दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

दो चर वाले रैखिक समीकरण

युग्म समीकरण, जिसको $ax + by + c = 0$ के रूप में रखा जा सकता है, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और a और b दोनों शून्य नहीं हैं, दो चरों x और y में एक रैखिक समीकरण कहलाता है। (प्रतिबंध जैसे a और b दोनों शून्य नहीं हैं, हम प्रायः $a^2 + b^2 \neq 0$ से प्रदर्शित करते हैं।)

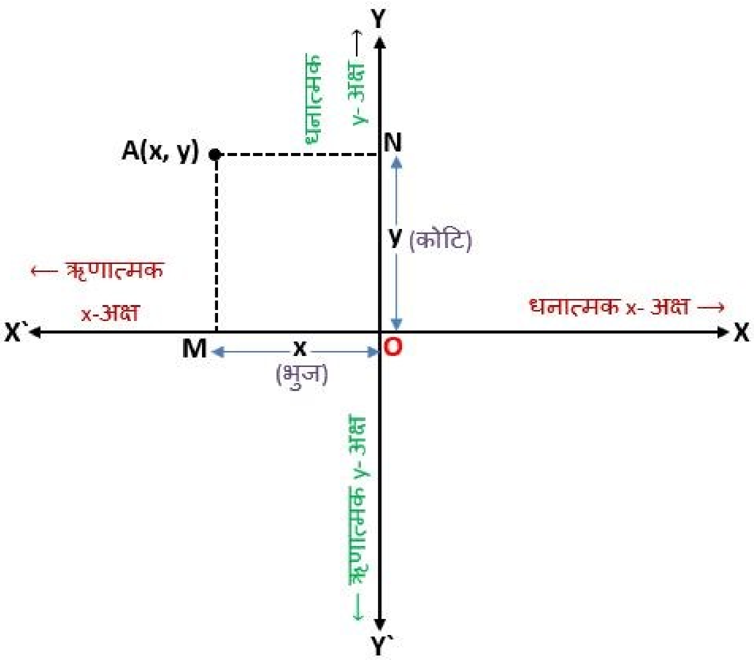
दो चरों वाले रैखिक समीकरण $ax + by + c = 0$ का प्रत्येक हल (x, y) इस समीकरण को निरूपित करने वाली रेखा के एक बिदु के संगत होता है और विलोमतः भी ऐसा होता है।

उदाहरण

समीकरण $2x + 3y = 5$ के बाएं पक्ष में $x = 1$ और $y = 1$ रखने पर

बायाँ पक्ष $2(1) + 3(1) = 2 + 3 = 5$, जो कि दायें पक्ष के बराबर है। अतः $x = 1$ और $y = 1$ समीकरण $2x + 3y = 5$ का एक हल है।

ज्यामितीय दृष्टिकोण



ज्यामितीय दृष्टि से इसका अर्थ है कि बिदु (1, 1) समीकरण $2x + 3y = 5$ द्वारा निरूपित रेखा पर स्थित है। इसलिए, समीकरण का प्रत्येक हल उसको निरूपित करने वाली रेखा पर स्थित एक बिदु होता है।

रैखिक समीकरण युग्म

ये दो रैखिक समीकरण उन्हीं दो चरों x और y में हैं। इस प्रकार के समीकरणों को दो चरों में रैखिक समीकरणों का एक युग्म (या रैखिक समीकरण युग्म) कहते हैं।

उदाहरण

- $x - 2y = 0$ (1)
- $3x + 4y = 20$ (2)

हम इन समीकरणों के माध्यम से x और y के मान ज्ञात कर सकते हैं।

ज्यामितीय दृष्टि से रैखिक समीकरण युग्म

एक तल में यदि दो रेखाएँ दी हों, तो निम्न में से केवल एक ही संभावना हो सकती है:

(i) दोनों रेखाएँ एक बिदु पर प्रतिच्छेद करती हैं।

(ii) दोनों रेखाएँ प्रतिच्छेद नहीं करती हैं, अर्थात् वे समांतर हैं।

(iii) दोनों रेखाएँ संपाती हैं।

स्मरणीय तथ्य

1. दो चरों में दो रैखिक समीकरण एक रैखिक समीकरणों का युग्म कहलाता है। रैखिक समीकरण युग्म का सबसे व्यापक रूप है:

- $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$
- $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

जहाँ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ऐसी वास्विक संख्याएं हैं कि $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$

2. एक रैखिक समीकरण युग्म को ग्राफीय रूप में निरूपित किया जा सकता है और हल किया जा सकता है।

   (i) ग्राफीय विधि द्वारा

   (ii) बीजगणितीय विधि द्वारा

रैखिक समीकरण युग्म के प्रकार (Types Pair of Linear Equations)

(i) रैखिक समीकरणों का संगत युग्म

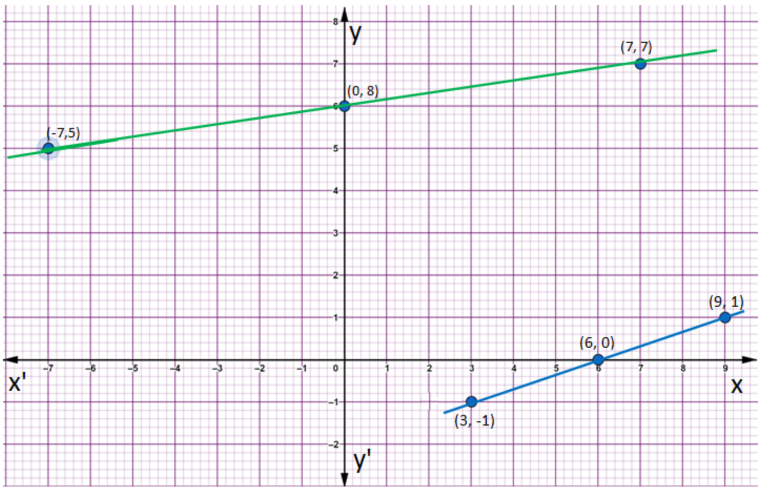
(ii) रैखिक समीकरणों का असंगत युग्म

(iii) रैखिक समीकरणों का आश्रित युग्म

Sl	अनुपातों की तुलना	ग्राफीय निरूपण	बीजगणितीय निरूपण
1	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेद करती हुई रेखाएँ	केवल एक हल (अद्वितीय (Unique))
2	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अपरिमित रूप से अनेक हल
3	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समांतर रेखाएँ	कोई हल नहीं

रैखिक समीकरण युग्म का ग्राफीय विधि से हल

एक रैखिक समीकरण युग्म को कैसे ग्राफीय रूप में दो रेखाओं में व्यक्त किया जाता है। आपने यह भी देखा है कि ये रेखाएँ प्रतिच्छेद कर सकती हैं या समांतर हो सकती हैं या संपाती हो सकती हैं। इस स्थिति को निरूपित करने वाले समीकरण ज्यामितीय रूप से बिंदु (4, 2) पर प्रतिच्छेद करने वाली दो रेखाओं को निरूपित करते हैं। इसलिए, बिंदु (4, 2) दोनों समीकरणों $x - 2y = 0$ और $3x + 4y = 20$ को निरूपित करने वाली रेखाओं पर स्थित है और केवल यही उभयनिष्ठ बिंदु है।



रैखिक समीकरण युग्म का बीजगणितीय विधि से सत्यापन

हम बीजगणितीय रूप से यह सत्यापित करेंगे कि $x = 4, y = 2$ दिए हुए समीकरण युग्म का एक हल है। प्रत्येक समीकरण में x और y के मान रखने पर,

हम प्राप्त करते हैं $4 - 2 \times 2 = 0$ और $3 \times 4 + 4 \times 2 = 20$ है।

अतः, हमने सत्यापित किया है कि $x = 4, y = 2$ दोनों समीकरणों का एक हल है।

चूँकि (4, 2) दोनों रेखाओं का केवल एक उभयनिष्ठ बिंदु है, इसलिए दो चरों में रैखिक समीकरण युग्म का एक और केवल एक हल है।

रैखिक समीकरणों का असंगत युग्म

एक रैखिक समीकरण युग्म, जिसका कोई हल नहीं होता, रैखिक समीकरणों का असंगत युग्म कहलाता है।

रैखिक समीकरणों का संगत युग्म

एक रैखिक समीकरण युग्म, जिसका हल होता है, रैखिक समीकरणों का संगत युग्म कहलाता है।

दो चरों के रैखिक समीकरणों का आश्रित युग्म

तुल्य रैखिक समीकरणों के एक युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं। इस युग्म को दो चरों के रैखिक समीकरणों का आश्रित युग्म कहते हैं। ध्यान दीजिए कि रैखिक समीकरणों का आश्रित युग्म सदैव संगत होता है।

अब हम दो चरों में एक रैखिक समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाओं के व्यवहार को तथा हल के अस्तित्व होने को निम्न प्रकार से एक सारांश के रूप में व्यक्त कर सकते हैं:

(i) रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं। इस स्थिति में, समीकरण युग्म का अद्वितीय हल होता है (अविरोधी समीकरण युग्म)।

(ii) रेखाएँ समांतर हो सकती हैं। इस स्थिति में, समीकरणों का कोई हल नहीं होता है (असंगत समीकरण युग्म)।

(iii) रेखाएँ संपाती हो सकती हैं। इस स्थिति में, समीकरणों के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं [आश्रित (संगत) समीकरण युग्म]

रैखिक समीकरण युग्म के ज्यामितीय रूप

उदाहरण के लिए नीचे दिए गए रैखिक समीकरण युग्म के गुणांको के सम्बंध से युग्म रेखाओं के निम्नलिखित ज्यामितीय रूप का निरूपण निम्न प्रकार से है:

- $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ……… (1)
- $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ ……… (2)

Sl	अनुपातों की तुलना	ग्राफीय निरूपण	बीजगणितीय निरूपण
1	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेद करती हुई रेखाएँ	केवल एक हल (अद्वितीय (Unique))
2	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अपरिमित रूप से अनेक हल
3	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समांतर रेखाएँ	कोई हल नहीं

एक रैखिक समीकरण युग्म को हल करने की बीजगणितीय विधि

एक रैखिक समीकरण युग्म को हल करने के लिए कई बीजगणितीय (बीजीय) विधियाँ हैं। जो निम्न प्रकार से हैं:

प्रतिस्थापन विधि

3X - y = 3 _ _ _ _ _ समी० (i.)

9X - 3y = 9 _ _ _ _ _ समी० (ii.)

प्रतिस्थापन विधि को कुछ उदाहरण लेकर समझाएँगे।

उदाहरण

प्रतिस्थापना विधि द्वारा निम्न रैखिक समीकरण युग्म को हल कीजिए:

- 7x – 15y = 2 (1)
- x + 2y = 3 (2)

हल:

चरण 1: हम किसी एक समीकरण को लेते हैं और किसी एक चर को दूसरे के पदों में लिखते हैं। आइए समीकरण (2) को लेते हैं:

x + 2y = 3

इस समीकरण को x = 3 – 2y के रूप में लिख सकते हैं।

x = 3 – 2y (3)

चरण 1: अब x का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करते हैं। इससे हम पाते हैं:

7(3 – 2y) – 15y = 2

अर्थात 201 – 14y – 15y = 2

अर्थात् – 29y = –19

इसलिए $y = \frac{19}{29}$

चरण 1: अब y का मान समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करते हैं। इससे हम पाते हैं**:**

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{87 - 38}{29} = \frac{49}{29}$$

अतः x = 49/29, y = 19/29 दिए गए रैखिक समीकरण युग्म का प्रतिस्थापना विधि द्वारा बीजगणितीय हल है।

उत्तर के सत्यापन्न के लिए x और y के मान को अलग-अलग समीकरण 1 और 2 में रखकर जांच कर सकते हैं।

प्रतिस्थापन विधि क्या है?

हमने एक चर का मान दूसरे चर के पद में व्यक्त करके, रैखिक समीकरण युग्म को हल करने के लिए प्रतिस्थापित किया है। इसलिए इस विधि को प्रतिस्थापन विधि कहते हैं।

विलोपन विधि

रैखिक युग्म समीकरण को बीजगणितीय विधि से हल करने के लिए प्रतिस्थापन विधि के अतिरिक्त अन्य विधि विलोपन की है। जिसमें एक चर को विलुप्त करके एक चर में रैखिक समीकरण प्राप्त करते हैं इससे एक चर का मान निकाल आता है। उसकी सहायता से दुसरे चर का मान भी प्राप्त कर सकते हैं।

इसे एक उदाहरण के माध्यम से समझाते हैं:

उदाहरण

दो व्यक्तियों की आय का अनुपात 9 : 7 है और उनके खर्चों का अनुपात 4 : 3 है। यदि प्रत्येक व्यक्ति प्रति महीने में 2000 रु बचा लेता है, तो उनकी मासिक आय ज्ञात कीजिए।

हल

आइए दोनों व्यक्तियों की मासिक आय को क्रमशः 9x रु तथा 7x रु से निरूपित करें और उनके खर्चों को क्रमशः 4y रु और 3y रु से निरूपित करें। तब, उस स्थिति में बने समीकरण हैं:

$9x - 4y = 2000$ (1)

और $7x - 3y = 2000$ (2)

चरण 1:

y के गुणकों को समान करने के लिए समीकरण (1) को 3 से तथा समीकरण (2) को 4 से गुणा कीजिए। तब हम निम्नलिखित समीकरण प्राप्त करते हैं:

$27x - 12y = 6000$ (3)

$28x - 12y = 8000$ (4)

चरण 2:

y को विलुप्त करने के लिए समीकरण (3) को समीकरण (4) में से घटाइए, क्योंकि y के गुणांक समान हैं, इसलिए हम पाते हैं:

$(28x - 12y) - (27x - 12y) = 8000 - 6000$

अर्थात् $x = 2000$

चरण 3:

x का मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं:

$9(2000) - 4y = 2000$

अर्थात $y = 4000$

अतः समीकरणों के युग्म का हल $x = 2000$, $y = 4000$ है। इसलिए, व्यक्तियों की मासिक आय क्रमशः रु 18000 तथा रु 14000 हैं।

सत्यापन:

उनकी आय का अनुपात 18000 : 14000 = 9 : 7 है। साथ ही, उनके खर्च का अनुपात

18000 – 2000 : 14000 – 2000 = 16000 : 12000 = 4 : 3 है।

वज्र-गुणन विधि

वज्र गुणन विधि सूत्र (Cross multiplication method formula,formula of cross multiplication method)-

माना दिए गए समीकरण हैं:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$$

समीकरण (1) को b2 से तथा समीकरण (2) को b1 से गुणा करने पर-

$$a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$a_2b_1x + b_2b_1y + b_1c_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

समीकरण (3) में से (4) घटाने पर-

$$a_1b_2 - a_2b_2x + b_2c_1 - b_1c_2 = 0$$

$$a_1b_2 - a_2b_2x + b_2c_1 - b_1c_2 \ldots\ldots\ldots(5)$$

इसी प्रकार समीकरण (1) को a_2 से तथा समीकरण (2) को b_1 से गुणा करने पर-

$a_1a_2x + a_2b_1y + c_1a_2 = 0$...........(6)

$a_1a_2x + a_1b_2y + c_2a_1 = 0$...........(7)

समीकरण (6) में से समीकरण (7) को घटाने पर-

$(a_2b_1 - a_1b_2)y = c_2a_1 - c_1a_2$

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

समीकरण (5) से $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

उपर्युक्त समीकरणों को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है-

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

इस परिणाम को निम्न रचना के माध्यम से दर्शा सकते हैं जिससे समीकरणों के हल को सुगमता से स्मरण रख सके।

$$\frac{x}{\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}}$$

रचना में तीर के निशान का अर्थ दो संख्याओं के गुणा को दर्शाना है।पहले नीचे की ओर गुणा करना है फिर इसमें से ऊपर की ओर गुणा कर गुणनफल घटाना है। वज्र गुणा के कारण यह वज्र गुणन विधि कहलाती है।इस विधि का प्रयोग से पूर्व समीकरणों के सभी पदों को पहले वाम पक्ष में लेकर दक्षिण पक्ष को शून्य बना देते हैं।प्रथम समीकरण एवं द्वितीय समीकरण में प्रथम चर के गुणांक द्वितीय चर के गुणांक तथा स्वतन्त्र चर से प्रदर्शित करते हैं।

साधनीयता के लिए प्रतिबन्ध (Condition for Solvability)

यदि समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2y + c_2 = 0$ हो तो संगत चरों के गुणांकों का अनुपात देखने पर निम्न स्थिति के अनुसार निर्णय किया जाता है।

(1.)प्रथम स्थिति $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
निकाय संगत तथा हल अद्वितीय होते हैं।
(2.) द्वितीय स्थिति $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
निकाय असंगत है तथा इसके कोई हल नहीं होते हैं।
(3.) तृतीय स्थिति $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
समीकरण निकाय संगत तथा इसके अनन्त हल होते हैं।

गुणन विधि के उदाहरण

निम्नलिखित समीकरणों के बारे में जांच कीजिए कि समीकरण निकाय के अद्वितीय हल है, कोई हल नहीं है या अपरिमित हल हैं।यदि किसी निकाय के अद्वितीय हल हैं तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

Example-1

2x + y = 35, 3x + 4y = 65

Solution: 2x + y = 35

3x + 4y = 65

समीकरण के सभी पदो को वाम पक्ष में लेने पर-

2x + y – 35 = 0

3x + 4y -65=0

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{4}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ निकाय संगत है तथा अद्वितीय हल हैं अतः

2x+y-35=0

3x+4y-65=0

$$\frac{x}{(1)(-65)-4(-35)} = \frac{y}{3(-35)-2(-65)} = \frac{1}{2(4)-3(1)}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{-65+140} = \frac{y}{-105+130} = \frac{1}{8-3}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{75} = \frac{y}{25} = \frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{75} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{75}{5} = 15$$
$$\Rightarrow \frac{y}{25} = \frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow y = \frac{25}{5} = 5$$
$$x = 15, y = 5$$

Example-2

$2x – y = 6$

$x - y = 2$

Solution: $2x – y = 6$

$x - y = 2$

समीकरण के सभी पदों को वाम पक्ष में लेने पर-

$2x – y – 6 = 0$

$x - y - 2 = 0$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{1}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ निकाय संगत है तथा इसके अद्वितीय हल हैं अतः

2x-y-6=0

x-y-2=0

$$\frac{x}{\begin{matrix}-1 & -6\\ -1 & 2\end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix}2 & -6\\ 1 & -2\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(-1)(-2)-(-1)(-6)} = \frac{y}{(1)(-6)-2(-2)} = \frac{1}{2(-1)-1(-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2-6} = \frac{y}{-6+4} = \frac{1}{-2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-4} = \frac{y}{-2} = \frac{1}{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-4} = \frac{1}{-1} \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow \frac{y}{-2} = \frac{1}{-1}$$

$$\Rightarrow y = 2$$

$$x = 4, y = 2$$

Example-3. 3x+2y+25=0

2x+y+10=0

Solution- 3x+2y+25=0

2x+y+10=0

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{3}{2}, \frac{b_1}{b_2}=\frac{2}{1}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ निकाय संगत है तथा इसके अद्वितीय हल हैं।

3x+2y+25=0

2x+y+10=0

$$\frac{x}{\begin{matrix}2 & 25\\ 1 & 10\end{matrix}}=\frac{y}{\begin{matrix}3 & 25\\ 2 & 10\end{matrix}}=\frac{1}{\begin{matrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(2)(10)-(1)(25)}=\frac{y}{(2)(25)-3(10)}=\frac{1}{3(1)-2(2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{20-25}=\frac{y}{50-30}=\frac{1}{3-4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-5}=\frac{y}{20}=\frac{1}{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-5}=\frac{y}{20}=\frac{1}{-1}$$

$$x=5, y=-20$$

Example-4. k का मान ज्ञात कीजिए यदि समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

