Глава 1. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1. ПОНЯТИЯ m-МЕРНОГО КООРДИНАТНОГО ПРОСТРАНСТВА И m-МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Множество всевозможных упорядоченных совокупностей $(x_1, x_2, ..., x_m)$ чисел называется ***m-мерным координатным пространством*** $\mathbb{R}^m$**.** Для обозначения точек пространства $\mathbb{R}^m$ используют либо большие латинские буквы, либо вектора (обычно без символа транспонирования): $A = A(x_1, x_2, ..., x_m) = (x_1, x_2, ..., x_m) = \vec{x}$.

Определим расстояние $\rho(A, B)$ между двумя точками $A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ и $B(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ по формуле**:**

$$\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (a_i - b_i)^2}\,. \tag{1.1}$$

Пространство $\mathbb{R}^m$ с расстоянием, введенным по формуле (1.1), называется ***m-мерным евклидовым пространством*** E^m.

Пусть $\vec{x}^0 \in E^m$. Тогда

– ***открытым шаром*** **(**$m = 2$ – ***открытым кругом*****)** радиуса r с центром в точке $\vec{x}^0$ называют множество $\left\{\vec{x} \mid \rho\left(\vec{x}, \vec{x}^0\right) < r\right\}$ и обозначают $B\left(\vec{x}^0, r\right)$;

– ***сферой*** **(**$m = 2$ – ***окружностью*****)** радиуса r с центром в точке $\vec{x}^0$ называют множество $\left\{\vec{x} \mid \rho\left(\vec{x}, \vec{x}^0\right) = r\right\}$;

– ***шаром*** **(**$m = 2$ – ***кругом*****)** радиуса r с центром в точке $\vec{x}^0$ называют множество $\left\{\vec{x} \mid \rho\left(\vec{x}, \vec{x}^0\right) \le r\right\}$;

Пусть $A(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in E^m$, а $d_1, d_2, ..., d_m$ – некоторые положительные числа. Множество точек

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \middle| |x_1 - a_1| \le d_1, |x_2 - a_2| \le d_2, ..., |x_m - a_m| \le d_m\right\}$$

называется *m-мерным параллелепипедом* (если все неравенства строгие, то *открытым m-мерным параллелепипедом*), при этом точка $A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ называется *центром этого параллелепипеда*. Всякий такой m-мерный параллелепипед называется *прямоугольной окрестностью* точки A.

ε-***окрестностью*** точки $\vec{x}^0$ называют открытый шар $B\left(\vec{x}^0, \varepsilon\right)$.

Теорема 1.1. Любая ε-окрестность точки A евклидова пространства E^m содержит некоторую прямоугольную окрестность этой точки. Любая прямоугольная окрестность точки A содержит некоторую ε-окрестность этой точки.

Точка $\vec{x}^0 \in E^m$ называется ***предельной точкой*** множества $X \subset E^m$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное множество точек из X или, что то же самое, в любой окрестности точки x существует, по крайней мере одна точка множества X, не совпадающая с $\vec{x}^0$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \vec{x} \in X, \vec{x} \neq \vec{x}^0 \ \vec{x} \in B\left(\vec{x}^0, \varepsilon\right)$. *Предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X.*

Символ ∞ называют ***предельной точкой*** (***предельным значением***) множества X, если $\forall C \in \mathbb{R} \ \exists \vec{x} \in X \ \rho\left(O, \vec{x}\right) > C$, где O – точка, все координаты которой равны нулю.

Точка $\vec{x}^0 \in X$, не являющаяся предельной точкой множества X, называется ***изолированной*** точкой множества X, то есть

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \vec{x} \in X \ \left\{\vec{x} \neq \vec{x}^0 \Rightarrow \vec{x} \notin B\left(\vec{x}^0, \varepsilon\right)\right\}.$$

Точка $\vec{x}^0 \in E^m$ называется:

– ***внутренней точкой*** множества X, если

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \vec{x} \in E^m \ \rho\left(\vec{x}, \vec{x}^0\right) < \varepsilon \Rightarrow \vec{x} \in X;$$

– ***внешней точкой*** множества X, если

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \vec{x} \in E^m \ \rho\left(\vec{x}, \vec{x}^0\right) < \varepsilon \Rightarrow \vec{x} \notin X;$$

– ***граничной точкой*** множества X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \vec{x}^1 \in X \ \rho\left(\vec{x}^1, \vec{x}^0\right) < \varepsilon \ \wedge \ \exists \vec{x}^2 \notin X \ \rho\left(\vec{x}^2, \vec{x}^0\right) < \varepsilon.$$

Замечание 1. Всякая внутренняя точка является предельной.

Замечание 2. Всякая изолированная точка является граничной.

Замечание 3. Всякая точка пространства E^m является либо внешней, либо внутренней, либо граничной точкой произвольного множества $X \subset E^m$.

Диаметром множества M называют число $d(M)=\max\limits_{A,B\in M}\rho(A,B)$. Множество M называют ***ограниченным***, если $d(M)<+\infty$.

Из определения ограниченного множества и шара следует, что множество является ограниченным тогда и только тогда, когда оно содержится целиком в некотором шаре.

Множество всех граничных точек множества X называется границей множества X. Множество X называется ***открытым***, если все его точки внутренние. Множество X называется ***замкнутым***, если оно содержит все точки своей границы или, что то же самое, все свои предельные точки.

Замечание. Множества E^m и $\varnothing$ являются и открытыми, и замкнутыми одновременно.

Точка $\vec{x}^0\in E^m$ называется ***точкой прикосновения множества*** $M\subset E^m$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M. Всякая точка прикосновения есть либо предельная, либо изолированная точка множества M. Совокупность всех точек прикосновения множества M называют ***замыканием множества*** M и обозначают $\overline{M}$.

В евклидовом пространстве E^m определены следующие операции над множествами:

Унарные: $E^m\setminus M$ – дополнение множества M;

M' – множество всех предельных точек множества M;

$\overline{M}$ – замыкание множества M;

$\operatorname{int}M$ – множество всех внутренних точек множества ;

∂M – множество всех граничных точек множества M (граница множества M);

Бинарные: $M_1\bigcap M_2$, $M_1\bigcup M_2$, $M_1\setminus M_2$, $M_1\div M_2$.

Лемма 1.1. Если M замкнутое множество, то $\overline{M}=M$.

Лемма 1.2. Для произвольного множества M справедливо равенство $\overline{M}=M\bigcup M'$.

Два множества ***отделимы***, если никакое из них не пересекается с замыканием другого.

Множество называется ***связным***, если оно не может быть представлено в виде объединения двух отделимых его собственных подмножеств.

Множество

$$L=\left\{\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)\middle|\, x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t),\ldots,\ x_m=\varphi_m(t),\ \alpha\le t\le\beta\right\}$$

где $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)$ – непрерывные на $[\alpha,\beta]$ функции, называется ***непрерывной кривой в пространстве*** E^m, а точки $A(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$ и $B(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m)$ – концами кривой L, где $\alpha_i=\varphi_i(\alpha)$, $\beta_i=\varphi_i(\beta)$, $i=\overline{1,m}$. Если точки A и B совпадают, то кривая L называется непрерывной ***замкнутой кривой***.

Лемма 1.3. Любые две точки связного множества можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому множеству.

Открытое связное множество называют ***областью***, а объединение области и ее границы – ***замкнутой областью***.

Лемма 1.4. Область (или замкнутая область) на плоскости является связной, если для любой непрерывной замкнутой кривой, лежащей в этой области, ограниченная ею часть плоскости целиком принадлежит этой же области.

1.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Если каждому натуральному числу n поставлена в соответствие точка $A_n\subset E^m$, то говорят, что определена ***последовательность*** $\{A_n\}$ ***точек пространства*** E^m: $A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$

Последовательность $\{A_n\}$ точек пространства E^m называется

– ***сходящейся*** к точке $A\in E^m$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \ \forall n\ge n_0\ \ \rho(A_n,A)<\varepsilon;$$

– ***сходящейся к бесконечности*** (или ***бесконечно большой***), если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \ \forall n\ge n_0\ \ \rho(A_n,O)>\varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=S$ или $A_n\to S$ при $n\to\infty$, где S – либо точка пространства E^m, либо символ ∞.

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=0$, то последовательность $\{A_n\}$ называют ***бесконечно малой***.

Теорема 1.2 (о характере сходимости в евклидовом пространстве). Последовательность $\{A_n\}$ точек евклидова пространства E^m сходится к точке $A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ тогда и только тогда, когда последовательности $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, …, $\{x_m^n\}$ координат точек A_n сходятся к соответствующим координатам $a_1, a_2, \ldots, a_m$ точки A.

▶ *Необходимость.* Пусть $A_n\left(x_1^n, x_2^n, ..., x_m^n\right) \to A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ при $n \to \infty$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall n \geq N$

$$\rho(A_n, A) = \sqrt{\left(x_1^n - a_1\right)^2 + \left(x_2^n - a_2\right)^2 + \cdots + \left(x_m^n - a_m\right)^2} < \varepsilon .$$

Следовательно, при $n \geq N$ выполняются неравенства

$$\left|x_1^n - a_1\right| < \varepsilon, \left|x_2^n - a_2\right| < \varepsilon, ..., \left|x_m^n - a_m\right| < \varepsilon ,$$

а значит, последовательности $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, …, $\{x_m^n\}$ координат точек A_n сходятся соответственно к числам $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Достаточность. Пусть последовательности $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, …, $\{x_m^n\}$ координат точек A_n сходятся соответственно к числам $a_1, a_2, \ldots, a_m$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_i \ \forall n > N_i \ \ \left|x_i^n - a_i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$, $i = \overline{1, m}$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = \max\limits_{1 \leq i \leq m} N_i \ \forall n > N \ \ \left|x_i^n - a_i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$, $i = \overline{1, m}$. Следовательно, $\rho(A_n, A) < \varepsilon$. ◀

Теорема 1.3 (критерий Коши сходимости последовательности). Для того чтобы последовательность точек $\{A_n\}$ пространства E^m была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была *фундаментальной*, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \ \ \forall n \geq n_0 \ \ \forall k \ \ \rho(A_{n+k}, A_n) < \varepsilon$.

▶ Для доказательства достаточно заметить, что из условия фундаментальности $\{A_n\}$ следует, что последовательности $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, …, $\{x_m^n\}$ координат точек A_n также фундаментальны, и наоборот, если указанные последовательности координат фундаментальны, то фундаментальной будет и последовательность $\{A_n\}$, а затем применить критерий Коши для числовых последовательностей к последовательностям координат и теорему 1.2. ◀

Последовательность $\{A_n\}$ точек пространства E^m называется

– ***ограниченной***, если $\exists c > 0 \ \forall n \ \rho(O, A_n) \le c$;

– ***неограниченной***, если $\forall c \in \mathbb{R} \ \exists n \ \rho(O, A_n) > c$.

Лемма 1.5. Последовательность $\{A_n\}$ является ограниченной, если все точки A_n этой последовательности принадлежат некоторому шару с центром в начале координат.

Теорема 1.4 (теорема Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности $\{A_n\}$ точек m-мерного евклидова пространства можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

▸ Так как последовательность $\{A_n\}$ ограничена, то

$$\exists c > 0 \ \forall n \ \rho(O, A_n) = \sqrt{\left(x_1^n\right)^2 + \left(x_2^n\right)^2 + \cdots \left(x_m^n\right)^2} \le c,$$

и, следовательно, $\forall n \ \left|x_1^n\right| \le c, \left|x_2^n\right| \le c, ..., \left|x_m^n\right| \le c$, а значит, последовательности $\{x_1^n\}$, $\{x_2^n\}$, …, $\{x_m^n\}$ координат точек A_n являются ограниченными.

В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса для числовых последовательностей из последовательности $\{x_1^n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_1^{n_{k_1}}\}$, сходящуюся к некоторому числу a_1. Рассмотрим соответствующую подпоследовательность $\{x_2^{n_{k_1}}\}$ последовательности $\{x_2^n\}$ вторых координат точек A_n. В силу той же теоремы из подпоследовательности $\{x_2^{n_{k_1}}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_2^{n_{k_2}}\}$, сходящуюся к некоторому числу a_2. Заметим, что подпоследовательность $\{x_1^{n_{k_2}}\}$ сходится к числу a_1. Итак, подпоследовательности $\{x_1^{n_{k_2}}\}$ и $\{x_2^{n_{k_2}}\}$ сходятся к числам a_1 и a_2 соответственно. Очевидно, что если из подпоследовательности $\{x_3^{n_{k_2}}\}$ последовательности третьих координат точек A_n выделим сходящуюся к некоторому числу a_3 подпоследовательность $\{x_3^{n_{k_3}}\}$, то подпоследовательности $\{x_1^{n_{k_3}}\}$, $\{x_2^{n_{k_3}}\}$, $\{x_3^{n_{k_3}}\}$ сходятся соответственно к числам a_1, a_2, a_3. Продолжая эти рассуждения, получим сходящуюся к некоторому числу a_m подпоследовательность $\left\{x_m^{n_{k_m}}\right\}$ последовательности m-х координат точек A_n, причем подпоследовательности $\left\{x_1^{n_{k_m}}\right\}$, $\left\{x_2^{n_{k_m}}\right\}$, …, $\left\{x_m^{n_{k_m}}\right\}$ сходятся к числам a_1, a_2, … a_m соответственно. Но тогда, в силу теоремы 1.2, подпоследовательность $\left\{A_{n_{k_m}}\right\}$ последовательности точек $\{A_n\}$ сходится к точке A с координатами $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. ◀

1.3. ПРЕДЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Если каждой точке $\vec{x}$ множества $M \subset E^m$ ставится в соответствие по известному закону некоторое число u, то говорят, что на множестве M определена ***функция*** $u = u(\vec{x})$ (или $u = f(\vec{x})$, или $f(\vec{x}): M \to \mathbb{R}$).

Уровнем **(*c-уровнем*,** $c \in \mathbb{R}$**)** ***функции*** $f(\vec{x})$ называется множество $\{\vec{x} \mid f(\vec{x}) = c\}$. Уровни функций 2-х переменных часто называются ***линиями уровня***, а 3-х – ***поверхностями уровня***.

Пример 1.1. Найти область определения и c-уровни функций

$$\text{а) } u(x,y) = \ln\left(1 - x^2 - y^2\right), \text{ б) } w(x,y,z) = \sqrt{y - x}.$$

▶ а) Область определения функции $u(x,y)$ – множество внутренних точек единичного круга ($x^2 + y^2 < 1$). Линии c-уровня: $\ln\left(1 - x^2 - y^2\right) = c$, то есть $x^2 + y^2 = 1 - e^c$:

– при $c > 0$ – $\varnothing$;
– при $c = 0$ – точка $(0,0)$;
– при $c < 0$ – окружности с центром в точке $(0,0)$ и радиусом $\sqrt{1 - e^c}$.

б) Область определения функции $w(x,y)$ – полупространство $y \ge x$. Линии c-уровня: $\sqrt{y - x} = c$:

– при $c < 0$ – $\varnothing$;
– при $c \ge 0$ – плоскости $y = x + c^2$. ◀

Для функций многих переменных вводятся понятия супремум, инфимум аналогично тому, как эти понятия были определены для функций одной переменной.

