Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int 0\cdot dx = C$.
2. $\int 1\cdot dx = x + C$.
3. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$.
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$.
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\, a \neq 1)$, $\int e^x dx = e^x + C$.
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(1 + \mathrm{tg}^2 x\right) dx = \mathrm{tg}\, x + C \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\, k \in \mathbb{Z}\right)$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int \left(1 + \mathrm{ctg}^2 x\right) dx = -\,\mathrm{ctg}\, x + C \quad (x \neq \pi k,\, k \in \mathbb{Z})$.
10. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$.
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C \quad (a \neq 0,\, |x| < |a|)$.
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + d}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + d}\right| + C \quad (d \neq 0,\, x^2 + d > 0)$.
13. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a + x}{a - x}\right| + C \quad (a \neq 0,\, |x| < |a|)$.
14. $\int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x + C$.
15. $\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C$.
16. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$.
17. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C \quad (x \neq 0)$.

1	$f(x) \in \boldsymbol{C}([a,b])$, $x = g(t) \in \boldsymbol{C}^1([\alpha,\beta])$, $[a,b] = g([\alpha,\beta])$, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$	**Замена переменной** $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$
2	$\int p(x)g(x)dx$, где 1) $p(x)$ – многочлен, а $f(x)$ – одна из функций: $e^{\alpha x}$, $\cos\alpha x$, $\sin\alpha x$, $\ln x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$, $\arcsin x$, $\arccos x$; 2) $p(x) \in \{a^{bx}, \mathrm{sh}\, x, \mathrm{ch}\, x\}$, $f(x) \in \{\sin x, \cos x\}$.	**Интегрирование по частям** Если $u(x), v(x) \in \boldsymbol{C}^1([a,b])$, то $\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big\vert_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x)$
3	$\int \dfrac{Mx + N}{x^2 + px + q}dx$, $p^2 - 4q < 0$	Подстановка $t = x + \dfrac{p}{2}$ приводит к интегралу $\int \dfrac{M_1 t + N_1}{t^2 + d}dt$
4	$\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь, $Q(x) = (x - x_1)^n (x - x_2)^m \cdots$ $\cdots (x^2 + px + q)^k \cdots$	$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_1}{(x - x_1)} + \dfrac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \dfrac{A_n}{(x - x_1)^n} +$ $+ \dfrac{B_1}{(x - x_2)} + \dfrac{B_2}{(x - x_2)^2} + \ldots + \dfrac{B_m}{(x - x_2)^m} + \ldots$ $\ldots + \dfrac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \dfrac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dfrac{M_k x + N_k}{(x^2 + px + q)^k} + \ldots$
5	$\int \dfrac{P(x)}{(x - b_i)^n r(x)}dx$, $\dfrac{P(x)}{(x - b_i)^n r(x)}$ – правильная рациональная дробь	**Метод вычеркиваний** $\dfrac{P(x)}{(x - b_i)^n r(x)} = \dfrac{B_n}{(x - b_i)^n} + \dfrac{B_{n-1}}{(x - b_i)^{n-1}} + \ldots + \dfrac{B_1}{x - b_i} + \dfrac{R(x)}{r(x)}$ $B_{n-k} = \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{P(x)}{r(x)}\right)^{(k)}\Bigg\vert_{x = b_i}$, $k = \overline{0, n-1}$.
6	$\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь, $Q(x)$ имеет кратные корни (включая и комплексные)	**Метод Остроградского** $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$, $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$, $Q(x)$ и $Q_1(x)$ имеют одни и те же корни, но все корни $Q_1(x)$ – простые; $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами, степени которых на единицу меньше степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Неопределенные коэффициенты многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ вычисляются при помощи дифференцирования равенства. После дифференцирования общий знаменатель всех дробей – $Q(x)$. $Q_1(x) = НОД(Q(x), Q'(x))$, поэтому для разложения знаменателя $Q(x)$ на сомножители $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ можно использовать алгоритм Евклида. **Алгоритм Евклида нахождения** $НОД(f(x), \varphi(x))$ Разделить $f(x)$ на $\varphi(x)$ с остатком: $f(x) = \varphi(x)q(x) + r_1(x)$. Степень $r_1(x)$ меньше степени делителя $\varphi(x)$. Разделить $\varphi(x)$ на $r_1(x)$ с остатком: $\varphi(x) = r_1(x)q_1(x) + r_2(x)$. Степень $r_2(x)$ меньше степени делителя $r_1(x)$. $r_1(x) = r_2(x)q_2(x) + r_3(x)$ …. $r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_{k-1}(x) + r_k(x)$ При каждом делении степень остатка будет снижаться, по крайней мере, на единицу, поэтому на определенном шаге получим нулевой остаток, т.е. $r_{k-1}(x) = r_k(x)q_k(x)$. Последний отличный от нуля остаток $r_k(x)$ является наибольшим общим делителем многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$.

