Глава 2. ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть m и n – фиксированные натуральные числа; $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ – евклидовы пространства с расстояниями ρ_m и ρ_n соответственно. Говорят, что на множестве $A \subset \mathbb{R}^m$ задана ***векторная функция*** (***отображение*** $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, оператор) $\vec{f}(\vec{x}): A \to \mathbb{R}^n$, если любому $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T \in A$ поставлен в соответствие вектор $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}))^T \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, что задание такого отображения $\vec{f}$ равносильно заданию функций $f_i(\vec{x}): A \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$. Функцию $f_i(\vec{x})$ называют i-ой компонентой отображения $\vec{f}(\vec{x})$.

Отображение $\vec{f}(\vec{x}): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ называется ***постоянным***, если

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m \ \vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}^0 \in \mathbb{R}^n \ ;$$

Отображение $\vec{f}(\vec{x}): A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$ называется ***взаимно однозначным***, если разным точкам множества A соответствуют разные точки пространства $\mathbb{R}^n$, то есть $\forall \vec{x}, \vec{y} \in A \ \ \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{y}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$. В этом случае говорят, что множество A взаимно однозначно отображается на множество $\vec{f}(A)$. При этом на множестве $\vec{f}(A)$ существует взаимно однозначное ***обратное отображение*** $\vec{f}^{-1}: \vec{f}(A) \to A$, при котором каждой точке $\vec{y} \in \vec{f}(A)$ ставится в соответствие точка $\vec{x} \in A$ такая, что $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$.

2.1. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ – открытое множество, $\vec{f}(\vec{x}): A \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x}^0 \in A$. Отображение $\vec{f}$ называется

– ***непрерывным в точке*** $\vec{x}^0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \vec{x} \in A \ \rho_m(\vec{x}, \vec{x}^0) < \delta \Rightarrow \rho_n(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x}^0)) < \varepsilon;$$

– ***непрерывным на множестве*** A, если оно непрерывно в каждой точке множества A;

– ***равномерно непрерывным на множестве*** A, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in A \ \rho_m(\vec{x}, \vec{y}) < \delta \Rightarrow \rho_n(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y})) < \varepsilon.$$

Определение непрерывности в точке, сформулированное выше с помощью окрестностей, можно переформулировать в терминах последовательностей аналогично тому, как были введены определения предела для функций по Коши и по Гейне.

Отображение $\vec{f}(\vec{x}): A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$ называется ***непрерывным в точке*** $\vec{x}^0 \in A$, если для любой последовательности $\{\vec{x}^k\}$, $\vec{x}^k \in A$, $\vec{x}^k \neq \vec{x}^0$, такой что $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}^k = \vec{x}^0$, имеет место $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{f}(\vec{x}^k) = \vec{f}(\vec{x}^0)$.

Теорема 2.1. Отображение $\vec{f}(\vec{x}): A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$ непрерывно в точке $\vec{x}^0 \in A$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны все его компоненты $f_i(\vec{x}): A \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$.

▸ Доказательство теоремы основывается на теореме 1.2, утверждающей эквивалентность покоординатной и поточечной сходимостей в евклидовом пространстве. ◂

Теорема 2.2. Пусть $\vec{f}: A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$ и $\vec{g}: D \to \mathbb{R}^k$, $f(A) \subset D$. Если отображение $\vec{f}$ непрерывно точке $\vec{x}^0 \in A$, а $\vec{g}$ непрерывно в точке $\vec{f}(\vec{x}^0)$, то композиция $\vec{g}(\vec{f})$ также непрерывна в точке $\vec{x}^0$.

▸ Утверждение теоремы доказывается аналогично н
епрерывности композиции функций одной переменной. ◂

Если отображение $\vec{f}: A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$ взаимно однозначно и непрерывно на множестве A, и, кроме того, обратное отображение $\vec{f}^{-1}$ непрерывно на множестве $\vec{f}(A) \subset \mathbb{R}^n$, то $\vec{f}$ называют ***гомеоморфным отображением*** или ***гомеоморфизмом***, а множество $\vec{f}(A)$ называют ***гомеоморфным образом*** множества A.

Очевидно, что если $\vec{f}$ – гомеоморфизм множества A, то $\vec{f}^{-1}$ является гомеоморфизмом множества $\vec{f}(A)$.

Если для множеств $A \subset \mathbb{R}^m$ и $B \subset \mathbb{R}^n$ существует гомеоморфизм, отображающий A на B, то множества A и B называются ***гомеоморфными.***

2.2. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Отображение $\vec{f}(\vec{x}):\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ называется ***линейным*** (***линейным однородным***), если

$$\forall \vec{x}^1, \vec{x}^2 \in \mathbb{R}^m \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \vec{f}\left(\lambda \vec{x}^1 + \mu \vec{x}^2\right) = \lambda \vec{f}\left(\vec{x}^1\right) + \mu \vec{f}\left(\vec{x}^2\right).$$

Обычно линейные однородные отображения называют ***линейными операторами***. Из определения линейного оператора непосредственно следует, что все его компоненты также являются линейными однородными функциями.

Теорема 2.3. Отображение $\vec{f}$ линейно тогда и только тогда, когда существует матрица $D = \left(d_{ij}\right)_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{m}$ с действительными элементами d_{ij} такая, что $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m \ \vec{f}(\vec{x}) = D\vec{x}$.

Замечание. Матрица $D = D\left(\vec{f}\right)$ называется ***матрицей линейного оператора*** $\vec{f}$, а её элементы определяются как коэффициенты разложения образов координатных векторов $e_j, j = \overline{1,m}$ пространства $\mathbb{R}^m$ по координатным векторам $\varepsilon_i, i = \overline{1,n}$ пространства $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{f}\left(e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} \varepsilon_i .$$

Теорема 2.4. Пусть $\vec{f}:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $\vec{g}:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – линейные отображения с матрицами $D\left(\vec{f}\right)$ и $D(\vec{g})$ соответственно. Тогда $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ отображение $\vec{h}(\vec{x}) = \lambda \vec{f}(\vec{x}) + \mu \vec{g}(\vec{x})$ является линейным и имеет матрицу $D\left(\vec{h}\right) = \lambda D\left(\vec{f}\right) + \mu D(\vec{g})$.

Теорема 2.5. Пусть $\vec{f}:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $\vec{g}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ – линейные отображения с матрицами $D\left(\vec{f}\right)$ и $D(\vec{g})$ соответственно. Тогда их суперпозиция $\vec{h}:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $\vec{h}(\vec{x}) = \vec{g}\left(\vec{f}(\vec{x})\right)$ есть линейное отображение с матрицей $D\left(\vec{h}\right) = D(\vec{g}) D\left(\vec{f}\right)$.

Теорема 2.6. Всякое линейное отображение непрерывно.

▸ Утверждение непосредственно следует из теорем 2.1, 2.3, так как все компоненты линейного отображения непрерывны, будучи линейными функциями. ◂

Теорема 2.7. Если $\vec{f}:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – линейное отображение с матрицей $D(\vec{f})$, такой что $\det D(\vec{f}) \neq 0$, то отображение $\vec{f}$ является взаимно однозначным, а обратное отображение $\vec{f}^{-1}$ – линейным с матрицей $D^{-1}(\vec{f})$.

2.3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ – открытое множество, $\vec{f}(\vec{x}): A \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x}^0 \in A$. Отображение $\vec{f}$ называется ***дифференцируемым в точке*** $\vec{x}^0$, если существует линейное отображение $\vec{L}(\vec{x}): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ с матрицей D такое, что

$$\left\| \vec{f}\left(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}\vec{a}\right) - \vec{f}\left(\vec{x}^0\right) - \vec{L}(\vec{a}) \right\| = o\left(\|\vec{a}\|\right) \text{ при } \vec{a} \to \vec{0}. \qquad (1.28)$$

Линейный оператор $\vec{L}(\vec{x})$ называют ***дифференциалом отображения*** $\vec{f}$ ***в точке*** $\vec{x}^0$ и обозначают $d\vec{f}\left(\vec{x}^0\right)$ или $D_{\vec{f}}\left(\vec{x}^0\right)$, а саму матрицу D называют ***производной отображения*** $\vec{f}$ ***в точке*** $\vec{x}^0$ и обозначают $\vec{f}'\left(\vec{x}^0\right)$.

Заметим, что если для евклидовых пространств ввести выражения вида $o(\vec{x})$ так, что $\vec{\alpha}(\vec{x}) = o(\vec{x})$, $\vec{\alpha}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ при $\vec{x} \to \vec{x}^0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \|\vec{\alpha}(\vec{x})\| = \varepsilon(\vec{x})\|\vec{x}\|$, $\varepsilon: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, где $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}^0} \varepsilon(\vec{x}) = 0$, то определение дифференцируемости в точке $\vec{x}^0$ можно переписать в более привычном виде:

$$\vec{f}\left(\vec{x}^0 + \vec{a}\right) - \vec{f}\left(\vec{x}^0\right) = \vec{l}(\vec{a}) + o(\vec{a}),\ \vec{a} \to \vec{0},\ \vec{a} \in \mathbb{R}^m. \qquad (1.29)$$

Теорема 2.8. Если отображение $\vec{f}(\vec{x}): A \to \mathbb{R}^n, A \subset \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $\vec{x}^0 \in A$, то его дифференциал в этой точке определен однозначно.

Следствие. Дифференциал линейного отображения совпадает с самим отображением.

Теорема 2.9. Если отображение $\vec{f}(\vec{x}): A \to \mathbb{R}^n, A \subset \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $\vec{x}^0 \in A$, то оно непрерывно в этой точке.

▸ Утверждение непосредственно следует из соотношения (1.29) и непрерывности линейного оператора $\vec{l}$. ◂

Теорема 2.10. Отображение $\vec{f}(\vec{x}): A \to \mathbb{R}^n, A \subset \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $\vec{x}^0 \in A$ тогда и только тогда, когда все его компоненты $f_i(\vec{x}): A \to \mathbb{R},\ i = \overline{1,n}$ дифференцируемы в этой точке, при этом

$$\left[\vec{f}'\left(\vec{x}^0\right)\right]_{ij} = \frac{\partial f_i\left(\vec{x}^0\right)}{\partial x_j},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}. \tag{1.30}$$

▶ **Необходимость.* Очевидно, что для $i = \overline{1,n}$

$$\left|f_i\left(\vec{x}^0 + \vec{a}\right) - f_i\left(\vec{x}^0\right) - \vec{d}_i^T \vec{a}\right| \le \left\|\vec{f}\left(\vec{x}^0 + \vec{a}\right) - \vec{f}\left(\vec{x}^0\right) - \vec{f}'\left(\vec{x}^0\right)\vec{a}\right\|,$$

где $\vec{d}_i^T$ – i-ая строка матрицы $\vec{f}'\left(\vec{x}^0\right)$.

Из дифференцируемости отображения $\vec{f}$, согласно определению (1.28), следует, что

$$\left\|\vec{f}\left(\vec{x}^0 + \vec{a}\right) - \vec{f}\left(\vec{x}^0\right) - \vec{f}'\left(\vec{x}^0\right)\vec{a}\right\| = o\left(\|\vec{a}\|\right) \text{ при } \vec{a} \to \vec{0}.$$

Таким образом, получим

$$\left|f_i\left(\vec{x}^0 + \vec{a}\right) - f_i\left(\vec{x}^0\right) - d_i^T\left(\vec{x}^0\right)\vec{a}\right| = o\left(\|\vec{a}\|\right),$$

а значит функции $f_i(\vec{x}),\ i = \overline{1,n}$ дифференцируемы в точке $\vec{x}^0$**.** Более того, так как дифференциал функции многих переменных определен однозначно, $d_i^T\left(\vec{x}^0\right) = f_i'\left(\vec{x}^0\right)$, то есть верна формула (1.30).

