

Глава 10. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

10.1. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

Пространственная кривая (или просто кривая) – это множество точек пространства, координаты x, y, z которых определяются уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (10.1)$$

где $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ – непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции.

Если одна из функций $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ на всем отрезке $[\alpha, \beta]$ равна 0, то кривую называют **плоской**.

Если различным значениям $t \in [\alpha, \beta]$ соответствуют различные точки пространства, то кривую (10.1) называют **простой незамкнутой кривой**. Если точки $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha))$ и $B(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta))$ совпадают, а остальные точки различны, то L называют **простой замкнутой кривой**.

Пусть T – произвольное разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$ точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta,$$

а M_0, M_1, \dots, M_n – соответствующие точки кривой. Тогда говорят, что **ломаная** $M_0M_1M_2\dots M_n$ **вписана в кривую** L и отвечает разбиению T . Так как длина l_i звена ломаной $M_{i-1}M_i$ равна

$$l_i = \left([\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2 + [\chi(t_i) - \chi(t_{i-1})]^2 \right)^{1/2},$$

то длина ломаной зависит от выбора точек в разбиении и равна $l\{t_i\} = \sum_{i=1}^n l_i$.

Обозначим $\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$. Число l называется **пределом длин ломаных** $l\{t_i\}$ при $\Delta \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения сегмента $[\alpha, \beta]$, у которого $\Delta < \delta$, выполняется неравенство

$$0 \leq l - l\{t_i\} \leq \varepsilon.$$

Если существует предел длин ломаных, то кривая называется **спрямляемой**, а этот предел называется **длиной дуги кривой**.

Замечание. Из определения (10.1) кривой L , заданной параметрически, и определения длины дуги l такой кривой следует, что $l > 0$.

Лемма 10.1. Пусть $l^* \{t_i\}$ – длина ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей разбиению T^* сегмента $[\alpha, \beta]$, а $l \{t_i\}$ – длина ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей разбиению T , полученному из T^* добавлением нескольких новых точек. Тогда $l^* \{t_i\} \leq l \{t_i\}$.

► Для доказательства достаточно рассмотреть случай добавления одной точки. Тогда ломаная, отвечающая разбиению T , отличается от ломаной, отвечающей разбиению T^* , лишь тем, что одно звено $M_{i-1}M_i$ заменяется двумя звеньями $M_{i-1}C$ и CM_i , причем из неравенства треугольника имеем $M_{i-1}M_i \leq M_{i-1}C + CM_i$; следовательно, $l^* \{t_i\} \leq l \{t_i\}$. ◀

Следствие. Если множество $\{l \{t_i\}\}$ длин вписанных в кривую L ломаных, отвечающих всевозможным разбиениям T сегмента $[\alpha, \beta]$, ограничено, то кривая L будет спрямляемой, а точная верхняя грань множества $\{l \{t_i\}\}$ будет длиной дуги L .

Свойства спрямляемых кривых

1. Если кривая L спрямляема, то длина l ее дуги не зависит от параметризации этой кривой.

2. Если спрямляемая кривая разбита при помощи конечного числа точек M_0, M_1, \dots, M_n , соответствующих значениям t_0, t_1, \dots, t_n параметра t , удовлетворяющим условиям $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, на конечное число кривых L_i , то каждая из кривых спрямляема и сумма длин $l = \sum_{i=1}^n l_i$ является длиной этой кривой.

3. Пусть кривая L задана параметрически, и пусть $l(t)$ – *длина дуги участка кривой L* , точки которого определяются всеми значениями параметра из сегмента $[\alpha, t]$. Функция $l(t)$ является возрастающей и непрерывной функцией параметра t . Эту функцию $l = l(t)$ будем называть *переменной дугой на кривой L* .

4. Переменная дуга может быть выбрана в качестве параметра. Этот параметр называется *натуральным параметром*.

Длина кривой, заданной параметрически

Теорема 10.1. Пусть кривая задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Если для функций, параметрически задающих кривую, определены и интегрируемы на $[\alpha, \beta]$ производные, то кривая спрямляема и ее длина может быть вычислена по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \left((\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2 \right)^{1/2} dt. \quad (10.2)$$

Длина плоской кривой в декартовых координатах

Теорема 10.2. Если кривая является графиком функции $y = f(x)$, имеющей на $[a, b]$ непрерывную производную $f'(x)$, то кривая спрямляема и длина l ее дуги может быть вычислена по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (10.3)$$

► Функцию $y = f(x)$ можно задать параметрически:

$$x = t, \quad y = f(t), \quad z = 0, \quad t \in [a, b].$$

Тогда из (10.2) получим формулу (10.3). ◀

Длина плоской кривой в полярных координатах

Теорема 10.3. Если кривая определится полярным уравнением $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, и функция $r(\theta)$ имеет на $[\theta_1, \theta_2]$ непрерывную производную, то кривая L спрямляема и

