin^5 xdx$,

2) $\int_0^1 e^{-x}dx$ или $\int_0^1 e^{-x^2}dx$, 3) $\int_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 xdx$ или $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 xdx$.

Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

1) $\int_0^{2\pi}\dfrac{dx}{1+0.5\cos x}$, 2) $\int_0^1 \dfrac{x^5dx}{\sqrt{1+x}}$, 3) $\int_0^{100}\dfrac{e^{-x}dx}{x+100}$.

3. Найти площадь области, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями [В38]: $x = a\cos t, y = b\sin t$.

4. Найти площадь области, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах [В: 48-54, Д:2418-2420]

1) $r = a\cos 2\varphi$, 2) $r = a\sin 4\varphi$, 3) $r = a\operatorname{tg}\varphi, \varphi = \pi/4$,

4) $r = a(1+\cos\varphi)$, 5) $r = a(2-\cos\varphi)$, 6)* $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

5. Вычислить площадь, описываемую полярным радиусом спирали Архимеда $r = a\varphi$ при одном его обороте, если началу движения соответствует $\varphi = 0$.

6. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $r = 2a(2+\cos\varphi)$.

7. Найти длину дуги кривой:

1) $y=\ln x, \frac{3}{4}\le x\le \frac{12}{5}$ [В95],

2) $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ от точки $A(0,a)$ до точки $B(b,h)$ [Д2433],

3) $y^2=2px, 0\le x\le x_0$ [Д2432],

4) $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t), 0\le t\le 2\pi$ [Д2444],

5) $r=a(1+\cos\varphi)$ [Д2448], 6) $r=a(2-\cos\varphi)$, 7)* $r=a\sin^2\frac{\varphi}{3}$ [Д2450]

8. Кривые, ограничивающие фигуру Q заданы в декартовой системе координат. Найти:

а) длину границы L фигуры Q;
б) площадь S фигуры Q;
в) объем тела T_x, полученного вращением фигуры Q, вокруг оси Ox;
г) площадь поверхности S_x тела T_x;
д) объем тела T_y, полученного вращением фигуры Q, вокруг оси Oy;
е) площадь поверхности S_y тела T_y.

1) $y=\sqrt{x-1}$, $y=-4x+22$, $x=1$, $y=10$;

2) $y=\frac{1}{2}x^2-2x+4$, $y=3x-8.5$, $x=0$, $y=1$;

Несобственные интегралы

1. Исследование сходимости интегралов от неотрицательной функции −
[В: 67-74, 76-82, 85-88, 90, 91, 103, 106, 108, 121, 123, 128, 129, 131]

1) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{5/2}}{\left(1+x^2\right)^2}dx$, 2) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^3+x}{x^4+x^2+1}dx$, 3) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+2x^2}}$, 4) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha}(x+2)}{1+x}dx$,

5) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+2}$, 6) $\int\limits_2^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{\left(4-x^2\right)^2}}$, 7) $\int\limits_0^{2}\frac{x^{\alpha-1}}{|1-x|}dx$, 8) $\int\limits_0^{2}\frac{x}{|1-x|^{\alpha}}dx$, 9) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^3-1\right)^p}$,

10) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^p}dx, p>0$, 11) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}dx$, 12) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos^3 x}{x^2}dx$,

13) $\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-x}dx$, 14) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$, 15) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}}{x^{\alpha}}dx$, 16)* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx$,

17) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{x|\ln x|^{\alpha}}dx$, 18) $\int\limits_0^{2}\frac{1}{|\ln x|^{p}}dx$, 19) $\int\limits_1^{e}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$,

20) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x^4+3x^5}}dx$, 21) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$, 22)* $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{\alpha}x\cos^{\beta}x\,dx, \alpha>-1, \beta>-1$,

2. Исследование интегралов на абсолютную и условную сходимость –
[В: 167-173, 182, 185, 187, 188, 194, 197, 198]

1) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{k^2+x^2}dx$, 2) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a}dx$, 3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$, 4) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^\alpha}dx, \alpha \ge 0$,

5) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x^3+3x}}dx$, 6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\operatorname{arctg} x\,dx$, 7) $\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)dx$, 8)* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}dx$,

9)* $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha \sin\left(e^x\right)dx$, 10)* $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(x+x^2\right)}{a^2+x}dx$, 11)* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+x^2\right)}{x^p}dx$,

3. Вычисление несобственных интегралов – В: 5, 11-14, 22-32, 41-52, 54

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-4x+11}$, 2) $\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3}}$, 3) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, a<b$,

4) $\int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, a<b$, 5) $\int_1^{+\infty} \ln x dx$, 6) $\int_0^1 \ln x dx$, 7) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$, 8) $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

Числовые ряды

1. Вычислить сумму ряда

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ [B12], 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ [B17], 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{n\sin\alpha}}$.

2. Исследовать сходимость ряда

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{n\cdot 2^{n+1}}$ [B51], 2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n-3^n}{7^n-5^n-2^n}$, 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k!}{(2n)!}$ [B271],

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\sqrt[5]{\frac{n-1}{n+1}}\right)^\alpha$ [B204], 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$ [B201] 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ [B120],

7)* $\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n} \cos\left(2^k\alpha\right)$ [B170], 8)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ [B150] 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{\pi n}{2n+5}\right)^{n^3}$ [B157]

3. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{n}}$ [B427], 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ [B379]

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arcctg} n}{\sqrt{n}}$ [B395], 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2+3}\cos n$ [B455],

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n}$ [B441], 6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3+(-1)^n}{n\ln n}$ [B437]

Функциональные последовательности и ряды

1. Найти предельную функцию последовательности

1) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ [B620], 2) $f_n(x)=\sqrt[n]{x^{2n}+4x^n+3}$ [B625],

3) $f_n(x)=\cos\left(\pi\sqrt{4n^2+nx}\right)$ [B626],

2. Исследовать на равномерную сходимость последовательность на множестве E

1) $f_n(x)=x^{2n}$, а) $E=[0,1/2]$, б) $E=[0,1]$. [B640]

2) $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$, а) $E=[0,1]$, б) $E=[1,2]$. [B641]

3) $f_n(x)=\dfrac{1}{x^2+nx+1}$, а) $E=[1,+\infty)$, б) $E=[0,1]$. [B643]

4) $f_n(x)=\dfrac{2n^2x}{1+n^\alpha x^2}$, $E=(-\infty;+\infty)$ [B647]

3. Найти множество сходимости (абсолютной и условной) ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin\frac{1}{xn}}{n+1}$ [B781], 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$ [B787], 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^n$ [B791],

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\dfrac{\pi x^2}{n}\right)^{n^3}$ [B800], 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{tg}^n x}{n^2}$ [B809], 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(nx)}{\sqrt[5]{n^4+|x|}}$ [B811].

4. Исследовать на равномерную сходимость ряд

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^x}{n!}$, $x\in[-1,1]$ [B865]; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2x^n-x^{2n}\right)$, $x\in[0,1)$ [B877]; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2e^{-n|x|}}{x^2+n^2}$ [B880];

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{n^2x^2+n}$, $x\in[0,1]$ [B893]; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n+x-\ln\left(n^2+x^2\right)}$, $x\in[0,+\infty)$ [B899];

6*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\operatorname{arcctg}\left(x^2+n^3\right)$ [B912];. 7*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n+1/n)}{n^x}$ [B848];

5. Исследовать сходимость функционального ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\sin^n x}{n(n+2)}$ [B749’], 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}$ [B759’], 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x^2+n^{2/3}}$ [B760’],

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin\frac{1}{xn}}{n+1}$ [B781’], 5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\arcsin x+n}$ [B816’], 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}^n x}{n^3}$ [B824’].

