Глава 11. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В предыдущих главах рассматривались определенные интегралы от ограниченных функций по ограниченному промежутку. Такие интегралы называются ***собственными***. Интегралы, для которых неограничена либо подынтегральная функция, либо область интегрирования, либо и то, и другое вместе) ***несобственными***.

11.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть функция $f(x)$ определена на конечном или бесконечном промежутке $[a,B)$, $-\infty < a < B \le +\infty$, и *интегрируема по Риману на любом отрезке* $[a,\eta]$, $a < \eta < B$. Если существует предел

$$\lim_{\substack{\eta\to B\\ \eta<B}} \int_a^{\eta} f(x)\,dx, \tag{11.1}$$

то функция $f(x)$ называется ***интегрируемой в несобственном смысле*** на промежутке $[a,B)$, а указанный предел называется ее ***несобственным интегралом с особенностью в верхнем пределе*** и обозначается $\int_a^B f(x)\,dx$.

Если предел (11.1) существует и *конечен*, то говорят также, что несобственный интеграл ***сходится***, в противном случае – что он ***расходится***.

Если промежуток $[a,B)$ бесконечен, т.е. $B=+\infty$, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\eta\to+\infty} \int_a^{\eta} f(x)\,dx \tag{11.2}$$

называют ***несобственным интегралом I-го рода***.

Если промежуток $[a,B)$ конечен, т.е. $B=b\in(a,+\infty)$, то интеграл

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\eta\to b-0} \int_a^{\eta} f(x)\,dx \tag{11.3}$$

называют ***несобственным интегралом II-го рода***.

Замечание. Такое определение интеграла II рода содержательно только в том случае, когда функция $f(x)$ неограничена в любой левой окрестности точки b, т.е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$. Это связано с тем, что функция, интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,\eta]$, $a<\eta<B$ и ограниченная в любой окрестности точки b, будет интегрируема по Риману на $[a,b]$ (т.е. ***интегрируема в собственном смысле***).

По аналогии с интегралом Римана для несобственных интегралов

$$\int_B^a f(x)\,dx = -\int_a^B f(x)\,dx. \qquad (11.4)$$

Поэтому несобственные интегралы с особенностью в нижнем пределе определяются аналогично несобственным интегралам с особенностью в верхнем пределе, а именно: пусть функция $f(x)$ определена на конечном или бесконечном промежутке $(A,b]$, $-\infty \le A < b < +\infty$, и *интегрируема по Риману на любом отрезке* $[\eta,b]$, $A < \eta < b$, тогда ***несобственный интеграл с особенностью в нижнем пределе*** определяется следующим образом:

$$\int_A^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\eta\to A\\ \eta>A}} \int_\eta^b f(x)\,dx. \qquad (11.5)$$

Если $A = -\infty$, то интеграл

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to-\infty} \int_\eta^b f(x)\,dx \qquad (11.6)$$

называют ***несобственным интегралом I-го рода с особенностью в нижнем пределе***.

Если $A = a \in (-\infty,b)$ и функция $f(x)$ *неограничена* на любом интервале $(a, a+\varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < b-a$, то интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\eta\to a+0} \int_\eta^b f(x)\,dx \qquad (11.7)$$

называют ***несобственным интегралом II-го рода с особенностью в нижнем пределе***.

Если функция $f(x)$ определена на интервале (A,B), $-\infty \le A < B \le +\infty$, и при некотором выборе точки $c \in (A,B)$ существуют несобственные интегралы $\int_A^c f(x)\,dx$ и $\int_c^B f(x)\,dx$, то

$$\int_A^B f(x)\,dx \overset{df}{=} \int_A^c f(x)\,dx + \int_c^B f(x)\,dx$$

или

$$\int_A^B f(x)\,dx \overset{df}{=} \lim_{\substack{\xi\to A\\ \eta\to B\\ A<\xi<\eta<B}} \int_\xi^\eta f(x)\,dx. \qquad (11.8)$$

Замечание 1. Существование и значение интеграла $\int_A^B f(x)\,dx$ не зависит от выбора точки $c \in (A,B)$.

Замечание 2. Если хотя бы один из интегралов $\int_A^c f(x)\,dx$ или $\int_c^B f(x)\,dx$ расходится, то говорят, что и интеграл $\int_A^B f(x)\,dx$ также расходится.

