त्रिकोणमितीय अनुपात

एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं के कुछ अनुपातों का उसके न्यून कोणों के सापेक्ष अध्ययन करेंगे जिन्हें कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं। यहाँ हम 0° और 90° के माप वाले कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों को भी परिभाषित करेंगे।

त्रिकोणमिति का परिचय [Introduction of Trigonometry]

● त्रिकोणमिति गणित की एक अहम शाखा है, जिसके अंतर्गत समकोण त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच के सम्बन्धों का का अध्ययन किया जाता है।

● अंग्रेजी शब्द 'Trigonometry' की व्युत्पत्ति ग्रीक भाषा के तीन शब्दों से मिलकर हुई है -

'tri' (तीन), 'gon' (भुजा) और 'metron' (माप) अर्थात 'तीन भुजाओं की माप' जोकि एक त्रिभुज होता है।

● प्राचीनकाल में त्रिकोणमिति पर मिस्र और बेबीलोन देशों ने कार्य किया है।

● समकोण त्रिभुज (right angled triangle) - ऐसा त्रिभुज जिसमें कोई भी एक कोण 90° का हो।

● न्यूनकोण (acute angle) - 90° से कम मान वाले कोण को न्यूनकोण कहते हैं।

● त्रिकोणमितीय अनुपात (trigonometric ratios)

sin A = लंब/कर्ण या 1/cosec A

cos A = आधार/कर्ण या 1/sec A

tan A = लंब/आधार या 1/cot A

cosec A = कर्ण/लंब या 1/sin A

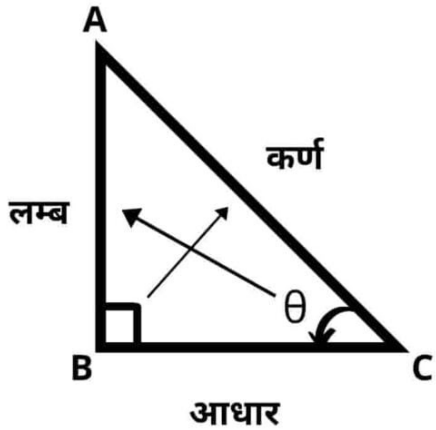
sec A = कर्ण/आधार या 1/cos A

cot A = आधार/लंब या 1/tan A

ध्यान दें - cosec A, sec A और cot A के अनुपात क्रमशः sin A, cos A और tan A के व्युत्क्रम (उल्टे) होते हैं।

त्रिकोणमिति फार्मूला

- (लम्ब) 2 + (आधार)^2= (कर्ण) 2
- sin (90° – θ) = cos θ
- cos (90° – θ) = sin θ
- tan (90° – θ) = cot θ
- cosec (90° – θ) = sec θ
- sec (90° – θ) = cosec θ
- cot (90° – θ) = tan θ
- sin (-θ) = − sin θ
- cos (−θ) = cos θ
- tan (−θ) = − tan θ



पाईथागोरस प्रमेय से,

(लम्ब)2 + (आधार)2 = (कर्ण)2

अर्थात, (h)2 = (p)2 + (b)2

त्रिकोणमितिय अनुपात के परिचय

Sine = Sin

Tangent = Tan

Cosine = Cos

Cotangent = Cot

Secant = Sec

Cosecant = Cosec

Sin θ	**लम्ब / कर्ण = p / h**
Cos θ	**आधार / कर्ण = b / h**
Tan θ	**लम्ब / आधार = p / b**
Cot θ	**आधार / लम्ब = b / p**
Sec θ	**कर्ण / आधार = h / b**
Cosec θ	**कर्ण / लम्ब = h / p**

त्रिकोणमितिय अनुपातो के बिच सम्बन्ध

- $\sin\theta \times \mathrm{Cosec}\theta = 1$
- $\sin\theta = 1 / \mathrm{Cosec}\theta$
- $\mathrm{Cosec}\theta = 1 / \sin\theta$
- $\mathrm{Cos}\theta \times \mathrm{Sec}\theta = 1$
- $\mathrm{Cos}\theta = 1 / \mathrm{Sec}\theta$
- $\mathrm{Sec}\theta = 1 / \mathrm{Cos}\theta$
- $\mathrm{Tan}\theta \times \mathrm{Cot}\theta = 1$
- $\mathrm{Tan}\theta = 1 / \mathrm{Cot}\theta$
- $\mathrm{Cot}\theta = 1 / \mathrm{Tan}\theta$
- $\mathrm{Tan}\theta = \sin\theta / \mathrm{Cos}\theta$
- $\mathrm{Cot}\theta = \mathrm{Cos}\theta / \sin\theta$

महत्वपूर्ण त्रिकोणमितीय अनुपात:

1. sin A = लंब/कर्ण या 1/cosec A

2. cos A = आधार/कर्ण या 1/sec A

3. tan A = लंब/आधार या 1/cot A

4. cosec A = कर्ण/लंब या 1/sin A

5. sec A = कर्ण/आधार या 1/cos A

6. cot A = आधार/लंब या 1/tan A

ध्यान देनें योग्य बातें

अनुपात cosec A, sec A और cot A अनुपातों sin A, cos A तथा tan A के व्युत्क्रम होते हैं।

1. tan A = लंब/आधार या sin A /cos A

2. cosec A = कर्ण/लंब या 1/sin A

3. sec A = कर्ण/आधार या 1/cos A

4. cot A = आधार/लंब या cos A /cot A

नोट:

यदि कोण समान बना रहता हो, तो एक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मानों में त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयों के साथ कोई परिवर्तन नहीं होता।

टिप्पणी:

क्योंकि समकोण त्रिभुज का कर्ण, त्रिभुज की सबसे लंबी भुजा होता है, इसलिए sin A या cos A का मान सदा ही 1 से कम होता है (या विशेष स्थिति में 1 के बराबर होता है।)

उदाहरण

यदि tan A = 4/3, तो कोण A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल

आइए सबसे पहले हम एक समकोण Δ ABC खींचें।

अब, हम जानते हैं कि tan A = लम्ब /आधार = BC /AB = 4/3

अतः यदि BC = 4k, तब AB = 3k जहाँ k धन संख्या है।

अब पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$

इसलिए, AC = 5k

अब हम इनकी परिभाषाओं की सहायता से सभी त्रिकोणमितीय अनुपात लिख सकते हैं।

1. sin A = लंब/कर्ण = BC/AC = 4k/5k = 4/5
2. cos A = आधार/कर्ण = AB/AC = 3k/5k = 3/5
3. tan A = लंब/आधार = BC/AB = 4k/3k = 4/3
4. cosec A = कर्ण/लंब = AC/BC = 5k/4k = 5/4
5. sec A = कर्ण/आधार = AC/AB = 5k/3k = 5/3
6. cot A = आधार/लंब = AB/BC = 3k/4k = ¾

कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

ज्यामिति के अध्ययन से आप 30°, 45°, 60° और 90° के कोणों की रचना से आप अच्छी तरह से परिचित हैं। इस अनुच्छेद में हम इन कोणों और साथ ही 0° वाले कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात करेंगे।

45° के त्रिकोणमितीय अनुपात

Δ ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि एक कोण 45° का हो, तो अन्य कोण भी 45° का होगा अर्थात्

$\angle A = \angle C = 45°$

अतः BC = AB

मान लीजिये BC = AB = a

तब पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\Longrightarrow AC = a\sqrt{2}$

त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषाओं को लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है:

$\sin 45° = BC/AC = a/a\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$

$\cos 45° = AB/AC = a/a\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$

$\tan 45° = BC/AB = a/a = 1$

$\cot 45° = AB/BC = a/a = 1$

$\text{cosec } 45° = AC/BC = a\sqrt{2}/a = \sqrt{2}$

$\sec 45° = AC/AB = a\sqrt{2}/a = \sqrt{2}$

30° और 60° के त्रिकोणमितीय अनुपात

अब हम 30° और 60° के त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित करें। एक समबाहु त्रिभुज ABC पर विचार करें। क्योंकि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण, 60° का होता है, इसलिए $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

A से भुजा BC पर लंब AD डालिए

अब Δ ABD $\cong$ Δ ACD (क्यों?)

