RICERCA OPERATIVA I

Aristide Mingozzi

Modelli matematici

Simplesso Primale

Dualita

Simplesso duale

Metodo Primale-duale

Flusso massimo in un grafo

Problema dei Trasporti

Metodo Ungherese

Testi di riferimento

Bazaraa, Jarvis e Sherali. "Linear programming and network flows" J. Wiley

Ahuja, Magnanti e Orlin. "Network flows: theory algorithms and applications", Prentice Hall.

PROGRAMMAZIONE LINEARE

MINIMIZZARE / MASSIMIZZARE UNA FUNZIONE LINEARE IN PRESENZA DI VINCOLI LINEARI (EQUAZIONI / DISEQUAZIONI)

MINIMIZZA $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + \ldots + & a_{1n} x_n & \geq & b_1 \\ a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + \ldots + & a_{2n} x_n & \geq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + \ldots + & a_{mn} x_n & \geq & b_m \\ x_1, & & x_2, & \ldots & x_n & \geq & 0 \end{array}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$: Variabili Decisionali

$c_1, c_2, \ldots, c_n$: Coefficienti Costo

$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$: Funzione Obiettivo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n} \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$: Matrice Dei Vincoli

$b_1, b_2, \ldots, b_m$: Termini Noti

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$: Vincoli di non-negativita'

SOLUZIONE AMMISSIBILE

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ tale che $\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i$; $i = 1, \ldots, m$

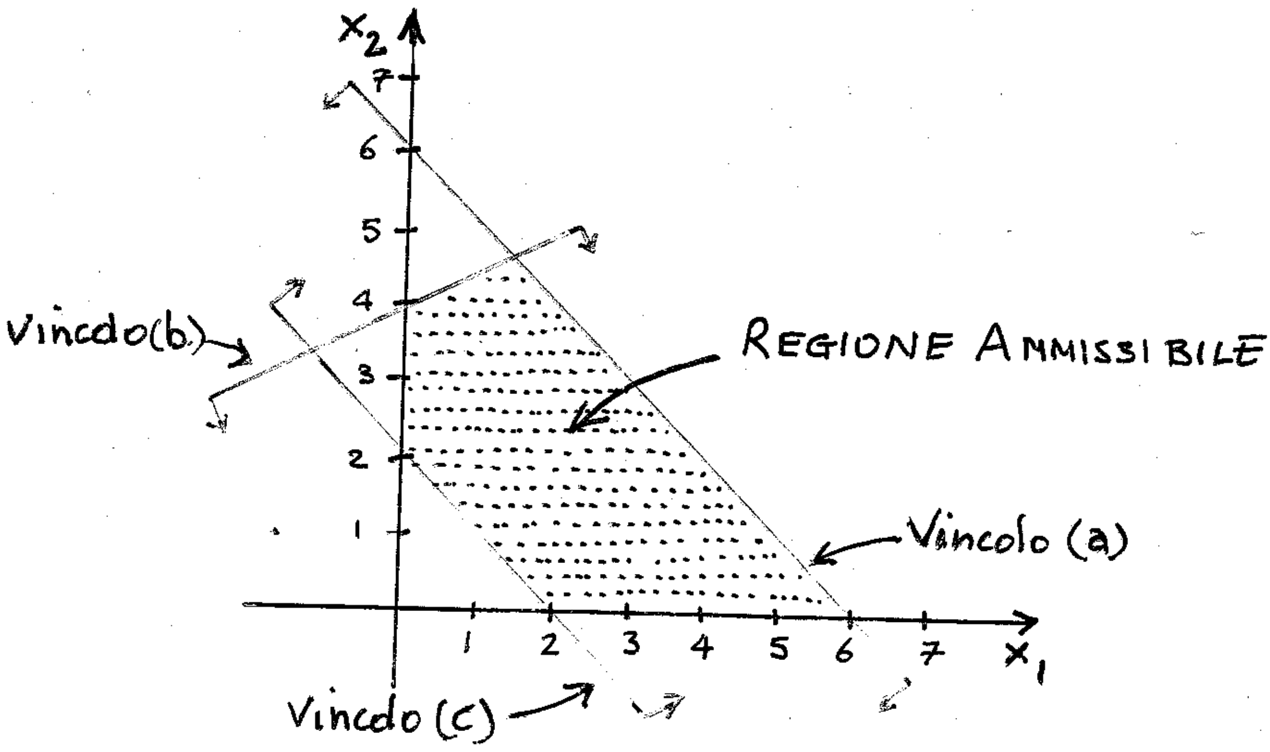
REGIONE AMMISSIBILE

Insieme di tutte le soluzioni ammissibili del problema.

ESEMPIO

Minimizza $z = -x_1 - 3x_2$

$$-x_1 - x_2 \geq -6 \quad (a)$$
$$x_1 - 2x_2 \geq -8 \quad (b)$$
$$x_1 + x_2 \geq 2 \quad (c)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



FORMULAZIONE MATEMATICA DEI PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

ESEMPIO 1 IL PROBLEMA DELLA DIETA

DETERMINARE IL COSTO MINIMO PER LA COMPOSIZIONE DI UNA DIETA CHE GARANTISCA UN CONTRIBUTO MINIMO GIORNALIERO DI ENERGIA (2000 Kcal), DI PROTEINE (55g) E DI CALCIO (800mg) SCEGLIENDO TRA:

ALIMENTI DISPONIBILI	PORZIONE	ENERGIA (Kcal)	PROTEINE (g)	CALCIO (mg)	COSTO (Lire)
Fiocchi Avena	28 g	110	4	2	300
Pollo	100 g	205	32	12	900
Uova	2 grandi!	160	13	54	800
Latte	237 cc	160	8	285	500
Torta ciliegie	170 g	420	4	22	2000
Maiale con piselli.	260 g	260	14	80	1900

LIMITI SUL NUMERO DI PORZIONI GIORNO

Fiocchi Avena	≤ 4	Latte	≤ 8
Pollo	≤ 3	Torta	≤ 2
Uova	≤ 2	Maiale	≤ 2

FORMULAZIONE MATEMATICA

VARIABILI DECISIONALI

x_1 : N. di porzioni di Fiocchi Avena
x_2 : " " Pollo
x_3 : " " Uova
x_4 : " " Latte
x_5 : " " Torta ciliegie
x_6 : " " Maiale con piselli

$$\text{Min } z = 300x_1 + 900x_2 + 800x_3 + 500x_4 + 2000x_5 + 1900x_6$$

(Energia) $110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000$

(Proteine) $4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55$

(Calcio) $2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800$

Limiti sul numero porzioni-giorno
$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_3 \leq 2 \\ x_4 \leq 8 \\ x_5 \leq 2 \\ x_6 \leq 2 \end{array}\right.$$

non-negatività $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

ESEMPIO 2 IL PROBLEMA DEI TRASPORTI

DETERMINARE IL PIANO DI TRASPORTO A COSTO MINIMO DI UN UNICO PRODOTTO DA 3 STABILIMENTI S_1, S_2, S_3 VERSO 4 DEPOSITI D_1, D_2, D_3, D_4 ESSENDO NOTO:

a. LA DISPONIBILITA' AGLI STABILIMENTI

IN	S_1	E' DISPONIBILE	40	unità'
IN	S_2	" "	40	"
IN	S_3	" "	20	"

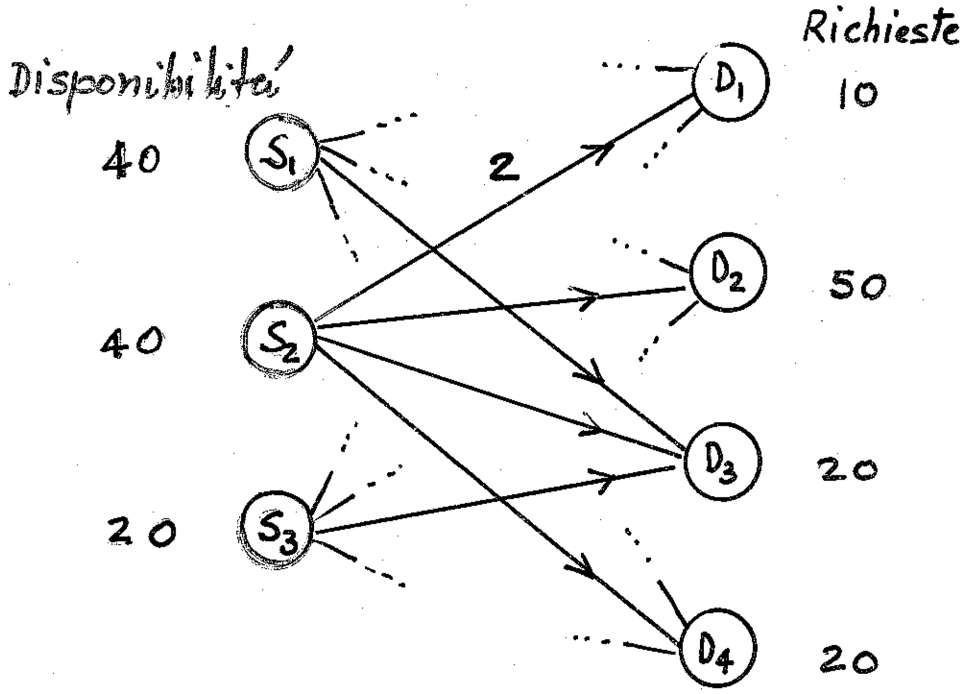
b. LE RICHIESTE DEI DEPOSITI

D_1	RICHIEDE	10	unità'
D_2	"	50	"
D_3	"	20	"
D_4	"	20	"

c. COSTI UNITARI DI TRASPORTO

	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	6	3	3	4
S_2	2	8	1	4
S_3	2	4	6	2

FORMULAZIONE MATEMATICA



VARIABILI DECISIONALI

x_{ij} : QUANTITATIVO INVIATO DALLO STABILIMENTO S_i AL DEPOSITO D_j $(i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3, 4)$

VINCOLI PER GLI STABILIMENTI

LA SOMMA DEI QUANTITATIVI INVIATI DA OGNI STABILIMENTO DEVE ESSERE PARI ALLA SUA DISPONIBILITA'

Esempio per S_2 : $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40$

VINCOLI PER I DEPOSITI

LA SOMMA DEI QUANTITATIVI CHE ARRIVA AD OGNI DEPOSITO DEVE ESSERE PARI ALLA SUA RICHIESTA

Esempio per D_3 $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20$

$$\text{Min } z = \overbrace{6x_{11}+3x_{12}+3x_{13}+4x_{14}}^{\text{contributo al costo dei quantitativi da } S_1}+\overbrace{2x_{21}+8x_{22}+x_{23}+4x_{24}}^{\text{da } S_2}+\overbrace{2x_{31}+4x_{32}+6x_{33}+2x_{34}}^{\text{da } S_3}$$

$$\begin{array}{llllllllllllll}
x_{11}+ & x_{12}+ & x_{13}+ & x_{14} & & & & & & & & & = & 40 \\
 & & & & x_{21}+ & x_{22}+ & x_{23}+ & x_{24} & & & & & = & 40 \\
 & & & & & & & & x_{31}+ & x_{32}+ & x_{33}+ & x_{34} & = & 20 \\
x_{11}+ & & & & x_{21}+ & & & & x_{31} & & & & = & 10 \\
 & x_{12}+ & & & & x_{22}+ & & & & x_{32} & & & = & 50 \\
 & & x_{13}+ & & & & x_{23}+ & & & & x_{33} & & = & 20 \\
 & & & x_{14}+ & & & & x_{24}+ & & & & x_{34} & = & 20
\end{array}$$

$$x_{11},\ x_{12},\ \dots\dots,\ x_{34} \geq 0$$

NUMERO VARIABILI : $(3 \times 4) = 12$

NUMERO VINCOLI : $(3 + 4) = 7$

PROGRAMMAZIONE LINEARE: esempio 1

Una compagnia di spedizioni è proprietaria di un aereo per il trasporto merci composto da 3 scomparti: anteriore, centrale e posteriore.