2x + ky = 1

3x - 5y = 7

Solution: 2x + ky = 1

3x - 5y = 7

समीकरण के सभी पदों को वाम पक्ष में लेने पर-

2x + ky – 1 = 0

3x – 5y – 7 = 0

समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है अतः

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{k}{-5} \neq \frac{-1}{-7}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{k}{-5}$$

$$\Rightarrow k=\frac{-10}{3}$$

Example-5.समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए

$$mx + ny = m^2 + n^2$$

$$x + y = 2m$$

Solution-

$$mx + ny = m^2 + n^2$$

$$x + y = 2m$$

समीकरण के सभी पदों को वाम पक्ष में लेने पर-

$$mx + ny - (m^2 + n^2) = 0$$

$$x + y - 2m = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\begin{matrix} n & -(m^2+n^2) \\ 1 & -2m \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} m & -(m^2+n^2) \\ 1 & -2m \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} m & n \\ 1 & 1 \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-2mn+m^2+n^2} = \frac{y}{-(m^2+n^2)+2m^2} = \frac{1}{m-n}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(m-n)^2} = \frac{y}{(m^2-n^2)} = \frac{1}{m-n}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(m-n)^2} = \frac{y}{(m-n)(m+n)} = \frac{1}{m-n}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(m-n)^2}{m-n} = m - n$$

$$\Rightarrow y = \frac{(m-n)(m+n)}{m-n} = m + n$$

वज्र गुणन विधि की समस्याएं

निम्नलिखित समीकरणों के बारे में जांच कीजिए कि समीकरण निकाय के अद्वितीय हल है, कोई हल नहीं है या अपरिमित हल हैं।यदि किसी निकाय के अद्वितीय हल हैं तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

(1.)x+2y+1=0,2x-3y-12=0

(2.)2x+3y-17=0,3x-2y-6=0

k का मान ज्ञात कीजिए यदि समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है-

(3.)kx+2y=5,3x+y=1

का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निकाय के

(i) अद्वितीय हल (ii) कोई हल नहीं है।

(4.) $3x + \lambda y - 1 = 0$, $2x + y - 9 = 0$

उत्तर-(1.)x=3,y=-2

(2.)x=4,y=3

(3.)k=6

(4.)(i) अद्वितीय हल के लिए $\lambda \neq \frac{3}{2}$

(ii) कोई हल नहीं के लिए $\lambda = \frac{3}{2}$

उदाहरण

बैंगलोर के एक बस स्टैंड से यदि हम दो टिकट मल्लेश्वरम के तथा 3 टिकट यशवंतपुर के खरीदें, तो कुल लागत रू 46 है। परंतु यदि हम 3 टिकट मल्लेश्वरम के और 5 टिकट यशवंतपुर के खरीदें, तो कुल लागत रू 74 है। बस स्टैंड से मल्लेश्वरम का किराया तथा बस स्टैंड यशवंतपुर का किराया ज्ञात कीजिए।

उदाहरण का हल:

माना बैंगलोर के बस स्टैंड से, मल्लेश्वरम का किराया रू x तथा यशवंतपुर का किराया रू y है। दी गई सूचनाओं से, हम पाते हैं:

2x + 3y = 46, अर्थात् 2x + 3y – 46 = 0 …….. (1)

3x + 5y = 74, अर्थात् 3x + 5y – 74 = 0 ……… (2)

यहाँ पर $a_1 = 2$, $b_1 = 3$, $c_1 = -46$, $a_2 = 3$, $b_2 = 5$, $c_2 = -74$

वज्र-गुणन विधि से इन समीकरणों को हल करने के लिए, हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

x/{ (3) (-74) – (5) (-46)} = y/{(-46)(3) – (-74)(2)} = 1/{(2)(5) – (3)(3)}

- अर्थात् x/(-222 + 230) = y/(-138 + 148) = 1/(10 – 9)
- अर्थात् x/8 = y/10 = 1/1
- अर्थात् x/8 = 1/1
- अर्थात् y/10 = 1/1

- अर्थात् $x = 8$ और $y = 10$

अतः, बैंगलोर के बस स्टैंड से, मल्लेश्वरम का किराया रू 8 तथा यशवंतपुर का किराया रू 10 है।

नोट:

अपने उत्तर के सत्यापन्न के लिए हम x और y का मान समीकरण (1) और (2) में रखकर कर सकते हैं।

दो चरों के रैखिक समीकरणों के युग्म में बदले जा सकने वाले समीकरण

हम ऐसे समीकरणों के युग्मों के बारे में चर्चा करेंगे जो रैखिक नहीं है, परंतु कुछ उपयुक्त प्रतिस्थापनों द्वारा इन्हें रैखिक समीकरणों के रूप में बदला जा सकता है।

उदाहरण

समीकरणों के निम्न युग्म को हल कीजिए:

- $2/x + 3/y = 13$
- $5/x – 4/y = -2$

उदाहरण का हल:

दिए गए समीकरणों के युग्म को इस प्रकार से लिखते हैं:

- $2(1/x) + 3(1/y) = 13$ (1)
- $5(1/x) – 4(1/y) = -2$ (2)

ये समीकरण $ax + by + c= 0$ के रूप में नहीं हैं। परंतु, यदि हम समीकरण (1) और (2) में, $1/x = p$ आयर $1/y = q$ प्रतिस्थापित करें, तो हम पाते हैं:

- $2p + 3q = 13$ (3)
- $5p – 4q = -2$ (4)

अतः, समीकरणों को रैखिक समीकरणों के युग्म के रूप में व्यक्त कर दिया है। अब इन्हें किसी भी विधि से हल करके $p = 2$, $q = 3$ प्राप्त कर सकते हैं।

यहाँ $p = 1/x$ और $q = 1/y$ है

इसलिए, $1/x = 2$ और $1/y = 3$

अर्थात् $x = ½$ और $y = 1/3$

सत्यापन:

दोनों समीकरणों में $x = ½$ तथा $y = 1/3$ रखने पर, हम पाते हैं कि दोनों समीकरण संतुष्ट हो जाते हैं।

इसे एक और व्यवहारिक उदाहरण से समझने कि कोशिश करते हैं:

उदाहरण

एक नाव 10 घंटे में धारा के प्रतिकूल 30 km तथा धारा के अनुकूल 44 km जाती है। 13 घंटे में वह 40 km धारा के प्रतिकूल एवं 55 km धारा के अनुकूल जाती है। धारा की चाल तथा नाव की स्थिर पानी में चाल ज्ञात कीजिए।

उदाहरण का हल

माना नाव की स्थिर जल में चाल x km/h है तथा धारा की चाल y km/h है। साथ ही, नाव की धारा के अनुकूल चाल = $(x + y)$ km/h तथा नाव की धारा के प्रतिकूल चाल = $(x – y)$ km/h होगी।

साथ ही, समय = दूरी/चाल

प्रथम स्थिति में, जब नाव 30 km धारा के प्रतिकूल चलती है, माना घंटों में लिया गया समय

ज1 है। तबचाल

प्रथम स्थिति में, जब नाव 30 शउ धारा के प्रतिकूल चलती है, माना घंटों में लिया गया समय t_1 है। तब

$t_1 = 30/(x – y)$

माना t_2 घंटों में वह समय है जिसमें नाव 44 km धारा के अनुकूल चलती है। तब, $t_2 = 44/(x + y)$ है। कुल लगा समय $t_1 + t_2$, 10 घंटा है। अतः, हमें समीकरण मिलता हैः

- $30/(x – y) + 44/(x + y) = 10$ (1)

दूसरी स्थिति में, 13 घंटों में वह 40 km धारा के प्रतिकूल और 55 km धारा के अनुकूल चलती है। हम इससे समीकरण प्राप्त करते हैं:

- $40/(x – y) + 55/(x + y) = 13$ (2)

उपरोक्त समीकरणों को रैखिक समीकरणों के युग्म के रूप में व्यक्त करने के लिए

- $1/(x - y) = u$ और $1/(x + y) = v$ (3)
- $30u + 44v = 10$ या $30u + 44v - 10 = 0$ (4)
- $40u + 55v = 13$ या $40u + 55v - 13 = 0$ (5)

समीकरण 3 और 4 को हल करने पर $u = 1/5$, $v = 1/11$

अब u, v के इन मानों को समीकरणों (3) में रखने पर, हम पाते हैं:

$1/(x - y) = 1/5$

और $1/(x + y) = 1/11$

अर्थात् $x - y = 5$ और $x + y = 11$ (6)

x और y के सापेक्ष समीकरण को हल करने पर

$x = 8$, $y = 3$

उत्तर के सत्यापन्न के लिए x और y के मान समीकरण 1 और 2 में रखकर जांच कर सकते हैं।

समान्तर रेखाएं

समानांतर रेखाएँ किसी समतल में बनी ऐसी रेखाएँ होती हैं जो कभी नहीं मिलती। यह तभी सम्भव है जब इन रेखाओं के बीच की दूरी (अंतर) एक समान ही रहता है, यानि कभी नहीं बदलता।

उदाहरण के लिए रेखाएं $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ और $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ समान्तर होगीं यदि $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$

प्रतिच्छेदी रेखाएँ

किसी एक तल की दो भिन्न रेखाएँ, जिनमें एक बिंदु उभयनिष्ठ हो, प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं; तथा उभयनिष्ठ बिंदु को प्रतिच्छेद बिंदु कहते हैं।

उदाहरण के लिए रेखाएं $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ और $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ प्रतिच्छेदी होगीं यदि $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$

संपाती रेखाएं

जब एक ही रेखा पर अन्य एक या एक से अधिक रेखाएं होती है, तो वह संपाती रेखाएं कहलाती है।

उदाहरण के लिए रेखाएं a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 और a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 सम्पाती होगीं यदि a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2

उदाहरण

एक कक्षा के विद्यार्थियों को पंक्तियों में खड़ा होना है। यदि पंक्ति में 3 विद्यार्थी अधिक होते, तो 1 पंक्ति कम होती। यदि पंक्ति में 3 विद्यार्थी कम होते, तो 2 पंक्तियाँ अधिक बनतीं। कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल

माना एक पंक्ति में विद्यार्थियों कि संख्या x है और पंक्तियों की संख्या y है।

तो कुल विद्यार्थियों की संख्या = x × y = xy

उदाहरण

प्रथम स्थिति के अनुसार अगर एक पंक्ति में 3 विद्यार्थी अधिक होते, तो 1 पंक्ति कम होती।

अर्थात् एक पंक्ति में विद्यार्थियों संख्या = x + 3

तो पंक्तियों की संख्या = y – 1

विद्यार्थियों की कुल संख्या (x + 3) (y – 1) = xy

या x = 3y – 3 (1)

द्वितीय स्थिति के अनुसार अगर एक पंक्ति में 3 विद्यार्थी कम होते, तो 2 पंक्तियां बढ़ जाती हैं।

अर्थात् एक पंक्ति में विद्यार्थियों संख्या = x – 3

तो पंक्तियों की संख्या = y + 2

विद्यार्थियों की कुल संख्या (x – 3) (y + 1) = xy

या 2x = 3y + 6 (2)

समीकरण 1 और 2 को हाल करने पर

x = 9 और y = 4 प्राप्त होते हैं।

अतः कुल विद्यार्थियों की संख्या = xy

$= 9 \times 4 = 36$

यदि समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2 x + b_2y + c_2 = 0$ हो तो संगत चरों के गुणांकों का अनुपात देखने पर निम्न स्थिति के अनुसार निर्णय किया जाता है।

NCERT SOLUTIONS

प्रश्नावली 3.1 (पृष्ठ संख्या 49)

प्रश्न 1 आफ़ताब अपनी पुत्री से कहता है, 'सात वर्ष पूर्व मैं तुमसे सात गुनी आयु का था। अब से 3 वर्ष बाद मैं तुमसे केवल तीन गुनी आयु का रह जाऊँगा (क्या यह मनोरंजक है?) इस स्थिति को बीजगणितीय एवं ग्राफीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर- माना आफ़ताब की वर्त्तमान आयु = x वर्ष

और उसकी पुत्री की वर्त्तमान आयु = y वर्ष

7 वर्ष पूर्व आफ़ताब की आयु = x - 7 वर्ष

और उसकी पुत्री की आयु = y - 7 वर्ष

स्थित - I

$x - 7 = 7(y - 7)$

$x - 7 = 7y - 49$

$x - 7y = 7 - 49$

$x - 7y = -42$ ...(1)

3 वर्ष बाद आफ़ताब की आयु = x + 3 वर्ष

और उसकी पुत्री की आयु = y + 3 वर्ष

स्थित - II

$x + 3 = 3(y + 3)$

$x + 3 = 3y + 9$

$x - 3y = 9 - 3$

$x - 3y = 6$ ...(2)

बीजगणितीय रूप में

$x - 7y = -42$ ...(1)

$x - 3y = 6$ ... (2)

ग्राफीय रूप में प्रदर्शन:

$x - 7y = -42$

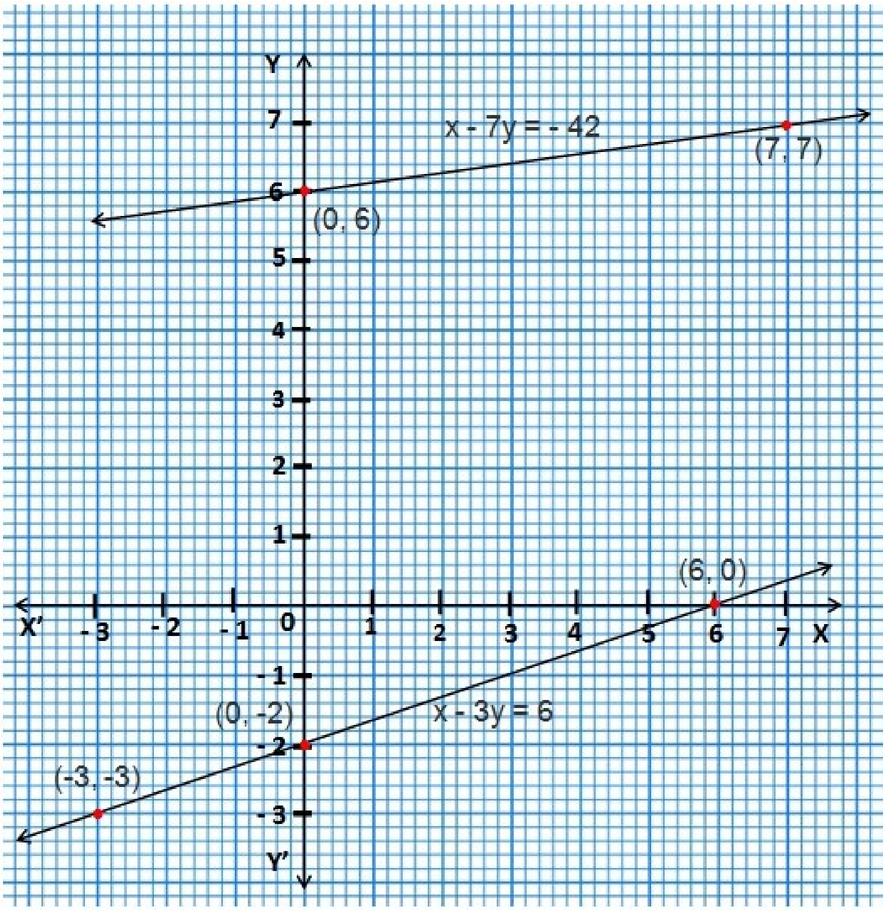
$x = -42 + 7y$

x	-7	0	7
y	5	6	7

$x - 3y = 6$

$x = 6 + 3y$

x	0	-3	6
y	-2	-3	0



प्रश्न 2 क्रिकेट टीम के एक कोच ने 3900 रुपये में 3 बल्ले तथा 6 गेंदे खरीदी। बाद में उसने एक और बल्ला तथा उसी प्रकार की 2 गेंदे 1300 रुपये में खरीदीं। इस स्थिति को बीजगणितीय तथा ज्यामितीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर- माना एक बल्ले का मूल्य = x रुपये

और एक गेंद का मूल्य = y रुपये

अत: बीजगणितीय निरूपण

$3x + 6y = 3900$ …(1) और

$x + 2y = 1300$ …(2)

समी. (1) से

$3x + 6y = 3900$

3(x + 2y) = 3990

या x + 2y = 1300

x = 1300 - 2y

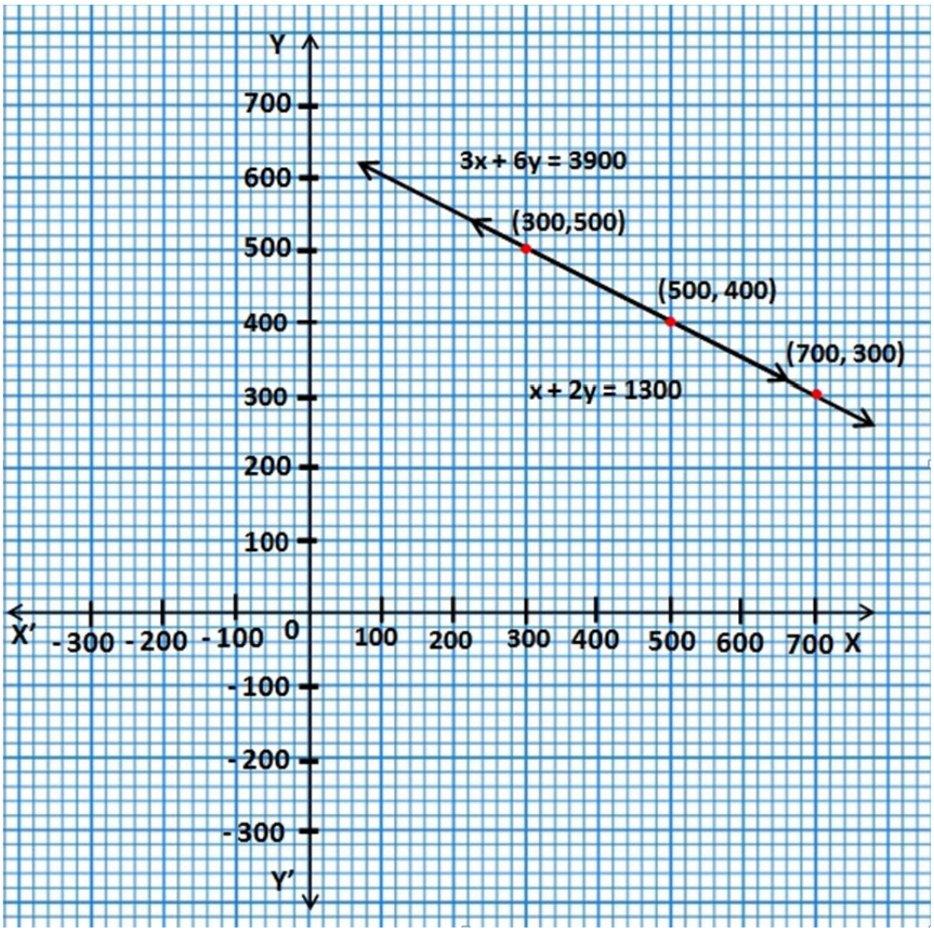
x	700	500	300
y	300	400	500

इसी प्रकार समी. (2) से

x + 2y = 1300

x = 1300 - 2y

x	700	500	300
y	300	400	500



प्रश्न 3 2 किलोग्राम सेब और 1 किलोग्राम अंगूर का मूल्य किसी दिन 160 रुपये था। एक महीने बाद 4 किलोग्राम सेब और 2 किलोग्राम अंगूर का मूल्य 300 रुपये हो जाता है। इस स्थिति को बीजगणितीय तथा ज्यामितीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर- माना एक किलों सेब का मूल्य = x रुपया

और एक किलो अंगूर का मूल्य = y रुपया

अत: बीजगणितीय निरूपण

$2x + y = 160$ …(1)

$4x + 2y = 300$ …(2)

