Глава 8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

8.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** (или просто ***первообразной***) для функции $f(x)$ на промежутке A, если в любой точке $x \in A$ функция $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$.

Замечание. Любая первообразная является непрерывной функцией, так как из дифференцируемости функции на множестве следует ее непрерывность на этом множестве.

Функция $F(x)$ называется ***обобщенной первообразной*** для функции $f(x)$ на промежутке A, если $F(x)$ *непрерывна* на A и $F'(x) = f(x)$ на множестве A, за исключением, быть может, конечного количества точек.

Замечание. Обычно под термином «первообразная» понимают «первообразная или обобщенная первообразная».

Теорема 8.1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – любые две первообразные для функции $f(x)$ на промежутке A, то $\forall x \in A \quad F_1(x) - F_2(x) = C$, где C – некоторая постоянная.

▸ См. замечание к теореме 6.6. ◂

Следствие. Если $F(x)$ – одна из первообразных функций для функции $f(x)$ на промежутке A, то любая первообразная $G(x)$ для функции $f(x)$ на A имеет вид $G(x) = F(x) + C$, где C – некоторая постоянная.

Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на промежутке A называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ (на этом промежутке) и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx. \tag{8.1}$$

В этом обозначении знак $\int$ называется ***знаком интеграла***, выражение $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***, а сама функция $f(x)$ – ***подынтегральной функцией***. Операцию нахождения первообразной или неопределенного интеграла (от функции $f(x)$) принято называть ***интегрированием*** (функции $f(x)$).

Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то в силу следствия из теоремы 8.1

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (8.2)$$

где C – любая постоянная.

Замечание. Если первообразная (а стало быть, и неопределенный интеграл) для функции $f(x)$ на промежутке A существует, то подынтегральное выражение в формуле (8.1) представляет собой дифференциал любой из этих первообразных, т.е.

$$dF = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Пример 8.1. На всей числовой оси функция $F(x) = \sin x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$, так как $F(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = (\sin x)' = \cos x.$$

Пример 8.2. На всей числовой оси функция $G(x)=|x|$ является обобщенной первообразной функции $g(x) = \operatorname{sign} x$, так как $G(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad G'(x) = (|x|)' = \operatorname{sign} x$.

Пример 8.3 (**Первообразная кусочно-непрерывнрй функции**). Найдем первообразную $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<1; \\ 6x-7, & x \ge 1. \end{cases}$

▸ Вычислим значения первообразной на каждом из интервалов по отдельности:

$$\int f(x)dx = F(x) = \begin{cases} x^2 + x + C_1, & x<1; \\ 3x^2 - 7x + C_2, & x \ge 1. \end{cases}$$

Так как первообразная должна быть непрерывной функцией, то должно выполняться условие

$$\lim_{x\to 1-} F(x) = \lim_{x \to 1+} F(x).$$

Из этого условия находим связь между постоянными C_1 и C_2:

$$\lim_{x\to 1-} F(x) = 2 + C_1 = -4 + C_2 = \lim_{x \to 1+} F(x).$$

Тогда $C_2 = C_1 + 6$, и, следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + x + C_1, & x<1; \\ 3x^2 - 7x + 6 + C_1, & x \ge 1 \end{cases} = C + \begin{cases} x^2 + x, & x<1; \\ 3x^2 - 7x + 6, & x \ge 1. \end{cases}$$ ◂

Замечание. Функция $G_1(x)=x^2+x$ является первообразной функции $f(x)$ на любом промежутке, содержащемся в луче $(-\infty,1)$, а фукнция $G_2(x)=3x^2-7x$ является первообразной функции $f(x)$ на любом промежутке, содержащемся в луче $(1,+\infty)$. Но функция

$$G(x)=\begin{cases}x^2+x, & x<1;\\ 3x^2-7x, & x\ge 1.\end{cases}$$

на любом промежутке, содержащем точку $x=1$ не будет первообразной функции $f(x)$, так как любая первообразная является непрерывной функцией.

Теорема 8.2. Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на *ограниченном* промежутке, существует на этом же промежутке первообразная (и неопределенный интеграл).

▸ Доказательство см. в главе 9 (теорема 9.6). ◂

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $d\int f(x)dx=f(x)dx$.

▸ $d\int f(x)dx=d\big(F(x)+C\big)=dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$. ◂

2. $\int dF(x)=F(x)+C$.

▸ Из определения первообразной следует, что

$$\int dF(x)=\int f(x)dx=F(x)+C. \text{ ◂}$$

3. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\quad \int\big[\alpha f(x)+\beta g(x)\big]dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$.

▸ Заметим, что равенство в этой формуле имеет условный характер: его следует понимать как равенство левой и правой частей с точностью до произвольной постоянной (так как каждый из интегралов, фигурирующих в этой формуле, определен с точностью до произвольной постоянной).

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $\alpha F(x)+\beta G(x)$ – первообразная для функции $\alpha f(x)+\beta g(x)$, так как

$$\big(\alpha F(x)+\beta G(x)\big)'=\alpha F'(x)+\beta G'(x)=\alpha f(x)+\beta g(x). \text{ ◂}$$

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

2. $\int 1 \cdot dx = x + C$.

3. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$.

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$.

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\, a \neq 1)$, $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) dx = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\, k \in \mathbb{Z}\right)$.

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int \left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right) dx = -\operatorname{ctg} x + C \quad \left(x \neq \pi k,\, k \in \mathbb{Z}\right)$.

10. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C \quad \left(a \neq 0,\, |x| < |a|\right)$.

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + d}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + d}\right| + C \quad \left(d \neq 0,\, x^2 + d > 0\right)$.

13. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a + x}{a - x}\right| + C \quad \left(a \neq 0,\, |x| < |a|\right)$.

14. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$.

15. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

16. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

17. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0)$.

8.2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

8.2.1. Интегрирование заменой переменной (подстановкой)

Пусть функция $t=\varphi(x)$ дифференцируема на некотором множестве X (X – отрезок, интервал, луч, прямая), а T – множество всех значений этой функции. Пусть функция $g(t)$ определена на T и имеет на этом промежутке первообразную $G(t)$. Тогда всюду на множестве X для функции $g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ существует первообразная, равная $G[\varphi(x)]$, т.е.

$$\int g(t)\,dt=\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=G(\varphi(x))+C=G(t)+C. \tag{8.3}$$

▶ Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dx}\left(G[\varphi(x)]\right)=G'[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$$

и учесть, что, по определению первообразной, $G'(t)=g(t)$. ◀

Пример 8.4. Вычислим интеграл $\int\frac{dx}{\cos x}$.

▶ $$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x}=\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}=\left[t=\sin x\right]=$$
$$=\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C. \text{ ◀}$$

Замечание. В этом примере мы искали первообразную (неопределенный интеграл) на множестве

$$X=\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\right\}.$$

Очевидно, что на этом множестве подынтегральная функция является непрерывной и для нее существует первообразная. В дальнейшем мы будем искать первообразную (неопределенный интеграл) только на тех множествах, на которых она существует, поэтому само множество указывать не будем, однако забывать о нем не следует.

Пример 8.5. Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

▸ $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}dx = \left[x = \frac{1}{t} \right] =$

$$= \int \frac{1}{\frac{1}{t} \cdot \sqrt{\frac{1}{t^2}+4}} \left(-\frac{dt}{t^2} \right) = -\int \frac{dt}{t \cdot \frac{\sqrt{1+4t^2}}{\sqrt{t^2}}} = -\int \frac{\operatorname{sgn} t \, dt}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

Учитывая, что $\int \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|2t+\sqrt{4t^2+1}\right| + C$, получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+1}} = -\frac{\operatorname{sgn} x}{2}\ln\left|\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}\right| + C. ◂$$

8.2.2. Интегрирование по частям

Пусть каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируема на множестве X и, кроме того, на этом множестве существует первообразная для функции $v(x)u'(x)$. Тогда на множестве X существует первообразная и для функции $u(x)v'(x)$, причем справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \qquad (8.4)$$

▸ Для доказательства этого утверждения воспользуемся формулой для производной произведения функций $u(x)$ и $v(x)$.

Так как $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, то

$$\int [u(x)v(x)]' dx = \int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]dx.$$

$$u(x)v(x) = \int v(x)u'(x)dx + \int u(x)v'(x)dx. ◂$$

Замечание 1. Определение дифференциала и свойство инвариантности его формы позволяет записать формулу (8.4) в виде

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (8.5)$$

Замечание 2. Вычисление интеграла $\int udv$ посредством формулы (8.5) и называют ***интегрированием по частям***.

Пример 8.6. Вычислим интеграл $\int \ln x dx$.

▸ $\int \ln x dx = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$. ◂

Пример 8.7. Вычислим интеграл $I = \int e^x \sin x dx$.

▸ $\int e^x \sin x dx = \int \sin x d(e^x) = e^x \sin x - \int e^x d(\sin x) =$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x\, de^x =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx.$$

Таким образом, $\int e^x \sin x\, dx = e^x\left(\sin x - \cos x\right) - \int e^x \sin x\, dx$, азначит,

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \frac{\sin x - \cos x}{2} + C. ◂$$

Пример 8.8. Вычислим интеграл $I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

▸ $I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} u = \sqrt{1-x^2}, & dv = dx, \\ du = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx, & v = x. \end{bmatrix} =$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x + C.$$

Таким образом, $I = \dfrac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + C$. ◂

8.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

8.3.1. Разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей

Рациональной дробью называется отношение $\dfrac{S(x)}{Q(x)}$ двух алгебраических многочленов. ***Рациональная дробь*** называется ***правильной***, если степень многочлена $S(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. Если $\dfrac{S(x)}{Q(x)}$ – неправильная рациональная дробь, то делением многочлена $S(x)$ на многочлен $Q(x)$ ее можно привести к виду $\frac{S(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $T(x)$ – многочлен, а $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Теорема 8.3. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь, знаменатель которой имеет вид произведения:

$$Q(x) = (x-b_1)^{k_1}\ldots(x-b_m)^{k_m}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\ldots\left(x^2+p_nx+q_n\right)^{l_n}, \qquad (8.6)$$

