Instituto Superior
de Engenharia
Politécnico de Coimbra

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E SISTEMAS

Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Ordinárias e Problemas de Valor Inicial

Relatório de Licenciatura

Autores

Ana Rita Conceição Pessoa – 2023112690

João Francisco de Matos Claro – 2017010293

INSTITUTO POLITÉCNICO
DE COIMBRA

INSTITUTO SUPERIOR
DE ENGENHARIA
DE COIMBRA

Coimbra, março e 2024

1 ÍNDICE

1.1 Índice de texto

1 Índice ... 1
1.1 Índice de texto ... 1
1.2 Índice de figuras, quadros e afins ... 2
2 Lista de siglas, acrónimos e símbolos ... 3
2.1 Lista de siglas e acrónimos ... 3
2.2 Lista de símbolos ... 3
2.2.1 Exemplos de listas de símbolos ... 3
3 Introdução ... 4
3.1 Equação diferencial: definição e propriedades ... 5
3.2 Definição de Problema de Valor Inicial ... 6
4 Métodos Numéricos para resolução de PVI ... 7
4.1 Método de Euler ... 7
4.1.1 Fórmulas e Resolução ... 7
4.1.2 Algoritmo/Função ... 8
4.2 Método de Euler Melhorado ou Modificado ... 9
4.2.1 Fórmulas ... 9
4.2.2 Algoritmo/Função ... 9
4.3 Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem ... 11
4.3.1 Fórmulas ... 11
4.3.2 Algoritmo/Função ... 11
4.4 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem ... 13
4.4.1 Fórmulas ... 13
4.4.2 Algoritmo/Função ... 14
4.5 Função ODE45 do Matlab ... 15
4.5.1 Fórmulas ... 15
4.5.2 Algoritmo/Função ... 15
4.6 Método de Adams-Bashforth ... 16

4.6.1 Fórmulas ... 16
4.6.2 Algoritmo/Função ... 16
5. Exercício 3 do Teste Farol ... 18
5.1 Exercício 3 do Teste Farol ... 18
5.1.1 PVI - Equação Diferencial de 1ª ordem e Condições Iniciais ... 18
5.1.2 Exemplos de output - App com gráfico e tabela ... 23
5.2 Problemas de aplicação do livro ... 24
5.2.1 Modelação matemática do problema ... 24
5.2.2 Resolução através da App desenvolvida ... 27
5.3 Problemas de aplicação da alínea 2.b do teste Farol ... 29
5.3.1 Modelação matemática do problema ... 29
5.3.2 Resolução através da App desenvolvida ... 30
6. Conclusão ... 31
7. Bibliografia ... 31
8. Autoavaliação e heteroavaliação do trabalho submetido ... 32

1.2 Índice de figuras, quadros e afins

Figura 1 – Figuras do exercício 3 do Teste Farol ... 22
Figura 2 – Respostas ao Exercício 1 de Problemas de Aplicação do Livro ... 27
Figura 3 - Respostas ao Exercício 2 de Problemas de Aplicação do Livro ... 28
Figura 4 – Resolução do exercício 2. b) do Teste Farol ... 30

Tabela 1 - Exercício 3 do Teste Farol ... 19

Tabela 2 - Exercício 2 de Problemas de Aplicação do Livro ... 25

2 LISTA DE SIGLAS, ACRÓNIMOS E SÍMBOLOS

2.1 Lista de siglas e acrónimos

EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
PVI	Problemas de Valor Inicial
ED	Equação Diferencial
RK2	Runge-Kutta de Segunda Ordem
RK4	Runge-Kutta de Quarta Ordem

2.2 Lista de símbolos

2.2.1 Exemplos de listas de símbolos

As tabelas seguintes exemplificam as recomendações anteriormente descritas.

Alfabeto latino

ϵ	Representa "pertence a intervalo"
b	Termo do 1.º grau num polinómio do segundo grau representado na forma canónica
c	Termo independente num polinómio do segundo grau representado na forma canónica
v	Velocidade
ft	Feet
s	Segundos
m	Massa
A	Área
cm	Centímetros
i	Intensidade
R	Resistência
L	Indutância
H	Henry

Alfabeto grego

Δ	Diferença ou variação entre dois valores
$\sum$	Soma dos termos da série
β	Representa os coeficientes
∂	Derivada parcial
Ω	Ohm

3 INTRODUÇÃO

Este trabalho, desenvolvido no âmbito da unidade curricular de Análise Matemática II, tem como objetivo principal a aquisição e aprofundamento de conhecimentos adquiridos referentes aos métodos numéricos à resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Problemas de Valor Inicial (PVI), assim como na linguagem de programação Matlab.

No decorrer deste relatório, serão abordados os temas propostos no enunciado, examinando conceitos como EDO, PVI e os diferentes métodos e fórmulas para a sua resolução, os quais serão acompanhados pelos respetivos códigos implementados em Matlab.

3.1 Equação diferencial: definição e propriedades

As equações diferencias são equações que envolvem uma função incógnita e uma ou mais das suas derivadas (ou diferenciais).

A resolução das equações diferencias pode ser feita a partir de vários métodos desde os analíticos, como a separação de variáveis, até aos numéricos, como o método de Euler para aproximar as soluções.

Propriedades equação diferencial, dependendo das suas características:

- **Tipo**: Uma equação diz-se **ordinária** se a função incógnita depender apenas de um variável e de **derivadas parciais** se depender de duas ou mais variáveis.