Общее понятие несобственного интеграла

Если на промежутке (A,B) имеется *конечное* число точек $x_i, i=\overline{0,k}$:

$$A = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = B$$

таких, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,b] \subset (A,B)$, не содержащем ни одной точки x_i.

Тогда на каждом из промежутков (x_{i-1}, x_i), $x_i, i=\overline{1,k}$ имеет смысл рассматривать несобственный интеграл. Если *все* интегралы

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,\ i=1,2,\ldots k \qquad (11.9)$$

сходятся, то существует ***несобственный интеграл*** $\int_A^B f(x)\,dx$ и

$$\int_A^B f(x)\,dx \overset{df}{=} \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx. \qquad (11.10)$$

Замечание 1. Такое определение несобственного интеграла не зависит от выбора точек x_i.

Замечание 2. Согласно определению, если хотя бы один из интегралов (11.9) расходится, то расходится и интеграл $\int_A^B f(x)\,dx$.

Замечание. Из определений (11.8) и (11.10) следует, что несобственный интеграл в общем случае сводится к интегралам вида (11.2), (11.3), (11.6) и (11.7), поэтому в дальнейшем ограничимся лишь изучением несобственных интегралов двух указанных видов (интегралов I-го и II-го рода).

11.2. СВОЙСТВА НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

При рассмотрении свойств несобственных интегралов будем останавливаться только на интегралах с особенностью в верхнем пределе. Напомним, что определение этих интегралов включает в себя предположение о том, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,\eta]$, $a<\eta<B$.

1. Существование несобственного интеграла $\int\limits_a^B f(x)dx$ эквивалентно существованию несобственного интеграла $\int\limits_c^B f(x)dx$, $c\in(a,B)$.

▸ Пусть $c\in(a,B)$, тогда, по свойству аддитивности определенного интеграла, получим

$$\int\limits_a^B f(x)dx=\lim_{\eta\to B}\int\limits_a^\eta f(x)dx=\lim_{\eta\to B}\left(\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^\eta f(x)dx\right)=$$

$$=\lim_{\eta\to B}\int\limits_a^c f(x)dx+\lim_{\eta\to B}\int\limits_c^\eta f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^B f(x)dx.$$

Так как $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,c]$, $c\in(a,B)$, то

$$\int\limits_a^c f(x)dx=A\in\mathbb{R};$$

следовательно, интегралы $\int\limits_a^B f(x)dx$, $\int\limits_c^B f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно. ◂

2. Если $\int\limits_a^B f(x)dx$ сходится, то $\lim\limits_{c\to B}\int\limits_c^B f(x)dx=0$.

▸ Так как интеграл $\int\limits_a^B f(x)dx$ сходится, то

$$\lim_{c\to B}\int\limits_c^B f(x)dx=\lim_{c\to B}\left(\int\limits_a^B f(x)dx-\int\limits_a^c f(x)dx\right)=\int\limits_a^B f(x)dx-\lim_{c\to B}\int\limits_a^c f(x)dx=0. ◂$$

3. Геометрический смысл несобственного интеграла. Если функция f неотрицательна и непрерывна на $[a,B)$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^B f(x)dx$ равен площади неограниченного открытого множества

$$A=\{(x,y)|a<x<B,\ 0<y<f(x)\}.$$

4. Линейность. Если несобственные интегралы $\int\limits_a^B f(x)dx$ и $\int\limits_a^B g(x)dx$ сходятся, то $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ сходится и интеграл $\int\limits_a^B(\lambda f(x)+\mu g(x))dx$, причем

$$\int\limits_a^B(\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lambda\int\limits_a^B f(x)dx+\mu\int\limits_a^B g(x)dx.$$

▸ $\int\limits_a^B(\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lim\limits_{\eta\to B}\int\limits_a^\eta(\lambda f(x)+\mu g(x))dx=$

$$=\lambda\lim_{\eta\to B}\int\limits_a^\eta f(x)dx+\mu\lim_{\eta\to B}\int\limits_a^\eta g(x)dx=\lambda\int\limits_a^B f(x)dx+\mu\int\limits_a^B g(x)dx.$$ ◂

5. Интегрирование неравенств. Если несобственные интегралы $\int\limits_a^B f(x)dx$ и $\int\limits_a^B g(x)dx$ сходятся и $\forall x\in[a,B)$ $f(x)\le g(x)$, то

$$\int\limits_a^B f(x)dx\le\int\limits_a^B g(x)dx.$$

▸ Доказывается аналогично предыдущему свойству. ◂

6. Интегрирование по частям. Пусть

1) функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывно дифференцируемы на каждом отрезке $[a,\eta]$, $a<\eta<B$;

2) сходится хотя бы один из несобственных интегралов $\int\limits_a^B udv$, $\int\limits_a^B vdu$;

3) существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to B\\ x<B}}u(x)v(x)$.