(трехчлены $\left(x^2+p_ix+q_i\right)^{l_i}$ не имеют действительных корней). Тогда для этой дроби справедливо следующее разложение на сумму элементарных дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{(x-b_1)} + \frac{A_2^1}{(x-b_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}^1}{(x-b_1)^{k_1}} + \ldots +$$

$$+\frac{A_1^m}{(x-b_m)} + \frac{A_2^m}{(x-b_m)^2} + \ldots + \frac{A_{k_m}^m}{(x-b_m)^{k_m}} +$$

$$+\frac{B_1^1+C_1^1x}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)} + \frac{B_2^1+C_2^1x}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2} + \ldots + \frac{B_{l_1}^1+C_{l_1}^1x}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}} + \ldots +$$

$$+\frac{B_1^n+C_1^nx}{\left(x^2+p_nx+q_n\right)} + \frac{B_2^n+C_2^nx}{\left(x^2+p_nx+q_n\right)^2} + \ldots + \frac{B_{l_n}^n+C_{l_n}^nx}{\left(x^2+p_nx+q_n\right)^{l_n}}. \qquad (8.7)$$

В этом разложении $A_1^1,\ldots,A_{k_m}^m,B_1^1,C_1^1,\ldots,B_{l_n}^n,C_{l_n}^n$ – некоторые действительные числа, подлежащие определению. При выполнении разложения вида (8.7) для конкретно заданной дроби найти неопределенные коэффициенты $A_1^1,\ldots,A_{k_m}^m,B_1^1,C_1^1,\ldots,B_{l_n}^n,C_{l_n}^n$ можно различными способами**.**

Метод сравнения

Для заданной правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ записывается разложение (8.7), в котором коэффициенты $A_1^1,\ldots,A_{k_m}^m,B_1^1,C_1^1,\ldots,B_{l_n}^n,C_{l_n}^n$ считаются неизвестными, после этого обе части равенства приводят к общему знаменателю и у многочленов в числителях приравнивают коэффициенты. При этом, если степень многочлена $Q(x)$ равна n, то, вообще говоря, в числителе правой части равенства (8.7) получается многочлен степени $n-1$, т.е. многочлен с n коэффициентами. Число неизвестных в разложении (8.7) также равно n. Таким образом, получается система n уравнений с n неизвестными, существование решения которой вытекает из теоремы 8.3.

Метод частных значений

Разложение (8.7) приводится к целому виду, т.е. левая и правая части выражения умножаются на общий знаменатель. Тогда получить систему уравнений для коэффициентов $A_1^1,...,A_{k_m}^m,B_1^1,C_1^1,...,B_{l_n}^n,C_{l_n}^n$ можно, подставляя в обе части тождества некоторые числовые значения x. В большинстве случаев в качестве частных значений x удобно выбирать корни знаменателя, так как они обращают в нуль часть сомножителей. Если знаменатель не имел кратных корней, то в результате последовательной подстановки всех корней знаменателя получим все коэффициенты разложения (8.7).

Метод вычеркиваний

Если полином $Q(x)$ имеет только действительные корни, то коэффициенты $A_1^1,...,A_{k_m}^m$ в разложении (8.7) можно найти с помощью метода вычеркиваний, который в таких случаях оказывается менее громоздким, чем метод сравнения. Суть метода заключена в следующей теореме.

Теорема 8.4. Пусть знаменатель $Q(x)$ правильной рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ представим в виде $Q(x)=(x-b)^k S(x)$, $S(b)\neq 0$, $b\in\mathbb{R}$. Тогда коэффициенты $A_i, i=\overline{1,k}$ в разложении

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-b)^k S(x)}=\frac{A_1}{x-b}+\frac{A_2}{(x-b)^2}+...+\frac{A_k}{(x-b)^k}+\frac{T(x)}{S(x)},$$

где $T(x)$ – некоторый многочлен, степень которого не превышает степень многочлена $S(x)$, могут быть вычислены следующим образом

$$A_k=\frac{P(b)}{S(b)},\qquad A_{k-m}=\frac{1}{m!}\left(\frac{P(x)}{S(x)}\right)^{(m)}\Bigg|_{x=b},\qquad m=\overline{1,k-1}.$$

▸ Обозначим $V(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}(x-b)^k=\dfrac{P(x)}{S(x)}$. Тогда для функции $V(x)$ справедливо следующее представление

$$V(x)=A_1(x-b)^{k-1}+A_2(x-b)^{k-2}+\ldots+A_{k-1}(x-b)+A_k+\frac{T(x)(x-b)^k}{S(x)}.$$

Отсюда получаем, что

$$A_k=V(b),\ A_{k-1}=V'(b),\ A_{k-2}=\frac{1}{2}V''(b),\ \ldots,\ A_1=\frac{1}{(k-1)!}V^{(k-1)}(b). \text{◂}$$

Идея попеременного использования дифференцирования и метода частных значений (см. доказательство теоремы 8.4) бывает полезной и в том случае, когда знаменатель содержит комплексные корни (пример 8.11).

При некоторых навыках удачная комбинация указанных приемов часто позволяет упростить процесс отыскания коэффициентов разложения (8.7).

Пример 8.9. Разложим дробь $\dfrac{x^2-3x}{(1-x)^3(x+2)}$ на сумму простейших дробей.

▸ Все корни знаменателя действительные, поэтому найдем коэффициенты разложения *методом вычеркиваний*:

$$\frac{x^2-3x}{(1-x)^3(x+2)}=\frac{3x-x^2}{(x-1)^3(x+2)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

$$A=\left.\frac{3x-x^2}{(x-1)^3}\right|_{x=-2}=\frac{10}{27},\qquad B=\left.\frac{3x-x^2}{x+2}\right|_{x=1}=\frac{2}{3},$$

$$C=\left.\left(\frac{3x-x^2}{x+2}\right)'\right|_{x=1}=\left.\left(\frac{(3-2x)(x+2)-(3x-x^2)}{(x+2)^2}\right)\right|_{x=1}=\frac{1}{9},$$

$$D=\left.\frac{1}{2!}\left(\frac{3x-x^2}{x+2}\right)''\right|_{x=1}=\left.\frac{1}{2}\left(\frac{-x^2-4x+6}{(x+2)^2}\right)'\right|_{x=1}=$$

$$=\left.\frac{1}{2}\frac{(-2x-4)(x+2)^2-2(x+2)(-x^2-4x+6)}{(x+2)^4}\right|_{x=1}=-\frac{30}{81}=-\frac{10}{27}. \text{◂}$$

Пример 8.10. Разложим дробь $\dfrac{x^2+5x+1}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$ на сумму простейших дробей.

▸ Разложение данной дроби имеет вид

$$\frac{x^2+5x+1}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}+\frac{Ex+F}{x^2+9},$$

следовательно,

$$x^2+5x+1=(Ax+B)(x^2+4)(x^2+9)+$$

$$+(Cx+D)(x^2+1)(x^2+9)+(Ex+F)(x^2+1)(x^2+4). \qquad (8.8)$$

Найдем коэффициенты *методом частных значений.* Положив в равенстве (8.8) поочередно $x=i, x=2i, x=3i$ и приравняв действительные и мнимые части, получим:

1) $5i=24Ai+24B$, т.е. $A=5/24,\ B=0$;

2) $10i-3=-15C\cdot 2i-15D$, т.е. $C=-1/3,\ D=1/5$;

3) $15i-8=40E\cdot 3i+40F$, т.е. $E=1/8,\ F=-1/5$. ◂

Пример 8.11. Разложим дробь $\dfrac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$ на сумму простейших правильных дробей.

▸ Убедившись в том, что квадратный трехчлен x^2+x+1 имеет комплексные корни, ищем разложение дроби в виде

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}. \qquad (8.9)$$

Способ 1. Используем *метод сравнения.*

Приводя равенство (8.9) к общему знаменателю, получим

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, приходим к системе уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 2 = A \qquad\quad + C; \\ x^2 & 4 = A - A + B - 2C + D; \\ x^1 & 1 = A - A + B + C - 2D; \\ x^0 & 2 = \quad - A + B + \quad + D. \end{array}$$

Решая эту систему, находим $A = 2$, $B = 3$, $C = 0$, $D = 1$. Таким образом, окончательно получаем

$$\frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2 (x^2 + x + 1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Способ 2. Решим этот же пример, используя *метод частных значений*. Перепишем выражение (8.9) в виде

$$2x^3 + 4x^2 + x + 2 =$$
$$= A(x-1)(x^2 + x + 1) + B(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x-1)^2. \qquad (8.10)$$

1) Полагая в (8.10) $x = 1$, получаем $B = 3$.

2) Чтобы найти коэффициент A, продифференцируем обе части выражения (8.10) и затем положим в нем $x = 1$. При дифференцировании правой части будем выписывать только те слагаемые, которые не обращаются в нуль при $x = 1$:

$$6x^2 + 8x + 1 = A(x^2 + x + 1) + B(2x^2 + 1) + \ldots.$$

Отсюда при $x = 1$ имеем $15 = 3A + 3B$, т.е. $A = (15 - 3B)/3 = 2$.

3) Полагая в (8.10) $x = 0$, получим

$$2 = -A + B + D \;\Rightarrow\; D = 2 + A - B = 1.$$

4) Сравнивая коэффициенты при x^3, получим

$$2 = A + C \;\Rightarrow\; C = 0. \blacktriangleleft$$

8.3.2. Интегрирование рациональной дроби

Теорема 8.5. Всякая рациональная дробь интегрируется в элементарных функциях.

$\blacktriangleright$ Как уже отмечалось, интегрирование рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби. Поэтому достаточно показать, что *правильная* рациональная дробь интегрируется в элементарных функциях.

В силу теоремы 8.5, интегрирование правильной рациональной дроби сводится к интегрированию простейших дробей следующих четырех типов:

1. $\dfrac{A}{x-b}$. **2.** $\dfrac{A}{(x-b)^k}$, $(k\geq 2)$. **3.** $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$. **4.** $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}$, $(m\geq 2)$.

Здесь A, M, N, b, p, q – некоторые вещественные числа, причем трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т.е. $q-\dfrac{p^2}{4}>0$. Докажем, что каждая из четырех указанных дробей интегрируется в элементарных функциях.

1. $\displaystyle\int\frac{Adx}{x-b}=A\ln|x-b|+C$.

