Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.М. ЧУБИЧ, О.С. ЧЕРНИКОВА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2015

УДК 514.12(075.8)
Ч-813

Рецензенты:

В.С. Карманов, канд. техн. наук
И.М. Пупышев, канд. физ.-мат. наук

Работа подготовлена на кафедре
теоретической и прикладной информатики

Чубич В.М.

Ч-813 Сборник задач по аналитической геометрии : учебное пособие / В.М. Чубич, О.С. Черникова. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2015. – 87 с.

ISBN 978-5-7782-2657-9

Учебное пособие содержит основные определения, теоретические выкладки и методические пояснения, а также практические советы к решению задач и упражнений по темам: «Прямые в аффинном пространстве», «Плоскости в аффинном пространстве», «Прямые и плоскости в аффинном пространстве», «Кривые второго порядка», «Поверхности второго порядка».

Сборник задач предназначен для студентов I курса факультета прикладной математики и информатики НГТУ и может быть полезен студентам технических специальностей высших учебных заведений с повышенной математической подготовкой.

УДК 514.12(075.8)

ISBN 978-5-7782-2657-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник задач обобщает многолетний опыт преподавания авторами дисциплины «Алгебра и геометрия» на факультете прикладной математики и информатики Новосибирского государственного технического университета.

В начале каждой главы приводятся используемые в ней определения, теоремы и формулы. Далее на многочисленных примерах с подробными решениями поясняются обсуждаемые вопросы, понятия и методы. В заключение даются задачи для решения на практических занятиях и дома.

Номер каждой задачи содержит два разделенных точками числа. Первое число указывает номер главы, второе – номер задачи в этой главе.

Структура и содержание сборника задач полностью соответствуют порядку изложения во втором учебном семестре теоретического материала [1, 3, 6–9, 11]. Настоящий сборник подготовлен на основе выпущенного еще в 2003 году учебного пособия [5] и дополнен рядом полезных и содержательных задач из [2, 4, 10, 12].

Авторы выражают надежду, что настоящий сборник поможет студентам более глубоко и качественно освоить основные идеи и методы соответствующих разделов дисциплины «Алгебра и геометрия» и будут признательны за любую информацию о замеченных опечатках и неточностях.

ГЛАВА 1

ПРЯМЫЕ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть дано множество Ω элементов $A, B, C, \dots$, называемых точками, и линейное пространство X над полем F с элементами $x, y, z, \dots$, называемыми векторами. Пусть далее каждой упорядоченной паре точек A и B из Ω поставлен в соответствие единственный вектор $x = \overrightarrow{AB}$ из линейного пространства X, причем для этого соответствия выполняются следующие две аксиомы:

1^0) для любой точки A из Ω и любого вектора x из X существует в Ω единственная точка B такая, что $x = \overrightarrow{AB}$;

2^0) для любых точек A, B, C из Ω выполняется «правило треугольника»

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Множество Ω вместе с таким соответствием называется **аффинным пространством**, связанным с линейным пространством X. Если линейное пространство X n-мерное, то и аффинное пространство Ω называется n-мерным аффинным пространством и обозначается через Ω^n.

Системой координат или **репером** в аффинном пространстве Ω^n называется упорядоченный набор

$$\left(O,\ e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n\right), \tag{1.1}$$

состоящий из некоторой точки O из Ω^n, называемой **началом координат**, и некоторого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейного пространства X. Система координат называется **прямоугольной**, если базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ ортонормированный.

Координатами точки $M \in \Omega^n$ **в системе координат** (1.1) называются координаты $x_1, x_2, ..., x_n$ ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$, т. е. коэффициенты из разложения

$$\overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ ... \ + x_n e_n .$$

Точку M с координатами $x_1, x_2, ..., x_n$ будем обозначать через $M = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а вектор x с координатами $x_1, x_2, ..., x_n$ – соответственно через $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Если в аффинном пространстве Ω^n даны координатами в системе (1.1) две точки $M = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $N = (y_1, y_2, ..., y_n)$, то $\overrightarrow{MN} = \{y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n\}$, т. е. координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ равны разностям соответствующих координат конца и начала вектора.

Пусть в аффинном пространстве Ω^n зафиксирована система координат (1.1), заданы точка $M_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ и направляющий вектор $a = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Тогда множество точек аффинного пространства Ω^n, радиусы-векторы x которых удовлетворяют уравнению

$$x = x_0 + at, \qquad (1.2)$$

где $x_0 = \{x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}\}$ и параметр t принимает любые значения из поля F, называется **прямой,** проходящей через точку M_0 параллельно вектору a.

Соотношение (1.2) называется **параметрическим уравнением прямой в векторной форме**.

Векторное уравнение (1.2) равносильно n координатным уравнениям

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + a_1 t, \\ x_2 = x_{02} + a_2 t, \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ x_n = x_{0n} + a_n t, \end{cases} \qquad (1.3)$$

которые называются **параметрическими уравнениями прямой в координатной форме**.

Исключая параметр t в уравнениях (1.3), получаем **каноническое уравнение прямой** в аффинном пространстве Ω^n:

$$\frac{x_1 - x_{01}}{a_1} = \frac{x_2 - x_{02}}{a_2} = \ldots = \frac{x_n - x_{0n}}{a_n}. \tag{1.4}$$

Если на прямой известны две различные точки $M_0 = (x_{01},\ x_{02},\ \ldots,\ x_{0n})$ и $M_1 = (x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{1n})$, то уравнение этой прямой в векторной форме

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)\,t \tag{1.5}$$

и в канонической форме

$$\frac{x_1 - x_{01}}{x_{11} - x_{01}} = \frac{x_2 - x_{02}}{x_{12} - x_{02}} = \ \ldots\ = \frac{x_n - x_{0n}}{x_{1n} - x_{0n}}. \tag{1.6}$$

Угол φ **между двумя прямыми** с направляющими векторами a и b определяется как угол между векторами $a,\ b$, не превышающий π, и вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|(a,\ b)|}{\|a\|\|b\|}. \tag{1.7}$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы две прямые в аффинном пространстве Ω^n, заданные векторными уравнениями $x = x_1 + at$ и $x = x_2 + bu$, пересекались или были параллельны, является линейная зависимость тройки векторов $x_1 - x_2,\ a,\ b$. В случае скрещивающихся прямых векторы $x_1 - x_2,\ a,\ b$ линейно независимы. Направляющие векторы параллельных прямых коллинеарны, т. е. $b = a\tau,\ \tau \in F$.

Расстояние ω **от точки** M с радиусом-вектором $\tilde{x}$ **до прямой**, заданной уравнением (1.2), определяется как минимальное расстояние от точки M до точек прямой и вычисляется по формуле

$$\omega^2 = \frac{\begin{vmatrix} (\tilde{x}-x_0,\ \tilde{x}-x_0) & (a,\ \tilde{x}-x_0) \\ (a,\ \tilde{x}-x_0) & (a,\ a) \end{vmatrix}}{(a,\ a)}. \tag{1.8}$$

Основание N перпендикуляра, опущенного из данной точки M на прямую, совпадает с той точкой прямой, которая находится на минимальном расстоянии от данной точки.

Расстояние ω **между двумя скрещивающимися прямыми** с уравнениями $x = x_1 + at$ и $x = x_2 + bu$ определяется как кратчайшее расстояние между точками этих прямых и вычисляется по формуле

$$\omega^2 = \frac{\begin{vmatrix} (x_1-x_2,\ x_1-x_2) & (a,\ x_1-x_2) & (b,\ x_1-x_2) \\ (a,\ x_1-x_2) & (a,\ a) & (a,\ b) \\ (b,\ x_1-x_2) & (a,\ b) & (b,\ b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a,\ a) & (a,\ b) \\ (a,\ b) & (b,\ b) \end{vmatrix}}. \tag{1.9}$$

Основания общего перпендикуляра двух прямых совпадают с теми точками этих прямых, расстояние между которыми минимально.

Пример 1. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы через точку, заданную вектором c, можно было провести единственную прямую, пересекающую две прямые $x = a_0 + a_1 t$ и $x = b_0 + b_1 t$. Укажите метод построения такой прямой и точек пересечения ее с данными прямыми.

Решение. Пусть $x = c + dt$ – уравнение искомой прямой. Тогда необходимые и достаточные условия для того, чтобы прямая $x = c + dt$ пересекала прямые $x = a_0 + a_1 t$ и $x = b_0 + b_1 t$, состоят в том, что системы векторов $\{d,\ a_1\}$ и $\{d,\ b_1\}$ линейно независимы, вектор $a_0 - c$ линейно выражается через $\{d,\ a_1\}$ и вектор $b_0 - c$ линейно выражается через $\{d,\ b_1\}$. Формально это означает, что существуют действительные значения $t_1,\ t_2,\ \tau_1,\ \tau_2$ такие, что

$$a_0 + a_1 t_1 = c + d\tau_1; \tag{1.10}$$

$$b_0 + b_1 t_2 = c + d\tau_2, \qquad (1.11)$$

причем $\tau_1 \neq 0$ и $\tau_2 \neq 0$. Выразив d из соотношений (1.10), (1.11), получим соответственно формулы

$$d = \frac{1}{\tau_1}(a_0 - c) + \frac{t_1}{\tau_1} a_1; \qquad (1.12)$$

$$d = \frac{1}{\tau_2}(b_0 - c) + \frac{t_2}{\tau_2} b_1. \qquad (1.13)$$

Вычитая равенство (1.13) из (1.12), приходим к нулевой линейной комбинации системы векторов $\{a_0 - c,\ b_0 - c,\ a_1,\ b_1\}$:

$$\frac{1}{\tau_1}(a_0 - c) + \left(-\frac{1}{\tau_2}\right)(b_0 - c) + \frac{t_1}{\tau_1} a_1 + \left(-\frac{t_2}{\tau_2}\right) b_1 = \theta,$$

в которой коэффициенты $\frac{1}{\tau_1}$ и $\left(-\frac{1}{\tau_2}\right)$ отличны от нуля, что говорит о линейной зависимости указанной четверки векторов.

Подставив формулу (1.13) в (1.10), а формулу (1.12) в (1.11), получим две системы линейных алгебраических уравнений:

$$a_1 t_1 + (b_0 - c)\left(-\frac{\tau_1}{\tau_2}\right) + b_1\left(-\frac{\tau_1}{\tau_2} t_2\right) = c - a_0, \qquad (1.14)$$

$$b_1 t_2 + (a_0 - c)\left(-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right) + a_1\left(-\frac{\tau_2}{\tau_1} t_1\right) = c - b_0 \qquad (1.15)$$

относительно переменных t_1, $\left(-\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)$, $\left(-\frac{\tau_1}{\tau_2} t_2\right)$ и t_2, $\left(-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)$, $\left(-\frac{\tau_2}{\tau_1} t_1\right)$ соответственно, которые будут иметь единственное решение в случае линейной независимости троек векторов $\{a_1,\ b_0 - c,\ b_1\}$ и $\{b_1,\ a_0 - c,\ a_1\}$.

Таким образом, для того чтобы через точку, заданную вектором c, можно было провести единственную прямую, пересекающую две прямые $x = a_0 + a_1 t$ и $x = b_0 + b_1 t$, необходимо и достаточно, чтобы четверка векторов $\{a_0 - c,\ b_0 - c,\ a_1,\ b_1\}$ была линейно зависима, а каждая из двух троек $\{a_1,\ b_0 - c,\ b_1\}$ и $\{a_1,\ a_0 - c,\ b_1\}$ оказалась линейно независима.

Полагая, например, $\tau_2 = 1$, находим путем решения системы (1.14) значения $t_1,\ \tau_1,\ t_2$ и вычисляем по формулам (1.10), (1.11) точки пересечения, а по формуле (1.13) – направляющий вектор искомой прямой.

Пример 2. Найдите прямую, проходящую через точку, заданную вектором c и пересекающую прямые $x = a_0 + a_1 t$ и $x = b_0 + b_1 t$, и найдите точки пересечения искомой прямой с двумя данными прямыми, если $c = \{8,\ 9,\ -11,\ -15\}$; $a_0 = \{1,\ 0,\ -2,\ 1\}$, $a_1 = \{1,\ 2,\ -1,\ -5\}$; $b_0 = \{0,\ 1,\ 1,\ -1\}$, $b_1 = \{2,\ 3,\ -2,\ -4\}$.

Решение. Поскольку

$$\begin{pmatrix} a_0 - c \\ b_0 - c \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -9 & 9 & 16 \\ -8 & -8 & 12 & 14 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 2 & -19 \\ 0 & 8 & 4 & -26 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_0 - c \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ -8 & -8 & 12 & 14 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 8 & 4 & -26 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 22 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 - c \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ -7 & -9 & 9 & 16 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 2 & -19 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$

условия, необходимые и достаточные для того, чтобы через точку, заданную вектором c, можно было провести прямую, пересекающую две прямые $x = a_0 + a_1 t$ и $x = b_0 + b_1 t$, выполнены. Составим и решим систему (1.14):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & b_0 - c & b_1 & c - a_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 2 & 7 \\ 2 & -8 & 3 & 9 \\ -1 & 12 & -2 & -9 \\ -5 & 14 & -4 & -16 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 2 & 7 \\ 0 & 8 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -26 & 6 & 19 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

т. е. $\left(-\dfrac{\tau_1}{\tau_2} t_2\right) = 1$, $\left(-\dfrac{\tau_1}{\tau_2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, $t_1 = 1$. Положим $\tau_2 = 2$. Тогда $\tau_1 = 1$, $t_2 = -2$. Следовательно, координаты направляющего вектора искомой прямой $x = c + dt$

$$d=(a_0-c)+a_1=\{-7,\ -9,\ 9,\ 16\}+\{1,\ 2,\ -1,\ -5\}=$$
$$=\{-6,\ -7,\ 8,\ 11\};$$

координаты точек пересечения

$$M_1=a_0+a_1=(1,\ 0,\ -2,\ 1)+(1,\ 2,\ -1,\ -5)=(2,\ 2,\ -3,\ -4);$$
$$M_2=b_0-2b_1=(0,\ 1,\ 1,\ -1)-2(2,\ 3,\ -2,\ -4)=(-4,\ -5,\ 5,\ 7).$$

Проверка:

$$\frac{1}{2}(b_0-c)-b_1=\frac{1}{2}\{-8,\ -8,\ 12,\ 14\}-\{2,\ 3,\ -2,\ -4\}=$$
$$=\{-6,\ -7,\ 8,\ 11\}=d;$$
$$c+d=(8,\ 9,\ -11,\ -15)+(-6,\ -7,\ 8,\ 11)=(2,\ 2,\ -3,\ -4)=M_1;$$
$$c+2d=(8,\ 9,\ -11,\ -15)+(-12,\ -14,\ 16,\ 22)=(-4,\ -5,\ 5,\ 7)=M_2.$$

Пример 3. Составьте уравнение прямых, проходящих через точку $A=(3,\ 1)$ и образующих с прямой $3x=y+2$ углы в 45°.

Решение. Выберем две точки M_1 и M_2 на прямой $3x=y+2$. Пусть $M_1=(0,\ -2)$, $M_2=(1,\ 1)$. Тогда направляющий вектор прямой $a=\overline{M_1M_2}=\{1,\ 1\}-\{0,\ -2\}=\{1,\ 3\}$. Пусть $b=\{b_1,\ b_2\}$ – направляющий вектор искомой прямой. Тогда в соответствии с соотношением (1.7)

$$\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|(a,b)|}{\|a\|\|b\|}.$$

Считая систему координат прямоугольной, имеем

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|b_1+3b_2|}{\sqrt{10}\sqrt{b_1^2+b_2^2}},$$

или

$$\frac{1}{2}=\frac{b_1^2+6b_1b_2+9b_2^2}{10b_1^2+10b_2^2},$$

или

$$8b_1^2-12b_1b_2-8b_2^2=8\left(b_1^2-\frac{3}{2}b_1b_2\right)-8b_2^2=$$

$$=8\left(b_1-\frac{3}{4}b_2\right)^2-\frac{9}{2}b_2^2-8b_2^2=8\left(b_1-\frac{3}{4}b_2\right)^2-\frac{25}{2}b_2^2=$$

$$=\left(2\sqrt{2}b_1-\frac{3\sqrt{2}}{2}b_2-\frac{5\sqrt{2}}{2}b_2\right)\left(2\sqrt{2}b_1-\frac{3\sqrt{2}}{2}b_2+\frac{5\sqrt{2}}{2}b_2\right)=$$

$$=4\left(b_1-2b_2\right)\left(b_1+2b_2\right)=0.$$

Следовательно, $b_1=2b_2$ либо $b_1=-\frac{1}{2}b_2$. Полагая $b_2=2$, получаем два направляющих вектора $\{4,\ 2\}$, $\{-1,\ 2\}$, что позволяет записать два канонических уравнения $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{2}$ и $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{2}$.