इसलिए, BD = DC

और ∠ BAD = ∠ CAD (CPCT)

अब आप यह देख सकते हैं कि:

Δ ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण D समकोण है, और जहाँ ∠ BAD = 30° और ∠ ABD = 60°

त्रिकोणमितीय अनुपातों को ज्ञात करने के लिए हमें त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। आइए, हम यह मान लें कि AB = 2a

तब BD = ½ BC = a

और $AD^2 = AB^2 – BD^2 = (2a)^2 – (a)^2 = 3a^2$

इसलिए, AD = a√3

अब sin 30° = BD/AB = a/2a = 1/2

cos 30° = AD/AB = a√3/2a = √3/2

tan 30° = BD/AD = a/a√3 = 1/√3

cot 30° = BD/AB = a√3/a = √3

cosec 30° = AB/BD = 2a/a = 2

sec 30° = BD/AB = 2a/a√3 = 2/√3

इसी प्रकार

sin 60° = AD/AB = a√3/2a = √3/2

cos 60° = 1/2

tan 60° = √3

cot 60° = 1/√3

cosec 60° = 2/√3

sec 60° = 2

0° और 90° के त्रिकोणमितीय अनुपात

प्रथम स्थिति 0° के लिए:

यदि समकोण त्रिभुज ABC के कोण A को तब तक और छोटा किया जाए जब तक कि यह शून्य नहीं हो जाता है, तब इस स्थिति में कोण A के त्रिकोणमितीय अनुपातों पर क्या प्रभाव पड़ता है। जैसे-जैसे ∠A छोटा होता जाता है, वैसे-वैसे भुजा BC की लंबाई कम होती जाती है। बिदु C, बिदु B के निकट आता जाता है और अंत में, जब ∠A, 0° के काफी निकट हो जाता है तब AC लगभग वही हो जाता है जो कि AB है।

तब sin A = BC/AC = 0 (क्योंकि BC का मान 0 के निकट होता है)

cos A = AB/AC = 1 (क्योंकि AC = AB)

इस प्रकार ∠A = 0°

sin 0° = 0

cos 0° = 1

tan 0° = 0

cot 0° = 1/0 (परिभाषित नहीं है)

cosec 0° = (परिभाषित नहीं है)

sec 0° = 1

द्वितीय स्थिति 90° के लिए

उस स्थिति में देखें कि ∠A के त्रिकोणमितीय अनुपातों के साथ क्या होता है जबकि Δ ABC के इस कोण को तब तक बड़ा किया जाता है, जब तक कि 90° का नहीं हो जाता। ∠A जैसे-जैसे बड़ा होता जाता है, ∠C वैसे-वैसे छोटा होता जाता है। अतः ऊपर वाली स्थिति की भाँति भुजा AB की लंबाई कम होती जाती है। बिदु A, बिदु B के निकट

होता जाता है और, अंत में जब $\angle A$, $90°$ के अत्यधिक निकट आ जाता है, तो $\angle C$, $0°$ के अत्यधिक निकट आ जाता है और भुजा AC भुजा BC के साथ लगभग संपाती हो जाती है।

जब $\angle C$, $0°$ के अत्यधिक निकट होता है तो $\angle A$, $90°$ के अत्यधिक निकट हो जाता है और भुजा AC लगभग वही हो जाती है, जो भुजा BC है। अतः sin A, 1 के अत्यधिक निकट हो जाता है और, जब $\angle A$, $90°$ के अत्यधिक निकट होता है, तब $\angle C$, $0°$ के अत्यधिक निकट हो जाता है और भुजा AB लगभग शून्य हो जाती है। अतः cos A, 0 के अत्यधिक निकट हो जाता है।

परिभाषा

अतः हम परिभाषित करते हैं:

$\sin 90° = 1$

$\cos 90° = 0$

इनसे अन्य अनुपात भी ज्ञात किये जा सकते है।

$\tan 90°$ = परिभाषित नहीं है

$\cot 90° = 0$

$\operatorname{cosec} 90° = 1$

$\sec 90°$ = परिभाषित नहीं है

अतिरिक्त टिप्पणी

उपर्युक्त सारणी से आप देख सकते हैं कि जैसे-जैसे $\angle A$ का मान $0°$ से $90°$ तक बढ़ता जाता है, sin A का मान 0 से बढ़कर 1 हो जाता है और cos A का मान 1 से घटकर 0 हो जाता है।

पूरक कोण

दो कोणों को पूरक कोण तब कहा जाता है जबकि उनका योग $90°$ के बराबर होता है। एक समकोण Δ ABC में यदि कोण B समकोण है तो $\angle A + \angle C = 90°$ होगा।

इसलिए, $\angle C = 90^\circ - \angle A$

$\angle A + \angle C$ को पूरक कोणों का युग्म कहा जाता है।

समकोण Δ ABC में AB आधार है, BC लम्ब है तथा AC कर्ण है।

अतः

1. sin A = लंब/कर्ण = BC/AC
2. cos A = आधार/कर्ण = AB/AC
3. tan A = लंब/आधार = BC/AB
4. cosec A = कर्ण/लंब = AC/BC
5. sec A = कर्ण/आधार = AC/AB
6. cot A = आधार/लंब = AB/BC

पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

आइए, अब हम $\angle C = 90^\circ - \angle A$ के त्रिकोणमितीय अनुपात लिखेते हैं।

सुविधा के लिए हम $90^\circ - \angle A$ के स्थान पर $90^\circ - A$ लिखेंगे।

कोण $90^\circ - A$ की सम्मुख भुजा और संलग्न भुजा क्या होगी?

आप देखेंगे कि AB कोण $90^\circ - A$ की सम्मुख भुजा है और BC संलग्न भुजा है। अतः

1. sin $(90^\circ - A)$ = लंब/कर्ण = AB/AC
2. cos $(90^\circ - A)$ = आधार/कर्ण = BC/AC
3. tan $(90^\circ - A)$ = लंब/आधार = AB/BC
4. cot $(90^\circ - A)$ = आधार/लम्ब = BC/AB

5. cosec (90° – A) = कर्ण/लम्ब = AC/AB

6. sec (90° – A) = कर्ण/आधार = AC/BC

अनुपातों कि तुलना

उपरोक्त दोनों अनुपातों कि तुलना करने पर हम पाते हैं कि

1. sin (90° – A) = AB/AC = cos A

2. cos (90° – A) = BC/AC = sin A

3. tan (90° – A) = AB/BC = cot A

4. cot (90° – A) = BC/AB = tan A

5. cosec (90° – A) = AC/AB = sec A

6. sec (90° – A) = AC/BC = cosec A

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

एक समीकरण को एक सर्वसमिका तब कहा जाता है जबकि यह संबंधित चरों के सभी मानों के लिए सत्य हो। इसी प्रकार एक कोण के त्रिकोणमितीय अनुपातों से संबंधित सर्वसमिका को त्रिकोणमितीय सर्वसमिका कहा जाता है। जबकि यह संबंधित कोण (कोणों) के सभी मानों के लिए सत्य होता है।

1. $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ (जहाँ $0° \leq A \leq 90°$)

2. $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

3. $\cot^2 A + 1 = \text{cosec}^2 A$

स्मरणीय तथ्य

1. यदि एक न्यून कोण का एक त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात हो, तो कोण के शेष त्रिकोणमितीय अनुपात सरलता से ज्ञात किए जा सकते हैं।

2. sin A या cos A का मान कभी भी 1 से अधिक नहीं होता, जबकि sec A या cosec A का मान सदैव 1 से अधिक या 1 के बराबर होता है।

● sin और cos में सम्बन्ध -

tan A = sin A/cos A

cot A = cos A/sin A

● त्रिकोणमितीय अनुपातों के नाम पूर्ण रूप में -

sin - sine

cos - cosine

tan - tangent

cosec - cosecant

sec - secant

cot - cotangent

● ध्यान रहे कि tan A, tan और A का गुणनफल नहीं है। tan का A से अलग हो जाने पर कोई मान नहीं रहता। इसी प्रकार अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के साथ भी होता है।

● पूर्ण रूप से समरूप त्रिभुजों के त्रिकोणमितीय अनुपातों में कोई अंतर नहीं होता है।

● कोण को दर्शाने के लिए हम English Alphabet के किसी Letter का प्रयोग करते हैं और कभी-कभी ग्रीक अक्षर थीटा (theta) का प्रयोग करते हैं।

● किसी भी समकोण त्रिभुज की दो भुजाएँ या उनका अनुपात दिए होने पर हम तीसरी भुजा पाइथागोरस प्रमेय के द्वारा ज्ञात कर सकते हैं और फिर सभी त्रिकोणमितीय अनुपात भी ज्ञात कर सकते हैं।

● निम्न सारणी त्रिकोणमिति के 0°, 30°, 45°, 60° और 90° के अनुपातों को दर्शाती है -

त्रिकोणमिति तालिका :Trigonometry Table

	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞ (not defined)
cot θ	∞ (not defined)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞ (not defined)
cosec θ	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

● किसी समकोण त्रिभुज की कोई एक भुजा और एक न्यूनकोण दिए होने हम अन्य दो भुजाएँ, कोण का त्रिकोणमितीय मान रखकर ज्ञात कर सकते हैं, और फिर सभी त्रिकोणमितीय अनुपात भी ज्ञात कर सकते हैं।

● किसी समकोण त्रिभुज की दो या तीनों भुजाएँ दी होने पर त्रिभुज के कोण ज्ञात किये जा सकते हैं, यदि भुजाओं का अनुपात किसी भी कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात के बराबर आता है।

● त्रिकोणमितीय प्रश्नों को हल करते समय ध्यान रखें कि सर्वप्रथम अनुपातों को सम्बन्धित सूत्र/अनुपात में परिवर्तित करे ताकि हल करने में आसानी हो जाए।

● पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

sin (90°-A) = cos A

cos (90°-A) = sin A

tan (90°-A) = cot A

cot (90°-A) = tan A

cosec (90°-A) = sec A

sec (90°-A) = cosec A

● त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

- $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
- $\sec^2 A + \tan^2 A = 1$
- $\text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