Тогда существуют оба интеграла и имеет место равенство

$$\int\limits_a^B udv=uv\Big|_a^B-\int\limits_a^B vdu.$$

7. Формула Ньютона-Лейбница. Пусть функци $f(x)$ интегрируема по Риману на каждом отрезке $[a,b]\subset(A,B)$. Тогда, если $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$ на (A,B), то справедлива ***формула Ньютона-Лейбница***

$$\int_a^B f(x)dx = F(x)\Big|_A^B = F(B)-F(a), \qquad (11.11)$$

где $F(A)=\lim\limits_{\substack{\eta\to A\\ \eta>A}}F(\eta)$, $F(B)=\lim\limits_{\substack{\eta\to B\\ \eta<B}}F(\eta)$. Равенство (11.11) понимается в том смысле, что либо обе части выражения существуют, и тогда они равны, либо они одновременно не имеют смысла.

▸ Докажем сначала утверждение для интегралов с особенностью в верхнем пределе.

$$\int_a^B f(x)dx=\lim_{\substack{\eta\to B\\ \eta<B}}\int_a^\eta f(x)dx=\lim_{\substack{\eta\to B\\ \eta<B}}\big(F(\eta)-F(a)\big)=\lim_{\substack{\eta\to B\\ \eta<B}}F(\eta)-F(a)=F(B)-F(a).$$

Учитывая доказанное, для интегралов с особенностью в нижнем пределе получим

$$\int_A^b f(x)dx=-\int_b^A f(x)dx=-\lim_{\substack{\eta\to A\\ \eta<A}}\big(F(\eta)-F(b)\big)=F(b)-F(A).$$

Следовательно,

$$\int_A^B f(x)dx\overset{df}{=}\int_A^c f(x)dx+\int_c^B f(x)dx=\big(F(c)-F(B)\big)-\big(F(B)-F(c)\big)=F(B)-F(A). ◂$$

Замечание. Требование интегрируемости по Риману на каждом промежутке $[a,b]\subset(A,B)$ является существенным, так как при наличии у несобственного интеграла особенности внутри промежутка (A,B), формула в общем случае не верна.

▸ Например, интеграл $\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx$ расходится, так как расходятся интегралы $\int_{-1}^0\frac{1}{x^2}dx$ и $\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$, но если к нему формально применить формулу Ньютона-Лейбница, то получим $\int_{-1}^1\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1=-1-1=-2$. ◂

8. Замена переменной в несобственном интеграле. Пусть

1) функция $\varphi(t)$ *монотонна* и непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta)$, $-\infty<\alpha<\beta\le+\infty$;

2) функция $f(x)$ непрерывна на $[a,B)$, причем $a=\varphi(\alpha)$, $B=\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)$.

Тогда

$$\int_a^B f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

причем интегралы в обеих частях формулы одновременно либо сходятся, либо расходятся.

Замечание. В результате замены переменной несобственный интеграл может превратиться в собственный. Например, если в несобственном интеграле $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сделать замену $x=\sin t,\ 0\le t<\frac{\pi}{2}$, то получим собственный интеграл $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}$.

9. Связь интегралов I-го и II-го рода. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$. Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ по конечному промежутку $[a,b)$ (II-го рода) может быть заменой переменной сведен к несобственному интегралу по неограниченному промежутку (I рода).

▸ Например, замена $x=\frac{bt+a}{t+1}$:

$$dx=\frac{b-a}{(t+1)^2}dt,\ x(0)=a,\ x(+\infty)=b,$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_0^{+\infty}f\left(\frac{bt+a}{t+1}\right)\frac{b-a}{(t+1)^2}dt. ◂$$

Замечание. Это свойство позволяет в дальнейшем рассматривать лишь несобственные интегралы I-го рода.