- Tali scomparti hanno le seguenti capacità in peso e volume.

Scomparto	Peso (tonnellate)	Volume (metri cubi)
Anteriore	10	6800
Centrale	16	8700
Posteriore	8	5300

- Al fine di mantenere l'aereo bilanciato è necessario che i quantitativi di merce che vengono caricati in ciascun scomparto siano proporzionali alla capacità in peso dello scomparto stesso: ovvero, il rapporto peso della merce caricata in uno scomparto diviso la capacità in peso dello scomparto deve essere lo stesso per tutti i 3 scomparti.

- Quattro clienti C1, C2, C3, C4 richiedono la spedizione dei seguenti quantitativi di merce per la medesima destinazione.

Cliente	Peso (tonnellate)	Volume/Peso (metri cubi/tonnellata)	Profitto (£/tonnellata)
C1	18	480	310
C2	15	650	380
C3	23	580	350
C4	12	390	285

La compagnia può spedire una qualunque frazione di ciascun quantitativo.

Obiettivo della compagnia:
determinare la quantità di merce di ciascun cliente che può essere caricata e come distribuirla fra gli scomparti dell'aereo in modo tale da massimizzare il profitto della spedizione.

Formulazione Matematica dell'esempio 1

Variabili

E' necessario decidere la quantità di merce di ciascun cliente che deve essere caricata in ognuno dei 3 scomparti.

Indichiamo con x_{ij} il numero di tonnellate di merce del cliente i (i=1,2,3,4 rispettivamente per C1, C2, C3 e C4) che viene caricata nello scomparto j (j=1 per anteriore, j=2 per centrale e j=3 per posteriore) dove $x_{ij} \geq 0$ per i=1,2,3,4; j=1,2,3.

Vincoli

- la quantità di merce di un cliente che viene caricata non può superare la quantità che il cliente ha richiesto di spedire.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 18 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 15 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 23 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} &\leq 12 \end{aligned}$$

- il peso complessivo della merce caricata in uno scomparto non può superare la capacità in peso dello scomparto.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &\leq 10 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &\leq 16 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &\leq 8 \end{aligned}$$

- il volume complessivo della merce caricata in uno scomparto non può superare la capacità in volume dello scomparto.

$$\begin{aligned} 480x_{11} + 650x_{21} + 580x_{31} + 390x_{41} &\leq 6800 \\ 480x_{12} + 650x_{22} + 580x_{32} + 390x_{42} &\leq 8700 \\ 480x_{13} + 650x_{23} + 580x_{33} + 390x_{43} &\leq 5300 \end{aligned}$$

- bilanciamento dell'aereo.

$$[x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}]/10 = [x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}]/16 = [x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}]/8$$

Funzione Obiettivo

L'obiettivo è la massimizzazione del profitto della merce caricata.

Massimizza $310[x_{11}+ x_{12}+x_{13}] + 380[x_{21}+ x_{22}+x_{23}] + 350[x_{31}+ x_{32}+x_{33}] + 285[x_{41}+ x_{42}+x_{43}]$

PROGRAMMAZIONE LINEARE: esempio 2

Un'azienda conserviera ha due stabilimenti, detti A e B, per la produzione di frutta sciroppata. Tale azienda può acquistare da 3 aziende agricole, denominate S1, S2 e S3, le quantità massime di frutta fresca ai prezzi indicati nella seguente tabella.

Azienda agricola	Quantità (tonnellate)	Prezzo (£/tonnellata)
S1	200	11
S2	310	10
S3	420	9

- I costi di trasporto in £/tonnellata dalle aziende agricole agli stabilimenti sono:

	A	B
S1	3	3.5
S2	2	2.5
S3	6	4

- Le capacità e i costi di produzione degli stabilimenti sono:

	A	B
Capacità (tonnellate)	460	560
Costo di produzione (£/tonnellata)	26	21

- La frutta sciroppata viene venduta a £50/tonnellata alle aziende di distribuzione. L'azienda conserviera può vendere a questo prezzo tutto ciò che produce.

Obiettivo
Determinare i quantitativi di frutta fresca che devono essere acquistati dalle 3 aziende agricole in modo da massimizzare i profitti.

Formulazione Matematica dell'esempio 2

Variabili

Indichiamo con x_{ij} il numero di tonnellate acquistate dalla azienda agricola i (i=1,2,3 per S1, S2 e S3) e trasportate allo stabilimento j (j=1 per lo stabilimento A ej=2 per B) dove $x_{ij} \geq 0$, i=1,2,3 e j=1,2.

Vincoli

- La quantità massima che può essere acquistata da un'azienda agricola non può superare la quantità disponibile presso tale azienda.

$$x_{11} + x_{12} \leq 200$$
$$x_{21} + x_{22} \leq 310$$
$$x_{31} + x_{32} \leq 420$$

- La quantità inviata ad uno stabilimento non può superare la sua capacità massima

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 460$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 560$$

Funzione Obiettivo

L'obiettivo è quello di massimizzare il profitto totale, ovvero:
massimizza *(ricavo – costo di acquisto – costo di trasporto – costo di produzione)*

massimizza $50\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_{ij}$ *(ricavo)*

$- 11(x_{11}+x_{12}) - 10(x_{21}+x_{22}) - 9(x_{31}+x_{32})$ *(costo acquisto)*

$- 3x_{11} - 2x_{21} - 6x_{31} - 3.5x_{12} - 2.5x_{22} - 4x_{32}$ *(costo trasporto)*

$- 26\sum_{i=1}^{3} x_{i1} - 21\sum_{i=1}^{3} x_{i2}$ *(costo produzione)*

PROGRAMMAZIONE LINEARE: esempio 3

Una raffineria lavora **4** tipi di *gasolio* grezzo per produrre **3** tipi differenti di *benzine.*

- I dati relativi ai 4 tipi di gasolio sono i seguenti:

Tipo di Gasolio	**Ottani**	**Barili disponibili al giorno**	**Prezzo per barile in $**
1	68	4000	31.02
2	86	5050	33.15
3	91	7100	36.35
4	99	4300	38.75

- I dati relativi alla produzione dei 3 tipi di benzina sono i seguenti:

Tipo di benzina	**Numero minimo di ottani**	**Prezzo di vendita ($ per barile)**	**Domanda**
1	95	45.15	Massimo 10000 barili al giorno
2	90	42.95	Qualunque quantità
3	85	40.99	Almeno 15000 barili al giorno

- Nella produzione di un determinato tipo di benzina ogni tipo di gasolio contribuisce con un numero di ottani proporzionale al suo numero di ottani.

- La compagnia vende il gasolio grezzo non utilizzato per fare benzine a $38.95 al barile, se il suo numero di ottani è oltre 90, e a $36.85 al barile, se il suo numero di ottani è inferiore a 90.

Obiettivo:

massimizzare il profitto giornaliero.

Formulazione Matematica dell'esempio 3

Variabili

- E' necessario decidere il numero x_{ij} di barili di gasolio grezzo ti tipo *i* usati per produrre la benzina di tipo *j*, per *i*=1,2,3,4 e *j*=1,2,3.
- E' inoltre necessario decidere il numero y_i di barili di gasolio grezzo venduti.

Vincoli

- La miscelazione dei diversi tipi di gasolio grezzo deve essere tale da soddisfare il numero minimo di ottani per ogni tipo di benzina:

$$68x_{11}+86x_{21}+91x_{31}+99x_{41}-95(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})\geq 0$$
$$68x_{12}+86x_{22}+91x_{32}+99x_{42}-90(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})\geq 0$$
$$68x_{13}+86x_{23}+91x_{33}+99x_{43}-85(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43})\geq 0$$

- La quantità totale di ogni tipo gasolio grezzo utilizzato deve essere uguale al numero di barili disponibili:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+y_1=4000$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+y_2=5050$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+y_3=7100$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+y_4=4300$$

- Il numero di barili prodotti per i diversi tipi di benzine deve soddisfare la domanda:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}\leq 10000$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}\geq 15000$$

Funzione Obiettivo

L'obiettivo è la massimizzazione del profitto giornaliero:

Massimizza

$$45.15(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41})+42.95(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})+40.99(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43})$$
$$+y_1(36.85-31.02)+y_2(36.85-33.15)+y_3(38.95-36.35)+y_4(38.95-38.75)$$
$$-31.02(x_{11}+x_{12}+x_{13})-33.15(x_{21}+x_{22}+x_{23})-36.35(x_{31}+x_{32}+x_{33})-38.75(x_{41}+x_{42}+x_{43})$$

PROGRAMMAZIONE LINEARE: esempio 4

Una industria produce tre prodotti e ha a disposizione 4 stazioni di lavoro. Il tempo di produzione (in minuti) per unità di prodotto varia da stazione a stazione (a causa della differente esperienza e abilità degli addetti) come mostrato dalla seguente tabella:

		Stazioni di Lavoro 1	2	3	4
Prodotti	1	5	7	4	10
	2	6	12	8	15
	3	13	14	9	17

Analogamente, il profitto (in migliaia di lire) per unità di prodotto varia da stazione a stazione come mostrato dalla seguente tabella:

		Stazioni di Lavoro 1	2	3	4
Prodotti	1	10	8	6	9
	2	18	20	15	17
	3	15	16	13	17

Se in una settimana lavorativa ogni stazione di lavoro è disponibile per 35 ore, qual è la quantità che per ogni prodotto deve essere fabbricata in modo tale da fornire almeno le seguenti quantità:

Prodotto 1: 100 unità
Prodotto 2: 150 unità
Prodotto 3: 100 unità

Obiettivo

Determinare le quantità di prodotto fabbricate nelle diverse stazioni di lavoro al fine di massimizzare il profitto dell'industria.