<table>
<tr><th colspan="3">Символическая запись</th><th colspan="3">Определение предела по Коши для функции $f(\vec{x})$, определенной на множестве $X \subset E^m$</th></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = b$</td><td>$f(\vec{x}) \to b$</td><td rowspan="6">при $\vec{x} \to \vec{x}^0$</td><td rowspan="12">$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \quad x \in X$,</td><td rowspan="6">$0 < \rho(\vec{x}, \vec{x}^0) < \delta$</td><td>$\Rightarrow \lvert f(\vec{x}) - b \rvert < \varepsilon$</td></tr>
<tr><td></td><td>$f(\vec{x}) \to b+0$</td><td>$\Rightarrow 0 \le f(\vec{x}) - b < \varepsilon$</td></tr>
<tr><td></td><td>$f(\vec{x}) \to b-0$</td><td>$\Rightarrow 0 \le b - f(\vec{x}) < \varepsilon$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = \infty$</td><td>$f(\vec{x}) \to \infty$</td><td>$\Rightarrow \lvert f(\vec{x}) \rvert > \varepsilon$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = +\infty$</td><td>$f(\vec{x}) \to +\infty$</td><td>$\Rightarrow f(\vec{x}) > \varepsilon$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = -\infty$</td><td>$f(\vec{x}) \to -\infty$</td><td>$\Rightarrow f(\vec{x}) < -\varepsilon$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{\vec{x}\to\infty} f(\vec{x}) = b$</td><td>$f(\vec{x}) \to b$</td><td rowspan="6">при $\vec{x} \to \infty$</td><td rowspan="6">$\rho(\vec{x}, O) > \delta$</td><td>$\Rightarrow \lvert f(\vec{x}) - b \rvert < \varepsilon$</td></tr>
<tr><td></td><td>$f(\vec{x}) \to b+0$</td><td>$\Rightarrow 0 \le f(\vec{x}) - b < \varepsilon$</td></tr>
<tr><td></td><td>$f(\vec{x}) \to b-0$</td><td>$\Rightarrow 0 \le b - f(\vec{x}) < \varepsilon$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{\vec{x}\to\infty} f(\vec{x}) = \infty$</td><td>$f(\vec{x}) \to \infty$</td><td>$\Rightarrow \lvert f(\vec{x}) \rvert > \varepsilon$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{\vec{x}\to\infty} f(\vec{x}) = +\infty$</td><td>$f(\vec{x}) \to +\infty$</td><td>$\Rightarrow f(\vec{x}) > \varepsilon$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{\vec{x}\to\infty} f(\vec{x}) = -\infty$</td><td>$f(\vec{x}) \to -\infty$</td><td>$\Rightarrow f(\vec{x}) < -\varepsilon$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Символическая запись</th><th colspan="3">Определение предела по Гейне для функции $f(\vec{x})$, определенной на множестве $X \subset E^m$</th></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}^0} f(\vec{x}) = S$,</td><td colspan="2">$f(\vec{x}) \to S$ при $\vec{x} \to \vec{x}^0$</td><td rowspan="2">$\forall \{\vec{x}_n\}$</td><td>$\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}^0$ и $\quad \forall n \quad \vec{x}_n \in X$, $\vec{x}_n \ne \vec{x}^0$,</td><td rowspan="2">$\Rightarrow f(\vec{x}_n) \to S$ при $n \to \infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{\vec{x}\to\infty} f(\vec{x}) = S$</td><td colspan="2">$f(\vec{x}) \to S$ при $\vec{x} \to \infty$</td><td>$\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \infty$ и $\quad \forall n \quad \vec{x}_n \in X$</td></tr>
</table>

Примечание 1. $S \in \{b, b+0, b-0, \infty, +\infty, -\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$. Если $S \in \{b+0, b-0\}$, то обычно не используют запись с $\lim$.

Примечание 2. Множество X в общем случае не совпадает с областью определения функции $f(\vec{x})$. При этом говорят о пределе функции по множеству X.

Для обозначения предельного значения в точке $\vec{x}^0$ также можно использовать запись $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \dots \\ x_m \to x_m^0}} f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right) = S$.

Для функций многих переменных, как и для функций одной переменной, вводятся понятия бесконечно большой и бесконечно малой функций. Свойства пределов также остаются справедливыми.

Сравнение функций нескольких переменных ($f \sim g$, $f = o(g)$, $f = O(g)$) производится точно так же, как и функций одной переменной.

Необходимое и достаточное условие существования предельного значения.

Теорема 1.5 (Критерий Коши). Для того чтобы функция $f(\vec{x}): X \to \mathbb{R}$ имела конечное предельное значение в точке $\vec{x}^0$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла в точке $\vec{x}^0$ ***условию Коши***: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall A', A'' \in X$

$$\left\{0 < \rho\left(A', \vec{x}^0\right) < \delta,\ 0 < \rho\left(A'', \vec{x}^0\right) < \delta\right\} \Rightarrow \left|f\left(A'\right) - f\left(A''\right)\right| < \varepsilon.$$

Для упрощения дальнейшего изложения материала будем рассматривать функции двух переменных x, y.

Повторные предельные значения.

Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в прямоугольнике

$$Q = \left\{(x, y) \middle| |x - x_0| < d_1,\ |y - y_0| < d_2\right\},$$

кроме, быть может, отрезков прямых $x = x_0$, $y = y_0$. При фиксированном значении переменной y функция $f(x, y)$ становится функцией одной переменной x. Пусть для любого фиксированного значения y, удовлетворяющего условию $0 < |y - y_0| < d_2$, существует предел функции $f(x, y)$ при $x \to x_0$ (этот предел зависит, вообще говоря, от y):

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y\ \text{фикс.}}} f(x, y) = \varphi(y).$$

Пусть далее предел функции $\varphi(y)$ при $y \to y_0$ существует и равен b:

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = b.$$

Тогда говорят, что в точке (x_0, y_0) существует ***повторный предел*** функции $u = f(x, y)$, и пишут

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = b.$$

При этом $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \text{ фикс.} \\ 0<|y-y_0|<d_2}} f(x, y)$ называют ***внутренним пределом*** в повторном. Аналогично определяется повторный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, в котором внутренним является $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ x \text{ фикс.} \\ 0<|x-x_0|<d_1}} f(x, y)$.

Теорема 1.6. Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в некоторой прямоугольной окрестности $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$ точки (x_0, y_0) кроме, быть может, отрезков прямых $x = x_0$, $y = y_0$ и имеет в этой точке предельное значение b. Пусть также для любого фиксированного x, $0 < |x - x_0| < d_1$, существует предельное значение $\psi(x) = \lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ x \text{ фикс.}}} f(x, y)$ и для любого фиксированного y, $0 < |y - y_0| < d_2$, существует предельное значение $\varphi(y) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \text{ фикс.}}} f(x, y)$. Тогда существуют повторные предельные значения $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ и $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$, причем каждый из них равен b.

▶ Так как функция $u = f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) предельное значение b, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ и $0 < |y - y_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x, y) - b| < \varepsilon$. Таким образом, в прямоугольной окрестности $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ точки (x_0, y_0), кроме, быть может, отрезков прямых $x = x_0$, $y = y_0$, значения функции $f(x, y)$ отличаются от b не больше, чем на ε. Но тогда предельные значения $\psi(x)$ и $\varphi(y)$ при x и y, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |y - y_0| < \delta$, также отличаются от b не больше чем на ε. Следовательно, и предельные значения этих функций в точках x_0 и y_0, соответственно, существуют и равны b. ◀

З а м е ч а н и е 1. Из существования предела функции в точке не следует существование повторных пределов функции в этой точке.

▸ см. далее пример 1.7. ◂

З а м е ч а н и е 2. Из существования и равенства повторных пределов функции в данной точке не следует существование предела функции в этой точке.

▸ см. далее пример 1.8. ◂

П р и м е р 1.2. Докажем, что предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$.

▸ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon \ \forall (x, y) \ 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow$

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon. ◂$$

П р и м е р 1.3. Вычислим предел функции $f(x, y) = y\cos\frac{1}{y-x}$ в точке $(0,0)$ по множеству, на котором функция определена.

▸ Функция не определена в точках прямой $y = x$, поэтому предела в точке $(0,0)$ не существует, но существует предел по множеству $\left\{(x, y) \middle| (x, y) \in E^2 \text{ и } x \ne y\right\}$, на котором функция определена. Этот предел равен 0, что следует из неравенства $\left|y\cos\frac{1}{y-x}\right| \le |y|$, справедливого для всех точек рассматриваемого множества. ◂

П р и м е р 1.4. Вычислим предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{2/(x^2+xy)}$.

▸ $(1+xy)^{2/(x^2+xy)} = \left[(1+xy)^{1/(xy)}\right]^{\frac{2y}{x+y}}$. Обозначим $z = xy$, тогда если $x \to 0$, $y \to 2$, то $z \to 0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{1/(xy)} = \lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{1/z} = e$. Учитывая, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{2y}{x+y} = 2$, получим $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{2/(x^2+xy)} = e^2$. ◂

Пример 1.5. Вычислим предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}$.

▸ Перейдем к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда

$$\frac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}=\frac{\cos\varphi+2\sin\varphi}{r\left(\cos^2\varphi-2\cos\varphi\sin\varphi+2\sin^2\varphi\right)}=\frac{1}{r}\frac{f(\varphi)}{g(\varphi)},$$

а условие $(x,y)\to\infty$ эквивалентно условию $r\to+\infty$. При $r\to+\infty$ первый сомножитель $1/r$ стремится к нулю. Докажем ограниченность второго сомножителя – функции $f(\varphi)/g(\varphi)$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

$$|f(\varphi)|\le|\cos\varphi|+2|\sin\varphi|\le 3,$$

$$|g(\varphi)|=\left|\cos^2\varphi-2\cos\varphi\sin\varphi+2\sin^2\varphi\right|=\left|(\cos\varphi-\sin\varphi)^2+\sin^2\varphi\right|>0.$$

Так как $g(\varphi)$ – непрерывна на $[0,2\pi]$, то она имеет на $[0,2\pi]$ минимальное значение, причем $m=\min\limits_{[0,2\pi]}g(\varphi)>0$, а значит, $g(\varphi)\ge m>0$, поэтому $|f(\varphi)/g(\varphi)|\le 3/m$, то есть функция $f(\varphi)/g(\varphi)$ ограничена на $[0,2\pi]$. Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}=0$. ◂

Пример 1.6. Вычислим повторные пределы функций

$$f(x,y)=\frac{ax+by}{cx+dy},\ c\ne 0, d\ne 0 \text{ и } g(x,y)=\frac{x^2+y^2x}{x+y}$$

в точке $O(0,0)$.

▸ $$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=\lim_{x\to0}\left(\lim_{\substack{y\to0\\ x-\text{фикс.},\,x\ne0}}\frac{ax+by}{cx+dy}\right)=\lim_{x\to0}\frac{a}{c}=\frac{a}{c},$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=\lim_{y\to0}\left(\lim_{\substack{x\to0\\ y-\text{фикс.},\,y\ne0}}\frac{ax+by}{cx+dy}\right)=\lim_{y\to0}\frac{b}{d}=\frac{b}{d},$$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}g(x,y)=\lim_{x\to0}\left(\lim_{\substack{y\to0\\ x-\text{фикс.},\,x\ne0}}\frac{x^2+y^2x}{x+y}\right)=\lim_{x\to0}x=0,$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}g(x,y)=\lim_{y\to0}\left(\lim_{\substack{x\to0\\ y-\text{фикс.},\,y\ne0}}\frac{x^2+y^2x}{x+y}\right)=\lim_{y\to0}0=0.$$ ◂

П р и м е р 1.7. Докажем, что функция $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ является бесконечно малой в точке $O(0,0)$, но при этом повторные пределы в данной точке не существуют.

▸ Согласно определению бесконечно малой функции требуется доказать, что $\lim\limits_{\substack{y\to0\\x\to0}} f(x,y)=0$. Отметим, что функция $f(x,y)$ не определена на осях координат, но точка $O(0,0)$ является предельной точкой области определения $f(x,y)$, и, значит, можно рассмотреть вопрос о пределе функции в точке O.

Пусть задано произвольное $\varepsilon>0$. Положим $\delta=\varepsilon/2$. Тогда если $\rho(A(x,y),O)=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, то $|x|<\delta$ и $|y|<\delta$. Следовательно,

$$\left|f(x,y)-0\right|=\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\le|x+y|\le|x|+|y|<2\delta=\varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{\substack{y\to0\\x\to0}} f(x,y)=0$.

Рассмотрим внутренний предел $\lim\limits_{\substack{x\to0,\\ y\text{–фикс.},\ y\neq0}} f(x,y)$ в повторном пределе $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$. Представим функцию $f(x,y)$ следующим образом:

$$f(x,y)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)+y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right).$$

При фиксированном $y\neq0$ слагаемое $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$ стремится к нулю при $x\to0$. Во втором слагаемом произведение $y\sin\left(\frac{1}{y}\right)$ является постоянным, отличным от нуля при $y\neq\frac{1}{\pi n}$ $(n\in\mathbb{Z})$, а $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ не имеет предела при $x\to0$. Следовательно, слагаемое $y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$, а значит, и вся функция $f(x,y)$, не имеет предела при $x\to0$ и фиксированном y, не равном 0 и $1/\pi n$, то есть, указанный внутренний предел не существует, а потому не существует повторный предел $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$. ◂

Пример 1.8. Вычислим повторные пределы функции $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ в точке $O(0,0)$ и исследуем существование предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

▸ $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{\substack{y\to 0\\ x-\text{фиксир.}\\ x\neq 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}0=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ y-\text{фиксир.}\\ y\neq 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}0=0.$$

Покажем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует.

Способ 1. Пусть точка $A(x,y)$ стремится к точке $O(0,0)$ по прямой $y=kx$, проходящей через точку O. Тогда получим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

Таким образом, приближаясь к точке $O(0,0)$ по различным прямым, соответствующим разным значениям k, получаем разные предельные значения. Отсюда следует, что предел данной функции в точке $O(0,0)$ не существует.

Способ 2. Перейдем к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{r\cos\varphi r\sin\varphi}{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}=\frac{\sin 2\varphi}{2}.$$

Таким образом, при $r\to 0$, в зависимости от φ (то есть от прямой по которой точка стремится к началу координат), получаем различные предельные значения, следовательно, предел данной функции в точке $O(0,0)$ не существует. ◂

1.4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть точка $A(a_1, a_2, ..., a_m)$ *принадлежит области определения* X функции $f(\vec{x})$ и является её предельной точкой.

Приращением или ***полным приращением функции*** $f(\vec{x})$ в точке A называют функцию Δu, определяемую формулой

$$\Delta u = f(\vec{x}) - f(A) = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, ..., a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, ..., a_m),$$

где $\vec{x}$ – любая точка из области определения функции, $\Delta x_i = x_i - a_i$, $i = \overline{1, m}$.

Функция $u = f(\vec{x})$ называется ***непрерывной в точке*** A, если выполняется одно из следующих условий

– предельное значение этой функции в точке A существует и равно $f(A)$, то есть $\lim\limits_{\vec{x} \to A} f(\vec{x}) = f\left(\lim\limits_{\vec{x} \to A} \vec{x}\right)$;

– $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \vec{x} \in M\ \ \rho(\vec{x}, A) < \delta \Rightarrow \left| f(\vec{x}) - f(A) \right| < \varepsilon$;

– $\lim\limits_{\vec{x} \to A} \Delta u = \lim\limits_{\vec{x} \to A} \left(f(\vec{x}) - f(A) \right) = \lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ ... \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta u = 0$ или, что тоже самое,

$f(\vec{x}) = f(A) + \alpha(\Delta \vec{x})$, где $\lim\limits_{\Delta \vec{x} \to 0} \alpha(\Delta \vec{x}) = 0$.

Предельные точки области определения функции, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются ***точками разрыва функции***.

Функция $f(\vec{x})$ называется

– ***непрерывной на множестве***, если она непрерывна в каждой точке этого множества;

– ***непрерывной в точке*** A ***по кривой*** L, если $\lim\limits_{\substack{\vec{x} \to A \\ \vec{x} \in L}} f(\vec{x}) = f(A)$;

– ***непрерывной вдоль кривой*** L, если $\forall A \in L\ \lim\limits_{\substack{\vec{x} \to A \\ \vec{x} \in L}} f(\vec{x}) = f(A)$.