Пример 11.1. При $\alpha \le 0$ интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ – собственный и его значение равно $\frac{1}{1-\alpha}$. При $\alpha > 0$ интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ несобственный, причем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1; \\ +\infty, \alpha \ge 1. \end{cases}$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha<1$ и расходится при $\alpha\ge1$.

Пример 11.2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^{+\infty} = \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha}, \alpha > 1; \\ +\infty, \alpha \le 1, \end{cases}$

Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Пример 11.3. $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, dx$ расходится, так как

$$\varphi(\eta) = \int\limits_0^\eta \sin x\, dx = 1 - \cos\eta, \ \ \eta > 0$$

и $\lim\limits_{\eta\to+\infty} \varphi(\eta)$ не существует.

Пример 11.4.

Способ 1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{\eta\to+\infty} \int\limits_0^\eta e^{-x}dx = \lim\limits_{\eta\to+\infty} \left.\left(-e^{-x}\right)\right|_0^\eta = \lim\limits_{\eta\to+\infty}\left(-e^{-\eta}+1\right) = 1$.

Способ 2. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \left.-e^{-x}\right|_0^{+\infty} = -\lim\limits_{\eta\to+\infty} e^{-\eta} - (-1) = 1$.

Пример 11.5.

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\int\limits_0^{+\infty} xde^{-x} = -\left.\left(xe^{-x}\right)\right|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = -\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}\right) + 0 + 1 = 1.$$

Пример 11.6. $\int\limits_0^1 \ln x dx = \left. x\ln x\right|_0^1 - \int\limits_0^1 xd\ln x = 0 - \lim\limits_{x\to+0}\left(x\ln x\right) - \int\limits_0^1 dx = -1.$

Замечание. В вышеприведенных примерах сходимость или расходимость интеграла была установлена непосредственным вычислением:

– по формуле Ньютона-Лейбница (примеры 11.1, 11.2, 11.4-11.6);

– интегрированием по частям (примеры 11.5 и 11.6);

– по определению (примеры 11.3 и 11.4)

Пример 11.7*. Пусть $\forall a\in\mathbb{R}\ f(a+x)=f(a-x)$. Тогда,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=c\in\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = ac .$$

▸ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{a} xf(x)dx + \int_{a}^{+\infty} xf(x)dx$.

В первом интеграле сделаем замену переменной $t = a - x$, а во втором $t = x - a$, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = -\int_{+\infty}^{0}(a-t)f(a-t)dx + \int_{0}^{+\infty}(a+t)f(a+t)dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty}\Big(\big[af(a-t)+af(a+t)\big]+t\big[f(a+t)-f(a-t)\big]\Big)dt =$$

$$= a\left[\int_{0}^{+\infty} f(a-t)dt + \int_{0}^{+\infty} f(a+t)dt\right].$$

Учитывая, что

$$\int_{0}^{+\infty} f(a-t)dt = \begin{bmatrix} y = a-t, \\ t = a-y, \\ dt = -dy \end{bmatrix} = -\int_{a}^{-\infty} f(y)dy = \int_{-\infty}^{a} f(y)dy,$$

$$\int_{0}^{+\infty} f(a+t)dt = \begin{bmatrix} y = a+t, \\ t = y-a, \\ dt = dy \end{bmatrix} = \int_{a}^{+\infty} f(y)dy,$$

получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = a\left[\int_{-\infty}^{a} f(y)dy + \int_{a}^{+\infty} f(y)dy\right] = a\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = ac. \blacktriangleleft$$

11.3. СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

11.3.1. Признаки сходимости для знакопостоянных функций

Так как с точки зрения сходимости интегралы $\int\limits_a^B f(x)dx$ и $\int\limits_a^B (-f(x))dx$ эквивалентны (т.е. либо оба сходятся, либо оба расходятся), то достаточно рассмотреть лишь случай *неотрицательной* подынтегральной функции.