Formulazione Matematica dell'esempio 4

Variabili

E' necessario decidere la quantità di ogni prodotto che deve essere fabbricata in ogni stazione di lavoro. Perciò:

x_{ij} = quantità di prodotto i (i=1,2,3) fabbricata alla stazione di lavoro j (j=1,2,3,4) ogni settimana.

Sebbene tutte le variabili x_{ij} dovrebbero essere intere, esse sono sufficientemente grandi che si può troncare la parte frazionaria ottenendo una buona approssimazione.

Vincoli

- Limite sul numero di minuti disponibili ogni settimana per ogni stazione di lavoro:

$$5x_{11} + 6x_{21} + 13x_{31} \leq 35\times 60$$

$$7x_{12} + 12x_{22} + 14x_{32} \leq 35\times 60$$

$$4x_{13} + 8x_{23} + 9x_{33} \leq 35\times 60$$

$$10x_{14} + 15x_{24} + 17x_{34} \leq 35\times 60$$

- Limite inferiore sulla quantità fabbricata per ogni prodotto:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 100$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq 150$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \geq 100$$

Funzione Obiettivo

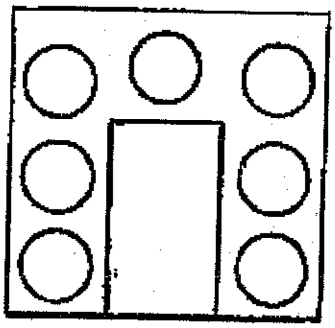
Si vuole massimizzare il profitto e, quindi, la funzione obiettivo è:

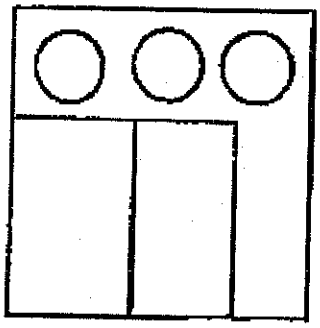
Massimizza

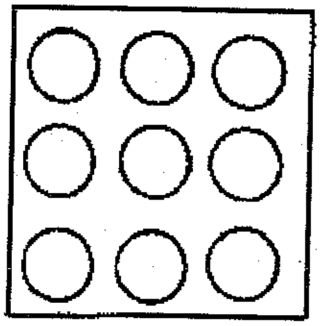
$$10x_{11}+8x_{12}+6x_{13}+9x_{14}+18x_{21}+20x_{22}+15x_{23}+17x_{24}+15x_{31}+16x_{32}+13x_{33}+17x_{34}$$

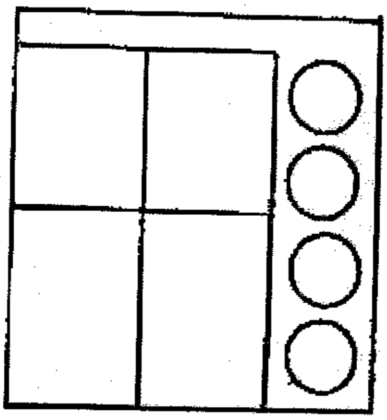
PROGRAMMAZIONE LINEARE: esempio 5

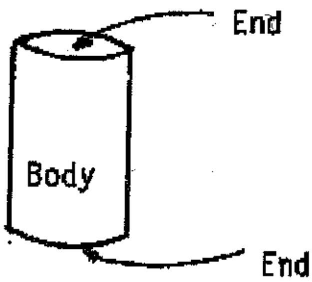
Si consideri il problema della pianificazione della produzione di barattoli. I barattoli sono ottenuti tagliando i loro componenti da fogli di metallo di due possibili dimensioni standard. Un barattolo consiste di un corpo centrale cilindrico (*parte centrale*) e due parti circolari che chiudono i due estremi (*parti terminali*).
Si possono avere 4 possibilità diverse per il taglio del foglio di metallo (*configurazioni di taglio*) come mostrato in figura:


Pattern 1


Pattern 3


Pattern 4


Pattern 2



Si dispone delle seguenti informazioni:

	Configurazioni di Taglio			
	1	2	3	4
Tipo di foglio usato	1	2	1	1
Numero di parti centrali	1	4	2	0
Numero di parti terminali	7	4	3	9
Quantità di scarto	s_1	s_2	s_3	s_4
Tempo per il taglio (ore)	t_1	t_2	t_3	t_4

Si noti che s_i (i=1,2,3,4) e t_i (i=1,2,3,4) non sono variabili ma costanti che sono note.

Sia P il profitto ottenuto vendendo un barattolo, C il costo per unità di scarto, T il numero totale di ore disponibili ogni settimana, L_1 e L_2 il numero di fogli di metallo di tipo 1 e 2, rispettivamente, disponibili ogni settimana.

All'inizio della settimana non c'è nulla in magazzino. Ogni parte centrale e terminale tagliata e non utilizzata alla fine della settimana viene immagazzinata al costo unitario c_1 e c_2, rispettivamente.

Obiettivo dell'industria

Determinare le quantità di barattoli possono essere prodotti ogni settimana massimizzando il profitto

Formulazione Matematica dell'esempio 5

Variabili

Siano

x_i = numero di configurazioni di taglio di tipo i (i=1,2,3,4) utilizzate ogni settimana;

y = numero di barattoli prodotti ogni settimana.

Si noti che $x_i \geq 0$, i=1,2,3,4, e $y \geq 0$. Inoltre, si assume che x_i e y siano sufficientemente grandi in modo che le parti frazionarie non sono significative e quindi trascurabili.

Vincoli

- Tempo disponibile:

$$t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 + t_4x_4 \leq T$$

- Fogli metallici disponibili:

$$x_1 + x_3 + x_4 \leq L_1 \quad \text{(Foglio tipo 1)}$$

$$x_2 \leq L_2 \quad \text{(Foglio tipo 2)}$$

- Numero di barattoli prodotti:

$$y = min[\ (7x_1+4x_2+3x_3+9x_4)/2,\ (x_1+4x_2+2x_3)\ ]$$

dove il primo termine è il limite imposto a y dal numero di parti terminali prodotte e il secondo termine è il limite imposto a y dal numero di parti centrali prodotte. Come si può notare che questo vincolo non è lineare.

Funzione Obiettivo

Si vuole massimizzare il profitto e, quindi, la funzione obiettivo è:

Massimizza (Profitto – Costo dello Scarto +
– Costo di Stoccaggio Parti Centrali +
– Costo di Stoccaggio Parti Terminali)

che corrisponde a:

$$\text{Massimizza} \quad \begin{aligned}(Py\ &-\ C(s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 + s_4x_4) + \\ &-\ c_1(x_1 + 4x_2 + 2x_3 - y) + \\ &-\ c_2(7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 - 2y))\end{aligned}$$

Come si può notare facilmente dalla formulazione del problema, esso non è un problema di programmazione lineare, in quanto uno dei suoi vincoli è non lineare. Comunque, per questo particolare problema, è relativamente facile ottenere un problema di programmazione lineare sostituendo il vincolo non lineare

$$y = min[\ (7x_1+4x_2+3x_3+9x_4)/2,\ (x_1+4x_2+2x_3)\ ] \qquad (A)$$

con le seguenti disequazioni:

$$y \leq (7x_1+4x_2+3x_3+9x_4)/2 \qquad (B)$$

$$y \leq (x_1+4x_2+2x_3) \qquad (C)$$

Si noti, inoltre, che la formulazione presentata può essere facilmente estesa per affrontare il caso in cui le parti centrali e terminali inutilizzate alla fine di una settimana possono essere considerate disponibili per la produzione la settimana successiva.

PROGRAMMAZIONE LINEARE A NUMERI INTERI

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \,, \quad i=1,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \,, \quad j=1,\dots,n$$

$$x_j \text{ intero} \,, \quad j=1,\dots,n$$

LE VARIABILI x_j DEVONO ASSUMERE VALORI INTERI POICHE', AD ESEMPIO, RAPPRESENTANO

- Numero di macchine dedicate ad un lavoro j
- Numero di veicoli assegnati alla linea di trasporto j
- Numero di oggetti caricati nel contenitore j

etc...

ESEMPIO

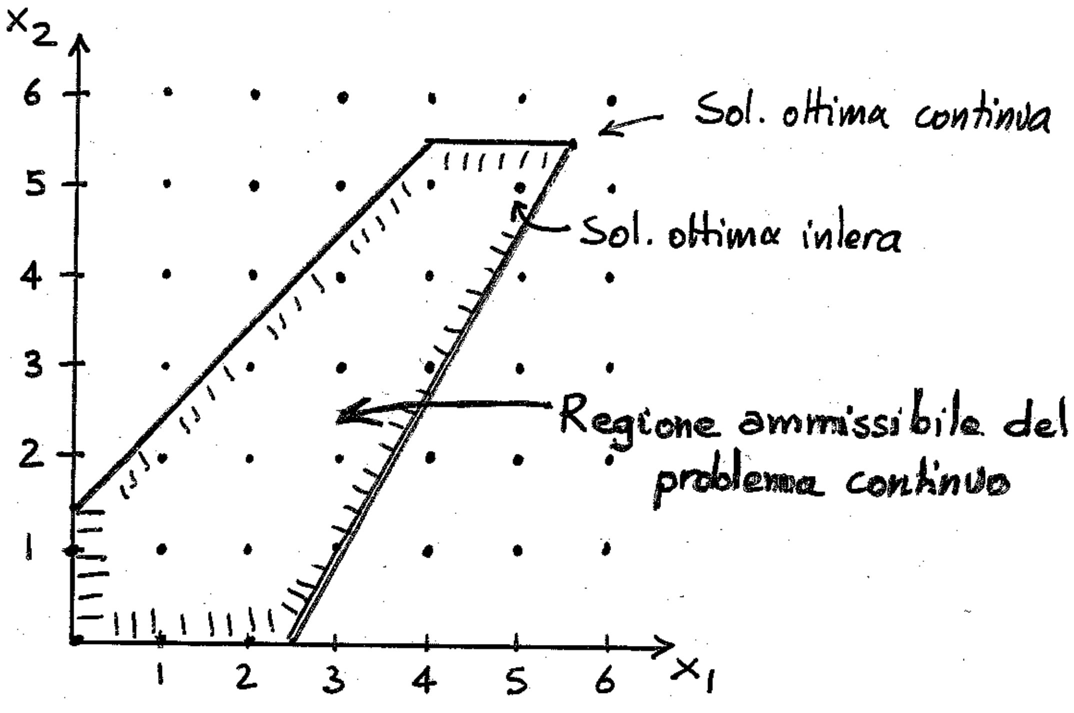
$$\text{Minimizza } z = -x_1 - x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1.5$$

$$-7x_1 + 4x_2 \geq -17.5$$

$$-x_2 \geq -5.5$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ ed intere}$$