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^4+1}$ [B864’]; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{x}{n}$ [B871’]; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-\ln(n+x)}$, $x\in(0,1]$ [B883’];

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2x^2+n}$, $x\in(0,\pi/2)$ [B889’]; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2x^2+n}$, $x\in(0,1]$ [B897’];

6. Исследовать сходимость бесконечного произведения

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ [B577]; 2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}n^{1/n}$ [B577]; 3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos(\operatorname{arctg} n)$ [B585];

4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{a^n}{2^n}\right)$ [B595]; 5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$ [B605]

Предел и непрерывность

1. Определить и изобразить области существования следующих функций: [Д: 3136-3138, 3149; К: 2.8.3, 2.8.9, 2.12.2, 2.12.4, 2.12.5, 2.12.8]

1) $u(x,y)=x+\sqrt{y}$, 2) $u(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$,

3) $u(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 4) $u(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$,

5) $u(x,y)=\sqrt{1-|x|-|y|}$, 6) $u(x,y,z)=\ln(xyz)$,

7) $u(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$, 8) $u(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-z^2}}$,

9) $u(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x-y^2-z^2}}$.

2. Построить линии уровня следующих функций [Д: 3151-3154, 3158]:

1) $z=x+y$, 2) $z=x^2+y^2$, 3) $z=x^2-y^2$, 4) $z=(x+y)^2$, 5) $z=|x|+y$

3. Найти **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}u$, **б)** $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}u$, **в)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}u$. [К2.37] 1) $u=\dfrac{x^3-y}{x^3+y}$, 2) $u=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

4. Найти **а)** $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}u$, **б)** $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}u$, **в)** $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}u$. [К2.38]

1) $u=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^3}$, 2) $u=\dfrac{x^3+xy^2}{x^2+y^4}$, 3) $u=\sin\dfrac{\pi y^2}{x^2+3y^2}$.

5. Найти [К2.48; К2.49]:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+2x-2xy-4y}$, 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(1+x)^{1/(x+x^2y)}$, 3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}xy\sin\dfrac{\pi}{xy}$, 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{1-\sqrt[3]{1+xy}}$,

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y+9}-3}$, 6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)}$, 7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos(x^2+y^2)}}{tg^2(x^2+y^2)}$,

8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)$, 9) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy^2)^{1/(x^2+y^2)}$, 10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-1/(x^2+y^2)}$,

6. Доказать, что следующие функции непрерывны в начале координат: [В с.404 33]

1) $f=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 2) $f=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

7. Найти точки разрыва следующих функций [Д: 3194, 3195, 3197, 3198]:

1) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 2) $u=\dfrac{xy}{x+y}$, 3) $u=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$

8. Доказать, что следующие функции не являются непрерывными в начале координат:

1)* $f=\begin{cases}\sin\dfrac{y}{x}, x^2+y^2\neq 0\\ 0,\quad x^2+y^2=0\end{cases}$ 2) $f=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0,\quad x^2+y^2=0\end{cases}$ [B34]

9.* Найти значение a, при котором функция $f=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ a,\quad x^2+y^2=0\end{cases}$ в точке (0,0) является:

1) непрерывной по x, 2) непрерывной по y,

3) непрерывной по кривой $y=\beta\sqrt{x}, \beta\neq 0$, 4) непрерывной. [К2.52]

10. Найти все точки разрыва, указать точки устранимого разрыва функции двух переменных [К2.62].

1) $f=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0\\ 0,\quad x^2+y^2=0\end{cases}$ 2) $f=\begin{cases}e^{-1/|x-y|}, x\neq y\\ x^2-5x+6, y=x\end{cases}$ 3)* $f=\dfrac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$.

11. Найти все точки разрыва функции трех переменных [К2.63].