ग्राफीय निरूपण

समी. (1) से

$2x + y = 160$

$y = 160 - 2x$

x	40	50	60
y	80	60	40

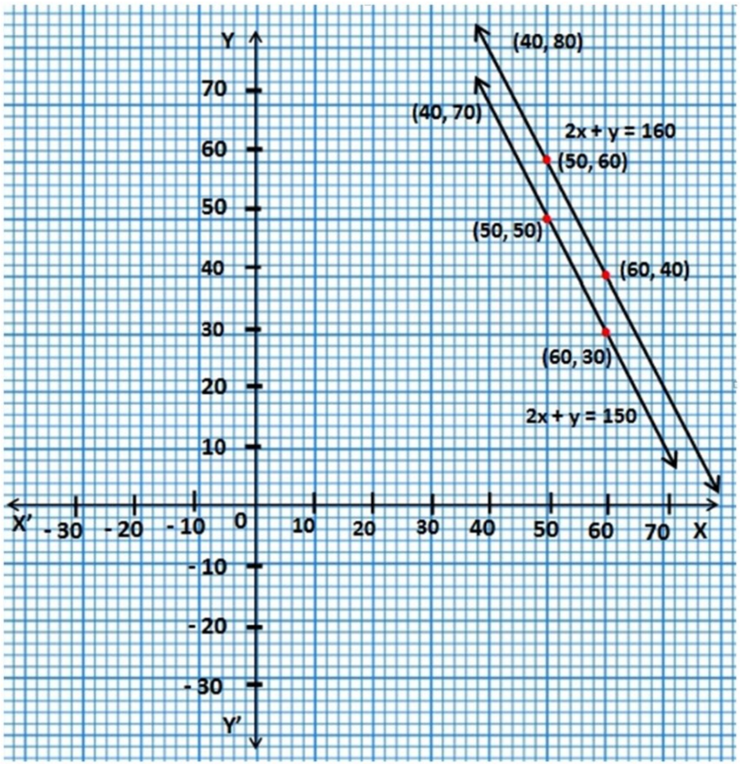
अब समी. (2) से

$4x + 2y = 300$

या $2x + y = 150$

$y = 150 - 2x$

x	40	50	60
y	70	50	30



प्रश्नावली 3.2 (पृष्ठ संख्या 55-56)

प्रश्न 1 निम्न समस्या में रैखिक समीकरण के युग्म बनाइए और उनके ग्राफीय विधि से हल ज्ञात कीजिए।

(i) कक्षा x के 10 विधार्थियों ने एक गणित की पहेली प्रतियोगिता में भाग लिया। यदि लड़कियों की संख्या लड़कों से 4 अधिक हो, तो प्रतियोगिता में भाग लिए लडको और लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(ii) 5 पेंसिल तथा 7 कलमों का कुल मूल्य 50 रुपये है, जबकि 7 पेंसिल तथा 5 कलमों का कुल मूल्य 46 रुपये है। एक पेंसिल का मूल्य तथा एक कलम का मूल्य ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i) माना लड़कियों की संख्या = x

तथा लड़कों की संख्या = y

प्रश्नानुसार लड़के और लडकियाँ की कुल संख्या 10 है।

इसलिए, x + y = 10 ...(1)

लड़कों से लड़कियाँ 4 अधिक हैं।

इसलिए, $x - y = 4$ ...(2)

समी. (1) के लिए तालिका $x + y = 10$

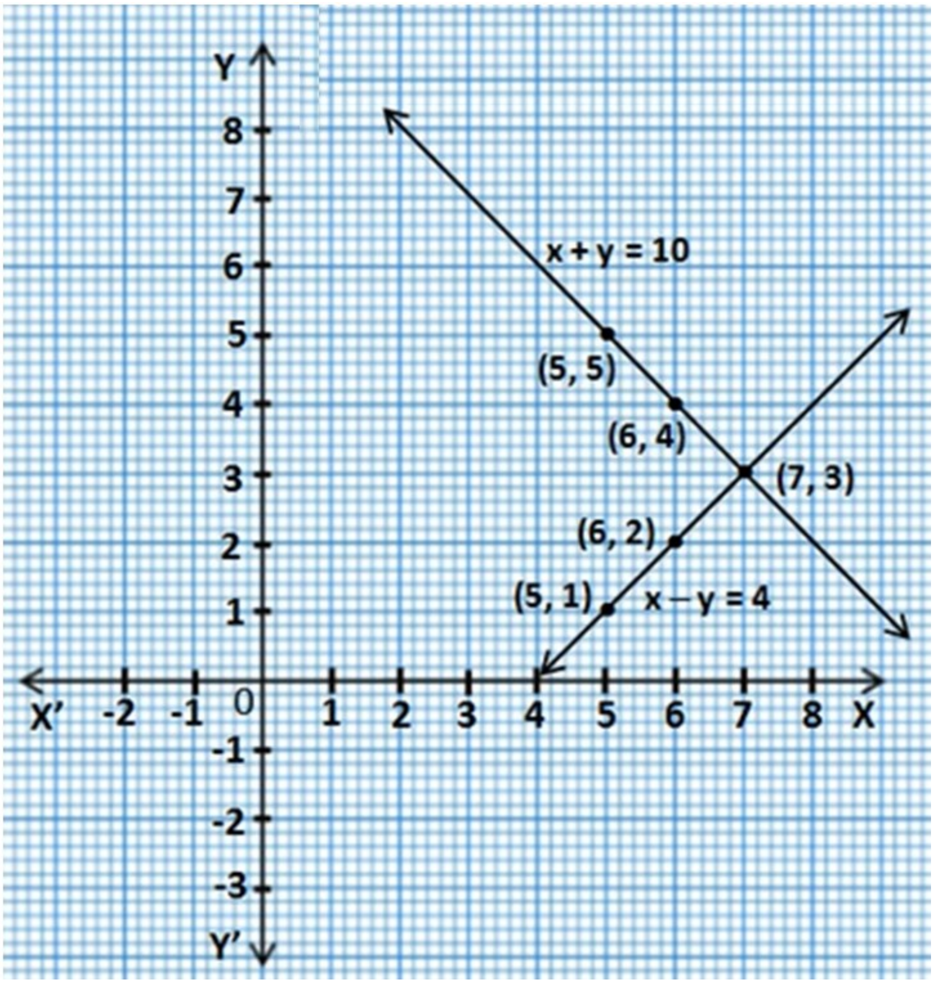
$\Rightarrow x = 10 - y$

x	5	6	7
y	5	4	3

समी. (2) के लिए तालिका $x - y = 4$

$\Rightarrow x = 4 + y$

x	5	6	7
y	1	2	3



ग्राफीय विधि से हल के लिए हम जब बने ग्राफ को देखते हैं तो पाते हैं कि बिंदु (7, 3) दिए गए समीकरण के लिए प्रतिच्छेदन बिंदु है जो कि रैखिक समीकरण युग्म का उभयनिष्ठ हल है।

इसलिए, लड़कियों कि संख्या = 7 और लड़कों की संख्या = 3 है।

(ii) माना एक पेन्सिल का मूल्य = x रुपये

और एक कलम का मूल्य = y रुपये

प्रश्नानुसार,

$5x + 7y = 50$ …(1) और

$7x + 5y = 46$ …(2)

समी. (1) से

$5x + 7y = 50$

$\Rightarrow 5x = 50 - 7y$

$$\Rightarrow x = \frac{50 - 7y}{5}$$

x	3	10	-4
y	5	0	10

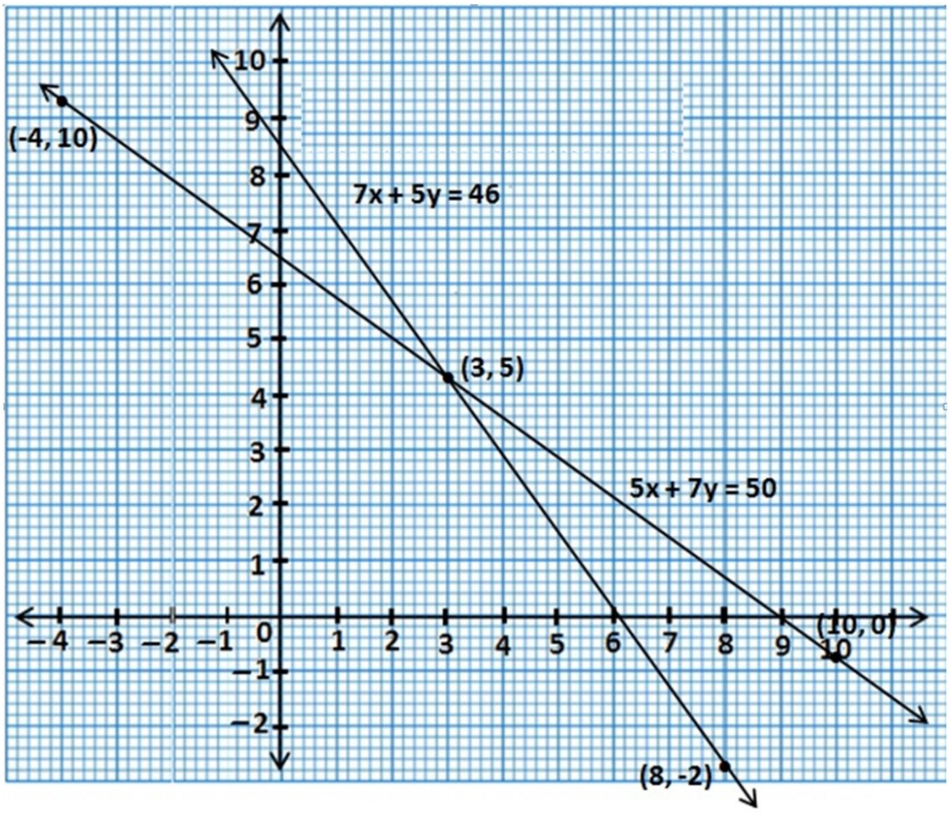
समी. (2) से

$7x + 5y = 46$

$\Rightarrow 7x = 46 - 5y$

$$\Rightarrow x = \frac{46 - 5y}{7}$$

x	8	3	-2
y	-2	5	-12



ग्राफीय विधि से हल के लिए हम जब बने ग्राफ को देखते हैं तो पाते हैं कि बिंदु (3, 5) दिए गए समीकरण के लिए प्रतिच्छेदन बिंदु है जो कि रैखिक समीकरण युग्म का उभयनिष्ठ हल है।

इसलिए, पेन्सिल का मूल्य = 3 और कलम का मूल्य = 5 है।

प्रश्न 2 अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न समीकरण युग्म द्वारा निरुपित रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है, समांतर है अथवा संपाती है।

(i) $5x - 4y + 8 = 0$

$7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$

$18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$

$2x - y + 9 = 0$

उत्तर-

(i) $5x - 4y + 8 = 0$

$7x + 6y - 9 = 0$

$a_1 = 5, b_1 = -4, c_1 = 8$

$a_2 = 7, b_2 = 6, c_2 = -9$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{7}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-4}{6}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{8}{-9}$

यहाँ $\frac{5}{7} \neq \frac{-4}{6}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

अतः जब $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ हो तो दिए गए समीकरण युग्म के लिए रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$

$18x + 6y + 24 = 0$

$a_1 = 9, b_1 = 3, c_1 = 12$

$a_2 = 18, b_2 = 6, c_2 = 24$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{18}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{12}{24}$

यहाँ $\frac{9}{18} = \frac{3}{6} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

अतः जब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो तो दिए गए समीकरण युग्म के लिए रेखाएँ संपाती होती है। अतः संपाती है।

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$

$2x - y + 9 = 0$

$a_1 = 6, b_1 = -3, c_1 = 10$

$a_2 = 2, b_2 = -1, c_2 = 9$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-1} = \frac{3}{1}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{10}{9}$$

यहाँ $\frac{3}{1} = \frac{3}{1} \neq \frac{10}{9}$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

अतः जब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हो तो दिए गए समीकरण युग्म के लिए रेखाएँ समान्तर होती है। अतः समान्तर है।

प्रश्न 3 अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न रैखीक समीकरण के युग्म संगत है या असंगत।

(i) $3x + 2y = 5; 2x - 3y = 7$

(ii) $2x - 3y = 8; 4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7; 9x - 10y = 14$

(iv) $5x + 3y = 11; 10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y - 8; \ 2x + 3y = 12$

उत्तर-

(i)

$3x + 2y = 5; 2x - 3y = 7$

$a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = 5$

$a_2 = 2, b_2 = -3, c_2 = 7$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{5}{7}$

यहाँ $\frac{3}{2} \neq \frac{2}{-3}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

चूँकि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ है इसलिए ये रेखाएँ प्रतिच्छेदी है अत: रैखिक समीकरण का युग्म संगत हैं।

(ii)

$2x - 3y = 8; 4x - 6y = 9$

$a_1 = 2, b_1 = -3, c_1 = 8$

$a_2 = 4, b_2 = -6, c_2 = 9$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{8}{9}$

यहाँ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{8}{9}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

चूँकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ है इसलिए ये रेखाएँ समान्तर है अतः रैखीक समीकरण का युग्म असंगत है।

(iii)

$$\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7; 9x - 10y = 14$$

समी. (1) से

$$\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$$

$$\Rightarrow 9x - 10y = 42 \ldots (2)$$

$a_1 = 9$, $b_1 = 10$, $c_1 = 42$

$a_2 = 9$, $b_2 = -10$, $c_2 = 14$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{9} = \frac{1}{1}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{10}{-10} = \frac{-1}{1}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{42}{14}$$

यहाँ $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1}$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

चूँकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ है इसलिए ये रेखाएँ परिच्छेदी है अतः रैखीक समीकरण का युग्म संगत है।

(iv)

$5x + 3y = 11; 10x + 6y = -22$

तुलना समीकरण

$$5x - 3y = 11$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

और $-10x + 6y = -22$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

$$a_1 = 5, b_1 = -3, c_1 = -11, a_2 = -10, b_2 = 6, c_2 = 22$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{-10} = \frac{-1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-11}{22} = \frac{-1}{2}$

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

इसलिए, लाइनों में अनंत कई समाधान हैं। इसलिए, वे सुसंगत हैं।

(v)

$$\frac{4}{3}x + 2y - 8;\ 2x + 3y = 12$$

तुलना समीकरण

$$\frac{4}{3}x + 2y = 8$$

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

और $2x + 3y = 12$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

हमें मिला $\left(a_1 = \frac{4}{3}, b_1 = 2, c_1 = -8, a_2 = 2, b_2 = 3, c_2 = -12\right)$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{4}{3}}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

यहाँ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

इसलिए, लाइनों में अनंत कई समाधान हैं। इसलिए, वे सुसंगत हैं।

प्रश्न 4 निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों में से कौन से युग्म संगत/ असंगत है, यदि संगत है तो ग्राफीय विधि से हल ज्ञात कीजिए।

(i) $x + y = 5, 2x + 2y = 10$

(ii) $x - y = 8, 3x - 3y = 16$

(iii) $2x + y - 6 = 0, 4x - 2y - 4 = 0$

(iv) $2x - 2y - 2 = 0, 4x - 4y - 5 = 0$

उत्तर-

(i) $x + y = 5$ ...(1)

$2x + 2y = 10$ ...(2)

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

अत: ये संपाती है इसलिए ये संगत है।

ग्राफ के लिए

समीकरण (1) से

$x + y = 5$

या $x = 5 - y$

y का मान 0, 1, 2 रखने पर x का मान क्रमश: 5, 4 और 3 प्राप्त होता है।

x	5	4	3
y	0	1	2

समीकरण (2) से

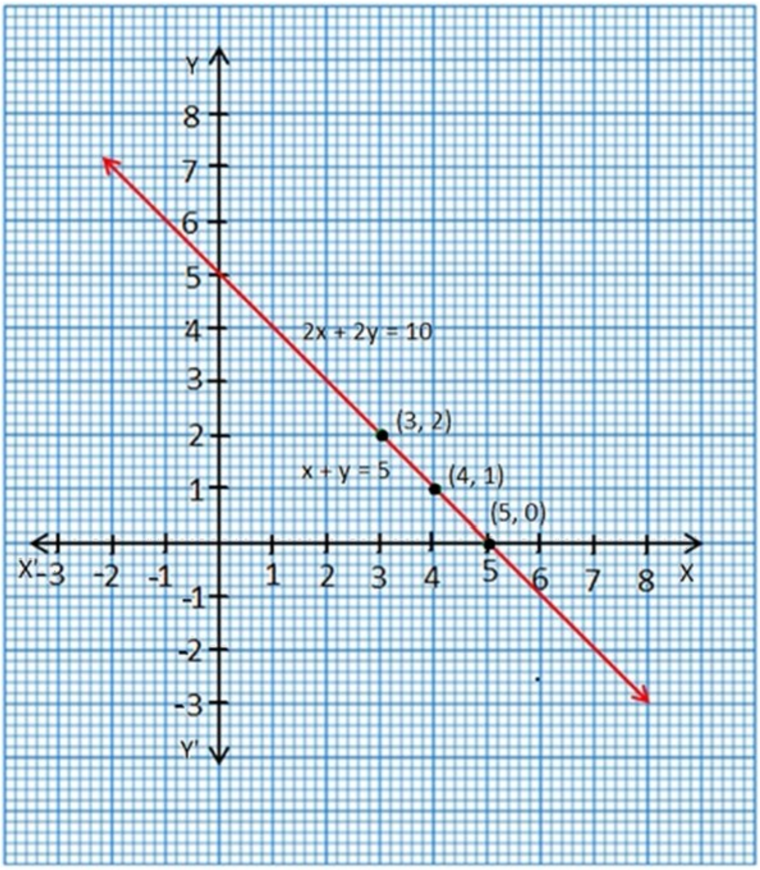
$2x + 2y = 10$

$\Rightarrow x + y = 5$

y का मान 0, 1, 2 रखने पर x का मान क्रमश: 5, 4 और 3 प्राप्त होता है।

x	5	4	3
y	0	1	2

समीकरण $x + y = 5$ और $2x + 2y = 10$ के लिए ग्राफ



(ii) x - y = 8 ...(1)

3x - 3y = 16 ...(2)

संगत/ असंगत के लिए जाँच

$$\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3} \neq \frac{8}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

अत: ये समान्तर है इसलिए ये असंगत है।

(iii) 2x + y -6 = 0 ...(1)

4x - 2y -4 = 0 ...(2)