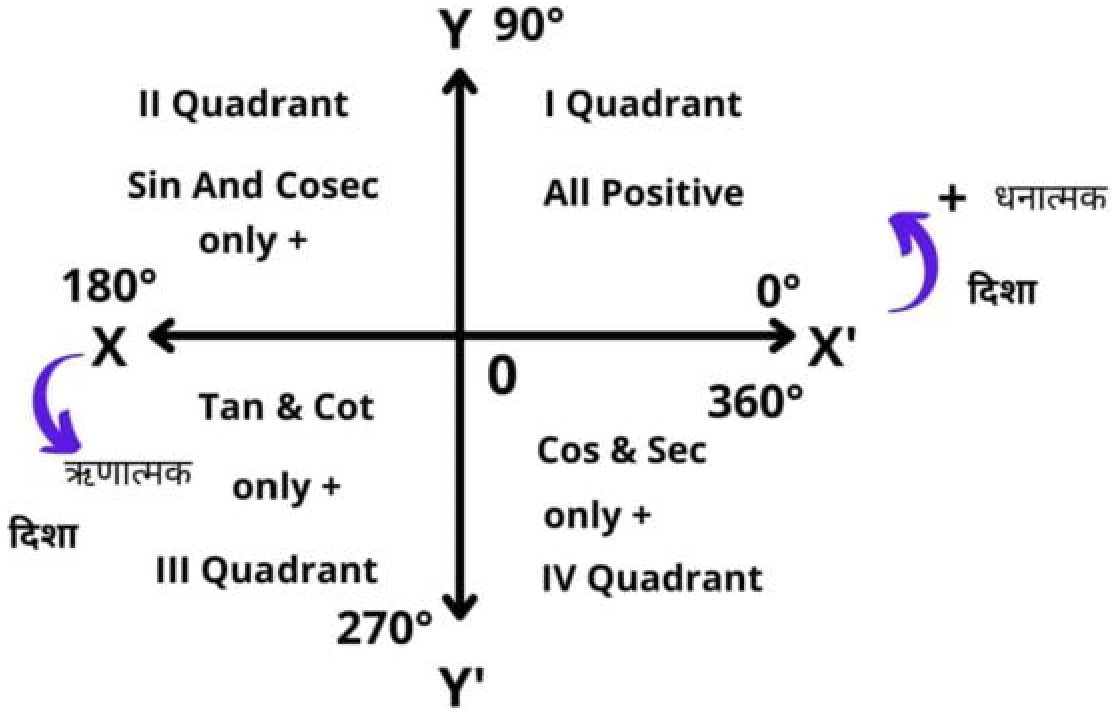
● कोई भी त्रिकोणमितीय अनुपात दिया होने पर हम त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं (identities) की सहायता से अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कर सकते हैं।

● त्रिकोणमितीय प्रश्नों को हल करते समय यदि किसी किसी प्रश्न या उसके हल में कहीं भी कोई सर्वसमिका लागू होती है तो, उसमें सर्वसमिका अवश्य लगाएँ।

● यदि त्रिकोणमिति के किसी प्रश्न में दो पक्षों को सत्यापित (prove) करने के लिए कहा जाए तो पहले बड़े पक्ष को हल करें और छोटे पक्ष के बराबर लाने का प्रयत्न करें। यदि पक्ष बराबर नहीं आते तो बड़े पक्ष को अधिकतम सीमा तक सरल (simplify) करने के बाद छोटे पक्ष को भी सरल करें, आपका उत्तर अवश्य सही होगा।

● दाएँ पक्ष के किसी धनात्मक पद को बाईं तरफ विस्थापित करने पर उसका चिन्ह ऋणात्मक हो जाता है। विलोमशः भी सत्य है।

त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिन्ह विभिन्न कोटि में



- चतुर्थांश में केवल 90° और 270° चेंज होते है शेष नही बदलते है.
- प्रथम चतुर्थांश में सभी त्रिकोणमितिय अनुपात धनात्मक होते है.
- द्वितीय चतुर्थांश में केवल Sin और Cosec धनात्मक होते है शेष ऋणात्मक होते है.
- तृतीय चतुर्थांश में Tan और Cot धनात्मक, शेष ऋणात्मक
- चतुर्थ चतुर्थांश में, Cos और Sec धनात्मक, शेष ऋणात्मक
- कोण की चाल घड़ी के विपरीत दिशा में पॉजिटिव एवं घड़ी के दिशा में नेगेटिव होता है.

प्रथम चतुर्थांश में ($\theta - 90°$), सभी पॉजिटिव

- $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$
- $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$
- $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$
- $\text{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$
- $\sec(90° - \theta) = \text{cosec}\,\theta$
- $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

प्रथम चतुर्थांश में ही (360° + θ)

- $\sin(360° + \theta) = \sin\theta$
- $\cos(360° + \theta) = \cos\theta$
- $\tan(360° + \theta) = \tan\theta$
- $\operatorname{cosec}(360° + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$
- $\sec(360° + \theta) = \sec\theta$
- $\cot(360° + \theta) = \cot\theta$

द्वितीय चतुर्थांश में (90° – 180°), Sin और Cosec Positive

- $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$
- $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$
- $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$
- $\operatorname{cosec}(180° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$
- $\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$
- $\cot(180° - \theta) = -\cot\theta$

द्वितीय चतुर्थांश में (90° + θ)

- $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$
- $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$
- $\tan(90° + \theta) = -\cot\theta$
- $\operatorname{cosec}(90° + \theta) = \sec\theta$
- $\sec(90° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$
- $\cot(90° + \theta) = -\tan\theta$

तृतीय चतुर्थांश में (180° – 270°), Tan और Cot पॉजिटिव

- $\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$
- $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$
- $\tan(180° + \theta) = \tan\theta$
- $\operatorname{cosec}(180° + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$
- $\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$
- $\cot(180° + \theta) = \cot\theta$

तृतीय चतुर्थांश में (270° – θ)

- $\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$
- $\cos(270° - \theta) = -\sin\theta$
- $\tan(270° - \theta) = \cot\theta$
- $\operatorname{cosec}(270° - \theta) = -\sec\theta$
- $\sec(270° - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$
- $\cot(270° - \theta) = \tan\theta$

चतुर्थ चतुर्थांश में (270° – 360°), Cos और Sec पॉजिटिव

- $\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$
- $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$
- $\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$
- $\operatorname{cosec}(360° - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$
- $\sec(360° - \theta) = \sec\theta$
- $\cot(360° - \theta) = -\cot\theta$

चतुर्थ चतुर्थांश में (270° + θ)

- $\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$
- $\cos(270° + \theta) = +\sin\theta$

- $\tan(270° + \theta) = -\cot\theta$
- $\mathrm{cosec}(270° + \theta) = -\sec\theta$
- $\sec(270° + \theta) = +\mathrm{cosec}\,\theta$
- $\cot(270° + \theta) = -\tan\theta$

त्रिकोणमितिय अनुपातों का चिन्ह (Trigonometric Sign)

- $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
- $\cos(-\theta) = \cos\theta$
- $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
- $\mathrm{cosec}(-\theta) = -\mathrm{cosec}\,\theta$
- $\sec(-\theta) = \sec\theta$
- $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

दो कोणों का योग या घटाव फार्मूला

- $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\tan(A - B) = (\tan A - \tan B) / (1 + \tan A . \tan B)$
- $\cot(A - B) = (\cot A . \cot B + 1) / (\cot B - \cot A)$
- $\tan(A + B) = [(\tan A + \tan B) / (1 - \tan A \tan B)]$
- $\tan(A - B) = [(\tan A - \tan B) / (1 + \tan A \tan B)]$

त्रिकोणमितिय असिमाका (Trigonometric Identitie)

- sin2A + cos2A = 1

- $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
- $\cos^2\theta = \sin^2\theta - 1$
- $\tan 2A + 1 = \sec 2A$
- $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
- $\cot 2A + 1 = \operatorname{cosec} 2A$
- $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

दो कोणों का फार्मूला

- $\sin(2A) = 2\sin(A) \cdot \cos(A)$
- $\cos(2A) = \cos 2(A) - \sin 2(A)$
- $\tan(2A) = [2\tan(A)] / [1 - \tan 2(A)]$

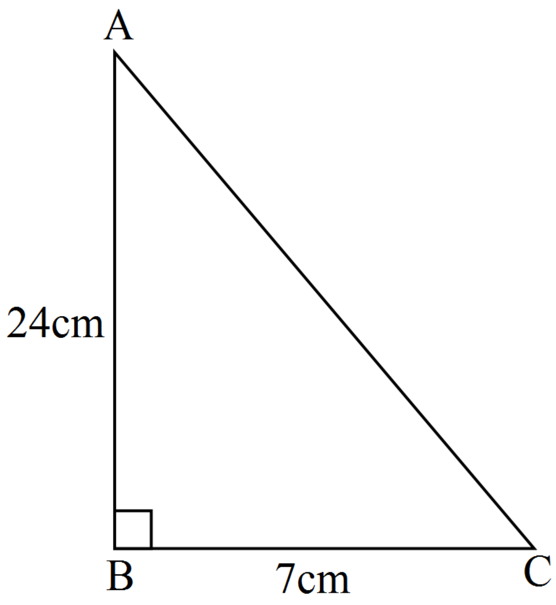
NCERT SOLUTIONS
प्रश्नावली 8.1 (पृष्ठ संख्या 200)