2. $\displaystyle\int\frac{Adx}{(x-b)^k}=[t=x-b]=A\int\frac{dt}{t^k}=-\frac{A}{(k-1)t^{k-1}}+C=-\frac{A}{(k-1)(x-b)^{k-1}}+C.$

3. Для вычисления интеграла третьего типа представим квадратный трехчлен в виде

$$x^2+px+q=\left(x+p/2\right)^2+\left(q-p^2/4\right)$$

и, учитывая, что $q-p^2/4>0$, введем в рассмотрение постоянную $a=\sqrt{q-p^2/4}$. Тогда, сделав подстановку $t=x+p/2$, получим

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mt+\left(N-Mp/2\right)}{t^2+a^2}dt=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2}+\left(N-Mp/2\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+\left(\frac{2N-Mp}{2a}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(\frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-p^2/4}}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\right)+C.$$

4. Используя введенные выше обозначения, получим

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = \int \frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m}dt =$$

$$=\frac{M}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}=$$

$$=\frac{M}{2(1-m)\left(x^2+px+q\right)^{m-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_m.$$

Рассмотрим интеграл $I_m = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}$. Если представить I_m в виде линейной комбинации интегралов I_{m-1} и $\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}$ и вычислить последний интегрированием по частям, получим

$$I_m = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^m}dt = \frac{1}{a^2}I_{m-1} - \frac{1}{a^2}\int t\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^m} =$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{m-1} - \frac{1}{a^2}\int td\left(\frac{1}{2(1-m)\left(t^2+a^2\right)^{m-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{m-1} + \frac{t}{2a^2(m-1)\left(t^2+a^2\right)^{m-1}} - \frac{1}{2(m-1)a^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{m-1}} =$$

$$=\frac{t}{2a^2(m-1)\left(t^2+a^2\right)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2a^2(m-1)}I_{m-1}.$$

Таким образом, мы получили рекуррентную формулу для вычисления интеграла I_m при $m>1$. Если $m=1$, то

$$I_m = I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + \tilde{C}.$$

Таким образом, нами вычислены интегралы от всех четырех типов простейших дробей и доказано, что каждый из этих интегралов представляет собой элементарную функцию. ◀

Пример 8.12. Вычислим интеграл от дроби из примера 8.11.

▸ $$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx + \int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \blacktriangleleft$$

Замечание. Указанный в теореме метод вычисления неопределенного интеграла от рациональной дроби позволяет вычислить интеграл от любой рациональной дроби, если можно получить конкретное разложение знаменателя на множители вида (8.6). Но в отдельных частных случаях бывает целесообразнее для значительного сокращения вычислений действовать иными путями.

Пример 8.13. Вычислим интеграл $\int \frac{x^5+3x^3+2x}{(x^2+1)^{10}}dx$.

▸ Разделив числитель на x^2+1 с остатком, получим

$$\int \frac{x^5+3x^3+2x}{(x^2+1)^{10}}dx = \int \frac{x(x^2+1)+x(x^2+1)^2}{(x^2+1)^{10}}dx =$$

$$= \int \frac{x}{(x^2+1)^9}dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^8}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{(x^2+1)^9} + \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{(x^2+1)^8} = -\frac{1}{16}\frac{1}{(x^2+1)^8} - \frac{1}{14}\frac{1}{(x^2+1)^7} + C. \blacktriangleleft$$

Пример 8.14. Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{x(x^5+2)}$.

▸ $$\int \frac{dx}{x(x^5+2)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx^5}{x^5(x^5+2)} = \frac{1}{10}\int\left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^5+2}\right)dx^5 = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x^5}{x^5+2}\right| + C. \blacktriangleleft$$

8.3.3. Метод Остроградского

Если знаменатель правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ имеет кратные корни, особенно комплексные, то интегрирование такой дроби обычно связано с громоздкими выкладками. В этом случае целесообразно использовать метод Остроградского, суть которого состоит в выделении рациональной части первообразной.

Пусть $Q(x)$ имеет кратные корни (включая и комплексные). Составим многочлен $Q_2(x)$ так, чтобы все его корни были простые и каждый корень $Q(x)$ был корнем $Q_2(x)$. Тогда $Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$, где корни $Q_1(x)$ есть корни многочлена Q с кратностями каждый на единицу меньше, т.е.

$$Q(x)=(x-b_1)^{k_1}\cdots(x-b_m)^{k_m}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\cdots\left(x^2+p_nx+q_n\right)^{l_n};$$

$$Q_1(x)=(x-b_1)^{k_1-1}\cdots(x-b_m)^{k_m-1}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1-1}\cdots\left(x^2+p_nx+q_n\right)^{l_n-1};$$

$$Q_2(x)=(x-b_1)\cdots(x-b_m)\left(x^2+p_1x+q_1\right)\cdots\left(x^2+p_nx+q_n\right).$$

Тогда справедливо соотношение

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{R(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{S(x)}{Q_2(x)}dx, \qquad (8.11)$$

где $R(x)$ и $S(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами, степени которых соответственно на единицу меньше степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Для отыскания коэффициентов многочленов $R(x)$ и $S(x)$ необходимо продифференцировать равенство (8.11), привести результат дифференцирования к общему знаменателю и сопоставить коэффициенты при одинаковых степенях x в числителе.

Замечание. В формуле $\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{R(x)}{Q_1(x)}\right]'+\frac{S(x)}{Q_2(x)}$, полученной дифференцированием формулы (8.11), дробь $\left[\frac{R(x)}{Q_1(x)}\right]'$ после надлежащих сокращений приводится к знаменателю $Q(x)$.

Пример 8.15. Вычислим методом Остроградского интеграл

$$I = \int \frac{x^6 - x^5 + x^4 + 3x^2 - 2x + 2}{(x-1)^3 (x^2+1)^2} dx .$$

▸ Используя введенные выше обозначения, получим

$$P(x) = x^6 - x^5 + x^4 + 3x^2 - 2x + 2, \quad Q(x) = (x-1)^3 (x^2+1)^2 ;$$

$$Q_1(x) = (x-1)^2 (x^2+1), \; Q_2(x) = (x-1)(x^2+1).$$

Тогда

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{Q_1(x)} + \int \frac{Tx^2 + Sx + U}{Q_2(x)} dx =$$

$$= \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{Q_1(x)} + \int \frac{E}{x-1} dx + \int \frac{Fx + H}{x^2+1} dx.$$

Продифференцировав это равенство и приведя его к общему знаменателю $Q(x)$, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x у многочленов, стоящих в числителях:

$$P(x) = (3Ax^2 + 2Bx + C)(x-1)(x^2+1) - (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \cdot 4x^2 +$$

$$+ E(x-1)^2 (x^2+1)^2 + (Fx + H)(x-1)^3 (x^2+1)$$

$$\begin{array}{c|rcl}
x^6 & 1 & = & E + F; \\
x^5 & -1 & = & -3F - A + H - 2E; \\
x^4 & 1 & = & -A + 4F - 2B + 3E - 3H; \\
x^3 & 0 & = & A - 4E + 4H - 3C - 4F; \\
x^2 & 3 & = & -3A - 4D + C + 3E + 3F - 4H; \\
x^1 & -2 & = & -F - 2B - C - 2E + 2D + 3H; \\
x^0 & 2 & = & -H - C - 2D + E.
\end{array}$$

Решив эту систему уравнений, находим

$$A = -\frac{3}{4}, \; B = 1, \; C = -\frac{5}{4}, \; D = 0, \; E = 1, \; F = 0, \; H = \frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{-3x^3 + 4x^2 - 5x}{4(x-1)^2 (x^2+1)} + \ln|x-1| + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C. ◂$$

Многочлен $Q_1(x)$ может быть найден без разложения как наибольший общий делитель многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$ с использованием алгоритма Евклида.

Алгоритм Евклида

Пусть необходимо найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$. Не ограничивая общности, будем считать, что степень $\varphi(x)$ не выше степени $f(x)$.

Многочлен $f(x)$ представим в виде:

$$f(x) = \varphi(x)q(x) + r_1(x), \tag{1}$$

где $r_1(x)$ – остаток от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$. Тогда степень $r_1(x)$ меньше степени делителя $\varphi(x)$.

Далее, в результате деления $\varphi(x)$ на $r_1(x)$ получим:

$$\varphi(x) = r_1(x)q_1(x) + r_2(x), \tag{2}$$

причем степень $r_2(x)$ меньше степени делителя $r_1(x)$.

$$r_1(x) = r_2(x)q_2(x) + r_3(x) \tag{3}$$

$$\ldots$$

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_{k-1}(x) + r_k(x) \tag{k}$$

При каждом делении степень остатка будет снижаться по крайней мере на единицу, поэтому на определенном шаге мы получим нулевой остаток, т.е.

$$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_k(x). \tag{$k+1$}$$

Последний отличный от нуля остаток $r_k(x)$ является наибольшим общим делителем многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$.

▸ Достаточно доказать два утверждения:

1) многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ делятся на $r_k(x)$, т.е. $r_k(x)$ – один из делителей $f(x)$ и $\varphi(x)$;

2) многочлен $r_k(x)$ делится на любой делитель $r_0(x)$ многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$, т.е. $r_k(x)$ – наибольший общий делитель указанных многочленов.

Для доказательства первого утверждения заметим, что, в силу ($k+1$), $r_{k-1}(x)$ делится на $r_k(x)$, а тогда, в силу (k), $r_{k-2}(x)$ делится на $r_k(x)$. Поднимаясь вверх по цепочке равенств (1) – (k), мы докажем, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ делятся на $r_k(x)$.

Докажем второе утверждение. Пусть $r_0(x)$ – произвольный делитель многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$. В силу равенства (1) $r_1(x)$ делится на $r_0(x)$, а тогда, в силу равенства (2), $r_2(x)$ делится на $r_0(x)$. Опускаясь по цепочке равенств (1) – (k), докажем, что $r_k(x)$ делится на $r_0(x)$. ◂

Пример 8.16. Вычислим интеграл

$$\int \frac{x^6-x^5+x^4+3x^2-2x+2}{x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1}\,dx.$$

▸ Используем метод Остроградского. Для нахождения многочлена $Q_1(x)=НОД\left(Q(x),Q'(x)\right)$ воспользуемся алгоритмом Евклида. Тогда

$$Q(x)=x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1,$$

$$Q'(x)=7x^6-18x^5+25x^4-28x^3+21x^2-10x+3.$$

Согласно алгоритму, представим $Q(x)$ в виде

$$Q(x)=Q'(x)q(x)+r_1(x).$$

$$\begin{array}{l|l}
x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1 & 7x^6-18x^5+25x^4-28x^3+21x^2-10x+3 \\
\hline
-\;x^7-\frac{18}{7}x^6+\frac{25}{7}x^5-4x^4+3x^3-\frac{10}{7}x^2+\frac{3}{7}x & \frac{1}{7}x-\frac{3}{49} \\
\hline
\quad -\frac{3}{7}x^6+\frac{10}{7}x^5-3x^4+4x^3-\frac{25}{7}x^2+\frac{18}{7}x-1 & \\
-\;-\frac{3}{7}x^6+\frac{54}{49}x^5-\frac{75}{49}x^4+\frac{12}{7}x^3-\frac{9}{7}x^2+\frac{30}{49}x-\frac{9}{49} & \\
\hline
\qquad \frac{16}{49}x^5-\frac{72}{49}x^4+\frac{16}{7}x^3-\frac{16}{7}x^2+\frac{96}{49}x-\frac{40}{49}=r_1(x). &
\end{array}$$