ESEMPIO 6 RIEMPIMENTO OTTIMO DI UN CONTENITORE
(Knapsack problem)

E' DATO UN CONTENITORE DI CAPACITA' Q
ED N OGGETTI TALI CHE:

OGGETTO	1	2	...	i	...	N
PESO	w_1,	w_2,	...,	w_i,	...,	w_N
PROFITTO	p_1,	p_2,	...,	p_i,	...,	p_N

SI VUOLE RIEMPIRE IL CONTENITORE MASSIMIZZANDO IL PROFITTO TOTALE DEGLI OGGETTI CARICATI

VARIABILI DECISIONALI

x_i : SE $x_i = 1$ SIGNIFICA CHE L'OGGETTO i DEVE ESSERE CARICATO; SE $x_i = 0$ L'OGGETTO i NON VIENE CARICATO

$$\text{Massimizza } z = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i x_i \leq Q$$

$$x_i \in \{0,1\} \; ; \; i = 1, \dots, N$$

FORMULAZIONE ALTERNATIVA

UNA FORMULAZIONE ALTERNATIVA DERIVA DALLA SEMPLICE OSSERVAZIONE CHE "MASSIMIZZARE IL VALORE DEGLI OGGETTI CARICATI" EQUIVALE A "MINIMIZZARE IL VALORE DEGLI OGGETTI NON-CARICATI"

VARIABILI DECISIONALI

y_i : $= 1$ SE L'OGGETTO i NON VIENE CARICATO
$= 0$ ALTRIMENTI

$$\text{Minimizza} \quad z = \sum_{i=1}^{N} p_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i y_i \geq \left(\sum_{i=1}^{N} w_i - Q \right)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \; ; \; i = 1, \dots, N$$

E' OVVIO CHE $\quad x_i = 1 - y_i \; ; \; \forall i$

ESEMPIO 7 CARICA OTTIMA DI LIQUIDI IN SERBATOI

TIPO SERBATOIO

CAPACITA'	Q_1	Q_2	...	Q_i	...	Q_M
COSTO	v_1	v_2	...	v_i	...	v_M
DISPONIBILI	b_1	b_2	...	b_i	...	b_M

DEVONO ESSERE CARICATI N LIQUIDI <u>SENZA MESCOLARLI</u>; OGNI LIQUIDO j HA UN VOLUME q_j ; $j = 1, \dots, N$.

DETERMINARE L'INSIEME DI SERBATOI DI COSTO MINIMO PER CARICARE TUTTI I LIQUIDI

VARIABILI DECISIONALI

x_{ij} : NUMERO DI SERBATOI DI TIPO i IMPIEGATI PER IL LIQUIDO j.

VINCOLI

a. I serbatoi assegnati al liquido j devono avere una capacità complessiva $\geq q_j$

b. il numero complessivo di serbatoi di tipo i utilizzati non può superare b_i

FORMULAZIONE MATEMATICA

$$\text{Minimizza } z = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} v_i \, x_{ij}$$

a) per ogni liquido j $\displaystyle\sum_{i=1}^{M} Q_i \, x_{ij} \geq q_j \quad ; \quad j = 1, \dots, N$

b) per ogni serbatoio i $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \leq b_i \quad ; \quad i = 1, \dots, M$

$$x_{ij} \geq 0 \; \underbrace{\text{ed INTERO}}_{*} \quad \forall\, i, j$$

IL VINCOLO DI INTEREZZA SUL VALORE DELLE VARIABILI È SUFFICIENTE A GARANTIRE CHE I LIQUIDI NON SIANO MESCOLATI

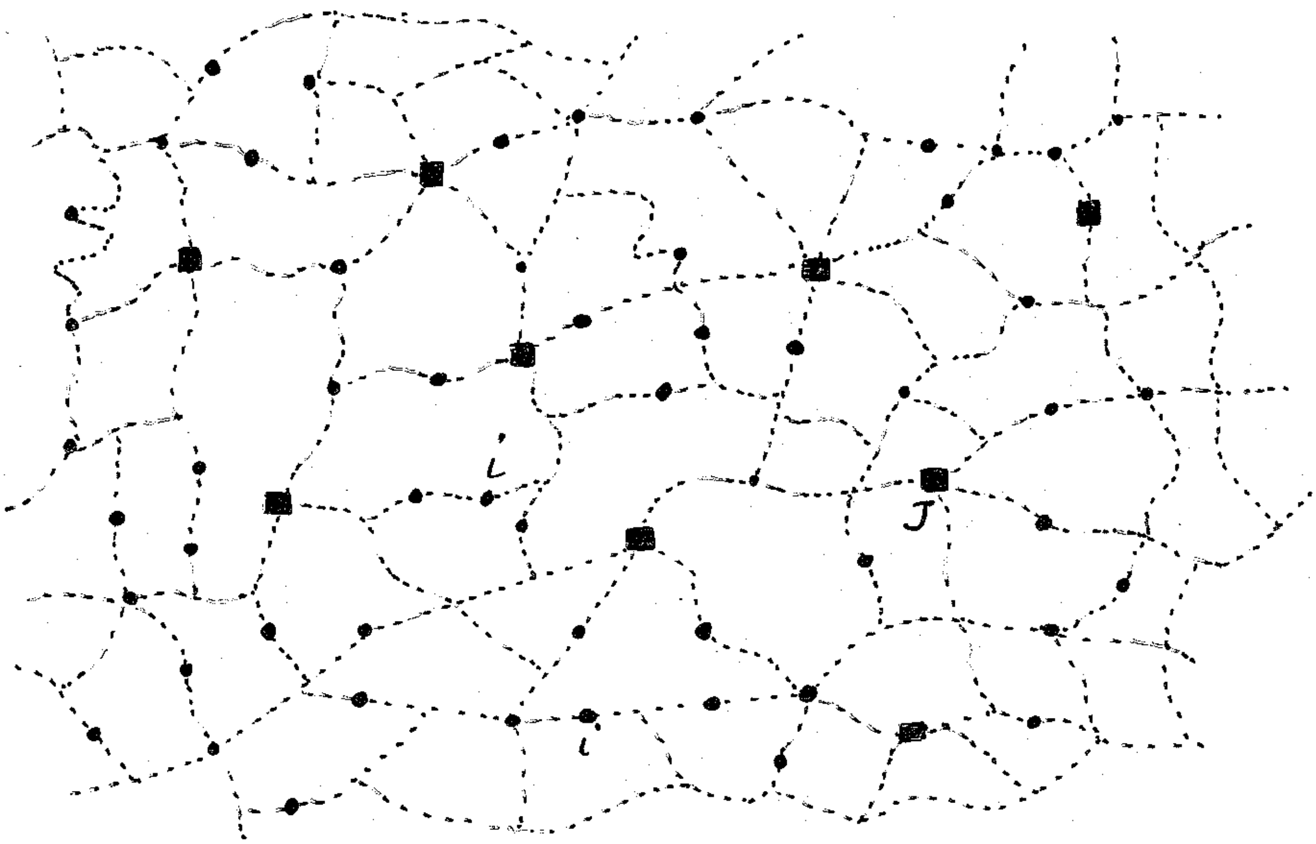
Rimuovendo i vincoli (*) puo' verificarsi quanto segue.

Esempio $\quad x_{3j_1} = 2.5, \; x_{3j_2} = 3.5, \; x_{3j} = 0 \;\; \forall j \neq j_1 \text{ e } j_2$

supponendo $b_3 = 6$

$\Rightarrow$ Uno dei serbatoi di tipo 3 viene caricato al 50% con il liquido J_1 e al 50% con il liquido J_2

ESEMPIO 8 Localizzazione di depositi



■ Localita' dove e' possibile costruire un deposito

● Clienti che devono essere serviti

Costruire un deposito nella località j costa c_j.

Servire un cliente i da un deposito che si trovi nella localita' j comporta un costo h_{ij}

---

* DETERMINARE QUANTI DEPOSITI COSTRUIRE E DOVE COSTRUIRLI IN MODO CHE IL COSTO COMPLESSIVO PER COSTRUIRE I DEPOSITI E PER SERVIRE TUTTI I CLIENTI SIA MINIMO.

A. Ogni cliente puo' essere servito da piu' depositi

I depositi hanno capacità illimitata

INDICHIAMO CON

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'insieme delle località candidate

$I = \{1, 2, \ldots, m\}$ l'insieme dei clienti

Ricordiamo che:

c_j : costo per costruire un deposito in $j \in N$

h_{ij} : costo per servire $i \in I$ da $j \in N$

FORMULAZIONE MATEMATICA

$x_j = 1$ se nella localita' j viene costruito un deposito
$ = 0$ altrimenti

y_{ij} frazione del cliente i servito dal deposito in j

$$\text{Min } z = \sum_{j \in N} c_j x_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in N} h_{ij} y_{ij}$$

$$\text{(a)} \qquad \sum_{j \in N} y_{ij} = 1 \quad ; \quad \forall i \in I$$

$$\text{(b)} \qquad y_{ij} \leq x_j \quad ; \quad \forall i \in I, \forall j \in N$$

$$y_{ij} \geq 0,\ x_j \in \{0, 1\} \ ; \ \forall i \in I, \forall j \in N$$

(a) Ogni cliente deve essere visitato.

(b) Il cliente i può essere visitato dalla località j solo se in j viene costruito un deposito.

B. Ogni cliente puo' essere servito da piu' depositi
I depositi hanno capacita' limitata

Un deposito costruito nella localita' $j \in N$ avra' una capacita' u_j.

Ogni cliente $i \in N$ richiede un quantitativo b_i

VINCOLI

(1) Dai depositi bisogna inviare al cliente i la quantita' b_i

(2) Le quantita' inviate dal deposito j non puo' superare u_j

FORMULAZIONE MATEMATICA.

