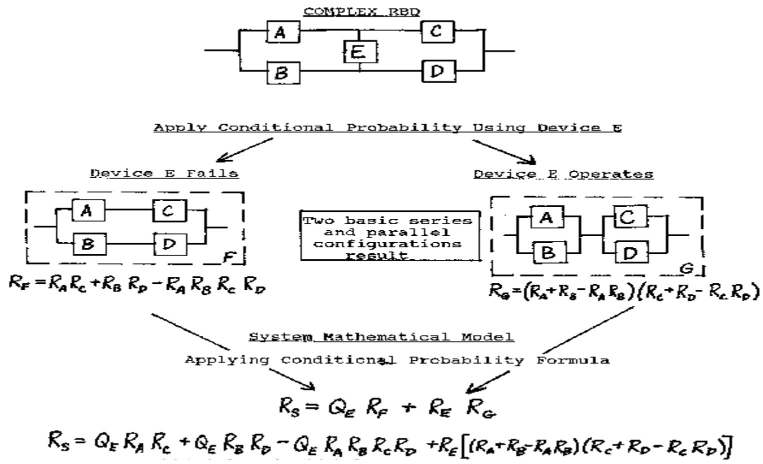
Affidabilità di un sistema



Dario Maio

http://bias.csr.unibo.it/maio/

Definizioni di base

- Si definisce **affidabilità** di un qualsiasi dispositivo (sistema o componente) la probabilità che esso funzioni correttamente, per un dato tempo, in certe condizioni.
- Il calcolo dell'affidabilità di un sistema comporta in generale l'applicazione di regole di decomposizione gerarchica di un sistema in sotto-sistemi.
- L'affidabilità è una probabilità, dunque un numero reale adimensionale compreso fra 0 e 1.
- Un'altra definizione di affidabilità: la probabilità che il dispositivo non abbia guasti di un certo tipo nello svolgimento di una certa missione.

Tipi di affidabilità

- **Affidabilità logistica** - Probabilità che non si verifichi nessun guasto (di qualsiasi tipo).

- **Affidabilità di missione** - Probabilità che non si verifichino guasti con conseguenze "gravi", tali cioè da pregiudicare la funzionalità del sistema.

  Se necessario, si distingue tra guasti significativi (che degradano significativamente le funzionalità del sistema, ma non impediscono il completamento della missione) e guasti maggiori (che invece impediscono il completamento della missione).

- **Sicurezza** - Probabilità che non si verifichino guasti con possibili conseguenze catastrofiche, tali cioè da produrre danni a persone, cose o al sistema stesso.

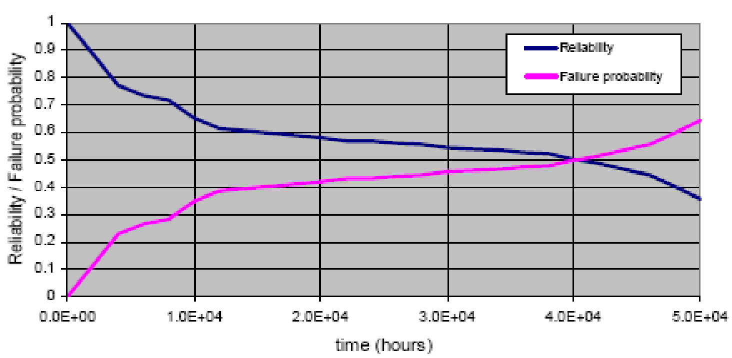
Definizione pratica di affidabilità

- **Affidabilità**

$$R(t) = \frac{n_{prod}(t)}{n_{prod}(t_o)}$$

- **Probabilità di guasto**

$$Q(t) = 1 - R(t) = 1 - \frac{n_{prod}(t)}{n_{prod}(t_o)}$$



Esempio di calcolo affidabilità (1)

- Si effettua un test di 10 dispositivi dello stesso tipo misurando, per ciascuno di essi, il tempo in cui si verifica un guasto.

N° dispositivo	Ore funzionamento
1	490
2	760
3	2350
4	1400
5	1560
6	970
7	2300
8	1190
9	1130
10	300
	12450

- In modo approssimato se 1000 ore è il tempo di vita desiderato a progetto:

$$R(1000) = \frac{6}{10} = 0.60$$

$$MTTF = \frac{12450}{10} = 1245 \text{ ore}$$

Esempio di calcolo disponibilità

- Assumendo dispositivi riparabili

N° dispositivo	Minuti per riparazione
1	140
2	130
3	80
4	90
5	110
6	150
7	70
8	90
9	110
10	120
	1090

$$MTTF = 1245 \text{ ore}$$

$$MTTR = \frac{1090}{10} = 109 \text{ minuti} \cong 1.816 \text{ ore}$$

$$A = \frac{MTFF}{MTTF + MTTR} \cong 99.85\%$$

- **Availability**: la frazione di tempo in cui il dispositivo funziona correttamente