Теорема 11.1. Несобственный интеграл $\int\limits_a^B f(x)dx$ от *неотрицательной* на полуинтервале $[a,B)$ функции $f(x)$ сходится тогда и только тогда, когда все интегралы

$$\int\limits_a^\eta f(x)dx,\ a<\eta<B$$

ограничены в совокупности. При выполнении этого условия

$$\int\limits_a^B f(x)dx = \sup_{a<\eta<B}\int\limits_a^\eta f(x)dx.$$

▸ Рассмотрим функцию

$$\varphi(\eta) = \int\limits_a^\eta f(x)dx, \quad a<\eta<B.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_a^B f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел

$$\lim_{\eta\to B}\int\limits_a^\eta f(x)dx = \lim_{\eta\to B}\varphi(\eta),$$

В силу того, что $f(x)\geq 0$, функция $\varphi(x)$ возрастает, а значит, конечный предел $\lim\limits_{\eta\to B}\varphi(\eta)$ существует тогда и только тогда, когда $\varphi(x)$ ограничена на $[a,B)$. При этом, в силу теоремы 3.1

$$\int\limits_a^B f(x)dx = \lim_{\eta\to B}\varphi(\eta) = \sup_{a<\eta<B}\int\limits_a^\eta f(x)dx. ◂$$

Теорема 11.2 (теорема сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на полуинтервале $[a,B)$ и

$$\forall x\in[a,B)\ \ 0\le f(x)\le g(x).$$

Тогда

– если сходится интеграл $\int_a^B g(x)dx$, то сходится и интеграл $\int_a^B f(x)dx$;

– если расходится интеграл $\int_a^B f(x)dx$, то расходится и интеграл $\int_a^B g(x)dx$.

▸ $\forall x\in[a,B)\ 0\le f(x)\le g(x)$, поэтому

$$\forall \eta\in(a,B)\ \ \int_a^\eta f(x)dx\le\int_a^\eta g(x)dx,$$

а значит, из ограниченности $\int_a^\eta g(x)dx$ следует ограниченность $\int_a^\eta f(x)dx$. Применяя теорему 11.1, получаем утверждение теоремы. ◂

Следствие 1. Пусть

$$\lim_{x\to B}\frac{f(x)}{g(x)}=K,\ \ 0\le K\le+\infty.$$

Тогда

1) если $\int_a^B g(x)dx$ сходится и $0\le K<+\infty$, то $\int_a^B f(x)dx$ сходится;

2) если $\int_a^B g(x)dx$ расходится и $0<K\le+\infty$, то $\int_a^B f(x)dx$ расходится.

В частности, если функции $f(x)$ и $g(x)$ одного порядка при $x\to B$ (т.е. $0<K<+\infty$), то интегралы

$$\int_a^B f(x)dx \text{ и } \int_a^B g(x)dx$$

сходятся и расходятся одновременно.

Следствие 2. Выбирая конкретную функцию для сравнения, из следствия 1 можно получить частные признаки сходимости или расходимости. Практическое значение имеет сравнение с функцией $\frac{1}{x^\lambda}$ для интегралов I-го рода, и с функцией $\frac{1}{(b-x)^\lambda}$ – для интегралов II-го рода.

Пусть для достаточно больших x функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{x^\lambda},\ \lambda>0.$$

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$:

– сходится, если

$$\lambda>1 \text{ и } \varphi(x)\le c<+\infty;$$

– расходится, если

$$\lambda\le 1 \text{ и } \varphi(x)\ge c>0.$$

Пусть в некоторой левой окрестности b функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(b-x)^\lambda},\ \lambda>0.$$

Тогда интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)dx$

– сходится, если

$$\lambda<1 \text{ и } \varphi(x)\le c<+\infty;$$

– расходится, если

$$\lambda\ge 1 \text{ и } \varphi(x)\ge c>0.$$

11.3.2. Общие признаки сходимости. Абсолютная и условная сходимость

Вопрос о существовании несобственного интеграла $\int\limits_a^{B} f(x)dx$, согласно определению, сводится к вопросу существования *конечного* предела $\lim\limits_{\eta\to B}\varphi(\eta)$, где $\varphi(\eta)=\int\limits_a^{\eta} f(x)dx$. Применяя к функции $\varphi(\eta)$ критерий Коши, получим критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

Критерий Коши. Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{B} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы каждому числу $\varepsilon>0$ отвечало такое число $\eta\in(a,B)$, что при $\eta<\eta'<B$ $\eta<\eta''<B$ выполняется неравенство

$$\left|\varphi(\eta'')-\varphi(\eta')\right|=\left|\int\limits_a^{\eta'} f(x)dx-\int\limits_a^{\eta''} f(x)dx\right|=\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

Теорема 11.3.