7	$\int \boldsymbol{R}\left(e^{ax}\right)dx$		$t=e^{ax}$	$\int \boldsymbol{R}(t)\,dt$
8	$\int \boldsymbol{R}(\sin x,\cos x)\,dx$		Если $\boldsymbol{R}(-\sin x,\cos x)=-\boldsymbol{R}(\sin x,\cos x)$, то $t=\cos x$. Если $\boldsymbol{R}(\sin x,-\cos x)=-\boldsymbol{R}(\sin x,\cos x)$, то $t=\sin x$. Если $\boldsymbol{R}(-\sin x,-\cos x)=\boldsymbol{R}(\sin x,\cos x)$, то $t=\operatorname{tg} x$. **Универсальная подстановка** $t=\operatorname{tg}(x/2)$: $\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$, $\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$.	$\int \boldsymbol{R}(t)\,dt$
9	$\int \sin^s x\cos^r x\,dx$	$s,r\in\mathbb{Q}$	$t=\cos x$ или $t=\sin x$	$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$
		$s,r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$	«Понижение степени»: $\sin^2 x=\left[1-\cos(2x)\right]/2$, $\cos^2 x=\left[1+\cos(2x)\right]/2$; $\sin^3 x=\left[3\sin x-\sin(3x)\right]/4$, $\cos^3 x=\left[3\cos x+\cos(3x)\right]/4$; $\sin^4 x=\left[\cos(4x)-4\cos(2x)+3\right]/8$, $\cos^4 x=\left[\cos(4x)+4\cos(2x)+3\right]/8$	
		$s=r\in\mathbb{Z}$	$\int \sin^s x\cos^r x\,dx=\dfrac{1}{2^{s+1}}\int \sin^s t\,dt$	
10	$\int \sin\alpha x\cos\beta x\,dx$, $\int \sin\alpha x\sin\beta x\,dx$, $\int \cos\alpha x\cos\beta x\,dx$		$\sin\alpha x\cos\beta x=\left[\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x\right]/2$, $\sin\alpha x\sin\beta x=\left[\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x\right]/2$, $\cos\alpha x\cos\beta x=\left[\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)x\right]/2$.	
11	$\int \boldsymbol{R}(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)\,dx$		$\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\int \boldsymbol{R}\left(e^{ax}\right)dx$
			Для этих интегралов применимы подстановки, аналогичные подстановкам, используемым для интегралов вида $\int \boldsymbol{R}(\sin x,\cos x)\,dx$. $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$ $\quad\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y=\left[\operatorname{ch}(x+y)-\operatorname{ch}(x-y)\right]/2$ $\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$ $\quad\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y=\left[\operatorname{ch}(x+y)+\operatorname{ch}(x-y)\right]/2$ $\operatorname{ch}2x=\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x$ $\quad\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y=\left[\operatorname{sh}(x+y)+\operatorname{sh}(x-y)\right]/2$ $\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}=\operatorname{sgn}x\cdot\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{2}}$ $\quad\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}=\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}x+1}{2}}$ $\operatorname{sh}x=\dfrac{2\operatorname{th}(x/2)}{1-\operatorname{th}^2(x/2)}$, $\operatorname{ch}x=\dfrac{1+\operatorname{th}^2(x/2)}{1-\operatorname{th}^2(x/2)}$	
12	$\int \boldsymbol{R}\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$		$x=a\sin t$, $x\in[-a,a]$, $t\in[-\pi/2;\,\pi/2]$ $x=a\cos t$, $x\in[-a,a]$, $t\in[0;\,\pi]$ $x=a\operatorname{th}t$, $x\in[-a,a]$, $t\in[-\infty;\,+\infty]$	$\int \boldsymbol{R}(\sin x,\cos x)\,dx$
13	$\int \boldsymbol{R}\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$		$x=a\operatorname{tg}t$, $x\in(-\infty,\infty)$, $t\in(-\pi/2;\,\pi/2)$ $x=a\operatorname{ctg}t$, $x\in(-\infty,\infty)$, $t\in(0,\pi)$ $x=a\operatorname{sh}t$, $x\in(-\infty,\infty)$, $t\in(-\infty,\infty)$	$\int \boldsymbol{R}(\sin x,\cos x)\,dx$
14	$\int \boldsymbol{R}\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$		$x=\dfrac{a}{\cos t}$, $x\in[a,+\infty)$, $t\in[0;\pi/2)$ или $x\in(-\infty,-a]$, $t\in(\pi/2;\pi]$ $x=\dfrac{a}{\sin t}$, $x\in[a,+\infty)$, $t\in[-\pi/2;0)$ или $x\in(-\infty,-a]$, $t\in(0;\pi/2]$ $x=a\operatorname{ch}t$, $x\in[1,+\infty)$, $t\in[0,+\infty)$	$\int \boldsymbol{R}(\sin x,\cos x)\,dx$