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta. \quad (10.4)$$

► Формулы перехода от полярных координат к декартовым имеют вид $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$. Так как

$$x'_\theta = r'_\theta \cos\theta - r \sin\theta, \quad y'_\theta = r'_\theta \sin\theta + r \cos\theta,$$

то сделав замену $x = r(\theta)\cos\theta$ в интеграле (10.3) получим

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \left(\frac{r'_\theta \sin\theta + r \cos\theta}{r'_\theta \cos\theta - r \sin\theta} \right)^2} (r'_\theta \cos\theta - r \sin\theta) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r'_\theta)^2 + r^2} d\theta. \quad \blacktriangleleft$$

Замечание. Теоремы 10.1, 10.2, 10.3 являются достаточными условиями спрямляемости соответствующих кривых.

Пример 10.1. Вычислим длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = 4$ (рис. 15).

► Кривая $y^2 = x^3$ имеет две ветви:

$y = \sqrt{x^3}$ – верхняя ветвь,

$y = -\sqrt{x^3}$ – нижняя ветвь,

поэтому для вычисления длины дуги AB достаточно вычислить длины дуг OB и OA . Так как эти дуги симметричны относительно оси Ox , то $l_{OA} = l_{OB}$ и $l_{AB} = 2l_{OA}$.

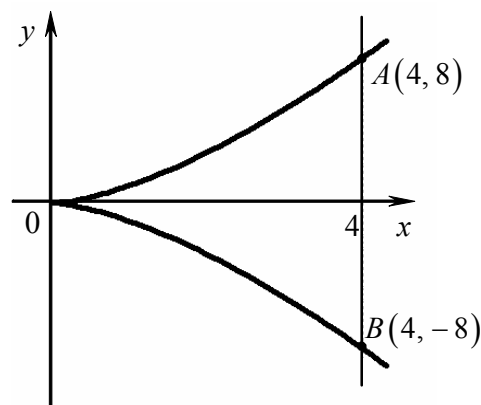


Рис. 15

$$l_{OA} = \int_0^4 \sqrt{1 + \left((\sqrt{x^3})' \right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{9}{4}x \right)^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

Таким образом, дуга AB имеет длину $\frac{16}{27} (10\sqrt{10} - 1)$. ◀

Пример 10.2. Вычислим длину дуги кривой $x = y^2 - \frac{\ln y}{8}$, заключенную между точками с ординатами $y = 1$ и $y = 4$.

► В этой задаче удобнее за независимую переменную принять y :

$$x' = 2y - \frac{1}{8y}; \quad \sqrt{1 + \left(2y - \frac{1}{8y} \right)^2} = \left| 2y + \frac{1}{8y} \right|;$$

$$l = \int_1^4 \sqrt{1 + (x')^2} dy = \int_1^4 \left(2y + \frac{1}{8y} \right) dy = \left(y^2 + \frac{1}{8} \ln y \right) \Big|_1^4 = 15 + \frac{1}{4} \ln 2. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 10.3. Вычислим длину астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

► Так как общий период функций $x(t)$ и $y(t)$ – 2π , то

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= 3a \int_0^{2\pi} |\sin t \cos t| dt = 3a \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = 12a \left(\frac{\sin^2 t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = 6a. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 10.4. Вычислим длину участка дуги кривой

$$x = \frac{t^3}{3}, \quad y = 2 - \frac{t^3}{4},$$

заключенного между точками пересечения кривой с осями координат.

► Ось Ox имеет уравнение $y = 0$. Так как уравнение $2 - t^3/4 = 0$ имеет единственное решение $t = 2$, то кривая пересекает ось в единственной точке. Аналогично, точка пересечения с осью Oy — единственна и соответствует нулевому значению параметра t . Тогда

$$\begin{aligned} l &= \int_0^2 \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_0^2 \sqrt{\left(\left(\frac{t^3}{3}\right)'\right)^2 + \left(\left(2 - \frac{t^3}{4}\right)'\right)^2} dt = \\ &= \int_0^2 \sqrt{t^4 + \frac{9t^4}{16}} dt = \frac{5}{4} \int_0^2 t^2 dt = \frac{10}{3}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 10.5. Вычислим длину замкнутой кривой

$$r = a \sin^4\left(\frac{\varphi}{4}\right), \quad a > 0.$$

► Так как $r' = a \sin^3\left(\frac{\varphi}{4}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)$, то

$$(r')^2 + r^2 = \left(a \sin^3\left(\frac{\varphi}{4}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)^2 + \left(a \sin^4\left(\frac{\varphi}{4}\right)\right)^2 = a^2 \sin^6\left(\frac{\varphi}{4}\right)$$

