Cálculo de Programas
Trabalho Prático
MiEI+LCC — 2020/21

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2021

Grupo nr.	5
a89615	Sofia Santos
a93196	Rita Lino
a93216	Guilherme Fernandes

1 Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em Haskell (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [**?**], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2021t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp2021t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2021t.zip` e executando:

```
$ lhs2TeX cp2021t.lhs > cp2021t.tex
$ pdflatex cp2021t
```

em que `lhs2tex` é um pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex --lib
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2021t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2021t.lhs
```

[1] O suffixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp2021t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo GHCi para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 (ou 4) alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo D com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTEX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp2021t.aux
$ makeindex cp2021t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário QuickCheck, que ajuda a validar programas em Haskell e a biblioteca Gloss para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss --lib
```

Para testar uma propriedade QuickCheck *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Pode-se ainda controlar o número de casos de teste e sua complexidade, como o seguinte exemplo mostra:

```
> quickCheckWith stdArgs { maxSuccess = 200, maxSize = 10 } prop
+++ OK, passed 200 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo C disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

3.1 Stack

O Stack é um programa útil para criar, gerir e manter projetos em Haskell. Um projeto criado com o Stack possui uma estrutura de pastas muito específica:

- Os módulos auxiliares encontram-se na pasta *src*.
- O módulos principal encontra-se na pasta *app*.
- A lista de depêndencias externas encontra-se no ficheiro *package.yaml*.

Pode aceder ao GHCi utilizando o comando:

```
stack ghci
```

Garanta que se encontra na pasta mais externa **do projeto**. A primeira vez que correr este comando as depêndencias externas serão instaladas automaticamente.

Para gerar o PDF, garanta que se encontra na diretoria *app*.

Problema 1

Os *tipos de dados algébricos* estudados ao longo desta disciplina oferecem uma grande capacidade expressiva ao programador. Graças à sua flexibilidade, torna-se trivial implementar DSLs e até mesmo linguagens de programação.

Paralelamente, um tópico bastante estudado no âmbito de Deep Learning é a derivação automática de expressões matemáticas, por exemplo, de derivadas. Duas técnicas que podem ser utilizadas para o cálculo de derivadas são:

- *Symbolic differentiation*
- *Automatic differentiation*

Symbolic differentiation consiste na aplicação sucessiva de transformações (leia-se: funções) que sejam congruentes com as regras de derivação. O resultado final será a expressão da derivada.

O leitor atento poderá notar um problema desta técnica: a expressão inicial pode crescer de forma descontrolada, levando a um cálculo pouco eficiente. *Automatic differentiation* tenta resolver este problema, calculando **o valor** da derivada da expressão em todos os passos. Para tal, é necessário calcular o valor da expressão **e** o valor da sua derivada.

Vamos de seguida definir uma linguagem de expressões matemáticas simples e implementar as duas técnicas de derivação automática. Para isso, seja dado o seguinte tipo de dados,

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{data}\ \mathit{ExpAr}\ a = X \\
\quad \mid N\ a \\
\quad \mid \mathit{Bin}\ \mathit{BinOp}\ (\mathit{ExpAr}\ a)\ (\mathit{ExpAr}\ a) \\
\quad \mid \mathit{Un}\ \mathit{UnOp}\ (\mathit{ExpAr}\ a) \\
\quad \mathbf{deriving}\ (\mathit{Eq}, \mathit{Show})
\end{array}
$$

onde BinOp e UnOp representam operações binárias e unárias, respectivamente:

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{data}\ \mathit{BinOp} = \mathit{Sum} \\
\quad \mid \mathit{Product} \\
\quad \mathbf{deriving}\ (\mathit{Eq}, \mathit{Show}) \\
\mathbf{data}\ \mathit{UnOp} = \mathit{Negate} \\
\quad \mid E \\
\quad \mathbf{deriving}\ (\mathit{Eq}, \mathit{Show})
\end{array}
$$

O construtor E simboliza o exponencial de base e.

Assim, cada expressão pode ser uma variável, um número, uma operação binária aplicada às devidas expressões, ou uma operação unária aplicada a uma expressão. Por exemplo,

$$\mathit{Bin}\ \mathit{Sum}\ X\ (N\ 10)$$

designa $x + 10$ na notação matemática habitual.

1. A definição das funções $\mathit{inExpAr}$ e $\mathit{baseExpAr}$ para este tipo é a seguinte:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{inExpAr} = [\underline{X}, \mathit{num\_ops}]\ \mathbf{where} \\
\quad \mathit{num\_ops} = [N, \mathit{ops}] \\
\quad \mathit{ops} = [\mathit{bin}, \widehat{\mathit{Un}}] \\
\quad \mathit{bin}\ (\mathit{op}, (a, b)) = \mathit{Bin}\ \mathit{op}\ a\ b \\
\mathit{baseExpAr}\ f\ g\ h\ j\ k\ l\ z = f + (g + (h \times (j \times k) + l \times z))
\end{array}
$$

   Defina as funções $\mathit{outExpAr}$ e $\mathit{recExpAr}$, e teste as propriedades que se seguem.

   Propriedade [QuickCheck] 1 *$\mathit{inExpAr}$ e $\mathit{outExpAr}$ são testemunhas de um isomorfismo, isto é, $\mathit{inExpAr} \cdot \mathit{outExpAr} = \mathit{id}$ e $\mathit{outExpAr} \cdot \mathit{idExpAr} = \mathit{id}$:*

$$
\begin{array}{l}
\mathit{prop\_in\_out\_idExpAr} :: (\mathit{Eq}\ a) \Rightarrow \mathit{ExpAr}\ a \rightarrow \mathit{Bool} \\
\mathit{prop\_in\_out\_idExpAr} = \mathit{inExpAr} \cdot \mathit{outExpAr} \equiv \mathit{id} \\
\mathit{prop\_out\_in\_idExpAr} :: (\mathit{Eq}\ a) \Rightarrow \mathit{OutExpAr}\ a \rightarrow \mathit{Bool} \\
\mathit{prop\_out\_in\_idExpAr} = \mathit{outExpAr} \cdot \mathit{inExpAr} \equiv \mathit{id}
\end{array}
$$

2. Dada uma expressão aritmética e um escalar para substituir o X, a função

$$eval\_exp :: Floating\ a \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr\ a) \rightarrow a$$

calcula o resultado da expressão. Na página 12 esta função está expressa como um catamorfismo. Defina o respectivo gene e, de seguida, teste as propriedades:

Propriedade [QuickCheck] 2 *A função $eval\_exp$ respeita os elementos neutros das operações.*

$$prop\_sum\_idr :: (Floating\ a, Real\ a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr\ a \rightarrow Bool$$
$$prop\_sum\_idr\ a\ exp = eval\_exp\ a\ exp \stackrel{?}{=} sum\_idr\ \mathbf{where}$$
$$\quad sum\_idr = eval\_exp\ a\ (Bin\ Sum\ exp\ (N\ 0))$$
$$prop\_sum\_idl :: (Floating\ a, Real\ a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr\ a \rightarrow Bool$$
$$prop\_sum\_idl\ a\ exp = eval\_exp\ a\ exp \stackrel{?}{=} sum\_idl\ \mathbf{where}$$
$$\quad sum\_idl = eval\_exp\ a\ (Bin\ Sum\ (N\ 0)\ exp)$$
$$prop\_product\_idr :: (Floating\ a, Real\ a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr\ a \rightarrow Bool$$
$$prop\_product\_idr\ a\ exp = eval\_exp\ a\ exp \stackrel{?}{=} prod\_idr\ \mathbf{where}$$
$$\quad prod\_idr = eval\_exp\ a\ (Bin\ Product\ exp\ (N\ 1))$$
$$prop\_product\_idl :: (Floating\ a, Real\ a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr\ a \rightarrow Bool$$
$$prop\_product\_idl\ a\ exp = eval\_exp\ a\ exp \stackrel{?}{=} prod\_idl\ \mathbf{where}$$
$$\quad prod\_idl = eval\_exp\ a\ (Bin\ Product\ (N\ 1)\ exp)$$
$$prop\_e\_id :: (Floating\ a, Real\ a) \Rightarrow a \rightarrow Bool$$
$$prop\_e\_id\ a = eval\_exp\ a\ (Un\ E\ (N\ 1)) \equiv expd\ 1$$
$$prop\_negate\_id :: (Floating\ a, Real\ a) \Rightarrow a \rightarrow Bool$$
$$prop\_negate\_id\ a = eval\_exp\ a\ (Un\ Negate\ (N\ 0)) \equiv 0$$

Propriedade [QuickCheck] 3 *Negar duas vezes uma expressão tem o mesmo valor que não fazer nada.*

$$prop\_double\_negate :: (Floating\ a, Real\ a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr\ a \rightarrow Bool$$
$$prop\_double\_negate\ a\ exp = eval\_exp\ a\ exp \stackrel{?}{=} eval\_exp\ a\ (Un\ Negate\ (Un\ Negate\ exp))$$

3. É possível otimizar o cálculo do valor de uma expressão aritmética tirando proveito dos elementos absorventes de cada operação. Implemente os genes da função

$$optmize\_eval :: (Floating\ a, Eq\ a) \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr\ a) \rightarrow a$$

que se encontra na página 12 expressa como um hilomorfismo[2] e teste as propriedades:

Propriedade [QuickCheck] 4 *A função $optimize\_eval$ respeita a semântica da função $eval$.*

$$prop\_optimize\_respects\_semantics :: (Floating\ a, Real\ a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr\ a \rightarrow Bool$$
$$prop\_optimize\_respects\_semantics\ a\ exp = eval\_exp\ a\ exp \stackrel{?}{=} optmize\_eval\ a\ exp$$

4. Para calcular a derivada de uma expressão, é necessário aplicar transformações à expressão original que respeitem as regras das derivadas:[3]

- Regra da soma:

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x))$$

[2]Qual é a vantagem de implementar a função $optimize\_eval$ utilizando um hilomorfismo em vez de utilizar um catamorfismo com um gene "inteligente"?

[3]Apesar da adição e multiplicação gozarem da propriedade comutativa, há que ter em atenção a ordem das operações por causa dos testes.