1) $f=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+z^2}, x^2+z^2\neq 0\\ 0,\quad x^2+z^2=0\end{cases}$ 2) $f=\begin{cases}\arccos\left(\dfrac{x^2}{x^2+z^2}\right), x^2+z^2\neq 0\\ \pi/2,\quad x^2+z^2=0\end{cases}$

3) $f=\begin{cases}\dfrac{\sin(xyz)}{z}, z\neq 0\\ x^2,\quad z=0\end{cases}$ 4) $f=\dfrac{x}{\sin(yz)}$

Производные и дифференциалы

1. Найти производную функции f в точке M по данному направлению, если [К3.44]:

1) $f=3x^4+xy+y^3, M(1,2)$, по направлению луча, образующего с осью x угол 135°;

2) $f=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right), M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, по направлению внешней нормали к окружности $x^2+y^2=2x$ в точке M;

3)* $f=x^2-3yz+4, M(1,2,-1)$, по направлению луча, образующего одинаковые углы со всеми координатными осями;

4) $f=\ln\left(e^x+e^y+e^z\right), M(0,0,0)$, по направлению луча, образующего с осями координат x, y и z углы, соответственно равные $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/3$;

5) $f=\operatorname{tg}(xz), M\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4},1\right)$, по направлению градиента функции $g=\sin(yz)$ в т.M;

6) $f=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{a^2}$, по направлению градиента функции f в точке M.

7*) $f=\ln\left(x^2+y^2\right)$, по направлению внешней нормали к линии c-уровня функции f в каждой ее точке, если:[К3.45]

2. Найти угол между градиентами функции f_1 и f_2 в точке *M*, если: [К3.52]

$$f_1 = y^2/x,\ f_2 = 2x^2 + y^2, M\left(x_0, y_0\right), x_0 \neq 0 .$$

3. Найти наибольшее значение $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ в точке *M*, если $f = \dfrac{x+\sqrt{y}}{y}, M\left(2,1\right)$. [К3.48]

4. Найти единичный вектор *l*, по направлению которого $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ в точке *M* достигает наибольшего значения, если $f = x - 3y + \sqrt{3xy}, M\left(3,1\right)$. [К3.49]

5. Доказать, что функция $f = \sqrt[3]{y^2}\left(\cos\sqrt[5]{y} - 1\right)$ дифференцируема в точке $\left(0,0\right)$. [К3.19]

6. Найти значение первого дифференциала функции *u* в точке M_0 на векторе смещения *h*, если:

1) $u = \arcsin xy, M_0\left(0.5,1\right), h = \left(0.5, 0.1\right)$ [В41а],

2) $u = x^3 y - xy^3, M_0\left(1,2\right), h = \left(-0.5, 0.8\right)$ [В41б].

7. Найти $d^n u$, если

1) $u\left(x,y,z\right) = 12x^4y^7 + y^{13} + x^5y^6, n = 10,$

2) $u\left(x,y,z\right) = 7x^7y^4z^4 + y^6z^{10}, n = 15 .$

8. Для функции $f\left(x,y,z\right) = x^3 + 2y^2x - xyz^2$:

а) выписать все ненулевые дифференциалы функции;

б) найти $\operatorname{grad} f$; **в)** найти $\operatorname{grad} f\left(M_0\right)$;

г) найти $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{MM_1}}$; **д)** найти $f'_{\overline{MM_1}}\left(M_0\right)$, если $M_0\left(0,0,1\right)$, $M\left(5,1,4\right)$, $M_1\left(1,1,1\right)$.

9. Разложить по формуле Тейлора функцию f в окрестности заданной точки:[К4.65,4.67]

1) $f\left(x,y\right) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y, \left(2;-1\right)$

2) $f\left(x,y,z\right) = \left(x+y+z\right)^2, \quad \left(1;1;-2\right)$

3) $f\left(x,y,z\right) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, \quad \left(1;0;1\right)$

4) $f\left(x,y,z\right) = x^3 + 2y^2x - xyz^2, \quad \left(0,0,1\right)$

10.* Выписать члены до 2-го порядка включительно формулы Тейлора для функции f в окрестности заданной точки:

1) $f\left(x,y\right) = 1/\left(x-y\right), \quad \left(2;1\right)$ [К 4.68.1]

2) $f\left(x,y\right) = \sqrt{x+y}, \quad \left(2;2\right)$ [К4.68.2]

3) $f\left(x,y\right) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right), \left(2;2\right)$ [К4.68.3]