15	Интеграл от **биномиального дифференциала**: $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, $m,n,p\in\mathbb{Q}$	Выражается через элементарные функции в 3-х случаях: 1) если $p\in\mathbb{Z}$, то замена $t=\sqrt[k]{x}$, k – общий знаменатель дробей m и n; 2) если $\dfrac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$, то замена $t=\sqrt[k]{a+bx^n}$, k – знаменатель дроби p; 3) если $\dfrac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$, то замена $t=\sqrt[k]{ax^{-n}+b}$, где k – знаменатель дроби p.	$\int \boldsymbol{R}(t)\,dt$

16	$\int \boldsymbol{R}\left(x,x^{r_1},\ldots,x^{r_k}\right)dx$, $r_1,\ldots,r_k\in\mathbb{Q}$	$t=\sqrt[m]{x}$, m -общий знаменатель дробей $r_1,\ldots,r_k$	$\int \boldsymbol{R}(t)\,dt$
17	$\int \boldsymbol{R}\left[x,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right]dx$	$t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$	$\int \boldsymbol{R}(t)\,dt$
18	$\int \dfrac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$	$t=x+\dfrac{b}{2a}$	$\int \dfrac{M_1t+N_1}{\sqrt{at^2+m}}dt$
19	$\int \dfrac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $P_n(x)$ – многочлен степени n	$\int \dfrac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени $n-1$. Дифференцируя обе части этого равенства получим: $P_n(x)=Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c)+\dfrac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b)+\lambda$, которое дает СЛАУ размерности $n+1$ для определения коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(x)$ и множителя λ	$\int \dfrac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$
20	$\int \dfrac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^{m/2}}$, $m\in\mathbb{N}$	**Подстановка Абеля** $t=\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'$	$\int \boldsymbol{R}(t)\,dt$
21	$\int \dfrac{dx}{(x-x_1)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $m\in\mathbb{N}$	$t=\dfrac{1}{x-x_1}$	$\int \dfrac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$
22	$\int \dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, x^2+px+q не имеет действительных корней	1) если $p\neq\dfrac{b}{a}$, то $x=\dfrac{\alpha t+\beta}{t+1}$; 2) если $p=\dfrac{b}{a}$, то $t=x+\dfrac{b}{2a}$.	$\int \dfrac{(Mt+N)dt}{\left(t^2+d\right)^m\sqrt{et^2+r}}$
23	$\int \dfrac{x\,dx}{\left(x^2+a\right)^m\sqrt{bx^2+c}}$	$t=\sqrt{bx^2+c}$	$\int \boldsymbol{R}(t)\,dt$
24	$\int \dfrac{dx}{\left(x^2+a\right)^m\sqrt{bx^2+c}}$	**Подстановка Абеля** $t=\left(\sqrt{bx^2+c}\right)'$	$\int \boldsymbol{R}(t)\,dt$

25	$\int \boldsymbol{R}\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$	**Подстановки Эйлера:** 1) если $a>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\pm x\sqrt{a}$; 2) если $c>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm tx\pm\sqrt{c}$; 3) если $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t(x-x_1)$.	$\int \boldsymbol{R}(t)\,dt$