वास्तविक संख्याएँ

वास्तविक संख्या

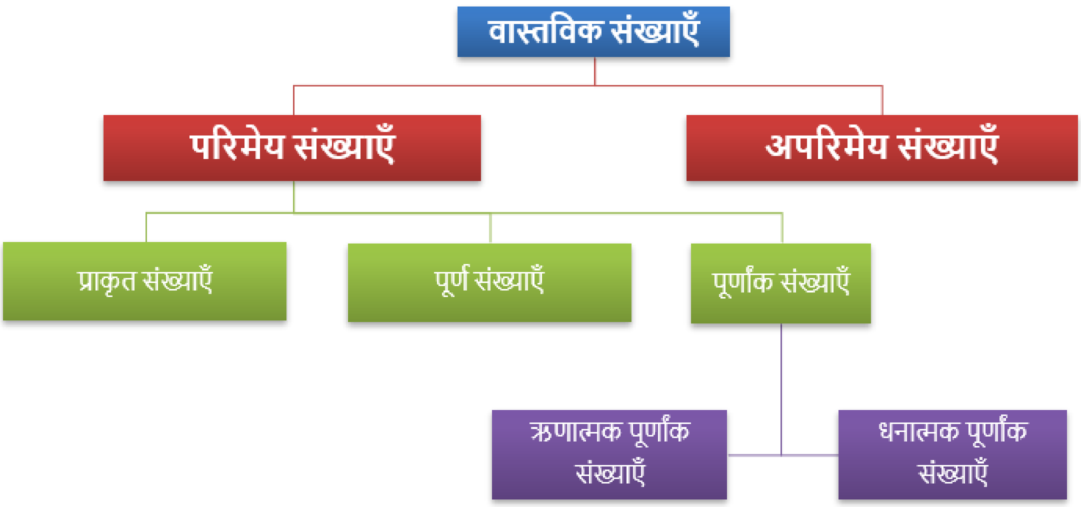
सभी परिमेय संख्या और अपरिमेय संख्याओं को सम्मलित रूप से लिखने पर वास्तविक संख्या प्राप्त होती हैं।

जैसे:- $\sqrt{3}, \frac{2}{5}, \sqrt{15}, \frac{4}{11}, \frac{7}{12}, \frac{15}{17}$

वास्तविक संख्या को R से प्रदर्शित किया जाता है।

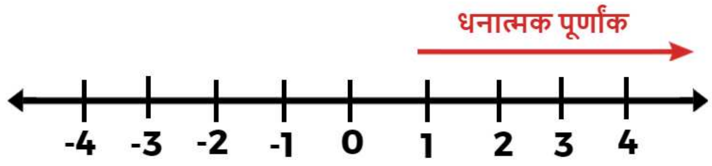
वास्तविक संख्या को अंग्रेजी में “Real Number” कहते हैं।

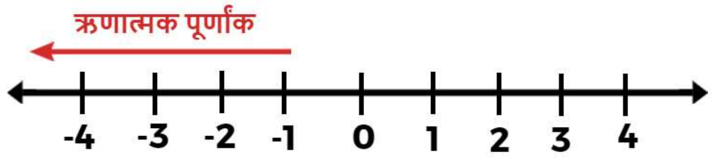
वास्तविक संख्याओं के प्रकार



वास्तविक संख्याएँ दो प्रकार की होती हैं।

- धनात्मक वास्तविक संख्या
- ऋणात्मक वास्तविक संख्या





1. **धनात्मक वास्तविक संख्याएँ**

धनात्मक वास्तविक संख्याएँ वह संख्या होती है जिसका मान धनात्मक होता हैं धनात्मक वास्तविक संख्याएँ कहलाती हैं। अर्थात धनात्मक वास्तविक संख्याओं के आगे धनात्मक चिन्ह लगाया जाता हैं।

जैसे:- $\frac{7}{12}, \frac{11}{13}, 124,\ 1228,\ 2456$

2. **ऋणात्मक वास्तविक संख्याएँ**

वह वास्तविक संख्याएँ जिनका मान ऋणात्मक होता हैं ऋणात्मक वास्तविक संख्याएँ कहलाती हैं। अर्थात ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के आगे ऋणात्मक चिन्ह लगाया जाता हैं।

जैसे: $\frac{-7}{12}, -\frac{17}{5},\ -128,\ -3864, \frac{23}{-19}$

वास्तविक संख्याओं के गुणधर्म

वास्तविक संख्याओं के चार गुणधर्म होते हैं।

1. संवृत गुणधर्म

जब दो वास्तविक संख्याओं को जोड़ा या गुणा किया जाता हैं तो हमें एक वास्तविक संख्याएँ प्राप्त होती हैं। वास्तविक संख्याओं के इस गुणधर्म को ही संवृत गुणधर्म कहाँ जाता हैं।

2. क्रमविनिमेय गुणधर्म

दो वास्तविक संख्याओं को किसी भी उलझे क्रम में जोड़ने या गुणा करने पर हमें एक समान वास्तविक संख्याएँ प्राप्त होगी। वास्तविक संख्याओं के इस गुणधर्म को कर्मविनिमेय गुणधर्म कहाँ जाता है।