संगत/ असंगत के लिए जाँच

$$\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

अत: ये प्रतिच्छेद करती है इसलिए ये संगत है।

अब ग्राफ के लिए समीकरण (1) से

$2x + y - 6 = 0$

$y = 6 - 2x$

x का मान 0, 1, और 2 रखने पर y का मान क्रमशः 6, 4, और 2 प्राप्त होता है।

x	0	1	2
y	6	4	2

समीकरण (2) से

$4x - 2y - 4 = 0$

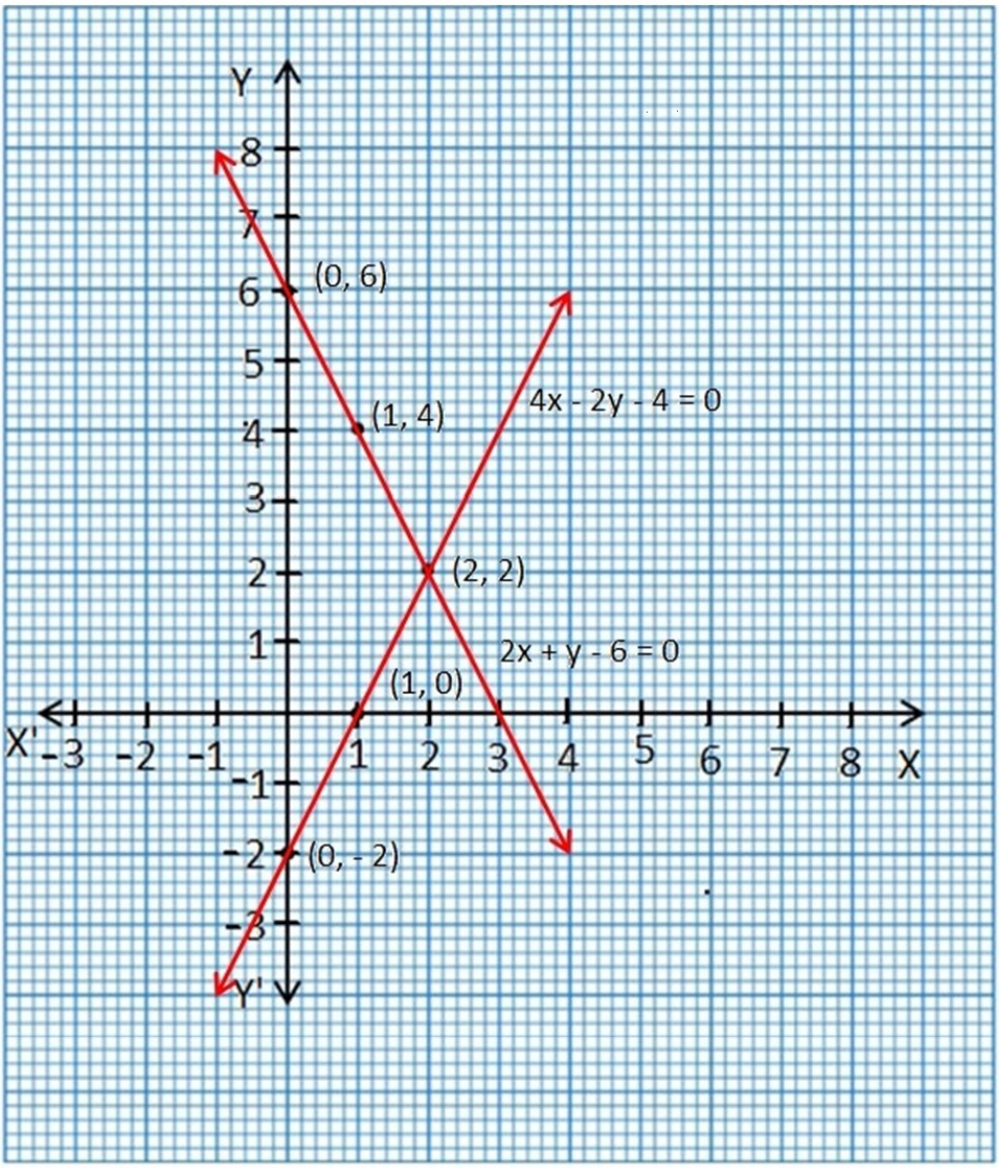
या $2x - y - 2 = 0$ (सरल करने पर)

$y = 2x - 2$

x का मान 0, 1, और 2 रखने पर y का मान क्रमशः -2, 0 और 2 प्राप्त होता है।

x	0	1	2
y	-2	0	2

तालिका (1) और (2) के निर्देशांक बिन्दुओ को ग्राफ पेपर पर स्थापित करने पर



(iv) $2x - 2y - 2 = 0$ ...(1)

$4x - 4y - 5 = 0$ ...(2)

संगत/ असंगत के लिए जाँच

$$\frac{2}{4} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{-2}{-5}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

अत: ये समान्तर है और इसलिए ये असंगत है।

प्रश्न 5 एक आयताकार बाग़ जिसकी लंम्बाई, चौड़ाई से 4 मीटर अधिक है, का अर्धपरिमाप 36 मीटर है। बाग़ की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना आयताकार बाग की लंबाई = x मीटर

और चौड़ाई = y मीटर है।

अर्धपरिमाप = 36 मीटर

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{परिमाप}}{2}$$

अतः स्थति (1)

x - y = 4 ...(1)

स्थति (2)

2(लम्बाई + चौड़ाई) = परिमाप

$$\text{या} \quad \text{लंबाई} + \text{चौड़ाई} = \frac{\text{परिमाप}}{2}$$

या x + y = 36 ...(2)

समीकरण (2) से

$x - y = 4$

$\Rightarrow x = 4 + y$

अब x का मान 4 + y समीकरण (2) में रखने पर

$x + y = 36$

$\Rightarrow 4 + y + y = 36$

$\Rightarrow 4 + 2y = 36$

$\Rightarrow 2y = 36 - 4$

$\Rightarrow 2y = 32$

$$\Rightarrow y = \frac{36}{2} = 16$$

अब y = 16 समीकरण (1) में रखने पर

$x = 4 + y$

या $x = 4 + 16 = 20$

अतः बाग की लंबाई = 20 मीटर और चौडाई = 16 मीटर।

प्रश्न 6 एक रैखिक समीकरण $2x + 3y - 8 = 0$ दी गई है। दी चरों में एक ऐसी और रैखिक समीकरण लिखिए ताकि प्राप्त युग्म का ज्यामितीय निरूपण जैसा कि

(i) प्रतिछेद करती रेखाएँ हों।
(ii) समांतर रेखाएँ हो।
(iii) संपाती रेखाएँ हों।

उत्तर-

(i) $2x + 3y - 8 = 0$ ...(1) (दिया है)

हमें एक और ऐसी ही रैखिक समीकरण खींचना है जिससे प्राप्त युग्म का ज्यामितीय निरूपण।

प्रतिच्छेद करती रेखाए हो रेखाए प्रतिच्छेद करती हो इसके लिए

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ होना चाहिए।

अतः $3x + 2y - 10 = 0$ ...(2)

जो इस शर्त को पूरा करती है। इसलिए समीकरण युग्म है।

$2x + 3y - 8 = 0$ ...(1)

$3x + 2y - 10 = 0$ ...(2)

(ii) $2x + 3y - 8 = 0$ ...(1) (दिया है)

हमें एक और ऐसी ही रैखिक समीकरण खींचना है जिससे प्राप्त युग्म का ज्यामितीय निरूपण।

समान्तर रेखाएं हो

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

अतः दूसरे समीकरण है

$4x + 6y - 5 = 0$ ...(2)

जो इस शर्त को पूरा करती है। इसलिए समीकरण युग्म है।

$2x + 3y - 8 = 0$ ...(1)

$4x + 6y - 5 = 0$ ...(2)

(iii) $2x + 3y - 8 = 0$ ...(1) (दिया है)

हमें एक और ऐसी ही रैखिक समीकरण खींचना है जिससे प्राप्त युग्म का ज्यामितीय निरूपण।

संपाती रेखाएँ हों

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

अतः दूसरे समीकरण है

4x + 6y - 16 = 0 ...(2)

जो इस शर्त को पूरा करती है। अतः समीकरण युग्म है।

2x + 3y - 8 = 0 ...(1)

4x + 6y - 16 = 0 ...(2)

प्रश्न 7 समीकरणों x - y + 1 = 0 और 3x + 2y - 12 = 0 का ग्राफ खींचिए। x- अक्ष और इन रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशक ज्ञात कीजिए और त्रिभुजाकार पटल को छायांकित कीजिए।

उत्तर- x - y + 1 = 0 …(1)

3x + 2y - 12 = 0 …(2)

समीकरण (2) से

x - y + 1 = 0

या y = x + 1

अब x का मान 0, 1 और 2 रखने पर y का मान क्रमश: 1, 2 और 3 प्राप्त होता है जिसकी तालिका निम्न है।

x	0	1	2
y	1	2	3

समीकरण (2) से

$3x + 2y - 12 = 0$

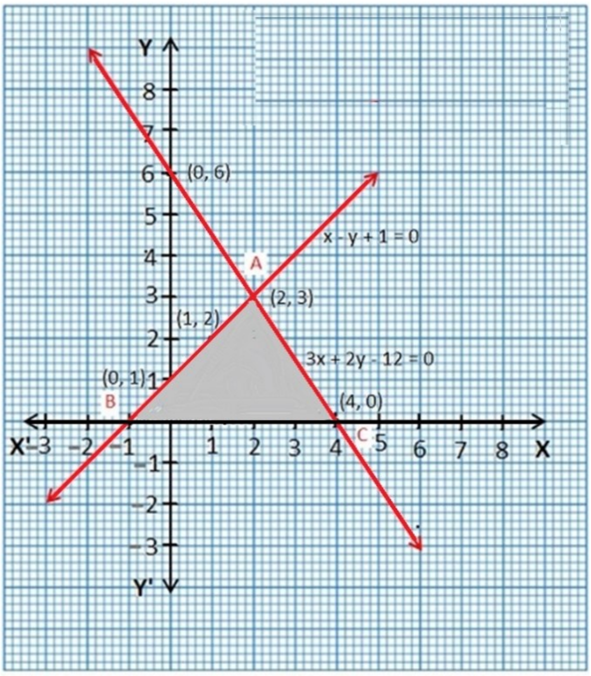
$2y = 12 - 3x$

$$y = \frac{12 - 3x}{2}$$

अब इसमें x का मान 0, 2 और 4 रखने पर y का मान क्रमश: 6, 3 और 0 प्राप्त होता है जिसकी तालिका निम्न है।

x	0	2	4
y	6	3	0

दोनों तालिकाओं को ग्राफ पर स्थापित करने पर



प्रश्नावली 3.3 (पृष्ठ संख्या 59-60)

प्रश्न 1 निम्न रैखिक समीकरण युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए-

(i) $x + y = 14$,

x - y = 4

(ii) $s - t = 3$

$$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$$

(iii) 3x - y = 3

9x - 3y = 9

(iv) 0.2x + 0.3y = 1.3

0.4x + 0.5y = 2.3

(v) $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 0$

$$\sqrt{3x} - \sqrt{8y} = 0$$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = 2$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = \frac{13}{6}$$

उत्तर-

(i) x + y = 14 ...(1)

x - y = 4 ...(2)

प्रतिलोपन विधि से

समीकरण (2) से

x - y = 4

$x = 4 + y$

अब समीकरण (1) में x का मान 4 + y रखने पर

$x + y = 14$

$\Rightarrow (4 + y) + y = 14$

$\Rightarrow 4 + 2y = 14$

$\Rightarrow 2y = 14 - 4$

$\Rightarrow 2y = 10$

$$\Rightarrow y = \frac{10}{2} = 5$$

अब y मान समीकरण (2) में रखने पर

$\Rightarrow x = 4 + y$ या $x = 4 + 5 = 9$

अतः दिए गए रैखीक समीकरण युग्म का हल है।

अतः $x = 9$, और $y = 5$

(ii)

$$s - t = 3 \ldots (1)$$

$$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6 \text{ या } 2s + 3t = 36 \ldots (2)$$

समीकरण (1) से

$s - t = 3$ या $s = 3 + t$

अब s का मान समीकरण (2) में रखने पर

$25 + 3t = 36$

$\Rightarrow 2(3 + t) + 3t = 36$

$\Rightarrow 6 + 2t + 3t = 36$

$\Rightarrow 6 + 5t = 36$

$\Rightarrow 5t = 36 - 6$

$\Rightarrow 5t = 30$

$$t = \frac{30}{5} = 6$$

अतः $t = 6$

अब इस t के मान को पुन समीकरण (1) में रखने पर

$\Rightarrow s = 3 + t$

$\Rightarrow s = 3 + 6 = 9$

अतः $s = 9$

अतः दिए गए रैखीक समीकरण युग्म का हल है।

$\Rightarrow s = 9$ और $t = 6$

(iii) $3x - y = 3$ ...(1)

$9x - 3y = 9$ ...(2)

प्रतिस्थापन विधि से समीकरण (1) लेने पर

$\Rightarrow 3x - y = 3$

$\Rightarrow 3x - 3 = y$

$\Rightarrow y = 3x - 3$ अब इस y के मान को समीकरण (2) में रखने पर

$\Rightarrow 9x - 3y = 9$

$\Rightarrow 9x - 3(3x - 3) = 9$

$\Rightarrow 9x - 9x + 9 = 9$

$\Rightarrow 9 = 9$

$\Rightarrow x = 0$ और $y = 3x - 3$

अत: दिए गए रैखिक समीकरण युग्म का हल है।

$x = 0$ और $y = 3x – 3$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$

$0.4x + 0.5y = 2.3$

सरल करने पर $0.2x + 0.3y = 1.3$

$$\Rightarrow \frac{2x}{10} + \frac{3y}{10} = \frac{1.3}{10}$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 13 \ldots (1)$$

अब, $0.4x + 0.5y = 2.3$

$$\Rightarrow \frac{4x}{10} + \frac{5y}{10} = \frac{23}{10}$$

$$\Rightarrow 4x + 5y = 23 \ldots (2)$$

अब समीकरण (1) लेने पर

$$\Rightarrow 2x + 3y = 13$$

$$\Rightarrow 2x = 13 - 3y$$

$$\Rightarrow x = \frac{13-3y}{2}$$

अब x के इस मान को समीकरण (2) में रखने पर

4x + 5y = 23

$$\Rightarrow 4\left(\frac{13-3y}{2}\right) + 5y = 23$$

$$\Rightarrow 2(13 - 3y) + 5y = 23$$

$$\Rightarrow 26 - 6y + 5y = 23$$

$$\Rightarrow 26 - y = 23$$

$$\Rightarrow y = 26 - 23$$

$$\Rightarrow y = 3$$

अब y के मान को समीकरण (1) में रखने पर

$$\Rightarrow x = \frac{13-13y}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{13-3(3)}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{13-9}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{2=2}$$

अतः दिए गए रैखीक समीकरण युग्म का हल है।

x = 2 और y = 3

(v)

$$\sqrt{2x}+\sqrt{3y}=0\ldots(1)$$

$$\sqrt{3x}-\sqrt{8y}=0\ldots(2)$$

समीकरण (1) से

$$\Rightarrow \sqrt{2x}+\sqrt{3y}=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x}-\sqrt{3y}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{3y}}{\sqrt{2}}$$

अब x का मान समीकरण (2) में रखने पर

$$\Rightarrow \sqrt{3x}-\sqrt{8y}=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3y}}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{8y}=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3y}-\sqrt{16y}=0$$

$$\Rightarrow -3y-4y=0$$

$$\Rightarrow -7y=0$$

$$y=0$$

अब y = 0 समीकरण (1) में रखने पर

$$\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{3y}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{3}(0)}{\sqrt{2}}=0$$

अतः दिए गए रैखीक समीकरण युग्म का हल है।

x = 0 और y = 0

(vi)

$$\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = 2$$

$$\Rightarrow 9x - 10y = -12 \ldots (1)$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 13 \ldots (3)$$

समीकरण (ii) लेने पर

2x + 3y = 13

⇒ 2x = 13 - 3y

$$\Rightarrow x = \frac{13-3y}{2}$$

2 अब x के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर

9x - 10y = -12

$$\Rightarrow 9\left(\frac{13-3y}{2}\right) - 10y = -12$$

⇒ 117 - 27y - 20y = -24

⇒ 117 - 47y = -24

⇒ 47y = 117 + 24

⇒ 47y = 141

$$\Rightarrow y = \frac{141}{47} = 3$$

अब समीकरण (1) में y = 3 में रखने पर

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \frac{13-3(3)}{2} = \frac{13-9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

अत: दिए गए रैखिक समीकरण युग्म का हल है।

x = 2 और y = 3

प्रश्न 2 2x + 3y = 11 और 2x - 4y = -24 को हल कीजिए और इसमें 'm' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए y = mx + 3 हो।

उत्तर- 2x + 3y = 11 ...(1)

2x - 4y = -24 ...(2)

समीकरण (1) से

2x + 3y = 11

⇒ 2x = 11 - 3y

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \frac{11-3y}{2} \ldots (3)$$

x का मान समीकरण (2) में रखने पर

2x - 4y = -24

$$\Rightarrow 2\left(\frac{11-3y}{2}\right) - 4y = -24$$

⇒ 11 - 3y - 4y = -24

⇒ 11 - 7y = -24

⇒ 7y = 11 + 24

⇒ 7y = 35

$\Rightarrow \mathbf{y} = \frac{35}{7} = 5$

समीकरण (3) में y = 5 रखने पर

$\Rightarrow \mathbf{x} = \frac{11-3y}{2}$

$\Rightarrow \mathbf{x} = \frac{11-3(5)}{2}$

$\Rightarrow \mathbf{x} = \frac{11-15}{2}$

$\Rightarrow \mathbf{x} = \frac{-4}{2} = -2$

$\mathbf{x} = -2$ और $\mathbf{y} = 5$

अब m का मान प्राप्त करने के लिए x और y का मान y = mx + 3 में रखने पर

y = mx + 3

⇒ 5 = m(-2) + 3

⇒ 5 = -2m + 3

⇒ -2m = 5 - 3

⇒ -2m = 2

⇒ m = -1

प्रश्न 3 निम्न समस्या में रैखिक समीकरण युग्म बनाइए और उनके हल प्रतिस्थापन विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

(i) दो संख्याओं का अन्तर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

(ii) दो संपूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18° अधिक है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

(iii) एक क्रिकेट टीम के कोच ने 7 बल्ले तथा 6 गेंदे 3800 रूपये में खरीदी। बाद में, उसने 3 बल्ले तथा 5 गेंदें 1750 रूपये में खरीदी। प्रत्येक गेंद का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(iv) एक नगर में टैक्सी के भाड़े में एक नियत भाड़े के अतिरिक्त चली गई दुरी पर भाडा सम्मिलित किया जाता है। 10 किलोमीटर दुरी के लिए 105 रूपये है तथा 15 किलोमीटर के लिए भाडा 155 रूपये है। नियत भाडा तथा प्रति किलोमीटर भाडा ज्ञात कीजिए और एक व्यक्ति को 25 किलोमीटर यात्रा करने के लिए कितना भाडा देना होगा?

(v) यदि किसी भिन्न के अंश और दोनों में 2 जोड़ दिया जाए, तो वह $\frac{9}{11}$ हो जाती है। यदि अंश और हर दोनों में 3 जोड़ दिया जाए वह $\frac{5}{6}$ हो जाती है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

(vi) पाँच वर्ष बाद जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु से तीन गुनी हो जाएगी। पाँच वर्ष पूर्व जैकब की आयु उसके पुत्र की सात गुनी थी। उनकी वर्तमान आयु क्या है?