Достаточность. Пусть $\forall i = \overline{1,n}$

$$f_i\left(\vec{x}^0 + \vec{a}\right) - f_i\left(\vec{x}^0\right) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i\left(\vec{x}^0\right)}{\partial x_j} a_j = o\left(\|\vec{a}\|\right) \text{ при } \vec{a} \to \vec{0}.$$

Тогда, если определить матрицу $\vec{f}'\left(\vec{x}^0\right)$ согласно формуле (1.30), получаем неравенство

$$\left\|\vec{f}\left(\vec{x}^0 + \vec{a}\right) - \vec{f}\left(\vec{x}^0\right) - \vec{f}'\left(\vec{x}^0\right)\vec{a}\right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(o\left(\|\vec{a}\|\right)\right)^2} = o\left(\|\vec{a}\|\right),$$

из которого, с учетом теоремы 2.8, следует дифференцируемость отображения $\vec{f}$. ◀

Следствие. Для дифференцируемости отображения $\vec{f}$ в некоторой точке достаточно, чтобы все частные производные его компонент $f_i,\ i = \overline{1,n}$ были непрерывны в этой точке.

Если отображение $\vec{f}$ дифференцируемо в каждой точке множества $A \subset R^m$, то оно называется ***дифференцируемым отображением множества*** A.

Отображение $\vec{f}$ называется ***непрерывно дифференцируемым отображением*** множества $A \subset R^m$, то есть $\vec{f} \in C^{(1)}(A)$, если его координатные функции непрерывно дифференцируемы на множестве A.

Аналогично определяется непрерывно k-дифференцируемое отображение множества $A \subset R^m$:

$$\vec{f}(\vec{x}) \in C^{(k)}(A) \quad \Leftrightarrow \quad f_i(\vec{x}) \in C^{(k)}(A),\ i = \overline{1,n}.$$

Замечание 1. Если все компоненты отображения дифференцируемы на некотором множестве A, то на этом множестве определена векторная функция $d\vec{f}(\vec{x})$:

$$d\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}'(x)\begin{pmatrix} dx_1 \\ \cdots \\ dx_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1 \\ \cdots \\ dx_m \end{pmatrix}, \quad \vec{x} \in A.$$

Замечание 2. Матрицу $\vec{f}'(\vec{x})$ обычно называют ***матрицей Якоби***. Если матрица Якоби квадратная $(m = n)$, то ее определитель называют ***определителем Якоби*** или ***якобианом отображения*** и обозначают:

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \det \vec{f}'(\vec{x}).$$

Точку, в которой $\det \vec{f}'(\vec{x}) = 0$, обычно называют ***точкой вырождения.***

Пример 2.1. Запишем матрицу Якоби для отображения, заданного уравнениями $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и вычислим соответствующий якобиан.

▸ Согласно формуле (1.30), получаем

$$\vec{f}'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\det \vec{f}'(\vec{x}) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$. ◂

Теорема 2.11 (о дифференцировании композиции отображений). Пусть $\vec{f}: A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$ и $\vec{g}: B \to \mathbb{R}^k$, $f(A) \subset B$. Пусть отображение $\vec{f}$ дифференцируемо в точке $\vec{x}^0 \in A$, а $\vec{g}$ дифференцируемо в точке $\vec{y}^0 = \vec{f}(\vec{x}^0)$. Тогда функция $\vec{h} = \vec{g}(\vec{f}): A \to R^k$ дифференцируема в точке $\vec{x}^0$, причем

$$\vec{h}'(\vec{x}^0) = \vec{g}'\left(\vec{f}(\vec{x}^0)\right) \cdot \vec{f}'(\vec{x}^0) = \vec{g}'(\vec{y}^0) \cdot \vec{f}'(\vec{x}^0). \tag{1.31}$$

▸ Каждая компонента отображения $\vec{h}$ является дифференцируемой в точке $\vec{x}^0$ функцией в силу теоремы 1.19 о дифференцируемости сложной функции и теоремы 2.10. Следовательно, по последней теореме, дифференцируемым является и само отображение $\vec{h}$. Применяя теперь к каждой компоненте этого отображения правило дифференцирования сложной функции (1.11), получаем

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_l} \frac{\partial f_l}{\partial x_j}, \ i = \overline{1,k}, \ j = \overline{1,m}.$$

Таким образом, $\left[\vec{h}'(\vec{x}^0)\right]_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \left(\left[\vec{g}'(\vec{y}^0)\right]_{il} \cdot \left[\vec{f}'(\vec{x}^0)\right]_{lj} \right)$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,m}$, следовательно, верна формула (1.31) ◂

Следствие. Если $m = n = k$, то из теоремы и правила вычисления определителя произведения матриц получим следующее утверждение для якобианов:

$$\frac{\partial(h_1, \ldots, h_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} = \frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(f_1, \ldots, f_m)} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}.$$

Теорема 2.12 (о дифференцировании обратного отображения). Пусть $\vec{f}: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^m$ – непрерывно дифференцируемое отображение и в некоторой точке $\vec{x}^0 \in A$ $\det \vec{f}'(\vec{x}^0) \neq 0$. Тогда в пространстве $\mathbb{R}^m$ существуют множество $O(\vec{x}^0) \subset A$, содержащее точку $\vec{x}^0$, и шар $B(\vec{y}^0, r)$, где $y^0 = \vec{f}(\vec{x}^0)$ такие, что отображение $\vec{f}: O(\vec{x}^0) \to B(\vec{y}^0, r)$ есть гомеоморфизм, а функция $\vec{f}^{-1}: B(\vec{y}^0, r) \to O(\vec{x}^0)$ является непрерывно дифференцируемой и её производная в произвольной точке $\vec{y} \in B(\vec{y}^0, r)$ вычисляется по формуле $\vec{g}'(\vec{y}) = \left(\vec{f}'(\vec{x})\right)^{-1}$, где $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.

Пример 2.2. Запишем матрицу Якоби для отображения, обратного к отображению, рассмотренному в примере 2.1, и вычислим его якобиан.

▶ Согласно теореме 2.12, получим

$$\left(\vec{f}^{-1}\right)' = \begin{pmatrix} r'_x & r'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r^{-1}\sin\varphi & r^{-1}\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Далее, $\det\left(\vec{f}^{-1}\right)' = \left(\det \vec{f}'\right)^{-1} = r^{-1}$. ◀

Глава 3. ТЕОРИЯ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

3.1. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

В математике и в ее приложениях приходится сталкиваться с такими задачами, когда переменная y, являющаяся по смыслу задачи функцией аргументов $x_1,\ldots,x_m$, задается посредством функционального уравнения

$$F(\vec{x},y)=F(x_1,\ldots,x_m,y)=0. \tag{1.32}$$

В этом случае говорят, что y как функция аргументов $x_1,\ldots,x_m$ ***задана неявно***.

Теорема 3.1 (о непрерывности неявной функции). Если функция $F(x_1,\ldots,x_m,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(\vec{x},y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $N_0(x_1^0,\ldots,x_m^0,y^0)\in\mathbb{R}^{m+1}$, причем $F(N_0)=0$,

2) имеет в этой окрестности частную производную F'_y, непрерывную в точке N_0, причем $F'_y(N_0)\neq 0$,

то в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0,\ldots,x_m^0)\in\mathbb{R}^m$ уравнение (1.32) определяет единственную функцию $y=\varphi(x_1,\ldots,x_m)$, причем эта функция непрерывна в рассматриваемой окрестности.

Теорема 3.2 (о дифференцируемости неявной функции). Если выполнены все условия теоремы 3.1 и при этом в некоторой окрестности точки N_0 существуют все частные производные функции $F(x_1,\ldots,x_m,y)$, непрерывные в этой точке, то в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0,\ldots,x_m^0)\in\mathbb{R}^m$ уравнение (1.32) определяет единственную функцию $y=\varphi(x_1,\ldots,x_m)$, причем эта функция непрерывна в рассматриваемой окрестности, а в самой точке M_0 имеет частные производные φ'_{x_i}, $i=\overline{1,m}$.

Замечание 1. Если дополнительно потребовать непрерывность частных производных функции $F(\vec{x},y)$ в окрестности точки N_0, то частные производные φ'_{x_i}, $i=\overline{1,m}$ будут непрерывны в некоторой окрестности точки M_0.

Замечание 2. Предыдущее замечание можно переформулировать следующим образом: из дифференцируемости функции $F(\vec{x}, y)$ в окрестности точки N_0, при выполнении условий теоремы 3.1, следует дифференцируемость функции $y = \varphi(\vec{x})$ в окрестности точки M_0.

Вычисление частных производных неявно заданной функции

Если выполнены все условия теоремы 3.2, то частные производные функции $y = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$ в точке M_0 можно вычислить по формуле

$$\varphi'_{x_k} = -\frac{F'_{x_k}}{F'_y}, \; k = \overline{1, m}. \tag{1.33}$$

При дополнительном условии непрерывности частных производных F'_y, F'_{x_k}, $k = \overline{1, m}$ в некоторой окрестности точки N_0 формула (1.33) становится верна в некоторой окрестности точки M_0.

Чтобы обеспечить существование у функции $y = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$ частных производных более высоких порядков в рассматриваемой точке, следует потребовать, чтобы функция $F(x_1, \ldots, x_m, y)$ была дифференцируема соответствующее число раз в этой точке.

Пример 3.1. Докажем, что уравнение

$$z^3 - xyz + y^2 = 16 \tag{1.34}$$

определяет в некоторой окрестности точки $(1, 4, 2)$ единственную неявную функцию вида $z = \varphi(x, y)$. Найдем ее частные производные z'_y и z''_{yx}.

▸ Функция $F(x, y, z) = z^3 - xyz + y^2 - 16$ дифференцируема в любой окрестности точки $N_0(1, 4, 2)$. Производная $F'_z = 3z^2 - xy$ непрерывна в точке $M_0(1, 4)$. Наконец, $F(1, 4, 2) = 0$, $F'_z(1, 4, 2) \neq 0$. Следовательно, согласно замечанию 2 к теореме 3.2, в некоторой окрестности точки $M_0(1, 4)$ уравнение (1.34) определяет единственную дифференцируемую неявную функцию вида $z = \varphi(x, y)$, причем $\varphi(1, 4) = 2$. Более того, так как функция $F(x, y, z)$ дважды дифференцируема в любой окрестности точки $N_0(1, 4, 2)$, функция $z = \varphi(x, y)$ также будет дважды дифференцируема в некоторой окрестности $M_0(1, 4)$.

Теперь рассмотрим несколько способов вычисления частных производных полученной функции.

Способ 1. Для вычисления частных производных применим формулу (1.33):

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}\bigg|_{z=\varphi(x,y)}=-\frac{-xz+2y}{3z^2-xy}=\frac{x\cdot\varphi(x,y)-2y}{3\varphi^2(x,y)-xy}, \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xz-2y}{3z^2-xy}\right)=$$

$$=\frac{(xz'_x+z)(3z^2-xy)-(xz-2y)(6zz'_x-y)}{(3z^2-xy)^2}. \quad (1.36)$$

Таким образом, для нахождения z''_{yx} необходимо вычислить z'_x, и подставить полученное выражение в (1.36).

Способ 2. Предполагая, что функция $z=\varphi(x,y)$ подставлена в уравнение (1.34), продифференцируем полученное тождество по y:

$$3z^2z'_y-xyz'_y-xz+2y=0 \quad (1.37)$$

Решая это уравнение, относительно z'_y получим выражение (1.35). Чтобы найти z''_{yx}, продифференцируем (1.37) по x:

$$6z\cdot z'_xz'_y+3z^2z''_{yx}-xyz''_{yx}-yz'_y-xz'_x-z=0.$$

Далее необходимо решить это уравнение относительно z''_{yx} и подставить вместо z'_x и z'_y соответствующие выражения.