Учитывая, что функция $r = a \sin^4(\varphi/4)$ имеет период 4π и симметрична относительно полярной оси, получим:

$$\begin{aligned} l &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} a \sin^3\left(\frac{\varphi}{4}\right) d\varphi = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \left(3 \sin\left(\frac{\varphi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3\varphi}{4}\right)\right) d\varphi = \\ &= \frac{a}{2} \left(-12 \cos\left(\frac{\varphi}{4}\right) + \frac{4 \cos(3\varphi/4)}{3}\right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{16a}{3}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

10.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ДУГИ

Пусть функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$ имеют на $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные. Тогда переменная дуга $l(t)$ определяется формулой

$$l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{(\varphi'(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^2 + (\chi'(\tau))^2} d\tau.$$

Так как подынтегральная функция в правой части непрерывна, то $l(t)$ дифференцируема, причем

$$l'(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}.$$

Возводя обе части последнего равенства в квадрат и умножая затем на dt^2 , получим:

$$dl^2 = [l'(t)dt]^2 = [\varphi'(t)dt]^2 + [\psi'(t)dt]^2 + [\chi'(t)dt]^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Из последней формулы, в частности, следует, что если за параметр выбрана переменная дуга l , т.е. $x=\varphi(l)$, $y=\psi(l)$, $z=\chi(l)$, то

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dl}\right)^2 = 1.$$

10.3. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Плоская фигура Q – это часть плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой L (кривую L называют **границей** фигуры Q).

Рассмотрим всевозможные многоугольники, вписанные в фигуру Q и всевозможные многоугольники, описанные вокруг фигуры Q . Пусть $\{S_{int}\}$ – числовое множество площадей, вписанных в плоскую фигуру Q многоугольников², а $\{S_{ext}\}$ – числовое множество площадей описанных вокруг Q многоугольников. Очевидно, что площадь любого вписанного в фигуру Q многоугольника не превышает площади любого описанного вокруг фигуры Q многоугольника, поэтому можно утверждать, что множество $\{S_{int}\}$ ограничено сверху, а $\{S_{ext}\}$ – снизу. Числа

$$\underline{P} = \sup\{S_{int}\}, \quad \bar{P} = \inf\{S_{ext}\}$$

называются соответственно **нижней** и **верхней площадями фигуры** Q .

² Понятие площади плоской фигуры для случая многоугольника известно из курса элементарной математики.

Теорема 10.4. Нижняя площадь фигуры \underline{P} не превышает верхней площади \bar{P} этой фигуры, т.е. $\underline{P} \leq \bar{P}$.

► Докажем от противного. Пусть $(\underline{P} - \bar{P})/2 = \varepsilon > 0$.

1°. Так как $\underline{P} = \sup\{S_{int}\}$, то существует вписанный в Q многоугольник, площадь которого удовлетворяет неравенству $S_{int} > \underline{P} - \varepsilon$.

2°. Так как $\bar{P} = \inf\{S_{ext}\}$, то существует описанный вокруг Q многоугольник, площадь которого удовлетворяет неравенству $S_{ext} < \bar{P} + \varepsilon$.

Из 1° и 2° следует, что

$$S_{ext} < \bar{P} + \varepsilon = \bar{P} + \frac{\underline{P} - \bar{P}}{2} = \frac{\underline{P} + \bar{P}}{2} = \underline{P} - \frac{\underline{P} - \bar{P}}{2} = \underline{P} - \varepsilon < S_{int}.$$

но для любой фигуры $S_{ext} \geq S_{int}$. ◀

Плоская фигура Q называется **квадрируемой**, если верхняя площадь \bar{P} этой фигуры совпадает с ее нижней площадью \underline{P} . При этом число $P = \bar{P} = \underline{P}$ называется **площадью фигуры Q** .

Теорема 10.5. Для того чтобы плоская фигура была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ можно было указать такой описанный вокруг фигуры Q многоугольник и такой вписанный в фигуру Q многоугольник, разность площадей которых была бы меньше ε , т.е.

$$S_{ext} - S_{int} < \varepsilon.$$

► **Необходимость.** Пусть Q – квадрируема, т.е. $P = \bar{P} = \underline{P}$.

1°. $\underline{P} = \sup\{S_{int}\}$, поэтому существует вписанный в Q многоугольник, площадь которого удовлетворяет неравенству $\underline{P} - \varepsilon/2 < S_{int}$.

2°. $\bar{P} = \inf\{S_{ext}\}$, поэтому существует описанный вокруг Q многоугольник, площадь которого удовлетворяет неравенству $\bar{P} + \varepsilon/2 > S_{ext}$.

