RELAZIONE PRIMA ESERCITAZIONE

1) ALGORITMO PER VALUTARE LA PRECISIONE DI MACCHINA

CODICE MATLAB:

```
k = 0;
eps = 1/2;
while(1 + eps) > 1
    eps = eps / 2;
    k = k + 1;
end
eps = 2*eps
```

RISULTATO:

```
eps = 2.220446049250313e-016
```

ANALISI:

La precisione di macchina è il più piccolo numero rappresentabile dal calcolatore che sommato ad 1 rende il valore > 1.
Nell'algoritmo, quando eps diventa troppo piccolo e non è più rappresentabile dal calcolatore, il suo valore è zero, di conseguenza 1 + eps non è maggiore di 1.

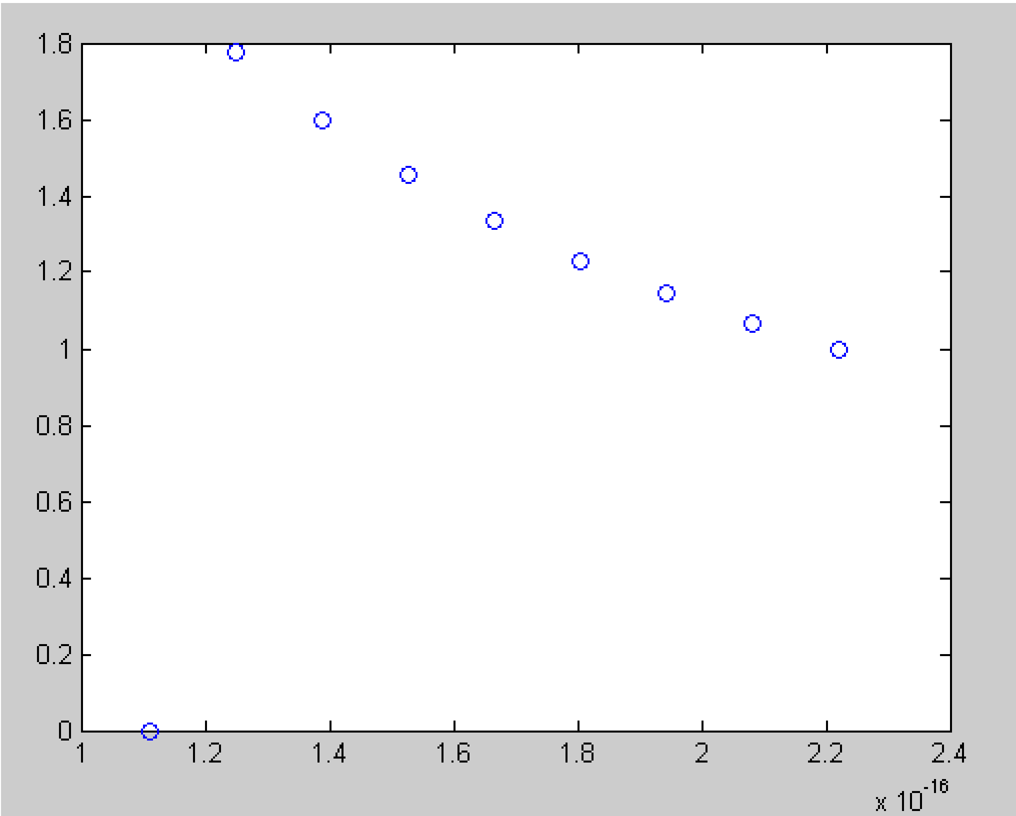
2) VALUTARE LA SEGUENTE ESPRESSIONE PER X CHE VARIA NELL'INTERVALLO [EPS – EPS/2] CON PASSO -EPS/16

$$f(x) = \frac{((1+x)-1)}{x}$$

CODICE MATLAB:

```
x = eps:-eps/16:eps/2;
f = ((1 + x) - 1)./x;
figure
plot(x,f,'o');
```

RISULTATO:



ANALISI:

Il valore della funzione teoricamente è 1 per ogni x diverso da zero. In matlab si vede che ciò non avviene perchè si lavora con un numero x minore della precisione di macchina (eps/16).

3) DATI I NUMERI

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 - \eta \end{cases} \Rightarrow (x - y) = \eta$$

L'ERRORE RELATIVO DELLA LORO DIFFERENZA

$$\varepsilon_{x-y} = \frac{fl(x-y) - (x-y)}{(x-y)}$$

Dove fl(x-y) è la differenza calcolata in aritmetica floating point e (x-y) è la differenza calcolata in aritmetica reale.

Calcolate ε_{x-y} al variare di η. Sia η il vettore [1e-1,1e-3,1e-6,1e-9,1e-12,1e-15,1e-16,eps,1e-18]. Cosa si può concludere?