Замечание. Если функция $f(\vec{x})$ *разрывна в точке* A *вдоль некоторой кривой* L, то точка A является точкой разрыва этой функции. При этом может существовать кривая вдоль которой функция непрерывна.

Пример 1.9. Покажем, что функция

$$u(x,y,z)=\begin{cases} ax^2+\dfrac{xyz}{y^2+z^2}, & y^2+z^2\neq 0 \\ ax^2, & y^2+z^2=0 \end{cases}$$

терпит разрыв в точке $M=(1,0,0)$, являясь непрерывной в этой точке вдоль прямой $x=1,\ y=0$.

▸ Рассмотрим поведение функции u на прямой $x=1, y=z$ в окрестности точки M. Так как

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ x=1,\ y=z}} u(x,y,z)=a+\frac{1}{2}\neq u(M),$$

то функция u разрывна в точке $M=(1,0,0)$.

Непрерывность вдоль прямой $x=1,\ y=0$ следует из равенства

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ x=1,\ y=0}} u(x,y,z)=a=u(M). \blacktriangleleft$$

Частные приращения. Зафиксируем все аргументы, кроме первого, а первому аргументу дадим произвольное приращение Δx_1 такое, чтобы точка $(x_1+\Delta x_1, x_2,...,x_m)$ находилась в области определения функции. Соответствующее приращение функции называется частным приращением функции в точке $(x_1,x_2,...,x_m)$, соответствующим приращению Δx_1 аргумента x_1 и обозначается $\Delta_{x_1}u$. Аналогично определяются частные приращения функции, соответствующие приращениям других аргументов:

$$\Delta_{x_1}u=f(x_1+\Delta x_1,x_2,...,x_m)-f(x_1,x_2,...,x_m),$$
$$\Delta_{x_2}u=f(x_1,x_2+\Delta x_2,...,x_m)-f(x_1,x_2,...,x_m),$$
$$\dots$$
$$\Delta_{x_m}u=f(x_1,x_2,...,x_m+\Delta x_m)-f(x_1,x_2,...,x_m).$$

Функция $u=f(\vec{x})=f(x_1,x_2,...,x_m)$ называется ***непрерывной в точке*** $\vec{x}$ ***по переменной*** x_k, если частное приращение $\Delta_{x_k}u$ этой функции в точке $\vec{x}$ представляет собой бесконечно малую функцию от Δx_k, то есть

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\Delta_{x_k}u=0.$$

При фиксированных значениях всех переменных, кроме переменной x_k, функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ представляет собой функцию одной переменной. Таким образом, непрерывность функции по переменной x_k означает непрерывность соответствующей функции одной переменной x_k. Непрерывность функции в точке $\vec{x}$ по отдельным переменным x_1, x_2, …, x_m представляет собой ее непрерывность на прямых, проходящих через точку $\vec{x}$ и параллельных осям координат.

Теорема 1.7. Из непрерывности функции в точке $\vec{x}$ следует непрерывность этой функции по каждой из переменных $x_1, x_2, ..., x_m$.

Замечание 1. Обратное утверждение в общем случае неверно. Докажем, что функция

$$u = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

непрерывна в точке $(0,0)$ по каждой из переменных x и y, но не является непрерывной на всех остальных прямых, проходящих через точку $(0,0)$, и поэтому не является непрерывной в точке $(0,0)$.

▶ Поскольку предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u$ не существует (см. пример 1.8), то функция u не является непрерывной в точке $(0,0)$.

Непрерывность функции на координатных осях вытекает из того, что ее значения на этих осях равны нулю. ◀

Замечание 2. Из непрерывности функции на бесконечном количестве кривых, проходящих через точку $\vec{x}$, не следует ее непрерывность в точке $\vec{x}$. Например, функция

$$u = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^4 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^4 + y^2 = 0. \end{cases}$$

непрерывна на любой прямой, проходящей через точку $(0,0)$, но в точке $(0,0)$ непрерывной не является.

▸ На любой прямой, проходящей через точку $(0,0)$ функция u непрерывна, так как значения на прямой $y=kx$ равны

$$u=\frac{x^2kx}{x^4+(kx)^2}=\frac{kx}{x^2+k^2}$$

и, следовательно, $\lim\limits_{\substack{y=kx,\\ x\to 0}} u(x,y)=0$. Непрерывность функции u на оси Oy вытекает из того, что ее значения на оси Oy равны 0.

Значения функции на параболе $y=px^2, p\neq 0$ постоянны и равны $\dfrac{x^2px^2}{x^4+\left(px^2\right)^2}=\dfrac{p}{1+p^2}\neq 0$, и поэтому предельное значение функции при стремлении к точке $(0,0)$ зависит от выбранной параболы, а значит, функция u разрывна в этой точке. ◂

Арифметические операции над непрерывными функциями. Пусть функции $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ непрерывны в точке A. Тогда функции

$$f(\vec{x})\pm g(\vec{x}),\ f(\vec{x})g(\vec{x}),\ f(\vec{x})/g(\vec{x})$$

непрерывны в точке A (частное при условии $g(A)\neq 0$).

Непрерывность сложной функции. Пусть функции

$$\begin{aligned} x_1&=\varphi_1(t_1,t_2,...,t_k)\\ x_2&=\varphi_2(t_1,t_2,...,t_k)\\ &\dots\\ x_m&=\varphi_m(t_1,t_2,...,t_k) \end{aligned} \tag{1.2}$$

заданы на множестве $Q\subset E^k$ ($t_1,t_2,...,t_k$ – координаты точек в этом пространстве). Тогда каждой точке $(t_1,t_2,...,t_k)\in Q$ ставится в соответствие с помощью формул (1.2) точка $(x_1,x_2,...,x_m)$ евклидова пространства E^m. Обозначим через M множество всех таких точек. Пусть $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ – функция m-переменных, заданная на множестве M. Тогда говорят, что на множестве Q евклидова пространства E^k определена сложная функция $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$, где $x_1,x_2,...,x_m$ являются функциями переменных $t_1,t_2,...,t_k$.

Теорема 1.8 (о непрерывности сложной функции). Пусть функции (1.2) непрерывны в точке $A(a_1,a_2,...,a_k)$, а функция $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ непрерывна в точке $B(b_1,b_2,...,b_m)$, где $b_i=\varphi_i(a_1,a_2,...,a_k)$, $i=\overline{1,m}$. Тогда сложная функция $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$, где $x_1,x_2,...,x_m$ представляют собой определенные выше функции аргументов $t_1,t_2,...,t_k$, непрерывна в точке $A(a_1,a_2,...,a_k)$.

Теорема 1.9 (о сохранении знака). Если функция $u=f(\vec{x})$ непрерывна в точке $A\in E^m$ и $f(A)\neq 0$, то существует такая δ-окрестность точки A, в пределах которой во всех точках области определения функция $f(\vec{x})$ не обращается в нуль и имеет знак, совпадающий со знаком $f(A)$.

Теорема 1.10 (о промежуточных значениях). Пусть функция $u=f(\vec{x})$ непрерывна во всех точках связного множества $M\subset E^m$. Пусть c – любое число, заключенное между $f(A)$ и $f(B)$, где $A\in M$, $B\in M$. Тогда на любой непрерывной кривой L, соединяющей точки A и B и целиком располагающейся в M, найдется точка Q такая, что $f(Q)=c$.

► Пусть

$$x_1=\varphi_1(t), x_2=\varphi_2(t), \ldots, x_m=\varphi_m(t), \ \alpha\le t\le\beta$$

уравнения непрерывной кривой L, соединяющей точки A и B и целиком расположенной в M. На сегменте $[\alpha,\beta]$ определена сложная функция $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$, $x_i=\varphi_i(t)$, $i=\overline{1,m}$, $\alpha\le t\le\beta$. Значения этой функции на $[\alpha,\beta]$ совпадают со значениями функции $u=f(\vec{x})$ на кривой L. Указанная сложная функция одной переменной t непрерывна на $[\alpha,\beta]$ в силу теоремы 1.8 и, следовательно, в некоторой точке $t=\xi$, $\xi\in[\alpha,\beta]$ принимает значение c. Поэтому в точке Q кривой L с координатами $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots, \varphi_m(\xi)$ справедливо равенство $f(Q)=c$. ◄

Теорема 1.11 (теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции). Если функция $u = f(\vec{x})$ непрерывна на *замкнутом ограниченном* множестве M, то она ограничена на этом множестве.

▸ Докажем сначала, что функция ограничена сверху.

От противного. Пусть функция $u = f(\vec{x})$ неограничена на M, тогда $\forall n$ найдется точка $A_n \in M$ такая, что $|f(A_n)| > n$. Таким образом, можно построить последовательность точек A_n ограниченного множества M. По теореме Больцано-Вейерштрасса 1.4 в этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{A_{k_n}\}$, предел которой в силу замечания к теореме Больцано-Вейерштрасса принадлежит множеству M.

По предположению $f(A_n)$ бесконечно большая последовательность, следовательно, ее подпоследовательность $f(A_{k_n})$ также бесконечно большая. С другой стороны в силу непрерывности $f(\vec{x})$, последовательность $f(A_{k_n})$ должна сходится к $f(A)$. Пришли к противоречию.

Ограниченность снизу доказывается аналогично. ◂

Теорема 1.12 (теорема Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией своих точных граней). Если функция $u = f(\vec{x})$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве M, то она достигает на этом множестве своих точных верхней и нижней граней.

▸ Доказательство данной теоремы полностью совпадает с её доказательством для функций одной переменной. ◂

1.5. РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Функция $f(\vec{x})$ называется ***равномерно непрерывной на множестве*** $M \subset E^m$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall A', A'' \in M \ \ \rho(A', A'') < \delta \Rightarrow |f(A') - f(A'')| < \varepsilon .$$

Теорема 1.13 (о равномерной непрерывности). Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве M функция равномерно непрерывна на нем.

▸ Доказательство аналогично доказательству теоремы Гейне-Кантора о равномерной непрерывности для функций одной переменной (ссылка на первую часть) ◂

1.6. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.6.1. Частные производные и частные дифференциалы

Пусть $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ – *внутренняя* точка области определения функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$. Рассмотрим частное приращение этой функции в точке $A(x_1, x_2, ..., x_m)$, соответствующее приращению Δx_k аргумента x_k

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1, x_2, ..., x_k + \Delta x_k, ..., x_m) - f(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_m).$$

При фиксированной точке $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ отношение $\dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$ является функцией одного аргумента Δx_k.

Частной производной функции $u = f(x_1, x_2, ... x_m)$ в точке A по аргументу x_k называется $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$ (если он существует). Эта частная производная обозначается одним из следующих символов:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(A),\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(A),\ u'_{x_k}(A),\ f'_{x_k}(A),\ f'_k(A).$$

Отметим, что при фиксированных значениях всех аргументов, кроме x_k, функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ становится функцией одной переменной. Производная этой функции одной переменной и есть частная производная функции u по аргументу x_k, поэтому вычисление частных производных производится по тем же правилам, что и вычисление производных функций одной переменной.

Замечание. Если $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ – граничная точка области определения функции, то для такой точки введенное определение частной производной может быть непригодным. Например, если функция $u = f(x, y)$ определена в треугольнике G (рис. 1), то для граничной точки $A_0(x_0, y_0)$ не определено частное приращение $\Delta_x u$, так как при любом $\Delta x \neq 0$ точка $A_1(x_0 + \Delta x, y_0)$ лежит вне области G. Поэтому нельзя определить

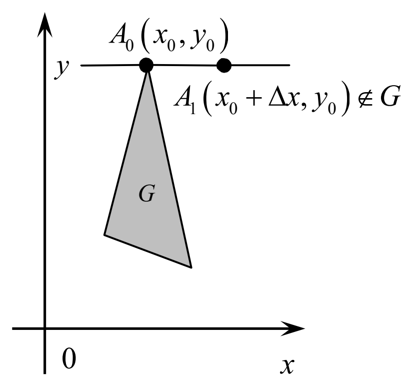


Рис. 1

$\frac{\partial u}{\partial x}(A_0)$, пользуясь данным выше определением частной производной. В таком случае, если существует частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ во внутренних точках A области G и существует предел $\lim\limits_{A\to A_0}\frac{\partial u}{\partial x}(A)$, то полагают $\frac{\partial u}{\partial x}(A_0)=\lim\limits_{A\to A_0}\frac{\partial u}{\partial x}(A)$.

Частным дифференциалом $d_{x_k}u$ функции $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ называется дифференциал этой функции, рассматриваемой как функция только одной переменной x_k. Из свойств дифференциала функций одной переменной следует, что $d_{x_k}u=\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k$, и тем самым частный дифференциал $d_{x_k}u$ является линейной функцией переменной dx_k, называемой дифференциалом независимой переменной x_k.

1.6.2. Понятие дифференцируемости

Функция $L:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ называется ***линейной***, если

1) $\forall\alpha\in R\ \ \forall\vec{x}\in\mathbb{R}^m\quad L(\alpha\vec{x})=\alpha L(\vec{x})$,

2) $\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^m\ L(\vec{x}+\vec{y})=L(\vec{x})+L(\vec{y})$.

$$\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^m\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\quad L(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha L(\vec{x})+\beta L(\vec{y})$$

Теорема 1.14. Всякая линейная функция L представима в виде

$$L(\vec{x})=\sum_{k=1}^{m}l_kx_k,$$

где $l_k=L(\vec{e}_k)$, $l_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,m}$, $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_m$ базис пространства $\mathbb{R}^m$.

▸ Пусть $\vec{x}=\sum\limits_{k=1}^{m}x_k\vec{e}_k$, тогда

$$L(\vec{x})=L\left(\sum_{k=1}^{m}x_k\vec{e}_k\right)=\sum_{k=1}^{m}x_kL(\vec{e}_k)=\sum_{k=1}^{m}x_kl_k\ .◂$$

Следствие. Для всякой линейной функции $L(\vec{x})$ существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что $|L(\vec{x})| \le c \cdot \|\vec{x}\|$, где $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$.

▸ Так как $\forall k = \overline{1,m} \quad x_k \le |x_k| \le \|\vec{x}\|$, то, согласно теореме,

$$|L(\vec{x})| = \left|\sum_{k=1}^{m} x_k l_k\right| \le \sum_{k=1}^{m} |x_k l_k| \le \sum_{k=1}^{m} \|\vec{x}\| |l_k| \le \|\vec{x}\| \sum_{k=1}^{m} |l_k| \le c \cdot \|\vec{x}\|, \qquad (1.3)$$

где $c = m \cdot \max\limits_{1 \le k \le m} |l_k|$. ◂

Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$, $\vec{x}$ – внутренняя точка множества X и $f : X \to \mathbb{R}$. Функция f называется ***дифференцируемой*** в точке $\vec{x}$, если существует линейная функция $L(\vec{a})$ такая, что

$$f(\vec{x} + \vec{a}) - f(\vec{x}) = L(\vec{a}) + o(\|\vec{a}\|), \quad \vec{a} \to \vec{0}, \qquad (1.4)$$

или, другими словами, для произвольного направления $\vec{a}$

$$\lim_{\vec{a} \to \vec{0}} \frac{f(\vec{x} + \vec{a}) - f(\vec{x}) - L(\vec{a})}{\|\vec{a}\|} = 0.$$

При этом будем считать, что величина $o(\|\vec{a}\|)$ равна нулю при $\vec{a} = \vec{0}$.

Функция $L(\vec{a})$ называется ***дифференциалом*** (иногда ***полным дифференциалом***) функции f в точке $\vec{x}$ и обозначается следующим образом $df(\vec{x}) = df(\vec{x}; \vec{a})$.