$x_j = 1$ se nella localita' $j \in N$ viene costruito un deposito
$x_j = 0$ altrimenti

y_{ij} quantita' inviata dal deposito in j al cliente i

h_{ij} costo per inviare una unita' di prodotto da j a i

$$\text{Min } z = \sum_{j \in N} c_j x_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_{ij} y_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in N} y_{ij} = b_i , \quad i \in I$$

$$\sum_{i \in I} y_{ij} \leq u_j x_j , \quad j \in N$$

$$y_{ij} \geq 0, \quad i \in I,\ j \in N$$

$$x_j \in \{0, 1\} , \quad j \in N$$

C Ogni cliente puo' essere servito da un solo deposito
I depositi hanno capacita' limitata

$\hat{h}_{ij} = h_{ij} \cdot b_i$: costo per servire il cliente i dal deposito j

FORMULAZIONE MATEMATICA

$x_j = 1$ se in $j \in N$ viene costruito un deposito; $x_j = 0$ altrimenti

$y_{ij} = 1$ se il cliente i viene servito dal deposito j; $y_{ij} = 0$ altrimenti

$$\text{Min } z = \sum_{j \in N} c_j x_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in N} \hat{h}_{ij} y_{ij}$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{j \in N} y_{ij} = 1, \quad i \in I$$

$$\sum_{i \in I} b_i y_{ij} \leq u_j x_j, \quad j \in N$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j \in N$$

$$y_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \; j \in N$$

NOTAZIONE MATRICIALE

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Poniamo:

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

il problema puo' essere riscritto:

$$\text{Min } z = cx$$

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

Ponendo $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$

$$\text{Min } z = cx$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b$$

$$x_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

MANIPOLAZIONI DI UN PROBLEMA

MINIMIZZAZIONE E MASSIMIZZAZIONE

Un problema di Massimo puó essere convertito in un problema di Minimo e viceversa.

$$\text{Massimizza} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\text{Minimizza} \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j$$

INVERSIONE DI UNA DISEQUAZIONE

Una disequazione del tipo "$\geq$" si converte in una disequazione del tipo "$\leq$" moltiplicandola per -1

Es: $3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8$

moltiplicandolo per -1.

$-3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 8$

EQUAZIONE IN DISEQUAZIONI

Ad una equazione corrispondono 2 disequazioni

Equazione: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

viene trasformata in

2 Diseq. $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \end{cases}$

DISEQUAZIONE IN EQUAZIONE

Ciò è possibile aggiungendo alla disequazione una <u>variabile di scarto</u> (slack variable) non-negativa

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \text{diviene} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \boxed{x_{n+i}} = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{diviene} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$$

$$x_{n+i} \geq 0$$

NON-NEGATIVITA' DELLE VARIABILI

Il metodo del Simplesso richiede che le variabili assumano solo valori non negativi.

Se nel modello del problema una variabile x_j può assumere "qualunque" valore allora può essere sostituito con 2 variabili x_j^+ ed x_j^- non-negative:

$$x_j = x_j^+ - x_j^- \quad ; \quad x_j^+, x_j^- \geq 0$$

Esempio:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= 2x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad & x_2 \text{ qualunque} \end{aligned}$$

Ponendo $x_2 = x_2^+ - x_2^-$:

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Min } z &= 2x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- \\ 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- &\leq 6 \\ 2x_1 + 9x_2^+ - 9x_2^- &\leq 8 \\ x_1, x_2^+, x_2^- &\geq 0 \end{aligned} \right.$$

FORMA STANDARD E CANONICA

STANDARD	CANONICA
$\text{Min } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \; ; i=1,\dots,m$ $x_j \geq 0 \; ; j=1,\dots,n$	$\text{Min } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \; ; \; i=1,\dots,m$ $x_j \geq 0 \; ; \; j=1,\dots,$
$\text{Max } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \; ; i=1,\dots,m$ $x_j \geq 0 \; ; j=1,\dots,n$	$\text{Max } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \; ; \; i=1,\dots,m$ $x_j \geq 0 \; ; \; j=1,\dots,n$

FORMA STANDARD : e' la forma richiesta dall'algoritmo del SIMPLESSO

FORMA CANONICA : e' utile per illustrare le relazioni di dualità.

ESEMPIO DI TRASFORMAZIONE IN FORMA STANDARD

$$\text{Min } z = 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 4x_4$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 \geq 2 \end{array}\right\} A$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 9x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_3 \leq 10 \end{array}\right\} B$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 18$$

x_1 qualsiasi $\quad$ C

$$x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$$

(A) Aggiungo $x_5, x_6 \geq 0$; (B) aggiungo x_7, x_8

(C) sostituisco $x_1 = x_1^+ - x_1^-$, $x_1^+, x_1^- \geq 0$

$$\text{Min } z = 2x_1^+ - 2x_1^- + 5x_2 + 7x_3 + 4x_4$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1^+ - 3x_1^- + 2x_2 - 4x_3 - x_5 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_6 = 2 \end{array}\right\} A$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1^+ - 2x_1^- + 9x_2 + x_7 = 8 \\ x_1^+ - x_1^- + x_3 + x_8 = 10 \end{array}\right\} B$$

$$x_1^+ - x_1^- + x_2 + x_3 + 2x_4 = 18$$

$$x_1^+,\ x_1^-,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8 \geq 0$$

MOTIVAZIONI DELLA FORMA STANDARD

Trasformazioni di un sistema di equazioni lineari che lasciano immutato l'insieme delle sol. ammissibili.

1 MOLTIPLICA I COEFFICIENTI ED IL TERMINE NOTO DI UNA EQUAZIONE PER UN NUMERO NON NULLO

2 MOLTIPLICA UN'EQUAZIONE PER UN REALE NON-NULLO E SOMMALA AD UN'ALTRA EQUAZIONE.

Esempio

$$3x_1 - 7x_2 = -1 \quad (a)$$
$$x_1 + x_2 = 13 \quad (b)$$

- Moltiplica la (b) per 2 e sommala alla (a)
- Moltiplica la (b) per 4

$$5x_1 - 5x_2 = 25$$
$$4x_1 + 4x_2 = 52$$

IL METODO DEL SIMPLESSO UTILIZZA TRASFORMAZIONI DEL TIPO SUDDETTO PER DETERMINARE LA SOLUZIONE OTTIMA

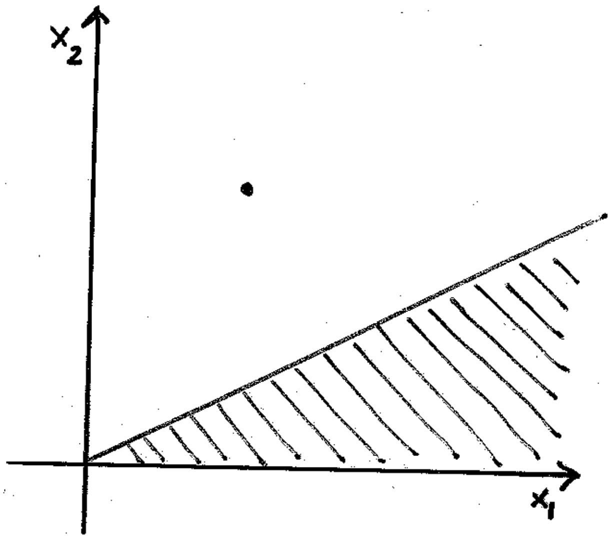
LE TRASFORMAZIONI DI TIPO 1 e 2 PRECEDENTI, APPLICATE AD UN SISTEMA DI DISEQUAZIONI, ALTERANO L'INSIEME DELLE SOLUZIONI AMMISSIBILI.

Esempio

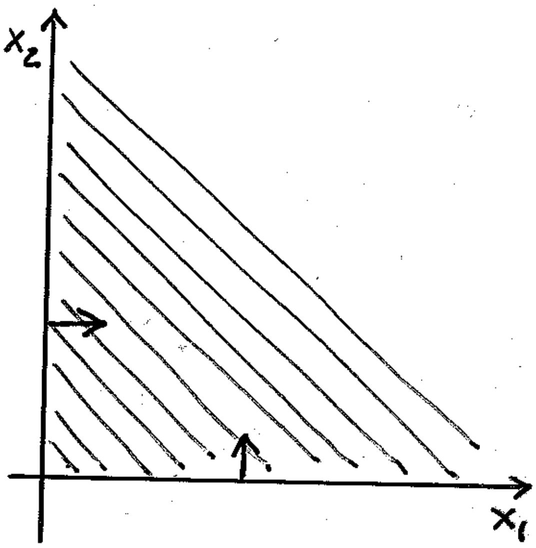
$$x_1 - 2x_2 \geq 0 \qquad (a)$$
$$x_2 \geq 0 \qquad (b)$$

Moltiplico la (b) per 2 e sommala alla (a)

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$



$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



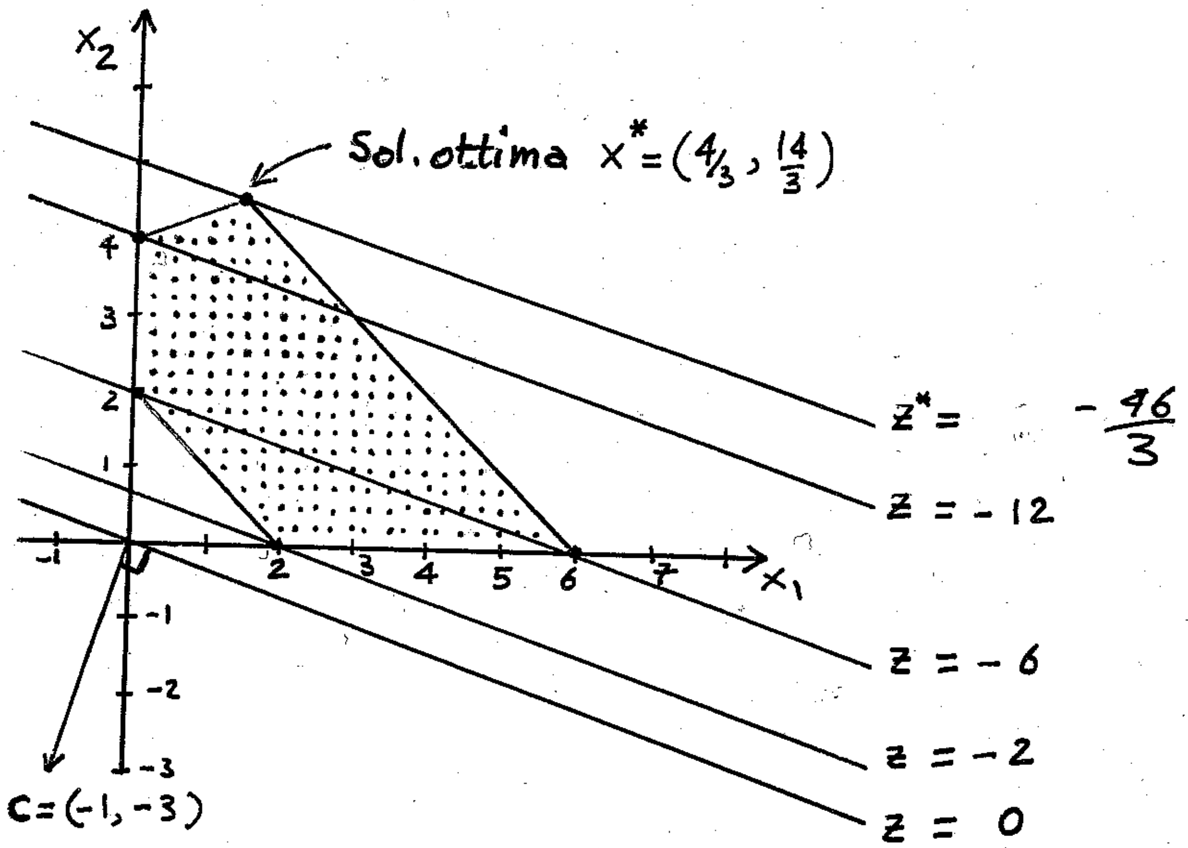
$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le variabili di scarto consentono di trasformare le disequazioni in equazioni e quindi di applicare le trasformazioni precedenti