- Regra do produto:
$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)) + \frac{d}{dx}(f(x)) \cdot g(x)$$

Defina o gene do catamorfismo que ocorre na função

$$sd :: Floating\ a \Rightarrow ExpAr\ a \rightarrow ExpAr\ a$$

que, dada uma expressão aritmética, calcula a sua derivada. Testes a fazer, de seguida:

Propriedade [QuickCheck] 5 *A função sd respeita as regras de derivação.*

$$\begin{array}{l}
prop_const_rule :: (Real\ a, Floating\ a) \Rightarrow a \rightarrow Bool \\
prop_const_rule\ a = sd\ (N\ a) \equiv N\ 0 \\
prop_var_rule :: Bool \\
prop_var_rule = sd\ X \equiv N\ 1 \\
prop_sum_rule :: (Real\ a, Floating\ a) \Rightarrow ExpAr\ a \rightarrow ExpAr\ a \rightarrow Bool \\
prop_sum_rule\ exp1\ exp2 = sd\ (Bin\ Sum\ exp1\ exp2) \equiv sum_rule\ \mathbf{where} \\
\quad sum_rule = Bin\ Sum\ (sd\ exp1)\ (sd\ exp2) \\
prop_product_rule :: (Real\ a, Floating\ a) \Rightarrow ExpAr\ a \rightarrow ExpAr\ a \rightarrow Bool \\
prop_product_rule\ exp1\ exp2 = sd\ (Bin\ Product\ exp1\ exp2) \equiv prod_rule\ \mathbf{where} \\
\quad prod_rule = Bin\ Sum\ (Bin\ Product\ exp1\ (sd\ exp2))\ (Bin\ Product\ (sd\ exp1)\ exp2) \\
prop_e_rule :: (Real\ a, Floating\ a) \Rightarrow ExpAr\ a \rightarrow Bool \\
prop_e_rule\ exp = sd\ (Un\ E\ exp) \equiv Bin\ Product\ (Un\ E\ exp)\ (sd\ exp) \\
prop_negate_rule :: (Real\ a, Floating\ a) \Rightarrow ExpAr\ a \rightarrow Bool \\
prop_negate_rule\ exp = sd\ (Un\ Negate\ exp) \equiv Un\ Negate\ (sd\ exp)
\end{array}$$

5. Como foi visto, *Symbolic differentiation* não é a técnica mais eficaz para o cálculo do valor da derivada de uma expressão. *Automatic differentiation* resolve este problema cálculando o valor da derivada em vez de manipular a expressão original.

   Defina o gene do catamorfismo que ocorre na função

   $$ad :: Floating\ a \Rightarrow a \rightarrow ExpAr\ a \rightarrow a$$

   que, dada uma expressão aritmética e um ponto, calcula o valor da sua derivada nesse ponto, sem transformar manipular a expressão original. Testes a fazer, de seguida:

Propriedade [QuickCheck] 6 *Calcular o valor da derivada num ponto r via ad é equivalente a calcular a derivada da expressão e avalia-la no ponto r.*

$$\begin{array}{l}
prop_congruent :: (Floating\ a, Real\ a) \Rightarrow a \rightarrow ExpAr\ a \rightarrow Bool \\
prop_congruent\ a\ exp = ad\ a\ exp \stackrel{?}{=} eval_exp\ a\ (sd\ exp)
\end{array}$$

Problema 2

Nesta disciplina estudou-se como fazer programação dinâmica por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.[4]

Para o caso de funções sobre os números naturais ($\mathbb{N}_0$, com functor $\mathsf{F}\ X = 1 + X$) é fácil derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado Cálculo de Programas. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema

$$\begin{array}{l}
fib\ 0 = 1 \\
fib\ (n+1) = f\ n
\end{array}$$

[4] Lei (3.94) em [?], página 98.

$$f\ 0 = 1$$
$$f\ (n+1) = fib\ n + f\ n$$

Obter-se-á de imediato

$$\begin{array}{l} fib' = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where} \\ \quad loop\ (fib, f) = (f, fib + f) \\ \quad init = (1, 1) \end{array}$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo $loop$ terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.[5]
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável n.
- Em $init$ coleccionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em $\mathbb{N}_0$. Seguindo o método estudado nas aulas[6], de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$\begin{array}{l} f\ 0 = c \\ f\ (n+1) = f\ n + k\ n \end{array}$$
$$\begin{array}{l} k\ 0 = a + b \\ k\ (n+1) = k\ n + 2\ a \end{array}$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$\begin{array}{l} f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where} \\ \quad loop\ (f, k) = (f + k, k + 2 * a) \\ \quad init = (c, a + b) \end{array}$$

O que se pede então, nesta pergunta? Dada a fórmula que dá o n-ésimo número de Catalan,

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)} \qquad (1)$$

derivar uma implementação de C_n que não calcule factoriais nenhuns. Isto é, derivar um ciclo-for

$$cat = \cdots \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where}\ \cdots$$

que implemente esta função.

Propriedade [QuickCheck] 7 *A função proposta coincidem com a definição dada:*

$$prop\_cat = (\geqslant 0) \Rightarrow (catdef \equiv cat)$$

Sugestão: Começar por estudar muito bem o processo de cálculo dado no anexo B para o problema (semelhante) da função exponencial.

Problema 3

As curvas de Bézier, designação dada em honra ao engenheiro Pierre Bézier, são curvas ubíquas na área de computação gráfica, animação e modelação. Uma curva de Bézier é uma curva paramétrica, definida por um conjunto $\{P_0, ..., P_N\}$ de pontos de controlo, onde N é a ordem da curva.

O algoritmo de *De Casteljau* é um método recursivo capaz de calcular curvas de Bézier num ponto. Apesar de ser mais lento do que outras abordagens, este algoritmo é numericamente mais estável, trocando velocidade por correção.

[5] Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.
[6] Secção 3.17 de [?] e tópico Recursividade mútua nos vídeos das aulas teóricas.

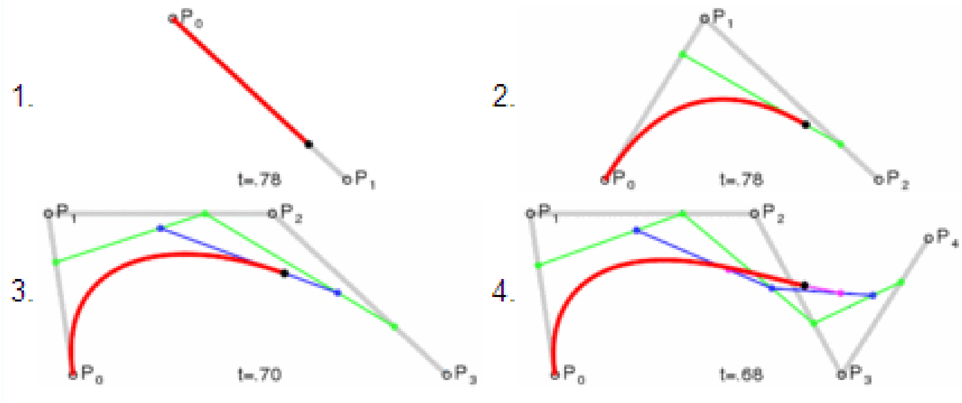

Figura 1: Exemplos de curvas de Bézier retirados da Wikipedia.

De forma sucinta, o valor de uma curva de Bézier de um só ponto $\{P_0\}$ (ordem 0) é o próprio ponto P_0. O valor de uma curva de Bézier de ordem N é calculado através da interpolação linear da curva de Bézier dos primeiros $N-1$ pontos e da curva de Bézier dos últimos $N-1$ pontos.

A interpolação linear entre 2 números, no intervalo $[0,1]$, é dada pela seguinte função:

$$\begin{array}{l} linear1d :: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to OverTime\ \mathbb{Q} \\ linear1d\ a\ b = formula\ a\ b\ \mathbf{where} \\ \quad formula :: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \to Float \to \mathbb{Q} \\ \quad formula\ x\ y\ t = ((1.0 :: \mathbb{Q}) - (to_{\mathbb{Q}}\ t)) * x + (to_{\mathbb{Q}}\ t) * y \end{array}$$

A interpolação linear entre 2 pontos de dimensão N é calculada através da interpolação linear de cada dimensão.

O tipo de dados $NPoint$ representa um ponto com N dimensões.

$$\mathbf{type}\ NPoint = [\mathbb{Q}]$$

Por exemplo, um ponto de 2 dimensões e um ponto de 3 dimensões podem ser representados, respetivamente, por:

$$\begin{array}{l} p2d = [1.2, 3.4] \\ p3d = [0.2, 10.3, 2.4] \end{array}$$

O tipo de dados $OverTime\ a$ representa um termo do tipo a num dado instante (dado por um $Float$).

$$\mathbf{type}\ OverTime\ a = Float \to a$$

O anexo C tem definida a função

$$calcLine :: NPoint \to (NPoint \to OverTime\ NPoint)$$

que calcula a interpolação linear entre 2 pontos, e a função

$$deCasteljau :: [NPoint] \to OverTime\ NPoint$$

que implementa o algoritmo respectivo.

1. Implemente $calcLine$ como um catamorfismo de listas, testando a sua definição com a propriedade:

   Propriedade [QuickCheck] 8 *Definição alternativa.*

   $$\begin{array}{l} prop\_calcLine\_def :: NPoint \to NPoint \to Float \to Bool \\ prop\_calcLine\_def\ p\ q\ d = calcLine\ p\ q\ d \equiv zipWithM\ linear1d\ p\ q\ d \end{array}$$