Теорема 1.15. Условие (1.4) эквивалентно условию

$$f(\vec{x} + \vec{a}) - f(\vec{x}) = L(\vec{a}) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k a_k, \qquad (1.5)$$

где $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $\alpha_k = \alpha_k(a_1, a_2, \ldots, a_m) = o(1)$ при $\rho = \|\vec{a}\| \to 0$, $k = \overline{1,m}$.

▸ * Пусть выполняется условие (1.4). Тогда, полагая, что $\rho \ne 0$ (в противном случае все члены в правой части соотношений (1.4) и (1.5) равны нулю), представим $o(\rho)$ в виде

$$o(\rho) = \frac{o(\rho) \cdot \rho^2}{\rho \cdot \rho} = \frac{o(\rho) \cdot \sum_{k=1}^{m} a_k^2}{\rho \cdot \rho} = \sum_{k=1}^{m} \left[\left(\frac{o(\rho) \cdot a_k}{\rho \cdot \rho} \right) \cdot a_k \right] = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k a_k,$$

где $\alpha_k = \dfrac{o(\rho) \cdot a_k}{\rho^2}$, $k = \overline{1,m}$.

Учитывая неравенство $|a_k| \le \rho$, получаем, что $\alpha_k = o(1)$ при $\rho \to 0$, а значит, выполняется условие (1.5).

Пусть теперь выполняется условие (1.5). Тогда при $\rho \ne 0$

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \alpha_k a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k a_k}{\rho}\right| \cdot \rho \le \left(\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \frac{|a_k|}{\rho}\right) \cdot \rho \le \left(\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|\right) \cdot \rho = o(\rho),$$

следовательно, $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k a_k = o(\rho)$ и выполняется условие (1.4). ◀

Замечание. Учитывая, что функции α_k не определены при $\rho = 0$, для определенности положим $\alpha_k\left(\vec{0}\right) = 0$. При этом функции α_k будут непрерывны в точке $\vec{0}$.

Теорема 1.16. Пусть f – дифференцируемая в точке $\vec{x}$ функция. Тогда $\forall k = \overline{1,m}$ существуют частные производные $f_k'(\vec{x})$,

$$df(\vec{x};\vec{a}) = L(\vec{a}) = \sum_{k=1}^{m} l_k a_k\,, \tag{1.6}$$

где $l_k = f_k'(\vec{x})$, $k = \overline{1,m}$.

▶ Положим в формуле (1.5) $\vec{a} = (0,...,0,a_k,0,...,0)$. Тогда

$$f(\vec{x}+\vec{a}) - f(\vec{x}) = L(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i = l_k a_k + \alpha_k a_k,$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0} \alpha_k = 0$.

Отметим, что при таком выборе $\vec{a}$ $\rho = |a_k|$. Разделив обе части полученного равенства на a_k и перейдя к пределу при $a_k \to 0$, получаем $f_k'(\vec{x}) = l_k$. ◀

Следствие. Представление (1.6) единственно.

Замечание 1. Заменив a_k на dx_k получим

$$df(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} l_k dx_k = \sum_{k=1}^{m} f_k'(\vec{x})\,dx_k\,, \tag{1.7}$$

то есть полный дифференциал оказывается равным сумме частных дифференциалов.

Замечание 2. Функция L, а также определяющие ее числа $l_1, l_2, \ldots, l_m$, зависят не только от направления $\vec{a}$, но и, в общем случае, от $\vec{x}$.

Теорема 1.17. Пусть f – дифференцируемая в точке $\vec{x}^0$ функция. Тогда f непрерывна в этой точке.

▶ Действительно, из условия (1.5) дифференцируемости функции в точке вытекает, что $\lim\limits_{\vec{a}\to\vec{0}} \Delta f = 0$, а это и означает непреырвность функции f в точке $\vec{x}^0$. ◀

Теорема 1.18 (достаточное условие дифференцируемости). Пусть $f: M \to \mathbb{R}$ и $\vec{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0\right)$ – фиксированная точка из множества $M \subset \mathbb{R}^m$. Если в некоторой окрестности точки $\vec{x}^0$ существуют и конечны все частные производные функции f, а в самой в точке $\vec{x}^0$ все эти производные непрерывны, то функция f дифференцируема в точке $\vec{x}^0$.

▶ *Дадим аргументу $\vec{x}$ столь малое приращение $\vec{a} = \left(a_1, a_2, ..., a_m\right)$, чтобы точка $\vec{x}^0 + \vec{a}$ не выходила за пределы окрестности, указанной в условии теоремы. Полное приращение функции $f\left(\vec{x}\right)$ в этом случае может быть представлено в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= f\left(\vec{x}^0 + \vec{a}\right) - f\left(\vec{x}^0\right) = \\
&= \Big[f\left(x_1^0 + a_1, x_2^0 + a_2, x_3^0 + a_3, \ldots, x_m^0 + a_m\right) - \\
&\qquad\qquad - f\left(x_1^0, x_2^0 + a_2, x_3^0 + a_3, \ldots, x_m^0 + a_m\right) \Big] + \\
&\quad + \Big[f\left(x_1^0, x_2^0 + a_2, x_3^0 + a_3, \ldots, x_m^0 + a_m\right) - \\
&\qquad\qquad - f\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + a_3, \ldots, x_m^0 + a_m\right) \Big] + \\
&\quad + \Big[f\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + a_3, \ldots, x_m^0 + a_m\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_m^0 + a_m\right) \Big] + \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad + \Big[f\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_m^0 + a_m\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_m^0\right) \Big].
\end{aligned}
$$

Рассмотрим выражения, стоящие в квадратных скобках. Каждое из них можно рассматривать как приращение функции одной переменной, а, так как функция $f\left(\vec{x}\right)$ имеет все частные производные, то производная этой функции существует и равна соответствующей частной производной. Например, выражение

$$f\left(x_1^0 + a_1, x_2^0 + a_2, x_3^0 + a_3, \ldots, x_m^0 + a_m\right) - \left(x_1^0, x_2^0 + a_2, x_3^0 + a_3, \ldots, x_m^0 + a_m\right)$$

можно рассматривать как приращение функции $f\left(x_1, x_2^0 + a_2, x_3^0 + a_3, \ldots, x_m^0 + a_m\right)$ одной переменной x_1 на сегменте $\left[x_1^0, x_1^0 + a_1\right]$, производная которой равна $f_1'(\vec{x})$.

Применим к каждой из этих разностей формулу Лагранжа:

$$\begin{aligned}
&\Delta f = f\left(\vec{x}^0 + \vec{a}\right) - f\left(\vec{x}^0\right) = \\
&= f_1'\left(x_1^0 + \theta_1 a_1, x_2^0 + a_2, x_3^0 + a_3, \ldots, x_m^0 + a_m\right) a_1 + \\
&+ f_2'\left(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 a_2, x_3^0 + a_3, \ldots, x_m^0 + a_m\right) a_2 + \\
&+ f_3'\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + \theta_3 a_3, \ldots, x_m^0 + a_m\right) a_3 + \ldots + \\
&+ f_m'\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_m^0 + \theta_m a_m\right) a_m,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где $0 < \theta_i < 1, \quad i = \overline{1, m}$.

Так как производные f_i', $i = \overline{1, m}$, непрерывны в точке $\vec{x}^0$, то

$$f_1'\left(x_1^0 + \theta_1 a_1, x_2^0 + a_2, x_3^0 + a_3, \ldots, x_m + a_m\right) = f_1'\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_m^0\right) + \alpha_1,$$

$$f_2'\left(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 a_2, x_3^0 + a_3, \ldots, x_m^0 + a_m\right) = f_2'\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_m^0\right) + \alpha_2,$$

$$f_3'\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0 + \theta_3 a_3, \ldots, x_m^0 + a_m\right) = f_3'\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_m^0\right) + \alpha_3,$$

$$\ldots$$

$$f_m'\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_m^0 + \theta_m a_m\right) = f_m'\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_m^0\right) + \alpha_m, \tag{1.9}$$

где $\alpha_i = o(1)$, $i = \overline{1, m}$, при $\|\vec{a}\| \to 0$.

Подставляя равенства (1.9) в формулу (1.8), получаем

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m} f_i'\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_m^0\right) a_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i,$$

следовательно, функция $f\left(\vec{x}\right)$ дифференцируема в точке $\vec{x}^0$. ◄

З а м е ч а н и е 1. Теорема имеет важное значение, поскольку понятие дифференцируемости функции играет первостепенную роль в ряде разделов теории функций многих переменных, а непосредственная проверка дифференцируемости функции часто бывает затруднительна. Как правило, в этих случаях значительно проще проверить непрерывность частных производных, для вычислений которых имеется удобный аналитический аппарат.

Замечание 2. Условия теоремы не являются необходимыми для дифференцируемости функции. Так, например, функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)^{(1+a)/2}, & \text{в рациональных точках;}\\ 0, & \text{в остальных точках,}\end{cases}$$

где $a>0$ разрывна в любой точке, отличной от нулевой, поэтому не существует такой окрестности нулевой точки, в которой она бы имела непрерывные частные производные.

Но при этом она является дифференцируемой в точке $(0,0)$, так как

$$f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)=0\cdot x+0\cdot y+\rho^{1+a} \text{ и } \rho^{1+a}=o(\rho) \text{ при } \rho\to 0.$$

Замечание 3. В общем случае, из существования всех частных производных в точке не следует ни непрерывность, ни дифференцируемость.

▸ 1. Функция $f(x,y,z)$, равная нулю на координатных плоскостях $x=0$, $y=0$, $z=0$ и единице в остальных точках пространства $\mathbb{R}^3$ имеет, очевидно, частные производные равные нулю в точке $(0,0,0)$, но при этом является разрывной, а значит не дифференцируемой.

2. Функция $u(x,y)=\sqrt{|xy|}$ является непрерывной, имеющей все частные производные в точке $M=(0,0)$, но не дифференцируемой в этой точке.

По определению частной производной имеем

$$u'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

$$u'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0$$

Если же $\Delta x=\Delta y>0$, то приращение функции $u(x,y)$ в точке M равно Δx, но по определению дифференциала оно должно быть $o(\Delta x)$. Таким образом, функция $u=\sqrt{|xy|}$ не является дифференцируемой в точке M. ◂

Следствие. Пусть M – открытое множество, $f:M\to\mathbb{R}$. Тогда, если все частные производные функции f на множестве M существуют и непрерывны, то функция f дифференцируема на множестве M.

Теорема 1.19 (О дифференцировании сложной функции). Пусть функции

$$x_i = \varphi_i\left(t_1, t_2, ..., t_n\right),\ i = \overline{1,m} \tag{1.10}$$

дифференцируемы в некоторой точке $\vec{t}^{\,0} = \left(t_1^0, t_2^0, ..., t_n^0\right)$, а функция $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$ дифференцируема в точке $\vec{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right)$, где $x_k^0 = \varphi_k\left(t_1^0, t_2^0, ..., t_n^0\right)$, $k = \overline{1,m}$. Тогда сложная функция $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$, где $x_1, x_2, ..., x_m$ определяются соотношениями (1.10), дифференцируема в точке $\vec{t}^{\,0}$. При этом частные производные этой сложной функции в точке $\vec{t}^{\,0}$ определяются формулами

$$\frac{\partial u}{\partial t_l} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_l},\quad l = \overline{1,n}, \tag{1.11}$$

в которых все частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ берутся в точке $\vec{x}^0$, а производная $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_l}$ – в точке $\vec{t}^{\,0}$.

▸ Дадим аргументам $t_1, t_2, ..., t_n$ в точке $\vec{t}^{\,0}$ произвольные приращения $\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_n$, не равные одновременно нулю. Этим приращениям соответствуют приращения $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m$ функций (1.10) в точке $\vec{t}^{\,0}$. Приращениям $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m$ в свою очередь соответствует приращение Δu функции $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$ в точке $\vec{x}^0$. Поскольку функция $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$ предполагается дифференцируемой в этой точке, указанное приращение Δu может быть записано в виде

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta x_i\,, \tag{1.12}$$

где частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ берутся в точке $\vec{x}^0$, а $\alpha_i = o(1)$ при $\rho_x \to 0$, где $\rho_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Delta x_i^2}$.

В силу дифференцируемости функций (1.10) в точке $\vec{t}^{\,0}$, указанные приращения $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m$ можно записать в виде

$$\Delta x_i = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial t_l} \Delta t_l + o(\rho_t),\ i = \overline{1,m} \tag{1.13}$$

при $\rho_t \to 0$, где $\rho_t = \sqrt{\sum_{l=1}^{n} \Delta t_l^2}$ и частные производные $\frac{\partial x_i}{\partial t_l}$ берутся в точке $\vec{t}^{\,0}$.

Подставляя выражения (1.13) в формулу (1.12), получим

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial t_l} \Delta t_l + o(\rho_t) \right) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta x_i =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_l} \right) \Delta t_l + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} o(\rho_t) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta x_i =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} A_l \Delta t_l + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} o(\rho_t) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta x_i .$$

Остается доказать, что

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} o(\rho_t) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta x_i = o(\rho_t) \text{ при } \rho_t \to 0 .$$

В самом деле, величины $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ берутся в точке $\vec{x}^{\,0}$ и поэтому представляют собой постоянные числа, не зависящие от ρ_t. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} o(\rho_t) = o(\rho_t).$$

Величины Δx_i, $i = \overline{1,m}$, в силу формулы (1.13) и неравенства (1.3), удовлетворяют неравенству $|\Delta x_i| \le \mathrm{const} \cdot \rho_t$. Из этого неравенства следует, что $\Delta x_i \to 0$ при $\rho_t \to 0$, а значит и $\rho_x \to 0$. Последнее, в силу непрерывности функций α_i в точке $\vec{0}$, означает, что коэффициенты $\alpha_i = o(1)$, $i = \overline{1,m}$, при $\rho_t \to 0$.

Следовательно, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta x_i = o(\rho_t)$. ◄

1.6.3. Производная по направлению. Частные производные

Пусть $f(\vec{x}): X \to \mathbb{R}$, $X \subset E^m$, $\vec{x}^0$ – внутренняя точка множества X, $\vec{a}$ – произвольное ***направление*** (ненулевой вектор пространства E^m). Предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\vec{x}^0+t\vec{a}\right)-f\left(\vec{x}^0\right)}{\|t\vec{a}\|}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\vec{x}^0+t\vec{a}\right)-f\left(\vec{x}^0\right)}{t\|\vec{a}\|} \qquad (1.14)$$

если он существует и *конечен* называется ***производной функции*** f ***в точке*** $\vec{x}^0$ ***по направлению*** $\vec{a}$ и обозначается $\dfrac{\partial f\left(\vec{x}^0\right)}{\partial \vec{a}}$ или $f'_{\vec{a}}\left(\vec{x}^0\right)$.

Замечание 1. Точка $\vec{x}^0+t\vec{a}$ лежит на прямой l, проведенной через точку $\vec{x}^0$ в направлении $\vec{a}$, то есть приращение аргумента функции берется по этой прямой.

Замечание 2. Если ввести обозначения $A_0=\vec{x}^0$, $A=\vec{x}$, то для производной $f'_{\vec{a}}\left(\vec{x}^0\right)$ выражение (1.14) можно записать в виде

$$f'_{\vec{a}}(A_0)=\lim_{A\to A_0}\frac{\Delta f}{\|AA_0\|}=\lim_{A\to A_0}\frac{f(A)-f(A_0)}{\|AA_0\|}. \qquad (1.15)$$

Из (1.15) видно, что производная $f'_{\vec{a}}\left(\vec{x}^0\right)$ характеризует «скорость изменения» функции в точке $\vec{x}^0$ по направлению $\vec{a}$.