Funzione di guasto

- funzione di guasto (**unreliability**) $Q(t)$: la probabilità che un sistema si guasti per la prima volta nell'intervallo $(0,t)$; se T rappresenta la variabile aleatoria durata di vita del sistema, si ha:

$$Q(t) = P\{T \leq t\}$$

- $Q(t)$ è una funzione di distribuzione cumulativa, che soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{array}{ll} Q(t) = 0 & \text{per } t = 0 \\ 0 \leq Q(t) \leq Q(t + \Delta t) & \text{per } \Delta t \geq 0 \\ Q(t) = 1 & \text{per } t = \infty \end{array}$$

- $Q(t)$ è una funzione continua e la sua derivata $q(t)$ rappresenta la **densità di probabilità di guasto del sistema**.

$$q(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

Affidabilità

- affidabilità (**reliability**) $R(t)=1-Q(t)$: la probabilità che un sistema funzioni correttamente nell'intervallo $(0,t)$, ovvero che la sua durata di vita T sia maggiore di t.

$$R(t) = P\{T > t\}$$

$$\begin{array}{ll} R(t) = 1 & \text{per } t = 0 \\ 1 \geq R(t) \geq R(t + \Delta t) & \text{per } \Delta t \geq 0 \\ R(t) = 0 & \text{per } t = \infty \end{array}$$

- la derivata $r(t)$ rappresenta la **densità di probabilità di affidabilità**.

$$r(t) = \frac{dR(t)}{dt} = \frac{d(1 - Q(t))}{dt} = -\frac{dQ(t)}{dt} = -q(t)$$

Funzione di guasto condizionata

- Definiamo la funzione di guasto condizionata al fatto che il sistema sia ancora funzionante all'istante t:

$$Q(x|T>t) = P\{x|T>t\} = \frac{P\{T \le x, T>t\}}{P\{T>t\}} \quad \text{per } x>t$$
$$=0 \quad \text{per } x \le t$$

- Dalle precedenti definizioni si ottiene:

$$Q(x|T>t) = \frac{Q(x)-Q(t)}{1-Q(t)} \quad \text{per } x>t$$
$$=0 \quad \text{per } x \le t$$

Densità di guasto condizionata

- Definiamo la densità di guasto condizionata al fatto che il sistema sia ancora funzionante all'istante t:

$$q(x|T>t) = \frac{d}{dx} Q(x|T>t) = \frac{d}{dx}\left(\frac{Q(x)-Q(t)}{1-Q(t)}\right) \quad \text{per } x>t$$
$$=0 \quad \text{per } x \le t$$

- quindi:

$$q(x|T>t) = \frac{q(x)}{1-Q(t)} \quad \text{per } x>t$$
$$=0 \quad \text{per } x \le t$$

$q(x|T>t) \bullet dx$

- rappresenta la probabilità che il sistema si guasti nell'intervallo [x,x+dx] supposto che non si sia guastato prima di t.

Tasso di guasto

- Definiamo $\lambda(t)$ la frequenza istantanea di guasto, si ha:

$$\lambda(t)\cdot dt = q(t|T>t)\cdot dt$$

- quindi:

$$\lambda(t) = \frac{q(t)}{1-Q(t)} = \frac{Q'(t)}{1-Q(t)}$$

- integrando:

$$\int_0^t \lambda(t)dt = -\ln[1-Q(t)]$$

Affidabilità e frequenza di guasto

- Poiché $\int_0^t \lambda(t)dt = -\ln[1-Q(t)]$ si ottiene:

$$R(t) = 1-Q(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

$$Q(t) = 1-e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

$$q(t) = \lambda(t)\cdot e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

condizioni :

$\lambda(t) \geq 0$ ovvia

$\int_0^\infty \lambda(t)dt = \infty$

ovvero $Q(\infty) = 1$

prima o poi si guasta!

