

## **I. Неопределенный интеграл**

Определение, свойства, общие приемы интегрирования. Интегрирование рациональных, иррациональных и трансцендентных функций.

## **II. Интеграл Римана (определенный интеграл)**

*Необходимое условие интегрируемости по Риману. Интегральные суммы и их свойства. Теорема Римана (необходимое и достаточное условие интегрируемости). Классы интегрируемых функций. Свойства определенного интеграла (линейность, аддитивность, интегрирование неравенств, интегрируемость произведения). Теоремы о среднем значении интеграла: первая формула среднего значения, формула среднего значения в обобщенном виде, вторая формула среднего значения (без доказательства). Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной. Интеграл от (не)четной функции по сегменту  $[-a, a]$  (пример 9.5). Интегрирование периодической функции по полному периоду (пример 9.6). Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.*

Определения простой, замкнутой, спрямляемой кривой. Свойства спрямляемых кривых. Достаточные условия спрямляемости кривых: *длина дуги кривой, определенной параметрическими уравнениями; длина дуги кривой, заданной в декартовой системе координат; длина дуги кривой, заданной в полярной системе координат. Дифференциал дуги.*

Определения плоской фигуры, границы плоской фигуры. Граница площади нуль. Необходимое и достаточное условие квадратуемости плоской фигуры. Достаточные условия квадратуемости плоских фигур: *площадь криволинейной трапеции, площадь фигуры, ограниченной замкнутой спрямляемой кривой, площадь криволинейного сектора.*

Определения конечного тела, кубируемости конечного тела. Необходимое и достаточное условие кубируемости тела. Достаточные условия кубируемости: *цилиндра, основанием которого является квадратуемая фигура; тела вращения, полученного вращением криволинейной трапеции в декартовой системе координат.*

*Площадь поверхности вращения, полученной при вращении в декартовой системе координат графика функции  $y = f(x), x \in [a, b]$  вокруг координатной оси.*

### III. Несобственные интегралы

Определения несобственного интеграла I-го и II-го рода. Общее понятие несобственного интеграла. Основные теоремы о несобственных интегралах: *линейность, интегрирование неравенств, формула Ньютона-Лейбница, интегрирование по частям, замена переменных, связь между интегралами I-го и II-го рода.*

*Сходимость несобственных интегралов от неотрицательной функции. Теоремы сравнения. Критерий Коши. Связь между сходимостью интегралов  $\int_a^B f(x)dx$  и  $\int_a^B |f(x)|dx$  Абсолютная и условная сходимость. Абсолютно интегрируемые функции: определение и теорема об интегрировании произведения. Общие признаки сходимости: признак Дирихле и признак Абеля.*

Главное значение несобственного интеграла. Интеграл Коши.

### IV. Функции многих переменных

Определения пространства  $R^m$  и  $E^m$ , расстояния в евклидовом пространстве; шара, сферы, параллелепипеда; внутренней, граничной, предельной и изолированной точек; открытого и замкнутого множества; границы множества; связного множества; диаметра множества, ограниченного множества, области, замкнутой области, выпуклой области.

Последовательность точек множества  $E^m$ : определение, сходимость, ограниченность. *Теорема о характере сходимости в евклидовом пространстве, критерий Коши сходимости последовательности точек евклидова пространства, теорема Больцано-Вейерштрасса.*

Функция: определение, область определения, область значений. Понятие уровня функции. Необходимое и достаточное условие существования предельного значения функции (без доказательства). Предельное значение и повторное предельное значение функции в точке. Связь между пределом в точке и повторными пределами в этой точке (без доказательства). Непрерывность функции: в точке, на множестве, по кривой. Свойства непрерывных функций: локальные, непрерывность сложной функции, теорема о сохранении знака, *теорема о промежуточных значениях, теоремы Вейерштрасса*. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Частные производные и частные дифференциалы. Дифференцируемость функции в точке (две эквивалентные формулировки). Полный дифференциал. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью (с доказательством). *Необходимое условие дифференцируемости. Достаточное условие дифференцируемости. Дифференцирование сложной функции.*

Производная по направлению, частные производные. Градиент функции и его геометрический смысл. Свойства производных по направлению. *Теорема о среднем значении. Инвариантность первого дифференциала.*

Производные и дифференциалы высших порядков. Символическая формула для вычисления дифференциала. Теорема о непрерывных смешанных производных. Дифференциал сложной функции (порядка выше первого).