4) $f\left(x,y\right) = \sin x \cos y, \quad \left(x_0; y_0\right)$ [К4.68.4]

5) $f\left(x,y\right) = \sin x \sin y, \quad \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$ [К4.70.1]

6) $f\left(x,y\right) = \cos x / \cos y, \quad \left(0;0\right)$ [К4.71.1]

11.* Выписать члены до 4-го порядка включительно формулы Маклорена для функции f:

1) $f\left(x,y\right) = \sqrt{1 - x^2 + 3y^2}$, 2) $f\left(x,y\right) = \cos x \cos y$ [К 4.70.3]

3) $f\left(x,y\right) = \sin x / \cos y$ [К 4.70.4]

12. Найти частные производные первого порядка функции $z(x,y)$, заданной неявно, предварительно найдя ее первый дифференциал:

1) $xyz = x^2 + y^2 + z^2$ [В77], 2) $\dfrac{z}{x^2 + y^2} = \ln(x + y + z)$ [В78]

13. Найти первый и второй дифференциалы функций $z(x,y)$, заданных неявно [В95,В96]:

1) $x^2 + zx + z^2 + y = 0$, 2) $x^3 + y^3 - 3xyz - z^3 = 1$

14. Найти второй дифференциал в точке $M_0(x_0, y_0)$, $z(M_0) = z_0$ функции $z(x,y)$, заданной неявно, если [В:103, 105]:

1) $xz^5 + y^3z - x^3 = 0, M_0(1,0), z_0 = 1$,

2) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0, M_0(-2,0), z_0 = 1$.

15. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (1;1) до $o(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$, функцию $u(x,y)$, $u(1,1) = 1$, заданную неявно уравнением:

1) $u^3 - 2xu + y = 0$ [К 4.79.1]

2) $u^3 + yu - xy^2 - x^3 = 0$ [К 4.79.30]

16. Проверить, что данное уравнение однозначно определяет функцию f в окрестности точки M_0:

1) $f = y(x), xy + \ln(xy) = 1, x_0 = 2, y_0 = 1/2$,

2) $f = z(x,y), x + y + z = \sin(xyz), x_0 = y_0 = z_0 = 0$

17. Доказать, что если уравнением $y f(z/y) = x^2 + y^2 + z^2$, где $f(u)$ – дифференцируемая функция, определяется дифференцируемая функция $z(x,y)$, то она удовлетворяет уравнению $\left(x^2 - y^2 - z^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xz$.[К3.71]

18. Найти дифференциалы первых двух порядков сложной функции u, если $\varphi -$ дважды непрерывно дифференцируемая функция и $x, y, z -$независимые переменные

1) $u = \varphi(t), t = xyz$ [В42],

2) $u = \varphi(\xi,\eta), \xi = x^2 + y^2, \eta = xy$ [В48],

3) $u = \varphi(\xi,\eta,\zeta), \xi = xy, \eta = x - y, \zeta = x + y$ [В42],

4) $u = \varphi(\xi,\eta), \xi = x + y, \eta = x - y$ [Д3294],

5) $u = \varphi\left(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2\right)$ [В56],

6) $u = \varphi(x,y,z), x = t, y = t^2, z = t^3$ [Д3299]

19.* Предполагая, что точка (x_0, y_0, z_0) такова, что в ее некоторой окрестности однозначно определена дважды непрерывно дифференцируемая функция $z(x, y)$, найти значения указанных производных в этой точке:

1) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x = u^2 - v^2, y = uv, z = u + 2v$ [В67]

2) $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $x = u + \ln v, y = v - \ln u, z = 2u + v, u = 1, v = 1$ [Д3407.1]

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x = u + v^2, y = u^2 - v^3, z = 2uv, u = 2, v = 1$ [Д3407.2]

20. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке [К 6.1]

1) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy, (-3; 4; 7)$; 2) $z = x - y + \sqrt{|xy|}, (0; 0; 0)$; 3) $z = \sin\left(\frac{x}{y}\right), (\pi; 1; 0)$.

21. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке [К 6.2]

1) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z - 4, (2; 3; 6)$; 2) $e^z - z + xy = 3, (2; 1; 0)$.

22. [К 6.9] Написать уравнения касательных плоскостей к поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$ в точках ее пересечения с прямой $x = 1,\ y = 2$.

23. Доказать, что поверхности $z = xy - x^2 + 8x - 5$ и $z = e^{x+2y+4}$ касаются друг друга в точке $(2; -3; 1)$.[К 6.10]

24. Найти на поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ точки, в которых касательные плоскости к ней параллельны координатным плоскостям [К 6.11].

25. [К 6.12] Написать уравнения тех касательных плоскостей к поверхности $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$, которые параллельны плоскости $x + 2y = 0$

Замена переменных в дифференциальных уравнениях

18. Сделать замену переменных: [В:150,153,154, Д:3436,3440,3441,3442,3439]

1) $xy'' - y' + xy = 0, \quad t = \frac{x^2}{4}, y = y(t)$ [В150],

2) $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \quad x = \cos t, y = y(t)$ [Д3436],

3) $y'' + \frac{2}{x}y' - a^2 y = 2,\ y = \frac{u}{x}, u = u(x)$ [В154],

4) $y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0, x = u + t, y = u - t, u = u(t)$ [Д3442],

5) $(1 - x^2)^2 y'' = -y, x = \operatorname{th} t, y = \frac{u}{\operatorname{ch} t}, u = u(t)$ [Д3441],

6) $x^4 y'' + xyy' - 2y^2 = 0, x = e^t, y = ue^{2t}, u = u(t)$ [Д3439]

19. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad u=x-y, v=x+y$ [B183],

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad y=\dfrac{u+v}{2}, x=\dfrac{u-v}{4}$ [B189],

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial x}+6\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad u=x+y,\quad v=3x-y$ [B187].

20. Приняв u, v и w за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

1) $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial t}+3\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,

$u=x+y+t,\ v=-y-t,\ w=-t$ [B200],

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial t}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial t}=0$,

$x=2u-v-w,\ y=2v-u-w,\ t=u+v+w$ [B201].

21. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным следующие уравнения:

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad u=x,\quad v=x-y,\quad w=x-y+z$ [B202],

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad u=y+x,\quad v=y-x,\quad w=xy-z$ [B204].

22. Преобразовать уравнения, приняв u, v, t за новые независимые переменные: [K4.60]:

1) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}+4\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0,\quad u=x,\quad 2v=x+y+z,\quad 2t=3x+y-z$,

2) $4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}+2\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0,\quad u=\dfrac{x}{2},\quad v=\dfrac{x}{2}+y,\quad t=-\dfrac{x}{2}-y+z$.

23. Доказать, что двумерному уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ удовлетворяют следующие функции: а) $u=e^x\left(x\cos y-y\sin y\right)$, б) $u=x\,\mathrm{ch}x\sin y+y\,\mathrm{sh}x\cos y$.

24. Доказать, что функция $u=1/r,\ r=\sqrt{\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2}$ удовлетворяет трехмерному уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

25. Доказать, что одномерному волновому уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ удовлетворяют следующие функции: 1) $u=\dfrac{x}{x^2-a^2t^2}$, 2) $u=A\sin\omega x\cos a\omega t$.

26. Доказать, что функция $u\left(t,x,y\right)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2t^2-x^2-y^2}}$ удовлетворяет двумерному волновому уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$.

27. Доказать, что если $f\left(u\right)$ – произвольная дифференцируемая функция, то функция $\varphi\left(x,y\right)=\sin x+f\left(\sin y-\sin x\right)$ удовлетворяет уравнению $\cos y\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\cos x\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\cos x\cos y$.

28. Доказать, что если $f\left(u,v\right)$ – произвольная дифференцируемая функция, то функция $\varphi\left(x,y,z\right)=f\left(x/y,\, x^2+y-z^2\right)$ удовлетворяет уравнению $2xy\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+2yz\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\left(2x^2+y\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=0$.