3. साहचर्य गुणधर्म

तीन वास्तविक संख्याओं के ग्रुप को ही परिवर्तित कर जोड़ने या गुना करने पर उत्तर समान ही प्राप्त होता है। परिमेय संख्याओं के इस गुण को साहचर्य गुण कहाँ जाता है।

4. वितरण गुणधर्म

यदि वितरण गुण का प्रयोग गुणन पर योग का वितरण विधि या गुणन पर व्यवकलन (घटाव) का वितरण विधि का प्रयोग कर किसी प्रश्न का हल विभिन्न तरीको से किया जाये तो हल समान ही प्राप्त होगा। अतः इस गुण को वास्तविक संख्याओं का वितरण गुण कहा जाता है।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (कलन विधि)

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म पूर्णांकों की विभाज्यता से किसी रूप में संबंधित है। साधारण भाषा में कहा जाए, तो एल्गोरिथ्म के अनुसार, एक धनात्मक पूर्णांक a को किसी अन्य धनात्मक पूर्णांक b से इस प्रकार विभाजित किया जा सकता है कि शेषफल r प्राप्त हो, जो b से छोटा (कम) है। इसे सामान्य लंबी विभाजन प्रक्रिया के रूप में जानते हैं। यद्यपि यह परिणाम कहने और समझने में बहुत सरल है। परंतु पूर्णांकों की विभाज्यता के गुणों से संबंधित इसके अनेक अनुप्रयोग हैं। हम इनमें से कुछ पर प्रकाश डालेंगे तथा मुख्यतः इसका प्रयोग दो धनात्मक पूर्णांकों का महत्तम समापवर्तक परिकलित करने में करेंगे।

यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका

दो धनात्मक पूर्णांक a और b दिए रहने पर, ऐसी अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ q और r विद्यमान हैं कि $a = bq + r$, तथा r बड़ा हो या बराबर हो 0 के और b, 0 से बड़ा हो।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से महत्तम समापवर्तक

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म दो धनात्मक पूर्णांकों का महत्तम समापवर्तक परिकलित करने की एक तकनीक है। आपको याद होगा कि दो धनात्मक पूर्णांकों a और b का महत्तम समापवर्तक वह सबसे बड़ा पूर्णांक d है, जो a और b दोनों को (पूर्णतया) विभाजित करता है।

उदाहरण

मान लीजिए हमें पूर्णांकों 455 और 42 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना है। हम बड़े पूर्णांक 455 से प्रारंभ करते हैं। तब यूक्लिड प्रमेयिका से, हमें प्राप्त होता हैः

$455 = 42 \times 10 + 35$

अब भाजक 42 और शेषफल 35 लेकर, यूक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता हैः

$42 = 35 \times 1 + 7$

अब, भाजक 35 और शेषफल 7 लेकर, यूक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होता हैः

$35 = 7 \times 5 + 0$

ध्यान दीजिए कि यहाँ शेषफल शून्य आ गया है तथा हम आगे कुछ नहीं कर सकते। हम कहते हैं कि इस स्थिति वाला भाजक, अर्थात् 7 ही 455 और 42 का महत्तम समापवर्तक है।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म न केवल बड़ी संख्याओं के भ्ब्थ् परिकलित करने में उपयोगी है, अपितु यह इसलिए भी महत्वपूर्ण है कि यह उन एल्गोरिथ्मों में से एक है, जिनका कंप्यूटर में एक प्रोग्राम के रूप में सबसे पहले प्रयोग किया गया।

अंकगणित का आधारभूत प्रमेय

प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता है तथा यह गुणनखंडन अभाज्य गुणनखंडों के आने वाले क्रम के बिना अद्वितीय होता है।

उदाहरणार्थ, हम $2 \times 3 \times 5 \times 7$ को वही मानते हैं जो $3 \times 5 \times 7 \times 2$ को माना जाता है।

दो धनात्मक पूर्णांकों के HCF और LCM अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का प्रयोग करके किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। ऐसा करते समय, इस प्रमेय के नाम का उल्लेख नहीं किया गया था। इस विधि को अभाज्य गुणनखंडन विधि भी कहते हैं।

उदाहरण

संख्याओं 6 और 20 के अभाज्य गुणनखंडन विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल

यहाँ $6 = 2^1 \times 3^1$ और $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ है।

जैसा कि आप पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं, आप HCF (6, 20) = 2 तथा LCM (6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$, ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण

संख्याओं 6 और 20 के अभाज्य गुणनखंडन विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

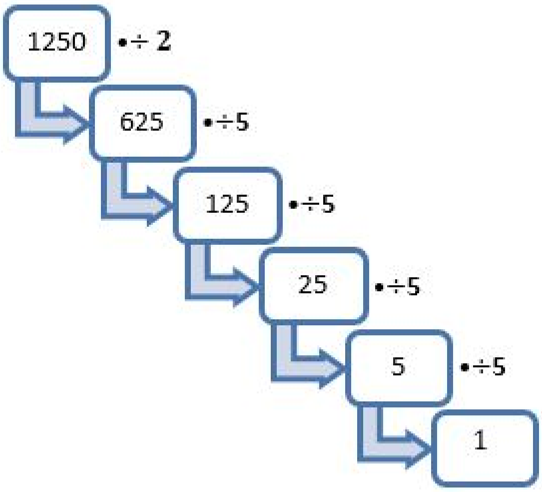
हल:

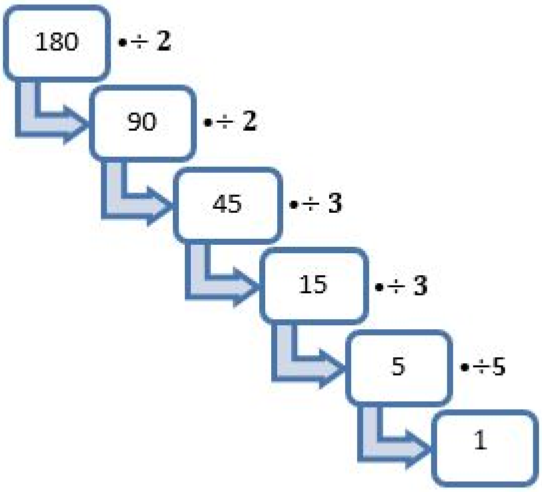
यहाँ $6 = 2^1 \times 3^1$ और $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ है।

जैसाकि आप पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं, आप HCF (6, 20) = 2 तथा LCM (6, 20)

$= 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$, ज्ञात कर सकते हैं।

अंकगणित का आधारभूत प्रमेय





दो धनात्मक पूर्णांकों के HCF और LCM अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का प्रयोग करके किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। ऐसा करते समय, इस प्रमेय के नाम का उल्लेख नहीं किया गया था। इस विधि को अभाज्य गुणनखंडन विधि भी कहते हैं।

उदाहरण

संख्याओं 6 और 20 के अभाज्य गुणनखंडन विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल:

यहाँ $6 = 2^1 \times 3^1$ और $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ है।

इस प्रकार, HCF (6, 20) = 2 तथा

LCM (6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$, ज्ञात कर सकते हैं।

$= 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ ज्ञात कर सकते हैं।

अपरिमेय संख्याओं का पुनर्भ्रमण

अपरिमेय संख्या

संख्या "s" अपरिमेय संख्या कहलाती है, यदि उसे p/q के रूप में नहीं लिखा जा सकता हो, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। अपरिमेय संख्याओं के कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं:

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, \ldots$ आदि।

मान लीजिए p एक अभाज्य संख्या है। यदि p, a^2 को विभाजित करती है, तो p, a को भी विभाजित करेगी, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।

उदाहरण

$\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उपपत्ति

हम इसके विपरीत यह मान लेते हैं कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, हम दो पूर्णांक r और s ऐसे ज्ञात कर सकते हैं कि $\sqrt{2} = r/s$ हो तथा $s \neq 0$ हो।

मान लीजिए r और s में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड है। तब, हम इस उभयनिष्ठ गुणनखंड से r और s को विभाजित करके $\sqrt{2} = a/b$ प्राप्त कर सकते हैं, जहाँ a और b सहअभाज्य हैं।

अतः $b\sqrt{2} = a$ हुआ।

दोनों पक्षों का वर्ग करने तथा पुनर्व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$2b^2 = a^2$

अतः 2, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए प्रमेय 1.3 के अनुसार 2, a को विभाजित करेगा।

अतः हम $a = 2c$ लिख सकते हैं जहां c कोई पूर्णांक है।

a का मान प्रतिस्थापित करने पर $2b^2 = 4c^2$, अर्थात $b^2 = 2c^2$ प्राप्त होगा।

इसका अर्थ है कि 2, b^2 को विभाजित करता है इसलिए प्रमेय 1.3 के अनुसार 2, b को विभाजित करेगा।

अतः a, b में एक उभयनिष्ठ गुनंखंड 2 है।

परिमेय संख्या

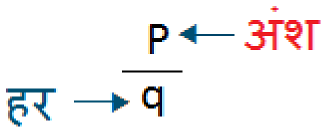
संख्या जो $\frac{p}{q}$ के फॉर्म में हों, या संख्या जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो, जहाँ p तथा q पूर्णांक हों तथा $q \neq 0$ हो, परिमेय संख्यां कहलाती हैं। परिमेय संख्या को अंग्रेजी में रेशनल नम्बर कहा जाता है।

उदाहरण

$\frac{2}{3}, \quad -\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{-4}$ आदि परिमेय संख्या के कुछ उदाहरण हैं।

अंश तथा हर

एक परिमेय संख्या जो कि $\frac{p}{q}$ के रूप में होता है, में p को अंश तथा q को हर कहते हैं।



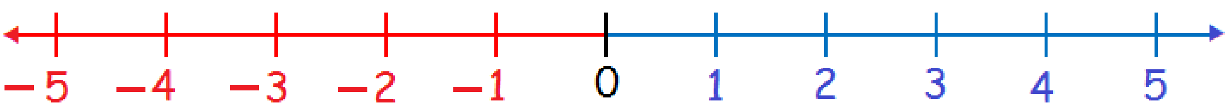
परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ में 2 अंश तथा 3 हर है।

उसी प्रकार $-\frac{5}{6}$, जो कि एक परिमेय संख्या है, में –5 अंश तथा 6 हर है।

उसी प्रकार - $\frac{12}{-13}$ जो कि एक परिमेय संख्या है में 12 अंश तथा –13 हर है।

परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण

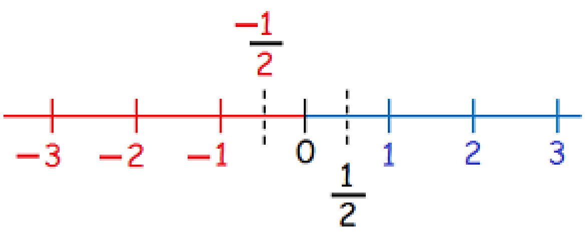
संख्या रेखा पर शून्य के दायीं ओर धनात्मक पूर्णांक तथा शून्य के बायीं ओर ऋणात्मक पूर्णांक होता है।



अत: ऋणात्मक परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर बायीं ओर तथा धनात्मक परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर दायीं ओर निरूपित किया जाता है।

उदाहरण

$\frac{1}{2}$ तथा $-\frac{1}{2}$ का संख्या रेखा पर निरूपण



परिमेय संख्याओं और उनके दशमलव प्रसारों का पुनर्भ्रमण

परिमेय संख्याओं के या तो सांत दशमलव प्रसार होते हैं या फिर असांत आवर्ती दशमलव प्रसार होते हैं। हम एक परिमेय संख्या, मान लीजिए p/q ($q \neq 0$), पर विचार करेंगे तथा यथार्थ रूप से इसकी खोज करेंगे कि p/q का दशमलव प्रसार कब सांत होगा और कब असांत आवर्ती होगा।

आइए निम्नलिखित परिमेय संख्याओं पर विचार रें:

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408

अब

(i) $0.\ 375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$

(ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$

(iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

इनको और सरल करने पर हमें प्राप्त होता है:

(i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3} = 3 \times \frac{5^3}{2^3} \times 5^3 = \frac{3}{2^3}$

(ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3} = 13 \times \frac{2^3}{2^3} \times 5^3 = 13/5^3$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4} = 5^3 \times \frac{7}{2^4} \times 5^4 = \frac{7}{2^4} \times 5$

(iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4} = 2^6 \times 7 \times \frac{521}{2^4} \times 5^4 = 2^2 \times 7 \times \frac{521}{5^4}$

प्राप्त सभी संख्याएं p/q के परिमेय संख्या के रूप में हैं।

NCERT SOLUTIONS
प्रश्नावली 1.1 (पृष्ठ संख्या 8)

प्रश्न 1 युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से HCF ज्ञात कीजिये:

(i) 135 और 225
(ii) 196 और 38220
(iii) 867 और 255

उत्तर-

(i) $a = 225, b = 135$ {सबसे बड़ी संख्या को a तथा सबसे छोटी संख्या को b मानते है}

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से

$a = bq + r$ (तब)

$225 = 135 \times 1 + 90$

$135 = 90 \times 1 + 45$

$90 = 45 \times 2 + 0$ {जब हमें $r = 0$ प्राप्त हो जाता है तो हम आगे हल करना बंद कर देते है}

$b = 45$ {फिर उसमे से b का मान HCF होता है;}

HCF = 45

(ii) $a = 38220, b = 196$ {सबसे बड़ी संख्या को a तथा सबसे छोटी संख्या को b मानते है}

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से

$a = bq + r$ (तब)

$38220 = 196 \times 195 + 0$ {जब हमें $r = 0$ प्राप्त हो जाता है तो हम आगे हल करना बंद कर देते है}

b = 196 {फिर उसमे से b का मान HCF होता है;}

HCF = 196

(iii) a = 867, b = 255 {सबसे बड़ी संख्या को a तथा सबसे छोटी संख्या को b मानते है}

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से

a = bq + r (तब)

38220 = 196 × 195 + 0 {जब हमें r = 0 प्राप्त हो जाता है तो हम आगे हल करना बंद कर देते है}

b = 196 {फिर उसमे से b का मान HCF होता है;}

HCF = 196

प्रश्न 2 दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक 6q + 1, या 6q + 3, या 6q + 5, के रूप का होता है जहाँ q कोई पूर्णांक है।

उत्तर- दर्शाना है: a = 6q + 1, 6q + 3 या 6q + 5

माना कि a कोई धनात्मक विषम पूर्णांक है;

जहाँ b = 6 होगा,

जब हम 6 से a को विभाजित करते है जो शेषफल क्रमश: 0, 1, 2, 3, 4 और 5 पाते है;

जहाँ $0 \leq r < b$

यहाँ a एक विषम संख्या है इसलिए शेषफल भी विषम संख्या प्राप्त होता है |

शेषफल होगा 1 या 3 या 5

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से हम पाते है;

a = 6q + 1, 6q + 3 या 6q + 5

प्रश्न 3 किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना (आर्मी) की टुकड़ी को 32 सदस्यों वाले एक आर्मी बैंड के पीछे मार्च करना है। दोनों समूहों को समान संख्या वाले स्तंभों में मार्च करना है। उन स्तंभों की अधिकतम संख्या क्या है, जिसमें वे मार्च कर सकते है?