प्रश्न 1 $\triangle ABC$ में, जिसका कोण B समकोण है, AB = 24cm और BC = 7cm है। निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

i. sinA, cosA
ii. sinC, cosC

उत्तर- समकोण त्रिभुज $\triangle ABC$ में, AB = 24cm, BC = 7cm

पाइथागोरस प्रमेय से,



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 24^2 + 7^2$$

$$= 576 + 49$$

$$= 625$$

$$AC = \sqrt{625} = 25\text{cm}$$

अब त्रिकोणमितिय अनुपात लेने पर,

i. $\sin A, \cos A$

सम्मुख भुजा का अर्थ सामने वाली भुजा होता है।

$$\sin A = \frac{\text{A की सम्मुख भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$

$$\cos A = \frac{\text{A की संलग्न भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$$

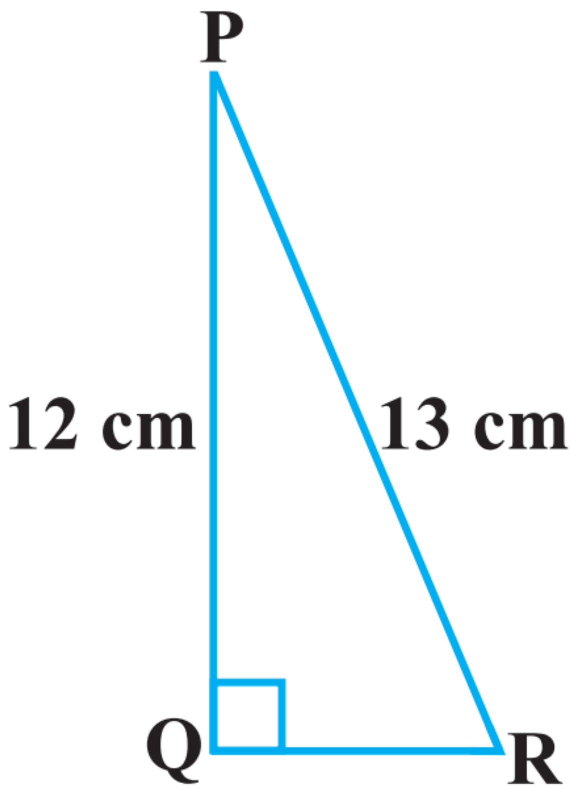
ii. $\sin C, \cos C$

संलग्न भुजा का अर्थ साथ (बगल वाली) भुजा होता है।

$$\sin C = \frac{\text{C की सम्मुख भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$$

$$\cos C = \frac{\text{C की संलग्न भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$

प्रश्न 2 आकृति 8.13 में, $\tan P - \cot R$ का मान ज्ञात कीजिए।

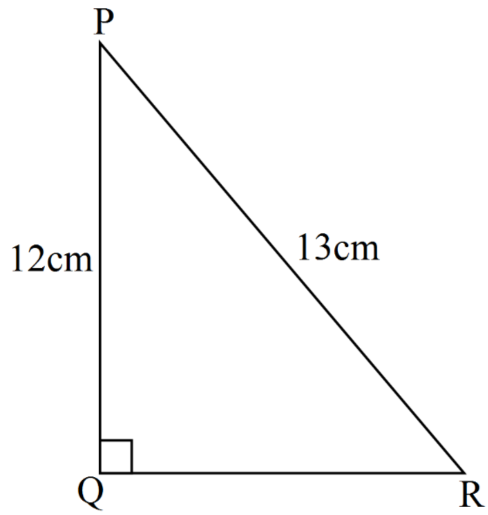


उत्तर-

$$PQ = 12\text{cm}, PR = 13\text{cm}\ QR = ?$$

समकोण त्रिभुज $\triangle PQR$ में, $PQ = 12\text{cm}, PR = 13\text{cm}$

पाइथागोरस प्रमेय से,



$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

$$13^2 = 12^2 + QR^2$$

$$169 = 144 + QR^2$$

$$169 - 144 = QR^2$$

$$QR^2 = 25$$

$$QR = \sqrt{25} = 5cm$$

अब त्रिकोणमितिय अनुपात लेने पर,

सम्मुख भुजा का अर्थ सामने वाली भुजा होता है।

$$\tan P = \frac{P \text{ की सम्मुख भुजा}}{P \text{ की संलग्न भुजा}} = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$$

$$\cot R = \frac{R \text{ की संलग्न भुजा}}{R \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$$

$$\tan P - \cot R$$

$$\frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 0$$

संलग्न भुजा का अर्थ साथ (बगल वाली) भुजा होता है।

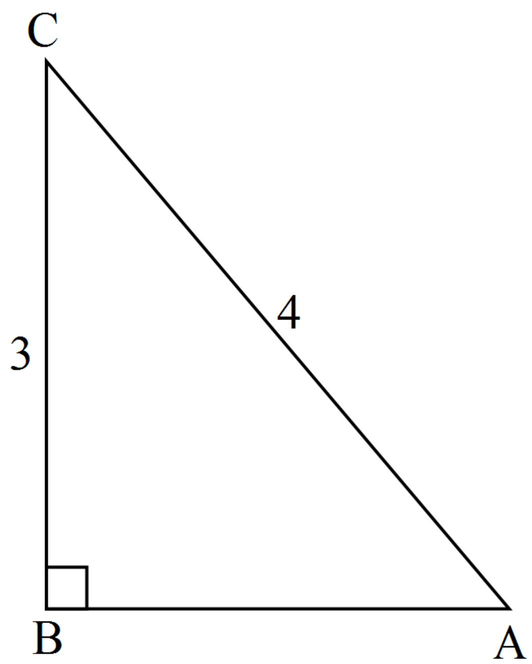
प्रश्न 3 यदि $\sin A = \frac{3}{4}$ तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान परिकलित कीजिए।

उत्तर-

$$\sin A = \frac{3}{4}$$

A की सम्मुख भुजा = 3, समकोण की भुजा (कर्ण) = 4

पाइथागोरस प्रमेय से,



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$4^2 = AB^2 + 3^2$$

$$16 = AB^2 + 9$$

$$AB^2 = 16 - 9 = 7$$

$$AB = \sqrt{7}$$

इसलिए, $\cos A = \dfrac{\text{A की संलग्न भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan A = \dfrac{\text{A की सम्मुख भुजा}}{\text{A की संलग्न भुजा}} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$

प्रश्न 4 यदि 15 cot A = 8 हो तो sin A और sec A का मान कीजिए।

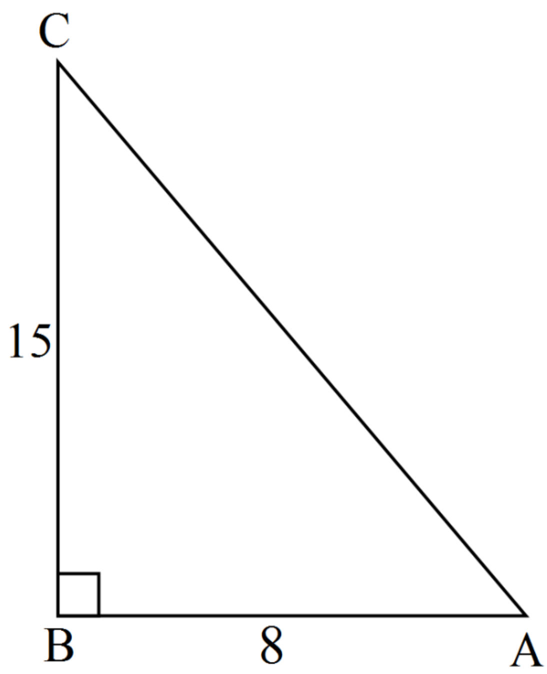
उत्तर-

$$15 \cot A = 8$$

$$\cot A = \frac{8}{15}$$

A की सम्मुख भुजा = 15, A की संलग्न भुजा = 8

पाइथागोरस प्रमेय से,



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 8^2 + 15^2$$

$$= 64 + 225$$

$$AC^2 = 289$$

$$AC = \sqrt{289} = 17\text{cm}$$

इसलिए, $\sin A = \dfrac{A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{15}{17}$