Экстремумы функций многих переменных.

1. Исследовать функцию u на экстремум

1) $f\left(x,y,z\right)=x^2-2xy+4y^2+6z^2+6yz-6z$ [В256]

2) $f\left(x,y,z\right)=x+y+8\cos\dfrac{y}{z}\cos\dfrac{x}{z}$ [В259]

3) $f\left(x,y,z\right)=z\ln z-z-z\ln\left(xy\right)+xy+x^2+2y^2-4x-2y$ [В262]

4) $f\left(x,y,z\right)=x^3+xy+y^2-2xz+2z^2+3y-1$ [Б55в]

5) $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+\left(z+1\right)^2-xy+x$ [К5.13.1]

6) $f\left(x,y,z\right)=2\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}-4x+2z^2$ [Б55д]

7) $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2-z^2-4x+6y-2z$ [К5.13.3]

2. Исследовать на экстремум каждую непрерывно дифференцируемую функцию $y=y\left(x\right)$, заданную неявно:

1) $y^2-ay-\sin x=0,\ 0\le x\le 2\pi$ [В274]   2) $\left(y-x^2\right)^2=x^5,\ x^2+y^2\ne 0$ [В276]

3. Исследовать на экстремум каждую непрерывно дифференцируемую функцию $u=u\left(x,y\right)$, заданную неявно:

1) $-x^2+2x-y^2+4y+z^2+2z=5$ 2) $2y^2-2yx+5x^2-6y-6x+10-u^2=0$

3) $2x^2+2y^2+u^2+8yu-u+8=0$ [В278]

4) $25x^2+y^2+16u^2-50x+64u-311=0,\ u<-2$ [К5.17.2]

5) $5u^2+4uy+y^2-2y+3x^2-6x+4=0$ [В279]

6) $5x^2+5y^2+5u^2-2xy-2xu-2yu-72=0$ [В280]

7) $x^2+4y^2+9u^2-6x+8y-36u=0,\ u>2$ [К5.17.3]

8) $\left(x^2+y^2+u^2\right)^2=8\left(x^2+y^2-u^2\right), u>0$ [K5.17.4]

9) $x^2+y^2+u^2-4x-6y-4u+8, u>2$ [K5.17.1]

10) $\left(x^2+y^2+u^2+9\right)^2=100\left(x^2+y^2\right), u<0$ [K5.17.5]

11) $x^2+y^2+u^2+2x-2y+4u-3=0$ [K5.18.1]

12) $x^3-y^2+u^2-3x+4y+u-8=0$ [K5.18.3]

4. Найти условные экстремумы функции $u=f(x,y)$ относительно уравнения связи:

1) $u=xy, \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ [K5.20.1], 2) $u=x^2-y^2, \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ [K5.20.3],

3) $u=xy^2, \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ [K5.20.4] 4) $u=1-4x-8y, x^2-8y^2=8$ [K5.21.2],

5) $u=2x^2+12xy+y^2, x^2+4y^2=25$ [K5.21.4],

5. Найти условные экстремумы функции $u=f(x,y,z)$ при заданных уравнениях связи:

1) $u=xy+2xz+2yz, \quad xyz=100$ [K5.25.8], 2) $u=xyz, \quad x^2+y^2+z^2=3$ [K5.25.7],

3) $u=\sin x\sin y\sin z, \quad x+y+z=\pi/2, \quad x>0, y>0, z>0$, [K5.25.4]

4) $u=xyz, \quad x+y-z=3, \quad x-y-z=8$ [K5.26.1],

5) $u=xyz, \quad xy+yz+zx=8, \quad x+y+z=5$ [K5.26.2],

6) $u=xy+yz, \quad x^2+y^2=2, \quad y+z=2, \quad y>0$ [K5.26.3].