Учитывая, что $P = \bar{P} = \underline{P}$, из 1° и 2° получаем: $S_{ext} - S_{int} < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть S_{ext} и S_{int} – площади многоугольников, для которых $S_{ext} - S_{int} < \varepsilon$. Так как $S_{int} \leq \underline{P} \leq \bar{P} \leq S_{ext}$, то $\bar{P} - \underline{P} < \varepsilon$. В силу произвольности ε , отсюда вытекает, что $\bar{P} = \underline{P}$. ◀

Теорема 10.6. Если граница L плоской фигуры Q представляет собой спрямляемую кривую, то фигура Q квадрируема. ♦

♦ Пример неквадрируемой фигуры приведен в [1].

10.4. ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ

Теорема 10.7. Криволинейная трапеция – квадратуемая фигура и ее площадь P может быть вычислена по формуле

$$P = \int_a^b f(x) dx. \quad (10.5)$$

► Так как непрерывная на $[a, b]$ функция интегрируема, то $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое разбиение T сегмента $[a, b]$, что $S - s < \varepsilon$, где S и s – верхняя и нижняя суммы разбиения.

Но S и s равны соответственно S_{ext} и S_{int} , где S_{ext} и S_{int} – площади ступенчатых фигур (многоугольников), первая из которых содержит криволинейную трапецию, а вторая содержится в криволинейной трапеции. Поэтому $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое разбиение T сегмента $[a, b]$, что $S_{ext} - S_{int} < \varepsilon$, а значит, криволинейная трапеция квадратуема.

Поскольку $s \leq P \leq S$ и предел при $\Delta \rightarrow 0$ верхних и нижних сумм равен $\int_a^b f(x) dx$, то площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле (10.5). ◀

Пример 10.6. Вычислим площадь фигуры, ограниченной параболой (рис. 16)

$$x = -2y^2, \quad x = 1 - 3y^2.$$

► Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x = -2y^2, \\ x = 1 - 3y^2, \end{cases}$$

найдем ординаты точек пересечения кривых:

$$y_1 = -1, \quad y_2 = 1.$$

Так как $\forall y \in [-1, 1] \quad 1 - 3y^2 \geq -2y^2$, то

$$S = \int_{-1}^1 [(1 - 3y^2) - (-2y^2)] dy = \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

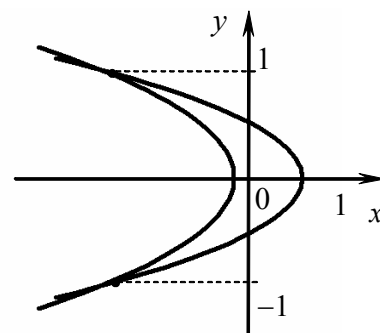


Рис. 16

Пример 10.7. Вычислим площадь петли кривой $y^2 = x(x-1)^2$.

► Область определения неявной функции $y(x)$ – промежуток $0 \leq x < +\infty$. Так как в уравнении кривой y имеет вторую степень, то кривая симметрична относительно оси Ox .

Положительная ветвь $y_1(x)$ задается уравнением

$$y_1(x) = \sqrt{x}|x-1| = \begin{cases} \sqrt{x}(1-x), & 0 \leq x \leq 1; \\ \sqrt{x}(x-1), & x > 1. \end{cases}$$

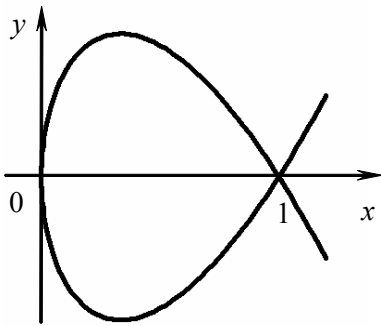


Рис. 17

Так как вторая ветвь $y_2(x) = -y_1(x)$, то общие точки этих ветвей должны лежать на оси Ox , но $y_1(x) = \sqrt{x}|x-1| = 0$ лишь при $x_1 = 0$ и при $x_2 = 1$.

Следовательно, петля кривой образована двумя функциями:

$$y_1(x) = \sqrt{x}(x-1), \quad x > 1;$$

$$y_2(x) = -\sqrt{x}(x-1), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Тогда площадь петли

$$S = 2 \int_0^1 \sqrt{x}(1-x) dx = 2 \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{5/2}}{5/2} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}. \blacktriangleleft$$

10.5. ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОГО СЕКТОРА

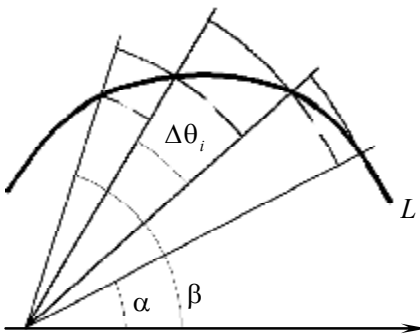


Рис. 18

Пусть кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r=r(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$, причем $r(\theta)$ непрерывна и неотрицательна на $[\alpha, \beta]$.