Пусть M *открытое* множество в E^m. Если $\forall \vec{x}\in M$ существует производная $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$, то говорят, что производная $f'_{\vec{a}}$ по направлению $\vec{a}$ определена на множестве M, то есть $f'_{\vec{a}}: M\to\mathbb{R}$.

Замечание 3. Обычные частные производные

$$\frac{\partial f\left(\vec{x}^0\right)}{\partial x_1},\ \frac{\partial f\left(\vec{x}^0\right)}{\partial x_2},\ldots,\ \frac{\partial f\left(\vec{x}^0\right)}{\partial x_m}$$

можно рассматривать как производные по направлению, если в качестве направления взять базисные вектора $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_m$ пространства E^m.

Лемма 1.6. Пусть для функции $f(\vec{x})$ на некотором открытом множестве M определена $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$ и $\varphi(t)=f(\vec{x}+t\vec{a})$, где переменная t выбирается так, чтобы $\vec{x}+t\vec{a}\in M$. Тогда

$$\varphi'(t)=f'_{\vec{a}}(\vec{x}+t\vec{a})\|\vec{a}\| \text{ и } f'_{\vec{a}}(\vec{x})=\frac{\varphi'(0)}{\|\vec{a}\|}.$$

▸ Действительно,

$$\varphi'(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{\varphi(t+\tau)-\varphi(t)}{\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{f\left(\vec{x}+(t+\tau)\vec{a}\right)-f\left(\vec{x}+t\vec{a}\right)}{\tau}=$$

$$=\lim_{\tau\to 0}\frac{f\left((\vec{x}+t\vec{a})+\tau\vec{a}\right)-f\left(\vec{x}+t\vec{a}\right)}{\tau}=f'_{\vec{a}}\left(\vec{x}+t\vec{a}\right)\|\vec{a}\|$$

Таким образом, производную функции f в точке $\vec{x}$ по направлению $\vec{a}$ можно вычислить через производную функции $\varphi(t)$, которая представляет собой функцию f, заданную на прямой $\vec{x}+t\vec{a}$. ◂

Теорема 1.20. Пусть функция $f(\vec{x}):X\to\mathbb{R}$**,** $X\subset E^m$, дифференцируема в рассматриваемой области и α_k – угол между вектором $\vec{a}$ и координатной осью Ox_k. Тогда производная $\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial\vec{a}}$ существует и определяется по формуле

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial\vec{a}}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}\cos\alpha_k\,. \tag{1.16}$$

▸ Согласно лемме 1.6, $f'_{\vec{a}}(\vec{x})=\dfrac{\varphi'(0)}{\|\vec{a}\|}$, где $\varphi(t)=f\left(\vec{x}+t\vec{a}\right)$. Рассматривая $f\left(\vec{x}+t\vec{a}\right)$ как сложную функцию переменной t и применяя теорему 1.19, находим

$$\varphi'(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}a_k\,.$$

Отсюда окончательно получаем, что

$$f'_{\vec{a}}(\vec{x})=\frac{\varphi'(0)}{\|\vec{a}\|}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}\frac{a_k}{\|\vec{a}\|}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}\cos\alpha_k\,. \blacktriangleleft$$

З а м е ч а н и е. Из того, что функция в некоторой точке имеет производные по всем направлениям, не следует, что функция в этой точке дифференцируема или даже непрерывна. Например, функция

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } y\neq x^2 \ \text{ или } \ x=y=0;\\ 1, & \text{если } y=x^2 \ \text{ и } \ x^2+y^2>0,\end{cases}$$

имеет в точке $(0,0)$ по любому направлению производную, равную нулю. Однако в точке $(0,0)$ функция f разрывна и тем более не дифференцируема.

Производной функции $f : X \to \mathbb{R}$ ***в точке*** $\vec{x}^0 \in X \subset \mathbb{R}^m$ называется вектор

$$\left(f_1'\left(\vec{x}^0\right), f_2'\left(\vec{x}^0\right), \ldots, f_m'\left(\vec{x}^0\right)\right) \text{ или } \left(\frac{\partial f\left(\vec{x}^0\right)}{\partial x_1}, \frac{\partial f\left(\vec{x}^0\right)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f\left(\vec{x}^0\right)}{\partial x_m}\right).$$

Этот вектор обозначается одним из символов:

$$f'\left(\vec{x}^0\right),\ \operatorname{grad} f\left(\vec{x}^0\right),\ \nabla f\left(\vec{x}^0\right),$$

и называется вектор-градиентом или просто градиентом функции f в точке $\vec{x}$.

Геометрический смысл градиента

Согласно (1.16) для произвольного направления $\vec{a} \in E^m$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cos \alpha_k = \frac{\left(f', \vec{a}\right)}{\|\vec{a}\|} = \|f'\| \cdot \cos\left(\widehat{f', \vec{a}}\right),$$

из которого видно, что $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}}$ будет иметь максимальное значение при $\vec{a} = f'$ (в этом случае $\cos\left(\widehat{f', \vec{a}}\right)$ принимает свое максимальное значение). Следовательно, направление градиента функции f есть направление, производная по которому в точке $\vec{x}$ максимальна.

Теорема 1.21 (свойства градиентов). Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \in X$. Предположим, что все частные производные функций f и g существуют и конечны на множестве X. Тогда справедливы равенства:

1) $\forall c \in \mathbb{R}\ \operatorname{grad}(cf) = c \cdot \operatorname{grad} f$.

2) $\operatorname{grad}(f + g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$.

3) $\operatorname{grad}(fg) = g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g$.

4) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g \cdot \operatorname{grad} f - f \cdot \operatorname{grad} g}{g^2}$, $g(\vec{x}) \neq 0$.

▸ Так как доказательства всех пунктов теоремы строятся единым образом, ограничимся рассмотрением одного из них, а именно, докажем третье утверждение:

$$\operatorname{grad}(fg)=\left(\frac{\partial(fg)}{\partial x_1},\frac{\partial(fg)}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial(fg)}{\partial x_m}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}g+\frac{\partial g}{\partial x_1}f,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}g+\frac{\partial g}{\partial x_2}f,\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_m}g+\frac{\partial g}{\partial x_m}f\right)=$$

$$=g\cdot\operatorname{grad}f+f\cdot\operatorname{grad}g.$$ ◂

Теорема 1.22. Пусть $f: X\to\mathbb{R}$, $g: X\to\mathbb{R}$, $\vec{x}\in X$, $\vec{a}$ – направление. Предположим, что производные $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$ и $g'_{\vec{a}}(\vec{x})$ существуют и конечны на *открытом* множестве X. Тогда существуют приведенные ниже производные по направлению $\vec{a}$ и справедливы равенства:

1) $\forall c\in\mathbb{R}\ (cf)'_{\vec{a}}(\vec{x})=cf'_{\vec{a}}(\vec{x})$.

2) $(f+g)'_{\vec{a}}(\vec{x})=f'_{\vec{a}}(\vec{x})+g'_{\vec{a}}(\vec{x})$.

3) $(fg)'_{\vec{a}}(\vec{x})=f'_{\vec{a}}(\vec{x})g(\vec{x})+f(\vec{x})g'_{\vec{a}}(\vec{x})$.

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_{\vec{a}}(\vec{x})=\dfrac{f'_{\vec{a}}(\vec{x})g(\vec{x})-f(\vec{x})g'_{\vec{a}}(\vec{x})}{g^2(\vec{x})}$, $g(\vec{x})\neq 0$.

▸ Пусть $\varphi(t)=f\left(\vec{x}+t\vec{a}\right)$ и $\psi(t)=g\left(\vec{x}+t\vec{a}\right)$ Ранее было показано, что $f'_{\vec{a}}(\vec{x})=\dfrac{\varphi'(0)}{\|\vec{a}\|}$ и $g'_{\vec{a}}(\vec{x})=\dfrac{\psi'(0)}{\|\vec{a}\|}$. Аналогичным образом можно показать, что

$$(cf)'_{\vec{a}}(\vec{x})=\frac{(c\varphi)'(0)}{\|\vec{a}\|},$$

$$(f+g)'_{\vec{a}}(\vec{x})=\frac{(\varphi+\psi)'(0)}{\|\vec{a}\|},$$

$$(f\cdot g)'_{\vec{a}}(\vec{x})=\frac{(\varphi\cdot\psi)'(0)}{\|\vec{a}\|},$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_{\vec{a}}(\vec{x})=\frac{1}{\|\vec{a}\|}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'(0)$$

Применяя теперь правила дифференцирования функций одной переменной, получим:

1) $(cf)'_{\vec{a}}(\vec{x})=\dfrac{(c\varphi)'(0)}{\|\vec{a}\|}=\dfrac{c\varphi'(0)}{\|\vec{a}\|}=cf'_{\vec{a}}(\vec{x})$

2) $(f+g)'_{\vec{a}}(\vec{x})=\dfrac{(\varphi+\psi)'(0)}{\|\vec{a}\|}=\dfrac{\varphi'(0)+\psi'(0)}{\|\vec{a}\|}=f'_{\vec{a}}(\vec{x})+g'_{\vec{a}}(\vec{x})$

3) $(f\cdot g)'_{\vec{a}}(\vec{x})=\dfrac{(\varphi\cdot\psi)'(0)}{\|\vec{a}\|}=\dfrac{\varphi'(0)\psi(0)+\varphi(0)\psi'(0)}{\|\vec{a}\|}=$

$=f'_{\vec{a}}(\vec{x})g(\vec{x})+f(\vec{x})g'_{\vec{a}}(\vec{x})$

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_{\vec{a}}(\vec{x})=\dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\left(\dfrac{\varphi}{\psi}\right)'(0)=\dfrac{\varphi'(0)\psi(0)-\varphi(0)\psi'(0)}{\|\vec{a}\|\psi^2(0)}=$

$$=\frac{f'_{\vec{a}}(\vec{x})g(\vec{x})-f(\vec{x})g'_{\vec{a}}(\vec{x})}{g^2(\vec{x})}.\blacktriangleleft$$

Замечание. Если f – дифференцируемая в точке $\vec{x}$ функция, то утверждение теоремы является следствием свойств градиентов.

Теорема 1.23 (о среднем значении). Предположим, что для некоторых $t>0$, точки $\vec{x}$, направления $\vec{a}$ и $\forall\tau\ \ 0\le\tau\le t$ существует и конечна $f'_{\vec{a}}(\vec{x}+\tau\vec{a})$. Тогда

$$\exists\theta\in(0,1)\ \ f(\vec{x}+t\vec{a})-f(\vec{x})=f'_{\vec{a}}(\vec{x}+\theta t\vec{a})\cdot t\cdot\|\vec{a}\|. \qquad (1.17)$$

$\blacktriangleright$ Применяя к функции $\varphi(\tau)=f(\vec{x}+\tau\vec{a})$ теорему Лагранжа на отрезке $[0,t]$, получим, что

$$\exists\theta\in(0,1)\ \ \varphi(t)-\varphi(0)=\varphi'(\theta t)t.$$

Учитывая теперь, что $\varphi'(\tau)=f'_{\vec{a}}(\vec{x}+\tau\vec{a})\|\vec{a}\|$, окончательно имеем

$$\exists\theta\in(0,1)\ \ f(\vec{x}+t\vec{a})-f(\vec{x})=f'_{\vec{a}}(\vec{x}+\theta t\vec{a})\cdot t\cdot\|\vec{a}\|.\blacktriangleleft$$

1.6.4. Инвариантность первого дифференциала

Согласно замечанию 1 к теореме 1.16 дифференциал функции $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)$ для случая, когда аргументы функции $x_1, x_2, \ldots, x_m$ являются независимыми переменными можно представить в виде

$$df\left(\vec{x}\right)=\sum_{k=1}^{m} L_k dx_k=\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f\left(\vec{x}\right)}{\partial x_k} dx_k=$$
$$=\frac{\partial f\left(\vec{x}\right)}{\partial x_1} dx_1+\frac{\partial f\left(\vec{x}\right)}{\partial x_2} dx_2+\cdots+\frac{\partial f\left(\vec{x}\right)}{\partial x_m} dx_m .$$

Докажем, что эта формула является универсальной и справедлива также и в том случае, когда аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ функции $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)$ являются функциями новых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Пусть аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ функции $u=f\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)$ представляют собой дифференцируемые в точке $\vec{t}^{\,0}=\left(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0\right)$ функции $x_k=\varphi_k\left(t_1, t_2, \ldots, t_n\right)$, а сама функция $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)$ дифференцируема в точке $\vec{x}^{\,0}=\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0\right)$, где $x_i^0=\varphi_i\left(\vec{t}^{\,0}\right)$. В таком случае мы можем рассматривать u как сложную функцию аргументов $t_1, t_2, \ldots, t_m$, которая, в силу теоремы, является дифференцируемой в точке $\vec{t}_0$. Поэтому дифференциал этой сложной функции можно представить в виде

$$du=\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial t_k} dt_k, \quad \frac{\partial u}{\partial t_k}=\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t_k}.$$

Тогда

$$du=\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial t_k} dt_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t_k}\right) dt_k=\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t_k} dt_k=$$
$$=\sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t_k} dt_k=\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_l}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_l}{\partial t_k} dt_k\right)=\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_l} dx_l .$$

Свойство инвариантности формы первого дифференциала позволяет установить следующие правила дифференцирования.

Теорема 1.24 (правила дифференцирования). Пусть u, v – дифференцируемые функции, тогда:

1) $d(cu) = c\,du, c = const$, 2) $d(u \pm v) = du \pm dv$,

3) $d(uv) = u\,dv + v\,du$, 4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}, v \neq 0$

► Доказательство теоремы основано на использовании общей формы первого дифференциала и правилах вычисления частных производных. Так как доказательства всех пунктов строятся единым образом, приведем его только для третьего случая:

Пусть $w = uv$, тогда

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv = v\,du + u\,dv. \blacktriangleleft$$

Пример 1.10. Найдем первый дифференциал сложной функции $f : A \to \mathbb{R},\ A \subset \{(u,v) | v > 0\}$ в произвольной точке $(u,v) \in A$, если

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,\ \ x = uv,\ y = \frac{u}{v},\ z = u + v.$$

► *Способ 1.* Записать зависимость $f^*(u,v)$:

$$f^*(u,v) = (uv)^3 + \left(\frac{u}{v}\right)^3 + (u+v)^3 - 3(uv)\left(\frac{u}{v}\right)(u+v) =$$

$$= u^3v^3 + \frac{u^3}{v^3} + 3uv^2 + v^3 - 2u^3.$$

и найти дифференциал функции $f^*(u,v)$.

Способ 2. При более сложных связях между переменными проще использовать инвариантность формы первого дифференциала:

$$df = (3x^2 - 3yz)dx + (3y^2 - 3xz)dy + (3z^2 - 3xy)dz =$$

$$= 3\left[\left(u^2v^2 - \frac{u^2}{v} - u\right)(vdu + udv) + \left(\frac{u^2}{v^2} - u^2v - uv^2\right)\frac{vdu - udv}{v^2} +\right.$$

$$\left. + \left((u+v)^2 - u^2\right)(du + dv)\right] =$$

$$= 3\left[\left(u^2v^3 - 2u^2 + v^2 + \frac{u^2}{v^3}\right)du + \left(-\frac{u^3}{v^4} + u^3v^2 + 2uv + v^2\right)dv\right]. \blacktriangleleft$$

Пример 1.11. Найти u'_x, u'_y, u'_z, если $u = f\left(x, \frac{x}{y}, \frac{xy}{z}\right)$.