Если интеграл $\int\limits_a^B |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^B f(x)dx$.

▸ Применяя критерий Коши к интегралу $\int\limits_a^B |f(x)|dx$, который предполагается сходящимся, получим, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta\ \ a<\eta<B\ \ \forall\eta',\eta''\ \ \eta<\eta'<\eta''<B\ \ \left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''}|f(x)|dx\right|=\int\limits_{\eta'}^{\eta''}|f(x)|dx<\varepsilon.$$

Так как для собственных интегралов выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''}f(x)dx\right|\le\int\limits_{\eta'}^{\eta''}|f(x)|dx,$$

то для тех же η', η'' тем более выполняется неравенство $\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''}f(x)dx\right|<\varepsilon$, поэтому, в силу критерия Коши, интеграл $\int\limits_a^B f(x)dx$ сходится. ◂

Из сходимости интеграла $\int\limits_a^B f(x)dx$, вообще говоря, не следует сходимость интеграла $\int\limits_a^B |f(x)|dx$. Поэтому различают абсолютную и условную сходимости интеграла $\int\limits_a^B f(x)dx$.

Интеграл $\int\limits_a^B f(x)dx$ называется:

– ***абсолютно сходящимся***, если сходится интеграл $\int\limits_a^B |f(x)|dx$;

– ***условно сходящимся***, если он *сходится*, а интеграл $\int\limits_a^B |f(x)|dx$ расходится.

Замечание 1. Если интеграл $\int_a^B f(x)dx$ сходится абсолютно, то говорят, что функция $f(x)$ ***абсолютно интегрируема.***

Замечание 2. Для знакопостоянных функций подразделение на абсолютную и условную сходимость не имеет смысла, так как для таких функций интегралы $\int_a^B f(x)dx$ и $\int_a^B |f(x)|dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Замечание 3. Для установления сходимости несобственного интеграла от знакопеременной[3] функции теорема сравнения и ее следствия не применимы. Но можно попытаться с их помощью установить *сходимость* интеграла от неотрицательной функции $|f(x)|$: если эта функция оказывается интегрируемой в несобственном смысле, то функция $f(x)$ также будет интегрируема в несобственном смысле, и притом *абсолютно*.

Теорема 11.4. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема, а функция $g(x)$ ограничена на $[a,B)$, то функция $f(x)g(x)$ абсолютно интегрируема на $[a,B)$.

▸ Так как $g(x)$ ограничена, то $\exists C \;\; \forall x, a \le x < B \quad |g(x)| \le C$.

Следовательно, $\forall x, a \le x < B \quad |f(x)g(x)| \le C|f(x)|$.

Применяя теорему сравнения, получаем абсолютную сходимость интеграла $\int_a^B f(x)g(x)dx$. ◂

Замечание 1. Если подынтегральная функция знакопеременная, то изложенные выше признаки сходимости могут установить лишь абсолютную сходимость. Если же интеграл от данной функции сходится, но не абсолютно, или расходится, то различить эти случаи с помощью установленных здесь признаков нельзя.

---

[3] Если на промежутке интегрирования функция меняет знак конечное количество раз, то интеграл $\int_a^B f(x)dx$ можно разбить по аддитивности на два $\int_a^{x_0} * + \int_{x_0}^B *$: собственный (а значит, сходящийся) и интеграл от знакопостоянной функции. В связи с этим договоримся «знакопеременными» называть лишь те функции, которые на промежутке интегрирования бесконечное количество раз меняют знак.

Замечание 2. Для собственных интегралов из интегрируемости функций $f(x)$ и $g(x)$ следовала интегрируемость их произведения – функции $f(x)\,g(x)$. Для несобственных интегралов в общем случае такое свойство не выполняется.