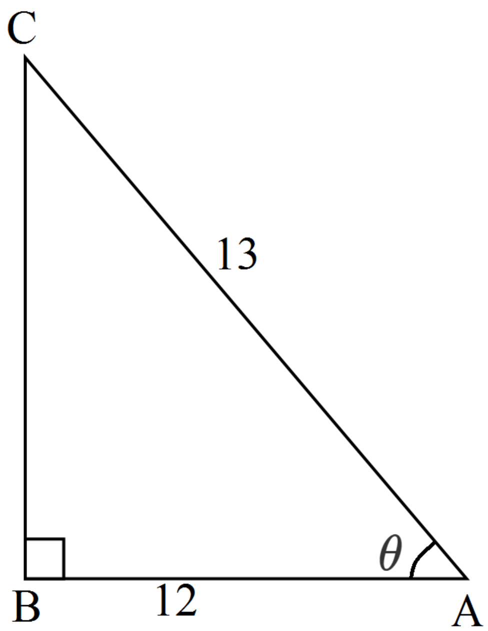
$\sec A = \dfrac{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}}{A \text{ की संलग्न भुजा}} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{17}{8}$

प्रश्न 5 यदि $\sec \theta = \dfrac{13}{12}$ हो तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित कीजिए।

उत्तर- $\sec \theta = \dfrac{13}{12}$

θ की संलग्न भुजा = 12, समकोण की सम्मुख भुजा (कर्ण) = 13

पाइथागोरस प्रमेय से,



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$13^2 = 12^2 + BC^2$$

$$169 = 144 + BC^2$$

$$169 - 144 = BC^2$$

$$BC^2 = 25$$

$$BC = \sqrt{25} = 5$$

सभी त्रिकोणमितिय अनुपात

$$\sin A = \frac{\text{A की सम्मुख भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}$$

$$\cos A = \frac{\text{A की संलग्न भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13}$$

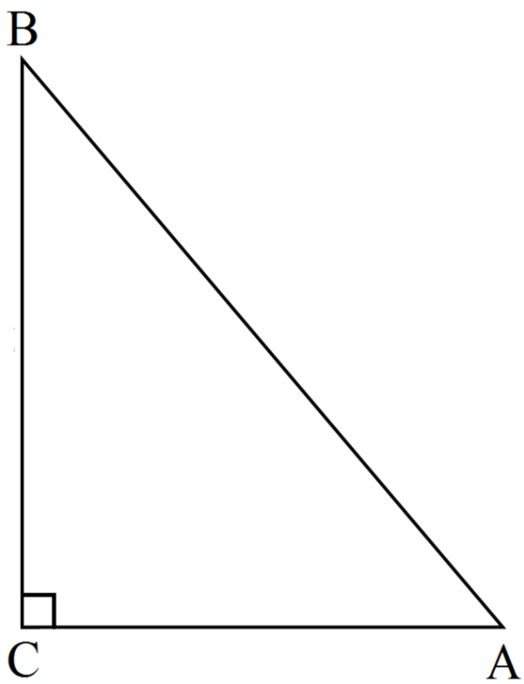
$$\tan A = \frac{\text{A की सम्मुख भुजा}}{\text{A की संलग्न भुजा}} = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{12}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}}{\text{A की सम्मुख भुजा}} = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{5}$$

$$\cot A = \frac{\text{A की संलग्न भुजा}}{\text{A की सम्मुख भुजा}} = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{5}$$

प्रश्न 6 यदि $\angle A$ और $\angle B$ न्यून कोण हो, जहाँ $\cos A = \cos B$ तो दिखाइए की $\angle A = \angle B$

उत्तर-



$$\cos A = \frac{\text{A की संलग्न भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{AC}{AB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

$$\cos B = \frac{\text{B की संलग्न भुजा}}{\text{समकोण की सम्मुख भुजा}} = \frac{BC}{AB} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

दिया है: $\cos A = \cos B$

$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB}$ सभी (i) तथा (ii) से

या $AC = BC$

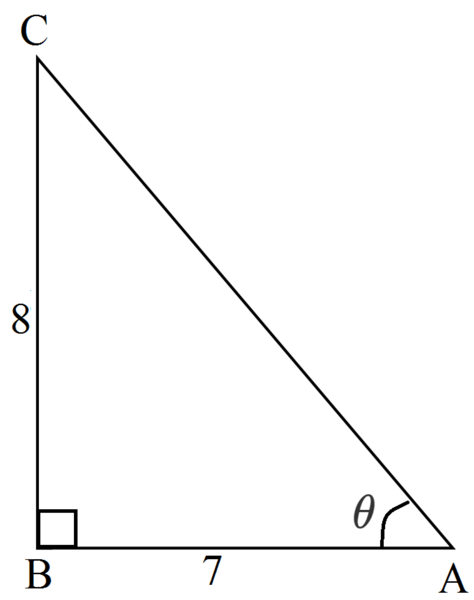
अतः $\angle A = \angle B$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते है)

प्रश्न 7 यदि $\cot = \frac{7}{8}$, तो,

i. $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

ii. $\cot^2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-



i. $\cot\theta = \frac{7}{8}$

$\therefore \mathrm{AB} = 7$, और $\mathrm{BD} = 8;$

$\mathrm{PR}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2$

$\mathrm{AC}^2 = 7^2 + 8^2$

$\mathrm{AC}^2 = 49 + 64$

$\mathrm{AC}^2 = 113$

$\mathrm{AC}^2 = \sqrt{113}$

$\sin\theta = \frac{8}{\sqrt{113}}, \cos\theta = \frac{7}{\sqrt{113}}$

$\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$= \frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{1-\left(\frac{8}{\sqrt{113}}\right)^2}{1-\left(\frac{7}{\sqrt{113}}\right)^2}$

$$= \frac{1-\frac{64}{113}}{1-\frac{49}{113}} = \frac{\frac{113-64}{113}}{\frac{113-49}{113}} = \frac{\frac{49}{113}}{\frac{64}{113}}$$

$$= \frac{49}{113} \times \frac{113}{64} - = \frac{49}{64}$$

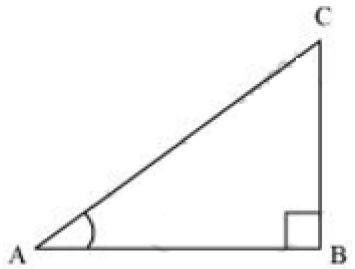
ii. $\cot^2 \theta$

$$= \left(\frac{7}{8}\right)^2$$

$$= \frac{49}{64}$$

प्रश्न 8 यदि $3\cot A = 4$, तो जाँच कीजिए की $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है या नहीं।

उत्तर-



यह दिया गया है कि 3cot A = 4 या cot A = $\frac{4}{3}$

बिंदु B पर समकोण त्रिभुज ABC पर विचार करें।

$$\cot A = \frac{\text{बगल में}\angle A}{\text{के विपरीत भुजा}\angle A}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

यदि AB 4k है, तो BC 3k होगा, जहाँ k एक धनात्मक पूर्णांक है।

In ΔABC,

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$= (4k)^2 + (3k)^2$

$= 16k^2 + 9k^2$

$= 25k^2$

$AC = 5k$

$$\cos A = \frac{\text{बगल में}\angle A}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

$= 4k/5k = 4/5$

$$\sin A = \frac{\text{बगल में}\angle A}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$=3k/5k = 3/5$

$$\tan A = \frac{\text{बगल में}\angle A}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AB}$$

$$= 3\frac{k}{4}k = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right) = \left(\frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}\right)$$

$$= \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{25}$$

$\cos^2 A + \sin^2 A = (4/5)^2 - (3/5)^2$

$$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

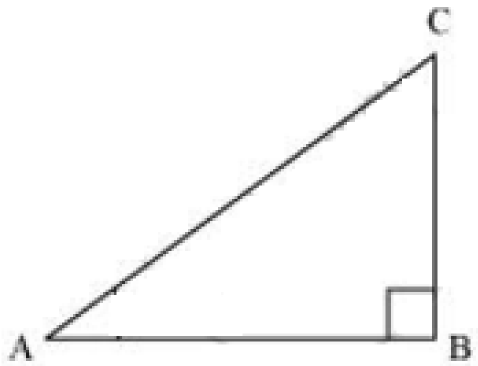
$$\therefore \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$$

प्रश्न 9 त्रिभुज ABC में जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिये:

i. $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

ii. $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

उत्तर-



$$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

यदि BC k है, तो AB $\sqrt{3}k$ होगा, जहां k एक धनात्मक पूर्णांक है।

In ΔABC,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$= \left(\sqrt{3}k\right)^2 + (k)^2$$

$= 3k^2 + k^2 = 4k^2$

$\therefore AC = 2k$

$$\sin A = \frac{\text{बगल में} \angle A}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\cos A = \frac{\text{बगल में} \angle A}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin C = \frac{\text{बगल में} \angle C}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos C = \frac{\text{बगल में} \angle C}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

(i) sin A cos C + cos A sin C

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} + + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

(ii) cos A cos C – sin A sin C

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

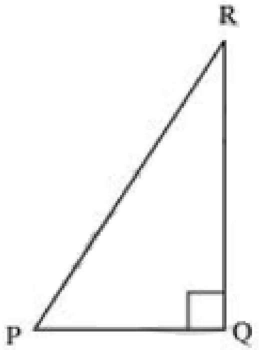
प्रश्न 10 $\triangle PQR$ में, जिसका कोण Q समकोण है, PR + QR = 25cm और PQ = 9cm है। sinP, cosP और tanP के मान ज्ञात कीजिये।

