

Modelos Determinísticos de Investigação  
Operacional - Trabalho 1  
*MIEI - Universidade do Minho*

Sofia Santos - A89615      Ema Dias - A89518  
Sara Queirós - A89491      Tânia Teixeira - A89613

Ano Letivo 2020/21

# 1 Formulação do problema

Neste problema temos um drone que precisa de percorrer um conjunto de linhas elétricas de alta tensão à procura de alguma interferência. Queremos que o drone percorra a menor distância possível, mas que percorra todas as linhas pelo menos uma vez. Para além de viajar pelas linhas, em qualquer sentido, o drone também pode viajar pelo ar.

De acordo com o maior nº de estudante do nosso grupo (89615), devemos remover a aresta C da nossa rede, o que resulta no seguinte mapa:

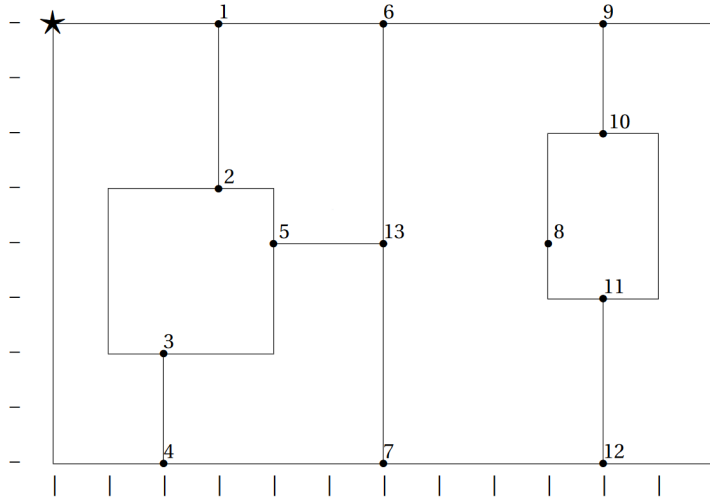


Figure 1: Mapa de linhas de alta tensão.

Analisando com atenção o problema, chegamos à conclusão que o caminho que o nosso drone tem que percorrer deve ser um caminho Euleriano, ou mais especificamente um circuito Euleriano, pois deve começar e terminar o caminho no mesmo ponto do grafo, que neste caso é o nosso mapa. Um caminho Euleriano é um caminho de um grafo em que todas as arestas são percorridas uma única vez. Esta seria a solução ideal do nosso problema, mas, tal como diz o Teorema de Euler, apenas podemos ter um circuito Euleriano se todos os vértices do nosso grafo tiverem um grau par. Esse não é o caso no mapa que temos, logo para podermos ter um circuito Euleriano teremos que adicionar arestas ao mapa.

Chegamos desta forma ao nosso problema de otimização: *que arestas é que temos que adicionar ao nosso mapa para que o caminho percorrido pelo drone seja Euleriano, e desta forma minimizar a distância total que percorre.*

Esta distância que temos de minimizar é o comprimento das arestas que iremos adicionar ao mapa, podemos ignorar o comprimento das linhas de alta tensão, pois o drone terá obrigatoriamente que as percorrer, logo esse valor será sempre constante.

Tal como referimos há pouco, para podermos ter um circuito Euleriano, todos os vértices do mapa devem ter grau par. Deste modo, as arestas a adicionar devem ligar pares de vértices de grau ímpar. Na figura seguinte assinalámos todos os vértices do nosso mapa com grau ímpar, e que teremos que ligar com arestas, que podem incidir em linhas de alta tensão ou não.

Podemos ver que todos os vértices exceto o vértice 8 possuem grau ímpar, logo incluiremos todos os vértices exceto o vértice 8 no nosso modelo.