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

SOLUZIONE OTTIMA UNICA

$$\text{Min } z = -x_1 - 3x_2$$
$$-x_1 - x_2 \geq -6$$
$$x_1 - 2x_2 \geq -8$$
$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$



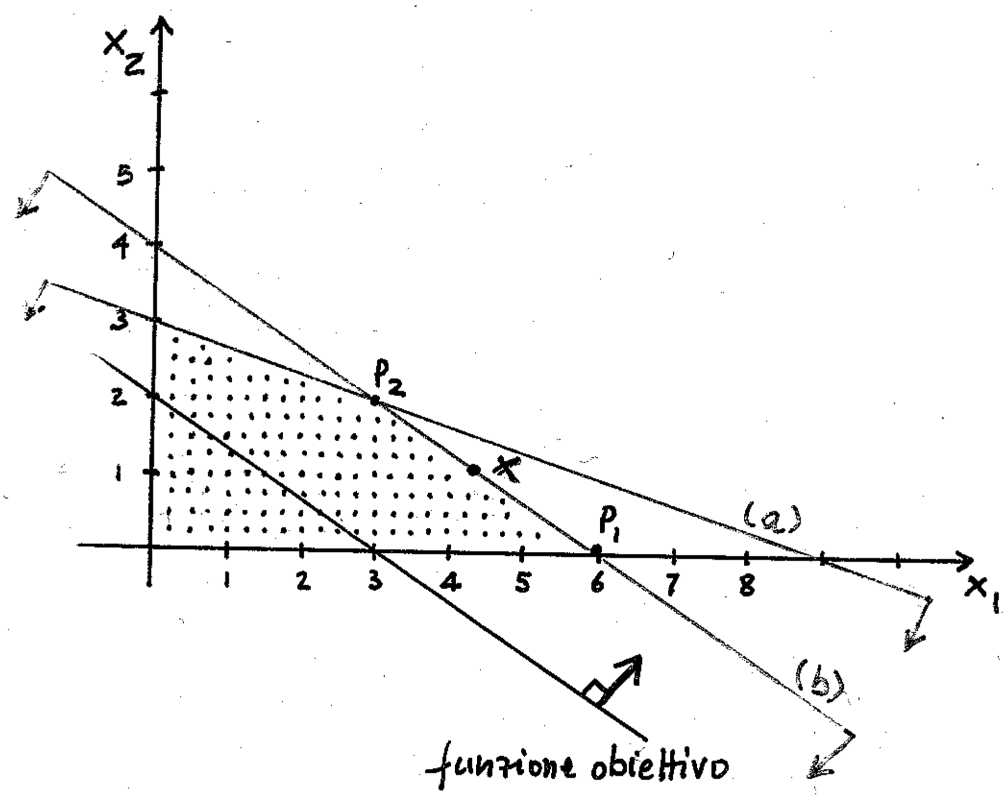
- Per minimizzare z bisogna muovere la retta $z = -x_1 - 3x_2$ nella direzione $-c$

- La soluzione ottima corrisponde ad un "vertice" della "Regione Ammissibile"

SOLUZIONI OTTIME EQUIVALENTI

Massimizza $z = 2x_1 + 3x_2$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9 \qquad (a)$$
$$4x_1 + 6x_2 \leq 24 \qquad (b)$$
$$x_1 ,\ x_2 \geq 0$$



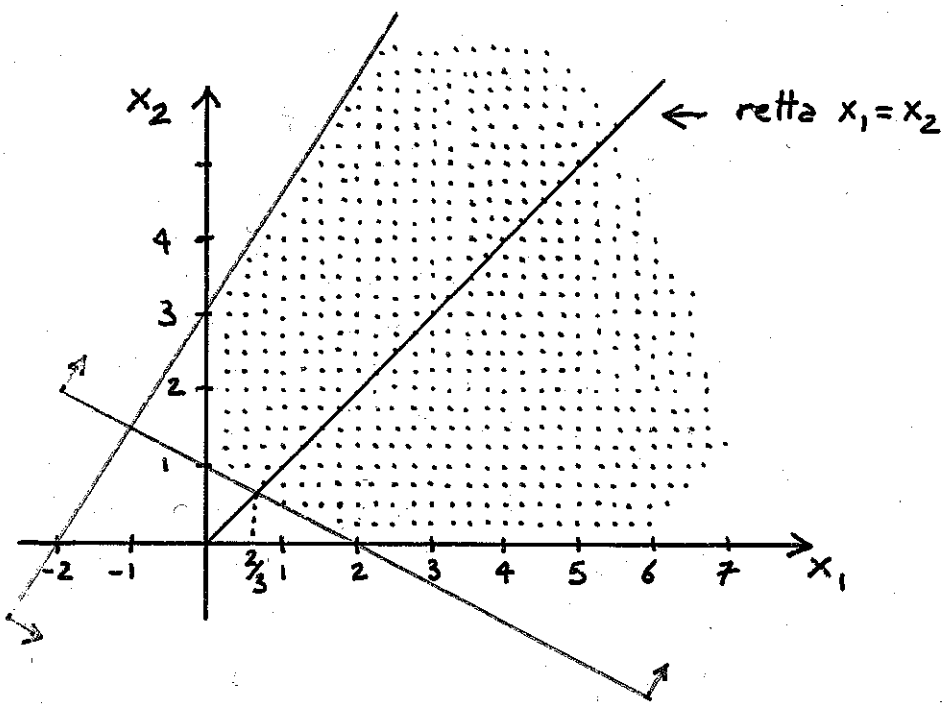
- Nei punti $P_1 = (6,0)$ e $P_2 = (3,2)$ la f. obiettivo assume il valore ottimo $z^* = 12$

- In ogni punto del segmento che va da P_1 a P_2 la f. obiettivo assume lo stesso valore $z^* = 12$

$$x = \lambda P_1 + (1-\lambda) P_2 \quad ; 0 \leq \lambda \leq 1$$
$$x = (3+3\lambda,\ 2-2\lambda)$$
$$z = 2x_1 + 3x_2 = 2(3+3\lambda) + 3(2-2\lambda) = 12$$

SOLUZIONE OTTIMA ILLIMITATA

$$\text{Min } z = -2x_1 - 5x_2$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$



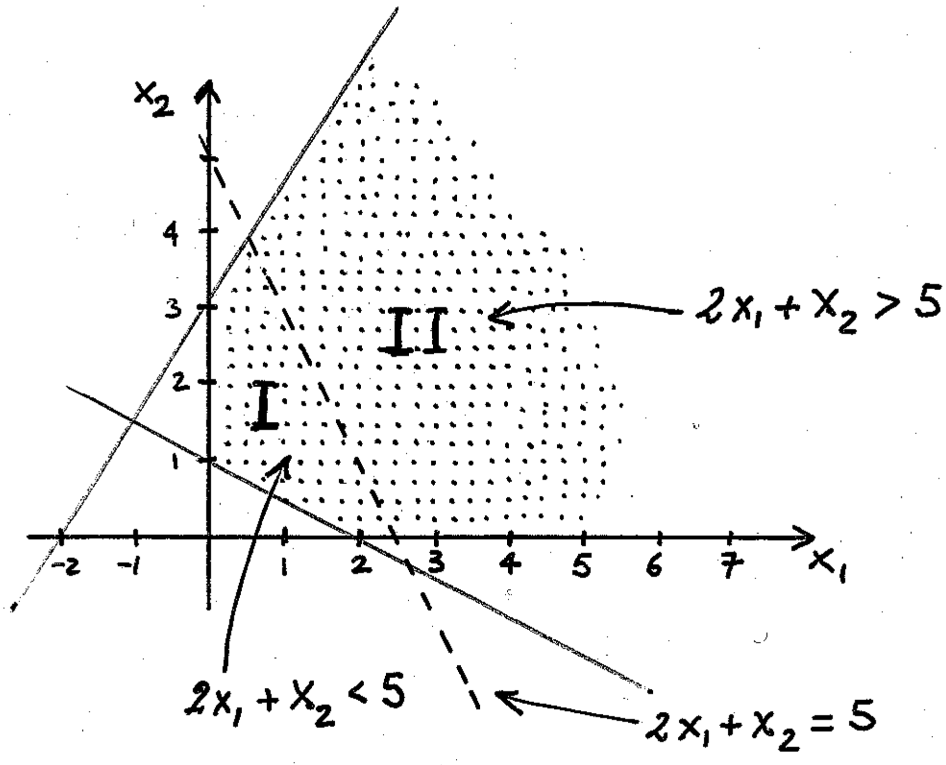
Tutti i punti $x_1 = x_2$, con $x_1 \geq \frac{2}{3}$ appartengono alla regione ammissibile

Nei punti $x_1 = x_2$ la funzione obiettivo $z = -2x_1 - 5x_2$ diviene $z = -7x_1$, da cui

$$z \to -\infty \quad \text{per } x_1 \to \infty$$

REGIONE AMMISSIBILE ILLIMITATA MA SOLUZIONE OTTIMA LIMITATA

$$\text{Min } z = 2x_1 + x_2$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$