Caso particolare λ costante

- si ottiene:

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$q(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Se la frequenza di guasto è costante allora la densità di guasto segue una distribuzione esponenziale

e viceversa

e dunque:

$$q(x|T > t) = \frac{q(x)}{1 - Q(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda t}} =$$

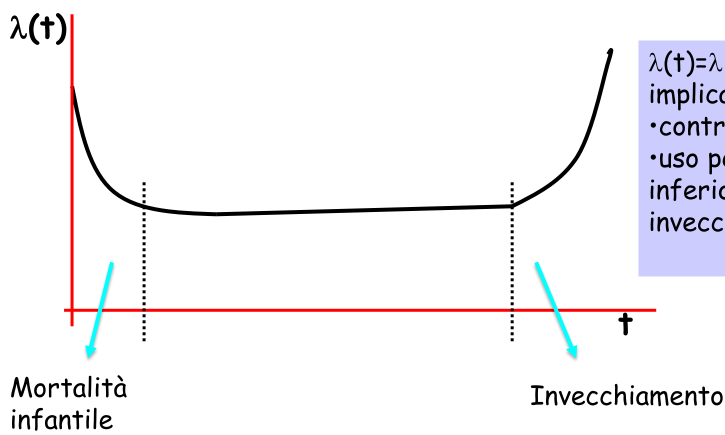
$$= \lambda e^{-\lambda (x - t)} = q(x - t)$$

$$x \geq t \geq 0$$

Proprietà dell'assenza di memoria della distribuzione esponenziale

Frequenza istantanea di guasto (1)

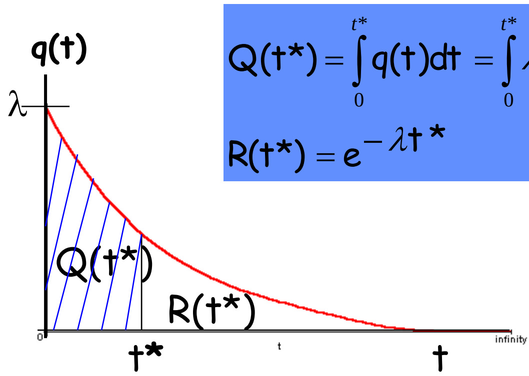
- **Andamento caratteristico di λ(t)**



λ(t)=λ
implica assumere
•controllo preventivo
•uso per un tempo inferiore al tempo di invecchiamento

Frequenza istantanea di guasto (2)

- Andamento caratteristico di $q(t) = \lambda e^{-\lambda t}$



$$Q(t^*) = \int_0^{t^*} q(t)dt = \int_0^{t^*} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda t^*}$$

$$R(t^*) = e^{-\lambda t^*}$$

Mean Time To Failure

- Il tempo medio per un guasto MTTF coincide, nel caso di frequenza di guasto costante, con il tempo medio fra due guasti:

$$MTTF = \int_0^{\infty} t \cdot q(t)dt = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt =$$

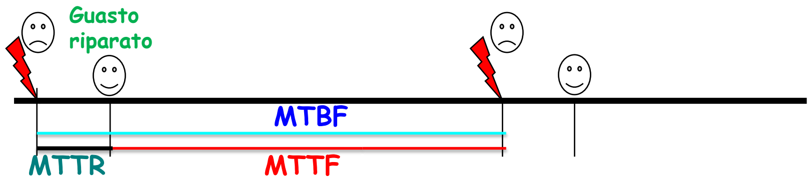
$$= -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda}$$

Disponibilità (Availability)

- Nel caso di sistemi riparabili è necessario considerare anche l'evento riparazione o sostituzione. Si definisce disponibilità la quantità :

$$A = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR}$$

- MTTF (Mean Time To Failure)
- MTTR (Mean Time To Repair)
- MTBF (Mean Time Between Failure)



- Per migliorare la disponibilità di un sistema si deve agire sia sull'affidabilità sia sui tempi di riparazione.

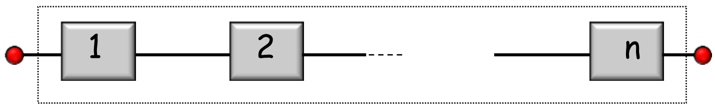
Richiami di probabilità

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ se } A \text{ e } B \text{ sono eventi indipendenti}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ probabilità condizionata}$$

Sistema serie



Il guasto di un'unità pregiudica il funzionamento dell'intero sistema.

Assumendo guasti indipendenti:

$$R(t) = \prod_{1}^{n} R_i(t) \qquad A = \prod_{1}^{n} A_i$$

Assumendo distribuzioni esponenziali identiche:

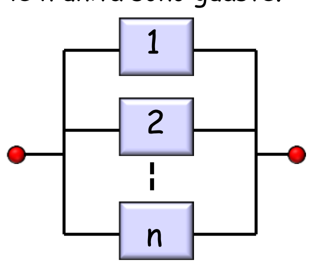
$$R(t) = \prod_{1}^{n} e^{-\lambda t} = e^{-n\lambda t} \qquad q(t) = n\lambda \cdot e^{-n\lambda t}$$

$$MTTF_{SS} = \frac{1}{n\lambda}$$

$$Q(t) = 1 - e^{-n\lambda t}$$

Sistema parallelo

Il sistema è guasto se tutte le n unità sono guaste.