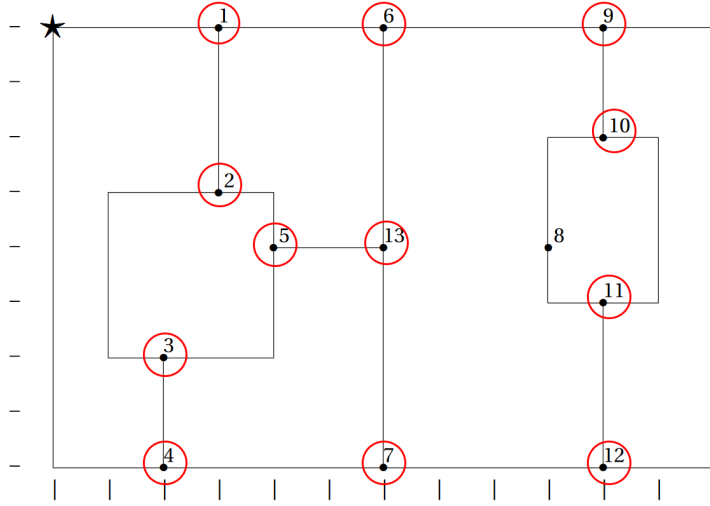


Figure 2: Vértices de grau ímpar.

## 2 Modelo

NOTA: Decidimos usar o sistema hexadecimal (base 16) para representar os vértices nas variáveis de decisão, dado que temos mais que 10 e menos que 16 vértices, e assim podemos representar todos os vértices com apenas um dígito. Deste modo, os vértices 'a' a 'd' correspondem aos vértices 10 a 13.

Temos assim o conjunto da numeração dos vértices usados no nosso modelo definido por  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, a, b, c, d\}$ . Usaremos  $V$  para nos referirmos a este conjunto de valores daqui em diante por razões de simplificação.

### 2.1 Variáveis de decisão

$x_{ij}$ : existe ou não uma aresta a unir os vértices  $i$  e  $j$ ,  $i, j \in V, i < j$   
 $x_{ij} \in \{0, 1\}$

Como  $x_{ij}$  e  $x_{ji}$  representam a existência da mesma aresta, decidimos usar como variável de decisão  $x_{ij} : i < j$ . Por exemplo, para representar a existência da aresta que une os vértices 5 e 9 usamos sempre  $x_{59}$  e nunca  $x_{95}$ .

### 2.2 Parâmetros

$d_{ij}$ : comprimento da aresta que une os vértices  $i$  e  $j$ .  
Os comprimentos de todas as arestas podem ser calculados a partir da seguinte tabela:

		x	3	3	2	2	4	6	6	9	10	10	10	6
		y	8	5	2	0	4	8	0	4	8	6	3	0
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	8	1	0.00	3.00	6.08	8.06	4.12	3.00	8.54	7.21	7.00	7.28	8.60	5.00
3	5	2	3.00	0.00	3.16	5.10	1.41	4.24	5.83	6.08	7.62	7.07	7.28	3.16
2	2	3	6.08	3.16	0.00	2.00	2.83	7.21	4.47	7.28	10.00	8.94	8.06	4.47
2	0	4	8.06	5.10	2.00	0.00	4.47	8.94	4.00	8.06	11.31	10.00	8.54	8.00
4	4	5	4.12	1.41	2.83	4.47	0.00	4.47	4.47	5.00	7.21	6.32	6.08	7.21
6	8	6	3.00	4.24	7.21	8.94	4.47	0.00	8.00	5.00	4.00	4.47	6.40	8.94
6	0	7	8.54	5.83	4.47	4.00	4.47	8.00	0.00	5.00	8.94	7.21	5.00	4.00
9	4	8	7.21	6.08	7.28	8.06	5.00	5.00	0.00	4.12	4.12	2.24	1.41	4.12
10	8	9	7.00	7.62	10.00	11.31	7.21	4.00	8.94	4.12	0.00	2.00	5.00	8.00
10	6	10	7.28	7.07	8.94	10.00	6.32	4.47	7.21	2.24	2.00	0.00	3.00	6.00
10	3	11	8.60	7.28	8.06	8.54	6.08	6.40	5.00	1.41	5.00	3.00	0.00	3.00
10	0	12	10.63	8.60	8.25	8.00	7.21	8.94	4.00	4.12	8.00	6.00	3.00	4.12
6	4	13	5.00	3.16	4.47	5.66	2.00	4.00	4.00	3.00	5.66	4.47	4.12	5.66

Figure 3: Distâncias entre todos os vértices do mapa.