2. Implemente a função $deCasteljau$ como um hilomorfismo, testando agora a propriedade:

Propriedade [QuickCheck] 9 *Curvas de Bézier são simétricas.*

$$
\begin{array}{l}
prop\_bezier\_sym :: [[\mathbb{Q}]] \rightarrow Gen\ Bool \\
prop\_bezier\_sym\ l = all\ (<\Delta) \cdot calc\_difs \cdot bezs\ \langle\$\rangle\ elements\ ps\ \mathbf{where} \\
\quad calc\_difs = (\lambda(x,y) \rightarrow zipWith\ (\lambda w\ v \rightarrow \mathbf{if}\ w \geqslant v\ \mathbf{then}\ w - v\ \mathbf{else}\ v - w)\ x\ y) \\
\quad bezs\ t = (deCasteljau\ l\ t, deCasteljau\ (reverse\ l)\ (from_{\mathbb{Q}}\ (1 - (to_{\mathbb{Q}}\ t)))) \\
\quad \Delta = 1\mathrm{e}{-2}
\end{array}
$$

3. Corra a função $runBezier$ e aprecie o seu trabalho[7] clicando na janela que é aberta (que contém, a verde, um ponto inicila) com o botão esquerdo do rato para adicionar mais pontos. A tecla $Delete$ apaga o ponto mais recente.

Problema 4

Seja dada a fórmula que calcula a média de uma lista não vazia x,

$$avg\ x = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \tag{2}$$

onde $k = length\ x$. Isto é, para sabermos a média de uma lista precisamos de dois catamorfismos: o que faz o somatório e o que calcula o comprimento a lista. Contudo, é facil de ver que

$$
\begin{array}{l}
avg\ [a] = a \\
avg(a : x) = \frac{1}{k+1}(a + \sum_{i=1}^{k} x_i) = \frac{a + k(avg\ x)}{k+1} \text{ para } k = length\ x
\end{array}
$$

Logo avg está em recursividade mútua com $length$ e o par de funções pode ser expresso por um único catamorfismo, significando que a lista apenas é percorrida uma vez.

1. Recorra à lei de recursividade mútua para derivar a função $avg\_aux = (\![[b, q]]\!)$ tal que $avg\_aux = \langle avg, length \rangle$ em listas não vazias.

2. Generalize o raciocínio anterior para o cálculo da média de todos os elementos de uma LTree recorrendo a uma única travessia da árvore (i.e. catamorfismo).

Verifique as suas funções testando a propriedade seguinte:

Propriedade [QuickCheck] 10 *A média de uma lista não vazia e de uma LTree com os mesmos elementos coincide, a menos de um erro de 0.1 milésimas:*

$$
\begin{array}{l}
prop\_avg :: [Double] \rightarrow Property \\
prop\_avg = nonempty \Rightarrow diff \leqslant \underline{0.000001}\ \mathbf{where} \\
\quad diff\ l = avg\ l - (avgLTree \cdot genLTree)\ l \\
\quad genLTree = [\![lsplit]\!] \\
\quad nonempty = (>[\,])
\end{array}
$$

Problema 5

(**NB**: Esta questão é **opcional** e funciona como **valorização** apenas para os alunos que desejarem fazê-la.)

Existem muitas linguagens funcionais para além do Haskell, que é a linguagem usada neste trabalho prático. Uma delas é o F# da Microsoft. Na directoria `fsharp` encontram-se os módulos Cp, Nat e LTree codificados em F#. O que se pede é a biblioteca BTree escrita na mesma linguagem.

Modo de execução: o código que tiverem produzido nesta pergunta deve ser colocado entre o `\begin{verbatim}` e o `\end{verbatim}` da correspondente parte do anexo D. Para além disso, os grupos podem demonstrar o código na oral.

[7] A representação em Gloss é uma adaptação de um projeto de Harold Cooper.

Anexos

A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:[8]

$$
\begin{array}{ll}
 & id = \langle f, g \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \text{ universal property } \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \text{ identity } \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* LaTeX xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[d, "(\!| g |\!)"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + (\!| g |\!)"] \\
B & 1 + B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
$$

B Programação dinâmica por recursividade múltipla

Neste anexo dão-se os detalhes da resolução do Exercício 3.30 dos apontamentos da disciplina[9], onde se pretende implementar um ciclo que implemente o cálculo da aproximação até $i = n$ da função exponencial $exp\ x = e^x$, via série de Taylor:

$$
exp\ x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \tag{3}
$$

Seja $e\ x\ n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$ a função que dá essa aproximação. É fácil de ver que $e\ x\ 0 = 1$ e que $e\ x\ (n+1) = e\ x\ n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Se definirmos $h\ x\ n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ teremos $e\ x$ e $h\ x$ em recursividade mútua. Se repetirmos o processo para $h\ x\ n$ etc obteremos no total três funções nessa mesma situação:

$$
\begin{array}{l}
e\ x\ 0 = 1 \\
e\ x\ (n+1) = h\ x\ n + e\ x\ n \\
h\ x\ 0 = x \\
h\ x\ (n+1) = x\ /\ (s\ n) * h\ x\ n \\
s\ 0 = 2 \\
s\ (n+1) = 1 + s\ n
\end{array}
$$

Segundo a *regra de algibeira* descrita na página 3.1 deste enunciado, ter-se-á, de imediato:

$$
\begin{array}{l}
e'\ x = prj \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where} \\
\quad init = (1, x, 2) \\
\quad loop\ (e, h, s) = (h + e, x\ /\ s * h, 1 + s) \\
\quad prj\ (e, h, s) = e
\end{array}
$$

[8] Exemplos tirados de [?].
[9] Cf. [?], página 102.

C Código fornecido

Problema 1

$$
\begin{array}{l}
expd :: Floating\ a \Rightarrow a \rightarrow a \\
expd = Prelude.exp \\
\mathbf{type}\ OutExpAr\ a = () + (a + ((BinOp, (ExpAr\ a, ExpAr\ a)) + (UnOp, ExpAr\ a)))
\end{array}
$$

Problema 2

Definição da série de Catalan usando factoriais (1):

$$catdef\ n = (2 * n)! \div ((n + 1)! * n!)$$

Oráculo para inspecção dos primeiros 26 números de Catalan[10]:

$$
\begin{array}{l}
oracle = [\\
\quad 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, \\
\quad 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, \\
\quad 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452 \\
\quad]
\end{array}
$$

Problema 3

Algoritmo:

$$
\begin{array}{l}
deCasteljau :: [NPoint] \rightarrow OverTime\ NPoint \\
deCasteljau\ [\,] = nil \\
deCasteljau\ [p] = \underline{p} \\
deCasteljau\ l = \lambda pt \rightarrow (calcLine\ (p\ pt)\ (q\ pt))\ pt\ \mathbf{where} \\
\quad p = deCasteljau\ (init\ l) \\
\quad q = deCasteljau\ (tail\ l)
\end{array}
$$

Função auxiliar:

$$
\begin{array}{l}
calcLine :: NPoint \rightarrow (NPoint \rightarrow OverTime\ NPoint) \\
calcLine\ [\,] = \underline{nil} \\
calcLine\ (p : x) = \overline{g}\ p\ (calcLine\ x)\ \mathbf{where} \\
\quad g :: (\mathbb{Q}, NPoint \rightarrow OverTime\ NPoint) \rightarrow (NPoint \rightarrow OverTime\ NPoint) \\
\quad g\ (d, f)\ l = \mathbf{case}\ l\ \mathbf{of} \\
\quad\quad [\,] \rightarrow nil \\
\quad\quad (x : xs) \rightarrow \lambda z \rightarrow concat\ \$\ (sequenceA\ [singl \cdot linear1d\ d\ x, f\ xs])\ z
\end{array}
$$

2D:

$$
\begin{array}{l}
bezier2d :: [NPoint] \rightarrow OverTime\ (Float, Float) \\
bezier2d\ [\,] = \underline{(0, 0)} \\
bezier2d\ l = \lambda z \rightarrow (from_{\mathbb{Q}} \times from_{\mathbb{Q}}) \cdot (\lambda [x, y] \rightarrow (x, y))\ \$\ ((deCasteljau\ l)\ z)
\end{array}
$$

Modelo:

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{data}\ World = World\ \{points :: [NPoint] \\
\quad , time :: Float \\
\quad \} \\
initW :: World \\
initW = World\ [\,]\ 0
\end{array}
$$

[10] Fonte: Wikipedia.

$$
\begin{array}{l}
tick :: Float \to World \to World \\
tick\ dt\ world = world\ \{time = (time\ world) + dt\} \\
actions :: Event \to World \to World \\