Ipotesi : guasti indipendenti

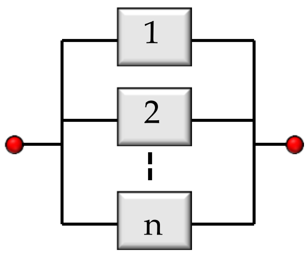
$$R(t) = 1 - \prod_{1}^{n} \left(1 - R_i(t)\right)$$

$$A = 1 - \prod_{1}^{n} \left(1 - A_i\right)$$

Assumendo distribuzioni esponenziali identiche:

$$R(t) = 1 - \prod_{1}^{n} \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n$$

Sistema parallelo (almeno k su n)

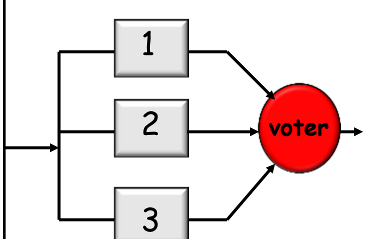


- Il sistema funziona se almeno k unità non sono guaste
  - **k=1** » sistema parallelo
  - **k=n** » sistema serie
- Assumendo distribuzioni esponenziali identiche:

$$R(t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \left[e^{-\lambda t}\right]^{i} \left[1 - e^{-\lambda t}\right]^{(n-i)}$$

$$A = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} [A_i]^{i} (1 - A_i)^{(n-i)}$$

Interconnessione TMR

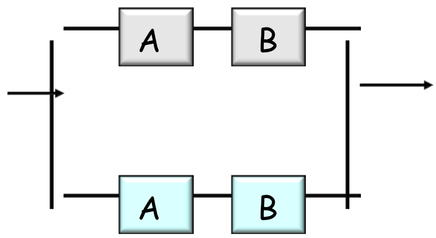


- Il sistema ha una ridondanza modulare tripla; le uscite delle tre unità sono confrontate dal voter che fornisce in uscita il valore della maggioranza degli ingressi.
- Il sistema è guasto o se sono guaste due unità o se è guasto il voter.
- Assumendo guasti indipendenti, e unità identiche:

$$R(t) = \left[R_u^3(t) + 3R_u^2(t) \cdot (1 - R_u(t))\right] \cdot R_{voter}(t)$$

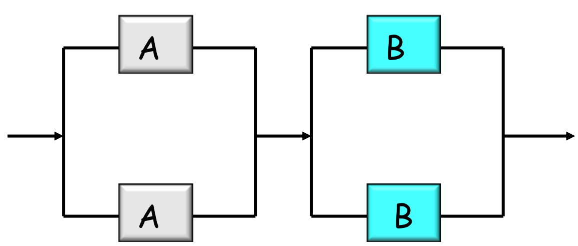
$$A = \left[A_u^3 + 3A_u^2 \cdot (1 - A_u)\right] \cdot A_{voter}$$

Connessione Parallelo-Serie



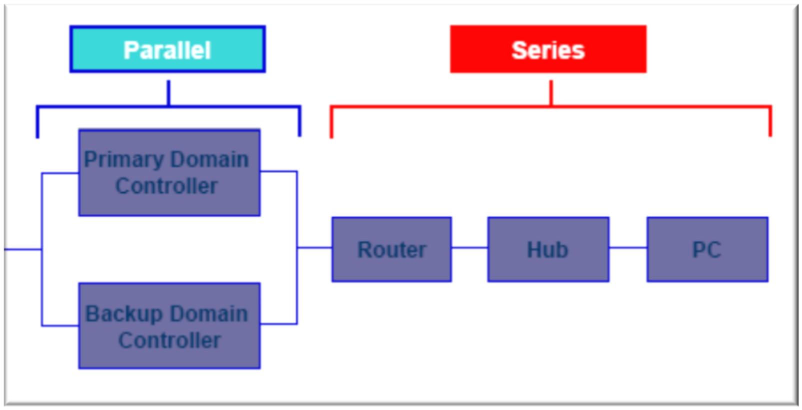
$$R(t) = \left(R_A(t) \cap R_B(t)\right) \cup \left(R_A(t) \cap R_B(t)\right) =$$
$$= 2 \cdot R_A(t) \cdot R_B(t) - R_A^2 \cdot R_B^2$$

Connessione Serie-Parallelo



$$R(t) = \left(R_A(t) \cup R_A(t)\right) \cap \left(R_B(t) \cup R_B(t)\right) =$$
$$= \left(2 \cdot R_A(t) - R_A^2\right) \cdot \left(2 \cdot R_B(t) - R_B^2\right)$$

Esempio



Riferimenti

- http://en.wikipedia.org/wiki/Reliability_engineering
- http://www.weibull.com/