Геометрический смысл дифференциала функции 2-х переменных: касательная плоскость, нормальная плоскость, касательный вектор, нормальный вектор. Применение дифференциала в приближенных вычислениях, *правила приближенных вычислений*. *Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*.

Экстремумы функций многих переменных: определения, *теоремы о необходимом и достаточном условиях существования экстремума*.

Равномерная непрерывность. Теорема о связи непрерывности и дифференцируемости (без доказательства).

Векторные функции нескольких переменных. Определение взаимнооднозначного, обратного, линейного и постоянного отображения. Непрерывные отображения: непрерывные в точке, непрерывные на множестве, равномерно непрерывные, гомеоморфные отображения. Дифференцируемые отображения, дифференциал отображения. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.\* Матрица Якоби и якобиан отображения. Правило дифференцирования композиции отображений. Теорема об обратном отображении.

Теория неявных функций. Теоремы о существовании и дифференцируемости неявной функции. Теорема о векторной неявной функции. Вычисление производных неявно заданных функций. Взаимно-однозначное отображение множеств. Зависимость функций: определение, *необходимое условие зависимости*, достаточное условие независимости функций. Замена переменных в дифференциальных уравнениях.

Локальный относительный (условный) экстремум: определение, *необходимое условие локального относительного экстремума*, *достаточное условие локального относительного экстремума*. Методы нахождения условных экстремумов: метод Лагранжа и метод исключения переменных. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на замкнутом множестве. Нахождение для непрерывной функции  $f(x)$  ее точных граней  $\sup_A f(x)$ ,  $\inf_A f(x)$ , если: а)  $A$  - замкнутое, б)  $A$  - открытое множество (*лемма 3.7*).

Кривые и поверхности: определение, способы задания, проектируемость. Ориентация кривых и поверхностей. Особые точки кривой и поверхности. Касательная прямая к плоской кривой (*явное, неявное и параметрическое задание кривой*). Касательная прямая к пространственной кривой (*параметрическое, явное и неявное задание кривой*). Криволинейные координаты: полярные, сферические и цилиндрические координаты. *Регулярное преобразование плоских кривых и поверхностей*. *Теорема о квадратуемости (кубируемости) явно заданных кривых (поверхностей)*. *Теорема о квадратуемости (кубируемости) кусочно-гладких кривых (поверхностей)*.

## V. Числовые ряды

Определения числового ряда, частичной суммы, остатка ряда. Гармонический и геометрический ряды (определение и *сходимость*). Сходимость числовых рядов: определение сходимости, критерий Коши (с доказательством), необходимое условие сходимости (с доказательством), основные свойства сходящихся рядов (с доказательством).

Ряды с неотрицательными членами: определение, необходимое и достаточное условие сходимости (с доказательством). Теорема о «произведении» ограниченной последовательности и сходящегося ряда (с доказательством). *Признаки сравнения рядов*. Признаки сходимости: *Коши, Даламбера, интегральный признак Коши-Маклорена и оценка остатка ряда. Обобщенный гармонический ряд. Теорема об отсутствии универсального ряда сравнения.* (Признаки сходимости: Куммера, Раабе, Бертрана, Гаусса, логарифмический.)\*

Ряды общего вида. Группировка членов ряда. Абсолютная и условная сходимость. Перестановка членов ряда. Теоремы Коши и Римана о перестановке членов ряда\*. Признак Вейерштрасса абсолютной сходимости рядов. Признаки сходимости для произвольных рядов: *Лейбница, Абеля, Дирихле. Оценка остатка ряда Лейбницевского типа.*

Бесконечные произведения. Определения бесконечного произведения и частичного произведения. Необходимое условие сходимости бесконечного произведения. Связь между сходимостью бесконечного произведения и рядами.

## VI. Функциональные последовательности (ФП) и ряды (ФР).

Сходимость: в точке, поточечная и равномерная. Связь между равномерной и поточечной сходимостью. Свойства равномерно сходящихся ФП.

Равномерная сходимость ФР. *Критерий Коши и его следствие (необходимое условие сходимости)*. Достаточные признаки равномерной сходимости: *Вейерштрасса, Дирихле, Абеля*. Пример 3.7\*. Свойства равномерно сходящихся рядов: предельный переход, непрерывность, почленное интегрирование и дифференцирование ФР.

### Примечание:

	На оценку «хорошо»	На оценку «отлично»
Курсив	20 сек.	без тетради
Подчеркивание	3 мин	30 сек.
Курсив +подчеркивание	ответ по тетради	3 мин
*	доказательство не спрашивается	ответ по тетради

**!!! Все формулировки и определения знать наизусть всем.**