La soluzione ottima si trova nella Regione I

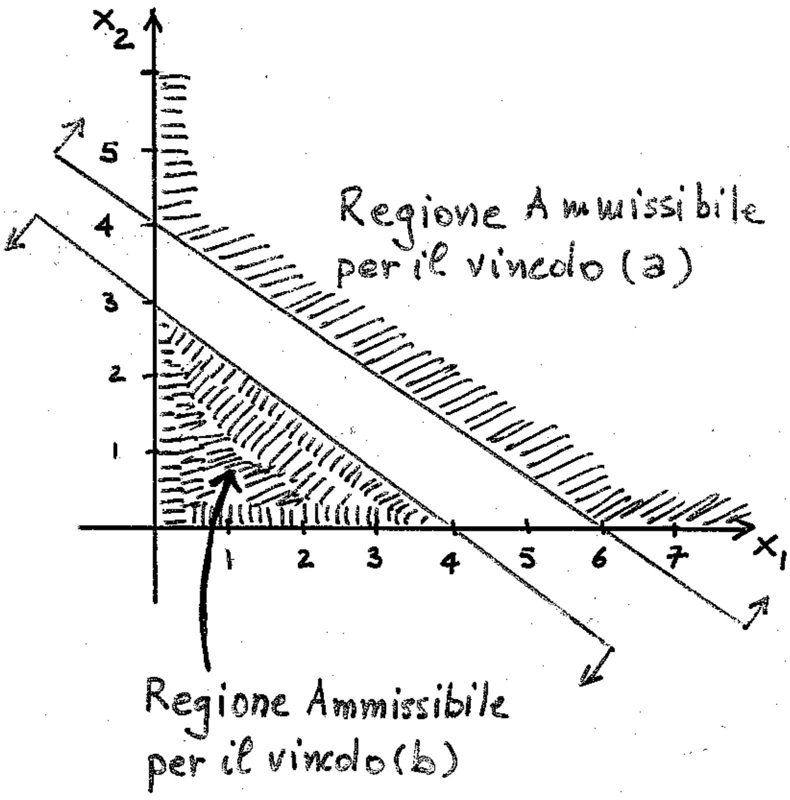
PROBLEMA SENZA SOLUZIONE

$$\text{Min } z = 2x_1 + 5x_2$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 12 \qquad (a)$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12 \qquad (b)$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$



NON ESISTE UNA REGIONE AMMISSIBILE PER ENTRAMBI I VINCOLI!

GEOMETRIA DEL METODO DEL SIMPLESSO

COMBINAZIONE LINEARE

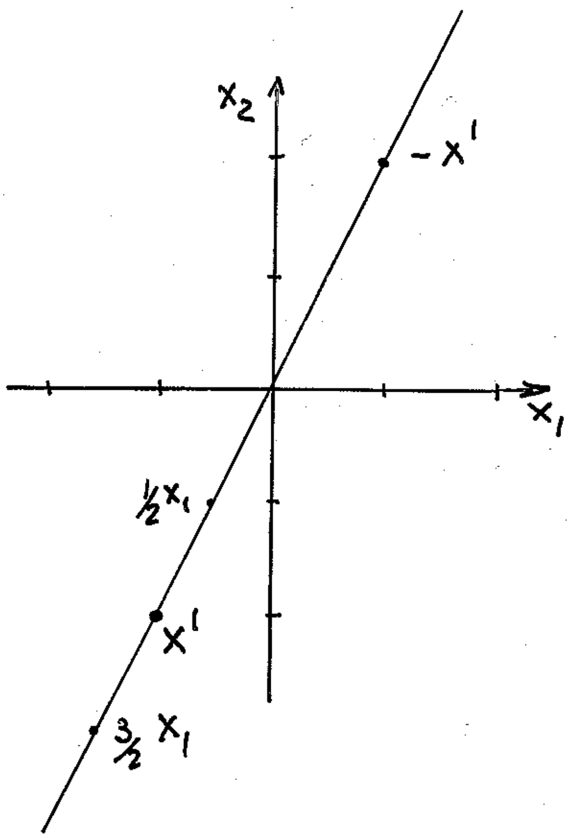
DATI I VETTORI $a^1, a^2, \ldots, a^k \in R^n$ e $b \in R^n$

b E' COMBINAZIONE LINEARE DI $\{a^1, a^2, \ldots a^k\}$ SE

$$b = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a^j \; ; \quad \text{con } \lambda_1, \ldots \lambda_k \text{ reali}$$

INVILUPPO LINERE (LINEAR HULL) di $\{a^1, a^2, \ldots, a^k\}$

" INSIEME DI TUTTE LE COMBINAZIONI LINEARI DEI VETTORI $\{a^1, a^2, \ldots, a^k\}$



Esempio

$x^1 = (-1, -2)$ in R^2

Inviluppo Lineare λx^1, λ reale

COMBINAZIONE AFFINE

DATI I VETTORI $a^1, a^2, \ldots, a^k$ in R^n

OGNI VETTORE $b \in R^n$ DELLA FORMA

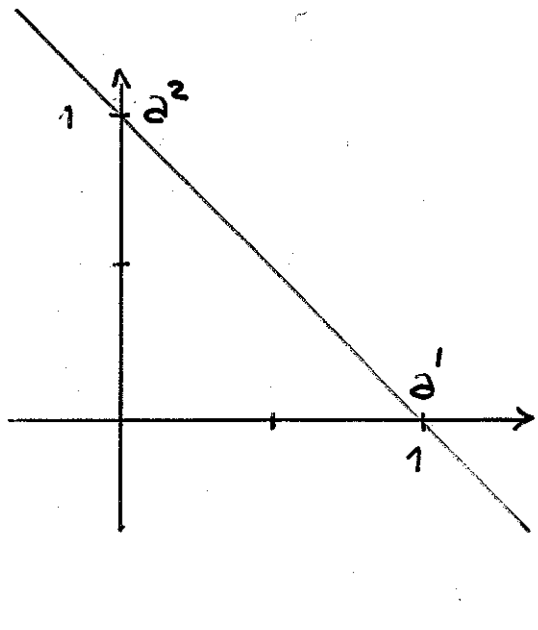
$$b = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a^j$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \quad ; \quad \lambda_j \text{ reali}$$

È DETTO <u>COMBINAZIONE AFFINE</u>

<u>INVILUPPO AFFINE</u> (AFFINE HULL) di $\{a^1, a^2, \ldots, a^k\}$

" INSIEME DI TUTTE LE COMBINAZIONI AFFINI



Esempio
$a^1 = (1, 0)$; $a^2 = (0, 1)$

$b = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2$ da cui

$b = (\lambda_1, \lambda_2)$, dove
$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

COMBINAZIONE CONVESSA

DATI I VETTORI $a^1, a^2, \dots, a^k \in R^n$

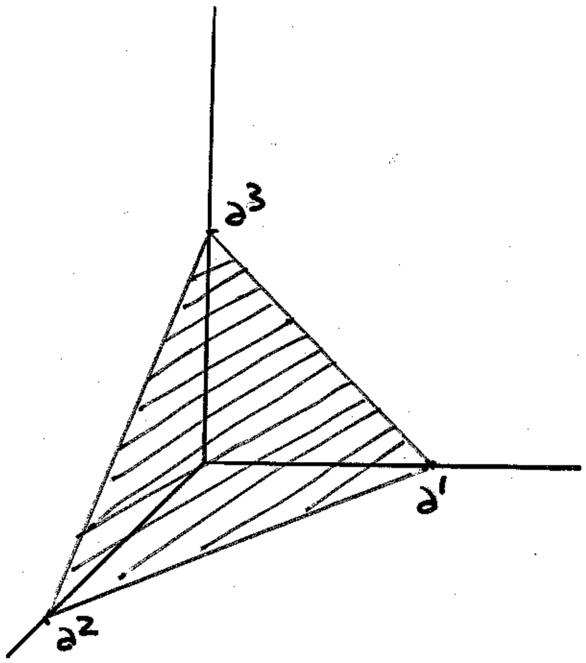
OGNI VETTORE $b \in R^n$ DELLA FORMA

$$b = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a^j$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \quad ; \quad \lambda_j \geq 0 \text{ reale}$$

INVILUPPO CONVESSO (CONVEX HOLL) di $\{a^1, a^2, \dots, a^k\}$

" INSIEME DI TUTTE LE COMBINAZIONI CONVESSE "



Esempio

$a^1 = (1,0,0)$

$a^2 = (0,1,0)$

$a^3 = (0,0,1)$

$b = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3$

da cui

$b = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

UTILITA' DEI VARI TIPI DI COMBINAZIONI

COMBINAZIONE LINEARE

Sistema omogeneo di eq. $Ax = 0$

Date due soluzioni x^1 e x^2 $(Ax^1 = 0 ; Ax^2 = 0)$

- Ogni combinazione lineare $x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$, λ_1, λ_2 reali e' soluzione di $Ax = 0$

$$\underline{\underline{Ax}} = A(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) = \lambda_1 (Ax^1) + \lambda_2 (Ax^2) = \underline{\underline{0}}$$

COMBINAZIONE AFFINE

Sistema non-omogeneo di eq. $Ax = b$ $(b \neq 0)$

Date due soluzioni x^1 e x^2 $(Ax^1 = b ; Ax^2 = b)$

- Ogni combinazione affine $x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$; $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ è soluzione di $Ax = b$

$$\underline{\underline{Ax}} = A(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2) = \lambda_1 (Ax^1) + \lambda_2 (Ax^2) =$$

$$= \lambda_1 b + \lambda_2 b = (\lambda_1 + \lambda_2) b = \underline{\underline{b}}$$

COMBINAZIONE CONVESSA

Sistema non-omogeneo $\boxed{Ax = b\ ,\ x \geq 0}$

Date due soluzioni x^1 e x^2 $(Ax^1 = b, x^1 \geq 0; Ax^2 = b, x^2 \geq 0)$

- Ogni combinazione convessa $\bar{x} = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$; $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ è soluzione di $Ax = b, x \geq 0$

$$\underline{\underline{A\bar{x}}} = \lambda_1(Ax^1) + \lambda_2(Ax^2) = (\lambda_1 + \lambda_2)b = \underline{\underline{b}}$$

$$\bar{x} = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \geq 0 \quad \text{poiché } \lambda_1 \geq 0 \text{ e } \lambda_2 \geq 0$$

- In modo simile si può verificare che ogni combinazione convessa di sol. ammissibili di $Ax \geq b, x \geq 0$ è a sua volta soluzione del sistema.