Так как наибольший общий делитель многочленов определен с точностью до произвольного постоянного множителя, то вместо многочлена $r_1(x)$ будем рассматривать многочлен

$$\tilde{r}_1(x)=\frac{49}{4}r_1(x)=4x^5-18x^4+28x^3-28x^2+24x-10.$$

$$\begin{array}{r|l} 7x^6-18x^5+25x^4-28x^3+21x^2-10x+3 & 4x^5-18x^4+28x^3-28x^2+24x-10 \\ \hline -\ \underline{7x^6-\frac{63}{2}x^5+49x^4-49x^3+42x^2-\frac{35}{2}x} & \frac{7}{4}x+\frac{27}{8} \\ \frac{27}{2}x^5-24x^4+21x^3-21x^2+\frac{15}{2}x+3 & \\ -\ \underline{\frac{27}{2}x^5-\frac{243}{4}x^4+\frac{189}{2}x^3-\frac{189}{2}x^2+81x-\frac{135}{4}} & \\ \frac{147}{4}x^4-\frac{147}{2}x^3+\frac{147}{2}x^2-\frac{147}{2}x+\frac{147}{4}=r_2(x). & \end{array}$$

Аналогично предыдущему шагу сделаем замену

$$\tilde{r}_2(x)=\frac{4r_2(x)}{147}=x^4-2x^3+2x^2-2x+1.$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^5-18x^4+28x^3-28x^2+24x-10 & x^4-2x^3+2x^2-2x+1 \\ \hline -\ \underline{4x^5-8x^4+8x^3-8x^2+4x} & 4x-10 \\ -10x^4+20x^3-20x^2+20x-10 & \\ -\ \underline{-10x^4+20x^3-20x^2+20x-10} & \\ 0=r_3(x). & \end{array}$$

Таким образом,

$$\int\frac{x^6-x^5+x^4+3x^2-2x+2}{Q(x)}dx=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{Q_1(x)}+\int\frac{Ex^2+Fx+H}{Q_2(x)}dx,$$

где $Q_1(x)=x^4-2x^3+2x^2-2x+1$, $Q_2(x)=\dfrac{Q(x)}{Q_1(x)}=x^3-x^2+x-1.$

Продифференцировав это равенство и приведя его к общему знаменателю $Q(x)$, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x у многочленов, стоящих в числителях:

$$\begin{array}{c|l} x^6 & 1 = E; \\ x^5 & -1 = F-2E-A; \\ x^4 & 1 = H-A+2E-2B-2F; \\ x^3 & 0 = A-2E+2F-2H-3C; \\ x^2 & 3 = 2H-4D-3A+C+E-2F; \\ x^1 & -2 = F+2D-C-2B-2H; \\ x^0 & 2 = -2D-C+H. \end{array}$$

Решая эту систему, находим

$$A=-\frac{3}{4},\ B=1,\ C=-\frac{5}{4},\ D=0,\ E=1,\ F=\frac{1}{4},\ H=\frac{3}{4}.$$

Следовательно, $\displaystyle\int\frac{x^5+x-1}{Q(x)}dx=\frac{-3x^3+4x^2-5x}{4Q_1(x)}+\int\frac{4x^2+x+3}{4Q_2(x)}dx$.

Заметим теперь, что знаменатель $Q_2(x)$ можно представить в виде $Q_2(x)=(x-1)(x^2+1)$. Тогда

$$\int\frac{x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}}{(x-1)(x^2+1)}dx=\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+1}=\ln|x-1|+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C,$$

$$\int\frac{x^6-x^5+x^4+3x^2-2x+2}{x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1}dx=$$

$$=\frac{-3x^3+4x^2-5x}{4\left(x^4-2x^3+2x^2-2x+1\right)}+\ln|x-1|+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C. \blacktriangleleft$$

8.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Функции вида

$$\boldsymbol{R}(u_1,u_2,...,u_n)=\frac{P(u_1,u_2,...,u_n)}{Q(u_1,u_2,...,u_n)}, \qquad (8.12)$$

где P и Q – многочлены от переменных $u_1,u_2,...,u_n$, называются ***рациональными функциями*** от $u_1,u_2,...,u_n$.

Если в формуле (8.12) переменные $u_1,u_2,...,u_n$, в свою очередь, являются функциями переменной x: $u_i=\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, то функция

$$\boldsymbol{R}\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)\right]$$

называется рациональной функцией от функций $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_n(x)$.

Пример 8.17. $\displaystyle\frac{\sin x-5\sin x\cos^2 x}{\cos^3 x+8}=\boldsymbol{R}(\sin x,\cos x)$,

$$\frac{5x+x^2+\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}{6\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}}=\boldsymbol{R}\left(x,\sqrt{x},\sqrt{x^2+1},\sqrt[3]{x^2+1}\right)=\boldsymbol{R}\left(\sqrt{x},\sqrt[6]{x^2+1}\right).$$

8.4.1. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Рассмотрим интегралы вида

$$\int \boldsymbol{R}\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_2}, \dots \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_n}\right] dx, \qquad (8.13)$$

где $r_i \in \mathbb{Q}$, $i = \overline{1,n}$ и $\begin{vmatrix} a & b \\ c & e \end{vmatrix} \neq 0$ (если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & e \end{vmatrix} = 0$, то $\dfrac{ax+b}{cx+e} = \text{const}$).

Теорема 8.6. Пусть m – общий знаменатель чисел $r_1, r_2, \dots, r_n$: $r_i = \dfrac{p_i}{m}$, $p_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда интеграл (8.13) рационализируется подстановкой

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+e}}.$$

▸ Так как $x = \dfrac{et^m - b}{a - ct^m} = \boldsymbol{R}_1(t)$, то $dx = \boldsymbol{R}_2(t)dt$ (производная рациональной функции является рациональной функцией), а значит,

$$\int \boldsymbol{R}\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_2}, \dots \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_n}\right] dx =$$

$$= \int \boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{R}_1(t), t^{p_1}, t^{p_2}, \dots, t^{p_n}\right] \cdot \boldsymbol{R}_2(t)dt = \int \boldsymbol{R}_3(t)dt,$$

(здесь $\boldsymbol{R}_1(t)$, $\boldsymbol{R}_2(t)$, $\boldsymbol{R}_3(t)$ – некоторые рациональные функции переменной t). ◂

Пример 8.18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx = \left[\begin{array}{c} t = \sqrt[12]{x}, \\ x = t^{12},\ dx = 12t^{11}dt \end{array}\right] =$

$$= \int \frac{t^6 + t^4}{t^{15} - t^{14}} 12t^{11} dt = 12\int \frac{t^3 + t}{t-1} dt = 12\int \frac{(t^2+t+2)(t-1)+2}{t-1} dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t + 2\ln|t-1|\right) + C.$$

Пример 8.19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}} =$

$$=\left[t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=\sqrt[3]{1+\frac{2}{x-1}}, \quad x-1=\frac{2}{t^3-1}, \quad dx=\frac{-6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2} \right]=$$

$$=-\int \frac{6t^2\left(t^3-1\right)^{-2}dt}{4\left(t^3-1\right)^{-2}t^2}=-\frac{3}{2}\int dt=-\frac{3}{2}t+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

8.4.2. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Биномиальным дифференциалом называют выражение вида

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,$$

где $ab\neq 0$, $m,n,p\in\mathbb{Q}$.

Теорема 8.7. Интеграл $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ рационализируется следующими подстановками:

1) Если $p\in Z$, то $x=t^k$, где k – общий знаменатель дробей m и n;

2) Если $\frac{m+1}{n}\in Z$, $a+bx^n=t^k$, где k – знаменатель дроби p;

3) Если $p+\frac{m+1}{n}\in Z$, то $ax^{-n}+b=t^k$, где k – знаменатель дроби p.

▸ *Случай 1.* Пусть $m=\frac{z_m}{k}$, $n=\frac{z_n}{k}$, где $z_m,z_n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда в результате подстановки $x=t^k$ получим

$$x^m=t^{z_m},\ dx=kt^{k-1}dt, \quad \left(a+bx^n\right)^p=\left(a+bt^{z_n}\right)^p;$$

следовательно,

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\int t^{z_m}\left(a+bt^{z_n}\right)^p\cdot kt^{k-1}dt=\int \boldsymbol{R}(t)\,dt.$$

Случай 2. Пусть $p=\frac{z}{k}$, где $z\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда в результате подстановки $a+bx^n=t^k$ получим

$$\left(a+bx^n\right)^p=t^z, \quad bnx^{n-1}dx=kt^{k-1}dt, \qquad x=\left(\frac{t^k-a}{b}\right)^{1/n}.$$

Следовательно,

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = x^m \cdot t^z \cdot \frac{kt^{k-1}dt}{bnx^{n-1}} =$$

$$= \frac{k}{bn} x^{m-n+1} \cdot t^{z+k-1} dt = \frac{k}{bn}\left(\frac{t^k-a}{b}\right)^{\frac{m-n+1}{n}} \cdot t^{z+k-1} dt.$$

Таким образом, если $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то после указанной подстановки получаем интеграл от рациональной функции.

Случай 3. Пусть $p = \frac{z}{k}$, где $z \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}$. Тогда в результате подстановки $\frac{a}{x^n} + b = t^k$ получим $x = \left(\frac{a}{t^k - b}\right)^{\frac{1}{n}}$,

$$dx = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{t^k-b}\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \left(\frac{-a}{\left(t^k-b\right)^2}\right) kt^{k-1} dt = -\frac{k}{an}\left(\frac{a}{t^k-b}\right)^{\frac{1}{n}+1} t^{k-1}\, dt,$$

$$\left(a+bx^n\right)^p = \left(x^n\right)^p \cdot \left(\frac{a}{x^n}+b\right)^p = \left(\frac{a}{t^k-b}\right)^p t^z.$$

Следовательно,

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = \left(\frac{a}{t^k-b}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\frac{a}{t^k-b}\right)^p \cdot t^z \cdot \frac{(-k)}{an}\left(\frac{a}{t^k-b}\right)^{\frac{1}{n}+1} \cdot t^{k-1}\, dt =$$

$$= -\frac{k}{an}\left(\frac{a}{t^k-b}\right)^{\frac{m+1}{n}+p+1} t^{z+k-1}\, dt.$$

Таким образом, если $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то после указанной подстановки

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = \boldsymbol{R}(t)\,dt. \blacktriangleleft$$

З а м е ч а н и е. П. Л. Чебышев доказал, что указанными в теореме тремя случаями исчерпываются все случаи, когда биномиальный дифференциал интегрируется в элементарных функциях [11].