उत्तर- दिया गया है, PR + QR = 25

PQ = 5

माना PR x है।

इसलिए, QR = 25 – x



पाइथागोरस प्रमेय को ΔPQR में लागू करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$x^2 = (5)^2 + (25 - x)^2$

$x^2 = 25 + 625 + x^2 - 50x$

$50x = 650$

$x = 13$

इसलिए, PR = 13 cm

QR = (25 − 13) cm = 12 cm

$$\sin P = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$$

$$\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$

$$\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$$

प्रश्न 11 बताइए की निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य। कारण सहित उत्तर की पुष्टि कीजिये।

(i) tanA का मान सदैव 1 से कम होता है।

(ii) कोण A के किसी मान के लिए $\sec A = \frac{12}{5}$

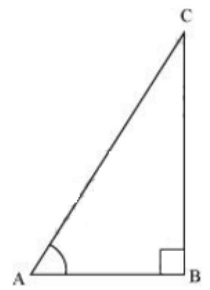
(iii) cosA, कोण A के व्युत्क्रमण के लिये प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।

(iv) cotA, cot और A का गुणनफल होता है।

(v) किसी भी कोण θ के लिये $\sin\theta = \frac{4}{3}$

उत्तर-

(i)



एक ΔABC पर विचार करें, जो B पर समकोण है।

$$\tan A = \frac{\text{कोण A के विपरीत पक्ष}}{\text{कोण B के आसन्न पक्ष}}$$

$= \frac{12}{5}$

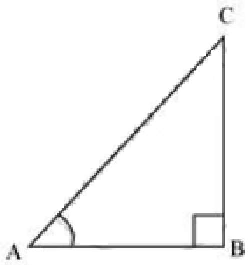
लेकिन 12/5 > 1

$\therefore$ tan A > 1

तो, tan A <1 हमेशा सत्य नहीं होता है।

अत: दिया गया कथन असत्य है।

(ii)



sec A = $\frac{12}{5}$

$\frac{\text{कर्ण}}{\text{पक्ष}}$ ∠A - 12/5 से सटा हुआ है

$$\frac{AC}{AB} = \frac{12}{5}$$

मान लीजिए AC 12k है, AB 5k होगा, जहां k एक धनात्मक पूर्णांक है।

पाइथागोरस प्रमेय को ΔABC में लागू करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(12k)^2 = (5k)^2 + BC^2$

$144k^2 = 25k^2 + BC^2$

$BC^2 = 119k^2$

$BC = 10.9k$

यह देखा जा सकता है कि दी गई दो भुजाओं के लिए AC = 12k और AB = 5k,

BC ऐसा होना चाहिए,

$AC - AB < BC < AC + AB$

$12k - 5k < BC < 12k + 5k$

$7k < BC < 17\ k$

हालांकि, BC = 10.9k स्पष्ट रूप से, ऐसा त्रिभुज संभव है और इसलिए, sec A का ऐसा मान संभव है।

अत: दिया गया कथन सत्य है।

(iii) दिया गया कथन **असत्य** है।

कोण A के व्युत्क्रमण के लिए इस्तेमाल किया जाने वाला संक्षिप्त नाम cosec A है। और cos A कोण A के व्युत्क्रमण के लिए इस्तेमाल किया जाने वाला संक्षिप्त नाम है।

(iv) cot A, cot और A का गुणनफल नहीं है। यह ∠A का कोटेंजेंट है।

अत: दिया गया कथन **असत्य** है।

(v) $\sin \theta = \frac{4}{3}$

हम जानते हैं कि एक समकोण त्रिभुज में,

$$\sin\theta = \frac{\text{कोण } \angle\theta \text{ के विपरीत पक्ष}}{\text{कर्ण}}$$

एक समकोण त्रिभुज में, कर्ण हमेशा शेष दो भुजाओं से बड़ा होता है। इसलिए $\sin \theta$ का ऐसा मूल्य संभव नहीं है।

अत: दिया गया कथन **असत्य** है

प्रश्नावली 8.2 (पृष्ठ संख्या 206-207)

प्रश्न 1 निम्नलिखित के मान निकालिए:

(i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$

(ii) $2\tan 245° + \cos 230° - \sin 260°$

(iii) $\frac{\cos 45°}{\sec 30° + \operatorname{cosec} 30°}$

(iv)

$$\frac{\sin 30° + \tan 45° - \text{coses} 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$$

(v)

$$\frac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$$

उत्तर-

(i)

$$\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$$

सभी त्रिकोंणमितीय अनुपातों का मान रखने पर

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(ii)

$$2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$$

$$= 2 \times (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 2$$

(iii)

$$= \frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \mathrm{cosec} 30^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(2+2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}$$

हर का परिमेंइकरण करने पर

$$= \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})} \times \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2\left[(\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2\right]}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{18}}{2[2-6]}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{9\times2}}{2[-4]}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{-8}$$

$$= \frac{-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{-8}$$

$$= \frac{3\sqrt{2-\sqrt{6}}}{8}$$

(iv)

$$\frac{\sin 30^\circ+\tan 45^\circ-\text{coses}60^\circ}{\sec 30^\circ+\cos 60^\circ+\cot 45^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}+1}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4+\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}+2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4}{4+\sqrt{3}+2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-4}{4+3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4}$$

हर का परिमेइकरण करने पर

$$= \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}+4} \times \frac{3\sqrt{3}-4}{3\sqrt{3}-4}$$

$$= \frac{(3\sqrt{3}-4)^2}{(3\sqrt{3})^2-4^2}$$

$$= \frac{27-24\sqrt{3}+16}{27-16} \quad [\because (a\text{-}b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$$

$$= \frac{43-24\sqrt{3}}{11}$$

(v)

$$\frac{\sin 30^\circ+\tan 45^\circ-\text{coses}60^\circ}{\sec 30^\circ+\cos 60^\circ+\cot 45^\circ}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-1^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{1}{4}\right)+4\left(\frac{4}{3}\right)-1}{\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1}{\frac{1+3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{15+64-12}{12}}{\frac{4}{4}}$$

$$= \frac{15+64-12}{12} = \frac{67}{12}$$

प्रश्न 2 सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिये:

(i)

$$\frac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$$

a. $\sin 60^\circ$

b. $\cos 60^\circ$

c. $\tan 60^\circ$

d. $\sin 30^\circ$

(ii)

$$\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$$

a. $\tan 90^\circ$

b. 1

c. $\sin 45^\circ$

d. 0

(iii)

$\sin 2A = 2 \sin A$ तब सत्य होता है, जबकि A बराबर है:

a. 0°

b. 30°

c. 45°

d. 60°

(iv)

$\frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^\circ 30}$ बराबर है:

a. $\cos 60^\circ$

b. $\sin 60^\circ$

c. $\tan 60^\circ$

d. $\sin 30^\circ$

उत्तर-

(i)

a. $\sin 60^\circ$

हल:

$$\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$$

$$= \frac{2 \times \frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3+1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4}$

$\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

दिये गए सभी विकल्पों मै से केवल $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ होता है इस लिये विकल्प (a) सही है।

(ii)

d. 0

हल:

$= \frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$

$= \frac{1-1^2}{1+1^2}$

$= \frac{1-1}{1+1} = \frac{2}{2} = 0$

दिये गए सभी विकल्पों मै से केवल (D) 0 सही है।

(iii)

a. 0°

हल:

$\sin \mathrm{A} = 2 \sin \mathrm{A}$

$\Rightarrow 2 \sin \mathrm{A}\ \cos \mathrm{A} = 2 \sin \mathrm{A}\ [\sin 2\mathrm{x} = 2 \sin \mathrm{x} \cos \mathrm{x}]$

$\Rightarrow \cos \mathrm{A}\ = 2 \sin \mathrm{A} - 2 \sin \mathrm{A}$

$\Rightarrow \mathrm{A} = 0$

$\therefore \mathrm{A} = 0^\circ$

विकल्प (a) सही है।

(iv)

c. $\tan 60^\circ$

हल:

$$\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^\circ 30}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

विकल्प (c) $\tan 60^\circ$ सही है।

प्रश्न 3

यदि $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ और $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}; 0^\circ < A+B \leq 90^\circ; A > B$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिये।

उत्तर-

$$\tan(A+B) = \sqrt{3} \ldots\ldots\ldots (i)$$

जबकि $60^\circ = \sqrt{3} \ldots\ldots\ldots (ii)$

समीकरण (i) और (ii) की तुलना करने पर

$$\therefore \tan(A+B) = \tan 60^\circ$$

या $A+B = 60^\circ \ldots\ldots\ldots (iii)$

इसीप्रकार,

$$\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots\ldots\ldots (iv)$$

जबकि $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots\ldots\ldots (v)$

समीकरण (iv) और (v) की तुलना करने पर

$$A + B + A - B = 60^\circ + 30^\circ$$

$$\Rightarrow 2A = 90^\circ$$

$$\Rightarrow A = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

प्रश्न 4 बताइए कि निम्नलिखित में से कौन-कौन सत्य हैं या असत्य है। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$