CODICE MATLAB:

```
format long
ni = [1e-1, 1e-3, 1e-6, 1e-9, 1e-12, 1e-15, 1e-16, 1e-18];
x = 5;
y = 5 - ni;
err = ((x - y) - ni) ./ (ni)
```

RISULTATI:

```
err =

  Columns 1 through 3

  -0.000000000000004   0.000000000000334   0.000000000139778

  Columns 4 through 6

   0.000000082740371   0.000088900582341  -0.111821580299875

  Columns 7 through 8

  -1.000000000000000  -1.000000000000000
```

ANALISI:

L'errore indica quanto si discosta MATLAB dal calcolo teorico.
La formula del calcolo dell'errore può essere schematizzata in questo modo:

$$\text{errore} = \frac{(x - y) - ni}{ni}$$

dove x – y è il valore calcolato da MATLAB, mentre ni è il valore del vettore (in aritmetica reale infatti x – y è uguale al valore dell'elemento del vettore).

Dai risultati si vede che se l'elemento del vettore è più piccolo della precisione di macchina, l'errore aumenta. In particolare, l'errore è 1 (100%) con gli ultimi 2 elementi del vettore, che sono minori della precisione di macchina, quindi 5 – ni = 5

4) LA SUCCESSIONE

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots,$$

PUO' ESSERE GENERATA CON LE SEGUENTI RELAZIONI RICORRENTI:

$$\begin{cases} p_n = \frac{10}{3} p_{n-1} - p_{n-2} \\ p_1 = 1 \\ p_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_n = \frac{1}{3} p_{n-1} \\ p_1 = 1 \end{cases}$$

IMPLEMENTARE LE DUE RELAZIONI PER GENERARE I PRIMI 100 TERMINI DELLA SUCCESSIONE.

CALCOLARE L'ERRORE RELATIVO PER OGNUNO DEI TERMINI DELLA SUCCESSIONE CALCOLATI CON LE DUE FORMULE E GIUSTIFICARE I RISULTATI.

CODICE MATLAB:

```
%creo vettori
s = zeros(1,100);
p = zeros(1,100);
q = zeros(1,100);
%primi elementi della successione
s(1,1) = 1;
s(1,2) = 1/3;
p(1,1) = 1;
p(1,2) = 1/3;
q(1,1) = 1;

%calcolo la successione 1, 1/3, 1/9, ...
for in=3:1:100
    s(1,in) = (1/3)^(in - 1);
end
%calcolo la successione di sopra generata con la prima relazione
for in=3:1:100
    p(1,in) = 10/3*p(1, in-1) - p(1,in-2);
end
%calcolo la successione di sopra con la seconda relazione
for in=2:1:100
    q(1,in) = 1/3*q(1, in-1);
end
%calcolo errore per ogni valore di entrambe le relazioni
err1 = (p - s)./s;

err2 = (q - s)./s;
```

RISULTATI:

La successione è stata generata meglio con la seconda relazione, per dire questo basta guardare il valore che assume l'errore nei termini finali della successione.

L'andamento dell'errore nella prima relazione è:

```
  Columns 97 through 99

   0.003485768752203   0.031371918769825   0.282347268928429

  Column 100

   2.541125420355861
```

Mentre per la seconda relazione:

```
  Columns 97 through 99

   0.371203956641380   0.185601978320690   0.278402967481035

  Column 100

   0.208802225610776
```

L'errore è stato calcolatoin questo modo:

errore = (p – s) / s

dove s è la successione originale e p è la successione usata per generare s.

ANALISI:

La prima relazione non genera bene i termini della successione a lungo termine perchè MATLAB approssima i calcoli quando fa
10/3 * p(n-1) e la differenza.

La seconda relazione genera meglio i termini a lungo termine della successione perchè ci sono meno calcoli da fare riespetto alla prima relazione (1/3 * p(n-1)).

5) SIA DATA LA SEQUENZA:

$$\begin{cases} x_n = 2^{n-1}\left[\sqrt{1+\dfrac{x_{n-1}}{2^{n-2}}}-1\right] \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

per la quale risulta che $\lim_{n\to\infty} x_n = \log(2)$

a) Si calcolino $x_1, x_2, ..., x_{71}$. Costruire un grafico in cui nelle ascisse vi sia il valore di n e nelle ordinate il corrispondente valore di x_n. La successione converge a log(2)? In corrispondenza di quale n si verifica un pessimo risultato? Cerca di spiegare il perché.

b) Una sequenza equivalente alla precedente :

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{2x_{n-1}}{\sqrt{1+\dfrac{x_{n-1}}{2^{n-2}}}+1} \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