उत्तर-

(i) माना पहली संख्या x और दूसरी संख्या y है।

तो प्रश्नानुसार,

स्थिति (I)

$x - y = 26$ ...(1)

स्थिति (II)

$x = 3y$ ...(2)

अब समीकरण (1) में $x = 3y$ रखने पर

$x - y = 26$

$\Rightarrow 3y - y = 26$

$\Rightarrow 2y = 26$

$\Rightarrow y = 13$

अब $y = 13$ समीकरण (2) में रखने पर

$x = 3y$

$\Rightarrow x = 3 \times 13 = 39$

अतः पहली संख्या 39 है और दूसरी संख्या 13 है।

(ii) माना दो संपूरक कोणों में से बड़ा कोण x है

और छोटा कोण y है।

अत: $x - y = 180^{o}$ ...(1)

$x + y = 180^{o}$ ...(2)

(संपूरक कोणों का योग 180^{o} होता है)

अब समीकरण (1) से

$x - y = 180°$

$\Rightarrow x = 18° + y$

अब x का मान समीकरण (2) में रखने पर

$\Rightarrow x + y = 180°$

$\Rightarrow 18° + y + y = 180°$

$\Rightarrow 18° + 2y = 180°$

$\Rightarrow 2y = 180° - 18°$

$\Rightarrow 2y = 162°$

$\Rightarrow y = \frac{162°}{2}$

$\Rightarrow$ y = 81°

y का मान समीकरण (1) में रखने पर

$\Rightarrow$ x = 18° + y

$\Rightarrow$ x = 18° + 81°

$\Rightarrow$ x = 99°

अत: बड़ा कोण 99° है और छोटा कोण 81° है।

(iii) माना एक बल्ले का मूल्य x रुपये

और एक गेंद का मूल्य y रुपये है।

स्थित (I)

7 बल्ले + 6 गेंद = 3800

$\Rightarrow$ 7x + 6y = 3800 ...(1)

स्थित (II)

3 बल्ले + 5 गेंद = 1750

$\Rightarrow$ 3x + 5y = 1750 ...(2)

समीकरण (2) से

3x + 5y = 1750

$\Rightarrow$ 3x = 1750 - 5y

$$\Rightarrow x = \frac{1750-5y}{3}$$

अब इस x के मान को समीकरण (1) में रखने पर

7x + 6y = 3800

$$7\left(\frac{1750-5y}{3}\right) + 6y = 3800$$

$\Rightarrow$ 12250 - 35y + 18y = 11400

$\Rightarrow$ 12250 - 17y = 11400

$\Rightarrow$ 17y = 12250 - 11400

$\Rightarrow$ 17y = 850

$$\Rightarrow y = \frac{850}{17} = 50$$

अब y = 50 समीकरण (2) में रखने पर

$$\Rightarrow x = \frac{1750-5y}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1750-5\times 50}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1750-250}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1500}{3} = 500$$

$$\Rightarrow x = 500 \text{ और } y = 50$$

अत: एक बल्ले का मूल्य 500 रुपया है और एक गेंद का मूल्य 50 रुपया है।

(iv) माना टैक्सी का नियत भाडा x रुपया है।

और प्रत्येक अतिरिक्त प्रति किलोमीटर के लिए भाडा y रुपया है।

स्थिति (I)

$x + 10y = 105$ ...(1)

स्थिति (II)

$x + 15y = 155$ ...(2)

समीकरण (1) से

$x + 10y = 105$

अब x का मान समीकरण (2) में रखने पर

$x + 15y = 155$

$\Rightarrow (105 - 10y) + 15y = 155$

$\Rightarrow 105 + 5y = 155$

$\Rightarrow 5y = 155 - 105$

$\Rightarrow 5y = 50$

$$\Rightarrow y = \frac{50}{5} = 10$$

अब समीकरण (1) में $y = 10$ रखने पर

$\Rightarrow x = 105 - 10y$

$\Rightarrow x = 105 - 10(10)$

$\Rightarrow x = 105 - 100 = 5$

अत: नियत भाडा 5 रुपया और अतिरिक्त किराया 10 रुपया है।

25 किलोमीटर के लिए भाडा = x + 25y

= 5 + 25(10)

= 5 + 250 = 255 रुपये

(v)

माना अंश x है और हर y है।

अत : भिन्न $= \frac{x}{y}$

स्थिति (I)

अंश और हर में 2 जोड़ने पर $\frac{9}{11}$ हो जाता है।

$\frac{x+2}{y+2} = \frac{9}{11}$

या 11(x + 2) = 9(y + 2)

⇒ 11x + 22 = 9y + 18

⇒ 11x - 9y = 18 - 22

⇒ 11x - 3y = -4 ...(1)

स्थिति (II)

अंश और हर में 3 जोड़ने पर $\frac{9}{11}$ हो जाता है।

$\frac{x+3}{y+3} = \frac{5}{6}$

या 6(x + 3) = 5(y + 3)

⇒ 6x + 18 = 5y + 15

⇒ 6x - 5y = 15 - 18

$\Rightarrow$ 6x - 5y = -3 ...(2)

समीकरण (2) से

6x - 5y = -3

$\Rightarrow$ 6x + 3 = 5y

$$\Rightarrow y = \frac{6x+3}{5}$$

अब y का मान समीकरण (1) में रखने पर

11x - 9y = -4

$$\Rightarrow 11x - 9\left(\frac{6x+3}{5}\right) = -4$$

$\Rightarrow$ 55x - 54x - 27 = -20

$\Rightarrow$ x = 27 - 20 = x = 7

अब x = 7 समीकरण (2) में रखने पर

$$\Rightarrow y = \frac{6(7)+3}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{42+3}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

अतः अंश 7 और हर 9 है।

इसलिए अभीष्ट भिन्न $\frac{7}{9}$ है।

(vi) माना जैकब की वर्त्तमान आयु x वर्ष है।

और उसके पुत्र की वर्त्तमान आयु y वर्ष है।

स्थिति (I)

पाँच वर्ष बाद जैकब की आयु = $x + 5$ वर्ष

और उसके पुत्र की आयु = $y + 5$ वर्ष

अत: $x + 5 = 3(y + 5)$

$\Rightarrow x + 5 = 3y + 15$

$\Rightarrow x - 3y = 15 - 5$

$\Rightarrow x - 3y = 10$ ...(1)

स्थित (II)

पाँच वर्ष पूर्व जैकब की आयु = $x - 5$ वर्ष

और पुत्र की आयु = $y - 5$ वर्ष

तो $x - 5 = 7(y - 5)$

$\Rightarrow x - 5 = 7y - 35$

$\Rightarrow x - 7y = 5 - 35$

$\Rightarrow x - 7y = -30$ ...(2)

समीकरण (2) से

$\Rightarrow x - 7y = -30$

$\Rightarrow x = 7y - 30$

अब x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$\Rightarrow x - 3y = 10$

$\Rightarrow$ 37y - 30 - 3y = 10

$\Rightarrow$ 4y = 10 + 30

$\Rightarrow$ 4y = 40

$\Rightarrow$ y = 10

y = 10 को समीकरण (2) में रखने पर

$\Rightarrow$ x = 7(10) - 30

$\Rightarrow$ x = 70 - 30 = 40

अतः जैकब की वर्तमान आयु 40 वर्ष और उसके पुत्र की वर्तमान आयु 10 वर्ष है।

प्रश्नावली 3.4 (पृष्ठ संख्या 63-64)

प्रश्न 1 निम्न समीकरणों के युग्म को विलोपन विधि तथा प्रतिस्थापना विधि से हल कीजिए। कौन सी विधि अधिक उपयुक्त है?

(i) x + y = 5 और 2x - 3y = 4

(ii) 3x + 4y = 10 और 2x - 2y = 2

(iii) 3x - 5y - 4 = 0 और 9x = 2y + 7

(iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ और $x - \frac{y}{3} = 3$

उत्तर-

(i) x + y = 5 ...(1)

2x - 3y = 4 ...(2)

समी. (2) × 3 = 3x + 3y = 15 ...(3)

समी. (2) × 1 = $2x - 3y = 4$ ... (4)

(नोट: यहाँ y के गुणांक बराबर हो चुके हैं। और चिन्ह विपरीत है इसलिए जोड़ेंगे।) अब समी. (3) और (4) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{l} 3x + 3y = 15 \text{ ......(iii)} \\ 2x - 3y = \;\; 4 \text{ ......(iv)} \\ \hline 5x \qquad\quad = 19 \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \frac{19}{5}$$

अब समीकरण (1) में $\mathbf{x} = \frac{19}{5}$ रखने पर

$x + y = 5$

$$\Rightarrow \frac{19}{5} + \mathbf{y} = 5$$

$$\Rightarrow \mathbf{y} = 5 - \frac{19}{5}$$

$$\Rightarrow \mathbf{y} = \frac{25-19}{5}$$

$$\Rightarrow \mathbf{y} = \frac{6}{5}$$

अतः दिए गए रैखीक समीकरण युग्म का हल है $\mathbf{x} = \frac{19}{5}$ और $\mathbf{y} = \frac{6}{5}$

(ii) $3x + 4y = 10$ ...(1)

$2x - 2y = 2$ ...(2)

समी. (1) × 1

$\Rightarrow 3x + 4y = 10$ ...(3)

समी. (2) × 2

$\Rightarrow$ 4x = 4x - 4y = 4 ... (4)

समीकरण (1) और समीकरण (2) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{rcl} 3x + 4y & = & 10 \ldots \text{(iii)} \\ 4x - 4y & = & 4 \ldots \text{(iv)} \\ \hline 7x & = & 14 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{14}{7} = 2$$

अब x का मान 2 समीकरण (1) में रखने पर

3x + 4y = 10

$\Rightarrow$ 3(2) + 4y = 10

$\Rightarrow$ 6 + 4y = 10

$\Rightarrow$ 4y = 10 - 6

$\Rightarrow$ 4y = 4

$\Rightarrow$ y = 1

अत: दिए गए रैखिक समीकरण युग्म का हल है x = 2 और y = 1

(iii) 3x - 5y - 4 = 0

$\Rightarrow$ 3x - 5y = 4 ...(1)

$\Rightarrow$ 9x = 2y + 7

$\Rightarrow 9x - 2y + 7$

समी. (1) × 3

$\Rightarrow 9x - 15y = 12$ ...(3)

समी. (2) × 1

$\Rightarrow 9x - 2y = 7$ ...(4)

समीकरण (3) में से (4) घटाने पर

$$\begin{array}{rcrcl} 9x & - & 15y & = & 12 \;...(iii) \\ 9x & - & 2y & = & 7 \;...(iv) \\ (-) & & (+) & & (-) \\ \hline & & -13y & = & 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow 3x - 5\left(\frac{-5}{13}\right) = 4$$

$$\Rightarrow 3x + \left(\frac{25}{13}\right) = 4$$

$$\Rightarrow 39x + 25 = 52$$

$$\Rightarrow 39x = 52 - 25$$

$$\Rightarrow 39x = 27$$

$$\Rightarrow x = \frac{27}{39} = \frac{9}{13}$$

अतः दिए गए रैखीक समीकरण युग्म का हल है

$x = \frac{9}{13}$ और $y = \frac{-5}{13}$

(iv)

$\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$

$= 3x + 4y = -6 \ldots (1)$

और $x - \frac{y}{3} = 3$

$= 3x - y = 9 \ldots (2)$

समीकरण (3) में से (4) घटाने पर

$$\begin{array}{rcl} 3x + 4y &=& -6 \ \ldots(i) \\ 3x - y &=& 9 \ \ldots(ii) \\ (-) \quad (+) & & (-) \\ \hline 5y &=& -15 \end{array}$$

$\Rightarrow y = \frac{-15}{5} = -3$

अब y = -3 समीकरण (1) में रखने पर

$\Rightarrow 3x + 4y = -6$

$\Rightarrow 3x + 4(-3) = -6$

$\Rightarrow 3x - 12 = -6$

$\Rightarrow 3x = 6$

$\Rightarrow x = \frac{6}{3}$

$\Rightarrow x = 2$

अत: दिए गए रैखिक समीकरण युग्म का हल है x = 2 और y = -3

प्रश्न 2 निम्न समस्या में रैखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके हल यदि उनका अस्तित्व हो विलोपन विधि से ज्ञात कीजिए।

(i) यदि हम अंश में 1 जोड़ दे तथा हर में से 1 घटा दे, तो भिन्न 1 में बदल जाती है। यदि हर में 1 जोड़ दे, तो यह $\frac{1}{2}$ हो जाती वह भिन्न क्या है।

(ii) पाँच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात्, नूरी की आयु सोनू की आयु की दो गुनी हो जाएगी नूरी और सोनू की आयु में कितनी है?

(iii) दो अंको की संख्या के अंको का योग 9 है। इस संख्या का 9 गुना, संख्या के अंको को पलटने से बनी संख्या का दो गुना है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

(iv) मीना 2000 रुपये निकालने के लिए एक बैंक गई। उसने खजाँची से 50 रुपये तथा 100 रुपये के नोट देने के लिए कहा। मीना ने कुल 25 नोट प्राप्त किए। ज्ञात कीजिए की उसने 50 रुपये और 100 रुपये के कितने -कितने नोट प्राप्त किए।

(v) किराए पर पुस्तके देने वाले किसी पुस्तकालय का प्रथम तीन दिनों का एक नियत किराया है तथा उसके बाद प्रत्येक अतिरिक्त दिन का अलग किराया है। सरिता ने सात दिनों तक एक पुस्तक रखने के लिए 27 रुपये अदा किए, जबकि सुसी ने एक पुस्तक पाँच दिनों तक रखने के 21 रुपये अदा किए। नियत किराया तथा प्रत्येक अतिरिक्त दिन का किराया ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i)

माना भिन्न का अंश x और हर y है।

इसलिए, भिन्न $= \frac{x}{y}$

$$\frac{x+1}{y-1} = \frac{1}{1}$$

$\Rightarrow x + 1 = y - 1$

$\Rightarrow x - y = -1 - 1$

$\Rightarrow x - y = -2 \ldots(1)$

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 2x = y + 1$

$\Rightarrow 2x - y = 1$ ...(2)

(यहाँ समीकरण (1) और (2) में y के गुणांक पहले ही से बराबर है इसलिए इन्हें बराबर करने की जरुरत नहीं है।)

अब समीकरण (1) में से (2) घटाने पर

$$\begin{array}{rcr} x - y &=& -2 \\ 2x - y &=& 1 \\ (-) \quad (+) & & (-) \\ \hline -x & = & -3 \end{array}$$

$\therefore x = 3$

अब x का मान 3 समीकरण (1) में रखने पर

$\Rightarrow x - y = -2$

$\Rightarrow 3 - y = -2$

$\Rightarrow y = 3 + 2$

$\Rightarrow y = 5$

अतः अभीष्ट भिन्न $= \frac{3}{5}$

(ii) माना नूरी की आयु x वर्ष

और सोनू की आयु y वर्ष

स्थिति (I)

पाँच वर्ष पूर्व, नूरी की आयु = x - 5 वर्ष सोनू की आयु = y - 5 वर्ष

प्रश्नानुसार,

$\Rightarrow x - 5 = 5(y - 5)$

$\Rightarrow x - 5 = 5y - 25$

$\Rightarrow x - 5y = 5 - 25$

$\Rightarrow x - 5y = -20$ ...(1)

स्थिति (II)

दस वर्ष बाद, नूरी की आयु = x + 10 वर्ष सोनू की आयु = y + 10 वर्ष

प्रश्नानुसार,

$x + 10 = 2(y + 10)$

$\Rightarrow x + 10 = 2y + 20$

$\Rightarrow x - 2y = 20 - 10$

$\Rightarrow x - 2y = 10$ ...(2)

चूँकि x के गुणांक स्वत: बराबर है इसलिए गुणांक बराबर नहीं करेंगे।

अब समीकरण (1) में से (2) घटाने पर

$$\begin{array}{rcl} x - 5y &=& -20 \ldots (i) \\ x - 2y &=& 10 \ldots (ii) \\ (-) \quad (+) & & (-) \\ \hline -3y &=& -30 \end{array}$$

$\Rightarrow -3y = -30$

$\Rightarrow y = \dfrac{-30}{-3} = 10$

y = 10 समीकरण (1) में रखने पर

$\Rightarrow x - 5y = -20$

$\Rightarrow x - 5y = -20$

$\Rightarrow x - 50 = -20$

$\Rightarrow x = 50 - 20$

$\Rightarrow x = 30$

अत: नूरी की आयु 30 वर्ष है और सोनू की आयु 10 वर्ष है।

(iii) माना संख्या के इकाई का अंक x है।

और दहाई का अंक y है।

तो वास्तविक संख्या = 10y + x होगी,

और पलटी हुई संख्या = 10x + y

स्थिति (I)

$x + y = 9$ ...(1)

स्थिति (II)

9(संख्या) = 2(पलटी संख्या)

$\Rightarrow 9(10y + x) = 2(10x + y)$

$\Rightarrow 90y + 9x = 20x + 2y$

$\Rightarrow 20x - 9x + 2y - 90y = 0$

$\Rightarrow 11x - 88y = 0$

$\Rightarrow x - 8y = 0$

$\Rightarrow x = 8y$ ...(2)

समीकरण (1) में $x = 8y$ रखने पर $x + y = 9$

$\Rightarrow 8y + y = 9$

$\Rightarrow 9y = 9$

$\Rightarrow y = 1$

$y = 1$ समीकरण दो में रखने पर

$\Rightarrow x = 8y = 8 \times 1 = 8$

अत: अभीष्ट संख्या = $10y + x$

$= 10 \times 1 + 8$

$= 18$

(iv) माना 50 रुपये के नोटों की संख्या = x है।

और 100 रुपये के नोटों की संख्या = y है।

स्थित (I)

कुल नोट की संख्या = 25

अत: $x + y = 25$ ...(1)

स्थित (II)

50 के x नोट + 100 के y नोट = 2000 रुपये

अत: $50x + 100y = 2000$

या $x + 2y = 40$ ...(2) (सरल करने पर)

समीकरण (1) में से (2) घटाने पर

$$\begin{array}{rcrcll} x & + & y & = & 25 & \ldots (i) \\ x & + & 2y & = & 40 & \ldots (ii) \\ (-) & & (-) & & (-) & \\ \hline & & -y & = & -15 & \end{array}$$

$\therefore y = 15$

अब $y = 15$ समीकरण (1) में रखने पर

$x + y = 25$

$x + 15 = 25$

$x = 25 - 10$

x = 10

(v) माना नियत किराया = x रुपया

और अतिरिक्त दिन का किराया = y रुपया

स्थिति (I)

x + 7y = 27 ...(1)

स्थिति (II)

x + 5y = 21 ...(2)

$$\begin{array}{r} x + 7y = 27 \quad \ldots \text{(i)} \\ x + 5y = 21 \quad \ldots \text{(ii)} \\ (-) \quad (-) \qquad (-) \qquad\qquad \\ \hline 2y = \;\; 6 \qquad\qquad \end{array}$$

अत: $y = \frac{6}{2} = 3$

y = 3 समीकरण (1) में रखने पर

$\Rightarrow$ x + 7y = 27

$\Rightarrow$ x + 7(3) = 27

$\Rightarrow$ x + 21 = 27

$\Rightarrow$ x = 6

अत: नियत किराया = 6 रुपया और अतिरिक्त किराया = 3रुपए/ दिन

प्रश्नावली 3.5 (पृष्ठ संख्या 69-70)

प्रश्न 1 निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मो में से किसका एक अद्वितीय हल है, किसका कोई हल नहीं हा या किसके अपरिमित रूप से अनेक हल है। अद्वितीय हल की स्थिति में, उसे ब्रज-गुणन विधि से ज्ञात कीजिए।

(i) $x - 3y = 0$

$3x - 9y - 2 = 0$

(ii) $2x + y = 5$

$3x + 2y = 8$

(iii) $2x + y = 5$

$3x + 2y = 8$

(iv) $x - 3y - 7 = 0$

$3x - 3y - 15 = 0$

उत्तर-

(i) दिए गए समीकरण-निकाय की तुलना व्यापक रूप में व्यक्त समीकरण निकाय

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$$ से करने पर:

$$\left.\begin{array}{r} x - 3y - 3 = 0 \\ 3x - 9y - 2 = 0 \end{array}\right\}$$ के लिए

$a_1 = 1, b_1 = -3, c_1 = -3$

$a_2 = 3, b_2 = -9, c_2 -2$

चूँकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$\therefore$ इस निकाय का कोई भी हल नहीं है।

(ii) दिए गए समीकरण-निकाय की तुलना व्यापक रूप में व्यक्त समीकरण निकाय

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$$ से करने पर:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 8 \end{array}\right\}$$ के लिए

$$\Rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

$$3x + 2y - 8 = 0$$

$a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = -5$

$a_2 = 3, b_2 = 2, c_2 -8$

चूँकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$\therefore$ इस निकाय का एक अद्वितीय हल सम्भव है।

$\therefore$ इस निकाय को हल करने के लिए।

$$\frac{x}{\begin{matrix}1 & -5\\ 2 & -8\end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix}-5 & 2\\ -8 & 3\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{[1\times(-8)]-[2\times(-5)]} = \frac{y}{[-5\times3]-[2\times(-8)]}$$

$$= \frac{1}{[2\times2]-[3\times1]}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(-8)-(-10)} = \frac{y}{(-15)-(-16)} = \frac{1}{4-3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-8+10} = \frac{y}{-15+16} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = 1$$

$\Rightarrow x = 2$ और $y = 1$

(iii) दिए गए समीकरण-निकाय की तुलना व्यापक रूप में व्यक्त समीकरण निकाय

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ से करने पर:}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x - 5y &= 20 \\ 6x - 10y &= 40 \end{aligned}\right\} \text{ के लिए}$$

$$\Rightarrow 3x - y5 - 20 = 0$$

$$6x + 10y - 40 = 0$$

$a_1 = 3, b_1 = -5, c_1 = -20$

$a_2 = 6, b_2 = -10, c_2 = -40$

चूँकि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-20}{-40} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$\therefore$ इस निकाय का एक अद्वितीय हल है।

(iv) दिए गए समीकरण-निकाय की तुलना व्यापक रूप में व्यक्त समीकरण निकाय

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$ से करने पर:

$$\left.\begin{aligned} x - 3y - 7 = 0 \\ 3x - 3y - 15 = 0 \end{aligned}\right\}$$ के लिए

$a_1 = 1, b_1 = -3, c_1 = -7$

$a_2 = 3, b_2 = -3, c_2 = -15$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-3} = 6$$

और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-7}{-15} = \frac{7}{15}$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$\therefore$ इस निकाय का एक अद्वितीय हल है।

अब व्रज-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{\begin{array}{cc} -3 & -7 \\ -3 & -15 \end{array}} = \frac{y}{\begin{array}{cc} -7 & 1 \\ -15 & 3 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 3 & -3 \end{array}}$$

i.e $\frac{x}{(-3)(-15)-(-3)(-7)} = \frac{y}{(-7)\times3-1\times(-15)}$

$= \frac{1}{[-3\times1-3\times(-3)}$

$\Rightarrow \frac{x}{45-21} = \frac{y}{-21+15} = \frac{1}{-3+9}$

$\Rightarrow \frac{x}{24} = \frac{y}{-6} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow x = \frac{24}{6} = 4, y = \frac{-6}{6} = -1$

इस प्रकार, $x = 4$ और $y = -1$

प्रश्न 2 a और b के किन मानों के लिए, रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे?