actions\ (EventKey\ (MouseButton\ LeftButton)\ Down\ \_\ p)\ world = \\
\quad world\ \{points = (points\ world) +\!\!+ [(\lambda(x,y) \to \mathsf{map}\ \ to_{\mathbb{Q}}\ [x,y])\ p]\} \\
actions\ (EventKey\ (SpecialKey\ KeyDelete)\ Down\ \_\ \_)\ world = \\
\quad world\ \{points = cond\ (\equiv [\,])\ id\ init\ (points\ world)\} \\
actions\ \_\ world = world \\
scaleTime :: World \to Float \\
scaleTime\ w = (1 + cos\ (time\ w))\ /\ 2 \\
bezier2dAtTime :: World \to (Float, Float) \\
bezier2dAtTime\ w = (bezier2dAt\ w)\ (scaleTime\ w) \\
bezier2dAt :: World \to OverTime\ (Float, Float) \\
bezier2dAt\ w = bezier2d\ (points\ w) \\
thicCirc :: Picture \\
thicCirc = ThickCircle\ 4\ 10 \\
ps :: [Float] \\
ps = \mathsf{map}\ \ from_{\mathbb{Q}}\ ps'\ \mathbf{where} \\
\quad ps' :: [\mathbb{Q}] \\
\quad ps' = [0, 0.01 \mathinner{\ldotp\ldotp} 1] \quad \text{-- interval}
\end{array}
$$

Gloss:

$$
\begin{array}{l}
picture :: World \to Picture \\
picture\ world = Pictures \\
\quad [animateBezier\ (scaleTime\ world)\ (points\ world) \\
\quad , Color\ white \cdot Line \cdot \mathsf{map}\ \ (bezier2dAt\ world)\ \$\ ps \\
\quad , Color\ blue \cdot Pictures\ \$\ [Translate\ (from_{\mathbb{Q}}\ x)\ (from_{\mathbb{Q}}\ y)\ thicCirc \mid [x,y] \leftarrow points\ world] \\
\quad , Color\ green\ \$\ Translate\ cx\ cy\ thicCirc \\
\quad]\ \mathbf{where} \\
\quad (cx, cy) = bezier2dAtTime\ world
\end{array}
$$

Animação:

$$
\begin{array}{l}
animateBezier :: Float \to [NPoint] \to Picture \\
animateBezier\ \_\ [\,] = Blank \\
animateBezier\ \_\ [\_] = Blank \\
animateBezier\ t\ l = Pictures \\
\quad [animateBezier\ t\ (init\ l) \\
\quad , animateBezier\ t\ (tail\ l) \\
\quad , Color\ red \cdot Line\ \$\ [a, b] \\
\quad , Color\ orange\ \$\ Translate\ ax\ ay\ thicCirc \\
\quad , Color\ orange\ \$\ Translate\ bx\ by\ thicCirc \\
\quad]\ \mathbf{where} \\
\quad a@(ax, ay) = bezier2d\ (init\ l)\ t \\
\quad b@(bx, by) = bezier2d\ (tail\ l)\ t
\end{array}
$$

Propriedades e *main*:

$$
\begin{array}{l}
runBezier :: \mathsf{IO}\ () \\
runBezier = play\ (InWindow\ \texttt{"Bézier"}\ (600, 600)\ (0, 0)) \\
\quad black\ 50\ initW\ picture\ actions\ tick \\
runBezierSym :: \mathsf{IO}\ () \\
runBezierSym = quickCheckWith\ (stdArgs\ \{maxSize = 20, maxSuccess = 200\})\ prop\_bezier\_sym
\end{array}
$$

Compilação e execução dentro do interpretador:[11]

$$
\begin{array}{l}
main = runBezier \\
run = \mathbf{do}\ \{system\ \texttt{"ghc cp2021t"}; system\ \texttt{"./cp2021t"}\}
\end{array}
$$

[11] Pode ser útil em testes envolvendo Gloss. Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

QuickCheck

Código para geração de testes:

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{instance}\ \mathit{Arbitrary}\ \mathit{UnOp}\ \mathbf{where} \\
\quad \mathit{arbitrary} = \mathit{elements}\ [\mathit{Negate}, E] \\
\mathbf{instance}\ \mathit{Arbitrary}\ \mathit{BinOp}\ \mathbf{where} \\
\quad \mathit{arbitrary} = \mathit{elements}\ [\mathit{Sum}, \mathit{Product}] \\
\mathbf{instance}\ (\mathit{Arbitrary}\ a) \Rightarrow \mathit{Arbitrary}\ (\mathit{ExpAr}\ a)\ \mathbf{where} \\
\quad \mathit{arbitrary} = \mathbf{do} \\
\qquad \mathit{binop} \leftarrow \mathit{arbitrary} \\
\qquad \mathit{unop} \leftarrow \mathit{arbitrary} \\
\qquad \mathit{exp1} \leftarrow \mathit{arbitrary} \\
\qquad \mathit{exp2} \leftarrow \mathit{arbitrary} \\
\qquad a \quad\ \leftarrow \mathit{arbitrary} \\
\qquad \mathit{frequency} \cdot \mathsf{map}\ \ (\mathit{id} \times \mathit{pure})\ \$\ [(20, X), (15, N\ a), (35, \mathit{Bin}\ \mathit{binop}\ \mathit{exp1}\ \mathit{exp2}), (30, \mathit{Un}\ \mathit{unop}\ \mathit{exp1})] \\
\mathbf{infixr}\ 5 \stackrel{?}{=} \\
(\stackrel{?}{=}) :: \mathit{Real}\ a \Rightarrow a \rightarrow a \rightarrow \mathit{Bool} \\
(\stackrel{?}{=})\ x\ y = (\mathit{to}_{\mathbb{Q}}\ x) \equiv (\mathit{to}_{\mathbb{Q}}\ y)
\end{array}
$$

Outras funções auxiliares

Lógicas:

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{infixr}\ 0 \Rightarrow \\
(\Rightarrow) :: (\mathit{Testable}\ \mathit{prop}) \Rightarrow (a \rightarrow \mathit{Bool}) \rightarrow (a \rightarrow \mathit{prop}) \rightarrow a \rightarrow \mathit{Property} \\
p \Rightarrow f = \lambda a \rightarrow p\ a \Rightarrow f\ a \\
\mathbf{infixr}\ 0 \Leftrightarrow \\
(\Leftrightarrow) :: (a \rightarrow \mathit{Bool}) \rightarrow (a \rightarrow \mathit{Bool}) \rightarrow a \rightarrow \mathit{Property} \\
p \Leftrightarrow f = \lambda a \rightarrow (p\ a \Rightarrow \mathit{property}\ (f\ a))\ .\&\&.\ (f\ a \Rightarrow \mathit{property}\ (p\ a)) \\
\mathbf{infixr}\ 4 \equiv \\
(\equiv) :: \mathit{Eq}\ b \Rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow \mathit{Bool}) \\
f \equiv g = \lambda a \rightarrow f\ a \equiv g\ a \\
\mathbf{infixr}\ 4 \leqslant \\
(\leqslant) :: \mathit{Ord}\ b \Rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow \mathit{Bool}) \\
f \leqslant g = \lambda a \rightarrow f\ a \leqslant g\ a \\
\mathbf{infixr}\ 4 \wedge \\
(\wedge) :: (a \rightarrow \mathit{Bool}) \rightarrow (a \rightarrow \mathit{Bool}) \rightarrow (a \rightarrow \mathit{Bool}) \\
f \wedge g = \lambda a \rightarrow ((f\ a) \wedge (g\ a))
\end{array}
$$

D Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o ”layout”que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto, disgramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes.

Problema 1

São dadas:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{cataExpAr}\ g = g \cdot \mathit{recExpAr}\ (\mathit{cataExpAr}\ g) \cdot \mathit{outExpAr} \\
\mathit{anaExpAr}\ g = \mathit{inExpAr} \cdot \mathit{recExpAr}\ (\mathit{anaExpAr}\ g) \cdot g \\
\mathit{hyloExpAr}\ h\ g = \mathit{cataExpAr}\ h \cdot \mathit{anaExpAr}\ g
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
eval\_exp :: Floating\ a \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr\ a) \rightarrow a \\
eval\_exp\ a = cataExpAr\ (g\_eval\_exp\ a) \\
optmize\_eval :: (Floating\ a, Eq\ a) \Rightarrow a \rightarrow (ExpAr\ a) \rightarrow a \\
optmize\_eval\ a = hyloExpAr\ (gopt\ a)\ clean \\
sd :: Floating\ a \Rightarrow ExpAr\ a \rightarrow ExpAr\ a \\
sd = \pi_2 \cdot cataExpAr\ sd\_gen \\
ad :: Floating\ a \Rightarrow a \rightarrow ExpAr\ a \rightarrow a \\
ad\ v = \pi_2 \cdot cataExpAr\ (ad\_gen\ v)
\end{array}
$$

outExpAr

$$
\begin{array}{ll}
 & out \cdot \mathbf{in} = id \\
\equiv & \quad \{\ \mathbf{in} = [\underline{X}, num\_ops], \text{fusão-+}\ \} \\