В задачах, требующих вычисления скалярных произведений, предполагается, что система координат прямоугольная.

1.1. Составьте параметрическое уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

а) $A=(3,\ -1)$ и $B=(2,1)$;

б) $A=(-1,2)$ и $B=(1,2)$.

1.2. Составьте каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку $A=(1,\ 3)$ и параллельно прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}$.

1.3. Определите, какой угол с осью OX образуют следующие прямые:

а) $x+y+3=0$;

б) $\sqrt{3}x-y=0$.

1.4. Найдите на каком расстоянии от начала координат находятся прямые:

а) $3x-4y-10=0$;

б) $6x+8y-25=0$.

1.5. Прямая проходит через точку $A=(-1,\,-3)$ и образует с осью OY угол $45°$. Найдите на этой прямой точку, ордината которой равна 2.

1.6. Прямая, параллельная прямой $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{-4}$, образует с осью OY острый угол. Найдите координаты направляющего вектора этой прямой, если его длина равна 25.

1.7. На оси ординат найдите точку, находящуюся от точки $A=(4,\,-6)$ на расстоянии 5.

1.8. Найдите углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $5x-2y-11=0$, $x+2y+5=0$ и $x-2y+1=0$.

1.9. Составьте уравнения сторон треугольника, для которого точки $A=(-1,\,2)$, $B=(3,\,-1)$ и $C=(0,\,4)$ являются серединами сторон.

1.10. Найдите параметрическое уравнение прямой, отсекающей на оси OY отрезок, равный 2, и образующей с прямой $x-2y+3=0$ угол $45°$.

1.11. Определите, при каких значениях параметров α и β прямая $(\alpha-3\beta-2)x+(2\alpha+4\beta-1)y-3\alpha+\beta-2=0$ отсекает на оси OX отрезок, равный 3, а на оси OY -2.

1.12. Точка $M=(-4,\,5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x-y+8=0$. Составьте уравнения сторон и второй диагонали квадрата.

1.13. Заданы две смежные вершины параллелограмма $A=(2,\,5)$ и $B=(5,\,3)$ и точка $M=(-2,\,0)$ пересечения его диагоналей. Составьте уравнения сторон этого параллелограмма.

1.14. Найдите проекцию точки $M=(-8,\,12)$ на прямую, проходящую через точки $A=(2,\,-3)$ и $B=(-5,\,1)$.

1.15. Через точку $M = (-1,\ 1)$ проведите прямую так, чтобы середина отрезка ее между параллельными прямыми $x + 2y - 1 = 0$ и $x + 2y - 3 = 0$ лежала на прямой $x - y - 1 = 0$.

1.16. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M = (4,\ -1)$ и точку пересечения прямых $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$.

1.17. Найдите ординату точки M, лежащей на одной прямой с точками $A = (-8,\ -6)$ и $B = (-3,\ -1)$ и имеющей абсциссу, равную 5.

1.18. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - y + 5 = 0$ и $2x + 3y + 1 = 0$ и параллельной прямой $7x - 3y + 5 = 0$.

1.19. Через точку пересечения прямых $3x - y = 0$ и $x + 4y - 2 = 0$ проведите прямую, перпендикулярную прямой $2x + 7y = 0$.

1.20. На прямой $x - 2y + 2 = 0$ найдите точку P, сумма расстояний от которой до точек $A = (11,\ 4)$ и $B = (-1,\ 10)$ минимальна.

1.21. На прямой $5x - y - 4 = 0$ найдите точку, равноудаленную от точек $A = (1,\ 0)$ и $B = (-2,\ 1)$.

1.22. На прямой $x + y - 8 = 0$ найдите точки, равноудаленные от точки $A = (2, 8)$ и от прямой $x - 3y + 2 = 0$.

1.23. Составьте уравнения прямых, перпендикулярных к прямой $2x + 6y - 3 = 0$ и отстоящих от точки $A = (5, 4)$ на расстоянии $\sqrt{10}$.

1.24. Запишите уравнения биссектрисы углов между прямыми $3x + 4y - 1 = 0$ и $4x - 3y + 5 = 0$.

1.25. Заданы вершины треугольника $A = (2, -2)$, $B = (3, -5)$ и $C = (5, 1)$. Составьте уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине B.

1.26. Запишите уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси OX и точки $A = (0, 3)$.

1.27. Составьте уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси OY и точки $A = (4, 0)$.

1.28. Определите уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от точки $A = (-5, 3)$.

1.29. Найдите уравнение геометрического места точек, отклонение которых от прямой $6x-8y+5=0$ равно 5.

1.30. Даны две прямые. Установите, пересекаются они, скрещиваются, параллельны или совпадают. Если прямые пересекаются, найдите координаты точки их пересечения. Прямые заданы уравнениями:

а) $x=2+4t,\ y=-6t,\ z=-1-8t$ и $x=7-6t,\ y=2+9t,\ z=12t$;

б) $x=1+2t,\ y=7+t,\ z=3+4t$ и $x=6+3t,\ y=-1-2t,\ z=-2+t$.

1.31. При каких a прямые $\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-(a-2)^2}{a}$ и $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{a}=\dfrac{z}{1}$

а) пересекаются;
б) скрещиваются;
в) параллельны;
г) совпадают?

1.32. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M и пересекающей две данные прямые:

а) $M=(0,\ 0,\ 0)$; $x=1+2t,\ \ y=2+3t,\ \ z=-t$ и $x=4t$, $y=5-5t,\ \ z=3+2t$;

б) $M=(-1,\ 1,\ -1)$; $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{-1}$ и $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y+5}{-5}=\dfrac{z-3}{2}$;

в) $M=(-3,\ 3,\ 3)$; $\dfrac{x-9}{8}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ и $\dfrac{x-4}{-5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$.

1.33. Точка A лежит на прямой

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-1},$$

причем A равноудалена от точек $B=(3,\ 0,\ -2)$ и $C=(-1,\ 1,\ 5)$. Найдите координаты точки A.

1.34. Составьте уравнение прямой, пересекающей две прямые

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1} \text{ и } \frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}$$

и параллельной прямой $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-3}{1}$.

1.35. Найдите угол между прямыми:

а) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$ и $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-10}{6}$;

б) $x=5-2t,\ y=6+4t,\ z=8t$ и $x=1+t,\ y=-2t,\ z=3-4t$.

1.36. Даны точка $A=(2,\ -1,\ 0)$ и прямая l. Вычислите расстояние от точки A до прямой l; найдите координаты проекции точки A на l и координаты точки B, симметричной A относительно l; составьте уравнение прямой, проходящей через точку A и пересекающей данную прямую под прямым углом («опустите перпендикуляр» из точки A на l). Прямая l задана уравнениями:

а) $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$;

б) $x=1+2t,\ y=2-2t,\ z=-3+t$.

1.37. Найдите точку, симметричную точке $A=(1,\ 3,\ 2)$ относительно прямой

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

1.38. На прямой $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-7}{2}$ найдите точку, ближайшую к точке $A=(5,\ 3,\ 4)$.

1.39. Найдите расстояние между прямыми:

а) $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{6}=\dfrac{z-1}{-2}$ и $\dfrac{x-5}{-6}=\dfrac{y}{-12}=\dfrac{z}{4}$;

б) $x=3+2t,\ y=10-3t,\ z=3+4t$ и $x=1+3t,\ y=1-2t,\ z=1+3t$.

1.40. Даны прямые l_1 и l_2. Составьте уравнения их общего перпендикуляра (т. е. прямой, пересекающей l_1 и l_2 под прямым углом); найдите точки пересечения общего перпендикуляра с данными прямыми; вычислите расстояние между l_1 и l_2. Прямые заданы уравнениями:

а) $x=5+t,\ y=3-t,\ z=13+t$ и $x=6+t,\ y=1+2t,\ z=10-t$;

б) $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-10}{-1}$ и $\dfrac{x+4}{-7}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{3}$.

1.41. Убедитесь, что прямые

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-1}{1},\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-9}{4}=\frac{z-1}{2}$$

параллельны, вычислите расстояние между ними.

1.42. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z}{-1} \text{ и } \frac{x-1}{5}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+2}{1}.$$

1.43. Через точку $A(3,-4,6)$ проведите прямую, параллельную биссектрисе координатного угла YOZ.

1.44. Найдите прямую, проходящую через точку, заданную вектором c и пересекающую прямые $x=a_0+a_1t$ и $x=b_0+b_1t$, и найдите точки пересечения искомой прямой с двумя данными прямыми, если $c=\{4,\ 5,\ 2,\ 7\}$; $a_0=\{1,\ 1,\ 1,\ 1\}$, $a_1=\{1,\ 2,\ 1,\ 0\}$; $b_0=\{2,\ 2,\ 3,\ 1\}$, $b_1=\{1,\ 0,\ 1,\ 3\}$.

1.45. Найдите точку пересечения двух прямых a_0+a_1t и b_0+b_1t:

а) $a_0=\{2,\ 1,\ 1,\ 3,\ -3\}$, $a_1=\{2,\ 3,\ 1,\ 1,\ -1\}$; $b_0=\{1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2\}$, $b_1=\{1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1\}$;

б) $a_0=\{3,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3\}$, $a_1=\{1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2\}$; $b_0=\{2,\ 2,\ -1,\ -1,\ -2\}$, $b_1=\{2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1\}$.

ГЛАВА 2

ПЛОСКОСТИ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть в аффинном пространстве Ω^n зафиксирована система координат $(O,\ e_1,\ e_2,\ ...,\ e_n)$, заданы точка $M_0 = (x_{01},\ x_{02},\ ...,\ x_{0n})$ и система линейно независимых векторов $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_m$. Тогда множество точек аффинного пространства Ω^n, радиусы-векторы x которых удовлетворяют уравнению

$$x = x_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2 + ... + a_m t_m\,, \tag{2.1}$$

где $x_0 = \{x_{01},\ x_{02},\ ...,\ x_{0n}\}$ и $t_1,\ t_2,\ ...,\ t_m$ принимают любые значения из поля F, называется m**-мерной плоскостью** или, короче, m**-плоскостью**, проходящей через точку M_0 параллельно **направляющему подпространству** $L = L(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_m)$. Соотношение (2.1) называется **параметрическим уравнением плоскости в векторной форме**.

Прямые можно рассматривать как одномерные плоскости; $(n-1)$-мерные плоскости аффинного пространства Ω^n называются **гиперплоскостями (плоскостями)**.

Две плоскости, имеющие одну общую точку и одно и то же направляющее подпространство, совпадают. Параллельные плоскости не имеют общих точек, но их направляющие подпространства совпадают.

Пусть в выбранной системе координат

$$x = \{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\},\ a_i = \{a_{i1},\ a_{i2},\ ...,\ a_{in}\},$$

$$i = 1,\ 2,\ ...,\ m\,.$$

Тогда векторное уравнение (2.1) равносильно n координатным уравнениям

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m, \\ x_2 = x_{02} + a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_n = x_{0n} + a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

которые называются **параметрическими уравнениями плоскости в координатной форме**.

Если в аффинном пространстве Ω^n заданы точки $M_0 = (x_{01},\ x_{02},\ \ldots, x_{0n})$, $M_1 = (x_{11},\ x_{12},\ \ldots, x_{1n})$, ..., $M_m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})$ и векторы $\overrightarrow{M_0M_i} = \{x_{i1} - x_{01},\ \ x_{i2} - x_{02},\ \ \ldots, x_{in} - x_{0n}\}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots, m$, линейно независимы, то через эти точки можно провести единственную m-плоскость с координатными уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + (x_{11} - x_{01})t_1 + (x_{21} - x_{01})t_2 + \ldots + (x_{m1} - x_{01})t_m, \\ x_2 = x_{02} + (x_{12} - x_{02})t_1 + (x_{22} - x_{02})t_2 + \ldots + (x_{m2} - x_{02})t_m, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_n = x_{0n} + (x_{1n} - x_{0n})t_1 + (x_{2n} - x_{0n})t_2 + \ldots + (x_{mn} - x_{0n})t_m. \end{cases} \tag{2.3}$$

Вектор u, ортогональный ко всем **направляющим векторам** $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_{n-1}$ плоскости, заданной в виде (2.1), называется **вектором нормали** этой **плоскости**. Умножая скалярно обе части равенства (2.1) на вектор нормали u, получаем с учетом обозначения $v = -(u,\ x_0)$ уравнение

$$(u,\ x) + v = 0, \tag{2.4}$$

которое называется **векторным уравнением плоскости**, **проходящей через точку** M_0 с радиусом-вектором x_0 **перпендикулярно вектору** u. В случае прямоугольной системы координат $(O,\ e_1,\ e_2,\ \ldots, e_n)$ вместо векторного можно записать следующее **координатное уравнение плоскости, проходящей через точку** M_0 **перпендикулярно вектору** $u = \{u_1,\ u_2,\ \ldots, u_n\}$,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \left(x_i - x_{0i} \right) = 0, \tag{2.5}$$

которое еще называется **общим уравнением плоскости**.

Гиперплоскость, проходящая через точку $M_0 = \left(x_{01},\, x_{02},\, \ldots,\, x_{0n} \right)$ параллельно подпространству L, порожденному линейно независимыми векторами $a_1 = \left\{ a_{11},\, a_{12},\, \ldots,\, a_{1n} \right\}$, $a_2 = \left\{ a_{21},\, a_{22},\, \ldots,\, a_{2n} \right\}, \ldots$ $\ldots,\, a_{n-1} = \left\{ a_{n-1,1},\, a_{n-1,2},\, \ldots,\, a_{n-1,\, n} \right\}$, задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_{01} & a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n-1,1} \\ x_2 - x_{02} & a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n-1,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n - x_{0n} & a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.6}$$

Гиперплоскость, проходящая через n точек $M_0 = \left(x_{01},\, x_{02}, \ldots \right.$ $\left. \ldots,\, x_{0n} \right)$, $M_1 = \left(x_{11},\, x_{12},\, \ldots,\, x_{1n} \right), \ldots,\, M_{n-1} = \left(x_{n-1,1},\, x_{n-1,2},\, \ldots,\, x_{n-1,\, n} \right)$, определяющих систему линейно независимых векторов $\left\{ \overrightarrow{M_0 M_i},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \right\}$, задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_{01} & x_{11} - x_{01} & \ldots & x_{n-1,1} - x_{01} \\ x_2 - x_{02} & x_{12} - x_{02} & \ldots & x_{n-1,2} - x_{02} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n - x_{0n} & x_{1n} - x_{0n} & \ldots & x_{n-1,\, n} - x_{0n} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.7}$$

Необходимым и достаточным условием того, что $n+1$ точка $M_0, M_1,\, \ldots,\, M_n$ аффинного пространства Ω^n лежит на одной гиперплоскости, является линейная зависимость векторов $\overrightarrow{M_0 M_i}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Угол φ между двумя плоскостями с векторами нормалей u_1 и u_2 определяется как угол между двумя векторами u_1, u_2, не превышающий $\dfrac{\pi}{2}$, и вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|(u_1,\ u_2)|}{\|u_1\|\|u_2\|}. \tag{2.8}$$

Расстояние ω **от точки** M с радиусом-вектором $\tilde{x}$ **до плоскости**, заданной уравнением (2.4), определяется как минимальное расстояние от точки M до точек плоскости и вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{\left|\left(u,\ \tilde{x}\right) + v\right|}{\|u\|}. \tag{2.9}$$

Расстояние от точки M до плоскости равно расстоянию от этой точки до основания перпендикуляра, опущенного из нее на плоскость.