(i) 2x + 3y = 7

(a - b)x + (a + b)y = 3a + b – 2

(ii) k के किस मान के लिए, निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं है?

3x + y = 1

(2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1

उत्तर-

(i) दिए गए समीकरण-निकाय की तुलना व्यापक रूप में व्यक्त समीकरण निकाय

$$\left.\begin{array}{c} 2x + 3y = 7 \\ (a-b)x + (a+b)y = (3a+b-2) \end{array}\right\} \text{की तुलना}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\} \text{से करने पर, हम पाते है}$$

$a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = 7$

$a_2 = (a - b), b_2 = (a + b), c_2 = (3a + b - 2)$

अपरिमित रूप से अनेक हल के लिए,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{2}{(a-b)} = \frac{3}{(a+b)} = \frac{7}{(3a+b-2)}$$

प्रथम दो समीकरणों से हमे प्राप्त होता है

$$\frac{2}{a-b} = \frac{3}{a+b}$$

$\Rightarrow 2(a + b) = 3(a - b)$

$\Rightarrow 2a + 2b = 3a - 3b$

$\Rightarrow 2a - 3b + 2b + 3b = 0$

$\Rightarrow -a + 5b = 0$

$\Rightarrow a - 5b = 0 \ldots(1)$

अंतिम दो समीकरणों से, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{3}{a+b} = \frac{7}{3a+b-2}$$

$\Rightarrow 3(3a + b - 2) = 7(a + b)$

$\Rightarrow 9a + 3b - 6 = 7a + 7b$

$\Rightarrow 9a - 7a + 3b - 7b - 6 = 0$

$\Rightarrow 2a - 4b = 6$

$\Rightarrow a - 2b = 3$ ...(2)

अब $\begin{cases} a - 5b = 0 \\ a - 2b = 3 \end{cases}$ को वज्रगुणन विधि से हल करने के लिए

$A_1 = 1, B_1 = -5, C_1 = 0$

$A_2 = 1, B_2 = -2, C_2 = 0$

$$\frac{a}{\begin{matrix} -5 & \times & 0 \\ -2 & & -3 \end{matrix}} = \frac{b}{\begin{matrix} 0 & \times & 1 \\ -3 & & 1 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} 1 & \times & -5 \\ 1 & & -2 \end{matrix}}$$

$$\frac{a}{(-5)(-3)-(-2)\times 0} = \frac{b}{0\times 1 - 1\times(-3)}$$

$$\frac{1}{(-2)\times 1 - 1\times(-5)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{15-0} = \frac{b}{0+3} = \frac{1}{-2+5}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{15} = \frac{b}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3} \times 15 = 5$$

$$b = \frac{1}{3} \times 13 = 1$$

इस प्रकार $a = 5$ और $b = 1$

(ii) कोई भी हल न होने के लिए

$$\frac{3}{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \neq \frac{-1}{1(2k+1)}$$

$$\frac{3}{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$$ लेने पर,

3(k - 1) = 1(2k - 1)

⇒ 3k-3 = 2k - 1

⇒ 3k - 2k = -1 + 3

⇒ k = 2

अत: k = 2 होने पर दिए गए समीकरण-निकाय का कोई भी हल नहीं होगा।

प्रश्न 3 निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को प्रतिस्थापन एंव व्रज-गुणन विधियों से हल कीजिए।

किस विधि को आप अधिक उपयुक्त मानते हैं?

8x + 5y = 9

3x + 2y = 4

उत्तर- प्रतिस्थापन विधि से दिए गए निकाय का हल ज्ञात करने क लिए

= 8x + 5y = 9 ...(1)

3x + 2y = 4 ...(2)

समीकरण (2) से $y = \frac{4-3x}{2}$

समीकरण (1) में y का मान प्रतिस्थापित करने पर हमे प्राप्त होता है

$$8x + 5\left[\frac{4-3x}{2}\right] = 9$$

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ से करने पर, हम पाते है

$a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = 7$

$a_2 = (a - b), b_2 = (a + b), c_2 = (3a + b - 2)$

अपरिमित रूप से अनेक हल के लिए,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{2}{(a-b)} = \frac{3}{(a+b)} = \frac{7}{(3a+b-2)}$$

प्रथम दो समीकरणों से हमे प्राप्त होता है

$$\frac{2}{a-b} = \frac{3}{a+b}$$

$\Rightarrow 2(a + b) = 3(a - b)$

$\Rightarrow 2a + 2b = 3a - 3b$

$\Rightarrow 2a - 3b + 2b + 3b = 0$

$\Rightarrow -a + 5b = 0$

$\Rightarrow a - 5b = 0$ ...(1)

अंतिम दो समीकरणों से, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{3}{a+b} = \frac{7}{3a+b-2}$$

⇒ 2 × 8x + 5 × 4 - 5 × 3x = 9 x 2

⇒ 16x + 20 - 15x = 18

⇒ x + 20 - 18 = 0

⇒ x + 2 = 0

⇒ x = -2

अब $\mathbf{x} = (-2)$ को $\frac{4-3x}{2}$ में रखने पर,

$$y = \frac{4-3(-2)}{2}$$

$$\Rightarrow y \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

इस प्रकार x = -2 और y = 5 वज्रगुणन विधि से हल करने के लिए व्यापक समीकरण निकाय से

$$\left.\begin{matrix} 8x - 5y - 9 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{matrix}\right\}$$ की तुलना करने पर

$a_1 = 8$, $b_1 = 5$, $c_1 = -9$

$a_2 = 3$, $b_2 = 2$, $c_2 = -4$

$$\frac{x}{\begin{matrix} 5 & -9 \\ 2 & -4 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} -9 & 8 \\ -4 & 3 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{matrix}}$$

$$\frac{x}{5\times(-4)-2\times(-9)} = \frac{y}{-9\times3-8\times(-4)}$$

$$\frac{1}{8\times2-3\times5}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-20+18} = \frac{y}{-27+36} = \frac{1}{16-15}$$

$b = 1 \times -2 = -2$ और $y = 1 \times 5 = 5$

इस प्रकार $x = -2$ और $y = 5$

प्रश्न 4 निम्न समस्या में रैखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके हल (यदि उनका अस्तित्व हो) किसी बीजगणितीय विधि से ज्ञात कीजिए।

(i) एक छात्रावास के मासिक व्यय का एक भाग नियत है तथा शेष इस पर निर्भर करता है कि छात्र ने कितने दिन भोजन लिया है। जब एक विद्धार्थी A को, जो 20 दिन भोजन करता है, 1000 रुपये छात्रावास के व्यय के लिए अदा करने पड़ते है, जबकि एक विधार्थी B को, जो 26 दिन भोजन करता है छात्रावास के व्यय के लिए 1180 रुपये अदा करने पड़ते है। नियत व्यय और प्रतिदिन के भोजन का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(ii) एक भिन्न $\frac{1}{3}$ हो जाती है, जब उसके अंश से 1 घटाया जाता है और वह $\frac{1}{4}$ हो जाती है जब हर में 8 जोड़ दिया जाता है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

(iii) यश ने एक टेस्ट में 40 अंक अर्जित किए, जब उसे प्रत्येक सही उत्तर पर 3 अंक मिले तथा अशुद्ध उत्तर पर 1 अंक की कटौती की गई। यदि उसे सही उत्तर पर 4 अंक मिलते तथा अशुद्ध उत्तर पर 2 अंक कटते, तो यश 40 अंक अर्जित करता। टेस्ट में कितने प्रश्न थे?

(iv) एक राजमार्ग पर दो स्थान A और B, 100 किलोमीटर की दुरी पर है। एक कार A से तथा दूसरी कार b से एक ही समय चलना प्रारम्भ करती है। यदि ए कारे भिन्न भिन्न चालों से एक ही दिशा में चलती है, तो वे 5 घंटे पश्चात् मिलती हैं। दोनों कारों की चाल ज्ञात कीजिए।

(v) एक आयात का क्षेत्रफल 9 वर्ग इकाई कम हो जाता है, यदि उसकी लंबाई 5 इकाई कम कर दी जाती है और चौड़ाई 3 इकाई बढ़ा दी जाती है। यदि हम लंबाई को 3 इकाई और चौड़ाई को 2 इकाई बढ़ा दे, तो क्षेत्रफल 67 वर्ग इकाई बढ़ जाता है। आयत की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i) माना नियत व्यय = x रुपये

और प्रतिदिन भोजन खर्च = y रुपये

विद्यार्थी A के लिए भोजन लेने की अवधि = 20 दिन

∴ 20 दिन का भोजन खर्च = 20y रुपये

∴ शर्त के अनुसार x + 20y = 1000

विद्यार्थी B के लिए

भोजन लेने की अवधी = 26 दिन

⇒ 26 दिन = 26 दिन के भोजन का खर्च = 26y रुपये

शर्त के अनुसार x + 26y = 1180 रुपये ...(2)

इस प्रकार हमें निम्नांकित समीकरण निकाय प्राप्त हुआ है

x + 20y = 1000, x + 26y = 1180

∴ $a_1 = 1$, $b_1 = 20$, $c_1 = -1000$

$a_2 = 1$, $b_2 = 26$, $c_2 = -1180$

⇒ वज्र-गुणन द्वारा

$$\frac{x}{\begin{array}{ccc} 20 & \times & -1000 \\ 26 & & -1180 \end{array}} = \frac{y}{\begin{array}{ccc} -1000 & \times & 1 \\ -1180 & & 1 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{ccc} 1 & \times & 20 \\ 1 & & 26 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{20\times(-1180)\times1(-1180)\times1} = \frac{1}{1\times26-1\times20}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-23600+26000} = \frac{y}{-1000+1180}$$

$$= \frac{1}{26-20}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2400} = \frac{y}{180} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore x = \frac{1}{6} \times 2400 = 400$$

$$y = \frac{1}{6} \times 180 = 30$$

इस प्रकार $x = 400$ और $y = 30$

अतः नियत खर्च = 400 रुपये और प्रतिदिन खाने का खर्च = 30 रुपये

(ii) माना भिन्न का अंश = x और भिन्न का हर = y

∴ भिन्न = xy = xy

स्तिथि- (I)

$$\frac{\text{अंश - 1}}{\text{हर}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x - 1}{y} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{y} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3(x-1) = y$$

$$\Rightarrow 3x - 3 = y$$

$$\Rightarrow 3x - y - 3 = 0 \ldots (1)$$

स्तिथि- (II)

$$\frac{\text{अंश}}{\text{हर} + 8} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x}{y+8} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4x = y + 8$$

$$\Rightarrow 4x - y - 8 = 0 \ldots (2)$$

(1) और (2) की तुलना व्यापक निकाय से करने पर

$a_1 = 3, b_1 = -1, c_1 = -3$

$a_2 = 4, b_2 = -1, c_2 = -8$

$$\frac{x}{\begin{matrix}-1 & \times & -3 \\ -1 & & -8\end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix}-3 & \times & 3 \\ -8 & & 4\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}3 & \times & -1 \\ 4 & & -1\end{matrix}}$$

$$\therefore \frac{x}{(-1)\times(-8)-(-1)\times(-3)} = \frac{y}{(-3)\times4-(-8)\times3}$$

$$= \frac{1}{3\times(-1)-4\times(-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{8-3} = \frac{y}{-12+24} = \frac{1}{-3+4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{12} = \frac{1}{1}$$

$\therefore x = \frac{1}{1} \times 5 = 5$ और $y = \frac{1}{1} \times 12 = 12$

इस प्रकार, $x = 5$ और $y = 12$

$\therefore$ भिन्न $= \frac{5}{12}$

(iii) माना सही उत्तर के अंक = x

गलत उत्तर के अंक = y

स्थिति- (I)

सभी सही उत्तरों के अंक = 3 × x = 3x

सभी गलत उत्तरों के अंक = 1 × y =y

∴ शर्त के अनुसार, 3x - y = 40 ...(1)

स्थिति- (II)

सभी सही उत्तरों के अंक = 4 × x = 4x

सभी गलत उत्तरों के अंक = 2 × y = 2y

∴ शर्त के अनुसार, 4x - 2y = 50

⇒ 2x - y = 25 ...(2)

समीकरण (1) और (2) से

$a_1 = 3$, $b_1 = -1$, $c_1 = -40$

$a_2 = 2$, $b_2 = -1$, $c_2 = -25$

$$\frac{x}{\begin{matrix} -1 & \times & -40 \\ -1 & & -25 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} -40 & \times & 3 \\ -25 & & 2 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} 3 & \times & -1 \\ 2 & & -1 \end{matrix}}$$

$$\therefore \frac{x}{(-1)\times(-25)-(-1)\times(-40)}$$

$$= \frac{y}{-40\times 2-(-25)\times 3} = \frac{1}{3\times(-1)-2\times(-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{25-40} = \frac{y}{-80+45} = \frac{1}{-3+2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-15} = \frac{y}{-5} = \frac{1}{-1}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{-1} \times (-15) = 15$$

$$y = \frac{1}{-1} \times (-5) = 5$$

$$\therefore x = 15 \text{ और } y = 5$$

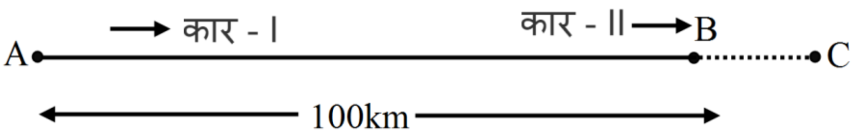
टैस्ट के कुल प्रश्न = [सही उत्तरो की संख्या]

+ [गलत उतरो की संख्या] = 15 + 5 = 20

अतः टैस्ट के कुल प्रश्न = 20

(iv) माना एक कार की गति x किमी/ घण्टा और दूसरी कार की गति। किमी/ घण्टा है।

स्थिति- (I)



कार- I द्वारा तय की गई दूरी = गति × समय = 5 × x किमी/घण्टा

AC = 5x

कार- II द्वारा तय की गई दूरी = BC = 5y

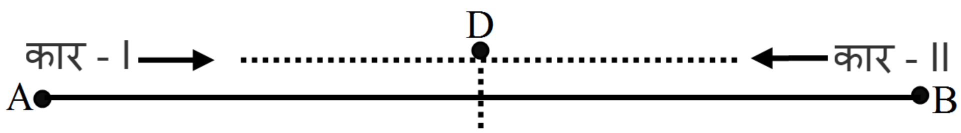
AB = AC - BC

100 = 5x - 5y

$\Rightarrow$ 5x - 5y - 100 = 0

$\Rightarrow$ x - y - 20 = 0

स्थिति- (II)



1 घण्टे में, कार-I द्वारा तय की गई दूरी = AD

$AD = 1 \times x = x$

1 घण्टे में, कार-II द्वारा तय की गई दूरी = BD

$BD = 1 \times y = y$

अब AB = AD + DB

$\Rightarrow 100 = x + y$

$\Rightarrow x + y = 100$ वज्र-गुणन द्वारा, हमें प्राप्त होता है

$x - y - 20 = 0$

$x + y - 100 = 0$

$a_1 = 1, b_1 = -1, c_1 = -20$

$a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = -100$

$$\frac{x}{\begin{matrix} -1 & \times & -20 \\ 1 & & -100 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} -20 & \times & 1 \\ -100 & & 1 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} 1 & \times & -1 \\ 1 & & 1 \end{matrix}}$$

$$\therefore \frac{x}{(-1)\times(-100)-(-1)\times(-20)} = \frac{y}{(-20)\times1-1\times(-100)}$$

$$= \frac{1}{(1\times1)-1\times(-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{100+20} = \frac{y}{-20+100} = \frac{1}{1+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{120} = \frac{y}{80} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \times 120 = 60$$

$$y = \frac{1}{2} \times 80 = 40$$

इस प्रकार, कार-I की गति = 60 किमी/ घण्टा, कार-II की गति किमी/ घण्टा

(v) आयत की लम्बाई = x इकाई और आयत की चौड़ाई = y इकाई

∴ आयत का क्षेत्रफल = x × y = xy

शर्त- I (लम्बाई -5) × (चौड़ाई + 3) = क्षेत्रफल -9

⇒ (x - 5) (y + 3) = xy -9

⇒ xy + 3x - 5y - 15

⇒ xy - 9 xy + 3x - 5y - 15 - xy + 9 = 0

⇒ 3x - 5y - 6 = 0 ...(1)

शर्त- II (लम्बाई + 3) × (चौड़ाई + 2) = क्षेत्रफल + 67

⇒ (x + 3) (+2) = y + 67

⇒ xy + 2x + 3y + 6 = xy + 67

⇒ xy + 2x + 3y + 6 - xy - 67 = 0

$\Rightarrow$ 2x + 3y - 61 = 0 ...(2)

अब, (1) और (2) में वज्रगुणन विधि का प्रयोग करने पर,

$a_1 = 3, b_1 = -5, c_1 = -6$

$a_2 = 2, b_2 = 3, c_2 = 61$

$$\frac{x}{\begin{array}{ccc} -5 & \times & -6 \\ 3 & & -61 \end{array}} = \frac{y}{\begin{array}{ccc} -6 & \times & 3 \\ -61 & & 2 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{ccc} 3 & \times & -5 \\ 2 & & 3 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(-5)\times(-61)-3\times(-6)} = \frac{y}{(-6)\times 2-(-61)\times 3}$$

$$\frac{1}{3\times 3-2\times(-5)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{305+18} = \frac{y}{-12+180} = \frac{1}{9+10}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{323} = \frac{y}{171} = \frac{1}{19}$$

$$\therefore x = \frac{1}{19} \times 323 = 17$$

$$y = \frac{1}{19} \times 171 = 9$$

इस प्रकार, आयत की लम्बाई = 17 इकाई आयत की चौड़ाई = 9 इकाई

प्रश्नावली 3.6 (पृष्ठ संख्या 74-75)

प्रश्न 1 निम्न समीकरण के युग्मों को रैखिक समीकरणों के युग्म में बदल करके हल कीजिए-