 & [out \cdot \underline{X}, out \cdot num\_ops] = id \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal-+, natural-id}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} out \cdot \underline{X} = i_1 \\ out \cdot num\_ops = i_2 \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ num\_ops = [N, ops], \text{fusão-+}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} out \cdot \underline{X} = i_1 \\ [out \cdot N, out \cdot ops] = i_2 \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal-+}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} out \cdot \underline{X} = i_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} out \cdot N = i_2 \cdot i_1 \\ out \cdot ops = i_2 \cdot i_2 \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ ops = [bin, \widehat{Un}], \text{fusão-+}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} out \cdot \underline{X} = i_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} out \cdot N = i_2 \cdot i_1 \\ [out \cdot bin, \widehat{Un}] = i_2 \cdot i_2 \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal-+}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} out \cdot \underline{X} = i_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} out \cdot N = i_2 \cdot i_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} out \cdot bin = i_2 \cdot i_2 \cdot i_1 \\ out \cdot \widehat{Un} = i_2 \cdot i_2 \cdot i_2 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{pointwise, def-comp}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} out\ \underline{X}\ x = i_1\ x \\ \left\{ \begin{array}{l} out\ (N\ x) = i_2\ (i_1\ x) \\ \left\{ \begin{array}{l} out\ (bin\ (op, (a, b))) = i_2\ (i_2\ (i_1\ (op, (a, b)))) \\ out\ \widehat{Un}\ (op, a) = (i_2\ (i_2\ (i_2\ (op, a)))) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{def-const}, bin\ (op, (a, b)) = Bin\ op\ a\ b, \text{uncurry}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} out\ X = i_1\ () \\ \left\{ \begin{array}{l} out\ (N\ x) = i_2\ (i_1\ x) \\ \left\{ \begin{array}{l} out\ (Bin\ op\ a\ b) = i_2\ (i_2\ (i_1\ (op, (a, b)))) \\ out\ (Un\ op\ a) = (i_2\ (i_2\ (i_2\ (op, a)))) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \\
\square &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&outExpAr\ X = i_1\ ()\\
&outExpAr\ (N\ x) = (i_2 \cdot i_1)\ x\\
&outExpAr\ (Bin\ op\ a\ b) = (i_2 \cdot i_2 \cdot i_1)\ (op, (a, b))\\
&outExpAr\ (Un\ op\ a) = (i_2 \cdot i_2 \cdot i_2)\ (op, a)
\end{aligned}
$$

recExpAr

$$recExpAr\ f = baseExpAr\ id\ id\ id\ f\ f\ id\ f$$

g_eval_exp

$$
\begin{tikzcd}
ExpAr\ A \arrow[r, shift left, "\mathsf{out}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "eval\_exp\ a"'] & 1 + (A + ((BinOp \times (ExpAr\ A)^2 + UnOp \times ExpAr\ A)) \arrow[l, shift left, "\mathsf{in}"] \arrow[d, "id+(id+(id\times(eval\_exp\ a)^2+id\times(eval\_exp\ a)))"] \\
A & 1 + (A + (BinOp \times A^2 + Unop \times A)) \arrow[l, "g\_eval\_exp\ a"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&g\_eval\_exp\ x = [\underline{x}, [id, [\widehat{binOp}, \widehat{unOp}]]]\\
&\quad \textbf{where}\\
&\qquad binOp\ Sum = \widehat{(+)}\\
&\qquad binOp\ Product = \widehat{(*)}\\
&\qquad unOp\ Negate = negate\\
&\qquad unOp\ E = expd
\end{aligned}
$$

hyloExpAr

$$
\begin{tikzcd}
ExpAr\ A \arrow[r, "clean"] \arrow[d, "{[\!(clean)\!]}"'] & +(A + (BinOp \times (ExpAr\ A)^2 + UnOp \times ExpAr\ A)) \arrow[d, "id+(id+(id\times[\!(clean)\!]^2+[\!(id\times clean)\!]))"] \\
ExpAr\ A \arrow[d, "(\!|gopt\ a|\!)"'] & 1 + (A + (BinOp \times (ExpAr\ A)^2 + UnOp \times ExpAr\ A)) \arrow[l, shift right, "inExpAr"'] \arrow[d, "id+(id+(id\times(\!|gopt\ a|\!)^2+id\times(\!|gopt\ a|\!))"] \\
A & 1 + (A + (BinOp \times A^2 + UnOp \times A)) \arrow[l, "gopt\ a"]
\end{tikzcd}
$$

NB: Esta função não passa nalguns testes do *quickCheck*, uma vez que a $eval\_exp$ nalguns casos dá NaN, enquanto que a $optmize\_eval$ não.

clean

$$
\begin{aligned}
&clean\ (Bin\ Sum\ (N\ 0)\ x) = outExpAr\ x\\
&clean\ (Bin\ Sum\ x\ (N\ 0)) = outExpAr\ x\\
&clean\ (Bin\ Product\ (N\ 0)\ \_) = outExpAr\ (N\ 0)\\
&clean\ (Bin\ Product\ \_\ (N\ 0)) = outExpAr\ (N\ 0)\\
&clean\ (Bin\ Product\ (N\ 1)\ x) = outExpAr\ x\\
&clean\ (Bin\ Product\ x\ (N\ 1)) = outExpAr\ x\\
&clean\ (Un\ E\ (N\ 0)) = outExpAr\ (N\ 1)\\
&clean\ (Un\ Negate\ (Un\ Negate\ x)) = outExpAr\ x\\
&clean\ x = outExpAr\ x
\end{aligned}
$$

gopt

$$
\begin{aligned}
&gopt\ \_\ (i_2\ (i_2\ (i_1\ (Sum, (0, x))))) = x\\
&gopt\ \_\ (i_2\ (i_2\ (i_1\ (Sum, (x, 0))))) = x\\
&gopt\ \_\ (i_2\ (i_2\ (i_1\ (Product, (0, \_))))) = 0\\
&gopt\ \_\ (i_2\ (i_2\ (i_1\ (Product, (\_, 0))))) = 0\\
&gopt\ \_\ (i_2\ (i_2\ (i_1\ (Product, (1, x))))) = x\\
&gopt\ \_\ (i_2\ (i_2\ (i_1\ (Product, (x, 1))))) = x\\
&gopt\ \_\ (i_2\ (i_2\ (i_2\ (E, 0)))) = 1\\
&gopt\ \_\ (i_2\ (i_2\ (i_2\ (Negate, 0)))) = 0\\
&gopt\ a\ b = g\_eval\_exp\ a\ b
\end{aligned}
$$

sd_gen

$$
\begin{aligned}
&sd\_gen :: Floating\ a \Rightarrow\\
&\quad () +\\
&\quad\quad (a +\\
&\quad\quad\quad ((BinOp, ((ExpAr\ a, ExpAr\ a), (ExpAr\ a, ExpAr\ a))) +\\
&\quad\quad\quad\quad (UnOp, (ExpAr\ a, ExpAr\ a))))\\
&\quad\ \rightarrow (ExpAr\ a, ExpAr\ a)\\
&sd\_gen = [\underline{(X, N\ 1)}, [n, [binOp, unOp]]]\\
&\quad \mathbf{where}\\
&\quad\quad n\ a = (N\ a, N\ 0)\\
&\quad\quad binOp\ (op, ((f, f'), (g, g'))) =\\
&\quad\quad\quad \mathbf{let}\ x = Bin\ op\ f\ g\ \mathbf{in}\\
&\quad\quad\quad\quad \mathbf{case}\ op\ \mathbf{of}\\
&\quad\quad\quad\quad\quad Sum \rightarrow (x, Bin\ Sum\ f'\ g')\\
&\quad\quad\quad\quad\quad Product \rightarrow (x, Bin\ Sum\ (Bin\ Product\ f\ g')\ (Bin\ Product\ f'\ g))\\
&\quad\quad unOp\ (op, (f, f')) =\\
&\quad\quad\quad \mathbf{let}\ x = Un\ op\ f\ \mathbf{in}\\
&\quad\quad\quad\quad \mathbf{case}\ op\ \mathbf{of}\\
&\quad\quad\quad\quad\quad E \rightarrow (x, Bin\ Product\ (Un\ E\ f)\ f')\\
&\quad\quad\quad\quad\quad Negate \rightarrow (x, Un\ Negate\ f')
\end{aligned}
$$

ad_gen

$$
\begin{aligned}
&ad\_gen\ x = [\underline{(x, 1)}, [\langle id, fromInteger \cdot zero\rangle, [binOp, unOp]]]\\
&\quad \mathbf{where}\\
&\quad\quad binOp\ (op, ((f, f'), (g, g'))) =\\
&\quad\quad\quad \mathbf{case}\ op\ \mathbf{of}\\
&\quad\quad\quad\quad Sum \rightarrow (f + g, f' + g')\\
&\quad\quad\quad\quad \_ \rightarrow (f * g, f * g' + f' * g)\\
&\quad\quad unOp\ (op, (f, f')) =\\
&\quad\quad\quad \mathbf{case}\ op\ \mathbf{of}\\
&\quad\quad\quad\quad E \rightarrow (expd\ f, expd\ f * f')\\
&\quad\quad\quad\quad \_ \rightarrow (negate\ f, negate\ f')
\end{aligned}
$$

show

$$
\begin{aligned}
&showExpAr :: Show\ a \Rightarrow ExpAr\ a \rightarrow String\\
&showExpAr = cataExpAr\ gene\\
&\quad \mathbf{where}\\
&\quad\quad gene = [\underline{\texttt{"x"}}, [show, [showBinOp, showUnOp]]]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
showBinOp\ (Sum, (a, b)) = \texttt{"("} \mathbin{+\!\!+} a \mathbin{+\!\!+} \texttt{" + "} \mathbin{+\!\!+} b \mathbin{+\!\!+} \texttt{")"} \\
showBinOp\ (Product, (a, b)) = \texttt{"("} \mathbin{+\!\!+} a \mathbin{+\!\!+} \texttt{" * "} \mathbin{+\!\!+} b \mathbin{+\!\!+} \texttt{")"} \\
showUnOp\ (E, a) = \texttt{"e\^{}"} \mathbin{+\!\!+} a \\
showUnOp\ (Negate, a) = \texttt{"(-"} \mathbin{+\!\!+} a \mathbin{+\!\!+} \texttt{")"}
\end{array}
$$

Problema 2

Definir

$$
\begin{array}{l}
inic = (1, 2, 2) \\
loop\ (c, d, e) = (c * d \div e, d + 4, e + 1) \\
prj\ (c, d, e) = c
\end{array}
$$

por forma a que

$$
cat = prj \cdot \mathsf{for}\ loop\ inic
$$

seja a função pretendida. **NB**: usar divisão inteira. Apresentar de seguida a justificação da solução encontrada.

A partir da fórmula 1, que dá o n-ésimo número de Catalan, somos capazes de definir uma função $c\ n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)}$. Vemos facilmente que esta função pode ser definida recursivamente por $c\ 0 = 1$ e $c\ (n+1) = c\ n * \frac{2(2n+1)}{n+2}$. Se definirmos $d\ n = 2(2n+1)$ e $e\ n = n + 2$, obtemos as seguintes funções:

$$
\begin{array}{l}
c\ 0 = 1 \\