▸ Функции $f(x)=\dfrac{1}{x^{1/2}}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^{3/4}}$ интегрируемы в несобственном смысле на $[0,1]$, а $f(x)g(x)=\dfrac{1}{x^{5/4}}$ не интегрируема на этом отрезке. ◂

Теорема 11.5 (признак Дирихле). Пусть

$$f(x):[a,B)\to\mathbb{R},\ g(x):[a,B)\to\mathbb{R}.$$

Интеграл $\int\limits_a^B f(x)g(x)dx$ сходится, если функция $\varphi(\eta)=\int\limits_a^\eta f(x)dx$ ограничена на $[a,B)$, а функция $g(x)$ монотонна на $[a,B)$ и $\lim\limits_{x\to B} g(x)=0$.

▸ По второй теореме о среднем значении $\forall\eta',\eta''\ a<\eta'<\eta''<B$

$$\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)g(x)dx=g(\eta')\int\limits_{\eta'}^{\xi} f(x)dx+g(\eta'')\int\limits_{\xi}^{\eta''} f(x)dx,\ \xi\in[\eta',\eta''].$$

Пусть $L=\sup\limits_{\eta\in[a,B)}|\varphi(\eta)|$, тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists\eta\ a<\eta<B\ \forall\eta',\eta''\ \eta<\eta'<\eta''<B$

$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)g(x)dx\right|\le$$

$$\le|g(\eta')|\cdot\left|\int\limits_{\eta'}^{\xi} f(x)dx\right|+|g(\eta'')|\cdot\left|\int\limits_{\xi}^{\eta''} f(x)dx\right|\le L\big(|g(\eta')|+|g(\eta'')|\big)<\varepsilon.$$ ◂

Теорема 11.6 (признак Абеля). Пусть

$$f(x):[a,B)\to\mathbb{R},\ g(x):[a,B)\to\mathbb{R}.$$

Интеграл $\int\limits_a^B f(x)g(x)dx$ сходится, если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,B)$ в несобственном смысле, а $g(x)$ монотонна и ограничена на $[a,B)$.

▸ Признак Абеля вытекает из признака Дирихле:

1) $f(x)g(x)=f(x)A+f(x)\big[g(x)-A\big]$,

2) для ограниченной монотонной функции $g(x)$ существует *конечный* предел $\lim\limits_{x\to B} g(x)=A\in\mathbb{R}$. ◂

Замечание 1. Признаки Дирихле и Абеля можно применять как для знакопеременных, так и для знакопостоянных подынтегральных функций.

Замечание 2. Признаки Дирихле и Абеля являются лишь достаточными признаками сходимости несобственных интегралов, поэтому с их помощью невозможно обосновать расходимость.

Замечание 3. Если сходимость несобственного интеграла от знакопеременной функции $f(x)$ доказана с помощью признака Дирихле или признака Абеля, то вопрос о характере сходимости остается открытым. Для того чтобы определить, сходится интеграл условно или абсолютно, необходимо провести исследование сходимости интеграла $\int\limits_a^B \left| f(x) \right| dx$.

Пример 11.9. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) dx. \tag{11.14}$$

▸ При $x \to +0$ $\frac{1}{x^2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1+x^2} \sim 1$, следовательно, данный интеграл является несобственным интегралом I рода с особенностью в верхнем пределе. Интеграл сходится в силу следствия 2 из тоеремы сравнения, так как функция $\varphi(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$ ограничена величиной $\frac{\pi}{2}$. ◂

Пример 11.10. Докажем абсолютную сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x\, dx}{\sqrt[3]{x^4+2}}$.

▸ Запишем интеграл в виде суммы $\int\limits_0^{+\infty} * = \int\limits_0^1 * + \int\limits_1^{+\infty} *$. Первый интеграл является собственным и не влияет на сходимость исходного интеграла, поэтому достаточно исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x\, dx}{\sqrt[3]{x^4+2}}$. Последний интеграл в силу теоремы сравнения сходится абсолютно, так как сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{4/3}}$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\left|\sin^3 x\right| dx}{\sqrt[3]{x^4+2}} < \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{4/3}}$. ◂

Пример 11.12. Исследуем на абсолютную и условную сходимость интегралы

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx,\ \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx,\ a > 0,\ \lambda > 0. \qquad (11.15)$$

▸ I. При $\lambda > 1$ исходный интеграл (11.15) сходится абсолютно, так как

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\lambda} dx < \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda} dx,$$

а интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda} dx$ сходится.