Криволинейным сектором называют плоскую фигуру, ограниченную кривой L и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β , называют.

Теорема 10.8. Криволинейный сектор – квадрируемая фигура, и ее площадь P может быть вычислена по формуле

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta. \quad (10.6)$$

► Рассмотрим разбиение T сегмента $[\alpha, \beta]$ точками

$$\alpha_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = \beta$$

и для каждого частичного сегмента $[\alpha, \beta]$ построим круговые секторы, радиусы которых равны

$$r_i = \min_{\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i} r(\theta), \quad R_i = \max_{\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i} r(\theta).$$

В результате получим две веерообразные фигуры (рис. 18), причем первая содержится в криволинейном секторе, а вторая содержит криволинейный сектор. Площади \bar{S}_{int} и \bar{S}_{ext} этих веерообразных фигур соответственно равны

$$\bar{S}_{int} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \cdot \Delta\theta_i; \quad \bar{S}_{ext} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n R_i^2 \cdot \Delta\theta_i.$$

Отметим, что первая сумма является нижней суммой s функции $\frac{1}{2}r^2(\theta)$ для указанного разбиения T сегмента $[\alpha, \beta]$, а вторая сумма является верхней суммой S для этой же функции и этого же разбиения. Так как функция $\frac{1}{2}r^2(\theta)$ интегрируема на сегменте $[\alpha, \beta]$, то разность $S - s = \bar{S}_{ext} - \bar{S}_{int}$ можно сделать сколь угодно малой, выбрав соответствующее разбиение. Например, для любого $\varepsilon > 0$ эта разность может быть сделана меньше $\varepsilon/2$.

Впишем теперь во внутреннюю веерообразную фигуру многоугольник Q_{int} с площадью S_{int} , для которого

$$\bar{S}_{int} - S_{int} < \varepsilon/4,$$

и опишем вокруг внешней веерообразной фигуры многоугольник Q_{ext} с площадью S_{ext} , для которого

$$S_{ext} - \bar{S}_{ext} < \varepsilon/4.$$

Это возможно, так как рассматриваемые фигуры состоят из круговых секторов, каждый из которых квадратуем. Первый из этих многоугольников вписан в криволинейный сектор, а второй описан вокруг него. Так как справедливы неравенства

$$S_{int} < \bar{S}_{int} \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta \leq \bar{S}_{ext} < S_{ext},$$

то $S_{ext} - S_{int} < \varepsilon$. Отсюда, в силу произвольности ε , вытекает квадратуемость криволинейного сектора и справедливость формулы (10.6). ◀

Пример 10.8. Вычислим площадь области, ограниченной кривой $r(\varphi) = \sin(5\varphi)$.

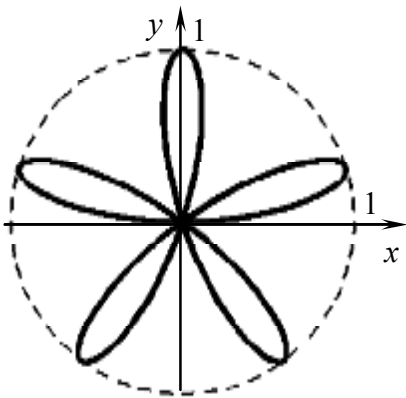


Рис. 19

► Кривая образует 5 симметричных петель, каждая из которых ограничивает криволинейный сектор (рис. 19). Рассмотрим сектор

$$\left\{ (r, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{5}, 0 \leq r \leq \sin(5\varphi) \right\}.$$

Его площадь равна в 5 раз меньше площади всей области, ограниченной данной кривой, и вычисляется по формуле (10.6). Следовательно,

$$S = \frac{5}{2} \int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin^2(5\varphi) d\varphi = \frac{5}{2} \int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{1}{2} (1 - \cos(10\varphi)) d\varphi = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleleft$$

10.6. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ ЕЕ ГРАНИЦ

Теорема 10.9. Пусть граница плоской фигуры Q – простая замкнутая кривая, заданная уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, причем точка $(\varphi(t), \psi(t))$ при изменении t от α до β пробегает границу так, что фигура Q остается слева от движущейся точки. Тогда площадь P фигуры Q может быть вычислена по любой из следующих формул:

$$P = -\int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t) \psi(t) dt, \quad P = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \psi'(t) dt, \quad P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(t) \psi'(t) - \varphi'(t) \psi(t)] dt.$$

Пример 10.9. Вычислим площадь астроида $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1$.

