Q.5 If $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 2 & 9 \\ 3 & 9 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Implement Strassen's matrix multiplication on A and B.

Ans. : The given matrix is of order 4×4. Hence we will subdivide it in 2×2 submatrices. Hence we will compute $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ and S_7.

Let,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Now,

$$S_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18+28 & 30+42 \\ 30+40 & 50+60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 72 \\ 70 & 110 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = (A_{21} + A_{22})\, B_{11}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 15 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24+24 & 16+60 \\ 45+22 & 30+55 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 67 & 85 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20+0 & 20+24 \\ 16+0 & 16+24 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 20 & 44 \\ 16 & 40 \end{bmatrix}$$

$$S_4 = A_{22} \times (B_{21} - B_{11})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+20 & 7+4 \\ 0+35 & 42+7 \end{bmatrix}$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} 20 & 11 \\ 35 & 49 \end{bmatrix}$$

$$S_5 = (A_{11} + A_{12}) \times B_{22}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+10 & 15+5 \\ 0+18 & 18+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 18 & 27 \end{bmatrix}$$

$$S_6 = (A_{21} - A_{11}) \times (B_{11} + B_{12})$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14+20 & 18+70 \\ 35+4 & 45+14 \end{bmatrix}$$

$$S_6 = \begin{bmatrix} 34 & 88 \\ 39 & 49 \end{bmatrix}$$

$$S_7 = (A_{12} - A_{22}) \times (B_{21} + B_{22})$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$S_7 = \begin{bmatrix} -21 & -26 \\ -21 & -55 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = S_1 + S_4 - S_5 + S_7$$

$$= \begin{bmatrix} 46 & 72 \\ 70 & 110 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 11 \\ 35 & 49 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 18 & 27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -21 & -26 \\ -21 & -55 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 35 & 37 \\ 66 & 77 \end{bmatrix}$$

$$C_{12} = S_2 + S_4$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 44 \\ 16 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 18 & 27 \end{bmatrix}$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 30 & 64 \\ 34 & 67 \end{bmatrix}$$

$$C_{21} = S_2 + S_4$$

$$= \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 67 & 85 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 11 \\ 35 & 49 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 68 & 87 \\ 102 & 134 \end{bmatrix}$$

$$C_{22} = S_1 + S_3 - S_2 + S_6$$

$$\begin{bmatrix} 46 & 72 \\ 70 & 110 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 44 \\ 16 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 67 & 85 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 34 & 88 \\ 39 & 49 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 66 & 116 \\ 86 & 150 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 67 & 85 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 34 & 88 \\ 39 & 49 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 52 & 128 \\ 58 & 124 \end{bmatrix}$$

Thus the final product matrix C will be -

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 & 37 \\ 66 & 77 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 30 & 64 \\ 34 & 67 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 68 & 87 \\ 102 & 134 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 52 & 128 \\ 58 & 124 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 35 & 37 & 30 & 64 \\ 66 & 77 & 34 & 67 \\ 68 & 87 & 52 & 128 \\ 102 & 134 & 58 & 124 \end{bmatrix}$$