Расстояние ω **между двумя параллельными плоскостями** с уравнениями $\left(u,\ x\right) + v_1 = 0,\ \left(u,\ x\right) + v_2 = 0$ равно расстоянию от некоторой точки M, лежащей на второй плоскости, до первой плоскости и вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{|v_1 - v_2|}{\|u\|}. \tag{2.10}$$

Пример 1. Составьте общее уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x + y - 4z + 5 = 0$ и отстоящей от точки $M = \left(1,\ 2,\ 0\right)$ на расстояние $\sqrt{21}$.

Решение. В силу того, что векторы нормалей у параллельных плоскостей коллинеарны, можно записать общее уравнение искомой плоскости: $2x + y - 4z + v = 0$. Для нахождения v воспользуемся соотношением (2.9), в котором $\omega = \sqrt{21},\ \ u = \left\{2,\ 1,\ -4\right\},\ \ \tilde{x} = \left\{1,\ 2,\ 0\right\}$. Получим

$$\frac{|4 + v|}{\sqrt{21}} = \sqrt{21},$$

откуда $|4 + v| = 21$ и $v = 17$ либо $v = -25$. Следовательно, существуют две плоскости с общими уравнениями $2x + y - 4z + 17 = 0$ и $2x + y - 4z - 25 = 0$, удовлетворяющими условию данной задачи.

Пример 2. Составьте параметрическое уравнение плоскости, проходящей через точку $M=(2,\ 1,\ 3)$ параллельно плоскости $x+2y-3z+1=0$.

Решение. Считая систему координат ортогональной, найдем направляющие векторы a_1, a_2 искомой плоскости из условия $(u,\ a_i)=0,\ i=1,\ 2$, где $u=\{1,\ 2,\ -3\}$. Пусть $a_i=\{a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3}\}$. Тогда $(u,\ a_i)=a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}=0$. Отсюда $a_i=\{3a_{i3}-2a_{i2},\ a_{i2},\ a_{i3}\}$. Выбирая последовательно для $i=1$ $a_{i2}=1,\ a_{i3}=0$, а для $i=2$ $a_{i2}=$ $=0,\ a_{i3}=1$, получаем $a_1=\{-2,\ 1,\ 0\}$, $a_2=\{3,\ 0,\ 1\}$, что позволяет записать на основании равенств (2.2) следующее параметрическое уравнение искомой плоскости:

$$\begin{cases} x=2-2t_1+3t_2, \\ y=1+t_1, \\ z=3+t_2. \end{cases}$$

Пример 3. Вычислите расстояние от точки $P=(1,3,0)$ до плоскости, проходящей через точки $A=(3,1,3)$, $B=(0,3,\ 5)$, $C=(6,\ -3,\ 0)$.

Решение. Считая, что координаты всех точек заданы в прямоугольной системе координат, запишем общее уравнение плоскости ABC, для чего воспользуемся соотношением (2.7):

$$\begin{vmatrix} x-3 & -3 & 3 \\ y-1 & 2 & -4 \\ z-3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6(x-3)+12(z-3)+6(y-1)-6(z-3)+$$

$$+8(x-3)-9(y-1)=2x-3y+6z-21=0.$$

Искомое расстояние вычислим по формуле (2.9), в которой $u=\{2,\ -3,\ 6\}$, $\tilde{x}=\{1,\ 3,\ 0\}$ и $v=-21$. Получим

$$\omega=\frac{|2-9-21|}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{28}{7}=4.$$

Пример 4. Найдите параметрическое уравнение плоскости, заданной системой линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему уравнений в матричном виде и найдем ее общее решение $x_{\text{общ}}^{\text{н}}$ методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выберем в качестве свободных переменных переменные x_3 и x_4. Тогда

$$x_2 = 2 - x_3 + x_4,$$

$$x_1 = 1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 =$$
$$= 1 - (2 - x_3 + x_4) + 2x_3 - 3x_4 = -1 + 3x_3 - 4x_4$$

и

$$x_{\text{общ}}^{\text{н}} = (-1 + 3x_3 - 4x_4, 2 - x_3 + x_4, x_3, x_4)^{\text{T}}.$$

Представляя общее решение $x_{\text{общ}}^{\text{н}}$ неоднородной системы в виде суммы частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы, получаем разложение

$$x_{\text{общ}}^{\text{н}} = (-1,\ 2,\ 0,\ 0)^{\text{T}} + (3x_3 - 4x_4,\ -x_3 + x_4,\ x_3,\ x_4)^{\text{T}} =$$
$$= (-1,\ 2,\ 0,\ 0)^{\text{T}} + (3,\ -1,\ 1,\ 0)^{\text{T}} x_3 + (-4,\ 1,\ 0,\ 1)^{\text{T}} x_4,$$

представляющее искомое параметрическое уравнение плоскости $x = x_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2$, в котором $x_0 = \{-1,\ 2, 0,\ 0\}$, $a_1 = \{3,\ -1,\ 1,\ 0\}$ и $a_2 = \{-4,\ 1,\ 0,\ 1\}$.

Таким образом, множество решений неоднородной системы линейных уравнений можно рассматривать как m -плоскость в аффинном пространстве Ω^n .

В задачах, требующих вычисления скалярных произведений, предполагается, что система координат прямоугольная.

2.1. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A=(3,\ 2,\ -1)$ перпендикулярно вектору $u=\{-1,\ 2,\ 1\}$.

2.2. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M=(9,\ -3,\ 2)$ параллельно двум векторам $a=\{2,\ 1,\ -2\}$ и $b=\{3,\ 1,\ 0\}$.

2.3. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M=(2,\ 3,\ 1)$ и $P=(1,\ 1,\ 3)$ параллельно вектору $a=\{1,\ 2,\ 1\}$.

2.4. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через три точки $A=(3,\ 1,\ 1)$, $B=(2,\ 2,\ 2)$, $C=(-1,\ -2,\ 0)$.

2.5. Составьте параметрическое уравнение плоскости:

а) проходящей через точку $A=(1,\ 1,\ 2)$ параллельно векторам $a=\{2,\ 3,\ 1\}$ и $b=\{-1,\ 1,\ 0\}$;

б) проходящей через точки $A=(1,\ 1,\ 1)$, $B=(-1,\ 2,\ -3)$ параллельно вектору $a=\{5,\ -3,\ 2\}$;

в) заданной общим уравнением $x+2y-3z-1=0$.

2.6. Определите взаимное расположение плоскостей:

а) $x+2y-z+2=0,\ 2x+4y-2z+2=0;$

б) $x+2y+3z+1=0,\ 2x+4y+6z+2=0;$

в) $2x+3y+2z-5=0,\ x+y+5z-7=0$.

2.7. Найдите координаты точек пересечения плоскости

$$\begin{cases} x=2+t-v, \\ y=-3-t-2v, \\ z=2t+v \end{cases}$$

с осями координат.

2.8. Напишите общее уравнение плоскости

$$\begin{cases} x = 1 + t + v, \\ y = 2 - 2t + 3v, \\ z = -1 - t - 2v. \end{cases}$$

2.9. Докажите, что точки $A = (3,\ 5,\ 1)$, $B = (2,\ 4, 7)$, $C = (1,\ 5,\ 3)$ и $D = (4,\ 4,\ 5)$ лежат в одной плоскости.

2.10. Проверьте, являются ли точки $A = (-1,\ 2,\ 3)$, $B = (2,\ -1,\ 1)$, $C = (1,\ -3,\ -1)$ и $D = (-5,\ 3,\ 3)$ вершинами трапеции.

2.11. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A = (1,\ 1,\ 1)$ перпендикулярно двум плоскостям $x + y + z + 5 = 0$ и $x - y + z - 2 = 0$.

2.12. Найдите точку, симметричную точке $A = (2,\ 4,\ 2)$ относительно плоскости $x + y + z - 5 = 0$.

2.13. Напишите параметрическое уравнение плоскости $13x + 3y - 14z - 1 = 0$.

2.14. Составьте уравнения плоскостей, проходящих через точку $A = (2,\ 3,\ 5)$ параллельно координатным плоскостям.

2.15. Запишите уравнение плоскости:

а) параллельной плоскости XOY и проходящей через точку $A(3, -5, 4)$;

б) проходящей через ось OZ и через точку $A(2, -3, -2)$;

в) параллельной оси OY и проходящей через точки $A(1, 3, 4)$ и $B(2, 5, -6)$.

2.16. При каких значениях параметра a плоскости $x + ay + z - 1 = 0$ и $ax + 9y + \dfrac{a^3}{9} z + 3 = 0$:

а) пересекаются;

б) параллельны;

в) совпадают?

2.17. Найдите расстояние от точки $A=(3,\ 1,\ -1)$ до плоскости:

а) $x-y-5z+2=0$;

б) $x-2y+2z-2=0$;

в) $x-2y+2z=0$;

г) $z=0$.

2.18. Найдите расстояние между параллельными плоскостями:

а) $6x-3y+2z+5=0$ и $6x-3y+2z+9=0$;

б) $2x+2y-z+3=0$ и $2x+2y-z+18=0$;

в) $3x+4z+1=0$ и $6x+8z-1=0.$

2.19. Составьте уравнения плоскостей,

а) параллельных плоскости $6x-3y+2z+5=0$ и отстоящих от нее на расстояние 3;

б) параллельных плоскости $x+3y-z+\sqrt{11}=0$ и отстоящих от нее на расстояние 3;

в) параллельных плоскости $2x+2y-z+3=0$ и отстоящих от точки $A=(1,\ 2,\ -1)$ на расстояние 3;

г) параллельных плоскости $3x+4z+1=0$ и отстоящих от начала координат на расстояние 3.

2.20. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0,5,2)$ и удаленной от точки $B(-1,6,1)$ на расстояние 1 и от точки $C(4,0,5)$ на расстояние 3.

2.21. Найдите угол между плоскостями:

а) $x+4y-z+1=0$ и $x+y-z-3=0$;

б) $x+2y-2z=0$ и $z=5$;

в) $x+3y-z+1=0$ и $x=1-u,\ y=2-3u-v,\ z=7+u+v.$

2.22. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,1,-2)$ и $B(-2,4,1)$ и образующей с плоскостью $x-z=1$ угол $60°$.

ГЛАВА 3

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пример 1. Найдите проекцию прямой

$$\begin{cases} x+y-16=0, \\ x+y+z-15=0 \end{cases}$$

на плоскость $3x-2y+z-1=0$.

Решение. Прямая задана пересечением двух плоскостей. Найдем ее параметрическое уравнение, для чего решим систему уравнений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Отсюда $z=-1$, y – свободная переменная, $x=16-y$ и параметрическое уравнение данной прямой $x=16-t,\ y=t,\ z=-1.$

Отыщем точку пересечения A прямой с плоскостью:

$$3(16-t)-2t-1-1=-5t+46=0 \mapsto t=$$

$$=\frac{46}{5} \mapsto A=\left(\frac{34}{5},\ \frac{46}{5},\ -1\right).$$

Выберем на прямой $x=16-t,\ y=t,\ z=-1$ точку (0, 16, –1) и через нее проведем прямую $x=3t,\ y=16-2t,\ z=-1+t,$ ортогональную плоскости $3x-2y+z-1=0$. Получим точку пересечения B этой прямой с плоскостью:

$$3\cdot 3t-2(16-2t)+(-1+t)-1=14t-34=0 \mapsto t=$$

$$=\frac{34}{14}=\frac{17}{7} \mapsto B=\left(\frac{51}{7},\ \frac{78}{7},\ \frac{10}{7}\right).$$

Проведем через точки A и B прямую. Поскольку

$$\overrightarrow{AB}=\left\{\frac{51}{7},\ \frac{78}{7},\ \frac{10}{7}\right\}-\left\{\frac{34}{5},\ \frac{46}{5},\ -1\right\}=$$

$$=\left\{\frac{17}{35},\ \frac{68}{35},\ \frac{17}{7}\right\}=\frac{17}{35}\{1,\ 4,\ 5\},$$

каноническое уравнение искомой прямой $\dfrac{x-\dfrac{34}{5}}{1}=\dfrac{y-\dfrac{46}{5}}{4}=\dfrac{z+1}{5}$,

или $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-10}{4}=\dfrac{z}{5}$.

Пример 2. Найдите точку, симметричную точке A = (0, 5, –3) относительно прямой $\begin{cases} x+y+z-6=0, \\ 3x+y-z-12=0. \end{cases}$

Решение. Как и в предыдущем примере, прямая задана пересечением двух плоскостей. Найдем ее параметрическое уравнение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 12 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Отсюда z – свободная переменная, $y=3-2z$, $x=6-y-z=z+3$ и параметрическое уравнение данной прямой $x=3+t,\ y=3-2t,\ z=t.$

Определим основание B перпендикуляра, опущенного из точки A на эту прямую. Предположим, что система координат прямоугольная. Поскольку $\overrightarrow{AB}=\{t+3,\ -2t-2,\ t+3\}$ и точка B находится на минимальном расстоянии от точки A, найдем значение переменной t, при котором $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=6t^2+20t+22$ принимает свое наименьшее значение. В силу того, что

$$\frac{d\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}{dt}=12t+20 \text{ и } \frac{d^2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}{dt^2}=12>0,\ t=-\frac{5}{3}.$$

Следовательно,

$$B=\left(3-\frac{5}{3},\ 3+\frac{10}{3},\ -\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{4}{3},\ \frac{19}{3},\ -\frac{5}{3}\right);$$

$$\overrightarrow{AB}=\left\{\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right\}\sim\{1,\ 1,\ 1\};\ \left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

и параметрическое уравнение прямой AB $x=t,\ \ y=5+t,\ \ z=-3+t$.

Искомая точка C принадлежит прямой AB и отстоит от прямой $x=3+t,\ y=3-2t,\ z=t$ на расстояние $\frac{4}{\sqrt{3}}$. Найдем координаты точки C при помощи соотношения (1.8), в котором $\omega^2=\frac{16}{3},\ \tilde{x}=\{t,\ 5+t,\ -3+t\},\ x_0=\{3,\ 3,\ 0\},\ a=\{1,\ -2,\ 1\}$. Получим

$$\frac{\begin{vmatrix}3t^2-8t+22 & -10\\ -10 & 6\end{vmatrix}}{6}=\frac{16}{3}$$

или $18t^2-48t=0$.

Данное уравнение имеет два корня: $t_1=0$ соответствует точке A, $t_2=\frac{8}{3}$ – точке C. Таким образом,

$$C=\left(\frac{8}{3},\ 5+\frac{8}{3},\ -3+\frac{8}{3}\right)=\left(\frac{8}{3},\ \frac{23}{3},\ -\frac{1}{3}\right).$$

Пример 3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{1}$ параллельно прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.6). Выбрав в качестве

$$M_0=(2,\ -1,\ 1),\ a_1=\{2,\ 3,\ 1\},\ a_2=\{1,\ -1,\ 2\},$$

получим

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 1 \\ y+1 & 3 & -1 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6(x-2)-2(z-1)+(y+1)-3(z-1)+$$

$$+(x-2)-4(y+1)=7x-3y-5z-12=0.$$

В задачах, требующих вычисления скалярных произведений, предполагается, что система координат прямоугольная.

3.1. Проверьте, лежит ли данная прямая в плоскости $x-3y+$ $+z+1=0$, параллельна этой плоскости или пересекает ее в единственной точке; в последнем случае найдите координаты точки пересечения. Прямая задана уравнениями:

а) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{7}$;

б) $\begin{cases} x-y+2z=0, \\ x+y-3z+2=0; \end{cases}$

в) $x=2,\ y=5+t,\ z=4+3t.$

3.2. При каких значениях параметра a прямая $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{a}=\dfrac{z-2}{-1}$

а) пересекает плоскость $3a^2x+ay+z-4a=0$;

б) параллельна этой плоскости;

в) лежит в этой плоскости.