► Уравнение астроида можно параметризовать следующим образом:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - x'y) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (\cos^3 t \cdot 3\sin^2 t \cos t + \sin^3 t \cdot 3\cos^2 t \sin t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3a^2 \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{3a^2 \pi}{8}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 10.10. Вычислим площадь петли кривой

$$x = \frac{24}{25}t(t+5), \quad y = \frac{-3t^2}{10}(t+5).$$

► Найдем точку самопересечения кривой (рис. 20). В ней совпадают значения абсциссы и ординаты при разных значениях параметра. Так как

$$x = \frac{24}{25}t(t+5) = \frac{24}{25}\left(\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right),$$

то абсциссы совпадают при значениях параметра $t = -\frac{5}{2} \pm \lambda$. Чтобы функция $y(t)$ принимала при тех же значениях параметра t одно и то же значение, должно выполняться равенство

$$\left(-\frac{5}{2} + \lambda\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{2} + \lambda + 5\right) = \left(-\frac{5}{2} - \lambda\right)^2 \cdot \left(-\frac{5}{2} - \lambda + 5\right),$$

откуда $\lambda = \pm \frac{5}{2}$. Таким образом, при значениях параметра $t_1 = -5$ и $t_2 = 0$ получим одну и ту же точку $(0,0)$, – точку самопересечения кривой.

При возрастании параметра от -5 до 0 точка $M(x(t), y(t))$ описывает сначала нижнюю часть петли, а затем верхнюю. На рисунке указан обход кривой, соответствующий возрастанию параметра t (фигура остается справа). Следовательно, площадь искомой петли

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-5}^0 (-yx') dt = \int_{-5}^0 \frac{-3t^2}{10}(t+5) \left(\frac{48}{25}t + \frac{24}{5} \right) dt = \\ &= -\left(\frac{72}{625}t^5 + \frac{27}{25}t^4 + \frac{12}{5}t^3 \right) \Big|_{-5}^0 = 15. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Замечание. Значения параметра t , соответствующие точке самопересечения, в общем случае можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2); \\ y(t_1) = y(t_2). \end{cases}$$

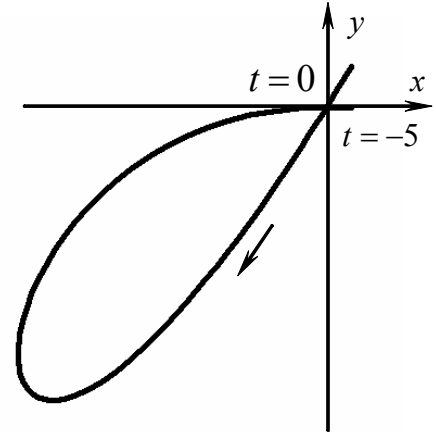


Рис. 20

10.7. ОБЪЕМ ТЕЛ

Тело E – это часть пространства, ограниченная простой замкнутой поверхностью S (поверхность S называют *границей* фигуры E).

Рассмотрим всевозможные многогранники, вписанные в тело E и всевозможные многогранники, описанные вокруг тела E . Пусть $\{V_{int}\}$ – числовое множество объемов многогранников, вписанных в тело E , а $\{V_{ext}\}$ – числовое множество объемов многогранников, описанных вокруг тела E . Очевидно, что объем любого вписанного в тело E многогранника не превышает объем любого описанного вокруг тела E многогранника, поэтому можно утверждать, что множество $\{V_{int}\}$ ограничено сверху, а $\{V_{ext}\}$ – снизу. Числа

$$\underline{V} = \sup\{V_{int}\} \text{ и } \bar{V} = \inf\{V_{ext}\}$$

называются соответственно *нижним* и *верхним объемами тела* E .

Тело E называется *кубируемым*, если верхний объем тела \bar{V} совпадает с нижним \underline{V} . Число $V = \bar{V} = \underline{V}$ называется *объемом* тела E .

Теорема 10.10. Для того чтобы тело E было кубируемым, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ можно было указать такой описанный вокруг E многогранник и такой вписанный в E многогранник, разность объемов которых была бы меньше ε , т.е.

$$V_{ext} - V_{int} < \varepsilon.$$

► Доказательство аналогично доказательству теоремы 10.5. ◀

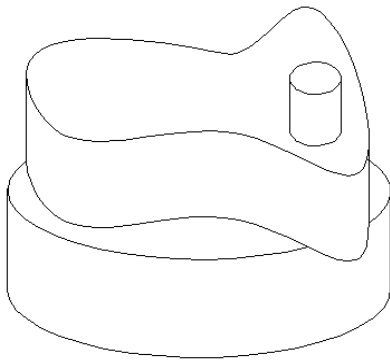


Рис. 21

Цилиндром называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными некоторой оси, и двумя плоскостями, перпендикулярными этой оси. Эти плоскости в пересечении с цилиндрической поверхностью образуют плоские фигуры, называемые основаниями цилиндра. Расстояние между основаниями цилиндра называется его высотой.