INDIPENDENZA LINEARE

I vettori $a^1, a^2, \dots, a^k$ in R^n sono linearmente indipendenti se

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a^j = 0 \quad \text{IMPLICA} \quad \lambda_j = 0 \,,\; j = 1, \dots, k$$

Esempio

$a^1 = (1,2)$ e $a^2 = (-1,1)$ sono indipendenti:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

ha come soluzione $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$

DIPENDENZA LINEARE

I vettori $a^1, a^2, \dots, a^k$ sono linearmente dipendenti qualora

$$\sum_{j=1}^{K} \lambda_j a^j = 0$$ ha soluzione con $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_K$ <u>non-tutti nulli</u>

INSIEME DI COPERTURA (SPANNING SET)

I vettori $a^1, a^2, \dots, a^k \in R^n$ coprono R^n se ogni vettore $b \in R^n$ puo' essere rappresentato come combinazione lineare di $a^1, a^2, \dots, a^k$.

$$b = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a^j \; ; \quad \lambda_j \text{ reale} \quad j = 1, \dots, n.$$

Esempio ($n=2$)

$a^1 = (1,0), \quad a^2 = (-1,3), \quad a^3 = (2,1)$

$b = (b_1, b_2)$

$$b = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3$$

Soluzione n. 1 $\quad \lambda_1 = b_1 + \frac{1}{3} b_2, \; \lambda_2 = \frac{1}{3} b_2, \; \lambda_3 = 0$

$b_1 = (b_1 + \frac{1}{3} b_2) \cdot 1 + \frac{1}{3} b_2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = b_1$

$b_2 = (b_1 + \frac{1}{3} b_2) \cdot 0 + \frac{1}{3} b_2 (3) + 0 \cdot 1 = b_2$

Soluzione n. 2 $\quad \lambda_1 = b_1 - 2b_2, \; \lambda_2 = 0, \; \lambda_3 = b_2$

$b_1 = \dots$

$b_2 = \dots$

BASE DI R^n

I vettori $a^1, a^2, \dots, a^k \in R^n$ formano una BASE DI R^n se valgono le seguenti condizioni

1. Ogni vettore $b \in R^n$ si ottiene come combinazione lineare di $a^1, a^2, \dots, a^k$

2. Se uno qualunque dei vettori $a^1, a^2, \dots, a^k$ viene rimosso i rimanenti vettori non coprono R^n.

SI DIMOSTRA CHE:

- $k = n$

- $a^1, a^2, \dots, a^n$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

- Esiste una sola n-ple $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$ per rappresentare $b = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a^j$

- UNA BASE NON E' UNICA. Infatti ogni insieme di n-vettori linearmente indipendenti forma una Base.

SOSTITUZIONE DI UN VETTORE DELLA BASE

Sia $B = \{a^1, a^2, \dots, a^{j^*}, \dots, a^n\}$ una base di R^n

e $B' = \{a^1, a^2, \dots, b, \dots, a^n\}$ l'insieme di vettori che si ottiene da B sostituendo a^{j^*} con $b \in R^n$.

- Poiche' B e' una base: $b = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_{j^*} a^{j^*} + \dots + \lambda_n a^n$

TEOREMA L'insieme di vettori B' e' una base se e solo se $\lambda_{j^*} \neq 0$.

- <u>La condizione e' necessaria</u>: ovvero se B' e' una base allora $\lambda_{j^*} \neq 0$.

<u>Per assurdo supponiamo $\lambda_{j^*} = 0$</u>, quindi:

$$b = \sum_{i \neq j^*} \lambda_i a^i$$

che puo' essere riscritto come

$$\lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_{j^*-1} a^{j^*-1} - b + \lambda_{j^*+1} a^{j^*+1} + \dots + \lambda_n a^n = 0$$

E' evidente che il vettore $(\lambda_1, \dots, \lambda_{j^*-1}, -1, \lambda_{j^*+1}, \dots, \lambda_n) \neq \underline{0}$

quindi i vettori di B' sono linearmente dipendenti

e B' non e' una base contrariamente all'ipotesi.

- <u>La condizione e' sufficiente</u>: ovvero se $\lambda_{j^*} \neq 0$ allora i vettori $a_1, \dots, a_{j^*-1}, b, a_{j^*+1}, \dots, a^n$ sono linearmente indipendenti (i.e. B' e' una base)

<u>Per assurdo supponiamo che B' non sia una base di R^n</u>

Esisteranno quindi $\mu_1, \dots, \mu_{j^*-1}, \mu, \mu_{j^*+1}, \dots, \mu_n$ non tutti nulli tali che

(1) $$\mu_1 a^1 + \dots + \mu_{j^*-1} a^{j^*-1} + \mu b + \mu_{j^*+1} a^{j^*+1} + \dots + \mu_n a^n = 0$$

Sostituendo nella (1) $b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a^i$ si ha

$$\sum_{i \neq j^*} \mu_i a^i + \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a^i = 0$$

ovvero

(2) $$\sum_{i \neq j^*} (\mu_i + \mu \lambda_i) a^i + \mu \lambda_{j^*} a^{j^*} = 0$$

Poiche' B e' una base allora la (2) implica che:

$$\mu_i + \mu \lambda_i = 0 \qquad \forall\ i \neq j^*$$

$$\mu \lambda_{j^*} = 0$$

Per ipotesi $\lambda_{j^*} \neq 0$ quindi $\mu \lambda_{j^*} = 0$ implica $\mu = 0$ da cui $\mu_i = 0 \ \forall\ i \neq j^*$.

Quindi il sistema (1) non ha soluzioni diverse dalla nulla contrariamente all'ipotesi per assurdo $\square$

OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE MATRICI

1. Moltiplicazione di una riga per uno scalare

2. Sostituzione della riga i con la "riga i più k-volte la riga j".

OPERAZIONE PIVOT

Un'operazione pivot su una matrice A $(m \times n)$ consiste in una serie di operazioni elementari sulle righe della matrice per trasformare la **colonna pivot** in una colonna contenente $+1$ in corrispondenza alla **riga pivot** e 0 per le altre righe.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{RIGA PIVOT} \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix}
a_{11}, & a_{12} \cdots & a_{1s} & \cdots a_{1n} \\
a_{21}, & a_{22} \cdots & a_{2s} & \cdots a_{2n} \\
a_{r1}, & a_{r2} \cdots & a_{rs} & \cdots a_{rn} \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{ms} & a_{mn}
\end{bmatrix}$$

$\uparrow$

COLONNA PIVOT

MATRICE INVERSA

Data una matrice quadrata A $(n \times n)$, si chiama *inversa di A* la matrice quadrata B $(n \times n)$ tale che:

$$BA = AB = I$$

La matrice inversa di A si indica con A^{-1}

- Se la matrice A $(n \times n)$ ammette inversa essa è unica.

Una matrice A $(n \times n)$ ammette inversa se e solo se le righe (le colonne) di A sono linearmente indipendenti.

CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA

Se esiste la matrice inversa di A allora è possibile trasformare, con un numero finito di operazioni elementari, la matrice (A, I) in (I, A^{-1})

$$A^{-1}(A, I) = (A^{-1}A, A^{-1}I) = (I, A^{-1})$$

RANGO DI UNA MATRICE

IL RANGO DI UNA MATRICE A $(m \times n)$ È IL NUMERO MASSIMO DI VETTORI RIGA (COLONNA) LINEARMENTE INDIPENDENTI

- Il Rango$(A) \leq$ minimo(m, n)
- Se Rango$(A) =$ minimo(m, n) allora A e' detta a Rango pieno.
- Se Rango$(A) = K$, con $K <$ minimo(m, n) allora la matrice puo' essere ricondotta alla forma

$$\left[\begin{array}{c|c} I_K & Q \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

attraverso un numero finito di "operazioni elementari".

□ Condizione Necessaria e Sufficiente affinchè una matrice A $(m \times n)$ sia di Rango K e' che A possa essere trasformata nella forma suddetta.

EQUAZIONI LINEARI

Consideriamo il sistema di eq. lineari

$$A x = b$$

dove A è $(m \times n)$, x è n-componenti e b a m-comp.

- Il sistema $Ax=b$ ha soluzione <u>se e solo se</u> $A'x=b'$ ha soluzione; dove (A',b') è ricevuto da (A,b) con un numero finito di <u>operazioni elementari</u>.

Caso matrici quadrate A $(n \times n)$

(a) Riduzione Gaussiana : A' : triangolare superiore

(b) Riduzione Gauss-Jordan : A' : matrice identità

Esempio

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; \quad \underset{(a)}{(A',b') = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 5 \\ 0 & 1 & 3/5 & \frac{26}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} ; \quad \underset{(b)}{(A',b') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Sia dato il sistema di m-equazioni in n-variabili

$$Ax = b$$

- Se $\text{Rango}(A, b) > \text{Rango}(A)$ il sistema non ha soluzioni. b non è esprimibile come combinazione lineare delle colonne di A.

- Se $\text{Rango}(A, b) = \text{Rango}(A) = k$ rappresentiamo (A, b) nella forma

$$(A, b) = \begin{pmatrix} A_1, & b_1 \\ A_2, & b_2 \end{pmatrix}$$

dove A_1 è $(k \times n)$ e A_2 è $(m-k \times n)$

e supponiamo $\text{Rango}(A_1) = k$

- LE EQUAZIONI $A_2 x = b_2$ possono essere ignorate in quanto ognuna di esse è esprimibile come combinazione lineare di $A_1 x = b_1$

SOLUZIONI BASE

In forma matriciale

$$\text{Min } z = cx$$

$$Ax = b \qquad \text{A di ordine } m \times n$$
$$x \geq 0$$

- Supponiamo Rango (A, b) = Rango $(A) = m \quad (m < n)$

le sistema $Ax = b$ ha un numero infinito di soluzioni

Sia B $(m \times m)$ una base : m colonne di A linearmente indipendenti

Siano x_B le variabili corrispondenti a B

N le $(n-m)$ colonne di A non in B

x_N le variabili corrispondenti a N

$Ax = b$ diviene $\quad Bx_B + Nx_N = b$

ovvero $\quad Ix_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

SOLUZIONE BASE : $\quad x_B = B^{-1}b \;,\; x_N = 0$

SOLUZIONE BASE AMMISSIBILE : ogni SOLUZIONE BASE CHE SODDISFA I VINCOLI DI NON-NEGATIVITA' $x_B \geq 0$

SOL. BASE DEGENERE : $\quad x_{B_i} = 0$ per qualche i

Esempio

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad &= 6 \\
x_2 \quad\quad + x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Matrice $A = [a_1, a_2, a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Poniamo $B = [a_1, a_4]$; $N = [a_2, a_3]$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Il sistema $Ax = b$ diviene

$$B x_B + N x_N = b$$

nel nostro caso

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ponendo $x_N = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = 0$

avremo $\quad x_1 = 6 \,,\; x_4 = 3$: Soluzione base