Способ 3. Предполагая, что функция $z=\varphi(x,y)$ подставлена в уравнение (1.33), вычислим дифференциал от обеих частей полученного тождества:

$$3z^2\cdot dz-xy\cdot dz-yz\cdot dx-xz\cdot dy+2y\cdot dy=0. \quad (1.38)$$

При $3z^2-xy\neq 0$ данное равенство преобразуется к виду

$$dz=\frac{yz}{3z^2-xy}dx+\frac{xz-2y}{3z^2-xy}\cdot dy. \quad (1.39)$$

Следовательно, согласно теореме 1.16, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-2y}{3z^2-xy}=\frac{x\cdot\varphi(x,y)-2y}{3\varphi^2(x,y)-xy}.$$

Чтобы вычислить вторые производные функции $z=\varphi(x,y)$, продифференцируем равенство (1.38):

$$\left(3z^2-xy\right)d^2z+6z\cdot dz^2-2x\cdot dydz-2y\cdot dxdz-2z\cdot dxdy+2dy^2=0.$$

Подставляя в полученное равенство соотношение

$$dz=z'_x dx+z'_y dy,$$

получаем

$$\left(3z^2-xy\right)d^2z+\left(-2y\cdot z'_x+6z\cdot\left(z'_x\right)^2\right)dx^2+$$
$$+\left(-2x\cdot z'_y+6z\cdot\left(z'_y\right)^2+2\right)dy^2+$$
$$+\left(-2z-2y\cdot z'_y-2x\cdot z'_x+2z\cdot z'_x z'_y\right)dxdy.$$

Таким образом,

$$d^2z=\frac{-2y\cdot z'_x+6z\cdot\left(z'_x\right)^2}{3z^2-xy}dx^2+\frac{-2x\cdot z'_y+6z\cdot\left(z'_y\right)^2+2}{3z^2-xy}dy^2+$$
$$+\frac{-2z-2y\cdot z'_y-2x\cdot z'_x+2z\cdot z'_x z'_y}{3z^2-xy}dxdy.$$

Отсюда, с учетом выражения для дифференциала второго порядка функции многих переменных, заключаем, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-z-y\cdot z'_y-x\cdot z'_x+z\cdot z'_x z'_y}{3z^2-xy}.$$

Подставляя в полученное равенство выражения для z'_x и z'_y, получаем требуемый ответ. ◂

З а м е ч а н и е. Третий способ удобен в тех случаях, когда необходимо вычислить все частные производные первого порядка заданной неявной функции. При этом производные более высоких порядков, как правило, легче вычисляются дифференцированием производных меньших порядков, как это продемонстрировано при решении первым способом. Кроме того, второй и третий способы можно эффективно применять при нахождении значений производных неявно заданной функции в фиксированной точке.

Пример 3.2. Найдем локальные экстремумы неявных функций вида $z = f(x, y)$, определяемых функциональным уравнением:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0. \qquad (1.40)$$

▸ Предполагая, что дифференцируемая неявная функция $z = f(x, y)$ подставлена в уравнение (1.40), вычислим дифференциалы от обеих частей полученного тождества:

$$2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz - 2dx + 2dy - 4dz = 0. \qquad (1.41)$$

Следовательно, при $z \neq 2$:

$$dz = \frac{x-1}{2-z}dx + \frac{y+1}{2-z}dy.$$

Используя необходимое условие экстремума $dz = 0$, находим критические точки:

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{x-1}{2-z} = 0, \\ z'_y = \dfrac{y+1}{2-z} = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \\ z \neq 2. \end{cases}$$

Подставив значения $x = 1$, $y = -1$ в уравнение (1.40), найдем соответствующие значения z:

$$z^2 - 4z - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -2 \text{ или } z = 6.$$

Таким образом, получили две критические точки $A_1(1, -1, -2)$ и $A_2(1, -1, 6)$.

Заметим, что $F'_z(A_1) \neq 0$ и $F'_z(A_2) \neq 0$, и, следовательно, в окрестностях точек A_1 и A_2 выполнены все условия теоремы о существовании неявно заданной функции. Так как функция $F(x, y, z)$ дважды дифференцируема, то в некоторой окрестности точки A_i ($i = 1, 2$) существует единственная дважды дифференцируемая неявная функция $z = f_i(x, y)$. При этом $f_1(1, -1) = -2$, $f_2(1, -1) = 6$. Точка $(1, -1)$ является точкой возможного экстремума для каждой из функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$.

Чтобы применить достаточное условие экстремума, надо найти вторые дифференциалы этих функций. Для этого вычислим дифференциалы от обеих частей тождества (1.41):

$$2\,dx^2 + 2\,dy^2 + 2z\,d^2z + 2dz^2 - 4d^2z = 0 \quad \text{или} \quad d^2z = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2-z}.$$

Учитывая, что $dz\big|_{(1,-1)}=0$, получаем $d^2 f_1\big|_{(1,-1)}=0.25\left(dx^2+dy^2\right)$, $d^2 f_2\big|_{(1,-1)}=-0.25\left(dx^2+dy^2\right)$. Таким образом, $d^2 f_1\big|_{(1,-1)}$ является положительно определенной квадратичной формой, а $d^2 f_2\big|_{(1,-1)}$ – отрицательно определенной квадратичной формой. Следовательно, функция $z=f_1(x,y)$ имеет в точке $(1,-1)$ локальный минимум, равный -2, а функция $z=f_2(x,y)$ имеет в точке $(1,-1)$ локальный максимум, равный 6.◀

Пример 3.3. Найдем локальные экстремумы неявных функций вида $z=f(x,y)$, определяемых функциональным уравнением:

$$F(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2+9\right)^2-100\left(x^2+y^2\right)=0,\ z<0. \quad (1.42)$$

▶Пусть $t=t(x,y)=x^2+y^2$, тогда функциональное уравнение (1.42) примет вид:

$$\Phi(t,z)=\left(t+z^2+9\right)^2-100t=0,\ z<0. \quad (1.43)$$

Предполагая, что дифференцируемая неявная функция $z=\varphi\left(t(x,y)\right)$ подставлена в уравнение (1.43), вычислим дифференциалы от обеих частей полученного тождества:

$$2\left(t+z^2+9\right)\left(dt+2zdz\right)=100dt,$$

$$2\left(t+z^2+9\right)zdz=\left(41-t-z^2\right)dt. \quad (1.44)$$

Следовательно, $dz=0$ если $z\neq 0$ и $t=41-z^2$. Подставляя это тождество в уравнение (1.43) и учитывая, что по условию $z<0$, найдем соответствующие значения z

$$50^2=100\left(41-z^2\right) \quad \Rightarrow \quad z=-4.$$

Таким образом, получили, что неявно заданная функция $z=\varphi\left(t(x,y)\right)$ имеет критическую точку $t=25, z=-4$, а значит, критическими точками неявно заданной фукнции $z=f(x,y)$ будут все точки окружности $x^2+y^2=25$. Так как $F'_z\big|_{x^2+y^2=25}\neq 0$ $\left(\Phi'_z\big|_{t=-4}\neq 0\right)$, в окрестностях рассматриваемых выполнены все условия теоремы о существовании неявно заданной функции $z=f(x,y)$ $\left(z=\varphi(t)\right)$.

Чтобы применить достаточное условие экстремума, надо найти второй дифференциал. Для этого вычислим дифференциалы от обеих частей тождества (1.44):

$$2\left(dt+2zdz\right)zdz+2\left(t+z^2+9\right)\left(dz^2+zd^2z\right)=\left(-dt-2zdz\right)dt.$$

Учитывая, что $dz\big|_{t=25}=0$, получаем

$$d^2\varphi\big|_{t=25}=\frac{1}{1300}dt^2>0,$$

$$d^2f_2\big|_{(1,-1)}=-0.25\left(dx^2+dy^2\right).$$

Таким образом, все точки окружности $x^2+y^2=25$ являются точками нестрого минимума. ◀

3.2. ВЕКТОРНЫЕ НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

Предположим, что n функций

$$y_i=\varphi_i\left(x_1,\ldots,x_m\right),\quad i=\overline{1,n} \tag{1.45}$$

ищутся как решение системы n функциональных уравнений

$$F_i\left(y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_m\right)=0,\quad i=\overline{1,n} \tag{1.46}$$

Под термином решение понимают совокупность n функций (1.45) таких, что при подстановке этих функций в систему (1.46) все уравнения этой системы обращаются в тождество.

Теорема 3.3 (о векторной неявной функции). Пусть функции

$$F_i\left(y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_m\right),\quad i=\overline{1,n}$$

непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $N_0\left(y_1^0,\ldots,y_n^0,x_1^0,\ldots,x_m^0\right)\in\mathbb{R}^{m+n}$. Если в точке N_0 все эти функции обращаются в ноль, а якобиан $\dfrac{\partial\left(F_1,\ldots,F_n\right)}{\partial\left(y_1,\ldots,y_n\right)}\left(N_0\right)\neq0$, то в некоторой окрестности точки $M_0\left(x_1^0,\ldots,x_m^0\right)\in\mathbb{R}^m$ система уравнений (1.46) определяет единственный набор функций (1.45), являющихся решением данной системы, причем эти функции непрерывно дифференцируемы в рассматриваемой окрестности точки M_0.

Вычисление частных производных неявно заданной векторной функции

Предположим, что все условия существования и дифференцируемости неявной функции (т.е. условия теоремы) выполнены.

Подставим функции (1.45) в систему (1.46), решением которой эти функции являются, и продифференцируем получившиеся тождества по x_l, $l=\overline{1,m}$. Получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_l}+\cdots\dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_l}+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_l}=0, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_l}+\cdots\dfrac{\partial F_2}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_l}+\dfrac{\partial F_2}{\partial x_l}=0, \\ \cdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_l}+\cdots\dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial x_l}+\dfrac{\partial F_n}{\partial x_l}=0. \end{cases} \tag{1.47}$$

Эти равенства представляют собой линейную систему уравнений относительно n неизвестных $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_l},\dfrac{\partial y_2}{\partial x_l},\ldots,\dfrac{\partial y_n}{\partial x_l}$. Определитель этой системы является якобианом $\dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}$, а значит, согласно условию, отличен от нуля в окрестности рассматриваемой точки N_0. Следовательно, система (1.47) имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера:

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_l}=\frac{\overline{\dfrac{\partial(F_1,F_2,\ldots,F_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_{k-1},x_l,y_{k+1},\ldots,y_n)}}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2,\ldots,F_n)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}}. \tag{1.48}$$

В случае необходимости вычисления производной более высокого порядка, ее вычисляют рекуррентно как производную от производной, имеющей порядок на единицу меньше, учитывая что $y_1,\ldots,y_n$ являются функциями переменных $x_1,\ldots,x_m$.

3.3. ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ДВУХ МНОЖЕСТВ m-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Теорема 3.4. Если функции

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, \ldots, x_m), \\ &\ldots \\ y_m &= \varphi_m(x_1, \ldots, x_m). \end{aligned} \tag{1.49}$$

дифференцируемы в окрестности точки $M_0\left(x_1^0, \ldots, x_m^0\right)$, причем все частные производные первого порядка непрерывны в точке M_0, а якобиан $\dfrac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}$ отличен от нуля в этой точке, то функции (1.49) осуществляют взаимно однозначное отображение некоторой окрестности точки M_0 на некоторую окрестность точки $K_0\left(y_1^0, \ldots, y_m^0\right)$ где $y_i^0 = \varphi_i\left(x_1^0, \ldots, x_m^0\right)$, $i = \overline{1, m}$. Причем и прямое, и обратное отображения непрерывны, а значит, такое отображение является гомеоморфизмом.

▸ Доказательство основано на рассмотрении системы (1.49) как системы функциональных уравнений относительно $x_1, \ldots, x_m$, для которой выполнены условия теоремы. Эта система всюду в некоторой окрестности точки $K_0\left(y_1^0, \ldots, y_m^0\right)$ имеет единственное решение

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(y_1, \ldots, y_m), \\ x_2 &= \psi_2(y_1, \ldots, y_m), \\ &\ldots \\ x_m &= \psi_m(y_1, \ldots, y_m), \end{aligned} \tag{1.50}$$

которое, очевидно, осуществляет обратное отображение. ◂

3.4. ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ

Пусть n функций (1.49) определены и дифференцируемы в некоторой открытой m-мерной области A. Говорят, что одна из этих функций, например y_k, зависит в области A от остальных функций, если сразу для всех точек $(x_1, \ldots, x_m)$ области A

$$y_k = \Phi\left(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n\right), \tag{1.51}$$

где Φ – некоторая функция, определенная и дифференцируемая в соответствующей области изменения своих аргументов. Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называют ***зависимыми в области*** A, если одна из этих функций (безразлично, какая) зависит в области A от остальных.

Если же не существует дифференцируемой функции Φ такой, что сразу для всех точек области A справедливо тождество вида (1.51), то функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называют ***независимыми в области*** A.