II. Пусть теперь $0 < \lambda \le 1$. Покажем, что на этом промежутке исходный интеграл (11.15) сходится условно.

Интеграл (11.15) сходится в силу признака Дирихле, так как

1) $\forall \eta \in [a, +\infty)$ $\int_a^{\eta} \sin x dx = |\cos a - \cos \eta| \le |\cos a| + |\cos \eta| \le 2$,

2) функция $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$, монотонно убывая, стремится к 0 при $x \to +\infty$.

Определим характер сходимости, для этого исследуем на сходимость интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\lambda} dx$. Так как $\forall x$ $\sin^2 x \le |\sin x|$, то, доказав расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\lambda} dx$, мы докажем и расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\lambda} dx$.

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\lambda} dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda} dx - \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^\lambda} dx. \qquad (11.16)$$

По аналогии со сходимостью интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ доказывается сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^\lambda} dx$. Учитывая, что при $0 < \lambda \le 1$ интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda} dx$ расходится, из (11.16) получаем расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\lambda} dx$.

Аналогично доказывается, что и интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\lambda} dx$ сходится абсолютно при $\lambda > 1$, условно – при $0 < \lambda \le 1$. ◂

Пример 11.13*. Докажем сходимость следующих интегралов:

$$\int_0^{\infty} \sin\left(x^2\right)dx,\ \int_0^{\infty} \cos\left(x^2\right)dx,\ \int_0^{\infty} 2x\cos\left(x^4\right)dx.$$

▸ Преобразуем первый интеграл следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \sin\left(x^2\right)dx = \left[x = \sqrt{t}\right] = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

Интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ является собственным, так как $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0$, а абсолютная сходимость интеграла $\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ доказана в предыдущем примере. Таким образом, сходимость интеграла $\int_0^{\infty} \sin\left(x^2\right)dx$ доказана.

Сходимость интеграла $\int_0^{\infty} \cos\left(x^2\right)dx$ доказывается аналогично.

Интеграл $\int_0^{\infty} 2x\cos\left(x^4\right)dx$ подстановкой $x^2 = t$ приводится к интегралу $\int_0^{\infty} \cos\left(x^2\right)dx$ (сходимость которого уже доказана):

$$\int_0^{\infty} 2x\cos\left(x^4\right)dx = \left[t = x^2\right] = \int_0^{\infty} \cos\left(t^2\right)dt. \blacktriangleleft$$

Замечание. Интегралы $\int_0^{\infty} \sin\left(x^2\right)dx$, $\int_0^{\infty} \cos\left(x^2\right)dx$ показывают, что несобственный интеграл может сходиться и в том случае, когда подынтегральная функция не стремится к нулю при $x \to \infty$. Последний из трех рассмотренных в примере интегралов показывает, что несобственный интеграл может сходиться даже и тогда, когда подынтегральная функция не ограничена (при $x = \sqrt[4]{\pi n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, подынтегральная функция принимает значения $\pm\sqrt[4]{\pi n}$, т.е. не ограничена).

11.3.3. * Главное значение несобственного интеграла◆

Пусть функция $f(x)$ определена на прямой $-\infty < x < +\infty$ и интегрируема на каждом сегменте, принадлежащем этой прямой. Функция $f(x)$ называется ***интегрируемой по Коши***, если существует предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

Этот предел называют ***главным значением*** несобственного интеграла от функции $f(x)$ в смысле Коши и обозначают символом «V.p.»◆◆

$$V.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

П р и м е р 11.14. $V.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx = 0$, так как, в силу нечетности функции $\sin x$, $\int_{-R}^{R}\sin x\,dx = 0$.

Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[a,b]$, кроме, быть может, точки c, $a<c<b$, и интегрируема на любом сегменте, не содержащем c. Функция $f(x)$ называется ***интегрируемой по Коши***, если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right) = V.p.\int_{a}^{b} f(x)\,dx,$$

называемый ***главным значением*** интеграла в смысле Коши.

П р и м е р 11.15. Функция $\dfrac{1}{x-c}$ не интегрируема в несобственном смысле на сегменте $[a,b]$, $a<c<b$, но она интегрируема по Коши. При этом

$$V.p.\int_{a}^{b}\frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{a}^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x-c}\right) = \ln(b-c) - \ln(c-a) = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$

◆ См. [1].

◆◆ «V.p.» от французских слов «valeur principal» – «главное значение».