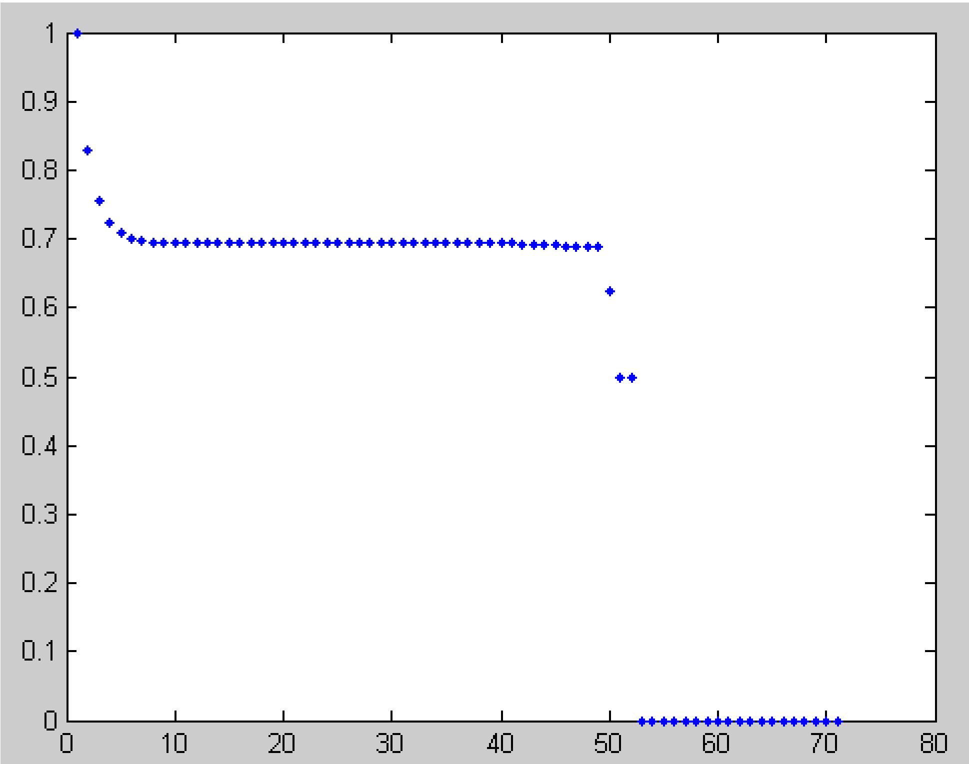
si calcolino $x_1, x_2, ..., x_{71}$ con questa formula equivalente. Costruire un grafico in cui nelle ascisse i valore di n e nelle ordinate il corrispondente valore di x_n. Cosa accade questa volta? Come s potrebbe giustificare il risultato alla luce della teoria.

CODICE MATLAB:

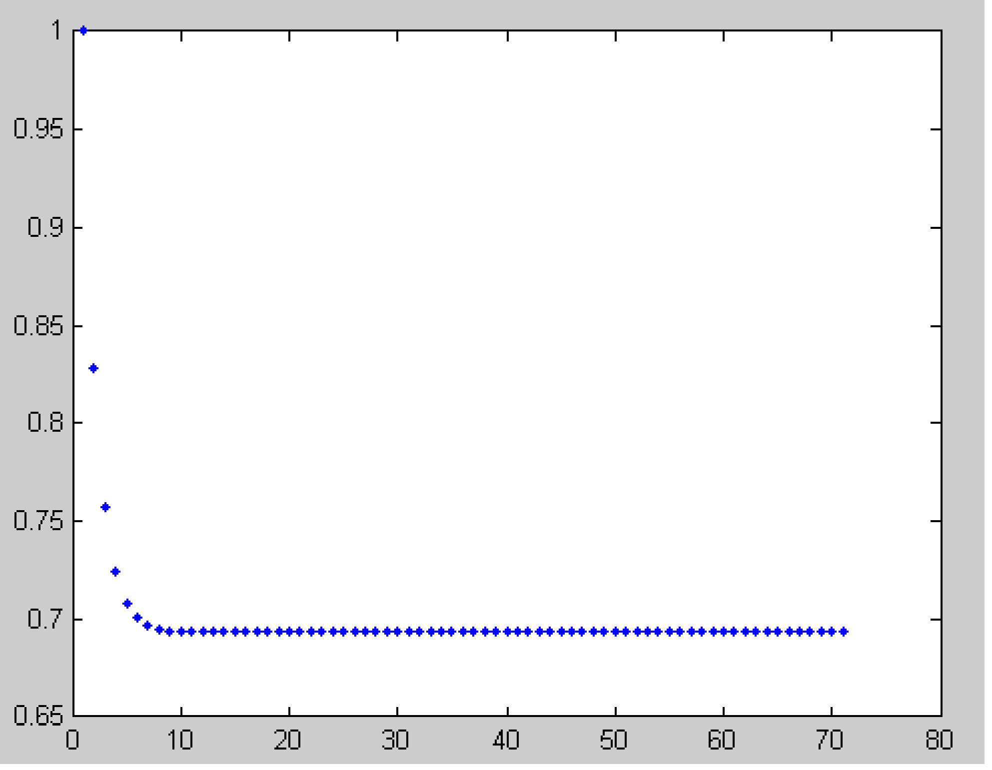
```
%calcolo prima sequenza:
f = zeros(1,71);
f(1,1) = 1;
for in=2:1:71
    %valore della y
    f(1,in) = 2^(in - 1)*(sqrt(1 + f(1,in - 1) / 2^(in - 2)) - 1);
end
in = 1:1:71; %valore della x
figure
plot(in,f,'.');
%calcolo seconda sequenza:
g = zeros(1,71);
g(1,1) = 1;
for in=2:1:71
    %valore della y
    g(1,in) = (2*g(1,in - 1)) / (sqrt(1 + g(1,in - 1) / 2^(in -
2)) + 1);
end
in = 1:1:71; %valore della x
figure
plot(in,g,'.');
```