Теорема 3.5 (достаточное условие независимости функций). Пусть n функций от m переменных

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, \ldots, x_m), \\ &\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x_1, \ldots, x_m), \end{aligned} \tag{1.52}$$

где $n \le m$, определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M_0\left(x_1^0, \ldots, x_m^0\right)$. Тогда если якобиан этих функций по каким-либо n переменным отличен от нуля в точке M_0, то эти функции независимы в окрестности точки M_0.

Теорема 3.6. Пусть у функциональной матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

1) некоторый минор r-го порядка отличен от нуля в точке $M_0\left(x_1^0, \ldots, x_m^0\right)$;

2) все миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю в некоторой окрестности точки $M_0\left(x_1^0, \ldots, x_m^0\right)$.

Тогда r функций, представленных в указанном миноре r-го порядка, независимы в окрестности точки M_0, каждая из остальных функций зависит в этой окрестности от указанных r функций.

Замечание. Если $r = \min(n, m)$, то второе условие теоремы следует опустить.

3.5. ЛОКАЛЬНЫЙ ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ – открытое множество, $f : A \to \mathbb{R}$. Для натурального $s < m$ пусть $\varphi_i : A \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, s}$ – заданные функции. Положим

$$Q = \left\{ \vec{x} \middle| \vec{x} \in A,\ \varphi_i(\vec{x}) = 0, i = \overline{1, s} \right\},$$

в этом случае говорят, что множество Q определяется s ***уравнениями связи***

$$\varphi_1(\vec{x}) = 0, \varphi_2(\vec{x}) = 0, \ldots, \varphi_s(\vec{x}) = 0. \qquad (1.53)$$

Функция f имеет в точке $\vec{x}^0 \in Q$ ***локальный относительный максимум*** при условиях (1.53), если существует окрестность этой точки, в которой $\forall x \in Q \quad f(\vec{x}) \le f(\vec{x}^0)$. Локальный относительный максимум называется ***строгим***, если в последнем выражении неравенство будет строгим. Аналогично определяются понятия ***локального относительного минимума*** и ***строго локального относительного минимума***. Все введенные в этом пункте понятия описываются также общим термином ***локальный относительный*** (или ***условный***) ***экстремум***.

В том случае, когда уравнения (1.53) могут быть аналитически разрешены относительно каких-либо s переменных, то, подставляя полученные выражения в функцию $f(\vec{x})$, мы перейдем к функции $m - s$ переменных, локальный экстремум которой совпадет с условным экстремумом исходной функции при заданных уравнениях связи. Такой метод нахождения условного экстремума называется ***методом исключений***.

Однако, аналитически решить систему (1.53) как правило очень сложно, а иногда и невозможно. В связи с этим возникает необходимость в методе нахождения условного экстремума, не требующего решения данной системы. Этот метод основан на следующих двух теоремах.

Теорема 3.7 (необходимое условие локального относительного экстремума). Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ – открытое множество, на котором заданы вещественнозначные непрерывно дифференцируемые функции f и φ_i, $i = \overline{1, s}$, причем $s < m$. Пусть далее $\vec{x}^0 \in A$ – точка локального относительного экстремума функции f при ограничениях (1.53) и матрица $\left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{i=1\, j=1}^{s\quad m}$ имеет ранг s в этой точке. Тогда существуют действительные числа λ_i, $i=\overline{1,s}$, такие, что точка $\vec{x}^0$ – критическая точка функции

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_s\varphi_s. \qquad (1.54)$$

▸ Пусть, например,

$$\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_s)}{\partial(x_{m-s+1},\ldots,x_m)}(\vec{x}^0) \neq 0. \qquad (1.55)$$

Тогда система

$$\frac{\partial F(\vec{x}^0)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\frac{\partial\varphi_i(\vec{x}^0)}{\partial x_j} = 0,\ j=\overline{m-s+1,m} \qquad (1.56)$$

с неизвестными $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ имеет решение и притом единственное.

Ограничения $\varphi_i(x_1,\ldots,x_m)=0$, $i=\overline{1,s}$, $(x_1,\ldots,x_m)\in A$, согласно теореме 3.3, можно разрешить относительно переменных $x_{m-s+1},\ldots,x_m$ как функций от $x_1,\ldots,x_{m-s}$ в некоторой окрестности точки $(x_1^0,\ldots,x_{m-s}^0)$. В этой окрестности на основании правила дифференцирования сложной функции получим

$$\forall i=\overline{1,s} \quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + \sum_{k=m-s+1}^{m}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = 0,\ j=\overline{1,m-s}. \qquad (1.57)$$

Функция $f\left(x_1,\ldots,x_{m-s},x_{m-s+1}(x_1,\ldots,x_{m-s}),\ldots,x_m(x_1,\ldots,x_{m-s})\right)$ имеет локальный экстремум в точке $(x_1^0,\ldots,x_{m-s}^0)$, поэтому

$$\frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_j} + \sum_{k=m-s+1}^{m}\frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = 0,\ j=\overline{1,m-s}. \qquad (1.58)$$

Выражая согласно формуле (1.56) $\dfrac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_k}$, $k=\overline{m-s+1,m}$, получим

$$\frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_j} + \sum_{k=m-s+1}^{m}\left(-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\frac{\partial\varphi_i(\vec{x}^0)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right) = 0.$$

Далее, меняя порядок суммирования и используя равенство (1.57), приходим к равенству вида

$$\frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{s}\left(\lambda_i\sum_{k=m-s+1}^{m}\left(-\frac{\partial\varphi_i(\vec{x}^0)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_j}\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial f\left(\vec{x}^0\right)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i\left(\vec{x}^0\right)}{\partial x_j} = 0, \qquad (1.59)$$

где $j = \overline{1, m-s}$.

Объединяя формулы (1.56) и (1.59), получаем

$$\frac{\partial F\left(\vec{x}^0\right)}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1, m},$$

то есть точка $\vec{x}^0$ – критическая точка функции $F\left(x_1, ..., x_m\right)$. ◀

Замечание. Функция F и числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ называются, соответственно, ***функцией Лагранжа*** и ***множителями Лагранжа***.

Теорема 3.8 (достаточное условие локального относительного экстремума). Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ – открытое множество, на котором заданы вещественнозначные непрерывно дифференцируемые функции f и φ_i, $i = \overline{1, s}$, причем $s < m$. Пусть далее $\vec{x}^0$ – критическая точка функции Лагранжа $F = f + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi_i$ для некоторого набора действительных чисел λ_i, $i = \overline{1, s}$, удовлетворяющая уравнениям связи (1.53) и матрица $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{i=1\, j=1}^{s \ \ m}$ имеет ранг s в этой точке. Тогда если квадратичная форма с матрицей $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i=1\, j=1}^{m \ \ m}$ является положительно (отрицательно) определенной *с учетом уравнений связи*, то $\vec{x}^0$ – точка относительного локального минимума (максимума) для f.

▶ Вопрос о наличии в точке $\vec{x}^0$ относительного экстремума зависит от знака разности $f\left(\vec{x}^0 + \vec{a}\right) - f\left(\vec{x}^0\right)$ при достаточно малом векторе $\vec{a}$ с той лишь существенной оговоркой, что и точка $\vec{x}^0 + \vec{a} \in A$ удовлетворяет уравнениям связи (1.53). Так как уравнения связи справедливы и для самого экстремума, то

$$f\left(\vec{x}^0 + \vec{a}\right) - f\left(\vec{x}^0\right) = F\left(\vec{x}^0 + \vec{a}\right) - F\left(\vec{x}^0\right).$$

На основании формулы Тейлора в точке $\vec{x}^0$ для функции Лагранжа $F\left(x_1, ..., x_m\right)$ можно записать

$$F\left(\vec{x}^0+\vec{a}\right)-F\left(\vec{x}^0\right)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 F\left(\vec{x}^0\right)}{\partial x_i \partial x_j}a_i a_j+\sum_{i,j=1}^{m}\alpha_{ij}a_i a_j, \qquad (1.60)$$

где $\alpha_{ij}\to 0$ при $\vec{a}\to\vec{0}$.

Будем для определенности считать, что

$$\frac{\partial\left(\varphi_1,\ldots,\varphi_s\right)}{\partial\left(x_{m-s+1},\ldots,x_m\right)}\left(\vec{x}^0\right)\neq 0.$$

Тогда ограничения $\varphi_i\left(x_1,\ldots,x_m\right)=0$, $i=\overline{1,s}$, $\left(x_1,\ldots,x_m\right)\in A$, согласно теореме 3.3, можно разрешить относительно переменных $x_{m-s+1},\ldots,x_m$ как функций от $x_1,\ldots,x_{m-s}$ в некоторой окрестности точки $\left(x_1^0,\ldots,x_{m-s}^0\right)$.

Перейдем теперь в выражении (1.60) от приращений $a_1,...,a_m$ к дифференциалам $dx_1,...,dx_m$, при этом если продифференцировать уравнения связи, то дифференциалы зависимых переменных $dx_{m-s+1},\ldots,dx_m$ линейно выразятся через дифференциалы независимых переменных $dx_1,\ldots,dx_{m-s}$. Таким образом, мы перейдем к квадратичной форме дифференциалов $dx_1,\ldots,dx_{m-s}$, причем если она будет положительно определенной, то $f\left(\vec{x}^0+\vec{a}\right)-f\left(\vec{x}^0\right)>0$ и $\vec{x}^0$ – точка относительного минимума, а если отрицательно определенной, то $f\left(\vec{x}^0+\vec{a}\right)-f\left(\vec{x}^0\right)<0$ и $\vec{x}_0$ – точка относительного максимума. ◀

Замечание. Одним из способов нахождения условного экстремума функции $f:A\to\mathbb{R}$ при условиях связи (1.53) является метод Лагранжа, суть которого заключается в следующем. Составлют функцию Лагранжа $F\left(\vec{x}\right)=f\left(\vec{x}\right)+\sum\limits_{i=1}^{s}\lambda_i\varphi_i\left(\vec{x}\right)$ и определяют все критические точки $\left(x_1^0,\ldots,x_{m-s}^0,...,x_m^0\right)$ этой функции из системы $m+s$ уравнений

$$\begin{cases}\varphi_i\left(x_1,...,x_m\right)=0,\ i=1,2,...,s;\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_i}\left(x_1,...,x_m\right)=0,\ i=1,2,...,m.\end{cases}$$

относительно $m+s$ незвестных $x_1,x_2,...,x_m,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$. Далее во всех полученных точках исследуют второй дифференциал функции Лагранжа с учетом заданных условий связи: сначала его вычисляют в точке $\left(x_1^0,\ldots,x_{m-s}^0,...,x_m^0\right)$ так, как если бы все аргументы были $x_1,x_2,...,x_m$ независимыми переменными, а затем $dx_{m-s+1},\ldots,dx_m$ в полученном выражении заменяются линейными функциями $dx_1,\ldots,dx_{m-s}$ в точке $\left(x_1^0,\ldots,x_{m-s}^0\right)$ согласно уравнениям связи. Если выражение d^2F в рассматриваемой точке является знакоопределенной квадратичной формой, то эта точка является точкой относительного экстремума функции f. Особо отметим, что без учета условий связи выражение d^2F в точке условного экстремума, в общем случае, может быть знакопеременной квадратичной формой.