उत्तर- स्तंभों की अधिकतम संख्या = HCF (616, 32)

$a = 616$, $b = 32$ {सबसे बड़ी संख्या को a तथा सबसे छोटी संख्या को b मानते है}

युक्लिड विभाजन अल्गोरिथम के प्रयोग से

$a = bq + r$ (तब)

$616 = 32 \times 19 + 8$ {जब हमें $r = 0$ प्राप्त हो जाता है तो हम आगे हल करना बंद कर देते है}

$32 = 8 \times 4 + 0$

$b = 8$ {b का मान HCF होता है}

HCF = 8

इसलिए स्तंभों की अधिकतम संख्या = 8

प्रश्न 4 यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए 3m या 3m + 1 के रूप का होता है।

उत्तर- दर्शाना है: $a^2 = 3m$ और $3m + 1$

$a = bq + r$

माना कि a कोई धनात्मक पूर्णांक है जहाँ $b = 3$ और $r = 0, 1, 2$ क्योंकि $0 \leq r < 3$

तब $a = 3q + r$ कुछ पूर्णांक के लिए $q \geq 0$

इसलिए, $a = 3q + 0$ और $3q + 1$ और $3q + 2$

अब हम पाते है;

$\Rightarrow a^2 = (3q + 0)^2$ और $(3q + 1)^2$ और $(3q +2)^2$

$\Rightarrow a^2 = 9q^2$ और $9q^2 + 6q + 1$ और $9q^2 + 12q + 4$

$\Rightarrow a^2 = 9q^2$ और $9q^2 + 6q + 1$ और $9q^2 + 12q + 3 + 1$

$\Rightarrow a^2 = 3(3q^2)$ और $3(3q^2 + 2q) + 1$ और $3(3q^2 + 4q + 1) + 1$

यदि $m = (3q^2)$ और $(3q^2 + 2q)$ और $(3q^2 + 4q + 1)$ हो तो

हम पाते है कि;

$a^2 = 3m$ और $3m + 1$ और $3m + 1$

प्रश्न 5 यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन 9m, 9m + 1 या 9m + 8 के रूप का होता है।

उत्तर- माना, a कोई धनात्मक पूर्णांक है;

युकिल्ड विभाजन प्रमेयिका के प्रयोग से;

$a = bq + r$ जहाँ; $0 \leq r < b$

$b = 9$ रखने पर

$a = 9q + r$ जहाँ; $0 \leq r < 9$

जब $r = 0$ हो;

$a = 9q + 0 = 9q$

$a^3 = (9q)^3 = 9(81q^3)$ या $9m$ जहाँ $m = 81q^3$

जब $r = 1$ हो

$a = 9q + 1$

$a^3 = (9q + 1)^3 = 9(81q^3 + 27q^2 + 3q) + 1$

$= 9m + 1$ जहाँ $m = 81q^3 + 27q^2 + 3q$

जब $r = 2$ हो तो

$a = 9q + 2$

$a^3 = (9q + 2)^3 = 9(81q^3 + 54q^2 + 12q) + 8$

$= 9m + 2$ जहाँ $m = 81q^3 + 54q^2 + 12q$

अत: किसी धनात्मक पूर्णांक का घन 9m, 9m + 1 या 9m + 8 के रूप का होता है।

प्रश्नावली 1.2 (पृष्ठ संख्या 13)

प्रश्न 1 निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंड के रूप में व्यक्त कीजिये:

(i) 140
(ii) 156
(iii) 3825
(iv) 5005
(v) 7429

उत्तर-

(i)

7	140
5	20
2	4
2	2
	1

का मुख्य कारक $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$

140 का अभाज्य गुणनखंड

$= 2^2 \times 5 \times 7$

(ii)

13	156
3	12
2	4
2	2
	1

का मुख्य कारक $156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$

156 का अभाज्य गुणनखंड

$= 2^2 \times 3 \times 13$

(iii)

17	3825
5	225
5	45
3	9
3	3
	1

का मुख्य कारक $3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$

3825 का अभाज्य गुणनखंड

$= 3^2 \times 5^2 \times 17$

(iv)

13	5005
11	385
7	35
5	5
	1

का मुख्य कारक 5005 = 5 × 7 × 11 × 13

5005 का अभाज्य गुणनखंड

= 5 × 7 × 11 × 13

(v)

23	7429
19	323
17	17
	1

का मुख्य कारक 7429 = 17 × 19 × 23

7429 का अभाज्य गुणनखंड

= 17 × 19 × 23

प्रश्न 2 पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों के LCM और HCF ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = LCM × HCF है:

(i) 26 और 91

(ii) 510 और 92

(iii) 336 और 54

उत्तर-

(i) 26 = 2 × 13

91 = 7 × 13

सार्व गुणनखंड = 13

$\therefore$ HCF = 13

LCM = $2 \times 7 \times 13 = 182$

अब, जाँच,

दो संख्याओं का गुणनफल = LCM × HCF

$N_1 \times N_2$ = LCM × HCF

$26 \times 91 = 13 \times 182$

$2366 = 2366$

इति सिद्धम्

(ii) $510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$

$92 = 2 \times 2 \times 23$

सार्व गुणनखंड = 2

$\therefore$ HCF = 2

LCM = $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23 = 23460$

अब, जाँच,

दो संख्याओं का गुणनखंड = LCM × HCF

$N_1 \times N_2$ = LCM × HCF

$510 \times 92 = 2 \times 23460$

$46920 = 46920$

इति सिद्धम्

(iii) $336 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$

$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$

सार्व गुणनखंड $= 2 \times 3$

$\therefore$ HCF = 6

LCM $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 = 3024$

जाँच,

दो संख्याओं का गुणनफल = LCM × HCF

$N_1 \times N_2$ = LCM × HCF

$336 \times 54 = 6 \times 3024$

$18144 = 18144$

इति सिद्धम्

प्रश्न 3 अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णांकों के LCM और HCF ज्ञात कीजिए:

(i) 12, 15 और 21

(ii) 17, 23 और 29

(iii) 8, 9 और 25

उत्तर-

(i) $12 = 2 \times 2 \times 3$

$15 = 5 \times 3$

$21 = 7 \times 3$

सार्व गुणनखंड = 3

HCF = 3

$LCM = 3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 420$

(ii) $17 = 1 \times 17$

$23 = 1 \times 23$

$29 = 1 \times 29$

$HCF = 1$

$LCM = 17 \times 23 \times 29 = 11339$

(iii) $8 = 2 \times 2 \times 2$

$9 = 3 \times 3$

$25 = 5 \times 5$

यहाँ 1 को छोड़कर अन्य कोई सार्व गुणनखंड नहीं है:

$\therefore HCF = 1$

$LCM = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

$= 8 \times 9 \times 25$

$= 1800$

प्रश्न 4 HCF (306, 657) = 9, दिया है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

HCF (306, 657) = 9

$LCM \times HCF = N_1 \times N_2$

$$\mathrm{LCM} = \frac{N_1 \times N_2}{\mathrm{HCF}}$$

$$\mathrm{LCM} = \frac{306 \times 657}{9}$$

$$\mathrm{LCM} = 22338$$

प्रश्न 5 जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है।

उत्तर- 6^n का अभाज्य गुणनखंड = $(2 \times 3)^n$

जबकि, कोई प्राकृत संख्या जो शून्य पर समाप्त होती है उसके अभाज्य गुणनखंड $(2 \times 5)^n$ के रूप का होता है।

अत:, 6^n शून्य पर समाप्त नहीं होगी।

प्रश्न 6 व्याख्या कीजिए $7 \times 11 \times 13 + 13$ और $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ भाज्य संख्या क्यों है?

उत्तर- माना $A = 7 \times 11 \times 13 + 13$

$= 13(7 \times 11 + 1)$

$= 13(77 + 1)$

$= 13 \times 78$

अत: यह एक भाज्य संख्या है क्योंकि इसके अभाज्य गुणनखंड में 1 को छोड़कर अन्य दो गुणनखंड हैं।

इसी प्रकार,

माना $B = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$

$= 5(7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1)$

$= 5 \times (1008 + 1)$

= 5 × 1009

अत: यह भी एक भाज्य संख्या है क्योंकि इसके भी अभाज्य गुणनखंड में 1 को छोड़कर अन्य दो गुणनखंड हैं।

प्रश्न 7 किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारंभ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुनः प्रारंभिक स्थान पर मिलेंगे?

उत्तर- एक चक्कर में सोनिया 18 मिनट लेती हैं।

रवि एक चक्कर में 12 लगाता है।

वे दोनों एक ही स्थान पर LCM(18, 12) मिनट के बाद मिलेंगे।

अत:

18 = 2 × 3 × 3

12 = 2 × 2 × 3

HCF = 2 × 3 = 6

$$\text{LCM} = \frac{18 \times 12}{6}$$

= 36 मिनट

प्रश्नावली 1.3 (पृष्ठ संख्या 17)

प्रश्न 1 सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर-

इसके विपरीत मान लीजिए कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

हम किसी भी परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और $q \neq 0$ है

इसलिए,

$$\frac{p}{q} = \sqrt{5}$$

यदि p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखंड से विभाजित करके $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ प्राप्त कर सकते है जहाँ a और b सहअभाज्य है।

अतः $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$

या $\sqrt{5}b = a$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$$5b^2 = a^2$$

या $b^2 = \frac{a^2}{5}$

यहाँ $5 a^2$ को विभाजित करता है अत: 5a को भी विभाजित करेगा ...(i)

[प्रमेय 1.3 द्वारा]

अत: a = 5c माना [क्योंकि a^5 द्वारा विभाजित होता है अर्थात a का 5 कोई गुनाखंड है]

$5b^2 = a^2$ में a = 5c रखने पर

$\Rightarrow 5b^2 = (5c)^2$

$\Rightarrow 5b^2 = 25c^2$

$\Rightarrow b^2 = 5c^2$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{b^2}{5}$$

यहाँ 5 b^2 को विभाजित करता है अत: 5 b को भी विभाजित करेगा ...(ii)

[प्रमेय 1.3 द्वारा]

समीकरण (i) तथा (ii) से हम पाते है कि 5 a तथा b दोनों को विभाजित करता है जिसमें 5 एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है।

इससे हमारी इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a तथा b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

यह विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि

अत: $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 2 सिद्ध कीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर-