▸ *Способ 1.*

$$u'_x = f_1'\frac{\partial}{\partial x}(x) + f_2'\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) + f_3'\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{z}\right) = f_1' + f_2'\frac{1}{y} + f_3'\frac{y}{z}, \quad (1.18)$$

$$u'_y = f_1'\frac{\partial}{\partial y}(x) + f_2'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) + f_3'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{z}\right) = f_2'\left(-\frac{x}{y^2}\right) + f_3'\frac{x}{z}, \quad (1.19)$$

$$u'_z = f_1'\frac{\partial}{\partial z}(x) + f_2'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{y}\right) + f_3'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{xy}{z}\right) = f_3'\left(-\frac{xy}{z^2}\right). \quad (1.20)$$

Способ 2. Можно найти эти частные производные также через выражение первого дифференциала функции

$$du = f_1'dx + f_2'd\left(\frac{x}{y}\right) + f_3'd\left(\frac{xy}{z}\right) =$$

$$= f_1'dx + f_2'\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + f_3'\frac{zy\,dx + zx\,dy - xy\,dz}{z^2} =$$

$$= \left(f_1' + f_2'\frac{1}{y} + f_3'\frac{y}{z}\right)dx + \left(f_2'\left(-\frac{x}{y^2}\right) + f_3'\frac{x}{z}\right)dy + \left(f_3'\left(-\frac{xy}{z^2}\right)\right)dz.$$

Так как частные производные u'_x, u'_y, u'_z функции u есть соответствующие коэффициенты ее дифференциала, то получаем выражения (1.18)-(1.20) для u'_x, u'_y, u'_z. ◂

1.6.5. Геометрический смысл частных производных и дифференциала для функции 2-х переменных

Пусть задана некоторая функция $f(x,y)$, определенная на плоском множестве $D \subset \mathbb{R}^2$. Совокупность точек

$$\{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$$

называют ***графиком функции*** $f(x,y)$ (или ***поверхностью*** $z = f(x,y)$).

Как было определено ранее (см. [1]\\\\\), касательная к графику функции $f(x)$ в точке M_0 есть предельное положение секущей M_0M при $M \to M_0$. Касательную можно определить и следующим образом: прямая, проходящая через точку M_0 называется ***касательной*** к графику функции $f(x)$ в точке M_0, если угол между секущей M_0M и направляющим вектором этой прямой при $M \to M_0$ стремится к нулю. Легко доказать, что приведенные определения эквивалентны.

По аналогии с последним определением вводится понятие касательной плоскости: плоскость P, проходящую через *внутреннюю* точку N_0 поверхности Π, называют ***касательной плоскостью*** к этой поверхности в рассматриваемой точке, если угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку N_0 и любую точку N_1 поверхности Π, стремится к нулю при $N_1 \to N_0$.

Теорема 1.25. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ существует касательная плоскость к графику Π этой функции.

▸ Из условия дифференцируемости функции $f(x, y)$ получим

$$z - z_0 = L_1(x - x_0) + L_2(y - y_0) + o(\rho), \tag{1.21}$$

где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, L_1, L_2 – постоянные, равные частным производным $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}$ и $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}$.

Рассмотрим уравнение $z - z_0 = L_1(x - x_0) + L_2(y - y_0)$. Из аналитической геометрии известно, что это уравнение определяет в декартовой системе координат (x, y, z) некоторую плоскость P, проходящую через точку $N_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n} = (L_1, L_2, -1)$. Докажем, что эта плоскость P является касательной плоскостью в точке N_0 поверхности Π. Обозначив через φ угол между векторами $\vec{n} = (L_1, L_2, -1)$ и $\overrightarrow{N_0N_1} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, получим

$$|\cos\varphi| = \frac{|L_1(x - x_0) + L_2(y - y_0) - (z - z_0)|}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2 + 1}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} <$$

$$< \frac{|L_1(x - x_0) + L_2(y - y_0) - (z - z_0)|}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2 + 1}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{o(\rho)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{o(\rho)}{\rho},$$

Так как при $M \to M_0$ $\rho \to 0$, то $\lim\limits_{\rho \to 0} \cos\varphi = 0$, а значит, $\lim\limits_{\rho \to 0} \varphi = \pi/2$. ◂

Таким образом, дифференцируемость функции $u = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ с геометрической точки зрения означает наличие касательной плоскости к графику функции $u = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$. Так как $L_1 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $L_2 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, то уравнение касательной плоскости можно записать в виде.

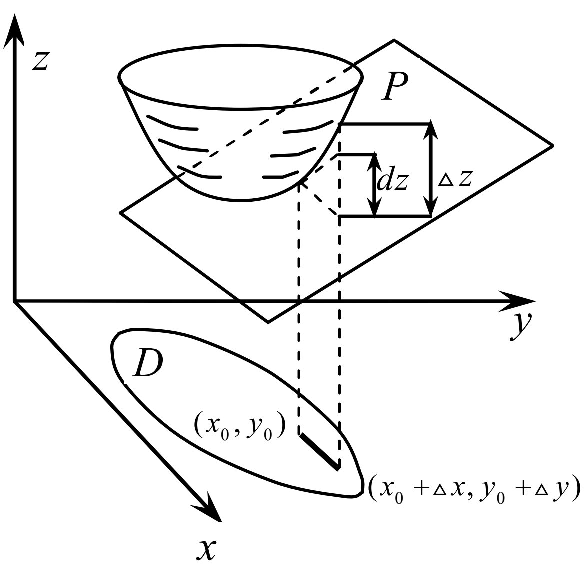
$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \qquad (1.22)$$

Нормальный вектор $\vec{n} = (L_1, L_2, -1)$ касательной плоскости принято называть ***нормалью к поверхности*** $z = f(x, y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

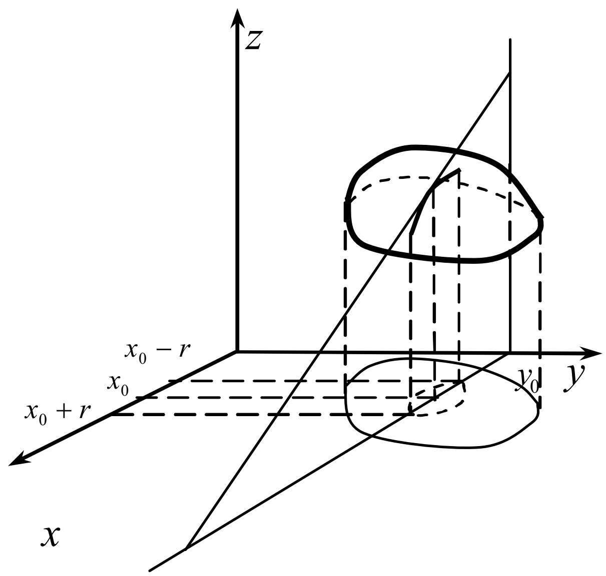
В уравнении (1.22), определяющем касательную плоскость к поверхности $z = f(x, y)$, правая часть есть полный дифференциал функции. Запишем (1.22) в виде

$$z - z_0 = dz\Big|_{\substack{x=x_o \\ y=y_o}}. \qquad (1.23)$$

где z – аппликата точки на касательной плоскости, z_0 – аппликата точки касания. Из (1.23) видно, что дифференциал dz функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) геометрически представляет собой приращение аппликаты точки касательной плоскости P к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Рассмотрим теперь геометрический смысл частных производных. Так как частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ является обычная производная функции $z = f(x, y_0)$ в точке x_0, то $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол между касательной к графику функции $z=f(x,y_0)$ в точке $(x_0,f(x_0,y_0))$ и осью Ox, то есть угол, образованный касательной к кривой $z=f(x,y_0)$ в точке $(x_0,f(x_0,y_0))$ и осью Ox. Аналогичным образом можно показать, что $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ есть тангенс угла между осью Oy и касательной к графику функции $z=f(x_0,y)$ в точке $(y_0,f(x_0,y_0))$



1.6.6. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть имеется функция $u=f(x,y)$, причем, определяя значения x и y, мы допускаем погрешности $\widehat{\Delta x}$ и $\widehat{\Delta y}$. Тогда и значение u, вычисленное по неточным значениям аргументов, также получится с погрешностью $\widehat{\Delta u}=f\left(x+\widehat{\Delta x},y+\widehat{\Delta y}\right)-f(x,y)$. Оценим эту погрешность, считая, что известны оценки погрешностей $\widehat{\Delta x}$ и $\widehat{\Delta y}$.

Аналогично дифференциалу функции от одной переменной применяется полный дифференциал для функции нескольких переменных.

Заменяя (приближенно) приращение функции ее дифференциалом (что оправдано лишь при достаточно малых значениях $\widehat{\Delta x}$ и $\widehat{\Delta y}$), получим

$$\widehat{\Delta u}\approx\frac{\partial u}{\partial x}\widehat{\Delta x}+\frac{\partial u}{\partial y}\widehat{\Delta y}.$$

Здесь погрешности $\widehat{\Delta x}$, $\widehat{\Delta y}$ и коэффициенты при них могут быть как положительными, так и отрицательными. Заменяя те и другие их абсолютными величинами, придем к неравенству

$$\left|\widehat{\Delta u}\right| \approx \left|\frac{\partial u}{\partial x}\widehat{\Delta x}+\frac{\partial u}{\partial y}\widehat{\Delta y}\right| \le \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot\left|\widehat{\Delta x}\right|+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot\left|\widehat{\Delta y}\right|.$$

Если обозначить через Δu, Δx, Δy максимальные абсолютные погрешности (или границы для абсолютных погрешностей), то

$$\Delta u \le \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot\Delta x+\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot\Delta y .$$

Пример 1.12. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC катет $AC=b$ и прилежащий угол $BAC=\alpha$ измерены, второй же катет a вычисляется по формуле $a=b\operatorname{tg}\alpha$. Как отражаются на значении a погрешности при измерении b и α?

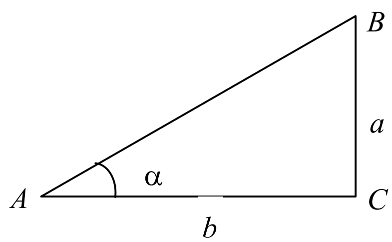


Рис. 1

▶ Так как $da=\operatorname{tg}\alpha\,db+\dfrac{b}{\cos^2\alpha}d\alpha$, то, зная Δb и $\Delta\alpha$, можем оценить Δa по формуле $|\Delta a|\approx|\operatorname{tg}\alpha|\cdot|\Delta b|+\left|\dfrac{b}{\cos^2\alpha}\right|\cdot|\Delta\alpha|$. ◀

Правила приближенных вычислений

1. Пусть $u=x\pm y$, тогда $|\Delta u|\le|\Delta x|+|\Delta y|$.

▶ Так как $du=\dfrac{\partial(x\pm y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial(x\pm y)}{\partial y}dy=dx\pm dy$, то

$$|\Delta u|\approx|\Delta x\pm\Delta y|\le|\Delta x|+|\Delta y|. ◀$$

2. Пусть $u=xy$, тогда $|\delta u|\le|\delta x|+|\delta y|$.

▶ Так как $du=\dfrac{\partial(xy)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial(xy)}{\partial y}dy=ydx+xdy$, то

$$|\delta u|=\left|\frac{\Delta u}{u}\right|\approx\left|\frac{y\cdot\Delta x+x\cdot\Delta y}{xy}\right|\le\left|\frac{\Delta x}{x}\right|+\left|\frac{\Delta y}{y}\right|=|\delta x|+|\delta y|. ◀$$

3. Пусть $u=x/y$, тогда $|\delta u|\le|\delta x|+|\delta y|$.

▶ Так как $du=\dfrac{\partial(x/y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial(x/y)}{\partial y}dy=\dfrac{1}{y}dx-\dfrac{x}{y^2}dy$, то

$$|\delta u|=\left|\frac{\Delta u}{u}\right|\approx\left|\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta dy}{y}\right|\le\left|\frac{\Delta x}{x}\right|+\left|\frac{\Delta y}{y}\right|=|\delta x|+|\delta y|. ◀$$

1.6.7. Производные высших порядков

Пусть частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ функции $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$, определенной в области M, существует в каждой точки этой области. Тогда частную производную, если она существует, функции $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ по аргументу x_k в точке $\vec{x} \in M$ называют ***частной производной второго порядка (второй частной производной)*** функции $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$ в точке $\vec{x}$ сначала по аргументу x_i, а затем по аргументу x_k и обозначают одним из следующих способов:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),\ \frac{\partial^2 u\left(\vec{x}\right)}{\partial x_k \partial x_i},\ f''_{ik}\left(\vec{x}\right),\ f''_{x_i x_k}\left(\vec{x}\right).$$

Замечание. Вообще говоря, все приведенные обозначения, кроме первого, не стандартизованы, и в литературе часто используется другой порядок индексов. В данном учебном пособии мы будем придерживаться введенных выше обозначений.

Если $k \neq i$, то частные производные второго порядка называются ***смешанными***.

Аналогичным образом вводится понятие производной второго порядка по направлениям $\vec{a}$ и $\vec{b}$: ***производной второго порядка*** функции $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$ в точке $\vec{x}$ по направлениям $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется производная, если она существует, функции $f'_{\vec{a}}\left(\vec{x}\right)$ по направлению $\vec{b}$ в точке $\vec{x}$ и обозначается $f''_{\vec{a}\vec{b}}\left(\vec{x}\right)$.

Функция $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$ называется ***дважды дифференцируемой*** в точке $\vec{x}$, если все ее частные производные первого порядка дифференцируемы в этой точке.

Отметим, что для того, чтобы функция $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$ была дважды дифференцируемой в точке $\vec{x}$, достаточно, чтобы все ее частные производные второго порядка были непрерывны в этой точке.

Теорема 1.26. Если производные $f''_{\vec{a}\vec{b}}\left(\vec{x}\right)$ и $f''_{\vec{b}\vec{a}}\left(\vec{x}\right)$ непрерывны на открытом множестве M, то они равны на этом множестве.

► Пусть $\vec{x} \in M$ – фиксированная точка. При всех достаточно малых s и t имеем

$$\vec{x} + s\vec{a} \in M, \quad \vec{x} + t\vec{b} \in M, \quad \vec{x} + s\vec{a} + t\vec{b} \in M.$$

Введем обозначения:

$$g(\vec{x}) = f(\vec{x} + s\vec{a}) - f(\vec{x}),\ h(\vec{x}) = f\left(\vec{x} + t\vec{b}\right) - f(\vec{x}).$$

Тогда, применяя дважды теорему о среднем (1.17), получим

$$g\left(\vec{x} + t\vec{b}\right) - g(\vec{x}) = t\left\|\vec{b}\right\| g'_{\vec{b}}\left(\vec{x} + \theta_1 t\vec{b}\right) =$$

$$= t\left\|\vec{b}\right\|\left(f'_{\vec{b}}\left(\vec{x} + s\vec{a} + \theta_1 t\vec{b}\right) - f'_{\vec{b}}\left(x + \theta_1 t\vec{b}\right)\right) =$$

$$= ts\left\|\vec{b}\right\| \cdot \|\vec{a}\| f''_{\vec{b}\vec{a}}\left(\vec{x} + \theta_2 s\vec{a} + \theta_1 t\vec{b}\right),\ \theta_1, \theta_2 \in (0,1).$$

Аналогично для функции h:

$$h(\vec{x} + s\vec{a}) - h(\vec{x}) = s\|\vec{a}\| h'_{\vec{a}}(\vec{x} + \eta_1 s\vec{a}) =$$

$$= s\|\vec{a}\|\left(f'_{\vec{a}}\left(\vec{x} + t\vec{b} + \eta_1 s\vec{a}\right) - f'_{\vec{a}}\left(\vec{x} + t\vec{b}\right)\right) =$$

$$= st\|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| f''_{\vec{a}\vec{b}}\left(\vec{x} + \eta_2 t\vec{b} + \eta_1 s\vec{a}\right),\ \eta_1, \eta_2 \in (0,1).$$

Поскольку $g\left(\vec{x} + t\vec{b}\right) - g(\vec{x}) = h(\vec{x} + s\vec{a}) - h(\vec{x})$, то

$$f''_{\vec{b}\vec{a}}\left(\vec{x} + \theta_2 s\vec{a} + \theta_1 t\vec{b}\right) = f''_{\vec{a}\vec{b}}\left(\vec{x} + \eta_2 t\vec{b} + \eta_1 s\vec{a}\right).$$

Учитывая теперь непрерывность функций $f''_{\vec{b}\vec{a}}(\vec{x})$ и $f''_{\vec{a}\vec{b}}(\vec{x})$ на множестве M, получаем, что $f''_{\vec{b}\vec{a}}(\vec{x}) = f''_{\vec{a}\vec{b}}(\vec{x})$. ◀

З а м е ч а н и е. В общем случае, значения смешанных производных зависят от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.