Пример 3.4. Исследуем на условный экстремум методом Лагранжа функцию $u = xyz$ при условии связи

$$x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0.$$

▸ Составим функцию Лагранжа

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda_1\left(x^2+y^2+z^2-1\right)+\lambda_2\left(x+y+z\right)$$

и рассмотрим систему уравнения

$$\begin{cases} F'_x = yz+2\lambda_1 x+\lambda_2=0, \\ F'_y = xz+2\lambda_1 y+\lambda_2=0, \\ F'_z = xy+2\lambda_1 z+\lambda_2=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1(x-y)+z(y-x)=0, \\ 2\lambda_1(y-z)+x(z-y)=0, \\ 2\lambda_1(z-x)+y(x-z)=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1=z \vee x=y, \\ 2\lambda_1=x \vee y=z, \\ 2\lambda_1=y \vee z=x, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

Данная система распадается на 3 системы уравнений:

$$\begin{cases} z=x=2\lambda_1, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0. \end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases} x=y=2\lambda_1, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0. \end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases} y=z=2\lambda_1, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

Таким образом, фукнция имеет 6 критических точек:

1) $z = x = -\frac{y}{2} = 2\lambda_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ – точки:

$$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),\ M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right);$$

2) $x = y = -\frac{z}{2} = 2\lambda_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ – точки:

$$M_3\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\ M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right);$$

3) $y = z = -\frac{x}{2} = 2\lambda_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ – точки:

$$M_5\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),\ M_6\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Вычислим в каждой критической точке второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2F = 2\left(zdxdy + ydxdz + xdydz\right) + 2\lambda_1\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \quad (1.61)$$

Для определения знака второго дифференциала продифференцируем уравнения связи:

$$xdx + ydy + zdz = 0,\ dx + dy + dz = 0. \quad (1.62)$$

Подставляя значения x, y, z, λ в уравнения (1.61), (1.62), для точки $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ получим

$$\frac{1}{\sqrt{6}}dx - \frac{2}{\sqrt{6}}dy + \frac{1}{\sqrt{6}}dz = 0,\ dx + dy + dz = 0.$$

Следовательно, $dx = -dz,\ dy = 0$, $d^2F = \frac{8}{\sqrt{6}}dx^2 > 0$. Таким образом, в точке M_1 функция достигает минимального значения $u = -\frac{\sqrt{6}}{18}$.

Поступая аналогично с остальными точками, окончательно получим, что в точках M_1, M_3, M_5 функция имеет минимум $u = -\frac{\sqrt{6}}{18}$, а в точках M_2, M_4, M_6 – максимум $u = \frac{\sqrt{6}}{18}$. ◀

Пример 3.5. Исследуем на условный экстремум функцию $u = xy^2z^3$ при условии связи $x + 2y + 3z = 6$ ($x > 0,\ y > 0,\ z > 0$).

▶ *Способ 1*. Метод исключения

Выразив x из уравнения связи и подставив в функцию $u = xy^2z^3$, получим функцию двух переменных

$$g(y,z) = (6 - 2y - 3z)y^2z^3 = 6y^2z^3 - 2y^3z^3 - 3y^2z^4,$$

локальный экстремум которой совпадает с условным экстремумом исходной функции.

Найдем экстремум функции $g(y,z)$:

$$\begin{cases} g'_y = -2y^2z^3 + 2(6 - 2y - 3z)yz^3 = 0, \\ g'_z = -3y^2z^3 + 3(6 - 2y - 3z)y^2z^2 = 0, \\ \quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y - z + 2 = 0, \\ -2z - y + 3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 1.$$

Для нахождения второго дифференциала функции вычислим в точке $(1,1)$ все производные второго порядка.

$$g''_{y^2}\Big|_{(1,1)} = \left(12z^3 - 12yz^3 - 6z^4\right)\Big|_{(1,1)} = -6,$$

$$g''_{z^2}\Big|_{(1,1)} = \left(36y^2z - 12y^3z - 36y^2z^2\right)\Big|_{(1,1)} = -12,$$

$$g''_{yz}\Big|_{(1,1)} = \left(36yz^2 - 18y^2z^2 - 24yz^3\right)\Big|_{(1,1)} = -6,$$

Тогда

$$d^2g = -6dy^2 - 12dz^2 - 12dydz = -6(dy + dz)^2 - 6dz^2 < 0,$$

следовательно, функция $g(y,z)$ имеет максимум в точке $y = 1, z = 1$, а значит, фукнция $u = xy^2z^3$ имеет максимум в точке $x = 1, y = 1, z = 1$ (значение x находим из уравнения связи).

Способ 2. Метод Лагранжа

Составим функцию Лагранжа:

$$F(x,y,z) = xy^2z^3 + \lambda(x + 2y + 3z - 6)$$

Найдем критические точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} F'_x = y^2z^3 + \lambda = 0, \\ F'_y = 2xyz^3 + 2\lambda = 0, \\ F'_y = 3xy^2z^2 + 3\lambda = 0, \\ x + 2y + 3z = 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -y^2z^3, \\ \lambda = -xyz^3, \\ \lambda = -xy^2z^2, \\ x+2y+3z=6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz^3 - y^2z^3 = 0, \\ xy^2z^2 - xyz^3 = 0, \\ xy^2z^2 - y^2z^3 = 0, \\ x+2y+3z=6. \end{cases}$$

Так как по условию $x>0$, $y>0$, $z>0$, то система имеет еднинственное решение $x=y=z=1$. Следовательно, в точке $(1,1,1)$ возможен условный экстремум функции u при условии связи $x+2y+3z=6$, причем соответствующий множитель Лагранжа равен -1.

Найдем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2F = 2xz^3dy^2 + 6xyzdz^2 + 2\left(2yz^3dxdy + 6xyz^2dydz + 3y^2z^2dxdz\right),$$

$$d^2F\Big|_{(1,1,1)} = 2dy^2 + 6dz^2 + 4dxdy + 12dydz + 6dxdz.$$

Дифференцируя уравнение связи получим $dx+2dy+3dz=0$, следовательно,

$$d^2F\Big|_{(1,1,1)} = 2dy^2 + 6dz^2 + 4\left(-2dy-3dz\right)dy + 12dydz + 6\left(-2dy-3dz\right)dz =$$

$$= 2dy^2 + 6dz^2 - 8dy^2 - 12dzdy + 12dydz - 12dydz - 18dz^2 =$$

$$= -6dy^2 - 12dz^2 - 12dzdy = -6\left(dy+dz\right)^2 - 6dz^2.$$

Так как d^2F является отрицательно определенной квадратичной формой, то точка $(1,1,1)$ есть точка условного максимума функции $u = xy^2z^3$ при условии связи $x+2y+3z=6$.

Способ 3. Вместо исходной функции $u(x,y,z) = xy^2z^3$ будем исследовать функцию $v(x,y,z) = \ln u = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$. В силу монотонности логарифма экстремумы функций будут совпадать.

Для нахождения условного экстремума опять воспользуемся методом Лагранжа.

$$F(x,y,z) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z + \lambda\left(x+2y+3z-6\right),$$

$$\begin{cases} F'_x = 1/x + \lambda = 0, \\ F'_y = 2/y + 2\lambda = 0, \\ F'_y = 3/z + 3\lambda = 0, \\ x+2y+3z=6. \end{cases} \Leftrightarrow \; x=y=z=1.$$

Второй дифференциал $d^2F=-\frac{dx^2}{x^2}-\frac{2dy^2}{y^2}-\frac{3dz^2}{z^2}$ является отрицательно определенной квадратичной формой, поэтому точка $(1,1,1)$ есть точка условного максимума функции $u=xy^2z^3$ при условии связи $x+2y+3z=6$. ◀

Пример 3.6. Исследуем на условный экстремум функцию $u=xy$ при условии связи $x^2+y^2=1$ ($x>0,\ y>0,\ z>0$).

▶ *Способ 1*. Метод Лагранжа

Составим функцию Лагранжа:

$$F(x,y)=xy+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

Найдем критические точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} F'_x=y+2\lambda x=0, \\ F'_y=x+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{y}{x}=\frac{x}{y}, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \lambda=1, \\ y=x, \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda=-1, \\ y=-x, \end{cases} \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Данная система имеет 2 решения при $\lambda=1$ – $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, и 2 решения при $\lambda=-1$ – $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Вычислим в каждой из 4-х критических точек второй дифференциал функции Лагранжа. Дифференцируя уранение связи получим $2dx+2dy=0$, следовательно,

$$d^2F=dxdy+\lambda\left(dx^2+dy^2\right)=\left(2\lambda-1\right)dx^2.$$

Таким образом, точки $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ являются точками минимума фукнции, а точки $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – точками максимума.

Способ 2. Метод исключения

Перейдем в полярные координаты, тогда исходная функция примет вид $u(r,\varphi)=r^2\cos\varphi\sin\varphi=\frac{r^2\sin 2\varphi}{2}$, $0\le\varphi\le 2\pi$, а уравнение связи $r=1$. Таким образом, экстремумы фукнции $u(r,\varphi)$ будут совпадать с экстремумами фукнции $g(\varphi)=\frac{\sin 2\varphi}{2}$. Очевидно, что функция g имеет максимумы в точках $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$ и $\varphi_2=\frac{5\pi}{4}$, а минимумы в точках $\varphi_3=\frac{3\pi}{4}$ и $\varphi_4=\frac{7\pi}{4}$. Переходя обратно в декартовы координаты получим координаты соответствующих точек для исходной функции:

– максимумы $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

– минимумы $M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $M_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ◀

Пример 3.7. Исследуем на условный экстремум методом Лагранжа функцию $u=(x-1)^2+(y-1)^2$ при заданном условии связи:

$$1)\ x-y=0,\qquad 2)\ x^2-2xy+y^2=0.$$

▶ 1) Составим функцию Лагранжа:

$$F(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2+\lambda(x-y)$$

Координаты x,y,λ критической точки функции $L(x,y,\lambda)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases}2(x-1)+\lambda=0,\\2(y-1)-\lambda=0,\\x-y=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x=y=1$, $\lambda=0$. Следовательно, в точке $M_0=(1,1)$ возможен условный экстремум функции u при условии связи $x-y=0$, причем соответствующий множитель Лагранжа равен 0.

Найдем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2F=2dx^2+2dy^2.$$

Так как d^2L является положительно определенной квадратичной формой, то точка $M_0 = (1,1)$ есть точка условного минимума функции u при условии связи $x - y = 0$.

2) Очевидно, что данное условие связи эквивалентно предыдущему, однако метод Лагранжа в этом случае неприменим. Действительно, ранг матрицы

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \big(2(x-y), -2(x-y) \big),$$

где $F(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ на множестве точек $x = y$, удовлетворяющих условию связи, не равен единице, следовательно, метод Лагранжа применять нельзя. Сначала необходимо преобразовать условие $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ к виду $x - y = 0$ и только потом определить относительный экстремум методом Лагранжа. ◀

Лемма 3.8. Если непрерывная в области $\bar{D}$ функция $u(x,y,z)$ принимает в некоторой точке (x_0, y_0, z_0) границы ∂D области D значение u_0, такое что $u_0 \geq u(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in \bar{D}$, то это значение является супремумом данной функции в области D.

▶ Так как функция $u(x,y,z)$ непрерывна в области $\bar{D}$, то $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$

$$\rho\big((x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) \big) < \delta \;\Rightarrow\; \big| u(x_0, y_0, z_0) - u(x_1, y_1, z_1) \big| < \varepsilon,$$

где $(x_1, y_1, z_1) \in \bar{D}$. С учетом выбора точки (x_0, y_0, z_0), последнее неравенство можно переписать в виде

$$0 < u(x_0, y_0, z_0) - u(x_1, y_1, z_1) < \varepsilon.$$

Точка (x_0, y_0, z_0) является граничной точкой области D, следовательно, в любой её $\delta -$окрестности существует точка $(x_1, y_1, z_1) \in D$. Отсюда получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists (x_1, y_1, z_1) \in D \colon u(x_0, y_0, z_0) - \varepsilon < u(x_1, y_1, z_1),$$

то есть $u_0 = \sup\limits_{(x,y,z) \in D} u(x,y,z)$. ◀

Замечание. Аналогичное утверждение можно сформулировать и для инфимума функции $u(x,y,z)$ в области D.

Пример 3.8. Найдем наибольшее и наименьшее значения (если они существуют), а также sup и inf функции $u(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ в области $x^2+y^2+z^2<100$.

▸ Согласно лемме 3.8, чтобы найти супремум и инфимум функции $u(x,y,z)$ в области $x^2+y^2+z^2<100$, следует найти точки возможного экстремума этой функции внутри области и на её границе, и выбрать, соответственно, максимальное и минимальное значение функции в этих точках. Так как рассматриваемая функция непрерывна в рассматриваемой области, то такие значения обязательно существуют. Если точка супремума (или инфимума) лежит внутри области, то значение функции в этой точке является её наибольшим (или наименьшим) значением.

Определим сначала критические точки внутри области. Их координаты должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{cases} u'_x = 2x = 0, \\ u'_y = 4y = 0, \\ u'_z = 6z = 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что внутри области есть только одна возможная экстремальная точка $M_1(0,0,0)$.