c\ (n+1) = c\ n * d\ n \div e\ n \\
d\ 0 = 2 \\
d\ (n+1) = d\ n + 4 \\
e\ 0 = 2 \\
e\ (n+1) = e\ n + 1
\end{array}
$$

Podemos agora aplicar a *regra da algibeira* descrita na página 3.1 e definir as funções necessárias à resolução do problema.

NB: Como estamos a usar divisão inteira, é importante que na função c façamos a multiplicação antes da divisão. Caso contrário, a função não dará valores corretos, pois irá arredondar o resultado da divisão.

Problema 3

Sabendo que $calcLine = (\!|h|\!)$, somos capazes de derivar a definição de h a partir da definição de $calcLine$.

$$
\begin{array}{ll}
& \left\{ \begin{array}{l} calcLine\ [\,] = \underline{nil} \\ calcLine\ (p : x) = \overline{g}\ p\ (calcLine\ x) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{ def-cons, def-nil, def-curry } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} calcLine\ (nil\ x) = \underline{nil} \\ calcLine\ (cons\ (p, x)) = g\ (p, (calcLine\ x)) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{ def-x } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} calcLine\ (nil\ x) = \underline{nil} \\ calcLine\ (cons\ (p, x)) = g\ ((id \times calcLine)\ (p, x)) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{ def-comp, def-const } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} (calcLine \cdot nil)\ x = \underline{\underline{nil}}\ x \\ (calcLine \cdot cons)\ (p, x) = (g \cdot (id \times calcLine))\ (p, x) \end{array} \right.
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \qquad \{ \text{ igualdade extensional } \} \\
&\quad \begin{cases} calcLine \cdot nil = \underline{\underline{nil}} \\ calcLine \cdot cons = g \cdot (id \times calcLine) \end{cases} \\
&\equiv \qquad \{ \text{ eq-+ } \} \\
&\quad [calcLine \cdot nil, calcLine \cdot cons] = [\underline{\underline{nil}}, g \cdot (id \times calcLine)] \\
&\equiv \qquad \{ \text{ fusão-+, absorção-+ } \} \\
&\quad calcLine \cdot [nil, cons] = [\underline{\underline{nil}}, g] \cdot (id + id \times calcLine) \\
&\equiv \qquad \{ \text{ universal-cata } \} \\
&\quad calcLine = (\![[\underline{\underline{nil}}, g]]\!) \\
&\equiv \qquad \{ \text{ calcLine} = (\![h]\!) \ \} \\
&\quad h = [\underline{\underline{nil}}, g] \\
&\square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&calcLine :: NPoint \to NPoint \to OverTime\ NPoint \\
&calcLine = cataList\ h\ \mathbf{where} \\
&\quad h = [\underline{\underline{nil}}, g] \\
&\quad g :: (\mathbb{Q}, NPoint \to OverTime\ NPoint) \to NPoint \to OverTime\ NPoint \\
&\quad g\ (d, f)\ l = \mathbf{case}\ l\ \mathbf{of} \\
&\qquad [\,] \to nil \\
&\qquad (x : xs) \to concat \cdot sequenceA\ [singl \cdot linear1d\ d\ x, f\ xs]
\end{aligned}
$$

Pela análise da definição do algoritmo de *De Casteljau* fornecida, vemos que esta divide a lista que lhe é dada nos seus elementos constituintes, fazendo depois uma junção (*"merge"*) destes elementos usando a função `calcLine`. Podemos assim concluir que o hilomorfismo a definir terá como estrutura intermédia uma LTree, onde cada folha representa um NPoint, obtido após N divisões da lista inicial. É fácil de verificar que este algoritmo é bastante semelhante ao conhecido *merge sort*, cujo hilomorfismo também usa uma LTree como estrutura intermédia.

Assim, o anamorfismo `coalg` deverá formar uma LTree a partir da lista de *input*, usando o mesmo método que a definição fornecida para o algoritmo, ou seja, "enviando"para o ramo esquerdo a lista sem o último valor e para o ramo direito a lista sem o primeiro valor. Se a lista apenas tiver um valor, criamos uma folha com esse valor.

Por outro lado, o catamorfismo `alg` deverá, para cada elemento da LTree, juntar os seus dois ramos usando a função `calcLine` que definimos acima. Se este elemento for uma folha, visto que não tem ramos, o catamorfismo devolve-a envolvida num `const`, já que deve devolver algo do tipo `OverTime NPoint` e um único NPoint (o valor armazenado na folha) não irá sofrer alterações com o tempo, logo terá que ser constante.

Temos assim uma definição para o hilomorfismo, apresentada a seguir:

$$
\begin{aligned}
&deCasteljau :: [NPoint] \to OverTime\ NPoint \\
&deCasteljau\ [\,] = \underline{[\,]} \\
&deCasteljau\ l = hyloAlgForm\ alg\ coalg\ l\ \mathbf{where} \\
&\quad coalg\ [p] = i_1\ p \\
&\quad coalg\ l = i_2\ (init\ l, tail\ l) \\
&\quad alg = [\underline{\cdot}, mergeL] \\
&\quad mergeL\ (l, m) = \lambda t \to calcLine\ (l\ t)\ (m\ t)\ t \\
&hyloAlgForm = hyloLTree
\end{aligned}
$$

Problema 4

Tendo que $(\![[b, q]]\!) = \langle avg, length \rangle$, geram-se os diagramas de avg e de $split$ para se poder recorrer à recursividade mútua.

Solução para listas não vazias:

$$
\begin{array}{ll}
& (\!|[b, q]|\!) = \langle avg, length \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \text{ universal cata } \} \\
& \langle avg, length \rangle = [b, q] \cdot \mathsf{F}\ \langle avg, length \rangle \\
\Box &
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A^+ \arrow[d, "avg"'] \arrow[r, bend left=10, "\mathsf{out}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & A + A \times A^+ \arrow[l, bend left=10, "\mathsf{in}"] \arrow[d, "id + id \times \langle avg, length \rangle"] \\
A & A + A \times (A \times \mathbb{N}_0) \arrow[l, "{[id, f]}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A^+ \arrow[d, "length"'] \arrow[r, bend left=10, "\mathsf{out}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & A + A \times A^+ \arrow[l, bend left=10, "\mathsf{in}"] \arrow[d, "id + id \times \langle avg, length \rangle"] \\
\mathbb{N}_0 & A + A \times (A \times \mathbb{N}_0) \arrow[l, "{[\underline{1}, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_2]}"]
\end{tikzcd}
$$

$avg = \pi_1 \cdot avg\_aux$

$recL\ f = id + id \times f$
$outL\ [a] = i_1\ a$
$outL\ (a : l) = i_2\ (a, l)$
$inL = [singl, cons]$
$cataL\ g = g \cdot recL\ (cataL\ g) \cdot outL$
$avg\_aux = cataL\ \$\ [b, q]$
  where
    $b = \langle id, \underline{1} \rangle$
    $q = \langle f, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle$
    $f\ (a, (avg, k)) = (a + k * avg)\ /\ (k + 1)$

Solução para árvores de tipo LTree:

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{LTree}\ A \arrow[d, "avg"'] \arrow[r, bend left=10, "\mathsf{out}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & A + (\mathsf{LTree}\ A)^2 \arrow[l, bend left=10, "\mathsf{in}"] \arrow[d, "id + \langle avg, length \rangle^2"] \\
A & A + A \times (A \times \mathbb{N}_0) \arrow[l, "{[id, h]}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{LTree}\ A \arrow[d, "length"'] \arrow[r, bend left=10, "\mathsf{out}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & A + (\mathsf{LTree}\ A)^2 \arrow[l, bend left=10, "\mathsf{in}"] \arrow[d, "id + \langle avg, length \rangle^2"] \\
\mathbb{N}_0 & A + A \times (A \times \mathbb{N}_0) \arrow[l, "{[\underline{1}, k]}"]
\end{tikzcd}
$$

$avgLTree = \pi_1 \cdot (\!|\ gene\ |\!)$ **where**
  $gene = [b, q]$
    where
      $b = \langle id, \underline{1} \rangle$
      $q\ ((a1, l1), (a2, l2)) = ((a1 * l1 + a2 * l2)\ /\ (l1 + l2), l1 + l2)$

Problema 5

Inserir em baixo o código F# desenvolvido, entre `\begin{verbatim}` e `\end{verbatim}`:

Datatype definition