3.3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 6x-17y+11z-19=0, \\ 5x+y+z+4=0 \end{cases}$$

параллельно вектору $a=\{2,\ 3,\ -1\}$.

3.4. Найдите уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{2} \text{ и } \frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-5}{-2}.$$

3.5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A=(1,\ 3,\ 0)$ и параллельной прямым

$$\begin{cases} x+y-z+3=0, \\ 2x-y+5z+1=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -x+y=1, \\ 5x+y-z+2=0. \end{cases}$$

3.6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{2}$ и параллельной прямой $\frac{x}{5}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{3}$.

3.7. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A=(-1,\ 1,\ 2)$ и прямую, заданную уравнениями:

а) $x=1+5t,\ y=-1+t,\ z=2t$;

б) $\begin{cases} x+5y-7z+1=0, \\ 3x-y+2z+3=0. \end{cases}$

3.8. Найдите проекцию точки $Q=(1,\ 3,\ 1)$ на прямую

$$\begin{cases} 2x+y-z-10=0, \\ x+2y+z-11=0. \end{cases}$$

3.9. Составьте параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $P=(2,\ 1,\ -3)$ перпендикулярно плоскости $2x-5y+3z=0$.

3.10. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A=(1,\ -1,\ 2)$ и перпендикулярной плоскости $x=4-u+v,\ \ y=2+u+$ $+2v,\ z=-1+7u+3v$.

3.11. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A=(1,\ 3,\ 1)$ и перпендикулярной прямой

а) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+2}{21}$;

б) $\begin{cases} x+y-z+2=0, \\ 2x+3y+z-1=0. \end{cases}$

3.12. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A=(2,\ 1,\ -1)$ и перпендикулярной двум плоскостям $x-y+5z+1=0$ и $2x+y=3$.

3.13. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M=$ $=(5,\ 1,\ 1)$ перпендикулярно вектору $u=\{1,\ 2,\ 2\}$ и пересекающей прямую

$$\begin{cases} 3x+5y+5z-27=0, \\ x-5y+5z-9=0. \end{cases}$$

3.14. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A = (3,\ -1,\ 2)$ и пересекающей две прямые

$$\begin{cases} x-2z+1=0, \\ y+3z-4=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x+y-1=0, \\ x-z-2=0. \end{cases}$$

3.15. Точка A лежит на прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}.$$

Расстояние от точки A до плоскости $x+y+z+3=0$ равно $\sqrt{3}$. Найдите координаты точки A.

3.16. Составьте уравнение прямой, симметричной прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4}$ относительно плоскости $5x-y+z-4=0$.

3.17. Составьте уравнения проекций на плоскость $x+5y-z-25=0$ следующих прямых:

а) $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$;

б) $\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ 3x-y+2z+2=0; \end{cases}$

в) $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-1}$.

3.18. Найдите угол между плоскостью $4x+4y-7z+1=0$ и прямой:

а) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-7}$;

б) $\frac{x-1}{11} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+3}{4}$.

3.19. Найдите точку, симметричную точке $Q=\left(4,\ -5,\ 4\right)$ относительно плоскости, проходящей через прямые:

$$\begin{cases} x+y+z-3=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+z=0, \\ y=0. \end{cases}$$

3.20. Точка A лежит на прямой

$$\begin{cases} x-y-3=0, \\ 2y+z=0. \end{cases}$$

Расстояние от точки A до прямой $x=y=z$ равно $\sqrt{6}$. Найдите координаты точки A.

3.21. На линии пересечения двух плоскостей $2x+y+z+8=0$, $x-4y-2z-5=0$ найти точки, отстоящие от плоскости $3x-6y+2z-10=0$ на расстояние 5.

3.22. На оси OX найдите точку, равноудаленную от точки $M\left(0,1,-2\right)$ и от плоскости $6x+3y-2z-9=0$.

3.23. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения трех плоскостей $2x-y-z-1=0$, $x+2z-4=0$, $x-y=0$ через начало координат и через точку $M\left(7,1,2\right)$.

3.24. Запишите уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x-y+3=0, \\ 6y+1=0 \end{cases}$$

и пересекающей другую прямую $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{4}$ под углом $45°$.

3.25. Составьте каноническое уравнение прямой, лежащей в плоскости XOZ, проходящей через начало координат и перпендикулярную прямой $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-5}{1}$.

3.26. Через точку пересечения плоскости $3x-y-2z-5=0$ с прямой $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ провести прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную данной прямой.

ГЛАВА 4

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Установим на плоскости прямоугольную систему координат и рассмотрим общее уравнение второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0\,, \qquad (4.1)$$

в котором $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (4.1), называется **кривой (линией) второго порядка**.

Для всякой кривой второго порядка существует прямоугольная система координат, называемая канонической, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих видов:

1) $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geq b > 0}$ **(эллипс);**

2) $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,\ a \geq b > 0}$ **(мнимый эллипс);**

3) $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0}$ **(пара мнимых пересекающихся прямых);**

4) $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ **(гипербола);**

5) $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}$ **(пара пересекающихся прямых);**

6) $\boldsymbol{y^2 = 2px,\ p > 0}$ **(парабола);**

7) $\boldsymbol{y^2 - a^2 = 0,\ a \neq 0}$ **(пара параллельных прямых);**

8) $\boldsymbol{y^2 + a^2 = 0,\ a \neq 0}$ **(пара мнимых параллельных прямых);**

9) $\boldsymbol{y^2 = 0}$ **(пара совпадающих прямых).**

Уравнения 1)–9) называются **каноническими уравнениями кривых второго порядка.**

Решение задачи приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду включает нахождение канонического уравнения кривой и канонической системы координат. Приведение к каноническому виду позволяет вычислить параметры кривой и определить ее расположение относительно исходной системы координат. Переход от исходной прямоугольной системы координат $\left(O,\, e_1,\, e_2\right)$ к канонической $\left(\tilde{O},\, \tilde{e}_1,\, \tilde{e}_2\right)$ осуществляется путем поворота осей исходной системы координат вокруг точки O на некоторый угол φ и последующего параллельного переноса системы координат.

Инвариантами кривой второго порядка (4.1) называются такие функции от коэффициентов ее уравнения, значения которых не меняются при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой такой же системе.

Для кривой второго порядка (4.1) сумма коэффициентов при квадратах координат

$$\boldsymbol{s = a_{11} + a_{22}},$$

определитель, составленный из коэффициентов при старших членах,

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

и определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}$$

являются инвариантами.

Значение инвариантов s, δ, Δ можно использовать для определения типа и составления канонического уравнения кривой второго порядка (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Классификация кривых второго порядка, основанная на инвариантах

$\delta > 0$ Кривая эллиптического типа	$\Delta \neq 0$	$s\Delta < 0$. Эллипс
		$s\Delta > 0$. Мнимый эллипс
	$\Delta = 0$	Пара мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке
$\delta < 0$ Кривая гиперболического типа	$\Delta \neq 0$	Гипербола
	$\Delta = 0$	Пара пересекающихся прямых
$\delta = 0$ Кривая параболического типа	$\Delta \neq 0$	Парабола
	$\Delta = 0$	Пара параллельных прямых (различных, мнимых или совпадающих)

Рассмотрим подробнее эллипс, гиперболу и параболу.

Эллипсом (рис. 4.1) называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых **фокусами эллипса**, есть величина постоянная (бóльшая, чем расстояние между фокусами). При этом не исключается совпадение фокусов эллипса. Если фокусы совпадают, то эллипс представляет собой окружность.

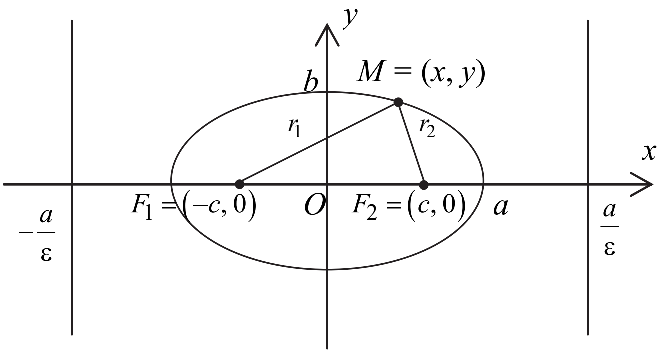

Рис. 4.1

Полусумму расстояний от точки эллипса до его фокусов обозначают через a, половину расстояний между фокусами – c. Если прямоугольная система координат на плоскости выбрана так, что фокусы эллипса располагаются на оси Ox симметрично относительно начала координат, то в этой системе координат эллипс задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4.2}$$

называемым **каноническим уравнением эллипса**, где $b=\sqrt{a^2-c^2}$.

При указанном выборе прямоугольной системы координат эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат. Оси симметрии эллипса называют его **осями**, а центр его симметрии – **центром эллипса**. Вместе с тем часто осями эллипса называют числа $2a$ и $2b$, а числа a и b – **большой** и **малой полуосью** соответственно.

Точки пересечения эллипса с его осями называются **вершинами эллипса**. Вершины эллипса имеют координаты $(a, 0)$, $(–a, 0)$, $(0, b)$, $(0, –b)$.

Эксцентриситетом эллипса называется число

$$\varepsilon=\frac{c}{a}. \tag{4.3}$$

Поскольку $0 \le c < a$, эксцентриситет эллипса $0 \le \varepsilon < 1$, причем у окружности $\varepsilon = 0$. Перепишем равенство (4.3) в виде

$$\varepsilon=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\ .$$

Отсюда видно, что эксцентриситет характеризует форму эллипса: чем ближе ε к нулю, тем больше эллипс похож на окружность; при увеличении ε эллипс становится более вытянутым.

Пусть $M=(x,\ y)$ – произвольная точка эллипса, $r_1=\rho(F_1,\ M)$ и $r_2=\rho(F_2,\ M)$ – расстояния от точки M до фокусов F_1 и F_2 соответственно. Числа r_1 и r_2 называются **фокальными радиусами точки *M* эллипса** и вычисляются по формулам

$$r_1=a+\varepsilon x,\ \ r_2=a-\varepsilon x\ .$$

Директрисами отличного от окружности **эллипса** с каноническим уравнением (3.2) называются две прямые

$$x=-\frac{a}{\varepsilon},\ x=\frac{a}{\varepsilon}.$$

Директрисы эллипса расположены вне эллипса (рис. 4.1).

Отношение фокального радиуса r_i точки М эллипса к расстоянию d_i от этой точки до отвечающей фокусу F_i директрисы равно эксцентриситету ε этого эллипса (фокус и директриса считаются соответствующими, если они расположены по одну сторону от центра эллипса).

Гиперболой (рис. 4.2) называется геометрическое место точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых **фокусами гиперболы**, есть величина постоянная (не равная нулю и меньшая, чем расстояние между фокусами).

Пусть расстояние между фокусами равно $2c$, а указанный модуль разности расстояний равен $2a$. Выберем прямоугольную систему координат так же, как и для эллипса. В этой системе координат гипербола задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4.4}$$

называемым **каноническим уравнением гиперболы**, где $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

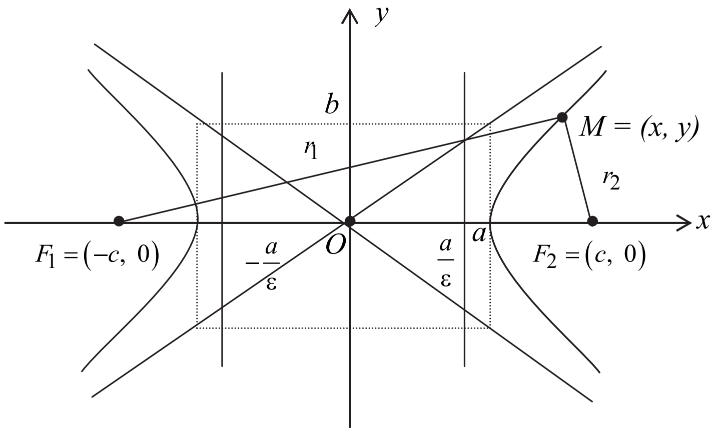

Рис. 4.2

При данном выборе прямоугольной системы координат оси координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – ее центром симметрии. Оси симметрии гиперболы называют ее **осями**, а центр симметрии – **центром гиперболы**. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный, как показано на рис. 3.2, называется **основным прямоугольником гиперболы**. Числа $2a$ и $2b$ – оси гиперболы, а числа a и b – ее **полуоси**. Прямые, являющиеся продолжением диагоналей основного прямоугольника, образуют **асимптоты гиперболы**

$$y = \pm \frac{b}{a} x .$$

Точки пересечения гиперболы с осью OX называются **вершинами гиперболы**. Вершины гиперболы имеют координаты $(a, 0)$, $(-a, 0)$.

Эксцентриситетом гиперболы называется число

$$\varepsilon = \frac{c}{a} . \tag{4.5}$$

Поскольку $c > a$, эксцентриситет гиперболы $\varepsilon > 1$. Перепишем равенство (4.5) в виде

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} .$$

Отсюда видно, что эксцентриситет характеризует форму основного прямоугольника и, следовательно, форму самой гиперболы: чем меньше ε, больше вытягивается основной прямоугольник, а вслед за ним и сама гипербола вдоль оси OX.

Пусть $M = (x, y)$ – произвольная точка гиперболы, $r_1 = \rho(F_1, M)$ и $r_2 = \rho(F_2, M)$ – расстояния от точки M до фокусов F_1 и F_2 соответственно. Числа r_1 и r_2 называются **фокальными радиусами точки *M* гиперболы** и вычисляются по формулам

$$r_1 = \begin{cases} -a - \varepsilon x, & \text{если } x \le -a, \\ a + \varepsilon x, & \text{если } x \ge a; \end{cases}$$

$$r_2 = \begin{cases} a - \varepsilon x, & \text{если } x \le -a, \\ -a + \varepsilon x, & \text{если } x \ge a. \end{cases}$$

Директрисами гиперболы с каноническим уравнением (4.4) называются две прямые

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Директрисы гиперболы пересекают основной прямоугольник и проходят между центром и соответствующей вершиной гиперболы (рис. 4.2).

Отношение фокального радиуса r_i точки M гиперболы к расстоянию d_i от этой точки до отвечающей фокусу F_i директрисы равно эксцентриситету ε этой гиперболы (фокус и директриса считаются соответствующими, если они расположены по одну сторону от центра гиперболы).

Параболой (рис. 4.3) называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F (**фокуса параболы**) этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой (**директрисы параболы**), также расположенной в рассматриваемой плоскости.

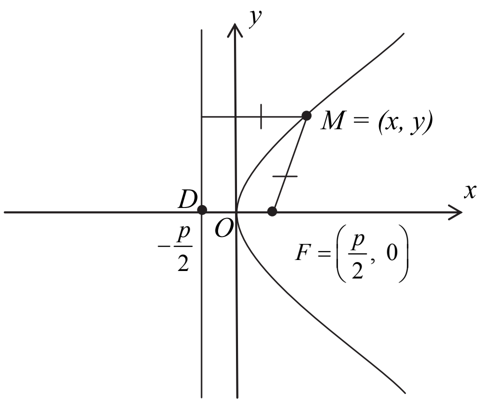

Рис. 4.3

Выберем начало O прямоугольной системы координат в середине отрезка FD, представляющего собой перпендикуляр, опущенный из фокуса F на директрису (предполагается, что фокус не принадлежит директрисе), а оси OX и OY направим так, как показано на рис. 4.3.

Пусть длина отрезка FD равна p. Тогда в выбранной системе координат $F = \left(\frac{p}{2},\ 0 \right)$ и **каноническое уравнение параболы** имеет вид

$$y^2 = 2px\ . \tag{4.6}$$

Величина p называется **параметром параболы**.

Парабола имеет ось симметрии, которая называется **осью параболы**. Точка пересечения параболы с ее осью называется **вершиной параболы**. Если парабола задана своим каноническим уравнением (4.6), то осью параболы является ось OX. Очевидно, вершиной параболы является начало координат.