Возможную экстремальную точку на границе ищем как точку условного экстремума функции $u(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ при условии $x^2+y^2+z^2=100$ методом Лагранжа (все условия теоремы 3.8 выполнены). Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+2y^2+3z^2+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-100\right).$$

Координаты критической точки функции $L(x,y,z,\lambda)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} L'_x = 2x+2x\lambda = 0, \\ L'_y = 4y+2y\lambda = 0, \\ L'_z = 6z+2z\lambda = 0, \\ L'_\lambda = x^2+y^2+z^2-100 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем точки возможного экстремума на эллипсоиде $x^2+y^2+z^2=100$:

$$M_2(10,0,0),\, M_3(0,10,0),\, M_4(0,0,10)$$

Вычисляя значения функции $u(x,y,z)$ в полученных точках, получаем

$$u(M_1)=0,\ u(M_2)=100,\ u(M_3)=200,\ u(M_4)=300$$

Таким образом,

$$\inf_{x^2+y^2+z^2<100} u(x,y,z)=\min_{x^2+y^2+z^2<100} u(x,y,z)=0, \quad \sup_{x^2+y^2+z^2<100} u(x,y,z)=300,$$

а $\max\limits_{x^2+y^2+z^2<100} u(x,y,z)$ не существует. ◂

Пример 3.9. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $u(x,y)=x^2-xy+y^2$ в области $|x|+|y|\le 1$.

▸ Функция $u(x,y)=x^2-xy+y^2$ непрерывна на рассматриваемом замкнутом ограниченном множестве, следовательно, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Чтобы найти эти значения, можно применить метод Лагранжа, однако в данном примере функция $F(x,y)=|x|+|y|-1$ не является дифференцируемой, поэтому границу области придется разбить на четыре участка

$$\left[\begin{array}{ll} x+y-1=0, & x>0, y>0, \\ x-y-1=0, & x>0, y<0, \\ y-x-1=0, & x<0, y>0, \\ x+y+1=0, & x<0, y<0, \end{array}\right.$$

каждый из которых задается дифференцируемой функцией, и на каждом из этих участков определять точки возможного экстремума. Более того, придется включить в точки возможного экстремума точки, являющиеся граничными для данных участков. Очевидно, что это решение будет очень громоздким.

Решим поставленную задачу другим способом, а именно, оценим значения функции $u(x,y)$ в рассматриваемой области.

$$\begin{cases} u(x,y)=x^2-xy+y^2=\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2\ge 0, \\ u(0,0)=0. \end{cases}$$

Учитывая, что точка $(0,0)$ принадлежит рассматриваемой области, получаем

$$\min_{|x|+|y|\le 1} u(x,y)=0.$$

Аналогично,

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - xy + y^2 = (|x| + |y|)^2 - xy - 2|xy| \le 1 - |xy| \le 1, \\ u(1,0) = 1. \end{cases}$$

Учитывая, что точка $(1,0)$ принадлежит рассматриваемой области, получаем $\max\limits_{|x|+|y|\le 1} u(x,y) = 1$. ◀

Пример 3.10. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $u = 3z - y - 2x$ в замкнутой области

$$D = \{(x,y,z) \,|\, x + y \ge 2,\ 3x + y \le 6,\ 0 \le z \le 3,\ x \ge 0\}.$$

▶ Так как непрерывная функция u рассматривается на замкнутом ограниченном множестве, то в силу теоремы Вейерштрасса существуют точки $A_1 \in D$ и $A_2 \in D$ такие, что

$$u(A_1) = \max_{M \in D} u(M) \qquad u(A_2) = \min_{M \in D} u(M)$$

Если эти точки лежат внутри замкнутой области D, то их координаты должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} u'_x = -2 = 0, \\ u'_y = -1 = 0, \\ u'_z = 3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что внутри D нет ни одной возможной экстремальной точки. Следовательно, максимальное и минимальное значения функции u достигается на границе $\partial D = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5$, где

$$T_1 = \{(x,y,z) \,|\, 3x + y = 6,\ 0 \le y \le 6, 0 \le z \le 3\},$$

$$T_2 = \{(x,y,z) \,|\, x + y = 2,\ 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\},$$

$$T_3 = \{(x,y,z) \,|\, x = 0,\ 2 \le y \le 6, 0 \le z \le 3\},$$

$$T_4 = \{(x,y,z) \,|\, z = 0,\ 3x + y \le 6, x + y \ge 2,\ x \ge 0\},$$

$$T_5 = \{(x,y,z) \,|\, z = 3,\ 3x + y \le 6, x + y \ge 2,\ x \ge 0\}.$$

Каждый участок T_i границы ∂D является замкнутым ограниченным множеством и, значит, на этом участке непрерывная функция u достигает своего минимального и максимального значений.

Найдем максимальное и минимальное значения функции u на каждом участке T_i, а затем выберем из них наибольшее и наименьшее. Полученные таким образом значения и будут наибольшим и наименьшим значениями функции u в замкнутой области D.

Возможные экстремальные точки функции u внутри участка T_1 ищем как точки условного экстремума функции u при условии связи $3x + y = 6$. Выражая из условия связи $x = \left(6 - y\right)/3$ и подставляя в функцию u, получаем $u_1(y,z) = 3z - y/3 - 4$. Тогда точки условного экстремума функции u при условии связи $3x + y = 6$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} u'_y = -1/3 = 0 \\ u'_z = 3 = 0 \end{cases}$$

Отсюда видно, что функция u не имеет условного экстремума при условии связи $3x + y = 6$. Это значит, что функция u достигает наибольшего и наименьшего значений на границе $\partial T_1 = L_1^1 \cup L_2^1 \cup L_3^1 \cup L_4^1$, где

$$L_1^1 = \left\{(x,y,z)\middle| 3x + y = 6, 0 \le y \le 6, z = 0\right\},$$

$$L_2^1 = \left\{(x,y,z)\middle| 3x + y = 6, y = 6,\ 0 \le z \le 3\right\},$$

$$L_3^1 = \left\{(x,y,z)\middle| 3x + y = 6, y = 0,\ 0 \le z \le 3\right\},$$

$$L_4^1 = \left\{(x,y,z)\middle| 3x + y = 6, 0 \le y \le 6, z = 3\right\}.$$

Поскольку каждый из участков L_i^1 границы ∂T_1 является замкнутым ограниченным множеством, то непрерывная на нем функция $u_1(u,z)$ достигает своего минимального и максимального значения. Найдем максимальное и минимальное значения функции $u_1(u,z)$ на каждом участке L_i^1, а затем выберем из этих значений наибольшее и наименьшее.

Возможные экстремальные точки функции $u_1(u,z)$ внутри участка L_1^1 ищем как точки условного экстремума при условии связи $z = 0$. Подставляя это условие в функцию $u_1(u,z)$, получим $u_1^1(y) = -y/3 - 4$. Тогда точки условного экстремума функции $u_1(u,z)$ при условии связи $z = 0$ должны удовлетворять уравнению

$$\left(u_1^1\right)' = -1/3 = 0.$$

Отсюда видно, что функция $u_1(u,z)$ не имеет условного экстремума при условии связи $z=0$. Это значит, что эта функция достигает своего максимального и минимального значений на границе участка L_1^1, т.е.

$$\min_{(y,z)\in L_1^1} u_1(y,z) = u_1^1(6) = u_1(6,0) = -6,$$

$$\max_{(y,z)\in L_1^1} u_1(y,z) = u_1^1(0) = u_1(0,0) = -4.$$

Действуя аналогично на остальных участках L_i^1 границы ∂T_1, получим

$$\min_{(y,z)\in L_2^1} u_1(y,z) = u_1(6,0) = -6,$$

$$\max_{(y,z)\in L_2^1} u_1(y,z) = u_1(6,3) = 3,$$

$$\min_{(y,z)\in L_3^1} u_1(y,z) = u_1(0,0) = -4,$$

$$\max_{(y,z)\in L_3^1} u_1(y,z) = u_1(0,3) = 5,$$

$$\min_{(y,z)\in L_4^1} u_1(y,z) = u_1(6,3) = 3,$$

$$\max_{(y,z)\in L_4^1} u_1(y,z) = u_1(0,3) = 5.$$

Таким образом,

$$\min_{(x,y,z)\in T_1} u(x,y,z) = u_1(6,0) = u(0,6,0) = -6,$$

$$\max_{(x,y,z)\in T_1} u(x,y,z) = u_1(0,3) = u(2,0,3) = 5.$$

Поступая аналогично на остальных участках T_i границы ∂D, получим

$$\min_{(x,y,z)\in T_2} u(x,y,z) = u(2,0,0) = -4, \quad \max_{(x,y,z)\in T_2} u(x,y,z) = u(0,2,3) = 7,$$

$$\min_{(x,y,z)\in T_3} u(x,y,z) = u(0,6,0) = -6, \quad \max_{(x,y,z)\in T_3} u(x,y,z) = u(0,2,3) = 7,$$

$$\min_{(x,y,z)\in T_4} u(x,y,z) = u(0,6,0) = -6, \quad \max_{(x,y,z)\in T_4} u(x,y,z) = u(0,2,0) = -2,$$

$$\min_{(x,y,z)\in T_5} u(x,y,z) = u(0,6,3) = 3, \quad \max_{(x,y,z)\in T_5} u(x,y,z) = u(0,2,3) = 7.$$

Отсюда

$$\min_{(x,y,z)\in D} u(x,y,z) = u(0,6,0) = -6, \quad \max_{(x,y,z)\in D} u(x,y,z) = u(0,2,3) = 7. \blacktriangleleft$$

3.6. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЯХ

Данный параграф посвящен формальному описанию процесса замены переменных, поэтому здесь мы не будем отвлекаться на проверку всех условий, при которых производимые преобразования законны.

Как правило, замена переменных обычно мотивируется либо особым интересом, который представляют в рассматриваемом вопросе новые переменные, либо тем упрощением, которое эта замена вносит в исходное выражение.

3.6.1. Функции одной переменной

Пусть дано некоторое выражение

$$A = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right), \tag{1.63}$$

содержащее независимую переменную x, функцию $y(x)$ и ее производные до некоторого порядка. Требуется перейти к новым переменным – независимой переменной t и функции от нее $u(t)$.

В общем случае, переменные x, y связаны с переменными t, u уравнениями

$$\begin{cases} \Phi(x, y, t, u) = 0, \\ \Psi(x, y, t, u) = 0, \end{cases} \tag{1.64}$$

которые называются ***формулами замены переменных***. Будем считать, что система (1.64) определяет (в некоторой области) дифференцируемые достаточное число раз неявные функции $x = f(t,u)$, $y = g(t,u)$. Так как u есть функция аргумента t, то $x = f\big(t, u(t)\big) = x(t)$ и $y = g\big(t, u(t)\big) = y(t)$ – сложные функции аргумента t.

Для обозначения производных функции $y(x)$ будем использовать символы $y', y'', \dots$, а для производных остальных функций будем явно указывать переменную дифференцирования. При этом через x'_t, y'_t будем обозначать «полные» производные от x и y по t, т.е. с учетом зависимости $u(t)$.

Чтобы перейти в выражении (1.63) к переменным t, u необходимо выразить через эти переменные производные $y', y'', \ldots$. Согласно теореме о производной сложной функции,

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{1.65}$$

Производные x'_t, y'_t найдем как решение системы уравнений, полученных дифференцированием формул (1.64) по переменной t:

$$\begin{cases} \Phi'_x x'_t + \Phi'_y y'_t + \Phi'_t + \Phi'_u u'_t = 0, \\ \Psi'_x x'_t + \Psi'_y y'_t + \Psi'_t + \Psi'_u u'_t = 0. \end{cases} \tag{1.66}$$

Чтобы найти выражения для производных функции $y(x)$ более высоких порядков, можно использовать формулу

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{x'_t}\frac{d}{dt}. \tag{1.67}$$

Тогда, например, для второй производной получим

$$y'' = \frac{1}{x'_t}\frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Замечание 1. Необходимые производные второго и выше порядков функций $x(t)$ и $y(t)$ удобно получать дифференцированием производных предыдущего порядка.