(ii) θ में वृद्धि होने के साथ $\sin\theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iii) θ में वृद्धि होने के साथ $\cos\theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iv) θ के साभी के मानो पर $\sin\theta = \cos\theta$

(v) $A = 0^\circ$ पर $\cot A$ परिभाषित नहीं है।

उत्तर-

(i) असत्य।

(ii) सत्य।

(iii) असत्य।

(iv) असत्य।

(v) सत्य।

प्रश्नावली 8.3 (पृष्ठ संख्या 209)

प्रश्न 1 निम्नलिखित का मान निकालिये:

(i) $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$

(ii) $\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$

(iii) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$

(iv) $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ$

उत्तर-

(i)

$$\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$$

$$= \frac{\cos(90^\circ - 18^\circ)}{\cos 72^\circ}$$

$$= \frac{\cos 72^\circ}{\cos 72^\circ} = 1 \; [\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)]$$

(ii)

$$\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$$

$$= \frac{\cot(90^\circ - 26^\circ)}{\cot 64^\circ}$$

$$= \frac{\cos 64^\circ}{\cos 64^\circ} = 1 \; [\tan\theta = \cot(90^\circ - \theta)]$$

(iii)

$$\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$$

$$\Rightarrow \sin(90^\circ - 48^\circ) - \sin 42^\circ$$

$$\Rightarrow \sin 42^\circ - \sin 42^\circ = 0$$

(iv)

$$\text{cosec}31^\circ - \sec 59^\circ$$

$$\Rightarrow \sec(90^\circ - 31^\circ) - \sec 59^\circ \ [\text{cosec } q = \sec(90^\circ - q)]$$

$$\Rightarrow \sec 59^\circ - \sec 59^\circ = 0$$

प्रश्न 2 दिखाइए कि:

(i) $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$

(ii) $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$

उत्तर-

(i)

$$\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$$

$$\text{LHS} = \tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ$$

$$= \cot(90^\circ - 48^\circ) \tan(90^\circ - 23^\circ) \tan 42^\circ \tan 67^\circ$$

$$= \cot 42^\circ \cot 67^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ$$

$$= (\cot 42^\circ \times \tan 42^\circ)(\cot 67^\circ \times \tan 67^\circ)$$

$$= 1 \times 1 \ [\cot A \times \tan A = 1]$$

$$= 1$$

$$\text{LHS=RHS}$$

(ii)

$$\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$$

$$\text{LHS} = \cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$$

$$= \sin(90^\circ - 38^\circ) \cos 52^\circ - \cos(90^\circ - 38^\circ) \sin 52^\circ$$

$$= \sin 52^\circ \cos 52^\circ - \cos 52^\circ \sin 52^\circ$$

$$= \sin 52^\circ(\cos 52^\circ - \cos 52^\circ)$$

$$= \sin 52^\circ \times 0$$

$$= 0$$

$$\text{LHS=RHS}$$

प्रश्न 3 यदि tan 2A = cot(A − 18°), जहाँ 2A एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\tan 2A = \cot(A - 18^\circ),$$

$$\Rightarrow \cot(90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ)$$

दोनों पक्षों में तुलना करने पर

$$\Rightarrow 90^\circ - 2A = A - 18^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + 18^\circ = A + 2A$$

$$\Rightarrow 3A = 108^\circ$$

$$\Rightarrow A = \frac{108^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow A = 36^\circ$$

$$\text{LHS=RHS}$$

प्रश्न 4 यदि tan A = cotB, तो सिद्ध कीजिए कि A + B = 90°

उत्तर-

$\tan A = \cot B$ दिया है।

$\Rightarrow \tan A = \tan(90^\circ - B)$ तुलना करने पर

$\Rightarrow A = 90^\circ - B$

$\Rightarrow A + B = 90^\circ$ इति सिद्धम्

प्रश्न 5 यदि sec 4A = cosec(A − 20°), जहाँ 4A एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec}(90^\circ - 4A) = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)\ [\sec q = (90^\circ - q)]$$

तुलना करने पर

$$\Rightarrow 90^\circ - 4A = A - 20^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + 20^\circ = A + 4A$$

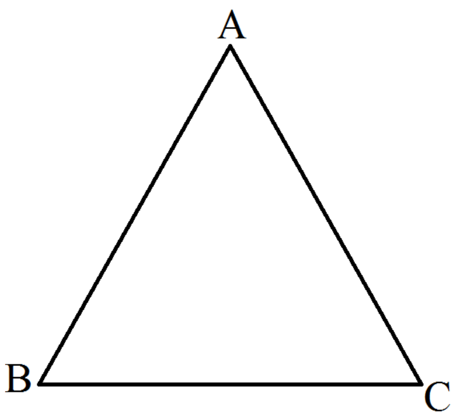
$$\Rightarrow 5A = 110^\circ$$

$$\Rightarrow A = \frac{110^\circ}{5}$$

$$\Rightarrow A = 22^\circ$$

प्रश्न 6 यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अतः कोण हो, तो दिखाइए की $sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$

उत्तर-



A, B और C त्रिभुज ABC के अतः कोण है

इसलिए, A + B + C = 180°

(त्रिभुज के तीनो कोणों का योग)

अथवा, B + C = 180° - A ....(i)

अब, $\mathrm{RHS} = \cos \frac{\mathrm{A}}{2}$

$$= \sin\left(90^\circ - \frac{\mathrm{A}}{2}\right) \; [\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)]$$

$$= \sin\left(\frac{180^\circ - \mathrm{A}}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}\right)$$

$$\mathrm{LHS}=\mathrm{RHS}$$

प्रश्न 7 sin67° + cos75° को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितिय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर-

$$\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$$

$$\Rightarrow \cos(90^\circ - 67^\circ) + \sin(90^\circ - 75^\circ)$$

$$\Rightarrow \cos 23^\circ + \sin 15^\circ$$

प्रश्नावली 8.4 (पृष्ठ संख्या 213-214)

प्रश्न 1 त्रिकोणमितीय अनुपातों sin A, sec A को cot A के पदों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर-

$$\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A} = \frac{1}{\sqrt{\cot^2 A+1}} \quad [\because \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{\cot^2\theta+1}]$$

$$\sec = \sqrt{\tan^2 A + 1} \quad [\because \sec\theta = \sqrt{\tan^2\theta+1}]$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\cot^2 A} + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cot^2 A}{\cot^2 A}} \quad [\because \sec\theta = \sqrt{\tan^2\theta+1}]$$

$$\tan A = \frac{1}{\cot A}$$

प्रश्न 2 ∠A के अन्य सभी त्रिकोणमितिय अनुपातों को sec A के पदों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर-

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{\sec^2 A}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sec^{2A-1}}{\sec^2 A}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sec^2 A-1}}{\sec A}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A}$$

$$\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$$

$$\text{cosec}A = \frac{1}{\sin A}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\sec^2 A}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\sec^2 A-1}{\sec^2 A}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{\sec^2 A-1}}{\sec^2 A}}$$

$$= \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$$

$$\cot = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$$

प्रश्न 3 मान लीजिए।

(i) $\dfrac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$

(ii) $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

उत्तर-

(i)

$$\frac{\sin^2 63^\circ+\sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ+\cos^2 73^\circ}$$

$$= \frac{\sin^2 63^\circ+\cos^2(90^\circ-27^\circ)}{\sin^2(90^\circ-17^\circ)+\cos^2 73^\circ}$$

$$= \frac{\sin^2 63^\circ+\cos^2 63^\circ}{\sin^2 73^\circ+\cos^2 73^\circ}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

(ii)

$$\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$$
$$= \sin 25^\circ \sin(90^\circ - 65^\circ) + \cos 25^\circ \cos(90^\circ - 65^\circ)$$
$$= \sin 25^\circ \sin 25^\circ + \cos 25^\circ \cos 25^\circ$$
$$= 1 \; [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

प्रश्न 4 सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए:

(i)

$9 \sec 2A - 9 \tan 2A$ बराबर है:

a. 1
b. 9
c. 8
d. 0

(ii)

$(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \mathrm{coses}\theta)$ बराबर है

a. 0
b. 1
c. 2
d. -1

(iii)

$(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ बराबर है:

a. $\sec A$

b. $\sin A$

c. $\mathrm{cosec} A$

d. $\cos A$

(iv)

$\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$ बराबर है:

a. $\sec^2 A$

b. -1

c. $\cot^2 A$

d. $\tan^2 A$

उत्तर-

(i)

b. 9

हल:

$$9\sec^2 A - 9\tan^2 A = 9(\sec^2 A - \tan^2 A)$$

$$= 9 \times 1 = 9$$

(ii)

c. 2

हल:

$$= \left(1 + \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{1}{\cos A}\right)\left(1 + \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{1}{\sin A}\right)$$

$$= \left(\frac{\cos + \sin A + 1}{\cos A}\right)\left(\frac{\sin A + \cos A - 1}{\sin A}\right)$$

$$= \left(\frac{(\sin A + \cos A)^2 - 1}{\sin A . \cos A} \right)$$ सूत्र: $\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

$$= \left(\frac{\sin^2 A + \cos^2 A + 2 \sin A \cos A - 1}{\sin A . \cos A} \right) \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$= \left(\frac{1 + 2 \sin A \cos A - 1}{\sin A . \cos A} \right) \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

$$= \frac{1 \sin A \cos A}{\sin A . \cos A} = 2 \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