### 2.3 Função objetivo

Minimização do comprimento das arestas a adicionar.

$$\min : \sum_{i,j \in V} d_{ij} \times x_{ij}, i < j$$

## 2.4 Restrições

Cada vértice apenas deve fazer parte de uma aresta.

$$\forall i \in V : \sum x_{ij} = 1, j \in V, i < j$$

```

1  File Edit Search Action View Options Help
2
3  [Source] [Objective] [Options] [Reset]
4
5  1 /* Objective function */
6  2 min: x12 + 6.08 x13 + 8.06 x14 + 4.12 x15 + 3.00 x16 + 8.54 x17 + 7.00 x19 + 7.28 x1a + 8.60 x1b + 10.63 x1c + 5.00 x1d +
7      3.16 x123 + 5.10 x24 + 1.41 x25 + 4.24 x26 + 5.83 x27 + 7.62 x29 + 7.07 x2a + 7.28 x2b + 8.60 x2c + 3.16 x23 +
8      2 x34 + 2.03 x35 + 7.21 x36 + 4.47 x37 + 10.00 x39 + 8.94 x3a + 8.06 x3b + 8.25 x3c + 4.47 x3d +
9      4.47 x35 + 8.94 x36 + 4.00 x37 + 11.31 x39 + 10.0 x3a + 8.54 x3b + 8.00 x3c + 5.66 x3d +
10     4.47 x36 + 4.47 x37 + 7.21 x35 + 6.32 x3a + 6.08 x3b + 7.21 x3c + 2.00 x3d +
11     8.00 x37 + 4.00 x39 + 4.60 x3a + 6.40 x3b + 8.94 x3c + 4.00 x3d +
12     8.94 x39 + 7.21 x3a + 5.00 x3b + 8.00 x3c + 4.00 x3d +
13     2.00 x3a + 5.00 x3b + 3.00 x3c + 6.00 x3d + 4.47 x3d +
14     3.00 x3b + 4.12 x3d + 5.66 x3d;
15
16 17 /* Variable bounds */
18
19 V1: x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x19 + x1a + x1b + x1c + x1d = 1;
20 V2: x12 + x23 + x24 + x25 + x26 + x27 + x29 + x2a + x2b + x2c + x23 = 1;
21 V3: x13 + x23 + x34 + x35 + x36 + x37 + x39 + x3a + x3b + x3c + x3d = 1;
22 V4: x14 + x24 + x34 + x45 + x46 + x47 + x39 + x4a + x4b + x4c + x4d = 1;
23 V5: x15 + x25 + x35 + x45 + x56 + x57 + x59 + x5a + x5b + x5c + x5d = 1;
24 V6: x16 + x26 + x36 + x46 + x56 + x67 + x68 + x5a + x6b + x6c + x6d = 1;
25 V7: x17 + x27 + x37 + x47 + x57 + x67 + x79 + x7a + x7b + x7c + x7d = 1;
26 V8: x19 + x29 + x39 + x49 + x59 + x69 + x79 + x8a + x9b + x5c + x9d = 1;
27 V9: x1a + x2a + x3a + x4a + x5a + x6a + x7a + x8a + x9a + xab + xac + xad = 1;
28 V10: x1b + x2b + x3b + x4b + x5b + x6b + x7b + x8b + x9b + xab + xbc + xbd = 1;
29 V10: x1c + x2c + x3c + x4c + x5c + x6c + x7c + x8c + x9c + xac + xbc + xcd = 1;
30 V10: x1d + x2d + x3d + x4d + x5d + x6d + x7d + x8d + x9d + xbd + xcd + xcd = 1;
31
32 bin x12, x13, x14, x15, x16, x17, x19, x1a, x1b, x1c, x1d, x23, x24, x25,
33 x26, x27, x29, x2a, x2b, x2c, x2d, x34, x35, x36, x37, x39, x3a, x3b, x3c,
34 x3d, x45, x46, x47, x49, x4a, x4b, x4c, x4d, x56, x57, x59, x5a, x5b, x5c,
35 x5d, x67, x69, x6a, x6b, x6c, x6d, x79, x7a, x7b, x7c, x7d, x8a, x8b, x8c,
36 x8d, x9a, x9b, x9c, x9d, x9b, x9c, x9d;

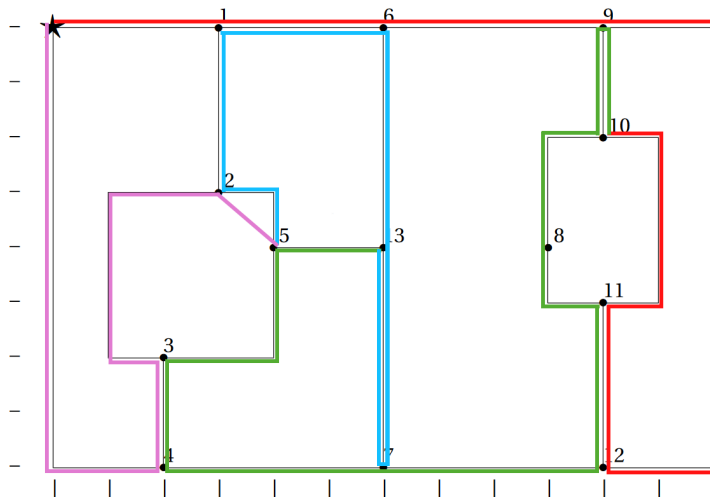
```