Замечание 2. Если уравнения (1.64) явно разрешены относительно старых переменных x и y, то, очевидно,

$$x'_t = f'_t + f'_u \cdot u'_t, \quad y'_t = g'_t + g'_u \cdot u'_t,$$

где $x = f(t,u)$, $y = g(t,u)$.

Пример 3.11. Введя новую независимую переменную t, преобразуем уравнение $x^2 y'' + xy' + y = 0$, если $x = e^t$.

▶ Согласно формуле (1.65) для производной параметрически заданной функции, $y' = y'_t e^{-t}$. Чтобы получить выражение для y'', применим соотношение (1.67) к полученному выше равенству:

$$y'' = \frac{\left(y'_t e^{-t}\right)'_t}{x'_t} = \left(y''_{tt} - y'_t\right)e^{-2t}.$$

Подставляя данные формулы в исходное уравнение, получим

$$e^{2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right)e^{-2t} + e^t y'_t e^{-t} + y = 0 \text{ или } y''_{tt} + y = 0. ◀$$

Пример 3.12. Введя новые переменные t и u, где $u = u(t)$, преобразуем уравнение $x^3 y'' + xyy' - y^2 = 0$, если $x = e^t$, $y = ue^t$.

▶ Согласно формуле (1.65) для производной параметрически заданной функции,

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(u'_t + u)e^t}{e^t} = u'_t + u.$$

Чтобы получить выражение для y'', применим соотношение (1.67) к полученному выше равенству:

$$y'' = \frac{(u'_t + u)'_t}{x'_t} = (u''_{tt} + u'_t)e^{-t}.$$

Подставляя данные формулы в исходное уравнение, получим

$$e^{3t}(u''_{tt} + u'_t)e^{-t} + ue^{2t}(u'_t + u) - u^2 e^{2t} = 0 \text{ или } u''_{tt} + (1+u)u'_t = 0. \blacktriangleleft$$

Пример 3.13. Введя новые переменные t и u, где $u = u(t)$, преобразуем уравнение $xyy'' - x(y')^2 + yy' = 0$, если $t = y$, $u = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

▶ Система (1.66), полученная путем дифференцирования уравнений связи по переменной t, имеет вид

$$\begin{cases} 1 = y'_t, \\ u'_t = \dfrac{y'_t}{y} - \dfrac{x'_t}{x}, \end{cases}$$

Решая её, находим

$$x'_t = \frac{x}{y} - xu'_t, \qquad y'_t = 1.$$

Согласно формуле (1.65),

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y}{x(1 - yu'_t)}.$$

Чтобы получить выражение для y'', применим соотношение

$$y'' = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3},$$

выведенное ранее. В данном примере

$$y''_{tt} = 0$$

$$x''_{tt} = \left(\frac{x}{y} - xu'_t\right)'_t = \frac{x - xyu'_t - x}{y^2} - \left(xu''_{tt} + \left(\frac{x}{y} - xu'_t\right)u'_t\right) =$$

$$= -u''_{tt}x - \frac{2x}{y}u'_t + x\left(u'_t\right)^2 .$$

Таким образом,

$$y'' = \frac{\left(u''_{tt}x + \frac{2x}{y}u'_t - x\left(u'_t\right)^2\right)y^3}{x^3\left(1 - yu'_t\right)^3} .$$

Подставляя выражения для y', y'' в исходное уравнение и производя необходимые преобразования, получим

$$\frac{u''_{tt}xy^4 + xy^3u'_t}{x^2\left(1 - yu'_t\right)^3} = 0 \quad \text{или} \quad tu''_{tt} + u'_t = 0 . \blacktriangleleft$$

З а м е ч а н и е. Иногда формулы замены переменных можно преобразовать к более удобному виду. Так, если в последнем примере исходные уравнения разрешить относительно старых переменных $x = te^{-u}$, $x = te^{-u}$, то выкладки, необходимые для решения поставленной задачи, несколько сократятся.

3.6.2. Функции многих переменных (замена независимых переменных)

Для упрощения записи будем полагать, что независимых переменных всего две: старые x и y и новые u и v. Пусть дано некоторое выражение

$$A = F\left(x, y, z, z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}, \ldots\right), \tag{1.68}$$

содержащее переменные x, y, функцию z и ее частные производные, а также задана система

$$\begin{cases} \Phi\left(x, y, u, v\right) = 0, \\ \Psi\left(x, y, u, v\right) = 0, \end{cases} \tag{1.69}$$

определяющая (в некоторой области) дифференцируемые достаточное число раз неявные функции $x = f\left(u, v\right)$, $y = g\left(u, v\right)$. Требуется преобразовать дифференциальное выражение (1.68) так, чтобы в него входили переменные u, v, функция z и ее частные производные соответствующих порядков по переменным u, v. При этом предполагается, что преобразования делаются в таких областях изменения переменных, что существуют обратные функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, также являющиеся дифференцируемыми достаточное число раз.

При решении задач данного вида удобно использовать формулу для производной сложной функции (1.11), записанную для функции $z(x, y) = z(u(x, y), v(x, y))$:

$$\begin{aligned} z'_x &= z'_u u'_x + z'_v v'_x, \\ z'_y &= z'_u u'_y + z'_v v'_y. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Производные более высоких порядков функции $z(x, y)$ можно получить дифференцированием производных предыдущих порядков.

Так как в большинстве задач формулы замены (1.69) разрешены относительно либо новых, либо старых переменных, рассмотрим отдельно эти два случая. При этом при любом задании связи между переменными будем пользоваться производными u'_x, u'_y, v'_x, v'_y.

Уравнения связи разрешены относительно новых переменных.

Если система (1.69) имеет вид

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \tag{1.71}$$

то необходимые частные производные функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ получают непосредственным дифференцированием уравнений (1.71).

Уравнения связи разрешены относительно старых переменных.

Если система (1.69) имеет вид

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \end{cases} \tag{1.72}$$

то первые частные производные функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ можно легко найти из решения системы

$$\begin{cases} dx = f'_u du + f'_v dv, \\ dy = g'_u du + g'_v dv, \end{cases} \tag{1.73}$$

относительно неизвестных du, dv, а именно

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{pmatrix}^{-1}. \tag{1.74}$$

Пример 3.14. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуем уравнение $x^2 z''_{xx} - 2xz''_{xy} + z''_{yy} = 0$, если $u = xe^y$, $v = y$.

▸ Формулы замены переменных разрешены относительно новых переменных, поэтому сразу выпишем выражения для частных производных (1.70):

$$z'_x = z'_u e^y, \ z'_y = z'_u xe^y + z'_v.$$

Чтобы получить формулы для вторых частных производных функции $z(x,y)$, продифференцируем эти выражения:

$$z''_{xx} = z''_{uu} e^{2y},$$

$$z''_{xy} = z'_u e^y + \left(z''_{uu} xe^y + z''_{uv}\right) e^y,$$

$$z''_{yy} = \left(z''_{uu} xe^y + z''_{uv}\right) xe^y + xe^y z'_u + z''_{uv} xe^y + z''_{vv}.$$

Используя полученные соотношения, преобразуем исходное уравнение к следующему виду:

$$x^2 e^{2y} z''_{uu} - 2xe^y z'_u - 2x^2 e^{2y} z''_{uu} - 2xe^y z''_{uv} +$$
$$+ x^2 e^{2y} z''_{uu} + xe^y z''_{uv} + xe^y z'_u + z''_{vv} + xe^y z''_{uv} = 0$$

или

$$z''_{vv} = uz'_u. \blacktriangleleft$$

Пример 3.15 (Переход к полярным координатам). Приняв r и φ за новые независимые переменные, преобразуем выражения

$$W_1 = \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2, \ W_2 = z''_{xx} + z''_{yy},$$

если $x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi$.

▸ Формулы замены переменных разрешены относительно старых переменных, поэтому определим частные производные функций $r(x,y), \varphi(x,y)$ из системы (1.73), то есть продифференцируем уравнения связи и выразим из полученной системы dr и $d\varphi$:

$$\begin{pmatrix} r'_x & r'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\dfrac{\sin\varphi}{r} & \dfrac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученные выражения в формулы (1.70), получим

$$z'_x = z'_r \cos\varphi - z'_\varphi \frac{\sin\varphi}{r}, \ z'_y = z'_r \sin\varphi + z'_\varphi \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Дифференцируя данные равенства, находим выражения для вторых частных производных функции $z(x,y)$:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (z'_x)'_r \cos\varphi - (z'_x)'_\varphi \frac{\sin\varphi}{r} =$$

$$= z''_{rr}\cos^2\varphi - z''_{r\varphi}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r} + z'_\varphi \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + z''_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + z'_r \frac{\sin^2\varphi}{r},$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (z'_y)'_r \sin\varphi + (z'_y)'_\varphi \frac{\cos\varphi}{r} =$$

$$= z''_{rr}\sin^2\varphi + z''_{r\varphi}\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r} + z''_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r^2} - z'_\varphi \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + z'_r \frac{\cos^2\varphi}{r}.$$

Подставив полученные формулы в исходные выражения, получим

$$W_1 = (z'_r)^2 + \frac{1}{r^2}(z'_\varphi)^2, \qquad W_2 = z''_{rr} + \frac{1}{r^2}z''_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}z'_r. \blacktriangleleft$$

Пример 3.16* (Переход к сферическим координатам). Приняв r, φ, ψ за новые независимые переменные, преобразуем выражения

$$W_1 = (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2,\ W_2 = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz},$$

если $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\psi$.

$\blacktriangleright$ Выполним преобразование в два этапа. Сначала положим $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, оставляя z неизменным, а затем положим $z = r\cos\psi$, $\rho = r\sin\psi$. В этом случае мы сможем воспользоваться результатами предыдущего примера.

Итак,

$$W_1 = \underline{(u'_x)^2 + (u'_y)^2} + (u'_z)^2 = \left((u'_\rho)^2 + (u'_z)^2\right) + \frac{1}{\rho^2}(u'_\varphi)^2,$$

$$W_2 = \underline{u''_{xx} + u''_{yy}} + u''_{zz} = \left(u''_{\rho\rho} + u''_{zz}\right) + \frac{1}{\rho^2}u''_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho}u'_\rho.$$

Далее,

$$(u'_\rho)^2 + (u'_z)^2 = (u'_r)^2 + \frac{1}{r^2}(u'_\psi)^2,$$

$$u''_{\rho\rho} + u''_{zz} = u''_{rr} + \frac{1}{r^2}u''_{\psi\psi} + \frac{1}{r}u'_r.$$

Учитывая, что $u'_\rho = u'_r \sin\psi + u'_\psi \dfrac{\cos\psi}{r}$, окончательно получаем

$$W_1 = \left(u'_r\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(u'_\psi\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(u'_\varphi\right)^2 = \left(u'_r\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(u'_\psi\right)^2 + \frac{1}{\left(r\sin\psi\right)^2}\left(u'_\varphi\right)^2,$$

$$W_2 = u''_{rr} + \frac{1}{r^2}u''_{\psi\psi} + \frac{1}{r}u'_r + \frac{1}{\rho^2}u''_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho}u'_\rho =$$

$$= u''_{rr} + \frac{1}{r^2}u''_{\psi\psi} + \frac{1}{r}u'_r + \frac{1}{\rho^2}u''_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(u'_r \sin\psi + u'_\psi \frac{\cos\psi}{r}\right) =$$

$$= u''_{rr} + \frac{1}{r^2}u''_{\psi\psi} + \frac{1}{\left(r\sin\psi\right)^2}u''_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r}u'_r + \frac{\operatorname{ctg}\psi}{r^2}u'_\psi. \blacktriangleleft$$

3.6.3. Функции многих переменных (общий случай)

Ради простоты изложения по-прежнему ограничимся рассмотрением функций двух переменных. Пусть в выражении (1.68) необходимо перейти к новым переменным u, v, w, где u, v – независимые переменные, а w – функция аргументов u, v, причем переменные x, y, z и u, v, w связаны уравнениями

$$\begin{cases} \Phi\left(x, y, z, u, v, w\right) = 0, \\ \Psi\left(x, y, z, u, v, w\right) = 0, \\ \Upsilon\left(x, y, z, u, v, w\right) = 0. \end{cases} \qquad (1.75)$$

Как и ранее, предположим, что преобразования делаются в такой области, в которой данная система определяет помимо заданной изначально функции $z = z\left(x, y\right)$ три неявные функции $u = u\left(x, y\right)$, $v = v\left(x, y\right)$, $w = w\left(x, y\right)$.