(iii)

d. $\cos A$

हल: $(\sec A + \tan A)(1 - \sin a)$

$$= \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} \right)(1 - \sin A)$$

$$= \left(\frac{1 + \sin A}{\cos A} \right)(1 - \sin A)$$

$$= \frac{(1 + \sin A)(1 - \sin A)}{\cos A}$$

$$= \frac{(1^2 - \sin^2 A)}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos A \times \cos A}{\cos A} = \cos A$$

(iv)

d. $\tan^2 A$

हल: $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$

$= \dfrac{\sec^2 A}{\text{cosec}^2 A}$

$= \dfrac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}} = \dfrac{1}{\cos^2 A} \times \dfrac{\sin^2 A}{1}$

$= \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \tan^2 A$

प्रश्न 5 निम्नलिखित सर्वसमिका सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यूनकोण है:

(i) $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii) $\dfrac{\cos A}{1+\sin A} + \dfrac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

[**संकेत:** व्यंजक को $\sin\theta$ और $\cos\theta$ के पदों में लिखिए]

(iv) $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

[**संकेत:** वाम पक्ष और दाँया पक्ष को अलग-अलग सरल कीजिए।]

(v) सर्वसमिका $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ को लागू करके

$$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$$

(vi) $$\sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$$

(vii) $$\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$$

(viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $$(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$$

[**संकेत :** वाम पक्ष और दाँया पक्ष को अलग-अलग सरल कीजिए]

(x) $$\left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}\right) = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A}\right)^2 = \tan^2 A$$

उत्तर-

(i)

$$\text{LHS} = (\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin A} - \frac{\cos a}{\sin A}^2\right) = \frac{(1-\cos A)^2}{\sin^2 A}$$

$$= \frac{(1-\cos A)(1-\cos A)}{1-\cos^2 A}$$

$$= \frac{(1-\cos A)(1-\cos A)}{(1-\cos A(1+\cos A)} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

अतः LHS=RHS इतिसिद्धम

(ii)

$$\text{LHS} = \frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A+(1+\sin A)^2}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{\cos^2 A+1+\sin^2 A+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{\cos^2 A+\sin^2 A+1+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{1+1+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{2+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{2(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{2}{\cos A} = 2 \times \frac{1}{\cos A} = 2\sec A$$

अतः LHS=RHS इतिसिद्धम

(iii)

$$\text{LHS} = \frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$$

$\cot\theta$ सभी पदों को $\tan\theta$ में बदलने पर

$$= \frac{\tan\theta}{1-\frac{1}{\tan\theta}} + \frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta} = \frac{\tan\theta}{\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta}} + \frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}$$

$$= \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1} + \frac{1}{\tan\theta(1-\tan\theta)}$$

$$= \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta - 1} + \frac{1}{-\tan\theta(\tan\theta - 1)}$$

$$= \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta - 1} - \frac{1}{\tan\theta(\tan\theta - 1)}$$

$$= \frac{\tan^3\theta - 1}{\tan\theta(\tan\theta - 1)}$$

$$= \frac{(\tan\theta - 1)(\tan^2\theta + \tan\theta + 1)}{\tan\theta(\tan\theta - 1)} \quad [\because x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)]$$

$$= \frac{(\tan^2\theta + \tan\theta + 1)}{\tan\theta}$$

$$= \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta} + \frac{\tan\theta}{\tan\theta} + \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \tan\theta + 1 + \cot\theta$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + 1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \left[\because \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \text{ और } \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \sin\theta.\cos\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta.\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} \quad \left[\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\right]$$

$$= \frac{\sin\theta.\cos\theta + 1}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta.\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$= 1 + \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\sin\theta} \quad \left[\because \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta, \frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\theta\right]$$

$$= 1 + \sec\theta.\,\text{cosec}\theta$$

अतः LHS=RHS इतिसिद्धम

(iv)

$$\text{LHS} = \frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{1+\frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$$

$$= \frac{\frac{\cos A+1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$$

$$= \frac{\cos A+1}{\cos a} \times \frac{\cos A}{1} = \cos A + 1$$

$$\text{RHS} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A} = \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}$$

$$= \frac{(1-\cos A)(1+\cos A)}{1-\cos A}$$

$= 1 + \cos A$ या $\cos A + 1$

अतः LHS=RHS इतिसिद्धम

(v)

$$\text{LHS}=\frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1}$$

अंश और हर को $\sin A$ से भाग देने पर

$$= \frac{\frac{\cos A}{\sin A}-\frac{\sin A}{\sin A}+\frac{1}{\sin A}}{\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin A}-\frac{1}{\sin A}} = \frac{\cot A-1+\operatorname{cosec}A}{\cot A+1-\operatorname{cosec}A}$$

$$= \frac{\cot A+\operatorname{cosec}A-1}{\cot A+1-\operatorname{cosec}A}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec}A+\cot A)-(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)}{\cot A+1-\operatorname{cosec}A}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec}A+\cot A-(\operatorname{cosec}A+\cot)+(\operatorname{cosec}A-\cot A)}{\cot A+1-\operatorname{cosec}A}$$

$$= \frac{(\text{cosec}A+\cot A)[1-(\text{cosec}A-\cot A)]}{\cot A+1-\text{cosec}A}$$

$$= \frac{(\text{cosec}A+\cot A)[1-(\text{cosec}A-\cot A)]}{\cot A+1-\text{cosec}A}$$

$$= \frac{(\text{cosec}A+\cot A)(1-\text{cosec}A+\cot A)}{\cot A+1-\text{cosec}A}$$

$$= \frac{(\text{cosec}A+\cot A)(\cot A+1-\text{cosec}A)}{\cot A+1-\text{cosec}A}$$

$$= \text{cosec}A + \cot A$$

अतः $\text{LHS}=\text{RHS}$ इतिसिद्धम

(vi)

$$\text{LHS}=\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \frac{\sqrt{1+\sin A}}{\sqrt{1-\sin A}}$$

हर का परिमेइकरण करने पर

$$\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} \times \frac{\sqrt{1+\sin A}}{\sqrt{1+\sin A}}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+\sin A})^2}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{1+\sin A}{\sqrt{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos^2 A}$$

$$= \sec A + \tan A$$

बाया पक्ष = दांया पक्ष

(vii)

$$\text{LHS}=\frac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta-1)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{(1-2)(1-\cos^2\theta)}{(2\cos^2\theta-1)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{(1-2+2\cos^2\theta)}{(2\cos^2\theta-1)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{(-1+2\cos^2\theta)}{(2\cos^2\theta-1)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{(2\cos^2\theta-1)}{(2\cos^2\theta-1)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

(viii)

$$(\sin A+\text{cosec}A)^2+(\cos A+\sec A)^2$$

$$\sin^2 A+2\sin A.\,\text{cosec}A+\text{cosec}^2A+\cos^2 A+2.\cos A.\sec A+\sec^2 A$$

$$=\sin^2 A+2.\sin A.\,\frac{1}{\sin A}+\text{cosec}^2A+\cos^2 A+2.\cos A.\,\frac{1}{\cos A}+\sec^{2A}$$

$$=\sin^2 A+2+\text{cosec}^2A+\cos^2 A+2+\sec^2 A$$

$$=\sin^2 A+\cos^2 A+2+2+\text{cosec}^2A+\sec^2 A$$

$$1+4+(1+\tan^2 A)+(1+\cot^2 A)$$

$$=7\tan^2 A+\cot^2 A$$

अत: LHS=RHS इतिसिद्धम

(ix)

$$\text{LHS} = (\text{cosec}A - \sin A)(\sec A - \cos A)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A} - \cos A\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\sin A} \times \frac{\sin^2 A}{\cos A} = \sin A.\cos A$$

$$\text{RHS} = \frac{1}{\tan A+\cot A}$$

$$= \frac{1}{\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\cos A}} \quad \left[\because \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \text{ और } \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\sin A.\cos A}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sin A.\cos A}} \quad \left[\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\right]$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{\sin A.\cos A}{1} = \cos A.\sin A$$

अतः LHS=RHS इतिसिद्धम

(x)

$$\text{LHS} = \left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right)$$

$$= \left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\frac{1}{\tan^2 A}}\right)$$

$$= \left(\frac{1+\tan^2 A}{\frac{\tan^2 A+1}{\tan^2 A}}\right)$$

$$= \frac{1+\tan^2 A}{1} \times \frac{\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$= \tan^2 A$$

$$\text{LHS} = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{1-\frac{1}{\tan A}}\right)^2 = \left(\frac{1-\tan A}{\frac{\tan A-1}{\tan A}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{1} \times \frac{\tan A}{\tan A-1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{1} \times \frac{\tan A}{1(1-\tan A)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\tan A}{1} \times \frac{\tan A}{(1-\tan A)}\right)^2$$

$$= (-\tan A)^2$$

$$= \tan^2 A$$