Ступенчатым телом называют объединение конечного числа цилиндров, расположенных так, что верхнее основание каждого предыдущего из цилиндров находится в одной плоскости с нижним основанием последующего цилиндра (рис. 21).

Теорема 10.11. Если основанием цилиндра E является квадратуемая фигура Q , то цилиндр представляет собой кубуемое тело, причем объем V цилиндра E равен Ph , где P – площадь основания Q , а h – высота цилиндра.

► Так как Q квадратуема, то $\forall \varepsilon > 0$ можно указать описанный вокруг Q и вписанный в Q многоугольники, для которых

$$S_{ext} - S_{int} < \varepsilon / h.$$

Объемы V_{ext} и V_{int} призм с высотой h , основаниями которых служат эти многоугольники, равны соответственно $S_{ext}h$ и $S_{int}h$. Следовательно,

$$V_{ext} - V_{int} = S_{ext}h - S_{int}h = h(S_{ext} - S_{int}) < h \frac{\varepsilon}{h} = \varepsilon. \quad (10.7)$$

Эти призмы являются соответственно описанным и вписанным в рассматриваемое тело многогранниками, а значит, E – кубуемое тело.

Так как $V_{int} \leq Ph \leq V_{ext}$, то, в силу произвольности ε , из (10.7) получаем, что $V = Ph$. ◀

Следствие. Ступенчатое тело кубуемо.

Теорема 10.12. Если $\forall \varepsilon > 0$ можно указать описанное вокруг тела E ступенчатое тело и вписанное в E ступенчатое тело, для которых

$$V_{ext} - V_{int} < \varepsilon,$$

то тело E кубуемо.

10.8. КУБИРУЕМОСТЬ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Теорема 10.13. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$. Тогда тело E , образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox , кубуемо, и его объем V может быть найден по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (10.8)$$

► Пусть T – разбиение сегмента $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Построив в каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ два прямоугольника с высотами m_i и M_i ($m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$), получим две ступенчатые

фигуры, одна из которых содержится в криволинейной трапеции, а другая содержит ее. При вращении криволинейной трапеции и этих ступенчатых фигур мы получим тело E и два ступенчатых тела, одно из которых содержится в E , а другое содержит E . Объемы V_{int} и V_{ext} этих тел соответственно равны:

$$V_{int} = \pi \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta x_i \text{ и } V_{ext} = \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta x_i.$$

Эти выражения представляют собой нижнюю и верхнюю суммы для функции $\pi f^2(x)$. Так как эта функция непрерывна, то она интегрируема, а значит, разность указанных сумм для некоторого разбиения T сегмента $[a, b]$ будет меньше данного положительного числа ε . Следовательно,

тело E кубируемо. Поскольку предел указанных сумм равен $\pi \int_a^b f^2(x) dx$, то объем V тела E может быть вычислен по формуле (10.8). ◀

Следствие: Объем V_x тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной функциями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ ($0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$) и прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$), выражается интегралом

$$V_x = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$$

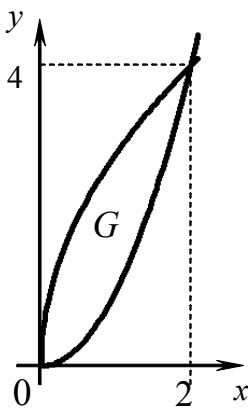


Рис. 22

Пример 10.11. Пусть фигура G ограничена параболой $y = x^2$, $8x = y^2$ (рис. 22). Вычислим объемы тел, полученных вращением фигуры G вокруг оси Ox и Oy соответственно.

► Решив систему уравнений $\begin{cases} y = x^2, \\ 8x = y^2, \end{cases}$ получим

точки пересечения парабол: $(0, 0)$ и $(2, 4)$.

1. Так как $\forall x \in (0, 2) \sqrt{8x} > x^2$, то объем тела, полученного вращением фигуры G вокруг оси Ox , можно вычислить следующим образом:

$$V_x = \pi \int_0^2 \left[(\sqrt{8x})^2 - (x^2)^2 \right] dx = \pi \left[4x^2 - \frac{x^5}{5} \right] \Big|_0^2 = \frac{48\pi}{5}.$$

2. Учитывая, что $y^2/8 < \sqrt{y}$, получим

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_0^4 \left[g_2^2(y) - g_1^2(y) \right] dy = \\ &= \pi \int_0^4 \left[(\sqrt{y})^2 - \left(\frac{y^2}{8} \right)^2 \right] dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{64 \cdot 5} \right] \Big|_0^4 = \frac{24}{5} \pi. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

10.9. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим поверхность Π , образованную вращением вокруг оси Ox графика функции $y = f(x)$, заданной на $[a, b]$.