Для нахождения частных производных z'_x, z'_y, как и в предыдущем пункте, воспользуемся формулами производной сложной функции $w = w\big(u\left(x, y\right), v\left(x, y\right)\big)$:

$$\begin{aligned} w'_x &= w'_u u'_x + w'_v v'_x, \\ w'_y &= w'_u u'_y + w'_v v'_y. \end{aligned} \qquad (1.76)$$

Подставляя в равенства (1.76) выражения для $u'_x, u'_y, v'_x, v'_y, w'_x, w'_y$, найденные из решения системы, полученной дифференцированием системы (1.75), относительно неизвестных du, dv, dw, получим уравнения, связывающие w'_u, w'_v и z'_x, z'_y. Из этих уравнений находим выражения частных производных функции $z(x, y)$ через частные производные функции $w(u, v)$.

Чтобы выразить вторые производные функции $z(x, y)$ через u, v, w и частные производные функции $w(u, v)$, как правило, дифференцируют найденные ранее выражения z'_x и z'_y.

Так как в большинстве задач формулы замены (1.75) разрешены относительно либо новых, либо старых переменных, рассмотрим более подробно эти два случая.

Уравнения связи разрешены относительно новых переменных.

Если система (1.75) имеет вид

$$\begin{cases} u = f(x, y, z), \\ v = g(x, y, z), \\ w = h(x, y, z), \end{cases} \tag{1.77}$$

то общая схема решения преобразуется к следующему виду.

Из первого и второго уравнений системы (1.77) сразу получаются выражения для u'_x, u'_y, v'_x, v'_y:

$$u'_x = f'_x + f'_z z'_x, \qquad u'_y = f'_y + f'_z z'_y,$$

$$v'_x = g'_x + g'_z z'_x, \qquad v'_y = g'_y + g'_z z'_y.$$

Эти выражения можно подставить в равенства (1.76) и приравнять результат к соответствующим производным w'_x, w'_y:

$$w'_x = h'_x + h'_z z'_x, \qquad w'_y = h'_y + h'_z z'_y,$$

полученным дифференцированием последнего уравнения системы (1.77). Первое из полученных уравнений позволяет выразить z'_x, а второе – z'_y.

Уравнения связи разрешены относительно старых переменных.

Если система (1.75) имеет вид

$$\begin{cases} x = f(u, v, w), \\ y = g(u, v, w), \\ z = h(u, v, w), \end{cases} \tag{1.78}$$

то частные производные функций $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$, которые следует подставить в уравнения (1.76), получают из решения системы

$$\begin{cases} dx = f'_u du + f'_v dv + f'_w dw, \\ dy = g'_u du + g'_v dv + g'_w dw, \\ z'_x dx + z'_y dy = h'_u du + h'_v dv + h'_w dw, \end{cases} \tag{1.79}$$

относительно неизвестных du, dv, dw, а именно

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \\ w'_x & w'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z'_x & z'_y \end{pmatrix}. \tag{1.80}$$

* Заметим, что данный способ может оказаться достаточно громоздким. Иногда, более удобно производить замену переменных такого типа, сразу получая систему для нахождения z'_x и z'_y. Для этого достаточно приравнять частные производные функции $z(x,y)$ как сложной функции $z\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ и соответствующие производные функции $h(u,v,w)$с учетом зависимости $w(u,v)$, то есть сформировать систему

$$\begin{cases} z'_x x'_u + z'_y y'_u = h'_u + h'_w w'_u, \\ z'_x x'_v + z'_y y'_v = h'_v + h'_w w'_v, \end{cases} \tag{1.81}$$

где частные производные функций $x(u,v)$ и $y(u,v)$ определяются из системы (1.78) следующим образом:

$$\begin{aligned} x'_u &= f'_u + f'_w w'_u, \qquad & x'_v &= f'_v + f'_w w'_v, \\ y'_u &= g'_u + g'_w w'_u, \qquad & y'_v &= g'_v + g'_w w'_v. \end{aligned} \tag{1.82}$$

Пример 3.17. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуем к новым переменным уравнение $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$, если $u = x + y$, $v = \dfrac{y}{x}$, $w = \dfrac{z}{x}$.

▸ Уравнения связи разрешены относительно новых переменных, поэтому сразу найдем частные производные

$$u'_x = 1, \quad u'_y = 1, \quad v'_x = -\frac{y}{x^2}, \quad v'_y = \frac{1}{x}, \quad w'_x = \frac{z'_x x - z}{x^2}, \quad w'_y = \frac{z'_y}{x}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (1.76), получим

$$\frac{z_x' x - z}{x^2} = w_u' - \frac{y w_v'}{x^2}, \qquad \frac{z_y'}{x} = w_u' + \frac{w_v'}{x}.$$

Таким образом,

$$z_x' = x w_u' - \frac{y}{x} w_v' + \frac{z}{x}, \quad z_y' = x w_u' + w_v'.$$

Теперь найдем вторые производные $z_{xx}'', z_{xy}'', z_{yy}''$ дифференцированием первых производных:

$$z_{xx}'' = \left(w_u' + x\left(w_{uu}'' - \frac{y}{x^2} w_{uv}'' \right)\right) + \left(\frac{y}{x^2} w_v' - \frac{y}{x}\left(w_{uv}'' - \frac{y}{x^2} w_{v^2}'' \right)\right) + \left(-\frac{z}{x^2} + \frac{z_x'}{x} \right) =$$

$$= x w_{uu}'' - \frac{2y}{x} w_{uv}'' + \frac{y^2}{x^3} w_{vv}'' + 2 w_u',$$

$$z_{yy}'' = x\left(w_{uu}'' + \frac{w_{uv}''}{x} \right) + \left(w_{uv}'' + \frac{w_{vv}''}{x} \right) = x w_{uu}'' + 2 w_{uv}'' + \frac{w_{vv}''}{x},$$

$$z_{xy}'' = x\left(w_{uu}'' + \frac{w_{uv}''}{x} \right) - \left(\frac{w_v'}{x} - \frac{y}{x}\left(w_{uv}'' + \frac{w_{vv}''}{x} \right)\right) + \frac{z_y'}{x} =$$

$$= x w_{uu}'' + \left(1 - \frac{y}{x} \right) w_{uv}'' - \frac{y}{x^2} w_{vv}'' + w_u'.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем

$$w_{v^2}'' \left(\frac{y^2}{x^3} + \frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2} \right) = 0 \text{ или } w_{v^2}'' \frac{(1+v)^3}{u} = 0.$$

Решим этот же пример другим способом*.

Продифференцируем формулы преобразования:

$$du = dx + dy,$$

$$dv = -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy, \qquad dw = -\frac{z}{x^2} dx + \frac{1}{x} dz.$$

Теперь запишем полный дифференциал функции $w(u,v)$ и подставим в него полученные выше выражения:

$$dw = w_u' du + w_v' dv.$$

$$-\frac{z}{x^2} dx + \frac{1}{x} dz = w_u' (dx + dy) + w_v' \left(-\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \right).$$

Из последнего равенства находим

$$dz = \frac{z}{x}dx + xw'_u\left(dx + dy\right) + w'_v\left(-\frac{y}{x}dx + dy\right). \qquad (1.83)$$

Определим теперь вторые дифференциалы от новых переменных:

$$d^2u = 0,$$

$$d^2v = \frac{2y}{x^3}dx^2 - \frac{2}{x^2}dxdy,$$

$$d^2w = -\frac{2}{x^2}dxdz + \frac{2z}{x^3}dx^2 + \frac{1}{x}d^2z. \qquad (1.84)$$

Записывая второй дифференциал функции $w(u,v)$ и подставляя в него выражения для $du,\ dv,\ d^2u,\ d^2v$, получаем

$$d^2w = w''_{uu}du^2 + 2w''_{uv}dudv + w''_{vv}dv^2 + w'_u d^2u + w'_v d^2v =$$

$$= w''_{uu}\left(dx + dy\right)^2 + 2w''_{uv}\left(dx + dy\right)\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right) +$$

$$+ w''_{vv}\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right)^2 + w'_v\left(\frac{2y}{x^3}dx^2 - \frac{2dxdy}{x^2}\right). \qquad (1.85)$$

Приравнивая выражения (1.84) и (1.85), с учетом (1.83) находим

$$d^2z = 2\frac{dx}{x}\left[\frac{z}{x}dx + xw'_u\left(dx + dy\right) + w'_v\left(-\frac{y}{x}dx + \frac{1}{x}dy\right)\right] - \frac{2z}{x^2}dx^2 +$$

$$+ x\left[w''_{uu}\left(dx + dy\right)^2 + 2w''_{uv}\left(dx + dy\right)\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right) +\right.$$

$$\left. + w''_{vv}\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right)^2 + w'_v\left(\frac{2y}{x^3}dx^2 - \frac{2}{x^2}dxdy\right)\right].$$

Отсюда можно определить производные $z''_{xx},\ z''_{xy},\ z''_{yy}$ как коэффициенты при $dx^2,\ 2dxdy,\ dy^2$, но требуемый результат можно получить проще, заметив, что d^2z есть правая часть исходного уравнения при $dx = 1,\ dy = -1$. Таким образом, уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\left(x + y\right)^2}{x^3} \cdot w''_{v^2} = 0 \text{ или } \frac{\left(1 + v\right)^3}{u} \cdot w''_{v^2} = 0. ◄$$

Пример 3.18. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуем к новым переменным уравнение

$$x^2 z'_x + y^2 z'_y = z^2,$$

если

$$x = u,\ y = \frac{u}{1+uv},\ z = \frac{u}{1+uw}.$$

▶ Уравнения связи разрешены относительно старых переменных, поэтому для нахождения частных производных функций $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$ решим систему (1.79), где

$$\begin{pmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{(1+uv)^2} & \dfrac{-u^2}{(1+uv)^2} & 0 \\ \dfrac{1}{(1+uw)^2} & 0 & \dfrac{-u^2}{(1+uw)^2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$u'_x = 1,\quad u'_y = 0,\qquad v'_x = \frac{1}{u^2},\ v'_y = -\left(\frac{1+uv}{u}\right)^2,$$

$$w'_x = \frac{1}{u^2} - \left(\frac{1+uw}{u}\right)^2 z'_x,\qquad w'_y = -\left(\frac{1+uw}{u}\right)^2 z'_y.$$

Подставляя полученные частные производные в равенства (1.76), находим выражения для z'_x и z'_y:

$$z'_x = \frac{1 - w'_v - w'_u u^2}{(1+uw)^2},\qquad z'_y = \frac{(1+uv)^2 w'_v}{(1+uw)^2}.$$

Исходное уравнение с учетом последних формул примет вид

$$\frac{u^2\left(1 - w'_v - w'_u u^2\right)}{(1+uw)^2} + \frac{u^2 (1+uv)^2 w'_v}{(1+uv)^2 (1+uw)^2} = \left(\frac{u}{1+uw}\right)^2$$

или

$$\frac{u^4 w'_u}{(1+uw)^2} = 0.$$

Рассмотрим альтернативный способ решения*.

Запишем систему (1.81)

$$\begin{cases} z'_x + z'_y \dfrac{1}{(1+uv)^2} = \dfrac{1-u^2 w'_u}{(1+uw)^2}, \\ z'_y \dfrac{-u^2}{(1-uv)^2} = -\dfrac{u^2 w'_v}{(1+uw)}, \end{cases}$$

решая которую, находим выражения для z'_x и z'_y такие же, как и при решении предыдущим способом. ◀

Замечание. Иногда формулы замены переменных можно преобразовать к более удобному виду. Так в последнем примере исходные уравнения связи можно разрешить относительно новых переменных

$$u = x, \quad v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \quad w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}.$$

В этом случае сразу получим

$$u'_x = 1, \quad u'_y = 0, \qquad v'_x = \frac{1}{x^2}, \; v'_y = -\frac{1}{y^2},$$

$$w'_x = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{z^2} z'_x, \qquad w'_y = -\frac{1}{z^2} z'_y.$$