Figure 4: Ficheiro de input no LPSolve IDE.

### 3 Solução ótima

Depois de introduzir o modelo do problema no *LPSolve*, chegamos a uma aparente solução ótima, onde são criadas arestas a unir os vértices 1 ao 6, o 2 ao 5, o 3 ao 4, o 7 ao 13, o 9 ao 10 e o 11 ao 12, com um comprimento total de 15,41.





Dentro desta solução temos dois possíveis percursos. No primeiro o drone percorre a linha vermelha, depois a linha verde, depois a linha azul e por fim a linha rosa. O outro percurso possível é o inverso deste.

## 4 Validação do modelo

$N$	1	2	3	4	5	6	7	9	a(10)	b(11)	c(12)	d(13)	sum
1	V1:	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
2	V2:	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
3	V3:	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	V4:	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
5	V5:	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
6	V6:	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	V7:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
9	V9:	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
a(10)	Va:	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
b(11)	Vb:	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
c(12)	Vc:	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
d(13)	Vd:	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Hipoteticamente também poderia existir uma solução onde adicionávamos mais que uma aresta por vértice, desde que os vértices permanecessem com grau par continuaria a ser uma solução válida, mas não seria ótima. Para o provar voltamos a correr o nosso modelo no LPSolve, mas trocando o '=' das restrições por ' $\geq$ ', e como agora podemos adicionar mais que um vértice a cada aresta devemos também adicionar o vértice 8. Isto não garante que todos os vértices passem a ser de grau par, mas o que queremos comprovar com este exemplo é que a solução obtida anteriormente é ótima, e é precisamente isso que concluímos, pois o resultado deste novo modelo é exatamente o mesmo. Isto significa que, mesmo que pudéssemos

adicionar mais que uma aresta a cada vértice, na solução ideal continuaríamos a adicionar apenas um, logo a nossa restrição no modelo original é válida.