▶ Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Во всех точках кроме нулевой $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\dfrac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$. Вычислим частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ в точке $(0,0)$ по определению

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = \left.\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)|_{x\neq 0} - f(0,y)}{x}\right)\right|_{y=0} = \left.\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy\left(x^2 - y^2\right) - 0}{x\left(x^2 + y^2\right)}\right)\right|_{y=0} = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases} y\dfrac{x^4-y^4+4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Для вычисления второй производной $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ также воспользуемся определением:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ y\neq 0}}-\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ y=0}}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y\dfrac{-y^4}{\left(y^2\right)^2}-0}{y}=-1.$$

Аналогично, для производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ получим:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases} x\dfrac{x^4-y^4-4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x\neq 0\\ y=0}}-\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\ y=0}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\dfrac{x^4}{\left(x^2\right)^2}-0}{x}=1. \blacktriangleleft$$

Следствие. Если функция $u=f\left(x_1,x_2,...,x_m\right)$ дважды дифференцируема на открытом множестве M, то ее частные производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_l}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_l\partial x_k}$ равны на этом множестве.

После того, как введено понятие второй частной производной, можно последовательно ввести понятие третьей частной производной, затем четвертой и т.д. Если предположить, что нами уже введено понятие $(n-1)$-й частной производной функции $u=f\left(x_1,x_2,...,x_m\right)$ в точке $\vec{x}$ по аргументам $x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_{n-1}}$ и что эта $(n-1)$-я частная производная имеет в точке $\vec{x}$ частную производную по аргументу x_{i_n}, то указанную частную производную называют ***частной производной*** n***-го порядка (***n***-й частной производ-***

ной) функции $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$ в точке $\vec{x}$ по аргументам $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{n-1}}, x_{i_n}$:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} ... \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} ... \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \right)$$

Частная производная n-го порядка обозначается одним из следующих символов:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} ... \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}, f^{(n)}_{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}}, f^{(n)}_{i_1, i_2, ..., i_n}$$

Если не все индексы $i_1, i_2, ..., i_n$ совпадают между собой, то частная производная $\dfrac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} ... \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$ называется смешанной частной производной n-го порядка.

Аналогичным образом вводится понятие ***производной*** n***-го порядка*** в точке $\vec{x}$ по направлениям $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$:

$$f^{(n)}_{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n}\left(\vec{x}\right) = \left(f^{(n-1)}_{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}} \right)'_{\vec{a}_n} \left(\vec{x}\right)$$

Функция $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$ называется n ***раз дифференцируемой*** в точке $\vec{x}$, если все ее частные производные $n-1$ порядка дифференцируемы в этой точке.

Отметим, что для того, чтобы функция $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$ была n раз дифференцируемой в точке $\vec{x}$, достаточно, чтобы все ее частные производные n-го порядка были непрерывны в этой точке.

Теорема 1.27. Если функция $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$ n-раз дифференцируема в точке $\vec{x}$, то значение любой смешанной частной производной n-го порядка в этой точке не зависит от порядка дифференцирования.

Производной порядка n функции f в точке $\vec{x}$ называется n-мерная матрица

$$f^{(n)}\left(\vec{x}\right) = \left(\frac{\partial^n f\left(\vec{x}\right)}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} ... \partial x_{i_1}} \right)^m_{i_1, ..., i_n = 1},$$

например, производной второго порядка функции f в точке $\vec{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)$ является матрица:

$$f''(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_m \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_m \partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_m} & \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_m} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_m \partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Определение классов функций $C^{(n)}(M)$.

Пусть M – открытое множество и рассматриваются функции вида $f : M \to \mathbb{R}$. Тогда

1) $f \in C(M) \Leftrightarrow f$ непрерывна на множестве M;

2) $f \in C^{(1)}(M) \Leftrightarrow \forall k = \overline{1,m}\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \in C(M)$ (то есть все частные производные непрерывны на M)**;**

3) $f \in C^{(2)}(M) \Leftrightarrow \forall k,l = \overline{1,m}\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \in C(M)$ (то есть все частные производные второго порядка непрерывны на M)**;** и т.д.

Замечание. $C^{(n)}(M) \subset C^{(n-1)}(M) \subset \cdots \subset C^{(1)}(M) \subset C(M)$.

1.6.8. Дифференциалы высших порядков

Пусть в области M задана некоторая функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка. Тогда полный дифференциал имеет вид

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m,$$

где $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ – произвольные приращения переменных $x_1, x_2, ..., x_m$. Таким образом, полный дифференциал du также является некоторой функцией переменных $x_1, x_2, ..., x_m$. Если предположить существование непрерывных частных производных второго порядка для u, то du будет иметь непрерывные частные производные первого порядка, и можно говорить о полном дифференциале от этого дифференциала $d^2 u \overset{df}{=} d(du)$.

Важно подчеркнуть, что приращения $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ при этом рассматриваются как постоянные (следовательно, $d^2x_1 = d^2x_2 = ... = d^2x_m = 0$) и остаются одними и теми же при переходе от одного дифференциала к следующему. Таким образом,

$$d^2u = d\left(du\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m\right) =$$

$$= \left(d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1}d\left(dx_1\right)\right) + \left(d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}d\left(dx_2\right)\right) + \cdots +$$

$$+ \left(d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)dx_m + \frac{\partial u}{\partial x_m}d\left(dx_m\right)\right) =$$

$$= \left(d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1}d^2x_1\right) + \left(d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}d^2x_2\right) + \cdots +$$

$$+ \left(d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)dx_m + \frac{\partial u}{\partial x_m}d^2x_m\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)dx_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)dx_2 + \cdots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)dx_m =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_1}dx_m\right)dx_1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_2}dx_m\right)dx_2 + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_m}dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_m}dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}dx_m\right)dx_m =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}dx_2 dx_1 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_1}dx_m dx_1\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2^2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_2}dx_m dx_2\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_m}dx_1 dx_m + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_m}dx_2 dx_m + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}dx_m^2\right) =$$

$$
=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2^2+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}dx_m^2\right)+
$$
$$
+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_1}dx_2dx_1+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_m\partial x_1}dx_mdx_1+\right.
$$
$$
+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_m\partial x_2}dx_mdx_2+\cdots+
$$
$$
\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}\partial x_m}dx_{m-1}dx_m\right).
$$

Дифференциал $(n-1)$-го порядка $d^n u$ определяется как (полный) дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$
d^n u \overset{df}{=} d\left(d^{n-1}u\right).
$$

Теорема 1.28. Если для функции u существуют *непрерывные* частные производные всех порядков до n-го включительно, то существование n-го дифференциала обеспечено.

Развернутые выражения последовательных дифференциалов с ростом n становятся слишком сложными, поэтому используют следующий прием упрощения записи:

В выражении 1-го дифференциала условно «вынесем букву u за скобки», тогда его символически можно будет записать следующем виде:

$$
du=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)u.
$$

Если в выражении 2-го дифференциала также символически «вынести u за скобки», то получим символическую запись

$$
d^2u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2 u.
$$

Аналогично можно записать для n-го дифференциала

$$
d^n u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n u. \tag{1.24}
$$

Это символическое равенство надлежит понимать следующим образом: сначала «многочлен», стоящий в скобках, формально возводится по правилам алгебры в степень, затем все полученные члены «умножаются» на u (которое дописывается в числитель при ∂^n), и только после этого, всем символам возвращаются их значения как производных и дифференциалов.

Замечание 1. Доказать символическое правило вычисления n-го дифференциала можно методом математической индукции.

Замечание 2. Выражение (1.24) можно записать в виде:

$$d^n u = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=n} C_n^{i_1,i_2,\ldots,i_n} \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_n^{i_n}} dx_1^{i_1} dx_2^{i_2}\ldots dx_n^{i_n},$$

где $C_n^{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \dfrac{n!}{i_1!\,i_2!\ldots i_n!}$.

Пример 1.13. Найти $d^{14} f$, если

$$f(x,y,z) = z^{16} + y^{15} - 2x^7y^3z^4 + 7x^3z^2y^4 + 5x^9y^7.$$

▸ Выпишем сначала все ненулевые частные производные 14-го порядка данной функции, а именно:

– от первого слагаемого $\dfrac{\partial^{14} f}{\partial z^{14}} = \dfrac{16!}{2}\cdot z^2$;

– от второго слагаемого $\dfrac{\partial^{14} f}{\partial y^{14}} = 15!\cdot y$;

– от третьего слагаемого $\dfrac{\partial^{14} f}{\partial x^7\partial y^3\partial z^4} = -2\cdot 7!\cdot 3!\cdot 4!$;

– от четвертого слагаемого все частные производные 14-го порядка нулевые;

– от пятого слагаемого

$$\frac{\partial^{14} f}{\partial x^7\partial y^7} = 5\cdot\frac{9!}{2!}\cdot 7!\cdot x^2,\ \frac{\partial^{14} f}{\partial x^8\partial y^6} = 5\cdot 9!\cdot 7!\cdot x\cdot y,\ \frac{\partial^{14} f}{\partial x^9\partial y^5} = 5\cdot 9!\cdot\frac{7!}{2!}\cdot y^2.$$

Раскрывая формулу (1.24) и отбрасывая нулевые слагаемые, получаем окончательный результат:

$$d^{14} f = \frac{\partial^{14} f}{\partial z^{14}} dz^{14} + \frac{\partial^{14} f}{\partial y^{14}} dy^{14} + C_{14}^{7,3,4}\frac{\partial^{14} f}{\partial x^7\partial y^3\partial z^4} dx^7dy^3dz^4 +$$

$$+C_{14}^{7,7}\frac{\partial^{14} f}{\partial x^7\partial y^7} dx^7dy^7 + C_{14}^{8,6}\frac{\partial^{14} f}{\partial x^8\partial y^6} dx^8dy^6 + C_{14}^{9,5}\frac{\partial^{14} f}{\partial x^9\partial y^5} dx^9dy^5,$$

где частные производные функции $f(x,y)$ уже вычислены. ◂

Дифференциалы сложных функций

Пусть имеем сложную функцию $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)$, где $x_k = \varphi_k\left(t_1, t_2, ..., t_n\right)$, $1 \le k \le m$. Тогда на основании инвариантности формы первого дифференциала

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m.$$

Но здесь уже $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ являются дифференциалами не независимых переменных, а функций; следовательно, сами будут функциями и могут не быть постоянными, как в предыдущем случае. Поэтому

$$d^2 u = d\left(du\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m\right) =$$

$$= \left(d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} d\left(dx_1\right)\right) + \left(d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} d\left(dx_2\right)\right) + \cdots +$$

$$+ \left(d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) dx_m + \frac{\partial u}{\partial x_m} d\left(dx_m\right)\right) =$$

$$= \left(d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} d^2 x_1\right) + \left(d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} d^2 x_2\right) + \cdots +$$

$$+ \left(d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) dx_m + \frac{\partial u}{\partial x_m} d^2 x_m\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 u +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x_1} d^2 x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} d^2 x_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m} d^2 x_m. \qquad (1.25)$$

Из (1.25) видно, что *в общем случае для дифференциала порядка выше первого инвариантность формы не имеет места*. Заметим, что в случае линейности функций φ_k, $k = \overline{1, m}$ свойство инвариантности формы для дифференциалов высших порядков сохраняется.

1.7. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

1.7.1. Формула Тейлора

Теорема 1.29 (формула Тейлора с отстаточным членом в форме Лагранжа). Пусть функция $f(\vec{x})$ задана и $(n+1)$ раз дифференцируема в некоторой ε-окрестности точки $\vec{a}$. Тогда для любой точки $\vec{x} \in B(\vec{a}, \varepsilon)$ существует точка $\vec{\xi} = \vec{a} + \theta(\vec{x} - \vec{a})$, $0 < \theta < 1$, такая, что

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(\vec{a}, \vec{x} - \vec{a})}{k!} + \frac{d^{n+1} f(\vec{\xi}, \vec{x} - \vec{a})}{(n+1)!}$$

Предположим, что $f \in C^{(n)}(M)$. Пусть для заданных $\vec{x}^0 \in M$ и направления $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ выполняется $\forall t \in [0,1]$ $\vec{x}^0 + t\vec{a} \in M$. Тогда существует число $\theta \in (0,1)$, такое что

$$\Delta f(\vec{x}^0) = df(\vec{x}^0) + \frac{1}{2} d^2 f(\vec{x}^0) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} f(\vec{x}^0) + \frac{1}{n!} d^n f(\vec{x}^0 + \theta\vec{a}). \tag{1.26}$$

▶ Для функции $\varphi(t) = f(\vec{x}^0 + t\vec{a}), t \in [0,1]$ по формуле Тейлора в точке $t = 0$ с остаточным членом в форме Лагранжа для функций одной переменной имеем

$$\varphi(1) - \varphi(0) = d\varphi(0) + \frac{1}{2} d^2\varphi(0) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1}\varphi(0) + \frac{1}{n!} d^n\varphi(\theta),\ \theta \in (0,1). \tag{1.27}$$

Учитывая линейность функций $x_k = \varphi_k(t) = x_k^0 + ta_k$, $k = \overline{1,m}$ получаем

$$d^k\varphi(0) = d^k f(\vec{x}^0 + \vec{a}),\ k = \overline{1,n},$$

а значит, верна формула (1.26). ◀

Теорема 1.30 (формула Тейлора с отстаточным членом в форме Пеано). Пусть функция $f(\vec{x})$ задана и $(n-1)$раз дифференцируема в некоторй ε-окрестности точки $\vec{a}$ и n раз дифференцируема в самой точке $\vec{a}$. Тогда для любой точки $\vec{x} \in B(\vec{a}, \varepsilon)$ справедлива следующая формула

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(\vec{a}, \vec{x} - \vec{a})}{k!} + o(\rho^n) \text{ при } \rho \to 0,$$

в которой $\rho = \rho(\vec{x}, \vec{a})$.

Пример 1.14. Разложить по формуле Тейлора функцию

$$f(x, y, z) = z^3 + y^2 - 5xyz + xz^2$$

в точке $M(-1, 0, 2)$.