Пусть T – разбиение сегмента $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

и A_0, A_1, \dots, A_n – соответствующие точки графика функции. Построим ломаную $A_0 A_1 \dots A_n$, при ее вращении вокруг оси Ox получим поверхность $\Pi\{A_i\}$, составленную из боковых поверхностей усеченных конусов.

Пусть y_i – ординаты $f(x)$ в точках x_i , а l_i – длина звена $A_{i-1} A_i$ ломаной $A_0 A_1 \dots A_n$, тогда площадь $P(x_i)$ полученной поверхности можно вычислить как сумму площадей усеченных конусов:

$$P(x_i) = \pi \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) l_i. \quad (10.9)$$

Число P называется **пределом площадей** $P(x_i)$, если $\forall \varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T сегмента $[a, b]$, максимальная длина Δ частичных сегментов которого меньше δ , выполняется неравенство $|P(x_i) - P| < \varepsilon$.

Поверхность вращения Π называется *квадрируемой*, если существует предел P площадей $P(x_i)$. При этом число P называется *площадью поверхности* Π .

Теорема 10.14. Если $f'(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$, то поверхность Π , образованная вращением графика функции $f(x)$ вокруг оси Ox , квадрируема, и ее площадь определяется интегралом

$$P_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

► Длина l_i звена $A_{i-1}A_i$ ломаной $A_0A_1\dots A_n$ равна

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}. \quad (10.10)$$

Подставляя (10.10) в (10.9) и учитывая, что

$$y_i - y_{i-1} = f'(\xi)(x_i - x_{i-1}), \quad \xi \in (x_{i-1}, x_i)$$

(формула Лагранжа), получим:

$$\begin{aligned} P(x_i) &= \pi \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) l_i = \pi \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \Delta x_i = \\ &= \pi \sum_{i=1}^n (2f(\xi_i) + [y_{i-1} - f(\xi_i)] + [y_i - f(\xi_i)]) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i = \\ &= 2\pi \sum_{i=1}^n \left\{ f(\xi_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i \right\} + \\ &\quad + \pi \sum_{i=1}^n \left\langle ([y_{i-1} - f(\xi_i)] + [y_i - f(\xi_i)]) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i \right\rangle. \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ выражение

$$2\pi \sum_{i=1}^n \left\{ f(\xi_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i \right\}$$

является интегральной суммой функции

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2},$$

которая, по условию теоремы, интегрируема и имеет предел

$$P_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\langle ([y_{i-1} - f(\xi_i)] + [y_i - f(\xi_i)]) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i \right\rangle = 0. \quad (10.11)$$

Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$; следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такой, что при $\Delta < \delta$ выполняются неравенства

$$|y_{i-1} - f(\xi_i)| < \varepsilon \text{ и } |y_i - f(\xi_i)| < \varepsilon.$$

Пусть $M = \max_{[a, b]} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left\langle ([y_{i-1} - f(\xi_i)] + [y_i - f(\xi_i)]) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i \right\rangle < \\ < \sum_{i=1}^n (\varepsilon + \varepsilon) M \Delta x_i = 2\varepsilon M \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 2\varepsilon M (b - a). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу произвольности ε , получаем формулу (10.11). \blacktriangleleft

Пример 10.12. Вычислим площадь поверхности, образованной вращением дуги параболы $y = x^2 / 2$, $x \in [0, 1]$

1) вокруг оси Ox , 2) вокруг оси Oy .

► 1. Площадь поверхности фигуры, полученной вращением дуги параболы вокруг оси Ox :

$$\begin{aligned} P_x &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_0^1 \frac{x^2}{2} \sqrt{1 + \left((x^2 / 2)' \right)^2} dx = \\ &= \pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{sh} t, \quad dx = \operatorname{ch} t, \\ \sqrt{1 + x^2} = \operatorname{ch} t \end{array} \right] = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \operatorname{sh}^2 t \cdot \operatorname{ch}^2 t \cdot dt = \\ &= \frac{1}{32} \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} (\operatorname{sh} 4t - 4t) dt = \frac{1}{32} \left(\operatorname{sh} (4 \ln(1 + \sqrt{2})) - 4 \ln(1 + \sqrt{2}) \right). \end{aligned}$$

2. Площадь поверхности фигуры, полученной вращением дуги параболы вокруг оси Oy :

$$P_y = 2\pi \int_a^b f(y) \sqrt{1 + (f'(y))^2} dy = 2\pi \int_0^{1/2} \sqrt{2y} \sqrt{1 + \left((\sqrt{2y})' \right)^2} dy =$$