(i) $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2$

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{13}{6}$$

(ii) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$

$$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$$

(iii) $\frac{4}{x} + 3y = 14$

$$\frac{3}{x} - 4y = 23$$

(iv) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

(v) $\frac{7x-2y}{xy} = 5$

$$\frac{8x+7y}{xy} = 15$$

(vi) $6x + 3y = 6xy$

$2x + 4y = 6xy$

(vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$

$$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$$

(viii) $\frac{1}{2(3x+y)} + \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{3}{4}$

$$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$$

उत्तर-

(i)

माना $\frac{1}{x} = u$ और $\frac{1}{y} = v$

$\therefore \frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2$

$\Rightarrow \frac{u}{2} + \frac{v}{3} = 2 \ldots (1)$

और $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{13}{6} = \frac{u}{3} + \frac{v}{2} = \frac{13}{6} \ldots (2)$

समीकरण (1) को $\frac{1}{3}$ से और (2) को $\frac{1}{2}$ से गुणा करने पर,

$\frac{1}{3}\left[\frac{u}{2} + \frac{v}{3} = 2\right]$

$\Rightarrow \frac{u}{6} + \frac{v}{9} = \frac{2}{3} \ldots (3)$

$\frac{1}{2}\left[\frac{u}{3} + \frac{v}{2} = \frac{13}{6}\right]$

$\Rightarrow \frac{u}{6} + \frac{v}{4} = \frac{13}{12} \ldots (4)$

समीकरण (4) में से (3) को घटाने पर

$$\frac{u}{6} + \frac{v}{4} = \frac{13}{12}$$

$$\frac{u}{6} + \frac{v}{9} = \frac{2}{3}$$

$$(-) \quad (-) \qquad (-)$$

$$\frac{v}{4} - \frac{v}{9} = \frac{13}{12} - \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{9v-4u}{36} = \frac{13-8}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{36}v = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow v = \frac{5}{12} \times \frac{36}{5} = 3$$

समीकरण (3) में v = 3 प्रतिस्थापित करने पर,

$$\frac{u}{6} + \frac{3}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{6} = \frac{3}{2} - \frac{3}{9} = \frac{6-3}{9} = \frac{3}{9}$$

$$\Rightarrow u = \frac{3}{9} \times 6 = 2$$

इस प्रकार v = 3 और u = 2

परन्तु $\Rightarrow u = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = 2$$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ और $\Rightarrow v = \frac{1}{y}$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = 3$$

$\Rightarrow y = \frac{1}{3}$ इस प्रकार अभीष्ट हल है

$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$$

(ii)

दिया गया है कि $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2 \ldots (1)$

$\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1 \ldots (2)$

माना $\frac{1}{\sqrt{x}} = u$ और $\frac{1}{\sqrt{y}} = v$

$\therefore$ समीकरण (1) और (2) को हम इस प्रकार लिख सकते है

$2u + 3v = 2 \ldots(3)$

$4u - 9v = -1 \ldots(4)$

अब समीकरण (3) और (4)

$a_1 = 2,\ b_1 = 3,\ c_1 = -2$

$a_2 = 4,\ b_2 = -9,\ c_2 = 1$

$$\frac{u}{\begin{array}{ccc} 3 & \times & -2 \\ -9 & & 1 \end{array}} = \frac{v}{\begin{array}{ccc} -2 & \times & 2 \\ 1 & & 4 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{ccc} 2 & \times & 3 \\ 4 & & -9 \end{array}}$$

$\Rightarrow \frac{u}{3-18} = \frac{v}{-8-2} = \frac{1}{-18-12}$

$\Rightarrow u = \frac{1}{-30} \times (-15) = \frac{1}{2}$

$v = \frac{1}{-30} \times (-10) = \frac{1}{3}$

परन्तु $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$ और $v = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{9}$ या $y = 9$

अतः अभीष्ट हल $x = 4, y = 9$

दिए गए समीकरण युग्म है

$$\frac{4}{x} + 3y = 14 \ldots (1)$$

$$\frac{3}{x} - 4y = 23 \ldots (2)$$

माना $\frac{1}{x} = p$

$\therefore$ समीकरण (1) और (2) को हम इस प्रकार लिख सकते है

4p + 3y = 14 ...(3)

3p - 4y = 23 ...(4)

समीकरण (3) और (4) व्रजगुणन द्वारा हल करने के लिए

$a_1 = 4, b_1 = 3, c_1 = -14$

$a_2 = 3, b_2 = -4, c_2 = -23$

$$\frac{p}{\begin{matrix} 3 & -14 \\ -4 & -23 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} -14 & 4 \\ -23 & 3 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{[3\times(-23)]-[(-4)(-14)]}$$

$$= \frac{y}{[(-14)\times3]-[4\times(-23)]} = \frac{1}{[4(-4)]-[3\times3]}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{-69-56} = \frac{y}{-42+92} = \frac{1}{-16-9}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{-125} = \frac{y}{50} = \frac{1}{-25}$$

$$\therefore p = \frac{1}{-25} \times (-125) = 5$$

और $y = \frac{1}{-25} \times 50 = -2$

चूँकि $p = \frac{1}{x}$

$$\therefore \frac{1}{x} = 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

इस प्रकार अभीष्ट हल है $x = \frac{1}{5}, y = -2$

(iii)

दिए गए समीकरण है

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = \ldots (1)$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1 \ldots (2)$$

माना $\frac{1}{x-1} = u$ और $y - 2 = v$

$\therefore$ समीकरण (1) और (2) इस प्रकार व्यक्त करते है

$5u + v = 2$ ...(1)

$6u - 3v = 1$ ...(2)

समीकरण (3) और (4) को व्रजगुणन विधि से हल करने के लिए

$a_1 = 5$, $b_1 = 1$, $c_1 = -2$

$a_2 = 6$, $b_2 = -3$, $c_2 = -1$

$$\frac{u}{\begin{matrix}1 & & -2\\ -3 & & -1\end{matrix}} = \frac{v}{\begin{matrix}-2 & & 5\\ -1 & & 6\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}5 & & 1\\ 6 & & -3\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{[1\times(-1)]-[(-3)\times(-2)]} = \frac{v}{[(-2)\times6]-[5\times(-1)]}$$

$$= \frac{1}{[5\times(-3)-6\times1]}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{-1-6} = \frac{v}{-12+5} = \frac{1}{-15-6}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{-7} = \frac{v}{-7} = \frac{1}{-21}$$

$$\therefore u = \frac{1}{-21} \times (-7) = \frac{1}{3}$$

$$v = \frac{1}{(-21)} \times (-7) = \frac{1}{3}$$

परन्तु $u = \frac{1}{x-1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3 = x - 1$$

$$\Rightarrow x = 4$$

और $v = \frac{1}{y-2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3 = y - 2$$

$$\Rightarrow y = 5$$

अतः अभीष्ट हल है $x = 4, y = 5$

(iv)

दिए गए समीकरण है

$$\frac{7x-2y}{xy} = 5 \ldots (1)$$

$$\frac{8x+7y}{xy} = 15 \ldots (2)$$

समीकरण (1) से $\frac{7x}{xy} - \frac{2y}{xy} = 5$

$$\Rightarrow \frac{7}{y} - \frac{2}{y} = 5 \ldots (3)$$

$$\frac{8x}{xy} + \frac{7y}{xy} = 15$$

$$\Rightarrow \frac{8}{x} + \frac{7}{x} = 15 \ldots (4)$$

माना $\frac{1}{x} = p$ और $\frac{1}{y} = q$

समीकरण (3) और (4) को इस प्रकार व्यक्त करते है

7q - 2p - = 0 ...(5)

8q + 7p - 15 = 0 ...(6)

समीकरण (5) और (6) को व्रजगुणन द्वारा हल करने के लिए

$a_1 = 7$, $b_1 = -2$, $c_1 = -5$

$a_2 = 8$, $b_2 = 7$, $c_2 = -15$

$$\frac{p}{\begin{array}{cc}-2 & -5\\ 7 & -15\end{array}} = \frac{q}{\begin{array}{cc}-5 & 7\\ -15 & 8\end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc}7 & -2\\ 8 & 7\end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{[-2\times(-15)]-[-7\times(-5)]}$$

$$= \frac{q}{[(-5)\times 8]-[(-15)\times 7]} = \frac{1}{[(7\times 7)-8\times(-2)]}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{30+35} = \frac{q}{-40+105} = \frac{1}{49+16}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{65} = \frac{q}{65} = \frac{1}{65}$$

$$\therefore p = \frac{1}{65} \times 65 = 1$$

$$q = \frac{1}{65} \times 65 = 1$$

चूँकि $p = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = 1$$

$$\Rightarrow x = 1$$

और $q = \frac{1}{y}$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = 1$$

$$\Rightarrow y = 1$$

इस प्रकार अभीष्ट हल है x = 1, y = 1

(v)

दिए गए समीकरण है

6x + 3y = 6xy ...(1)

2x + 4y = 6xy ...(2)

समीकरण (1) से

$$\frac{6x}{xy} + \frac{3y}{xy} = \frac{6xy}{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 6 \ldots (3)$$

समीकरण (2) से

$$\frac{2x}{xy} + \frac{4y}{xy} = \frac{5xy}{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{y} + \frac{4}{y} = 5 \ldots (4)$$

माना $\frac{1}{x} = p$ और $\frac{1}{y} = q$

समीकरण (3) और (4)

6q + 3p = 6 ...(5)

2q + 4p = 5 ...(6)

समीकरण (6) को 3 गुणा करके समीकरण (5) में से घटाने पर

$$\begin{array}{rcrl} 6q & + & 3p & = 6 \\ 6q & + & 12p & = 15 \\ (-) & (-) & & (-) \\ \hline & & 9p & = -9 \end{array}$$

$$\Rightarrow p = \frac{-9}{-9} = 1$$

समीकरण (5) में p = 1 प्रतिस्थापित करने पर

$$6q + 3(1) = 6$$

$$\Rightarrow 6q = 6 - 3 = 3$$

$$\Rightarrow q = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

चूँकि $p = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = 1$$

$$\Rightarrow x = 1$$

और $q = \frac{1}{y}$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = 2$$

अभीष्ट उत्तर = x =1, y = 2

(vi)

दिए गए समीकरण युग्म है

$$\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \ldots (1)$$

$$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2 \ldots (2)$$

माना $\frac{1}{x+y} = p$ और $\frac{1}{x-y} = q$

समीकरण (1) और (2) को हम इस प्रकार लिख सकते है

10p + 2q = 4 ...(3)

15p - 5q = -2 ...(4)

समीकरण (3) और (4) व्रजगुणन द्वारा हल करने के लिए

$a_1 = 10, b_1 = 2, c_1 = -4$

$a_2 = 15, b_2 = -5, c_2 = 2$

$$\frac{p}{\begin{array}{cc} 2 & -4 \\ -5 & 2 \end{array}} = \frac{q}{\begin{array}{cc} -4 & 10 \\ 2 & 15 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc} 10 & 2 \\ 15 & -5 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{[(2\times2)]-[(-5)\times(-4)]}$$

$$= \frac{q}{[(-4)\times15]-[2\times10]} = \frac{1}{[(-5)\times10-[2\times15]]}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{4-20} = \frac{q}{-60-20} = \frac{1}{-50-30}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{-16} = \frac{q}{-80} = \frac{1}{-80}$$

$$\therefore p = \frac{1}{(-80)} \times (-16) = \frac{1}{5}$$

और $q = \frac{1}{-80} \times (-80) = 1$

परन्तु $p = \frac{1}{x+y}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow x + y = 5 \ldots (5)$$

और $q = \frac{1}{x-y}$

$$\Rightarrow x - y = 1 \ldots (6)$$

समीकरण (5) और (6) का योग करने पर

$$\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ \hline 2x \quad = 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = 3$$

समीकरण (5) से 3 + y = 5

y = 5 - 3 = 2

इस प्रकार अभीष्ट हल है x = 3, y = 2

(vii)

दिए गए समीकरण युग्म है

$$\frac{1}{2(3x+y)} + \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{3}{4} \ldots (1)$$

$$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8} \ldots (2)$$

माना $\frac{1}{3(x+y)} = p$ और $\frac{1}{3(x-y)} = q$

$\therefore$ समीकरण (1) और (2) को हम इस प्रकार लिख सकते है

$$p + q = \frac{3}{4} \ldots (3)$$

$$\frac{p}{2} - \frac{q}{2} = -\frac{1}{8} \ldots (4)$$

समीकरण (3) को $\frac{1}{4}$ से गुणा करके समीकरण (4) में जोड़ने पर

$$\begin{array}{l} \quad \frac{p}{2} + \frac{q}{2} = \frac{3}{8} \\ \quad \frac{p}{2} - \frac{q}{2} = -\frac{1}{8} \\ \hline \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right) \quad = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

समीकरण (3) से

$$\frac{1}{4} + q = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow q = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{1}{3x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3x+y} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 3x + y = 4 \ldots (5)$$

और $q = \frac{1}{3x-y}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3x-y} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3x - y = 2 \ldots (6)$$

समीकरण (5) और (6) को जोड़ने पर

$$\begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ 3x - y = 2 \\ \hline 6x \qquad = 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{6} = 1$$

समीकरण (5) से समीकरण (6) को घटाने पर

$$\begin{array}{l} 3x + y = 4 \\ 3x - y = 2 \\ (-) \quad (+) \quad (-) \\ \hline \qquad 2y = 2 \end{array}$$

इस प्रकार अभीष्ट हल है x = 1, y = 1

प्रश्न 2 निम्न समस्याओं को रैखिक समीकरण युग्म के रूप में व्यक्त कीजिए और फिर उनके हल ज्ञात कीजिए-

(i) रितु धारा के अनुकूल 2 घंटे में 20 किलोमीटर तैर सकती है और धारा के प्रतिकूल 2 घंटे में 4 किलोमीटर तैर सकती है। उसकी स्थिर जल में तैरने की चाल तथा धारा की चाल ज्ञात कीजिए-

(ii) 2 महिलाएँ एंव 5 पुरुष एक कसीदे के काम को साथ-साथ 4 दिन में पूरा कर सकते है। जबकि 3 महिलाएँ एंव 6 पुरुष इसको 3 दिन में पूरा कर सकते है ज्ञात कीजिए कि इसी कार्य को करने में एक महिला कितना समय लेगी। पुनः इसी कार्य को करने में एक पुरुष कितना समय लेगा।

(iii) रूही 300 किलोमीटर दुरी पर स्थित अपने घर जाने के लिए कुछ दुरी रेलगाड़ी द्वारा तथा कुछ दुरी बस द्वारा तय करती है। यदि वह 60 किलोमीटर रेलगाड़ी द्वारा तथा शेष बस द्वारा यात्रा करती है तो उसे 4 घंटे लगते हैं। यदि वह 100 किलोमीटर रेलगाड़ी से तथा शेष बस से यात्रा करे, तो उसे 10 मिनट अधिक लगते हैं। रेलगाड़ी एंव बस की क्रमशः चाल ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

(i) माना रितु की स्थिर जल में तैरने की गति = x किमी/घण्टा

और धारा की चाल = y किमी/घण्टा

धारा की दिशा में चाल = (x + y) किमी/घण्टा

धारा के प्रतिकूल चाल = (x - y) किमी/घण्टा

$$\text{समय} = \frac{\text{दुरी}}{\text{चाल}}$$

$\therefore \frac{20}{x+y}$

$\Rightarrow x + y = 10 \ldots (1)$ और $2 = \frac{4}{x-y}$

$\Rightarrow x - y = \frac{4}{2}$

$\Rightarrow x - y = 2 \ldots (2)$

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर,

$$\begin{array}{l} x + y = 10 \\ x - y = 12 \\ \hline 2x \quad\; = 12 \end{array}$$

$\Rightarrow x = \frac{12}{2} = 6$

समीकरण (1) से, 6 + y - 10

y = 10 - 6 = 4

अत: स्थिर जल में रितु के तैरने की चाल = 6 किमी/घण्टा और जल-धारा की चाल = 4 किमी/घण्टा

(ii) माना कार्य को पूरा करने के लिए, अकेली महिला द्वारा लिया गया समय = x दिन और अकेले पुरुष द्वारा लिया गया समय = y दिन

1 महिला का 1 दिन का कार्य = 1

1 पुरुष का 1 दिन का कार्य = 1

चूंकि [2 महिलाओं + 5 पुरुषों] द्वारा कार्य को 4 दिन में पूरा किया जाता है

$$\therefore 4 \times \left[\frac{2}{\times} + \frac{5}{y}\right] = 1 \ldots (1)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4} \ldots (1)$$

पुनः [3 महिलाओं + 6 पुरुषों] द्वारा कार्य 3 दिन में पूरा किया जाता है

$$\therefore 3 \times \left[\frac{3}{\times} + \frac{6}{y}\right] = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{3} \ldots (2)$$

माना $\frac{1}{x} = p$ और $\frac{1}{y} = q$

समीकरण (1) और (2) को इस प्रकार व्यक्त करते है

$$2p + 5q = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 8p + 20q - 1 = 0$$

$$3p + 6q = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 8p + 20q - 1 = 0$$

अब व्रजगुणन विधि का प्रयोग करने क लिए

$a_1 = 8,\ b_1 = 20,\ c_1 = -1$

$a_2 = 9,\ b_2 = 18,\ c_2 = -1$

$$\frac{p}{\begin{matrix}20 & \times & -1\\ 18 & & -1\end{matrix}} = \frac{q}{\begin{matrix}-1 & \times & 8\\ -1 & & 9\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}8 & \times & 20\\ 9 & & 18\end{matrix}}$$

$$= \frac{p}{-2} = \frac{q}{-1} = \frac{1}{-36}$$

$$\therefore p = \frac{1}{-36} \times (-2) = \frac{1}{18}$$

$$q = \frac{1}{-36} \times (-1) = \frac{1}{36}$$

चूँकि $p = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow x = 18$$

और $q = \frac{1}{y}$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow y = 36$$

इस प्रकार कार्य को पूरा करने के लिए अकेली महिला द्वारा लिया गया समय = 18 दिन

अकेले पुरुष द्वारा लिया गया समय = 36 दिन

(iii) माना, रेलगाड़ी की चाल = x किमी/घण्टा

बस की चाल = y किमी/घण्टा

$$\text{चाल} = \frac{\text{दुरी}}{\text{समय}}$$

स्थिति-(I)

कुल यात्रा की दूरी = 300 किमी

∵ रेलगाड़ी से तय की गई दूरी = 60 किमी

बस से तय की गई दूरी = (300 - 60) किमी. = 240 किमी.

चूंकि कुल समय = 4 घंटे

$$\therefore \frac{60}{x} + \frac{240}{y} = 4$$

$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{15}$ [15 से भाग करके]

स्थिति-(II)

रेलगाड़ी से तय की गई दूरी = 100 किमी

$\therefore$ बस द्वारा तय की गई दूरी = (300 - 100) किमी.