▸ Поскольку $d^m f \equiv 0$, $m > 3$, то разложение по формуле Тейлора в точке M для функции f будет иметь вид:

$$f(\vec{x}) = f(M) + \sum_{k=1}^{3} \frac{d^k f(M, \vec{x} - M)}{k!}, \ \vec{x} = (x, y, z)$$

Вычислим теперь $d^k f$, $k = 1, 2, 3$:

$$df = (z^2 - 5yz)dx + (2y - 5xz)dy + (3z^2 - 5xy + 2xz)dz$$

$$d^2 f = 2dy^2 + (6z + 2x)dz^2 - 10zdxdy + 2(2z - 5y)dxdz - 10xdydz$$

$$d^3 f = 6dz^3 + 4dxdz^2 - 60dxdydz$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$f(x, y, z) = 4 + 4(x+1) + 10y + 8(z-2) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(2y^2 + 10(z-2)^2 - 20(x+1)y + 8(x+1)(z-2) + 10y(z-2)\right) +$$

$$+\frac{1}{6}\left(6(z-2)^3 + 4(x+1)(z-2)^2 - 60(x+1)y(z-2)\right). \blacktriangleleft$$

П р и м е р 1.15. Разложим по формуле Маклорена до членов четвертого порядка включительно функцию $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

▶ Введем функцию $t(x,y)=x^2+y^2$. Тогда функция $g(t)=\sqrt{1-t}$ является сложной функцией аргументов x,y и совпадает с функцией $f(x,y)$. Разложим функцию $g(t)$ по формуле Тейлора:

$$g(t)=1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o\left(t^2\right).$$

Подставляя в последнее равенство функцию $t(x,y)=x^2+y^2$, получим разложение по формуле Тейлора исходной функции $f(x,y)$:

$$f(x,y)=1-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)-\frac{1}{8}\left(x^2+y^2\right)^2+o\left(\left(x^2+y^2\right)^2\right).$$

Отметим при этом, что $o\left(\left(x^2+y^2\right)^2\right)=o\left(\rho^4\right)$, где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, а значит получено разложение до членов четвертого порядка включительно.

Если решать данную задачу без применения сложной функции, то решение получилось бы достаточно трудоемким ввиду необходимости вычисления всех частных производных функции $f(x,y)$ с первого по четвертый порядок включительно. ◀

П р и м е р 1.16. Получим приближенную формулу с точностью до членов второго порядка для функции

$$f(\vec{x})=\frac{\cos x_1}{\cos x_2},$$

если $|x_1|$ и $|x_2|$ малы по сравнению с 1.

▶ Разложим функцию $f(\vec{x})$ по формуле Маклорена до членов второго порядка включительно. Для этого сделаем замену $u_1=\cos x_1$, $u_2=\cos x_2$ и разложим функцию $g(\vec{u})=\dfrac{u_1}{u_2}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M\left(u_1(0),u_2(0)\right)=M(1,1)$:

$$g(\vec{u})=g(M)+dg\big|_{\vec{u}=M}+\frac{1}{2!}d^2g\big|_{\vec{u}=M}+o(\rho_u^2)\approx$$

$$\approx g(M)+dg\big|_{\vec{u}=M}+\frac{1}{2!}d^2g\big|_{\vec{u}=M},\ \ \rho_u=\sqrt{\left(u_1-1\right)^2+\left(u_2-1\right)^2}.$$

Поскольку при $\vec{x} \to \vec{0}$

$$o\left(\rho_u^2\right) = o\left(\left(u_1 - 1\right)^2 + \left(u_2 - 1\right)^2\right) = o\left(\left(\cos x_1 - 1\right)^2 + \left(\cos x_2 - 1\right)^2\right) =$$

$$= o\left(\left(-\frac{x_1^2}{2} + o\left(x_1^2\right)\right)^2 + \left(-\frac{x_2^2}{2} + o\left(x_2^2\right)\right)^2\right) = o\left(x_1^2 + x_2^2\right) = o\left(\rho_x^2\right),$$

где $\rho_x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, то полученное разложение для функции $g\left(\vec{u}\right)$ одновременно будет являться и разложением функции $f\left(\vec{x}\right)$ до членов второго порядка в окрестности точки $\vec{0}$.

Вычислим теперь $dg\big|_{\vec{u}=M}$ и $d^2 g\big|_{\vec{u}=M}$:

$$dg\big|_{\vec{u}=M} = \left[\frac{u_2 du_1 - u_1 du_2}{u_2^2}\right]\Bigg|_{\vec{u}=M} = \left[du_1 - du_2\right]\Big|_{\vec{u}=M},$$

$$d^2 g\big|_{\vec{u}=M} = \left[\frac{d\left(u_2 du_1 - u_1 du_2\right)u_2^2 - 2u_2 du_2\left(u_2 du - u_1 du_2\right)}{u_2^4}\right]\Bigg|_{\vec{u}=M} =$$

$$= \left[d^2 u_1 - d^2 u_2 - 2du_1 du_2 + 2du_2^2\right]\Big|_{\vec{u}=M}.$$

Учитывая, что $x_1 = dx_1$, $x_2 = dx_2$, получим

$$du_1\big|_{\vec{u}=M} = \left[-\sin x_1 dx_1\right]\Big|_{\vec{x}=\vec{0}} = 0,$$

$$du_2\big|_{\vec{u}=M} = \left[-\sin x_2 dx_2\right]\Big|_{\vec{x}=\vec{0}} = 0,$$

$$d^2 u_1\big|_{\vec{u}=M} = \left[-\cos x_1 dx_1^2\right]\Big|_{\vec{x}=\vec{0}} = -x_1^2,$$

$$d^2 u_2\big|_{\vec{u}=M} = \left[-\cos x_2 dx_2^2\right]\Big|_{\vec{x}=\vec{0}} = -x_2^2,$$

и, следовательно, приближенная формула для функции $f(\vec{x})$ в окрестности точки $\vec{0}$ имеет вид

$$f(\vec{x}) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right). \blacktriangleleft$$

1.7.2. Экстремум

Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \to \mathbb{R}$. Если существует точка $\vec{x}^0 \in X$ такая, что $\forall \vec{x} \in X \;\; f(\vec{x}) \le f(\vec{x}^0)$, то f имеет в точке $\vec{x}^0$ ***абсолютный максимум***. Значение $f(\vec{x}^0) = \max\limits_{\vec{x} \in M} f(\vec{x})$ называется ***наибольшим значением функции f на X.***

Аналогично определяются понятия ***абсолютного минимума*** и ***наименьшего значения f на X.***

Функция f имеет в точке $\vec{x}^0$ ***локальный максимум***, если $\exists r > 0$:

1) $B(\vec{x}^0, r) \subset X$, 2) $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, r) \;\; f(\vec{x}) \le f(\vec{x}^0)$.

Локальный максимум называется ***строгим***, если $\exists r > 0$:

1) $B(\vec{x}^0, r) \subset X$, 2) $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^0, r) \;\; f(\vec{x}) < f(\vec{x}^0)$.

Аналогично определяются понятия ***локального минимума*** и ***строгого локального минимума***. Точки локального максимума и локального минимума называются также точками ***локального экстремума.***

Теорема 1.31 (необходимое условие локального экстремума). Если функция $f(\vec{x}) : X \to \mathbb{R}$, $X \in E^m$ обладает в точке $\vec{x}^0 \in X$ частными производными первого порядка по всем переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и имеет в этой точке локальный экстремум, то все частные производные первого порядка в точке $\vec{x}^0$ равны нулю.

▸ Пусть k, $1 \le k \le m$ – фиксировано. Зафиксируем у функции f все аргументы, кроме k-го, положив их равными соответствующим координатам точки $\vec{x}^0$. При этом мы получим функцию одной переменной

$$g(t) = f\left(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, t, x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0\right).$$

Так как функция m переменных $f'(\vec{x})$ имеет локальный экстремум в точке $\vec{x}^0$, то указанная функция одной переменной $g(t)$ имеет локальной экстремум в точке $t = x_k^0$, поэтому производная этой функции одной переменной в точке $t = x_k^0$, совпадающая с частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}^0)$, равна нулю. ◂

Следствие. Если функция $f(\vec{x}): X \to \mathbb{R}$, $X \in E^m$ дифференцируема в точке $\vec{x}^0$ и имеет в этой точке локальный экстремум, то дифференциал $df\big|_{\vec{x}^0}$ этой функции в точке $\vec{x}^0$ равен нулю.

Внутренние точки области определения функции $f(\vec{x})$, в которых обращаются в нуль все частные производные первого порядка являются ***точками возможного экстремума***, их обычно называют ***критическими.***

Пусть $D = \left(d_{ij}\right)_{i,j=1}^{m}$ – матрица размера $m \times m$ с действительными элементами. Матрица D называется ***положительно определенной***, если

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^m, \vec{a} \neq 0 \quad \vec{a}^T D \vec{a} > 0.$$

Матрица D называется ***отрицательно определенной***, если положительно определена матрица $-D$. Матрица D называется ***неопределенной***, если

$$\exists \vec{a} \in \mathbb{R}^m \quad \vec{a}^T D \vec{a} < 0 \text{ и } \exists \vec{b} \in \mathbb{R}^m \quad \vec{b}^T D \vec{b} > 0.$$

Теорема 1.32 (критерий Сильвестра). Матрица D положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры положительны; отрицательно определена, если знаки угловых миноров чередуются, начиная с «–».

Лемма 1.7. Пусть M – открытое множество, $\vec{x}^0$ – фиксированная точка множества M,

$$\left\{d_{ij} \,\middle|\, 1 \le i, j \le m\right\} \subset C(M); \; D(\vec{x}) = \left(d_{ij}(\vec{x})\right)_{i,j=1}^{m};$$

Если матрица $D\left(\vec{x}^0\right)$ является положительно определенной, то

$$\exists r > 0 \;\; B\left(\vec{x}^0, r\right) \subset M \;\; \forall \vec{x} \in B\left(\vec{x}^0, r\right) \;\; D(\vec{x})$$

положительно определена.

▸ Угловые миноры d_k, $1 \le k \le m$, принадлежат классу $C(M)$. Согласно критерию Сильвестра, $D\left(\vec{x}^0\right)$ положительно определена тогда и только тогда, когда $\forall k$, $1 \le k \le m$ $d_k\left(\vec{x}^0\right) > 0$.

Следовательно,

$$\forall k, \; 1 \le k \le m \;\; \exists r_k > 0 \;\; B\left(\vec{x}^0, r_k\right) \subset A \;\; \forall \vec{x} \in B\left(\vec{x}^0, r_k\right) \;\; d_k(\vec{x}) > 0.$$

Положим $r = \min\limits_{1\le k\le m} r_k > 0$; $B\left(\vec{x}^0, r\right) = \bigcap\limits_{k=1}^{m} B\left(\vec{x}^0, r_k\right)$. Получим

$$\forall k,\ 1 \le k \le m\ \ \forall \vec{x} \in B\left(\vec{x}^0, r\right)\ d_k\left(\vec{x}\right) > 0,$$

а значит, $\forall x \in B\left(\vec{x}^0, r\right)$ матрица $D\left(\vec{x}\right)$ положительно определена. ◀

Теорема 1.33. Пусть M – открытое множество, $\vec{x}^0 \in M$. Предположим, что $f \in C^{(2)}\left(M\right)$, и что $\vec{x}^0$ есть критическая точка f, т.е. $f'\left(\vec{x}^0\right) = \vec{0}$. Тогда:

1) если матрица $f''\left(\vec{x}^0\right) = \left(\dfrac{\partial^2 f\left(\vec{x}^0\right)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{m}$ положительно определена, то точка $\vec{x}^0$ есть точка строгого локального минимума;

2) если матрица $f''\left(\vec{x}^0\right)$ отрицательно определена, то точка $\vec{x}^0$ есть точка строгого локального максимума;

3) если матрица $f''\left(\vec{x}^0\right)$ является неопределенной, то точка $\vec{x}^0$ не является точкой локального экстремума.

▶ 1) Пусть $B\left(\vec{x}^0, \delta\right)$ – такой шар, что $\forall \vec{x} \in B\left(\vec{x}^0, \delta\right)$ матрица $f''\left(\vec{x}\right)$ положительно определена. Такой шар существует согласно лемме. Для каждого $\vec{x} \in B\left(\vec{x}^0, \delta\right)$ рассмотрим формулу Тейлора (1.26), положив $n = 2$, $\vec{a} = \vec{x} - \vec{x}^0$ и учитывая $f'\left(\vec{x}^0\right) = \vec{0}$:

$$f\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{x}^0\right) + \frac{1}{2} f''\left(\vec{x}^0 + \theta\left(\vec{x} - \vec{x}^0\right)\right)\left(\vec{x} - \vec{x}^0\right)^2,$$

где $\theta = \theta\left(\vec{x}\right) \in \left(0,1\right)$. Поскольку $\vec{x}^0 + \theta\left(\vec{x} - \vec{x}^0\right) \in B\left(\vec{x}^0, \delta\right)$, то матрица $f''\left(\vec{x}^0 + \theta\left(\vec{x} - \vec{x}^0\right)\right)$ положительно определена и, следовательно,

$$\forall \vec{x} \in B\left(\vec{x}^0, \delta\right),\ \vec{x} \ne \vec{x}^0\ \ f\left(\vec{x}\right) > f\left(\vec{x}^0\right).$$

2) Применить доказанное утверждение 1) к функции $-f$.

3) В этом случае для любого шара $B\left(\vec{0}, \delta\right)$

$$\exists \vec{a} \in B\left(\vec{0}, \delta\right)\ f''\left(\vec{x}^0\right)\vec{a}^2 > 0 \text{ и } \exists \vec{b} \in B\left(\vec{0}, \delta\right)\ f''\left(\vec{x}^0\right)\vec{b}^2 < 0. ◀$$

Пример 1.17. Найти точки экстремума функции

$$u(x,y,z) = 2x^2 + y^3 + z^2 - xy + 2xz - y + 1.$$

▶ Найдем точки возможного экстремума данной функции, решив следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} u'_x = 4x - y + 2z = 0, \\ u'_y = 3y^2 - x - 1 = 0, \\ u'_z = 2z + 2x = 0. \end{cases}$$

Критическими являются точки:

$$A_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \; A_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Теперь воспользуемся достаточными условиями экстремума. Для этого вычислим частные производные второго порядка:

$$u''_{xx} = 4, \quad u''_{yy} = 6y, \quad u''_{zz} = 2,$$

$$u''_{xy} = u''_{yx} = -1, \quad u''_{xz} = u''_{zx} = 2, \quad u''_{yz} = u''_{zy} = 0.$$

Значения этих частных производных в точке A являются коэффициентами $d^2u\big|_A$ – квадратичной формы от переменных dx, dy, dz.

Точка $A_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.	Точка $A_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
Матрица квадратичной формы d^2u имеет вид	
$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Вычисляя главные миноры этой матрицы, получаем	
$\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 15 > 0$, $\Delta_3 = 14 > 0$ $d^2u\big\|_{A_1}$ – положительно определенная квадратичная форма от переменных dx, dy, dz.	$\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = -13 < 0$, $\Delta_3 = -14 < 0$ $d^2u\big\|_{A_2}$ – не знакоопределенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz.

Таким образом, функция $u(x,y,z)$ в точке $A_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ имеет локальный минимум, а в точке $A_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ не имеет экстремума. ◀

Пример 1.18. Найдем наименьшее из расстояний между точками параболы $y=x^2$ и прямой $x-y-2=0$.

▸ Пусть (x_1,y_1) – некоторая точка параболы, (x_2,y_2) – точка прямой. Расстояиние между двумя точками (x_1,y_1) и (x_2,y_2) вычисляется по формуле $r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. Очевидно, что если минимальным будет квадрат расстояния, то и само расстояние будет минимальным. Поэтому будем минимизировать функцию квадрат расстояния. Учитывая, что согласно условию $y_1=x_1^2$ и $x_2-y_2-2=0$, получим функцию двух переменных

$$u(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2+\left(x_1^2-(x_2-2)\right)^2,$$

локальный минимум которой является квадратом искомой величины.

Решая систему

$$\begin{cases} u'_{x_1}=2(x_1-x_2)+2\left(x_1^2-(x_2-2)\right)\cdot 2x_1=0, \\ u'_{x_2}=-2(x_1-x_2)-2\left(x_1^2-(x_2-2)\right)=0. \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} x_1-x_2+2\left(x_1^2-x_2+2\right)\cdot x_1=0, \\ -(x_1-x_2)=x_1^2-x_2+2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-x_2)(1-2x_1)=0, \\ -(x_1-x_2)=x_1^2-x_2+2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{11}{8},\ u_{\min}=\frac{7}{4\sqrt{2}}.$$ ◂