П р и м е р 8.20. Вычислим интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\left(1-\sqrt[6]{x}\right)}$.

▸ Подынтегральное выражение является биномиальным дифференциалом, в котором $m=-\frac{3}{4}$, $n=\frac{1}{6}$, $p=-1\in\mathbb{Z}$, поэтому воспользуемся подстановкой $x=t^{HOK(4,6)}$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\left(1-\sqrt[6]{x}\right)}=\int x^{-3/4}\left(1-x^{1/6}\right)^{-1}dx=\left[t=\sqrt[12]{x}\right]=\int t^{-9}\left(1-t^2\right)^{-1}\cdot 12t^{11}dt=$$

$$=12\int\frac{t^2}{1-t^2}dt=12\int\left(-1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right)dt=-12t-6\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=-12\sqrt[12]{x}-6\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt[12]{x}+1}\right|+C.$$ ◂

П р и м е р 8.21. Вычислим интеграл $\int x^{1/3}\left(2+x^{2/3}\right)^{3/4}dx$.

▸ Подынтегральное выражение является биномиальным дифференциалом, в котором $m=\frac{1}{3}$, $n=\frac{2}{3}$, $p=\frac{3}{4}\notin\mathbb{Z}$. Так как $\frac{m+1}{n}=2\in\mathbb{Z}$, то интеграл будем вычислять с помощью подстановки $t^4=2+x^{2/3}$. Тогда

$$x=\left(t^4-2\right)^{3/2},\ dx=\frac{3}{2}\left(t^4-2\right)^{1/2}3t^3dt.$$

Следовательно,

$$\int x^{1/3}\left(2+x^{2/3}\right)^{3/4}dx=\int\left(\left(t^4-2\right)^{3/2}\right)^{1/3}\left(t^4\right)^{3/4}\cdot\frac{3}{2}\left(t^4-2\right)^{1/2}3t^3dt=$$

$$=\frac{9}{2}\int\left(t^4-2\right)t^6dt=\frac{9}{2}\left(\frac{t^{11}}{11}-2\frac{t^7}{7}\right)+C.$$ ◂

П р и м е р 8.22. Вычислим интеграл $\int\left(2+\frac{3}{\sqrt{x^5}}\right)^{-8/5}dx$.

▸ Подынтегральное выражение является биномиальным дифференциалом, в котором $m=0$, $n=-5/2$, $p=-8/5$, а значит,

$$p\notin\mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n}=-\frac{2}{5}\notin\mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n}+p=-\frac{2}{5}-\frac{8}{5}=-2\in\mathbb{Z}.$$

Поэтому будем вычислять интеграл по третьему случаю:

$$t^5 = 2x^{5/2} + 3, \quad x = \left(\frac{t^5 - 3}{2}\right)^{2/5},$$

$$dx = \frac{2}{5}\left(\frac{t^5 - 3}{2}\right)^{-3/5} \cdot \frac{5t^4}{2} dt = t^4 \left(\frac{t^5 - 3}{2}\right)^{-3/5} dt,$$

$$\left(2 + \frac{3}{\sqrt{x^5}}\right)^{-8/5} = \left(2 + \frac{3}{x^{5/2}}\right)^{-8/5} = \left(2 + \frac{3 \cdot 2}{\left(t^5 - 3\right)}\right)^{-8/5} = \left(\frac{t^5 - 3}{2}\right)^{8/5} \frac{1}{t^8}.$$

Следовательно, $\int \left(2 + \frac{3}{\sqrt{x^5}}\right)^{-8/5} dx = \int \left(\frac{t^5 - 3}{2}\right)^{8/5} \frac{1}{t^8} \cdot t^4 \left(\frac{t^5 - 3}{2}\right)^{-3/5} dt =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^5 - 3}{t^4} dt = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2t^3} + C. \blacktriangleleft$$

8.4.3. Интегралы вида $\int \boldsymbol{R}\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$. Подстановки Эйлера

Теорема 8.8. Интегралы вида

$$\int \boldsymbol{R}\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, \tag{8.14}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, а квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет кратных корней, сводятся к интегралам от рациональной дроби при помощи ***подстановок Эйлера***:

1) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm x\sqrt{a}$, если $a > 0$; (8.15)

2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm tx \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$; (8.16)

3) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t\left(x - x_1\right)$, если $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$. (8.17)

При этом в первой и второй подстановках комбинация знаков произвольна и определяется областью допустимых значений переменных x и t.

$\blacktriangleright$ 1. Докажем, что ***первая подстановка Эйлера*** (8.15) рационализирует интеграл от функции (8.14). Возводя в квадрат обе части равенства (8.15), получаем

$$ax^2 + bx + c = t \pm 2tx\sqrt{a} + ax^2.$$

Отсюда $x=\dfrac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}t}=\boldsymbol{R}_1(t)$, $dx=\boldsymbol{R}_1'(t)\,dt=\boldsymbol{R}_2(t)\,dt$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\pm \boldsymbol{R}_1(t)\sqrt{a}=\boldsymbol{R}_3(t).$$

Таким образом,

$$\int \boldsymbol{R}\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int \boldsymbol{R}\big(\boldsymbol{R}_1(t),\boldsymbol{R}_3(t)\big)\boldsymbol{R}_2(t)\,dt=\int \boldsymbol{R}_4(t)\,dt.$$

2. Докажем теперь, что ***вторая подстановка Эйлера*** (8.16) рационализирует интеграл (8.14) .

Возводя в квадрат равенство (8.16), получаем

$$ax^2+bx+c=x^2t^2\pm 2\sqrt{c}xt+c.$$

$$x=\frac{b\mp 2t\sqrt{c}}{t^2-a}=\boldsymbol{R}_1(t),\quad dx=\boldsymbol{R}_1'(t)\,dt=\boldsymbol{R}_2(t)\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm t\,\boldsymbol{R}_1(t)=\boldsymbol{R}_3(t).$$

Следовательно,

$$\int \boldsymbol{R}\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int \boldsymbol{R}\big(\boldsymbol{R}_1(t),\boldsymbol{R}_3(t)\big)\boldsymbol{R}_2(t)\,dt=\int \boldsymbol{R}_4(t)\,dt.$$

3. Для доказательства того, что ***третья подстановка Эйлера*** (8.17) рационализирует интеграл (8.14), возведем в квадрат равенство (8.17):

$$t^2(x-x_1)^2=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

$$t^2(x-x_1)=a(x-x_2).$$

Отсюда $x=\dfrac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a}=\boldsymbol{R}_1(t)$, $dx=\boldsymbol{R}_1'(t)\,dt=\boldsymbol{R}_2(t)$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t(x-x_1)=\pm t\left(\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a}-x_1\right)=\pm\frac{at(x_1-x_2)}{t^2-a}=\boldsymbol{R}_3(t).$$

$$\int \boldsymbol{R}(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int \boldsymbol{R}\big(\boldsymbol{R}_1(t),\boldsymbol{R}_3(t)\big)\boldsymbol{R}_2(t)\,dt=\int \boldsymbol{R}_4(t)\,dt. \blacktriangleleft$$

Замечание 1. Заметим, что для рационализации любого интеграла вида (8.14) достаточно первой и третьей подстановок Эйлера. Действительно, если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет комплексные корни, то его знак совпадает со знаком a (а значит, $a>0$) и тогда применима первая подстановка Эйлера. Если же квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни, то применима третья подстановка Эйлера.

Замечание 2. Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни x_1 и x_2, то при $a>0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=\sqrt{a}\left|x-x_1\right|\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}=\boldsymbol{R}_1\left(x,\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}\right),$$

$$\boldsymbol{R}\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)=\boldsymbol{R}_1\left(x,\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}\right).$$

Аналогично для $a<0$ получим:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=\sqrt{|a|}\cdot\left|x-x_1\right|\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}=\boldsymbol{R}_1\left(x,\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}\right).$$

Таким образом, если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни, то интегралы вида $\int\boldsymbol{R}\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ сводятся к интегралам вида (8.13) от дробно-линейных иррациональностей.

Замечание 3. Интегралы вида $\int\boldsymbol{R}\left(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+e}\right)dx$ сводятся к интегралам вида (8.14) подстановкой $t^2=ax+b$.

▸ $x=\dfrac{t^2-b}{a}$, $dx=\dfrac{2}{a}tdt$, $\sqrt{cx+e}=\sqrt{\dfrac{c}{a}t^2-\dfrac{cb}{a}+e}=\sqrt{At^2+B}$. ◂

Пример 8.23. Вычислим интеграл $\int\dfrac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

▸ Поскольку квадратный трехчлен имеет комплексные корни и $a=1>0$, сделаем первую подстановку Эйлера $t=\sqrt{x^2+x+1}+x$. Тогда

$$x=\frac{t^2-1}{2t+1},\ dx=2\frac{t^2+t+1}{\left(2t+1\right)^2}dt.$$

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{t^2+t+1}{t(2t+1)^2}dt=2\int\frac{dt}{t}-3\int\frac{dt}{1+2t}-3\int\frac{dt}{\left(1+2t\right)^2}=$$

$$=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2(2t+1)}+C,\quad t=\sqrt{x^2+x+1}+x.$$ ◂

Пример 8.24. Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

▸ Так как $c=1>0$, то можно применить вторую подстановку Эйлера

$$\sqrt{1-2x-x^2}=xt-1.$$

Тогда $-2x-x^2=x^2t^2-2xt$, $x=\frac{2t-2}{t^2+1}$,

$$dx=\frac{-2t^2+4t+2}{\left(t^2+1\right)^2}dt,\ 1+\sqrt{1-2x-x^2}=1+xt-1=xt=\frac{2t^2-2t}{t^2+1}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\int \frac{t^2+1}{2t^2-2t}\cdot\frac{-2t^2+4t+2}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)\left(t^2+1\right)}dt=$$

$$=\int\left[\frac{-1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{2}{t^2+1}\right]dt=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2\operatorname{arctg}t+C,\quad t=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}.$$ ◂

Пример 8.25. Вычислим интеграл $\int \frac{xdx}{\left(\sqrt{7x-10-x^2}\right)^3}$.