RISULTATI:

Il grafico della prima sequenza è il seguente:



Mentre il grafico della seconda sequenza è il seguente:



ANALISI:

Come si vede dai 2 grafici, la prima sequenza "crolla" ad un certo termine della successione, per far diventare i termini successivi tutti zero.

La seconda sequenza invece segue l'andamento della funzione log(2).

Nella prima sequenza ci sono errori di calcolo numerico, infatti quando si fa la radice di 1 + (un numero piccolo) il risultato è 1, se poi viene sottratto 1 il risultato è zero.

Nella seconda sequenza invece di -1 c'è +1, quindi quando ad 1 si somma il numero piccolo la radice da come risultato 1, al quale poi si somma 1 e il denominatore diventa 2; nel numeratore invece c'è il doppio del termine precedente della successione (x n-1). Quindi ad un certo punto della successione i termini rimangono gli stessi (vedi grafico).

6) IMPLEMENTARE IN MATLAB IL SEGUENTE METODO PER CALCOLARE UNA BUONA APPROSSIMAZIONE DEL VALORE DI PIGRECO

Dalla trigonometria è noto che

arctg(1)= $\frac{\pi}{4}$

da cui segue che

$\pi = 4 * arctg(1)$.

CONSIDERIAMO LO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR DELL'ARCOTANGENTE:

$$arctg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

UN'APPROSSIMAZIONE DI PIGRECO SI PUO' OTTENERE TRONCANDO AD N LA SOMMATORIA PRECEDENTE E PONENDO X = 1

$$\pi = 4 \cdot \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$$

Quanti termini della sommatoria bisogna considerare per ottenere un errore relativo (rispetto al valore di pi dato da matlab) dell'ordine di 10^-6?

Come si potrebbe implementare la precedente formula per rendere minimo l'errore relativo?

CODICE MATLAB:

```
format long
f(1,1) = 1; %primo termine della successione
x = 1;
errore = 1e-6;
somma = f(1,1) * 4;
dif = somma - pi;
cont = 2;
while(abs(dif) > errore)
    f(1,cont) = (-1)^(cont - 1) * (x^(2*(cont - 1) + 1) / (2*(cont
- 1) + 1));
    somma = somma + 4*f(1,cont);
    dif = somma - pi;
    cont = cont + 1;
    %somma %stampo il risultato della successione, sta in un ciclo
infinito
    %perchè non arriva mai alla precisione di 10^-6
end
cont %stampo il numero di cicli che ha fatto l'algoritmo
somma %stampo il valore di pigreco calcolato con la successione
```

RISULTATI:

I risultati variano in base al valore dell'errore:

1) errore = 1e-1

cont =   11

somma =   3.041839618929403

2) errore = 1e-4

cont =   10001

somma =   3.141492653590035

3) errore = 1e-5 e errore = 1e-6

ciclo infinito

ANALISI:

Con un errore minore o uguale di 1e-5 il calcolatore non riesce ad uscire dal ciclo perchè la condizione

abs(dif) > errore

non diventa mai falsa. Ciò si verifica per come è impostata la successione che genera il valore di pigreco, in particolare dal fatto che i termini positivi si alternano ai termini negativi e che il valore assoluto dei termini è in ordine decrescente.
L'errore di conseguenza aumenta molto, perchè la differenza fra numeri di grandezza simile in modulo e la somma di numeri di modulo sempre minore, portano alla cancellazione di cifre significative.
Di conseguenza, essendo grande l'errore relativo, non si riesce mai ad arrivare alla precisione di 1e-6.

L'algoritmo può essere riscritto per minimizzare l'errore in questo modo:

1)La sommatoria si fa partendo con un k grande fino ad arrivare a k = 0, in questo modo si sommano i numeri di modulo crescente;

2) Prima si sommano tutti i termini positivi, poi tutti i termini negativi e si fa un'unica differenza finale.