= 200 किमी.

$$\frac{4}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{4}{x} + \frac{16}{y} = \frac{4}{15}$$

$$\begin{array}{ccc} (-) & (+) & (-) \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{-8}{y} = \frac{1}{6} - \frac{4}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{-8}{y} = \frac{1}{6} - \frac{4}{15} = \frac{5-8}{30} = \frac{-3}{30}$$

समीकरण (1) से

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{80} = \frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{15} = \frac{4}{80} = \frac{1}{15} - \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{4-3}{60} = \frac{1}{60}$$

$$\therefore x = 60$$

इस प्रकार, रेलगाड़ी की चाल = 60 किमी/घण्टा और बीस की चाल = 80 किमी/घण्टा

प्रश्नावली 3.7 (पृष्ठ संख्या 75-76)

प्रश्न 1 दो मित्रों अनी और बीजू की आयु में 3 वर्ष का अन्तर है। अणि के पिता धरम की आयु अणि की आयु की दुगुनी और बीजू की आयु अपनी बहन कैथी की आयु की दुगुनी है। कैथी और धरम की आयु का अन्तर 30 वर्ष है। अणि और बीजू की आयु ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना,

अनी की आयु = x वर्ष और

बीजू की आयु = y वर्ष

स्थिति- (I) $y > x$

प्रथम शर्त के अनुसार,

$y - x = 3$ ...(1)

∵ [अनी के पिता की आयु] -2 [अनी की आयु]

= 2x वर्ष तथा [बीजू की बहन की आयु]

$= \frac{1}{2}$ [बीजू की आयु] $= \frac{1}{2}y$, दूसरी शर्त के अनुसार,

2x-sy = 30 = 4x - y = 60 ...(2)

(1) और (2) को योग करने पर,

$$\begin{aligned} 4x - y &= 60 \\ -x + y &= 30 \\ \hline 3x \quad &= 63 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{63}{3} = 21$$

समीकरण (1) से

$\Rightarrow$ y - 21 = 3

$\Rightarrow$ y = 3 + 21 = 24

इस प्रकार,

अनी की आयु = 21 वर्ष बीजू की आयु = 24 वर्ष

प्रश्न 2 एक मित्र दूसरे से कहता है कि 'यदि मुझे एक सौ दे दो, तो मैं आपसे दो गुना धनी बन जाऊँगा।' दूसरा उत्तर देता है 'यदि आप मुझे दस दे दें, तो मैं आपसे छः गुना धनी बन जाऊँगा।' बताइए की उनकी क्रमशः कल्या संपत्तिया हैं?

उत्तर- माना 1^{st} मित्र की सम्पत्ति = x रुपये

और 2^{nd} मित्र की सम्पत्ति = y रुपये

शर्त के अनुसार, x + 100 = 27-100)

= x + 100 - 2y + 200 = 0

= x - 2y + 300 = 0

6(x - 10) = y + 10 ...(1)

= 6x - 60 - y - 10 = 0

6x -y - 70 = 0 ...(2)

समीकरण (1) से, x = -300 + 2y

समीकरण (2) से 6x - y -70 = 0

6[-300 + 2y] - y - 70 = 0

= -1800 + 12y - y - 70 = 0

$-1870 + 11y = 0$

$$\Rightarrow y = \frac{1870}{11} = 170$$

अब, $x = -300 + 2y$

$= -300 + 2(170)$

$= -300 + 340 = 40$

इस प्रकार,

1st मित्र की संपत्ति = 40 रुपये और 2nd मित्र की संपत्ति = 170 रुपये

प्रश्न 3 एक रेलगाड़ी कुछ दूरी समान चाल से तय करती है। यदि रेलगाड़ी 10 किलोमीटर/घण्टा अधिक तेज चलती होती, तो उसे नियत समय से 2 घंटे कम लगते और यदि रेलगाड़ी 10 किलोमीटर/घण्टा धीमी चलती होती, तो उसे नियत समय से 3 घंटे अधिक लगते। रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दुरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर- **स्थिति- (I)**

$(x + 10) \times (y - 2) = xy$

$xy - 2x + 10y - 20 = xy$

$2x - 10y + 20 = 0$ ...(1)

स्थिति- (II)

$(x - 10) x (y + 3) = xy$

$= xy + 3x - 10y - 30 = xy$

$3x - 10y - 30 = 0$ ...(2)

वज्र-गुणन विधि से समीकरण (1) और (2) को हल करने के लिए

$a_1 = 2, b_1 = -10, c_1 = 20$

$a_2 = 3, b_2 = -10, c_2 = 30$

$$\frac{x}{\begin{matrix}-10 & & 20\\ -10 & \times & -30\end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix}20 & & 2\\ -30 & \times & 3\end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix}2 & & -10\\ 3 & \times & -10\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{300+200} = \frac{y}{+60+60} = \frac{1}{-20+30}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{500} = \frac{y}{120} = \frac{1}{-20+30}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{(10)} \times 500 = 50$$

$$y = \frac{1}{(10)} \times (120) = 12$$

इस प्रकार, रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी

= 50 × 12 = 600 किमी.

प्रश्न 4 एक कक्षा के विधार्थियों को पंक्तियों में खड़ा होना है। यदि पंक्ति में 3 विधार्थी अधिक होते, तो 1 पंक्ति कम होती। यदि पंक्ति में 3 विधार्थी कम होते, तो 2 पंक्तियाँ अधिक बनतीं। कक्षा में विधार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना,

विद्यार्थियों की संख्या = x और पंक्तियों की संख्या = y

∴ प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या

$$\therefore \text{ प्रत्येक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या} = \frac{\text{विद्यार्थियों की संख्या}}{\text{पंक्तियों की संख्या}} = \frac{x}{y}$$

स्थिति- (I)

$$\left(\frac{x}{y}+3\right)\times(y-1)=x$$

[एक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या x पंक्तियों की संख्या

= विद्यार्थियों की संख्या]

$$\Rightarrow x-\frac{x}{y}+3y-3=x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}-3y+3=0\ldots(1)$$

स्थिति- (II)

$$\left(\frac{x}{y}-3\right)\times(y+2)=x$$

$$\Rightarrow x+\frac{2x}{y}-3y-6=x$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{y}-3y-6=0\ldots(2)$$

माना $\frac{x}{y}=p$

∴ समीकरण (1) और (2) को इस प्रकार व्यक्त करते है

p - 3y + 3 = 0 ...(3)

2p - 3y - 6 = 0 ...(4)

समीकरण (4) में से (3) को घटाने पर

$$\begin{array}{rl} 2p - 3y - 6 &= 0 \\ p - 3y + 3 &= 0 \\ (-) \quad (+) \quad (-) & \\ \hline p \qquad\quad - 9 &= 0 \\ p &= 9 \end{array}$$

समीकरण (3) से हमे प्राप्त होता है

$$9 - 3y + 3 = 0$$

$$\Rightarrow -3y = -12$$

$$\Rightarrow y = \frac{-12}{-3} = 4$$

चूँकि $\frac{x}{y} = 9$

$$\therefore \frac{x}{4} = 9$$

$$\Rightarrow x = 4 \times 9 = 36 \; [\because p = 9]$$

इस प्रकार, कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या

$= x \times y = 36 \times 4 = 144$

प्रश्न 5 एक $\triangle ABC$ में $\angle C = 3$, $\angle B = 2$, $(\angle A + \angle B)$ है। त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

समीकरण (2) से

$$\angle A + 4(40) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A = 180^\circ - (4 \times 40)$$

$$\Rightarrow \angle A = 180^\circ - 160 = 20^\circ$$

पुनः $\angle C = 3, \angle B = 3 \times 40^\circ = 120^\circ$

इस प्रकार $\angle A = 20^\circ, \angle B = 40^\circ$

और $\angle C = 120^\circ$

प्रश्न 6 समीकरणों 5x - y = 5 और 3x - y = 3 के ग्राफ खींचिए। इन रेखाओं और y-अक्ष से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। इस प्रकार बने त्रिभुज के क्षेत्रफल का परिकलन कीजिए।

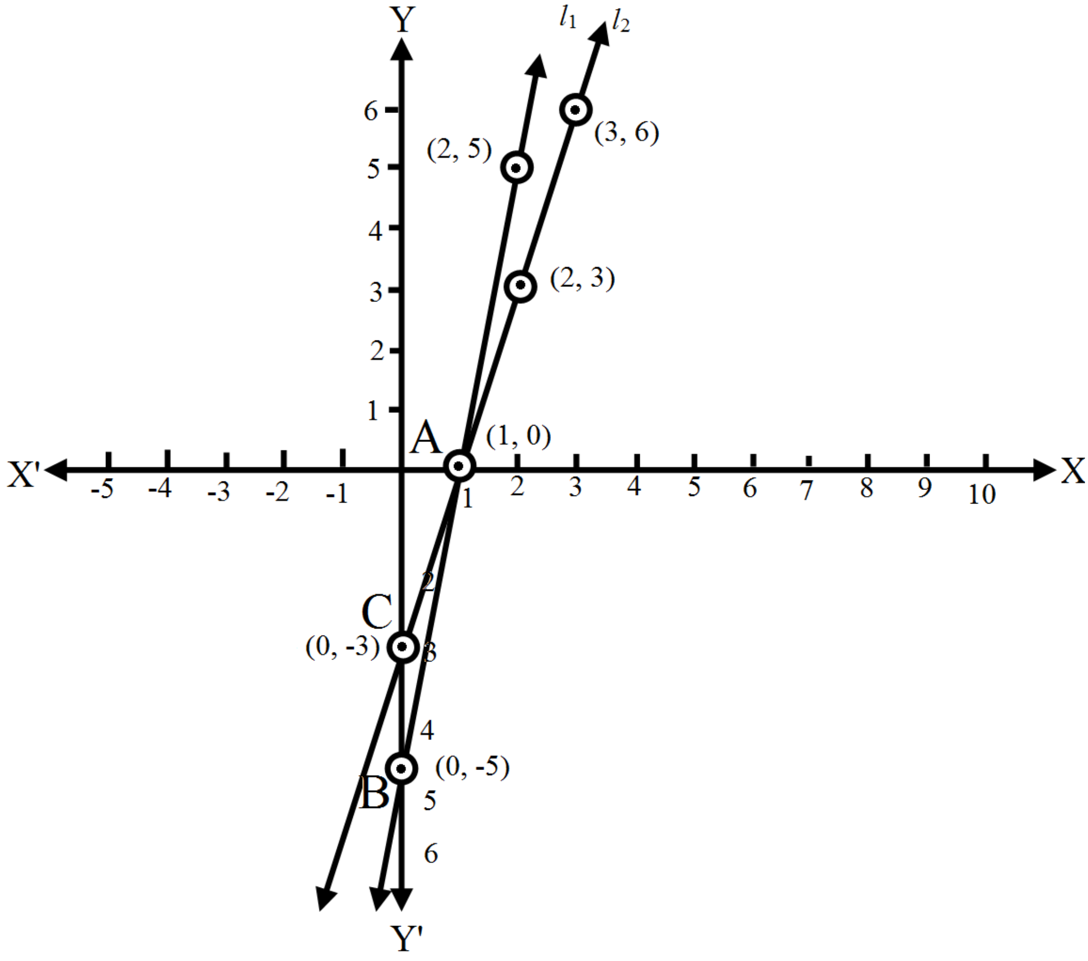
उत्तर- समीकरण 5x – y = 5 का ग्राफ खींचने के लिए x और y के मूल्यों की तालिका

x	1	2	0
y	0	5	-5
(x, y)	(1, 0)	(2,5)	(0, 5)

समीकरण 3x - y = 3 का ग्राफ खींचने के लिए x और y के मूल्यों की तालिका

x	2	3	0
y	3	6	-3
(x, y)	(2, 3)	(3,6)	(0, -3)

बिन्दुओं (2, 5), (1, 0) और (0, -5) को आलेखित करके मिलाने पर 5x - y = 5 की ग्राफ रेखा, l_1 प्राप्त होती है।



बिन्दुओं (2, 3), (3, 6) और (0, -3) को आलेखित करके मिलाने पर 3x - y = 3 की ग्राफ रेखा, l_2 प्राप्त होती है।

आकृति से स्पष्ट है की इस प्रकार बनी त्रिभुज के शीर्ष (1, 0), (0, -5) और (0, -3) है।

प्रश्न 7 निम्न रैखिक समीकरण के युग्म को हल कीजिए-

(i) $px + qy = p - q$

$qx - pq = p + q$

(ii) $ax + by = c$

$bx + ay = 1 + c$

(iii) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$

$ax + by = a^2 + b^2$

(iv) $(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$

$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

(v) $152x - 378y = -74$

$-378x + 152y = -604$

उत्तर-

(i) दिए गए रैखीक समीकरण है

$px + qy = p - q$ ...(1)

$qx + py = p + q$ ...(2)

समीकरण (1) को p से और (2) को q से गुणा कर जोड़ने पर

$$\begin{array}{l} p^2x + pqy = p^2 - pq \\ p^2x - pqy = p^2 - pq \\ \hline p^2x + p^2x = p^2 + p^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow (p^2 + q^2)x = p^2 + q^2{}'$$

$$\Rightarrow x = \frac{p^2+q^2}{p^2+q^2} = 1$$

समीकरण (1) से

$p(1) + qy = p - q$

$\Rightarrow p + gy = p - q$

$\Rightarrow qy = p - q - p = q$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{q} = 1$$

इस प्रकार अभीष्ट हल $x = 1, y = 1$

(ii) दिए गए रैखीक समीकरण है

$ax + by = c$ ...(1)

$bx + ay = 1 + c$ ...(2)

व्रजगुणन की सहयता से हम पाते है

$A_1 = a, B_1 = b, C_1 = -c$

$A_2 = b, B_2 = a, C_2 = -(1 + c)$

$$\therefore \frac{x}{\begin{matrix} b & -c \\ a & -(1+c) \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} -c & a \\ -(1+c) & b \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}}$$

$$= \frac{x}{-b-bc+ac} = \frac{y}{-bc+a+ac} = \frac{1}{a^2-b^2}$$

$$\therefore x = \frac{-b-bc+ac}{a^2-b^2}$$

$$y = \frac{-bc+a+ac}{a^2-b^2}$$

$$x = \frac{c(a-b)-b}{a^2-b^2} = \frac{c}{a+b} - \frac{b}{a^2-b^2}$$

$$y = \frac{c(a-b)+a}{a^2-b^2} = \frac{c}{a+b} + \frac{a}{a^2-b^2}$$

(iii) दिए गए रैखीक समीकरण है

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \ldots (1)$$

$$ax + by = a^2 + b^2 \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) से

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{x}{a} \times b\right)$$

समीकरण (2) में $y = \left(\frac{b}{a}x\right)$ प्रतीस्थापित करने पर

$$ax + b\left(\frac{b}{a}x\right) = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow x + \left[\frac{a^2+b^2}{a}\right] = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \times a = a$$

$$\Rightarrow x = a$$

$y = \frac{b}{a}x$ में $x = a$ प्रतीस्थापित करने पर

$$y = \frac{b}{a} \times a = b$$

$$\Rightarrow y = b$$

इस प्रकार अभीष्ट हल x = a, y = b

(iv) दिए गए रैखीक समीकरण है

$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$ ...(1)

$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$ ...(2)

समीकरण (2) से

$(a - b)x + (a + b)y = a^2 + b^2$ ...(3)

समीकरण (2) में से (3) घटाने पर

$$\begin{array}{l} (a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2 \\ (a + b)x + (a + b)y = a^2 + b^2 \\ (-) \qquad\qquad (-) \qquad\qquad\qquad (-) \quad (-) \\ \hline x[(a - b) - (a + b)] = a^2 - 2ab - b^2 - a^2 - b^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow x[a - b - a - b] = -2ab - 2b^2$$

$$\Rightarrow x(-2b) = -2b(a + b)$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2b(a+b)}{-2b}$$

$$\Rightarrow x = (a + b)$$

समीकरण (1) में x = (a + b) प्रतीस्थापित करने पर

$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$

$\Rightarrow (a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab$

$\Rightarrow (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2 - a^2 + b^2$

$\Rightarrow (a + b)y = -2ab$

$$\Rightarrow y = -\frac{2ab}{a+b}$$

इस प्रकार अभीष्ट हल $x = a + b, y = -\frac{2ab}{a+b}$

(v) दिए गए रैखीक समीकरण है

152x - 378y = -74 ...(1)

-378x + 152y = -604 ...(2)

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर

-226x - 226y = -604

$\Rightarrow$ x + y = 3 ...(3)

[पुरे समीकरण को (-226) से भाग करने पर]

समीकरण (2) में से (1) घटाने पर

$$
\begin{array}{r}
-378x + 152y = -604 \\
152x - 378y = -74 \\
(-) \quad (+) \quad (+) \\
\hline
-530x + 530y = -530
\end{array}
$$

$$\Rightarrow -x + y = -1$$

$$\Rightarrow x - y = 1 \ldots (4)$$

समीकरण (3) और (4) को जोड़ने पर

$$
\begin{array}{l}
x + y = 3 \\
x - y = 1 \\
\hline
2x \quad = 4
\end{array}
$$

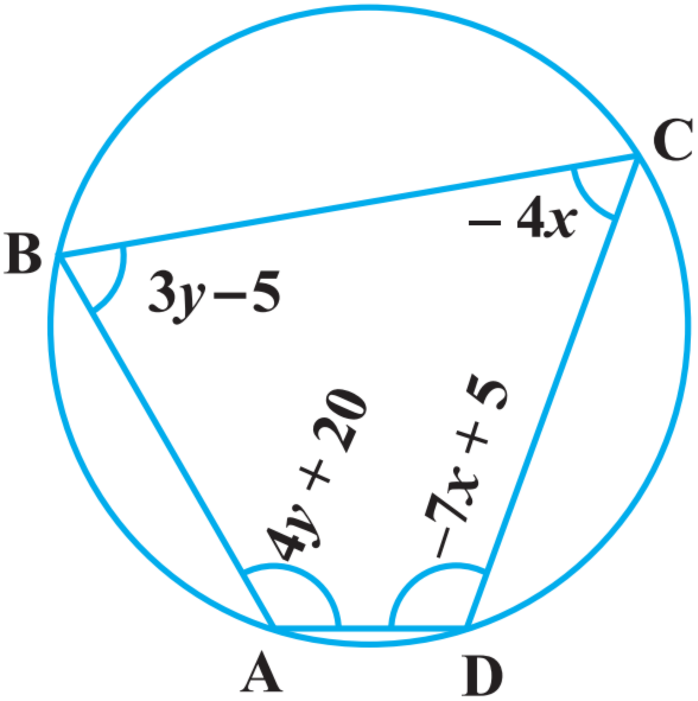
$$\Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$

समीकरण (3) में से (4) घटाने पर

$$
\begin{array}{r}
x - y = 1 \\
x + y = 3 \\
(-) \quad (-) \quad (-) \\
\hline
-2y = -2
\end{array}
$$

इस प्रकार x = 2, y = 1

प्रश्न 8 ABCD एक चतुर्भुज है इस चक्रीय चतुर्भुज के कोण ज्ञात कीजिए-



उत्तर- हम जानते हैं कि एक चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं

$\angle A + \angle C = 180°$ और $\angle B + \angle D = 180°$

$\Rightarrow [4y + 20] + [-4x] = 180°$

$\Rightarrow 4y - 4x + 20° - 180° = 0$

$\Rightarrow 4y - 4x - 160° = 0$

$\Rightarrow y - x - 40° = 0$ ...(1)

[पूरे समीकरण को 4 से भाग देने पर]

और $[3y - 5] + [-7x + 5] = 180°$

$= 3y - 5 + 5 - 7x - 180° = 0$

$= 3y - 7x - 180° = 0$ ...(2)

समीकरण (1) को 7 से गुणा कर समीकरण (2) में से घटाने पर,

$$3y - 7x - 180 = 0$$

$$\begin{array}{r} 7y - 7x - 280 = 0 \\ (-) \quad (+) \quad (+) \\ \hline -4y + 100^{o} = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-100^\circ}{-4} = 25^\circ$$

समीकरण (1) में y = 25° प्रतिस्थापित करने पर,

$$y - x = 40$$

$$\Rightarrow -x = 40 - y$$

$$= 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

$$= x = -15^\circ$$

$$\angle A = 4y + 20^\circ$$

$= 4(25^\circ) + 20^\circ$

$= 100^\circ + 20^\circ = 120^\circ$

$\angle B = 3y - 5^\circ$

$-3(25^\circ) - 5^\circ$

$= 75^\circ - 5^\circ = 70^\circ$

$\angle C = -4x = -4(-15^\circ) = 60^\circ$

$\angle D = -7(-15) + 5^\circ$

$= 105^\circ + 5^\circ = 110^\circ$

इस प्रकार $\angle A = 120^\circ, \angle B = 70^\circ$

$\angle C = 60^\circ, \angle D = 110^\circ$