Пример 1. Точка $A = (2,\ -1)$ принадлежит эллипсу, точка $F = (1,\ 0)$ является его фокусом, соответствующая F директриса задана уравнением $2x - y - 10 = 0$. Составьте уравнение этого эллипса.

Решение. Будем считать систему координат прямоугольной. Тогда расстояние d_A от точки A до директрисы $2x - y - 10 = 0$ в соответствии с соотношением (1.8), в котором $\tilde{x} = \{2,\ -1\}$, $x_0 = \{5,\ 0\}$, $a = \{1,\ 2\}$, равно

$$\sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}}{5}} = \sqrt{\frac{50 - 25}{5}} = \sqrt{5}\ .$$

Расстояние r_A от точки A до фокуса F равно

$$\sqrt{(1-2)^2 + \left(0 - (-1)\right)^2} = \sqrt{2}\ ,$$

что позволяет определить эксцентриситет эллипса

$$\varepsilon = \frac{r_A}{d_A} = \sqrt{\frac{2}{5}}\ .$$

Пусть $M = (x,\ y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда расстояние d_M от точки M до директрисы $2x - y - 10 = 0$ по формуле (1.8) равно

$$\sqrt{\frac{\begin{vmatrix} (x-5)^2+y^2 & x-5+2y \\ x-5+2y & 5 \end{vmatrix}}{5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4x^2-4xy+y^2-40x+20y+100}{5}},$$

а расстояние r_M от точки M до фокуса F равно

$$\sqrt{(1-x)^2+y^2}\,.$$

Поскольку для любой точки эллипса отношение $\frac{r_M}{d_M}$ есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса, отсюда имеем

$$\sqrt{\frac{5\left((1-x)^2+y^2\right)}{4x^2-4xy+y^2-40x+20y+100}} = \sqrt{\frac{2}{5}}\,,$$

или

$$25\left((1-x)^2+y^2\right) = 2\left(4x^2-4xy+y^2-40x+20y+100\right),$$

или

$$17x^2+8xy+23y^2+30x-40y-175=0\,.$$

Пример 2. Кривая задана уравнением

$$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$$

в прямоугольной системе координат. Найдите каноническую систему координат и каноническое уравнение этой кривой. Определите тип кривой.

Решение. Квадратичная форма $5x^2+4xy+8y^2$ имеет матрицу

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен

$$\det\left(A-\lambda I\right)=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 2 & 8-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-13\lambda+36$$

имеет корни $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 9$. Следовательно, в ортонормированном базисе из собственных векторов матрицы A рассматриваемая квадратичная форма имеет канонический вид

$$4\tilde{x}^2+9\tilde{y}^2.$$

Перейдем к построению матрицы ортогонального преобразования переменных, приводящего рассматриваемую квадратичную форму к указанному каноническому виду. Для этого будем строить фундаментальные системы решений однородных систем уравнений $\left(A-\lambda_i I\right)\xi=0$ и ортонормировать их.

При $\lambda_i=4$ эта система имеет вид

$$\begin{cases}\xi_1+2\xi_2=0,\\ 2\xi_1+4\xi_2=0.\end{cases}$$

Ее общим решением является $\xi=\left\{-2\xi_2,\ \xi_2\right\}^{\mathrm{T}}$. Здесь одна свободная переменная. Поэтому фундаментальная система решений состоит из одного вектора, например, из вектора $\tilde{e}_1'=\left\{-2,\ 1\right\}^{\mathrm{T}}$. Нормируя его, получим вектор

$$\tilde{e}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{-2,\ 1\right\}^{\mathrm{T}}.$$

При $\lambda_i=9$ также построим вектор

$$\tilde{e}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{1,\ 2\right\}^{\mathrm{T}}.$$

Векторы $\tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_2$ уже ортогональны, так как относятся к различным собственным значениям симметричной матрицы A. Они составляют канонический ортонормированный базис данной квадратичной формы. Из столбцов их координат строится искомая ортогональная матрица (матрица поворота)

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность нахождения матрицы P по формуле $P^{\mathrm{T}} AP = D$, где $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2)$ – матрица квадратичной формы в базисе $\{\tilde{e}_1,\ \tilde{e}_2\}$:

$$P^{\mathrm{T}} AP = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} P =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(4,\ 9).$$

Матрица P найдена верно.

Выполним преобразование переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

и запишем уравнение данной кривой в новой прямоугольной системе координат со старым центром и направляющими векторами $\{\tilde{e}_1,\ \tilde{e}_2\}$:

$$4\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(-32, -56)\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + 80 =$$

$$= 4\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}\tilde{x} - \frac{144}{\sqrt{5}}\tilde{y} + 80 =$$

$$= 4\left(\tilde{x}^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x}\right) + 9\left(\tilde{y}^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}\tilde{y}\right) + 80 =$$

$$=4\left[\left(\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{1}{5}\right]+9\left[\left(\tilde{y}-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{64}{5}\right]+80=$$

$$=4\left(\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+9\left(\tilde{y}-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2-36=4\tilde{\tilde{x}}^2+9\tilde{\tilde{y}}^2-36=0,$$

где $\tilde{\tilde{x}}=\tilde{x}+\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\tilde{\tilde{y}}=\tilde{y}-\frac{8}{\sqrt{5}}$.

Получили каноническое уравнение эллипса

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{9}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{4}=1.$$

В силу того, что результирующее преобразование прямоугольных координат определяется формулами

$$x=\frac{-2\tilde{x}+\tilde{y}}{\sqrt{5}}=\frac{-2\left(\tilde{\tilde{x}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\left(\tilde{\tilde{y}}+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}=\frac{-2\tilde{\tilde{x}}+\tilde{\tilde{y}}}{\sqrt{5}}+2,$$

$$y=\frac{\tilde{x}+2\tilde{y}}{\sqrt{5}}=\frac{\left(\tilde{\tilde{x}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+2\left(\tilde{\tilde{y}}+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}=\frac{\tilde{\tilde{x}}+2\tilde{\tilde{y}}}{\sqrt{5}}+3,$$

каноническая система координат $\left(\tilde{O},\ \tilde{e}_1,\ \tilde{e}_2\right)$ имеет начало $\tilde{O}=(2,\ 3)$ и направляющие векторы $\tilde{e}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\{-2,\ 1\}^{\mathrm{T}}$, $\tilde{e}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\{1,\ 2\}^{\mathrm{T}}$.

Пример 3. Применяя теорию инвариантов, определите тип и составьте каноническое уравнение кривой

$$x^2+2xy-y^2-6x+4y-3=0.$$

Решение. Поскольку

$$\delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2<0$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 ,$$

в соответствии с табл. 4.1 заключаем, что это – гипербола.

Так как s = 0, характеристический многочлен матрицы квадратичной формы $x^2 + 2xy - y^2$

$$\det\left(A - \lambda I\right) = \lambda^2 - s\lambda + \delta = \lambda^2 - 2 .$$

Его корни $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ и $\lambda_2 = \sqrt{2}$ позволяют записать каноническое уравнение кривой

$$\lambda_1 \tilde{\tilde{x}}^2 + \lambda_2 \tilde{\tilde{y}}^2 + C = -2\sqrt{2}\tilde{\tilde{y}}^2 + C = 0 ,$$

где C находится из условия

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} = \Delta ,$$

или

$$C = \frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\Delta}{\delta} = \frac{1}{2} .$$

Искомое каноническое уравнение кривой

$$2\sqrt{2}\tilde{\tilde{x}}^2 - 2\sqrt{2}\tilde{\tilde{y}}^2 = 1 .$$

4.1. Определите, проходит ли окружность $2x^2 + 2y^2 + x + 2y = 0$ через начало координат.

4.2. Выясните, на какой из координатных осей расположены центры окружностей:

а) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 3y + 2 = 0$.

4.3. Выясните, имеют ли прямая $x=3$ и окружность x^2+y^2+ $+2x-15=0$ общую точку.

4.4. Для эллипсов $25x^2+9y^2=225$ и $9x^2+25y^2=225$ найдите:

а) полуоси;

б) фокусы;

в) эксцентриситет;

г) уравнения директрис.

4.5. Составьте уравнения эллипса, зная его фокус $F_1(2,\ 0)$, соответствующую директрису $x = 8$ и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Найдите второй фокус и вторую директрису эллипса.

4.6. Составьте уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты (1, 0) и (0, 1), а большая ось равна двум.

4.7. Эллипс касается оси OY в точке $A(0,\ 5)$ и пересекает ось OX в точках $B(5,\ 0)$ и $C(11,\ 0)$. Зная, что оси эллипса параллельны координатным осям, составьте уравнение этого эллипса.

4.8. На эллипсе $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$ найдите точки, расстояния которых от левого фокуса больше расстояний от правого фокуса в три раза.

4.9. Запишите уравнение окружности, проходящей через точки $A(-1{,}1)$ и $B(1,\ -3)$, если центр ее лежит на прямой $2x-y+1=0$.

4.10. Определите траекторию точки M, которая движется так, что ее расстояние от дочки $A(4,\ 0)$ остается вдвое меньше расстояния от точки $B(-8,\ 0)$.

4.11. Дана гипербола $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$. Найдите:

а) полуоси a и b;

б) фокусы;

в) эксцентриситет;

г) уравнения асимптот;

д) уравнения директрис.

4.12. Дана гипербола $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{64}=-1$. Найдите:

а) полуоси a и b;

б) фокусы;

в) эксцентриситет;

г) уравнения асимптот;

д) уравнения директрис.

4.13. Определите, на какой из координатных осей находятся фокусы гиперболы:

а) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$;

б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$.

4.14. Точка $M_1=(1,\ -2)$ принадлежит гиперболе, фокус которой $F=(-2,\ 2)$, а соответствующая директриса задана уравнением $2x-y-1=0$. Составьте уравнение этой гиперболы.

4.15. Вычислите площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $x^2-y^2=1$ и прямой $x=1$.

4.16. Составьте уравнение параболы, если даны ее фокус $F=(-2,\ 1)$ и директриса $x+y-1=0$.

4.17. Даны вершина параболы $A=(2,\ 1)$ и уравнение директрисы $2x-y+2=0$. Составьте уравнение этой параболы.

4.18. Запишите уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2-4x=0$ и симметрична относительно оси OY.

4.19. Составьте уравнение параболы, фокус которой находится в точке

$$F=\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$$

и директриса задана уравнением $3x-3y+8=0$.

4.20. Составьте уравнение кривой второго порядка, зная ее эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{5}$, фокус $F=(1,\ 1)$ и соответствующую директрису $x+2y-1=0$.

4.21. Определите тип кривой второго порядка, составьте ее каноническое уравнение и найдите каноническую систему координат:

а) $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$;

б) $4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$;

в) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0$;

г) $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$;

д) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

е) $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

ж) $8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0$;

з) $25x^2 - 30xy + 9y^2 + 68x + 19 = 0$;

и) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0$;

к) $15x^2 + 24xy + 15y^2 + 30x + 24y + 20 = 0$;

л) $15x^2 - 16xy - 15y^2 - 62x - 44y - 13 = 0$.

4.22. Докажите, что кривая второго порядка, заданная уравнением

$$34x^2 + 24xy + 41y^2 - 44x + 58y + 1 = 0,$$

является эллипсом. Найдите длины полуосей и эксцентриситет этого эллипса, координаты центра и фокусов, составьте уравнения осей и директрис.

4.23. Докажите, что кривая второго порядка, заданная уравнением

$$7x^2 + 48xy - 7y^2 - 62x - 34y + 98 = 0,$$

является гиперболой. Найдите длины полуосей и эксцентриситет этой гиперболы, координаты центра и фокусов, составьте уравнения осей, директрис и асимптот.

4.24. Докажите, что кривая второго порядка, заданная уравнением

$$x^2 + 2xy + y^2 + x = 0,$$

является параболой. Найдите параметр этой параболы, координаты вершины и фокуса, составьте уравнения оси и директрисы.

4.25. Каждое из следующих уравнений приведите к каноническому виду. Изобразите на чертеже соответствующую кривую второго порядка относительно исходной прямоугольной системы координат:

а) $9x^2 + 4y^2 + 36x - 40y + 100 = 0$;

б) $16x^2 - 25y^2 + 32x - 100y - 84 = 0$;

в) $5x^2 + 5y^2 + 6xy + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 30 = 0$;

г) $x^2 + y^2 - 2xy + 12\sqrt{2}y + 18 = 0$;

д) $7x^2 - 50xy + 7y^2 + 32\sqrt{2}x - 32\sqrt{2}y + 320 = 0$;

е) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;

ж) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 400 = 0$;

з) $17x^2 - 30xy + 17y^2 - 6\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y - 14 = 0$;

и) $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 30 = 0$.

4.26. Применяя теорию инвариантов, определите тип и составьте каноническое уравнение кривой:

а) $x^2 + 3xy - 3y^2 + 5x - 7y + 1 = 0$;

б) $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 12x + 20y + 32 = 0$;

в) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + 13 = 0$;

г) $5x^2 + 4xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;

д) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

е) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x + 16y + 3 = 0$.

ГЛАВА 5

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Геометрическое место точек трехмерного пространства, координаты которых в некоторой прямоугольной системе координат $\left(O,\ e_1,\ e_2,\ e_3\right)$ удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz +$$

$$+2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0, \qquad (5.1)$$

где хотя бы один из коэффициентов a_{ij} не равен нулю, называется **поверхностью второго порядка**.

Для любой поверхности второго порядка существует прямоугольная система координат $\left(\tilde{O},\ \tilde{e}_1,\ \tilde{e}_2,\ \tilde{e}_3\right)$, в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих видов:

1) эллипсоид $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2} + \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2} + \frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{c^2} = 1$ (рис. 5.1);

2) мнимый эллипсоид $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2} + \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2} + \frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{c^2} = -1$;

3) однополостный гиперболоид $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2} + \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2} - \frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{c^2} = 1$ (рис. 5.2);

4) двуполостный гиперболоид $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2} + \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2} - \frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{c^2} = -1$ (рис. 5.3);

5) конус $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2} + \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2} - \frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{c^2} = 0$ (рис. 5.4);

6) мнимый конус $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2} + \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2} + \frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{c^2} = 0$;

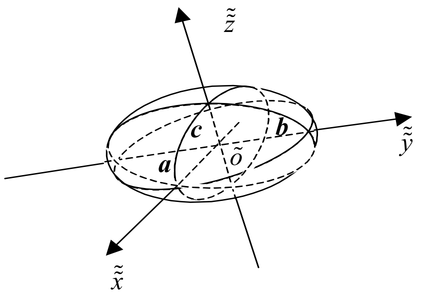

Рис. 5.1

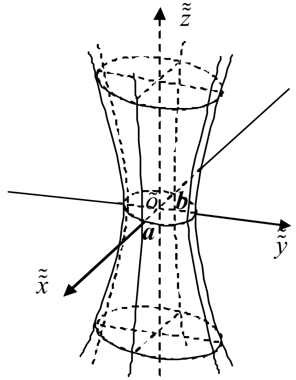

Рис. 5.2

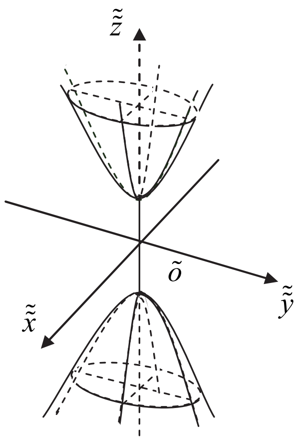

Рис. 5.3

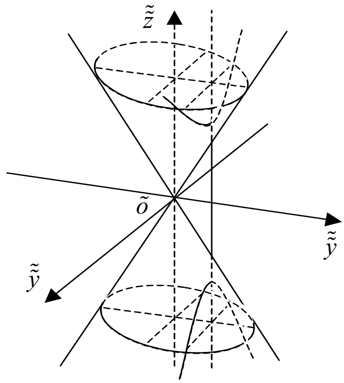

Рис. 5.4

7) эллиптический параболоид $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}+\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}=2\tilde{\tilde{z}}$ (рис. 5.5)**;**