▸ В данном случае $a<0$ и $c<0$, поэтому ни первая, ни вторая подстановки Эйлера неприменимы. Но квадратный трехчлен $7x-10-x^2$ имеет действительные корни $x_1=2, x_2=5$, поэтому можно применить третью подстановку Эйлера:

$$\sqrt{7x-10-x^2}=\sqrt{(x-2)(5-x)}=(x-2)t.$$

Тогда $(5-x)=(x-2)t^2$, $x=\frac{5+2t^2}{1+t^2}$; $dx=\frac{-6t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2}$;

$$\sqrt{7x-10-x^2}=\sqrt{(x-2)(5-x)}=(x-2)t=\left(\frac{5+2t^2}{1+t^2}-2\right)t=\frac{3t}{1+t^2}.$$

Следовательно, при $t=\sqrt{\frac{5-x}{x-2}}$, получим

$$\int \frac{\left(1+t^2\right)^3}{(3t)^3}\cdot\frac{5+2t^2}{1+t^2}\cdot\frac{-6t\,dt}{\left(1+t^2\right)^2}=-\frac{2}{9}\int\left(\frac{5}{t^2}+2\right)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{5}{t}-2t\right)+C.$$ ◂

8.4.4. Интегралы вида $\int \frac{\boldsymbol{R}(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Хотя подстановки Эйлера всегда рационализируют интеграл от функции (8.14), обычно эти подстановки приводят к весьма громоздким выкладкам. Поэтому на практике часто пользуются другими способами интегрирования функций вида $\boldsymbol{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$.

Функция $\boldsymbol{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ может быть представлена в виде:

$$\boldsymbol{R}(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = \boldsymbol{R}_1(x) + \frac{\boldsymbol{R}_2(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $\boldsymbol{R}_1(x)$ и $\boldsymbol{R}_2(x)$ – некоторые рациональные функции. Интегрирование рациональных выражений было рассмотрено ранее, поэтому перейдем к вычислению интеграла от функции $\frac{\boldsymbol{R}_2(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Выделяя из рациональной функции $\boldsymbol{R}_2(x)$ целую часть – многочлен $P(x)$

$$\boldsymbol{R}_2(x) = P(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

и раскладывая дробь $\frac{S(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших дробей, видим, что интегрирование функций $\frac{\boldsymbol{R}_2(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводит к вычислению интегралов следующих типов:

I. $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $P(x)$ – многочлен степени n.

II. $\int \frac{Adx}{(x-\gamma)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a, b, c, \gamma, A \in \mathbb{R}$.

III. $\int \frac{(Mx+N)dx}{\left(x^2+px+q\right)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $M, N \in \mathbb{R}$, многочлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Рассмотрим отдельно каждый случай.

Интегралы I-го типа. Можно показать, что первообразная для функции $\dfrac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ имеет вид

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $Q(x)$ – многочлен степени $(n-1)$ с неопределенными коэффициентами, λ – неизвестная константа. Коэффициенты многочлена $Q(x)$ и число λ находятся при помощи дифференцирования последнего равенства.

Интегралы II-го типа. Интеграл $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-\gamma)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ подстановкой $(x-\gamma)=\dfrac{1}{t}$ приводится к интегралу типа I.

Интегралы III-го типа. Для данного типа интегралов рассмотрим два случая.

1. Предположим, что

$$ax^2+bx+c = a(x^2+px+q). \tag{8.18}$$

Тогда

$$\int \frac{\left(Mx+N\right)dx}{\left(x^2+px+q\right)^m\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{\left(\frac{M}{2}\left(2x+p\right)+N-\frac{Mp}{2}\right)dx}{\sqrt{a}\left(x^2+px+q\right)^{m+\frac{1}{2}}} =$$

$$= C\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^{m+\frac{1}{2}}} + B\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{m+\frac{1}{2}}} =$$

$$= C\frac{2}{(1-2m)\left(x^2+px+q\right)^{m-\frac{1}{2}}} + B\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{m+\frac{1}{2}}},$$

где $B=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\left(N-\dfrac{Mp}{2}\right)$, $C=\dfrac{M}{2\sqrt{a}}$.

Прежде чем продолжить ход рассуждений, рассмотрим теорему.

Теорема 8.9. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{m+\frac{1}{2}}}$, где многочлен x^2+px+q не имеет действительных корней, рационализируются ***подстановкой Абеля***

$$t=\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'=\frac{x+p/2}{\sqrt{x^2+px+q}}. \qquad (8.19)$$

▸ 1°. $\left(x^2+px+q\right)=\frac{\frac{p^2}{4}-q}{t^2-1}=\boldsymbol{R}(t)$, так как из (8.19) следует, что

$$t^2\left(x^2+px+q\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x^2+px+q\right)+\left(\frac{p^2}{4}-q\right).$$

2°. $\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\frac{dt}{1-t^2}$. Действительно, если продифференцировать (отдельно левую и правую части) равенство

$$x+\frac{p}{2}=t\sqrt{x^2+px+q},$$

эквивалентное равенству (8.19), то получим

$$dx=dt\cdot\sqrt{x^2+px+q}+t\cdot\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'_x dx=$$

$$=dt\cdot\sqrt{x^2+px+q}+t\cdot t\,dx.$$

Из 1° и 2° следует, что

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{m+\frac{1}{2}}}=\int \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^m}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}=\int \boldsymbol{R}(t)\,dt. \text{◂}$$

2. Если равенство (8.18) не выполняется, т.е. отношение трехчленов ax^2+bx+c и x^2+px+q непостоянно, то в интеграле делают замену переменного так, чтобы во вновь полученных трехчленах одновременно исчезли члены с первой степенью. Это достигается, например, с помощью дробно-линейной подстановки

$$x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1},\ \text{если}\ p\neq\frac{b}{a}\quad \text{и}\quad x=t-\frac{p}{2},\ \text{если}\ p=\frac{b}{a}.$$

В результате получаем интеграл $\int \frac{At+B}{\left(t^2+\lambda\right)^m \sqrt{st^2+r}}dt$. Для вычисления этого интеграла представим его в виде

$$\int \frac{At+B}{\left(t^2+\lambda\right)^m \sqrt{st^2+r}}dt =$$

$$= A\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+\lambda\right)^m \sqrt{st^2+r}} + B\int \frac{dt}{\left(t^2+\lambda\right)^m \sqrt{st^2+r}} = A\cdot I_1 + B\cdot I_2.$$

Покажем, что первый из этих интегралов рационализируется подстановкой $u=\sqrt{st^2+r}$, а второй – подстановкой Абеля $v=\left(\sqrt{st^2+r}\right)'$.

▸ Пусть $u=\sqrt{st^2+r}$, тогда $\left(t^2+\lambda\right)^m = \left(\frac{u^2-r}{s}+\lambda\right)^m = \boldsymbol{R}(u)$,

$$du = \frac{stdt}{\sqrt{st^2+r}} \;\Rightarrow\; \frac{tdt}{\sqrt{st^2+r}} = \frac{du}{s}.$$

Для рационализации второго интеграла необходимо проделать следующие выкладки:

$$v=\left(\sqrt{st^2+r}\right)' = \frac{st}{\sqrt{st^2+r}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; v^2\left(st^2+r\right)=s^2t^2 \;\Rightarrow\; \left(t^2+\lambda\right)^m = \left(\frac{v^2r}{s^2-v^2s}+\lambda\right)^m = \boldsymbol{R}(v).$$

$$st = v\sqrt{st^2+r} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; sdt = dv\cdot\sqrt{st^2+r} + v\cdot\left(\sqrt{st^2+r}\right)'_t dt = dv\cdot\sqrt{st^2+r} + v^2dt \;\Rightarrow$$

$$\frac{dt}{\sqrt{st^2+r}} = \frac{dv}{s-v^2}.$$ ◂

Пример 8.26. Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-x+1\right)^5}}$.

▸ Воспользуемся подстановкой Абеля.

1°. $4t^2\left(x^2-x+1\right)=4x^2-4x+1=4\left(x^2-x+1\right)-3 \;\Rightarrow\; x^2-x+1=\frac{3}{4\left(1-t^2\right)}$.

2°. Дифференцируя равенство $t\sqrt{x^2-x+1}=x-1/2$, получаем:

$$dt\cdot\sqrt{x^2-x+1}+t\cdot\frac{(2x-1)dx}{2\sqrt{x^2-x+1}}=dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{dt}{1-t^2}.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-x+1\right)^5}}=\int\frac{dx}{\left(x^2-x+1\right)^2\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{16\left(1-t^2\right)^2}{9}\cdot\frac{dt}{1-t^2}=\frac{16}{9}\int\left(1-t^2\right)dt=$$

$$=\frac{16}{9}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{16}{9}\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}-\frac{16}{27}\left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\right)^3+C. \blacktriangleleft$$

П р и м е р 8.27. Вычислим интеграл $\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$.

$\blacktriangleright$ $$\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx=\left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{x^2+4x+3}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}.$$

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2+4x+3}+$$

$$+\left(Ax^2+Bx+C\right)\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+3}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$x^3-6x^2+11x-6=(2Ax+B)\left(x^2+4x+3\right)+\left(Ax^2+Bx+C\right)(x+2)+\lambda.$$

$$\begin{array}{c|lcl} x^3 & 1 & = & 2A \qquad\quad +A \\ x^2 & -6 & = & 8A+\ B\ +B+2A \\ x^1 & 11 & = & 6A+4B+C+2B \\ x^0 & -6 & = & \qquad +3B \qquad +2C+\lambda \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1/3; \\ B=-14/3; \\ C=37; \\ \lambda=-66. \end{array}$$

Так как

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-1}}=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C,$$

то

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}=\left(\frac{x^2}{3}-\frac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C. \blacktriangleleft$$

Пример 8.28. Вычислим интеграл $\int \frac{2x+5}{\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+1}}dx$.

▶ Так как отношение трехчленов x^2+x+1 и x^2+1 – не константа, то делаем дробно-линейную подстановку $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$. Тогда

$$x^2+x+1=\frac{\alpha^2t^2+2\alpha\beta t+\beta^2+(\alpha t+\beta)(t+1)+t^2+2t+1}{\left(t+1\right)^2},$$

$$x^2+1=\frac{\alpha^2t^2+2\alpha\beta t+\beta^2+t^2+2t+1}{(t+1)^2}.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при t, получим систему для нахождения α и β:

$$\begin{cases}2\alpha\beta+\alpha+\beta+2=0,\\ 2\alpha\beta+2=0.\end{cases}$$

Одно из решений этой системы: $-\alpha=\beta=-1$.