इसके विपरीत मान लीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

हम किसी भी परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और $q \neq 0$ है।

इसलिए,

$$\frac{p}{q} = 3+2\sqrt{5}$$

और p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखंड से विभाजित कर एक सह-अभाज्य संख्या a तथा b प्राप्त कर सकते हैं।

अतः $3+2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$

या $2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3$

या $2\sqrt{5} = \frac{a-3b}{b}$

या $\sqrt{5} = \frac{a-3b}{2b}$

चूँकि a तथा b पूर्णांक है और 2 तथा 3 भी पूर्णांक है।

इसलिए $\frac{a-3b}{2b}$ एक परिमेय संख्या है जबकि बायां पक्ष $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इससे एक विरोधाभासी परिणाम प्राप्त होता है कि $\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है।

ऐसा विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अत: $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 3 सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय है:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $7\sqrt{5}$

(iii) $6+\sqrt{2}$

उत्तर-

(i)

इसके विपरीत मान लजिए कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है।

हम किसी भी परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और $q \neq 0$ है।

इसलिए,

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखंड से विभाजित करके $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$ प्राप्त कर सकते है जहॉ a और b सहअभाज्य है।

अतः $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$

या $b = a\sqrt{2}$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$$b^2 = 2a^2$$

या $a^2 = \frac{b^2}{2}$

यहाँ 2 b^2 को विभाजित करता है अत: 2, b को भी विभाजित करेगा ...(i)

[प्रमेय 1.3 द्वारा]

अत: b = 2c माना [क्योंकि a 5 द्वारा विभाजित होता है]

$b^2 = 2a^2$ में $b = 2c$ रखने पर,

$$\Rightarrow (2c^2) = 2a^2$$

$$\Rightarrow 4c^2 = 2a^2$$

$$\Rightarrow 2c^2 = a^2$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{a^2}{2}$$

यहाँ $2a^2$ को विभाजित करता है अत: $2a$ को भी विभाजित करेगा। ...(ii)

[प्रमेय 1.3 द्वारा]

समीकरण (i) तथा (ii) से हम पाते है कि 2a तथा b दोनों को विभाजित करता है जिसमें 2 एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है।

इससे हमारी इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a तथा b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है, क्योंकि हमने a तथा b को सह-अभाज्य प्राप्त किया था।

यह विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि

अतः $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(ii)

इसके विपरीत मान लीजिए कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

हम किसी भी परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और $q \neq 0$ है।

इसलिए,

$$\frac{p}{q} = 7\sqrt{5}$$

p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखण्ड से विभाजित करके $7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ प्राप्त कर सकते है जहा a और b सह-अभाज्य है।

अतः $7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$

या $7\sqrt{5}b = a$

या $\frac{a}{7b} = \sqrt{5}$

चूँकि a तथा b पूर्णांक है और 7 भी पूर्णांक है।

इसलिए $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है जबकि दाया पक्ष $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इससे एक विरोधाभास परिणाम प्राप्त होता है कि $\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है।

ऐसा विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(iii)

इसके विपरीत मान लीजिए कि $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

हम किसी भी परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है जहाँ p तथा q दो पूर्णांक है और $q \neq 0$ है।

इसलिए,

$\frac{p}{q}=6+\sqrt{2}$

p तथा q को उभयनिष्ठ गुणनखण्ड से विभाजित कर एक सह-अभाज्य संख्या a और b प्राप्त कर सकते है।

अतः $6+\sqrt{2}=\frac{a}{b}$

या $\sqrt{2}=\frac{a}{b}-6$

या $\sqrt{2}=\frac{a-6b}{b}$

चूँकि a तथा b पूर्णांक है और 6 भी पूर्णांक है।

इसलिए $\frac{a-6b}{b}$ एक परिमेय संख्या है जबकि दाया पक्ष $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

इससे एक विरोधाभास परिणाम प्राप्त होता है कि $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या है।

ऐसा विरोधाभासी परिणाम हमारी गलत कल्पना से प्राप्त हुआ है कि $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः $6+\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्नावली 1.4 (पृष्ठ संख्या 17)

प्रश्न 1 बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया किए बताइए कि निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत हैं या असांत आवर्ती हैं:

(i) $\frac{13}{3125}$

(ii) $\frac{17}{8}$

(iii) $\frac{64}{455}$

(iv) $\frac{15}{1600}$

(v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$

(vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$

(viii) $\frac{6}{15}$

(ix) $\frac{35}{50}$

(x) $\frac{77}{210}$

उत्तर-

(i)

$$= \frac{13}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}$$

$$= \frac{13}{5^5}$$

हर का अभाज्य गुणनखंड 5^5 है और इसे $2^m \times 5^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अत: यह एक सांत दशमलव प्रसार है।

(ii)

$$= \frac{17}{2 \times 2 \times 2}$$

$$= \frac{17}{2^3}$$

हर का अभाज्य गुणनखंड 2^3 है और इसे $2^m \times 5^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अत: यह एक सांत दशमलव प्रसार है।

(iii)

$$= \frac{64}{5\times7\times13}$$

हर का अभाज्य गुणनखंड 2^3 है और इसे $2^m \times 5^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अत: यह एक सांत दशमलव प्रसार है।