8) гиперболический параболоид $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}-\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}=2\tilde{\tilde{z}}$ (рис. 5.6)**;**

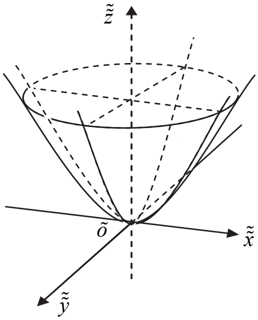

Рис. 5.5

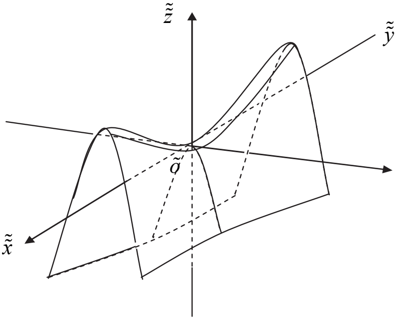

Рис. 5.6

9) эллиптический цилиндр $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}+\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}=1$ (рис. 5.7)**;**

10) мнимый эллиптический цилиндр $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}+\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}=-1$ **;**

11) гиперболический цилиндр $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}-\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}=1$ (рис. 5.8)**;**

12) параболический цилиндр $\tilde{\tilde{y}}^2=2p\tilde{\tilde{x}},\ p>0$ (рис. 5.9)**;**

13) пара пересекающихся плоскостей $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}-\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}=0$ **;**

14) пара мнимых пересекающихся плоскостей $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{a^2}+\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{b^2}=0$ **;**

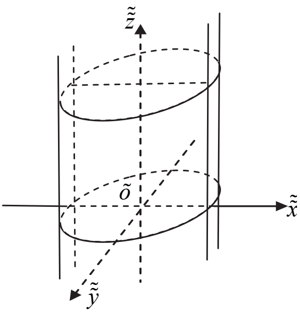

Рис. 5.7

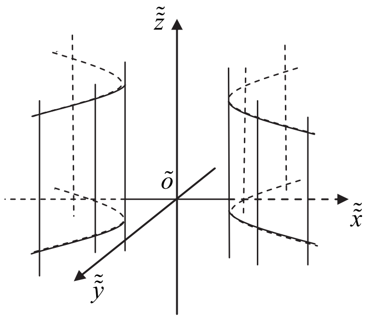

Рис. 5.8

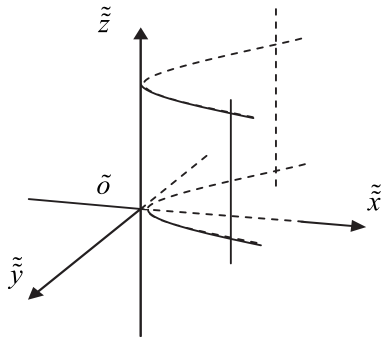

Рис. 5.9

15) пара параллельных плоскостей $\tilde{\tilde{y}}^2 = a^2 \ \left(a \neq 0\right)$**;**

16) пара мнимых параллельных плоскостей $\tilde{\tilde{y}}^2 + a^2 = 0 \ \left(a \neq 0\right)$**;**

17) пара совпадающих плоскостей $\tilde{\tilde{y}}^2 = 0$ **.**

Уравнения 1)–17) называются **каноническими уравнениями поверхностей второго порядка**.

При преобразовании уравнения поверхности второго порядка (5.1) можно, как и в случае кривой второго порядка, использовать инварианты. **Инвариантами поверхностей второго порядка** являются

$$s_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}.$$

Их значения не меняются при повороте и параллельном переносе осей координат.

Пример 1. Поверхность задана уравнением в прямоугольной системе координат

$$x^2+5y^2+z^2-2xy+6xz-2yz-2x-6y+2z=0\,.$$

Найдите каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определите тип поверхности.

Решение. Найдем сначала ортогональное преобразование переменных, приводящее матрицу A квадратичной формы $x^2+5y^2+z^2-$ $-2xy+6xz-2yz$ к диагональному виду.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен

$$\det\left(A-\lambda I\right)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 3\\ -1 & 5-\lambda & -1\\ 3 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda^3+7\lambda^2-36=-\left(\lambda+2\right)\left(\lambda-3\right)\left(\lambda-6\right).$$

Следовательно, матрица A имеет собственные значения

$$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=6\,.$$

Для нахождения собственных векторов матрицы A решаем однородные системы линейных уравнений с матрицами $A+2I$, $A-3I$, $A-6I$ соответственно и выделяем по одному ненулевому решению:

$$A+2I=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ -1 & 7 & -1\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -7 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -7 & 1\\ 0 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -7 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}_1' = \{1,\ 0,\ -1\}^{\mathrm{T}};$$

$$A-3I=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 3\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -5 & 5\\ 0 & 5 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}_2' = \{1,\ 1,\ 1\}^{\mathrm{T}};$$

$$A-6I=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 3\\ -1 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -5 & -1 & 3\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 8\\ 0 & -4 & -8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\tilde{e}_3' = \{1,\ -2,\ 1\}^{\mathrm{T}}.$$

Векторы $\tilde{e}_1'$, $\tilde{e}_2'$, $\tilde{e}_3'$ ортогональны друг другу как собственные векторы симметричной матрицы, соответствующие различным собственным значениям. Нормируя их, получаем

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1,\ 0,\ -1\}^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1,\ 1,\ 1\}^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\{1,\ -2,\ 1\}^{\mathrm{T}}$$

и матрицу перехода P к новому ортонормированному базису

$$P = \left(\tilde{e}_1 \middle| \tilde{e}_2 \middle| \tilde{e}_3\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность нахождения матрицы P:

$$P^{\mathrm{T}} A P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} P =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 6 & -12 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\}.$$

Матрица P найдена верно.

Применяя к исходному уравнению ортогональное преобразование координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix},$$

получаем новое уравнение поверхности в прямоугольной системе координат со старым центром O и направляющими векторами $\{\tilde{e}_1,\ \tilde{e}_2,\ \tilde{e}_3\}$:

$$-2\tilde{x}^2+3\tilde{y}^2+6\tilde{z}^2+\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,\ -6,\ 2)\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -2\\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\\ \tilde{z}\end{pmatrix}=$$

$$=-2\tilde{x}^2+3\tilde{y}^2+6\tilde{z}^2-2\sqrt{2}\tilde{x}-2\sqrt{3}\tilde{y}+2\sqrt{6}\tilde{z}=$$

$$=-2\left(\tilde{x}^2+\sqrt{2}\tilde{x}\right)+3\left(\tilde{y}^2-2\frac{\sqrt{3}}{3}\tilde{y}\right)+6\left(\tilde{z}^2+2\frac{\sqrt{6}}{6}\tilde{z}\right)=$$

$$=-2\left[\left(\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right]+3\left[\left(\tilde{y}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\right]+6\left[\left(\tilde{z}+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2-\frac{1}{6}\right]=$$

$$=-2\left(\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+3\left(\tilde{y}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+6\left(\tilde{z}+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2+1-1-1=$$

$$=-2\left(\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+3\left(\tilde{y}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+6\left(\tilde{z}+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2-1=0\,.$$

Выполняя параллельный перенос системы координат $\left(O,\ \tilde{e}_1,\ \tilde{e}_2,\ \tilde{e}_3\right)$ по формулам

$$\tilde{\tilde{x}}=\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2},\ \tilde{\tilde{y}}=\tilde{y}-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \tilde{\tilde{z}}=\tilde{z}+\frac{\sqrt{6}}{6},$$

приходим к уравнению

$$-2\tilde{\tilde{x}}^2+3\tilde{\tilde{y}}^2+6\tilde{\tilde{z}}^2=1,$$

или

$$-\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{\left(1/\sqrt{2}\right)^2}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{\left(1/\sqrt{3}\right)^2}+\frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{\left(1/\sqrt{6}\right)^2}=1.$$

Это – каноническое уравнение однополостного гиперболоида в прямоугольной системе координат $\left(\tilde{O},\ \tilde{e}_1,\ \tilde{e}_2,\ \tilde{e}_3\right)$.

Вычислим координаты начала $\tilde{O}$ канонической системы координат в старой прямоугольной системе координат. Поскольку

$$P\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ -\dfrac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{O} = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right).$$

Пример 2. Исследуйте поверхность второго порядка, заданную в прямоугольной системе координат уравнением

$$9y^2 + 16z^2 + 24yz + 5x + 10y + 5z + 11 = 0 .$$

Решение. Начнем с приведения квадратичной формы $9y^2 + 16z^2 + {}$ $+24yz$ к каноническому виду. Матрицей этой квадратичной формы является матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен

$$\det\left(A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & 12 \\ 0 & 12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2\left(\lambda - 25\right)$$

имеет корни $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. При каждом λ_i будем строить фундаментальную систему решений систем уравнений $\left(A - \lambda_i I\right)\xi = 0$ и ортонормировать их.

При $\lambda_i = 25$ эта система имеет вид

$$\begin{cases} -25\xi_1 = 0, \\ -16\xi_2 + 12\xi_3 = 0, \\ 12\xi_2 - 9\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение $\xi = \left\{0,\ \dfrac{3}{4}\xi_3,\ \xi_3\right\}^{\mathrm{T}}$ имеет одну свободную переменную. Поэтому фундаментальная система решений состоит из одного решения, например из решения $\tilde{e}_1' = \{0,\ 3,\ 4\}^{\mathrm{T}}$. Нормируя его, получим $\tilde{e}_1 = \dfrac{1}{5}\{0,\ 3,\ 4\}^{\mathrm{T}}$.

При $\lambda_i = 0$ рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{cases} 9\xi_2 + 12\xi_3 = 0, \\ 12\xi_2 + 16\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение $\xi = \left\{\xi_1,\ -\dfrac{4}{3}\xi_3,\ \xi_3\right\}^{\mathrm{T}}$ имеет две свободные переменные. Поэтому фундаментальная система решений состоит из двух решений, например из решений $\tilde{e}_2' = \{1,\ 0,\ 0\}^{\mathrm{T}}$ и $\tilde{e}_3' = \{0,\ -4,\ 3\}^{\mathrm{T}}$. Поскольку $\tilde{e}_2'$ и $\tilde{e}_3'$ выбраны ортогональными друг к другу (в противном случае требовалось применение процедуры ортогонализации Грама–Шмидта), остается их лишь нормировать. После нормировки получим

$$\tilde{e}_2 = \{1,\ 0,\ 0\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3 = \frac{1}{5}\{0,\ -4,\ 3\}^{\mathrm{T}}.$$

Из столбцов координат векторов $\tilde{e}_1,\ \tilde{e}_2,\ \tilde{e}_3$ составим матрицу перехода P к новому ортонормированному базису

$$P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

и сделаем проверку:

$$P^{\mathrm{T}}AP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix}P =$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 75 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\}.$$

Выполним преобразование координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

и запишем уравнение данной поверхности в новой прямоугольной системе координат со старым центром O и направляющими векторами $\{\tilde{e}_1,\ \tilde{e}_2,\ \tilde{e}_3\}$:

$$25x^2 + \frac{1}{5}(5,\ 10,\ 5)\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + 11 =$$

$$= 25\tilde{x}^2 + 10\tilde{x} + 5\tilde{y} - 5\tilde{z} + 11 = 25\left(\tilde{x}^2 + \frac{2}{5}\tilde{x}\right) + 5\tilde{y} - 5\tilde{z} + 11 =$$

$$= 25\left[\left(\tilde{x}+\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25}\right] + 5\tilde{y} - 5\tilde{z} + 11 = 25\left(\tilde{x}+\frac{1}{5}\right)^2 + 5\tilde{y} - 5\tilde{z} + 10 =$$

$$= 25\left(\tilde{x}+\frac{1}{5}\right)^2 - 2\left(-\frac{5}{2}\tilde{y} + \frac{5}{2}\tilde{z} - 5\right) = 0.$$

Теперь совершим преобразование координат, полагая

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \frac{1}{5},$$

$$\tilde{\tilde{y}} = \frac{-\frac{5}{2}\tilde{y} + \frac{5}{2}\tilde{z} - 5}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}} = \frac{-\tilde{y} + \tilde{z} - 2}{\sqrt{2}},$$

$$\tilde{\tilde{z}} = \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y} + \gamma\tilde{z}.$$

При этом коэффициенты α, β, γ выберем так, чтобы матрица формул рассматриваемого преобразования координат была ортогональной, т. е. чтобы векторы-строки

$$a_1 = (1,\ 0,\ 0),\ a_2 = \left(0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ a_3 = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

составляли ортонормированную систему векторов. Так как система векторов a_1, a_2 ортонормированная, то координаты вектора a_3 следует искать из условий

$$\begin{cases} (a_1,\ a_3) = \alpha = 0, \\ (a_2,\ a_3) = -\dfrac{\beta}{\sqrt{2}} + \dfrac{\gamma}{\sqrt{2}} = 0. \end{cases}$$

Затем найденный вектор a_3 нужно еще нормировать. Проделав это, получим

$$\alpha = 0,\ \beta = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Следовательно, формулы рассматриваемого преобразования координат имеют вид

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \frac{1}{5},$$

$$\tilde{\tilde{y}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{z} - \sqrt{2}\,,$$

$$\tilde{\tilde{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{z}\,,$$

или

$$\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}} - \frac{1}{5},$$

$$\tilde{y} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{z}} - 1,$$

$$\tilde{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{z}} + 1\,.$$

В новых координатах рассматриваемая поверхность имеет уравнение

$$25\tilde{\tilde{x}}^2 - 2\left[-\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{z}} - 1\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{y}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\tilde{z}} + 1\right) - 5\right] =$$

$$= 25\tilde{\tilde{x}}^2 - 2\left[\left(\frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\tilde{\tilde{y}} + \left(-\frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\tilde{\tilde{z}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 5\right)\right] = 25\tilde{\tilde{x}}^2 - 5\sqrt{2}\tilde{\tilde{y}} = 0\,,$$

или

$$25\tilde{\tilde{x}}^2 = 5\sqrt{2}\tilde{\tilde{y}}\,.$$

Это – каноническое уравнение параболического цилиндра в прямоугольной системе координат $\left(\tilde{O},\, \tilde{\tilde{e}}_1,\, \tilde{\tilde{e}}_2,\, \tilde{\tilde{e}}_3\right)$.

Поскольку

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & -4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & -4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{\tilde{y}} \\ \tilde{\tilde{z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 3/5 & -4/\left(5\sqrt{2}\right) & -4/\left(5\sqrt{2}\right) \\ 4/5 & 3/\left(5\sqrt{2}\right) & 3/\left(5\sqrt{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{\tilde{y}} \\ \tilde{\tilde{z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -23/25 \\ 11/25 \end{pmatrix},$$

каноническая система координат $\left(\tilde{O},\, \tilde{\tilde{e}}_1,\, \tilde{\tilde{e}}_2,\, \tilde{\tilde{e}}_3\right)$ имеет начало $\tilde{O} = \left(-1,\, -\frac{23}{25},\, \frac{11}{25}\right)$ и направляющие векторы $\tilde{\tilde{e}}_1 = \left\{0,\, \frac{3}{5},\, \frac{4}{5}\right\}^{\mathrm{T}}$, $\tilde{\tilde{e}}_2 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\, -\frac{4}{5\sqrt{2}},\, \frac{3}{5\sqrt{2}}\right\}^{\mathrm{T}}$, $\tilde{\tilde{e}}_3 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\, -\frac{4}{5\sqrt{2}},\, \frac{3}{5\sqrt{2}}\right\}^{\mathrm{T}}$.

В задачах этого параграфа рассматриваются только прямоугольные системы координат.