```
type BTree<'a> =
  | Empty
  | Node of 'a * (BTree<'a> * BTree<'a>)

let inBTree x = either (konst Empty) Node x

let outBTree x =
  match x with
    | Empty -> i1 ()
    | Node (a, (l, r)) -> i2 (a, (l, r))
```

Ana + cata + hylo

```
let baseBTree f g x = (id -|- (f >< (g >< g))) x

let recBTree g x = (baseBTree id g) x

let rec cataBTree g x = (g << (recBTree (cataBTree g)) << outBTree) x

let rec anaBTree g x = (inBTree << (recBTree (anaBTree g) ) << g) x

let hyloBTree f g x = (cataBTree f << anaBTree g) x
```

Map

```
let fmap f x = cataBTree (inBTree << baseBTree f id) x
```

Examples

Inversion (mirror)

```
let invBTree x = cataBTree (inBTree << (id -|- (id >< swap))) x
```

Counting

```
let countBTree x = cataBTree (either (konst 0) (succ << (uncurry (+)) << p2)) x
```

Serilization

in-order traversal

```
let inord x =
  let join (a, (l, r)) = l @ a::r
  in either nil join x

let inordt x = cataBTree inord x
```

pre-order traversal

```
let preord x =
  let join (a, (l, r)) = a::l @ r
  in either nil join x

let preordt x = cataBTree preord x
```

post-order traversal

```
let postord x =
  let join (a, (l, r)) = l @ r @ [a]
  in either nil join x

let postordt x = cataBTree postord x
```

Quicksort

```
let rec part p l =
  match l with
    | [] -> ([], [])
    | (h::t) ->
      let (s, l) = part p t
      in
        if p h then
          (h::s, l)
        else
          (s, h::l)

let qsep l =
  match l with
    | [] -> i1 ()
    | (h :: t) ->
      let (s, l) = part ((<) h) t
      in i2 (h, (s, l))

let qSort x = hyloBTree inord qsep x
```

Traces

```
let rec delete x y =
  match y with
    | [] -> []
    | (h::t) ->
      if x = h then t
      else h :: delete x t

let union x y = x @ List.fold (flip delete) (List.distinct y) x

let tunion (a, (l, r)) = union (List.map ((@) [a]) l) (List.map ((@) [a]) r)

let traces x = cataBTree (either (konst [[]]) tunion) x
```

Towers of Hanoi

```
let present x = inord x

let strategy (d, n) =
  match n with
    | 0 -> i1 ()
    | otherwise -> i2 ((n, d), ((not d, n), (not d, n)))

let hanoi x = hyloBTree present strategy x
```

Depth and balancing (using mutual recursion)

```
let baldepth x =
```

```
  let f ((b1, d1), (b2, d2)) = ((b1, b2), (d1, d2))
  let h (a, ((b1, b2), (d1, d2))) =
      (b1 && b2 && abs (d1 - d2) <= 1, 1 + max d1 d2)
  let g x = either (konst (true, 1)) (h << (id >< f)) x
  in cataBTree g x

let balBTree b = (p1 << baldepth) b

let depthBTree b = (p2 << baldepth) b
```