В результате замены $x=\frac{t-1}{t+1}$ получим

$$x^2+x+1=\frac{3t^2+1}{\left(t+1\right)^2},\ x^2+1=\frac{2t^2+2}{\left(t+1\right)^2},\ 2x+5=\frac{7t+3}{t+1},\ dx=\frac{2}{\left(t+1\right)^2}dt,$$

$$I=\int \frac{2x+5}{\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{2}\int \frac{\left(7t+3\right)dt}{\left(3t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}}.$$

Вычислим отдельно интегралы $\int \frac{tdt}{\left(3t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}}$, $\int \frac{dt}{\left(3t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}}$, используя в первом из них подстановку $u=\sqrt{t^2+1}$, а во втором – подстановку Абеля $v=\left(\sqrt{t^2+1}\right)'$.

$$\int \frac{tdt}{\left(3t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}}=\left[\begin{matrix} u=\sqrt{t^2+1}, & du=\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} \\ 3t^2+1=3u^2-2, & \end{matrix}\right]=\int \frac{du}{3u^2-2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}/\sqrt{3}-u}{\sqrt{2}/\sqrt{3}+u}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}u}{\sqrt{2}+\sqrt{3}u}\right|+C.$$

$$\int \frac{dt}{\left(3t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}} = \begin{bmatrix} v = \left(\sqrt{t^2+1}\right)' = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \\ \dfrac{dv}{1-v^2} = \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}},\ 3t^2+1 = \dfrac{2v^2+1}{1-v^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dv}{2v^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2} v + C.$$

Следовательно,

$$I = 7\sqrt{2} \int \frac{tdt}{\left(3t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}} + 3\sqrt{2} \int \frac{dt}{\left(3t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{t^2+1}} \right| + 3\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{t^2+1}} + C.$$

Учитывая, что $t = \dfrac{x+1}{1-x}$, получаем окончательный ответ:

$$I = \frac{7\sqrt{3}}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{2}\left(x-1\right) - \sqrt{3}\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{2}\left(x-1\right) + \sqrt{3}\sqrt{x^2+2x+2}} \right| +$$

$$+3\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}\left(x+1\right)\operatorname{sgn}\left(1-x\right)}{\sqrt{2x^2+2}} \right) + C. \blacktriangleleft$$

8.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

8.5.1. Интегралы вида $\int \boldsymbol{R}(\sin x, \cos x)\,dx$

Теорема 8.10. Интегралы вида $\int \boldsymbol{R}(\sin x, \cos x)\,dx$ сводятся к интегралам от рациональной дроби при помощи подстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

$\blacktriangleright$ Так как $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, то

$$\int \boldsymbol{R}(\sin x, \cos x)\,dx = \int \boldsymbol{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \boldsymbol{R}_1\left(t\right)dt. \blacktriangleleft$$

Замечание. Подстановка $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, хотя и является универсальной подстановкой, часто приводит к довольно громоздким выкладкам. В связи с этим укажем несколько частных случаев, когда подынтегральная функция приводится к рациональной дроби более простым способом:

– если $\boldsymbol{R}(-\sin x, \cos x) = -\boldsymbol{R}(\sin x, \cos x)$, то применяется подстановка

$$t = \cos x, \quad \sin x = \sqrt{1-t^2}, \; dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$$

– если $\boldsymbol{R}(\sin x, -\cos x) = -\boldsymbol{R}(\sin x, \cos x)$, то применяется подстановка

$$t = \sin x, \quad \cos x = \sqrt{1-t^2}, \; dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$$

– если $\boldsymbol{R}(-\sin x, -\cos x) = \boldsymbol{R}(\sin x, \cos x)$, то применяется подстановка

$$t = \mathrm{tg}\, x, \; \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \; \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \; dx = \frac{dt}{1+t^2}. \qquad (8.20)$$

Пример 8.29. Вычислим $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$.

▶ Так как $\boldsymbol{R}(-\sin x, \cos x) = (-\sin x)^3 (\cos x)^4 = -\boldsymbol{R}(\sin x, \cos x)$, то

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx = [t = \cos x] = -\int (1-t^2) t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C. \blacktriangleleft$$

Пример 8.30. Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

▶ Полагая $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, получим

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{-t^2 + 2t + 1} =$$

$$= \int \frac{2dt}{2 - (t-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + t - 1}{\sqrt{2} - t + 1} \right| + C. \blacktriangleleft$$

П р и м е р 8.31. Вычислим интеграл $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^4 x\,(\sin x + \cos x)}$.

▸ Пусть $\boldsymbol{R}(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x(\sin x + \cos x)}$. Тогда

$$\boldsymbol{R}(-\sin x, -\cos x) = \boldsymbol{R}(\sin x, \cos x),$$

поэтому применяем подстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^4 x\,(\sin x + \cos x)} = \int \frac{\sin^3 x\, d\,(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x\,(\sin x + \cos x)} =$$

$$= \int \frac{\operatorname{tg}^3 x\, d(\operatorname{tg} x)}{(1 + \operatorname{tg} x)} = \int \frac{t^3\, dt}{(t+1)} = \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| + C, \quad t = \operatorname{tg} x. \blacktriangleleft$$

8.5.2. Интегралы вида $\int \sin^s x \cos^r x\, dx$

Теорема 8.11. Пусть $s, r \in \mathbb{Q}$. Тогда интеграл $\int \sin^s x \cos^r x dx$ с помощью подстановок $u = \sin x$ или $u = \cos x$ сводится к интегралу от дифференциального бинома.

▸ Для подстановки $u = \sin x$ получим:

$$\cos x = \left(1 - u^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad du = \cos x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x} = \left(1 - u^2\right)^{-\frac{1}{2}} du;$$

следовательно,

$$\int \sin^s x \cos^r x dx = \int u^s \left(1 - u^2\right)^{\frac{r}{2}} \left(1 - u^2\right)^{-\frac{1}{2}} du = \int u^s \left(1 - u^2\right)^{\frac{r-1}{2}} du. \blacktriangleleft$$

З а м е ч а н и е 1. Если $s, r \in \mathbb{Z}$, то интеграл $\int \sin^s x \cos^r x dx$ относится к типу интегралов, рассмотренных в предыдущем пункте, и для его вычисления лучше использовать указанные там подстановки.

З а м е ч а н и е 2. Если $s = r \in \mathbb{Z}$, то

$$\int \sin^s x \cos^r x dx = \int \frac{\sin^s (2x)}{2^s} dx = \frac{1}{2^{s+1}} \int \sin^s t\, dt.$$

Замечание 3. Если $s, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то для понижения степени целесообразно применять формулы

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big); \tag{8.21}$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}\big(3\sin x - \sin(3x)\big),\ \cos^3 x = \frac{1}{4}\big(3\cos x + \cos(3x)\big); \tag{8.22}$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\big(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\big),\ \cos^4 x = \frac{1}{8}\big(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\big),$$

которые приводят рассматриваемый интеграл к интегралам того же типа, но с меньшими, также неотрицательными целыми степенями.

8.5.3. Интегралы вида $\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)dx$, $\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)dx$, $\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)dx$

Интегралы $\int \sin\alpha x \cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x dx$, $\int \cos\alpha x \cos\beta x dx$ непосредственно вычисляются, если их подынтегральные функции преобразовать по формулам

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\big],$$

$$\sin\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\big],$$

$$\cos\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\big].$$

Пример 8.32. Вычислим интеграл $\int \sin^3(2x)\cos^2(3x)dx$.

▸ Воспользуемся формулами (8.21) и (8.22):

$$\int \sin^3(2x)\cos^2(3x)dx = \frac{1}{8}\int\big(3\sin(2x) - \sin(6x)\big)\big(1+\cos(6x)\big)dx =$$

$$= \frac{-9\cos(2x) + \cos(6x)}{48} + \frac{1}{8}\int\big(3\sin(2x)\cos(6x) - \sin(6x)\cos(6x)\big)dx =$$

$$= \frac{-3\cos(2x)}{16} + \frac{\cos(6x)}{48} + \frac{3\cos(8x)}{128} - \frac{3\cos(4x)}{64} + \frac{\cos(12x)}{182} + C. \blacktriangleleft$$

8.5.4. * Частные случаи интегрирования тригонометрических дифференциалов

Пример 8.33*. Вычислим интеграл $\int \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$.

▶ Так как $\sin((2n+1)x) = 2\cos(2nx)\sin x + \sin((2n-1)x)$, то

$$\int \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}dx = 2\int \cos(2nx)dx + \int \frac{\sin((2n-1)x)}{\sin x}dx =$$

$$= \frac{1}{n}\sin(2nx) + \int \frac{\sin((2n-1)x)}{\sin x}dx.$$

Обозначив $I_n = \int \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}dx$, получаем

$$\forall n > 0 \;\; I_n = \frac{1}{n}\sin(2nx) + I_{n-1},$$

$$I_0 = \int dx = x.$$

Таким образом, $I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin(2kx) + x$. ◀

Пример 8.34*. Вычислим интеграл $\int \frac{\sin(2nx)}{\sin x}dx$.

▶ Так как $\sin(2nx) = 2\cos((2n-1)x)\sin x + \sin((2n-2)x)$, то

$$\int \frac{\sin(2nx)}{\sin x}dx = 2\int \cos((2n-1)x)dx + \int \frac{\sin((2n-2)x)}{\sin x}dx =$$

$$= \frac{2}{2n-1}\sin((2n-1)x) + \int \frac{\sin((2n-2)x)}{\sin x}dx.$$

Обозначив $I_n = \int \frac{\sin(2nx)}{\sin x}dx$, получаем

$$\forall n > 1 \;\; I_n = \frac{2}{2n-1}\sin((2n-1)x) + I_{n-1},$$

$$I_1 = \int \frac{\sin(2x)}{\sin x}dx = \int 2\cos x\,dx = 2\sin(x).$$

Таким образом, $I_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{2k-1}\sin((2k-1)x)\right)$. ◀

8.5.4*. Частные случаи интегрирования тригонометрических дифференциалов

Помимо стандартных методов интегрирования функций вида $\boldsymbol{R}(\cos x, \sin x)$, описанных выше, существуют и специальные, позволяющие значительно сократить вычисления.

1. $\displaystyle\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$.

Представим числитель в виде линейной комбинации знаменателя и его производной

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \sin x + b \cos x)' =$$
$$= (Aa - Bb)\sin x + (Ab + Ba)\cos x.$$

Коэффициенты A, B этого разложения могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 = Aa - Bb, \\ b_1 = Ab + Ba. \end{cases}$$

Тогда

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = A \int \frac{a \sin x + b \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx + B \int \frac{(a \sin x + b \cos x)' dx}{a \sin x + b \cos x} =$$
$$= Ax + B \ln|a \sin x + b \cos x| + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + d_1}{a \sin x + b \cos x + d} dx$, $\operatorname{rang}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a & b & d \end{vmatrix} = 2$.