5.1. Семейство поверхностей задано уравнением, содержащим произвольный параметр λ. Определите тип поверхности при всевозможных λ:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$;

б) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

в) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$;

г) $x^2 + y^2 - z^2 = \lambda$;

д) $x^2 - y^2 - z^2 = \lambda$;

е) $x^2 + \lambda\left(y^2 + z^2\right) = 1$;

ж) $x^2 + \lambda\left(y^2 + z^2\right) = \lambda$;

з) $x^2 + y^2 = \lambda z$;

и) $\lambda x^2 + y^2 = z$;

к) $\lambda\left(x^2 + y^2\right) = z$;

л) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z$;

м) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z + 1$;

н) $x^2 + y^2 = \lambda$;

о) $x^2 - y^2 = \lambda$.

5.2. а) Сечения поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость *OYZ*. Изобразите проекции.

б) Сечения поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$ плоскостями $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ спроектированы на плоскость *OYZ*. Изобразите проекции.

в) Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ спроектированы на плоскость *OYZ*. Изобразите проекции.

г) Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$ спроектированы на плоскость *OXZ*. Изобразите проекции.

д) Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$ спроектированы на плоскость *OXY*. Изобразите проекции.

5.3. а) Сечения поверхностей $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$, $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$, $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 1 = 0$ плоскостью $x = 0$ спроектированы на плоскость *OYZ*. Изобразите проекции.

б) Сечения тех же поверхностей плоскостью $z=1$ спроектированы на плоскость OXY. Изобразите проекции.

5.4. По какой линии плоскость $x+y-z+3=0$ пересекает следующую поверхность:

а) $z=-4y^2-6x+15$;

б) $z=x^2+3y^2+1$;

в) $2xy+15x-30=0$;

г) $x^2+y^2-2z^2-2xy+2z=0$;

д) $4x^2-y^2-2xz-6z+1=0$?

5.5. Установите, что плоскость $x+4=0$ пересекает эллипсоид

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}+\frac{z^2}{16}=1$$

по эллипсу, и найдите его вершины и полуоси.

5.6. Найдите параметр и вершину параболы, получающейся в пересечении плоскости $y-12=0$ и гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{8}=6z.$$

5.7. Покажите, что плоскость $y=3$ пересекает однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{18}-\frac{z^2}{4}=1$$

по гиперболе. Найдите полуоси и вершины этой гиперболы.

5.8. Определите, лежит ли точка $A(1,1,1)$ внутри или вне эллипсоида $x^2+2y^2+3z^2=4$.

5.9. Направляющая конуса задана уравнениями $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, $z=0$, а вершина находится в точке $A(0,-3,4)$. Составьте уравнение конуса.

5.10. Найдите точки пересечения сферы $(x-4)^2+(y+5)^2+$ $+(z-6)^2=81$ и прямой $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-4}{-2}$.

5.11. Определите тип поверхности в зависимости от параметра λ

$$x^2-2y^2-3z^2-4xy-6xz-2x+4y+6z+\lambda=0$$

5.12. Приведите уравнения к каноническому виду при помощи перехода к новой прямоугольной системе координат и выясните расположение относительно исходной прямоугольной системы координат следующих поверхностей второго порядка:

а) $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-2x-2y-16z+53=0$;

б) $xy+xz+yz+2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-2\sqrt{2}z-100=0$;

в) $x^2+4y^2+z^2+4xy-2xz-4yz-2x-6y+6z=0$;

г) $4x^2-6y^2+4z^2-4xz-8y-4z-3=0$;

д) $5x^2+7y^2+6z^2+4xz+4yz+10x+14y+8z-6=0$;

е) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x=0$;

ж) $-8x^2+4y^2+4z^2+4xy+4xz-10yz+12x+24y+24z-9=0$;

з) $-18x^2-32z^2+40xy-48xz-30yz+20x-100y-140z-250=0$;

и) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0$;

к) $\dfrac{7}{2}x^2+\dfrac{7}{2}y^2+8z^2-5xy-4xz-4yz-8x-8y-4z+36=0$;

л) $17x^2+17y^2+11z^2-16xy+8xz-8yz-2x+34y-44z+57=0$;

м) $11x^2+2y^2+5z^2+4xy-16xz+20yz+22x-68y-34z+62=0$;

н) $4x^2+y^2+4z^2-4xy-8xz+4yz-14x+y+8z+30=0$;

о) $-xy+xz+yz+2x+2y-2z=0$;

п) $y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0$;

р) $3x^2+12y^2+27z^2-12xy+18xz-36yz-3x+6y-9z-18=0$.

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1. а) $x = 3 + t, \quad y = -1 - 2t$;

б) $x = -1 - 2t, \quad y = 2$.

1.2. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-3}{4}; \quad x = 1 + 3t, y = 3 + 4t.$

1.3. а) $135°$;

б) $45°$.

1.4. а) 2;

б) $\dfrac{5}{2}$.

1.5. $(4, 2)$.

1.6. $\{-15, 20\}$.

1.7. $M_1 = (0, -9)$, $M_2 = (0, -3)$.

1.8. $\operatorname{arctg}\dfrac{8}{9}$, $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$, $\operatorname{arctg} 3$.

1.9. $2x - y - 7 = 0$, $5x + 3y - 1 = 0$, $3x + 4y - 16 = 0$.

1.10. $3x - y + 2 = 0$, $-x - 3y + 2 = 0$.

1.11. $\alpha = 1$, $\beta = -1$.

1.12. Стороны: $3x - 4y + 32 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$, $4x + 3y - 24 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$; диагональ: $x + 7y - 31 = 0$.

1.13. $2x + 3y - 19 = 0$, $8x - 11y - 7 = 0$, $2x + 3y + 27 = 0$,
$8x - 11y + 39 = 0$.

1.14. $M_1 = (-12, 5)$.

1.15. $2x+7y-5=0$.

1.16. $2x+3y-5=0$.

1.17. $M=(5,7)$.

1.18. $77x-33y+133=0$.

1.19. $91x-26y-2=0$.

1.20. $P=\left(\frac{17}{2},\frac{21}{4}\right)$.

1.21. (3, 11).

1.22. $M_1=(3,5), M_2=(-37,45)$.

1.23. $3x-y-1=0$, $3x-y-21=0$.

1.24. $7x+y+4=0$, $x-7y+6=0$.

1.25. $y-1=0$.

1.26. $x^2-6y+9=0$.

1.27. $y^2-8x+16=0$.

1.28. $5x-3y+17=0$.

1.29. $6x-8y-45=0$.

1.30. а) параллельны;
б) пересекаются в точке (–3, 5, –5).

1.31. а) $a=3$;
б) $a\neq\pm1$, $a\neq3$;
в) $a=-1$;
г) $a=1$.

1.32. а) $x=8t,\quad y=65t,\quad z=49t$;
б) $x=-1-5t,\quad y=1-27t,\quad z=-1+22t$;
в) $x=-3+4t,\quad y=3-t,\quad z=3-t$.

1.33. $A=(1,-3,2)$.

1.34. $x=72+8t, y=55+7t, z=t$.

1.35. а) 90°;
б) 0.

1.36. а) $3; (4, -3, 1); B = (6, -5, 2); \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$;

б) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$; $\left(\frac{31}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{16}{9}\right)$; $B = \left(\frac{44}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{32}{9}\right)$; $\frac{x-2}{13} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-16}$.

1.37. $\left(\frac{11}{3}, \frac{17}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

1.38. $(3, 1, 3)$.

1.39. а) $\frac{\sqrt{26}}{7}$;

б) $\sqrt{62}$.

1.40. а) $x = 9 - t,\ y = -5 + 2t,\ z = 1 + 3t; (5, 3, 13)$ и $(6, 1, 10); \sqrt{14}$;

б) $x = 3 + 2t,\ y = 1 + t,\ z = 1 + 4t; (7, 3, 9)$ и $(3, 1, 1); 2\sqrt{21}$.

1.41. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

1.42. $\frac{4\sqrt{29}}{29}$.

1.43. $\frac{x-3}{0} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-6}{1}$.

1.44. $x = c + dt$, где $d = \{1, 1, 0, 3\}$; $M_1 = (2, 3, 2, 1)$, $M_2 = (1, 2, 2, -2)$.

1.45. а) $(-2, -5, -1, 1, -1)$;

б) $(0, 1, -1, -2, -3)$.

Глава 2

2.1. $x - 2y - z = 0$.

2.2. $2x - 6y - z - 34 = 0$.

2.3. $2x - y - 1 = 0$.

2.4. $2x-5y+7z-8=0$.

2.5. а) $x=1+2u-v,\quad y=1+3u+v,\quad z=2+u$;

б) $x=1-2u+3v,\quad y=1+u-3v,\quad z=1-4u+v$;

в) $x=-1+2u-3v,\quad y=u,\quad z=v$.

2.6. а) Параллельны;

б) совпадают;

в) пересекаются по прямой.

2.7. (5, 0, 0), (0, –5, 0), (0, 0, 5).

2.8. $7x+y+5z-4=0$.

2.10. Да, являются.

2.11. $x=1+u+v,\quad y=1+u-v,\quad z=1+u+v$.

2.12. (0, 2, 0).

2.13. $x=1+3u,\quad y=-4-13u+14v,\quad z=3v$.

2.14. $x-2=0,\quad y-3=0,\quad z-5=0$.

2.15. а) $z-4=0$;

б) $3x+2y=0$;

в) $5x+z-19=0$.

2.16. а) $a \neq \pm 3$;

б) $a=3$;

в) $a=-3$.

2.17. а) $\sqrt{3}$;

б) 1;

в) $\frac{1}{3}$;

г) 1.

2.18. а) 2;

б) 5;

в) $\frac{3}{10}$.

2.19. а) $6x-3y+2z+26=0$ и $6x-3y+2z-16=0$;

б) $x+3y-z+4\sqrt{11}=0$ и $x+3y-z-2\sqrt{11}=0$;

в) $2x+2y-z+2=0$ и $2x+2y-z-16=0$;

г) $3x+z\pm 15=0$.

2.20. $2x+y+2z-9=0, z-2=0$.

2.21. а) $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$;

б) $\arccos\dfrac{2}{3}$;

в) 90°.

2.22. $y-z-3=0$.

Глава 3

3.1. а) Прямая лежит в плоскости;

б) пересечение в точке $\left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$;

в) прямая параллельна плоскости.

3.2. а) $a\neq\pm\dfrac{1}{2}$;

б) $a=-\dfrac{1}{2}$;

в) $a=\dfrac{1}{2}$.

3.3. $x=-1+4u+2v, \quad y=-4+7u+3v, \quad z=5-27u-v$.

3.4. $x=3-2u+v, \quad y=1+u-2v, \quad z=3+2u+2v$.

3.5. $39x+27y-11z-120=0$.

3.6. $4x+y-8z+6=0$.

3.7. а) $x+7y-6z+6=0$;

б) $10x+2y-z+10=0$.

3.8. (3, 4, 0).

3.9. $x = 2 + 2t, \quad y = 1 - 5t, \quad z = -3 + 3t$.

3.10. $\dfrac{x-1}{11} = \dfrac{y+1}{-10} = \dfrac{z-2}{3}$.

3.11. а) $3x + 4y + 21z - 36 = 0$;

б) $4x - 3y + z + 4 = 0$.

3.12. $5x - 10y - 3z - 3 = 0$.

3.13. $x = 5 - 4t, \quad y = 1 + t, \quad z = 1 + t$.

3.14. $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-18} = \dfrac{z-2}{1}$.

3.15. (1, 0, –1) или (–1, –3, –2).

3.16. $\dfrac{x+5}{-11} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-4}{8}$.

3.17. а) $x = 97t, \quad y = 5 - t, \quad z = 92t$;

б) $x = -\dfrac{1}{3} - t, \quad y = 5 + t, \quad z = -\dfrac{1}{3} + 4t$;

в) единственная точка (0, 5, 0).

3.18. а) 90°;

б) 0.

3.19. $A = (-2, 7, -2)$.

3.20. (3, 0, 0) или (2, –1, 2).

3.21. $M_1 = (-5, -7, 9)$, $M_2 = \left(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{3}, -6\right)$.

3.22. $M_1 = (-2, 0, 0)$, $M_2 = \left(-6\dfrac{4}{13}, 0, 0\right)$.

3.23. $x + y - 4z = 0$.

3.24. $2x + 4y + 7 = 0$.

3.25. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{-3}$.

3.26. $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-1}{-4}$.

Глава 4

4.1. Да.

4.2. а) На оси OX;

б) на оси OY.

4.3. Да, (3, 0).

4.4. а) 3 и 5, 5 и 3;

б) $F_1 = (0, -4), \quad F_2 = (0, 4), \quad F_1 = (-4, 0), \quad F_2 = (4, 0)$;

в) $\varepsilon = \dfrac{4}{5}$;

г) $y = \dfrac{25}{4}, \quad y = -\dfrac{25}{4}, \quad x = \dfrac{25}{4}, \quad x = -\dfrac{25}{4}$.

4.5. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1, \quad F = (-2, 0), \quad x = -8$.

4.6. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$.

4.7. $\dfrac{(x-8)^2}{64} + \dfrac{(y-5)^2}{320/11} = 1$.

4.8. $M_1 = \left(\dfrac{18}{5}, \dfrac{4\sqrt{11}}{5}\right), \; M_2 = \left(\dfrac{18}{5}, -\dfrac{4\sqrt{11}}{5}\right)$.

4.9. $\left(x + \dfrac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{65}{9}$.

4.10. $x^2 + y^2 - 16x = 0$

4.11. а) a = 5, b = 12;

б) $F_1 = (13, 0), \quad F_2 = (-13, 0)$;

в) $\varepsilon = \dfrac{13}{5}$;

г) $y = \dfrac{12}{5}x$ и $y = -\dfrac{12}{5}x$;

д) $x = \dfrac{25}{13}$ и $x = -\dfrac{25}{13}$.

4.12. а) a = 15, b = 8;

б) $F_1=(0,17)$, $F_2=(0,-17)$;

в) $\varepsilon=\frac{17}{8}$;

г) $y=\frac{8}{25}x$ и $y=-\frac{8}{25}x$;

д) $y=\frac{64}{17}$ и $y=-\frac{64}{17}$.

4.13. а) На оси OX;

б) на оси OY.

4.14. $91x^2-100xy+16y^2-136x+86y-47=0$.

4.15. 1.

4.16. $x^2+y^2-2xy+10x-2y+9=0$.

4.17. $x^2+4y^2+4xy-48x+4y+76=0$.

4.18. $x^2=-2y,\ 2y-1=0$.

4.19. $x^2+y^2+2xy-4x+8y-6=0$.

4.20. $4xy+3y^2-2y-1=0$.

4.21.