1	/* Objective function */
2	min: 3 x12 + 6.08 x13 + 8.06 x14 + 4.12 x15 + 3.00 x16 + 8.54 x17 + 7.00 x19 + 7.28 x1a + 8.60 x1b + 10.63 x1c + 5.00 x1d +
3	3.16 x23 + 5.10 x24 + 1.41 x25 + 4.24 x26 + 5.83 x27 + 7.62 x29 + 7.07 x2a + 7.28 x2b + 8.60 x2c + 3.16 x2d +
4	2 x34 + 2.83 x35 + 7.21 x36 + 4.47 x37 + 10.00 x39 + 8.94 x3a + 8.06 x3b + 8.25 x3c + 4.47 x3d +
5	4.47 x45 + 8.94 x46 + 4.00 x47 + 11.31 x49 + 10.0 x4a + 8.54 x4b + 8.00 x4c + 5.66 x4d +
6	4.47 x56 + 4.47 x57 + 7.21 x59 + 6.32 x5a + 6.08 x5b + 7.21 x5c + 2.00 x5d +
7	8.00 x67 + 4.00 x69 + 4.47 x6a + 6.40 x6b + 8.94 x6c + 4.00 x6d +
8	8.94 x79 + 7.21 x7a + 5.00 x7b + 4.00 x7c + 4.00 x7d +
9	2.00 x9a + 5.00 x9b + 8.00 x9c + 5.66 x9d +
10	3.00 xab + 6.00 xac + 4.47 xad +
11	3.00 xbc + 4.12 xbd +
12	5.66 xcd +
13	7.21 x81 + 6.08 x82 + 7.28 x83 + 8.06 x84 + 5 x85 + 5 x86 + 5 x87 + 4.12 x89 + 2.24 x8a + 1.41 x8b + 4.12 x8c + 3 x8d;
14	
15	/* Variable bounds */
16	
17	V1: x12 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x19 + x1a + x1b + x1c + x1d + x81 >= 1;
18	V2: x12 + x23 + x24 + x25 + x26 + x27 + x29 + x2a + x2b + x2c + x2d + x82 >= 1;
19	V3: x13 + x23 + x34 + x35 + x36 + x37 + x39 + x3a + x3b + x3c + x3d + x83 >= 1;
20	V4: x14 + x24 + x34 + x45 + x46 + x47 + x49 + x4a + x4b + x4c + x4d + x84 >= 1;
21	V5: x15 + x25 + x35 + x45 + x56 + x57 + x59 + x5a + x5b + x5c + x5d + x85 >= 1;
22	V6: x16 + x26 + x36 + x46 + x56 + x67 + x69 + x6a + x6b + x6c + x6d + x86 >= 1;
23	V7: x17 + x27 + x37 + x47 + x57 + x67 + x79 + x7a + x7b + x7c + x7d + x87 >= 1;
24	V8: x19 + x39 + x49 + x59 + x69 + x79 + x89 + x8a + x8b + x8c + x8d >= 1;
25	V9: x19 + x29 + x39 + x49 + x59 + x69 + x79 + x89 + x8a + x8b + x8c + x8d >= 1;
26	Va: x1a + x2a + x3a + x4a + x5a + x6a + x7a + x8a + xab + xac + xad + x8a >= 1;
27	Vb: x1b + x2b + x3b + x4b + x5b + x6b + x7b + x8b + xab + xbc + xbd + x8b >= 1;
28	Vc: x1c + x2c + x3c + x4c + x5c + x6c + x7c + x8c + xac + xbc + xcd + x8c >= 1;
29	Vd: x1d + x2d + x3d + x4d + x5d + x6d + x7d + x8d + xad + xbd + xcd + x8d >= 1;
30	
31	bin x12, x13, x14, x15, x16, x17, x19, x1a, x1b, x1c, x1d, x23, x24, x25,
32	x26, x27, x29, x2a, x2b, x2c, x2d, x34, x35, x36, x37, x39, x3a, x3b, x3a,
33	x3d, x45, x46, x47, x49, x4a, x4b, x4c, x4d, x56, x57, x59, x5a, x5b, x5c,
34	x5d, x67, x69, x6a, x6b, x6c, x6d, x79, x7a, x7b, x7c, x7d, x9a, x9b, x9c,
35	x9d, xab, xac, xad, xbc, xbd, xcd, x81, x82, x83, x84, x85, x86, x87, x89,
36	x8a, x8b, x8c, x8d;

Variables	MILP ...	result
	15.41	15.41
x16	1	1
x25	1	1
x34	1	1
x76	1	1
x7d	1	1
x9a	1	1
xbc	1	1
x12	0	0
x13	0	0
x14	0	0

Figure 9: Modelo alternativo, onde podemos ligar mais que uma aresta a cada vértice, e respectiva solução.