Представим числитель в виде линейной комбинации знаменателя, его производной и константы $a_1 \sin x + b_1 \cos x + d_1 =$

$$= A(a \sin x + b \cos x + d) + B(a \sin x + b \cos x + d)' + D =$$
$$= (Aa - Bb)\sin x + (Ab + Ba)\cos x + Ad + D.$$

Коэффициенты A, B, D этого разложения могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 = Aa - Bb, \\ b_1 = Ab + Ba, \\ d_1 = Ad + D. \end{cases}$$

Тогда $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + d_1}{a \sin x + b \cos x + d} dx =$

$$= A\int \frac{a \sin x + b \cos x + d}{a \sin x + b \cos x + d} dx + B\int \frac{(a \sin x + b \cos x + d)' \, dx}{a \sin x + b \cos x + d} +$$

$$+D\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + d} =$$

$$= Ax + B \ln\left|a \sin x + b \cos x + d\right| + D\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + d}.$$

3. $\int \frac{a_1 \sin^2 x + b_1 \sin x \cos x + d_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx$, $\operatorname{rang}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a^2 & 2ab & b^2 \end{vmatrix} = 2$.

Представим числитель в виде:

$$a_1 \sin^2 x + b_1 \sin \cos x + d_1 \cos^2 x =$$

$$= (A \sin x + B \cos x)(a \sin x + b \cos x) + D\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) =$$

$$= (Aa + D)\sin^2 x + (Ab + Ba)\sin x \cos x + (Bb + D)\cos^2 x.$$

Коэффициенты A, B, D этого разложения могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 = Aa + D, \\ b_1 = Ab + Ba, \\ d_1 = Bb + D. \end{cases}$$

Тогда $\int \frac{a_1 \sin^2 x + b_1 \sin \cos x + d_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx =$

$$= \int \frac{(A \sin x + B \cos x)(a \sin x + b \cos x)}{a \sin x + b \cos x} dx + D\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} =$$

$$= B \sin x - A \cos x + D\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}.$$

П р и м е р 8.35. Вычислим $\int \frac{6 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx$.

▸ Представим числитель $6 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x$ в виде

$$6 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x =$$

$$= (A \sin x + B \cos x)(\sin x + \cos x) + C\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right).$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A, B, C имеем систему

$$\begin{cases} A + C = 6, \\ A + B = 2, \\ B + C = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A = 5$, $B = -3$, $C = 1$, поэтому

$$\int \frac{6\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 4\cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx = -5\cos x - 3\sin x + \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} =$$

$$= -5\cos x - 3\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2} + t - 1}{\sqrt{2} - t + 1}\right| + \tilde{C},$$

(см. пример 8.30). ◂

8.5.5. Интегралы вида $\int \boldsymbol{R}(\mathbf{sh}\, x, \mathbf{ch}\, x)\; dx$

Интегралы данного вида можно привести к интегралам, содержащим экспоненту, используя определение гиперболических функций:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{8.23}$$

Предварительно исходное выражение можно попытаться упростить, применяя следующие гиперболические тождества.

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$	$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \left[\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)\right]/2$ $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \left[\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)\right]/2$ $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \left[\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)\right]/2$
$\operatorname{sh}\frac{x}{2} = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}$	$\operatorname{ch}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}$

Также для данных интегралов применимы подстановки, аналогичные подстановкам, используемым для интегралов вида $\int \boldsymbol{R}(\sin x, \cos x)\; dx$. Так, например, подстановка $t = \operatorname{th}(x/2)$, учитывая равенства

$$\operatorname{sh} x = \frac{2\operatorname{th}(x/2)}{1 - \operatorname{th}^2(x/2)}, \; \operatorname{ch} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2(x/2)}{1 - \operatorname{th}^2(x/2)}, \; x = 2\operatorname{Arth} t, \; dx = \frac{2dt}{1 - t^2},$$

сводит интеграл $\int \boldsymbol{R}(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$ к интегралу от рациональной дроби:

$$\int \boldsymbol{R}(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx = 2\int \boldsymbol{R}\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{dt}{1-t^2}.$$

Заметим, что обратные функции $x = x(t)$ для гиперболических подстановок $t = \operatorname{sh} x$, $t = \operatorname{ch} x$, $t = \operatorname{th} x$ могут быть получены из выражений (8.23).

8.5.6. Интегралы от трансцендентных функций, вычисляющиеся с помощью интегрирования по частям

К таким интегралам относятся, например, интегралы

$$\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx,\ \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx,\quad \int x^n \sin(\alpha x)\,dx,\ \int x^n \cos(\alpha x)\,dx,$$

$$\int x^n e^{\alpha x} dx,\ \int x^n \ln x\,dx,\quad \int x^n \arcsin(\beta x)\,dx,\ \int x^n \arccos(\beta x)\,dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arc\,tg}(\beta x)\,dx,\ \int x^n \operatorname{arc\,ctg}(\beta x)\,dx.$$

Все эти интегралы вычисляются с помощью последовательного интегрирования по частям. Кроме того, через интегралы

$$\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx,\ \int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx$$

легко выражаются интегралы:

$$\int \operatorname{sh}(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx,\ \int \operatorname{ch}(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx,$$

$$\int \operatorname{sh}(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx,\ \int \operatorname{ch}(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx.$$

8.5.7. Интегралы вида $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{a}^2 \pm \boldsymbol{x}^2}\right)\boldsymbol{dx}$, $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{a}^2}\right)\boldsymbol{dx}$. Тригонометрические и гиперболические подстановки

Интегралы такого вида легко приводятся к интегралам вида $\int \boldsymbol{R}(\sin t, \cos t)\,dt$ или $\int \boldsymbol{R}(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)\,dt$ с помощью тригонометрических или, соответственно, гиперболических подстановок, приведенных далее в таблице. При этом особое внимание следует уделить области допустимых значений переменных (см. далее пример 8.37).

Подста-новка	Элементы интеграла		Область допустимых значений переменных
Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$			
$x=a\sin t$	$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$	$dx=a\cos t\,dt$	$x\in[-a,a],\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$x=-a\cos t$	$\sqrt{a^2-x^2}=a\sin t$	$dx=a\sin t\,dt$	$x\in[-a,a],\ t\in[0,\pi]$
$x=a\,\mathrm{th}\,t$	$\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a}{\mathrm{ch}\,t}$	$dx=\frac{a}{\mathrm{ch}^2 t}dt$	$x\in[-a,a],\ t\in(-\infty,\infty)$
Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$			
$x=a\,\mathrm{tg}\,t$	$\sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\cos t}$	$dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}$	$x\in(-\infty,\infty),\ t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$x=a\,\mathrm{ctg}\,t$	$\sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\sin t}$	$dx=-\frac{a\,dt}{\sin^2 t}$	$x\in(-\infty,\infty),\ t\in(0,\pi)$
$x=a\,\mathrm{sh}\,t$	$\sqrt{a^2+x^2}=a\,\mathrm{ch}\,t$	$dx=a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$	$x\in(-\infty,\infty),\ t\in(-\infty,\infty)$
Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$			
$x=\frac{a}{\cos t}$	$\sqrt{x^2-a^2}=\frac{a\sin t}{\cos t}$	$dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$	$x\in[a,+\infty),\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ или $x\in(-\infty,-a],\ t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$
$x=-\frac{a}{\sin t}$	$\sqrt{x^2-a^2}=\frac{a\cos t}{\sin t}$	$dx=\frac{a\cos t\,dt}{\sin^2 t}$	$x\in[a,+\infty),\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ или $x\in(-\infty,-a],\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$
$x=a\,\mathrm{ch}\,t$	$\sqrt{x^2-a^2}=a\,\mathrm{sh}\,t$	$dx=a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$	$x\in[a,+\infty),\ t\in[0,+\infty)$
$x=-a\,\mathrm{ch}\,t$	$\sqrt{x^2-a^2}=-a\,\mathrm{sh}\,t$	$dx=-a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$	$x\in(-\infty,-a],\ t\in(-\infty,0]$

Примечание: $a>0$.

Пример 8.36. Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^2}$, $a>0$.

▸ Подстановка $x = a\,\mathrm{tg}\,t$:

$$a^2+x^2=\frac{a^2}{\cos^2 t},\ dx=\frac{adt}{\cos^2 t},$$

$$I=\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^2}=\int \frac{\cos^4 t}{a^4}\frac{adt}{\cos^2 t}=$$

$$=\frac{1}{a^3}\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{t}{2a^3}+\frac{\sin 2t}{4a^3}+C.$$

Учитывая, что

$$\sin t=\frac{\mathrm{tg}\,t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}},\ \cos t=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}},$$

получим

$$I=\frac{1}{2a^3}\left(t+\sin t\cos t\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2a^3}\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+\frac{\mathrm{tg}\left[\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right]}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\left[\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right]}}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\left[\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right]}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2a^3}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2a^2}\frac{x}{a^2+x^2}+C.$$ ◂

Пример 8.37. Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $x>a>0$.

▸ Так как $x>a$, то для вычисления данного интеграла используем подстановку $x=a\,\mathrm{ch}\,t$:

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\,\mathrm{sh}\,t,\ dx=a\,\mathrm{sh}\,tdt,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int dt=t+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.$$ ◂

Пример 8.38. Вычислим интеграл $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x^4}$, $a>0$.

▸ Используем подстановку $x=\frac{a}{\cos t}$:

$$\sqrt{x^2-a^2}=\frac{a\sin t}{\cos t},\ dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt,$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x^4}=\int \frac{a\sin t}{\cos t}\cdot\frac{\cos^4 t}{a^4}\cdot\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{3a^2}\sin^3 t+C=\frac{1}{3a^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)^{3/2}+C. \blacktriangleleft$$

8.6. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ. НЕБЕРУЩИЕСЯ ИНТЕГРАЛЫ

В дифференциальном исчислении было показано, что дифференцирование элементарных функций есть всегда выполнимое (в элементарных же функциях) действие. Для интегрирования подобное утверждение неверно. В частности, доказано, что интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными функциями. Приведем для примера некоторые из них:

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int\frac{e^x}{x^n}dx,\ \int\frac{dx}{\ln x},\ \int\cos x^2dx,\ \int\sin x^2dx,$$

$$\int\frac{\cos x}{x^n}dx,\ \int\frac{\sin x}{x^n}dx,\int\frac{\operatorname{sh}x}{x^n}dx,\ \int\frac{\operatorname{ch}x}{x^n}dx.$$

Каждый из указанных интегралов представляет собой функцию, не являющуюся элементарной. Данные интегралы не только реально существуют, но и играют большую роль в различных вопросах физики.