а) Эллипс

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{2}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{1/3}=1;\ \tilde{O}=(-3,-1),\ \tilde{e}_1=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2=\left\{-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}^{\mathrm{T}};$$

б) гипербола

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{1/4}-\tilde{\tilde{y}}^2=1;\ \tilde{O}=(-1,-1),\ \tilde{e}_1=\left\{-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2=\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}^{\mathrm{T}};$$

в) парабола

$$\tilde{\tilde{y}}^2=\frac{1}{5}x;\quad \tilde{O}=\left(\frac{6}{25},-\frac{8}{25}\right),\quad \tilde{e}_1=\left\{-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right\}^{\mathrm{T}},\quad \tilde{e}_2=\left\{\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right\}^{\mathrm{T}};$$

г) эллипс

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{2}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{2/3}=1; \quad \tilde{O}=(-1,-1), \quad \tilde{e}_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}^{\mathrm{T}}, \quad \tilde{e}_2=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}^{\mathrm{T}};$$

д) парабола

$$\tilde{\tilde{y}}^2=4\sqrt{2}\,\tilde{\tilde{x}}; \quad \tilde{O}=(2,1), \quad \tilde{e}_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}^{\mathrm{T}}, \quad \tilde{e}_2=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}^{\mathrm{T}};$$

е) эллипс

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{14}+\tilde{\tilde{y}}^2=1; \quad \tilde{O}=(3,-2), \quad \tilde{e}_1=\left\{-\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}^{\mathrm{T}}, \tilde{e}_2=\left\{-\frac{2}{\sqrt{13}},-\frac{3}{\sqrt{13}}\right\}^{\mathrm{T}};$$

ж) гипербола

$$\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{1/9}-\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{1/25}=1; \quad \tilde{O}=(1,-1), \quad \tilde{e}_1=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}^{\mathrm{T}}, \tilde{e}_2=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}^{\mathrm{T}};$$

з) парабола

$$\tilde{\tilde{y}}^2=\frac{6}{\sqrt{34}}\tilde{\tilde{x}}; \tilde{O}=\left(-\frac{11}{17},\frac{10}{17}\right), \tilde{e}_1=\left\{-\frac{3}{\sqrt{34}},-\frac{5}{\sqrt{34}}\right\}^{\mathrm{T}}, \tilde{e}_2=\left\{\frac{5}{\sqrt{34}},-\frac{3}{\sqrt{34}}\right\}^{\mathrm{T}};$$

и) пара параллельных прямых $2x+3y-5=0, \quad 2x+3y+1=0$;

$$\tilde{\tilde{y}}^2=\frac{9}{13}; \quad \tilde{O}=\left(\frac{4}{13},\frac{6}{13}\right), \quad \tilde{e}_1=\left\{-\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}^{\mathrm{T}}, \quad \tilde{e}_2=\left\{-\frac{2}{\sqrt{13}},-\frac{3}{\sqrt{13}}\right\}^{\mathrm{T}};$$

к) мнимый эллипс;

л) пара пересекающихся прямых $3x-5y-13=0, \quad 5x+3y+1=0$;

$$\tilde{\tilde{x}}^2-\tilde{\tilde{y}}^2=0; \quad \tilde{O}=(1,-2), \quad \tilde{e}_1=\left\{\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}}\right\}^{\mathrm{T}}, \quad \tilde{e}_2=\left\{-\frac{4}{\sqrt{17}},\frac{1}{\sqrt{17}}\right\}^{\mathrm{T}};$$

4.22. Длины полуосей равны $\sqrt{2}$ и 1, эксцентриситет равен $\frac{1}{\sqrt{2}}$, центром является точка $(1,-1)$, уравнение большой оси $3x+4y+1=0$, уравнение малой оси $4x-3y-7=0$. Фокусу $F_1=\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$ соответствует директриса $4x-3y+3=0$, фокусу $F_2=\left(\frac{9}{5},-\frac{8}{5}\right)$ соответствует директриса $4x-3y-17=0$.

4.23. Длины обеих полуосей равны $\sqrt{2}$, эксцентриситет равен $\sqrt{2}$, центром является точка $(1,1)$, уравнение действительной оси $4x+3y-7=0$, уравнение мнимой оси $3x-4y+1=0$. Фокусу $F_1=\left(-\frac{1}{5},\frac{13}{5}\right)$ соответствует директриса $3x-4y+6=0$, фокусу $F_2=\left(\frac{11}{5},-\frac{3}{5}\right)$ соответствует директриса $3x-4y-4=0$. Уравнения асимптот $x+7y-8=0$ и $7x-y-6=0$.

4.24. Параметр параболы равен $\frac{\sqrt{2}}{8}$, вершиной является точка $\left(-\frac{1}{16},-\frac{13}{16}\right)$, фокусом – точка $F=\left(-\frac{1}{8},-\frac{1}{8}\right)$. Осью параболы является прямая $4x+4y+1=0$, директрисой – прямая $4x-4y-1=0$.

4.25. а) Уравнение эллипса, приводится к виду $\frac{\tilde{x}^2}{4}+\frac{\tilde{y}^2}{9}=1$ преобразованием координат $x=\tilde{x}-2,\quad y=\tilde{y}+5$;

б) уравнение пары пересекающихся прямых, приводится к виду $16\tilde{x}^2-25\tilde{y}^2=0$ преобразованием координат $x=\tilde{x}-1,\quad y=\tilde{y}-2$;

в) уравнение эллипса, приводится к виду $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{4}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{16}=1$ путем последовательных преобразований координат

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\,,\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\ \text{ и }\ \tilde{x}=\tilde{\tilde{x}}\,,\ \tilde{y}=\tilde{\tilde{y}}+1\,.$$

г) уравнение параболы, приводится к виду $\tilde{\tilde{x}}^2=-6\tilde{\tilde{y}}$ последовательным преобразованием координат

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\,,\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\ \text{ и }\ \tilde{x}=\tilde{\tilde{x}}-3\,,\ \tilde{y}=\tilde{\tilde{y}}\,;$$

д) уравнение гиперболы, приводится к виду $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{16}-\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{9}=1$ последовательным преобразованием координат

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\,,\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\ \text{ и }\ \tilde{x}=\tilde{\tilde{x}}\,,\ \tilde{y}=\tilde{\tilde{y}}+1\,;$$

е) уравнение параболы, приводится к виду $\tilde{\tilde{y}}^2=-\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{\tilde{x}}$ последовательным преобразованием координат

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x}-\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y}\,,\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x}+\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y}\ \text{ и }\ \tilde{x}=\tilde{\tilde{x}}+\frac{8}{\sqrt{5}}\,,\ \tilde{y}=\tilde{\tilde{y}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\,;$$

ж) уравнение пары параллельных прямых, приводится к виду $\tilde{x}^2-16=0$ преобразованием координат

$$x=\frac{3}{5}\tilde{x}-\frac{4}{5}\tilde{y}\,,\ y=\frac{4}{5}\tilde{x}+\frac{3}{5}\tilde{y}\,;$$

з) уравнение эллипса, приводится к виду $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{16}+\tilde{\tilde{y}}^2=1$ последовательным преобразованием координат

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\,,\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\ \text{ и }\ \tilde{x}=\tilde{\tilde{x}}+3\,,\ \tilde{y}=\tilde{\tilde{y}}\,;$$

и) уравнение гиперболы, приводится к виду $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{16}-\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{4}=1$ последовательным преобразованием координат

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\,,\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{x}+\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\ \text{и}\ \tilde{x}=\tilde{\tilde{x}}-1\,,\ \tilde{y}=\tilde{\tilde{y}}\,.$$

4.26. а) Гипербола $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{200/147}-\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{200/63}=1$;

б) эллипс $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{1/13}+\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{2/9}=1$;

в) парабола $\tilde{\tilde{y}}^2=\dfrac{4}{5\sqrt{5}}\tilde{\tilde{x}}$;

г) эллипс $\tilde{\tilde{x}}^2+\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{9}=1$;

д) гипербола $\tilde{\tilde{x}}^2-\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{4}=1$;

е) парабола $\tilde{\tilde{x}}^2=\dfrac{96}{13\sqrt{13}}\tilde{\tilde{y}}$.

Глава 5

5.1. а) При $\lambda>0$ эллипсоид, при $\lambda=0$ точка, при $\lambda<0$ пустое множество;

б) при $\lambda>0$ эллипсоид, при $\lambda=0$ эллиптический цилиндр, при $\lambda<0$ однополостный гиперболоид;

в) при $\lambda>0$ эллипсоид, при $\lambda=0$ прямая, при $\lambda<0$ двуполостной гиперболоид;

г) при $\lambda>0$ однополостный гиперболоид, при $\lambda=0$ конус, при $\lambda<0$ двуполостный гиперболоид;

д) при $\lambda>0$ двуполостный гиперболоид, при $\lambda=0$ конус, при $\lambda<0$ однополостный гиперболоид;

е) при $\lambda>0$ эллипсоид, при $\lambda=0$ пара параллельных плоскостей, при $\lambda<0$ двуполостный гиперболоид;

ж) при $\lambda>0$ эллипсоид, при $\lambda=0$ плоскость, при $\lambda<0$ однополостный гиперболоид;

з) при $\lambda \neq 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ прямая;

и) при $\lambda > 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ параболический цилиндр, при $\lambda < 0$ гиперболический параболоид;

к) при $\lambda \neq 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ плоскость;

л) при $\lambda > 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ плоскость, при $\lambda < 0$ гиперболический параболоид;

м) при $\lambda > 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ пара параллельных плоскостей, при $\lambda < 0$ гиперболический параболоид;

н) при $\lambda > 0$ эллиптический цилиндр, при $\lambda = 0$ прямая, при $\lambda < 0$ пустое множество;

о) при $\lambda \neq 0$ гиперболический цилиндр, при $\lambda = 0$ пара пересекающихся плоскостей.

5.4. а) Парабола;

б) эллипс;

в) гипербола;

г) гипербола;

д) гипербола.

5.5. $\left(-4; \pm 6, \pm 2\sqrt{3}\right), \quad 6, \quad 2\sqrt{3}.$

5.6. $p = 30, \quad \left(0, 12, -3\right).$

5.7. $\sqrt{5}, \quad \sqrt{2}, \quad \left(\pm\sqrt{5}, 3, 0\right).$

5.8. Вне эллипсоида.

5.9. $\dfrac{16x^2}{9} + \dfrac{(4y-15)^2}{25} - (z-4)^2 = 0 .$

5.10. $\left(1, 1, 0\right), \ \left(7, -11, 12\right).$

5.12. а) Эллиптический цилиндр $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{1/2} + \dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{1/5} = 1$, новое начало координат $\tilde{O} = \left(1, -2, 3\right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{1, 1, -2\right\}^{\mathrm{T}}, \ \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1, 1, 1\right\}^{\mathrm{T}}, \ \tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1, -1, 0\right\}^{\mathrm{T}};$$

б) двуполостный гиперболоид $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{90}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{120}-\frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{180}=-1$, новое начало координат $\tilde{O}=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},-3\sqrt{6}\right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\{-1,1,0\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\{-1,-1,2\}^{\mathrm{T}};$$

в) параболический цилиндр $\tilde{\tilde{x}}^2=\frac{2\sqrt{7}}{9\sqrt{3}}\tilde{\tilde{y}}$, новое начало координат $\tilde{O}=\left(\frac{23}{63},\frac{64}{63},\frac{2}{7}\right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\{1,2,-1\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2=\frac{1}{\sqrt{21}}\{-2,-1,-4\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3=\frac{1}{\sqrt{14}}\{3,-2,-1\}^{\mathrm{T}};$$

г) эллипсоид $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{1/2}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{1/5}+\frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{3/2}=1$, новое начало координат $\tilde{O}=\left(0,0,1\right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1=\{0,1,0\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\{1,0,1\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\{-1,0,1\}^{\mathrm{T}};$$

д) эллипсоид $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{5}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{5/2}+\frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{5/3}=1$, новое начало координат $\tilde{O}=$ $=\left(-1,1,4\right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1=\frac{1}{3}\{-2,-1,2\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2=\frac{1}{3}\{2,-2,1\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3=\frac{1}{3}\{1,2,2\}^{\mathrm{T}};$$

е) двуполостный гиперболоид $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{13/324}+\frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{13/162}-\frac{\tilde{\tilde{z}}^2}{13/108}=-1$, новое начало координат $\tilde{O}=\left(-\frac{1}{9},-\frac{1}{18},\frac{7}{18}\right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\{1, 2, 1\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\{-1, 1, -1\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1, 0, -1\}^{\mathrm{T}};$$

ж) гиперболический параболоид $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{10/9} - \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{10/9} = 2\tilde{\tilde{z}}$, новое начало координат $\tilde{O} = \left(\frac{3}{20}, \frac{3}{10}, -\frac{3}{10}\right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{0, -1, 1\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}\{-4, 1, 1\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3 = \frac{1}{3}\{-1, -2, -2\}^{\mathrm{T}};$$

з) конус $2\tilde{\tilde{x}}^2 + \tilde{\tilde{y}}^2 - \tilde{\tilde{z}}^2 = 0$, новое начало координат $\tilde{O} = (1, -2, -2)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{5}\{3, 0, 4\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\{4, -5, -3\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}}\{-4, -5, 3\}^{\mathrm{T}};$$

и) эллиптический параболоид $2\tilde{\tilde{x}}^2 + 2\tilde{\tilde{y}}^2 = \frac{10}{\sqrt{6}}\tilde{\tilde{z}}$, новое начало координат $\tilde{O} = \left(-\frac{47}{90}, \frac{13}{45}, \frac{43}{90}\right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\{-1, 1, -1\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-1, 0, 1\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\{1, 2, 1\}^{\mathrm{T}};$$

к) эллиптический параболоид $\frac{\tilde{\tilde{x}}^2}{1/2} + \frac{\tilde{\tilde{y}}^2}{1/3} = 2\tilde{\tilde{z}}$, новое начало координат $\tilde{O} = (2, 2, 1)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1, -1, 0\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}\{1, 1, -4\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3 = \frac{1}{3}\{2, 2, 1\}^{\mathrm{T}};$$

л) эллипсоид $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{1/9}+\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{1/9}+\dfrac{\tilde{\tilde{z}}^2}{1/27}=1$, новое начало координат $\tilde{O}=$ $=(-1,-1,2)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\{1,1,0\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2=\frac{1}{\sqrt{18}}\{1,-1,4\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3=\frac{1}{3}\{-2,2,1\}^{\mathrm{T}};$$

м) однополостный гиперболоид $\tilde{\tilde{x}}^2+2\tilde{\tilde{y}}^2-\tilde{\tilde{z}}^2=1$, новое начало координат $\tilde{O}=(1,1,3)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1=\frac{1}{3}\{2,2,1\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2=\frac{1}{3}\{2,-1,-2\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3=\frac{1}{3}\{1,-2,2\}^{\mathrm{T}};$$

н) параболический цилиндр $\tilde{\tilde{z}}^2=\dfrac{2}{3}\tilde{\tilde{x}}$, новое начало координат $\tilde{O}=\left(\dfrac{115}{36},\dfrac{85}{36},\dfrac{55}{72}\right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1=\frac{1}{3}\{2,2,1\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2=\frac{1}{3}\{1,-2,2\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3=\frac{1}{3}\{-2,1,2\}^{\mathrm{T}};$$

о) однополостный гиперболоид $\dfrac{\tilde{\tilde{x}}^2}{9}+\dfrac{\tilde{\tilde{y}}^2}{9}-\dfrac{\tilde{\tilde{z}}^2}{9/2}=1$, новое начало координат $\tilde{O}=(-1,-1,1)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\{1,0,1\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\{1,-2,-1\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\{-1,-1,1\}^{\mathrm{T}};$$

п) пара пересекающихся плоскостей

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)z=0,$$

$$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)z=0\,;$$

р) пара параллельных плоскостей $\tilde{\tilde{z}}^2=\frac{25}{56}$, новое начало координат $\tilde{O}=\left(\frac{1}{28},-\frac{1}{14},\frac{3}{28}\right)$, направляющие векторы канонической системы координат:

$$\tilde{e}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\{2,1,0\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_2=\frac{1}{\sqrt{70}}\{-3,6,5\}^{\mathrm{T}},\ \tilde{e}_3=\frac{1}{\sqrt{14}}\{1,-2,3\}^{\mathrm{T}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Лань, 2009. – 512 с.
2. *Бахвалов С.В.*, *Моденов П.С.*, *Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Лань, 2009. – 384 с.
3. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2006. – 312 с.
4. *Беклемишев Л.А.*, *Петрович А.Ю.*, *Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с.
5. *Денисов В.И.*, *Чубич В.М.* Сборник задач по геометрии и алгебре: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – Ч. 3. – 116 с.
6. *Ильин В.А.*, *Ким Г.Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: Проспект: Изд-во Моск. ун-та, 2008. – 400 с.
7. *Ильин В.А.*, *Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1999. – 224 с.
8. *Милованов М.В. и др.* Алгебра и аналитическая геометрия. – Ч. 1, 2. – Минск: Амалфея, 2001. – 400 с., 352 с.
9. *Привалов И.И.* Аналитическая геометрия. – М.: Лань, 2008. – 304 с.
10. *Рубан П.И.*, *Гармаш Е.Е.* Руководство к решению задач по аналитической геометрии. – М.: Высшая школа, 1963. – 314 с.
11. *Федорчук В.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2001. – 328 с.
12. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Лань, 2007. – 336 с.

Чубич Владимир Михайлович
Черникова Оксана Сергеевна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие

Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 24.04.2015. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз.
Уч.-изд. л. 5,11. Печ. л. 5,5. Изд. № 27. Заказ № Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20