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области

1) $u=x^2-xy+y, |x|\le 2, |y|\le 3$ [K5.28.2],

2) $u=x^3+y^3-3xy, 0\le x\le 2, \left|y-\dfrac{1}{2}\right|\le\dfrac{3}{2}$ [K5.28.4],

3) $u=x^3+8y^3-6xy+1, 0\le x\le 2, |y|\le 1$ [K5.28.5],

4) $u=x^2-xy+y^2, |x|+|y|\le 1$ [K5.28.7],

5) $u=3+2xy, 4\le x^2+y^2\le 9$ [K5.30.1]

6)* $u=x^2-y^2, x^2+y^2\le 2x$ [K5.30.3]

7) $u=x+3y, x+y\le 6, x+4y\ge 4, y\le 2$ [K5.29.2]

8) $u=x^2-2y+3, y-x\le 1, x\le 0, y\ge 0$ [K5.29.3]

9)* $u=x+2y+3z, x+y\le 3, x+y\le z, 3x+3y\ge z, x\ge 0, y\ge 0$,

10)* $u=3z-y-2x, x+y\ge 2, 3x+y\le 6, 0\le z\le 3, x\ge 0$.

7. Представить положительное число a в виде суммы пяти положительных слагаемых так, чтобы их произведение имело наибольшее значение [B307].

8. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда данного объема V, имеющего наименьшую площадь поверхности [B313].

9.*Найти кратчайшее расстояние от точки $A(p,4p)$ до точек параболы $y^2=2px\,(p>0)$ [В327].

10.* Найти кратчайшее расстояние между кривой и прямой: [К5.37]

1) $x^2-y^2=3$, $y-2x=0$; 2) $2x^2-4xy+2y^2-x-y=0$, $9x-7y+16=0$;

Отображения

1. Найти в точке $(2,1,1)$ производную и дифференциал отображения $u=xy$, $v=z/y$ [К3.99]

2. Найти производную и дифференциал отображения $u=yz$, $v=zx$ [К3.99]

3. Найти якобиан $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ отображения:

1) $u=\operatorname{ch}x\cos y$, $v=\operatorname{sh}x\sin y$ [К3.103.2]; 2) $x=uv$, $y=v/u$ [В12];

4. Найти якобиан $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ отображения:

1) $u=\dfrac{x}{\sqrt{1-r^2}}$, $v=\dfrac{y}{\sqrt{1-r^2}}$, $w=\dfrac{z}{\sqrt{1-r^2}}$, $r^2=x^2+y^2+z^2$ [К3.106.2];
2) $x=u+v+w$, $xy=v+w$, $xyz=w$ [В14];

5. Найти якобиан $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}$ обобщенных полярных координат $x=r\cos^{\alpha}\varphi$, $y=r\sin^{\alpha}\varphi$ [К3.104]:

6. Найти якобиан $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,h)}$ обобщенных цилиндрических координат:

$$x=r\cos^{\alpha}\varphi,\ y=r\sin^{\alpha}\varphi,\ z=h$$

7. Найти якобиан $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)}$ обобщенных сферических координат [К3.105]:

$$x=r\cos^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi,\ y=r\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi,\ z=r\sin^{\beta}\psi$$

8. Найти матрицу производной отображения $f=g\circ h=h(g)$ в точке M_0, если

$$g:u=xyz,\ v=x^2+y^2+z^2,\quad h:\xi=uv,\eta=\frac{u}{v},\zeta=\frac{u}{u^2+v^2},\quad M_0:x_0=1,y_0=0,z_0=1.$$

9. Найти матрицу производной и якобиан отображения $f=g\circ h=h(g)$, если

$$g:x=uv,\ y=u^2-v^2,\ h:\xi=\operatorname{arctg}\frac{x}{y},\eta=\ln\left(x^2+y^2\right).$$

10. Найти матрицу производной отображения $f=g\circ h=h(g)$, если

$$g:x=uv,\ y=u^2-v^2,\ h:\xi=\operatorname{arctg}\frac{x}{y},\eta=\ln\left(x^2+y^2\right),\zeta=x-y.$$