(iv)

$$= \frac{15}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times5\times5}$$

$$= \frac{15}{2^6\times5^2}$$

हर का अभाज्य गुणनखंड 2^3 है और इसे $2^m \times 5^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अत: यह एक सांत दशमलव प्रसार है।

(v)

7	343
7	49
	1

का मुख्य करक है:

343 = 7 × 7 × 7

343 का अभाज्य गुणनखंड 7 × 7 × 7 है।

$$\Rightarrow \frac{29}{7^3}$$

7^3 को $2^m \times 5^n$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है इसलिए $\frac{29}{343}$ यह एक सांत दशमलव प्रसार नहीं है।

(vi) हर $2^3\ 5^2$ का अभाज्य गणनखंड को $2^n \times 5^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है इसलिए $\frac{23}{2^3 5^2}$ एक शांत दशमलव प्रसार है।

(vii) $2^2\ 5^7\ 7^5$ को $2^n \times 5^n$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है इसलिए $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ एक शांत दशमलव प्रसार नहीं है।

(viii) हर 5 को $2^n \times 5^n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है इसलिए $\frac{6}{15}$ या $\frac{2}{5}$ एक शांत दशमलव प्रसार है।

(ix)

5	50
5	10
2	2
	1

50 का अभाज्य गुणनखण्ड = $5 \times 5 \times 2$ है।

अतः $\frac{35}{50} = \frac{5\times7}{5\times5\times2} = \frac{7}{5\times2}$

हर 5×2 पहले ही $2^n \times 5^n$ के रूप में है अतः यह शांत दशमलव प्रसार है।

(x) $\frac{11}{2\times5\times3}$ में हर $2 \times 5 \times 3$ को $2^n \times 5^n$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है इसलिए $\frac{77}{210}$ एक शांत दशमलव प्रसार नहीं है।

प्रश्न 2 ऊपर दिए गए प्रश्न में उन परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसारों को लिखिए जो शांत हैं:

(i) $\frac{13}{3125}$

(ii) $\frac{17}{8}$

(iii) $\frac{64}{455}$

(iv) $\frac{15}{1600}$

(v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$

(vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$

(viii) $\frac{6}{15}$

(ix) $\frac{35}{50}$

(x) $\frac{77}{210}$

उत्तर-

(i)

$$\frac{13}{3125} = \frac{13}{5\times5\times5\times5\times5} = \frac{13}{5^5} \times \frac{2^5}{2^5}$$

$$= \frac{13\times32}{(5\times2)^5} = \frac{416}{10^5} = 0.00416$$

(ii)

$$\frac{17}{8} = \frac{17}{2\times2\times2} = \frac{17}{2^3} \times \frac{5^3}{5^3}$$

$$= \frac{17\times125}{(2\times5)^3} = \frac{2125}{10^3} = 2.125$$

(iii) इसका दशमलव प्रसार सशांत आवर्ती होगा।

(iv)

$$\frac{15}{1600} = \frac{3\times5}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times5\times5} = \frac{3}{2^6\times5} \times \frac{5^5}{5^5}$$

$$= \frac{3\times3125}{(2\times5)^6} = \frac{9375}{10^6} = 0.009375$$

(v) इसका दशमलव प्रसार अशांत आवर्ती होगा।

(vi)

$$\frac{23}{2^3 5^2} = \frac{23}{2^3\times5^2} \times \frac{5}{5}$$

$$= \frac{23\times5}{(2\times5)^3} = \frac{115}{10^3} = 0.115$$

(vii) इसका दशमलव प्रसार अशांत आवर्ती होगा।

(viii)

$$\frac{6}{15} = \frac{2\times3}{3\times5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{2}$$

$$= \frac{2\times2}{2\times5} = \frac{4}{10} = 0.4$$

(ix)

$$\frac{35}{50} = \frac{5\times7}{2\times5\times5} = \frac{7}{2\times5} = \frac{7}{10} = 0.7$$

(x) इसका दशमलव प्रसार आवर्ती होगी।

प्रश्न 3 कुछ वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार निचे दर्शाए गए है। प्रत्येक स्तिथि के लिए निर्धारित कीजिए कि यह संख्या परिमेय है या नहीं। यदि यह परिमेय संख्या है और $\frac{p}{q}$ के रूप की है तो q के अभाज्य गुणनखंड के बारे क्या कह सकते है?

(i) 43.123456789

(ii) 0.120120012000120000....

(iii) $43.\overline{123456789}$

उत्तर-

(i) क्योंकि इसका दशमलव प्रसार शांत है, इसलिए, यह परिमेय संख्या है और $\frac{p}{q}$ के रूप की है। q का अभाज्य गुणनखंड $2^m 5^n$ के रूप में है, जहाँ m और n ऋणेतर पूर्णांक है।

(ii) क्योंकि इसका दशमलव प्रसार असांत तथा अनावर्ती है, इसलिए, यह अपरिमेय संख्या है।

(iii) क्योंकि इसका दशमलव प्रसार अशांत तथा आवर्ती है इसलिए, यह परिमेय संख्या है और $\frac{p}{q}$ के रूप की है। q का अभाज्य गुणनखंड $2^m 5^n$ के अतिरिक्त कोई और भी अभाज्य संख्या है।