Exemplo de uma equação ordinária:

$L\frac{dI(t)}{dx} + R\frac{dQ(t)}{dx} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t)$

Exemplo de uma equação com derivadas parciais:

$\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial y^2}{\partial v^2} = 0$ → Equação de Laplace

- **Linearidade**: Chama-se equação **diferencial linear de ordem *n*** a uma equação da forma:

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_n(x)y^{(n)} = b(x)$$

A definição acima permite observar que uma equação é linear se se verificarem as seguintes condições:

- A incógnita e as suas derivadas têm expoente um;

- Não há produto entre a incógnita e as suas derivadas ou entre derivadas;

- Não há funções transcendentes que envolvam a incógnita ou as suas derivadas.

Uma equação é dita transcendente quando não pode ser expressa por uma combinação finita de operações algébricas.

- **Ordem**: A ordem de uma equação diferencial é o grau mais alto das derivadas que aparecem na equação.

Por exemplo, a equação $\frac{d^2 2y}{dx^2+3y} = 0$ tem grau 2.

3.2 Definição de Problema de Valor Inicial

Um Problema de Valor Inicial (PVI) ou problema de Cauchy é um tipo específico de problema associado a equações diferenciais, onde o objetivo é encontrar uma solução que satisfaça a equação diferencial, sujeita a uma condição inicial que estipula o valor da solução num ponto específico. Esta condição inicial é geralmente expressa como uma equação ou relação que define o valor da solução num ponto denominado ponto inicial. A solução obtida é considerada válida para todo o domínio onde a equação diferencial é definida.

À solução única do problema de valor inicial, chama-se solução particular.

Por exemplo,

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ t \,\epsilon\, [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Neste problema, a equação diferencial (ED) é $y' = f(t, y)$, o intervalo pretendido é $t \,\epsilon\, [a, b]$ e a condição inicial (valor inicial) $y(a) = y_0$.

4 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLUÇÃO DE PVI

4.1 Método de Euler

O Método de Euler ou Método da Reta Tangente é um método numérico utilizado para resolver Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem com valor inicial dado. Para determinarmos a solução definimos passos e intervalos, de modo a determinar retas tangentes aproximadas.

Embora o Método de Euler seja simples e fácil de implementar, pode gerar estimativas imprecisas da solução, especialmente se o tamanho dos intervalos for grande. Contudo, é uma ferramenta fundamental para a compreensão de outros métodos numéricos mais precisos para a resolução de EDO.

4.1.1 Fórmulas e Resolução

O Método de Euler para resolver um PVI é dado pela seguinte equação:

$$y_{i+1} = y_i + \mathrm{h} \times f(t_i, y_i)\,, \quad \mathrm{i} = 0,1,2,\ldots,\mathrm{n}-1 \qquad (1)$$

Onde:

- y_{i+1}→ Próximo valor aproximado da solução do problema inicial (na abcissa t_{i+1});
- y_0 → Valor aproximado da solução do problema inicial na abcissa atual;
- h → Valor de cada intervalo (passo);
- $f\ (t_i, y_i)$ → Valor da equação em cada instante i nos pontos t e y .

4.1.2 Algoritmo/Função

1. Definir o tamanho de passo que determinará a distância entre os pontos onde a solução será aproximada.

2. Definir o valor inicial para o problema

3. Para cada passo i de t

   a) Calcular a derivada da função desconhecida $\mathrm{f}(t_i,\ y_i)$ no ponto atual $(t_i,\ y_i)$

   b) Utilizar a derivada calculada para estimar a mudança na variável dependente: $\Delta y\ =\ h \times f(t_i,\ y_i)$.

   c) Calcular a próxima aproximação da solução: $y_{i+1}\ =\ y_i\ +\ \Delta y$

   d) Atualize a variável independente: $t_{i+1}\ =\ t_i\ +\ h$

4. Repetir o passo 3 até alcançar o ponto final desejado ou até que o número de passos determinado seja atingido.

Função (MatLab):

```
%NEULER Método de Euler para ED/PVI.

%   y = NEuler (f, a, b, n, y0) Método numérico para a resolução de um PVI
%   y'= f(t,y) com t=[a, b] e y(a)=y0 condição inicial

%INPUT:
%   f - função do 2.º membro da Equação Diferencial
%   [a, b] - extremos do intervalo da variável independente t
%   n - número de subintervalos ou iterações do método
%   y0 - condição inicial t=a -> y=y0

%OUTPUT:
%   y - vector das soluções aproximações
%   y(i+1) = y(i)+h*f(t(i), y(i)) , i =0,1,...,n-1
%
% Autores: Arménio Correia  | armenioc@isec.pt
%          Ana Rita Conceição Pessoa .: a2023112690@isec.pt
%          João Francisco de Matos Claro .: a21270422@isec.pt
%
%   02/04/2024
function y = NEuler (f, a, b, n, y0)

h = (b-a)/n;
t = a:h:b;

y = zeros(1, n);
y(1) = y0;

for i = 1:n
    y(i+1) = y(i)+h*f(t(i), y(i));
end
```

4.2 Método de Euler Melhorado ou Modificado

O Método de Euler Melhorado é uma versão aprimorada do Método de Euler para resolver equações diferenciais ordinárias com problemas de valor inicial. Vai permitir calcular uma média ponderada das inclinações em cada ponto para obter uma solução mais precisa do que o Método de Euler original. Esta abordagem reduz o erro de truncamento local (diferença entre o valor exato e o valor aproximado obtido), resultando em resultados mais precisos.

4.2.1 Fórmulas

O Método de Euler Melhorado ou Modificado para resolver um PVI é dado pela seguinte equação:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \times f(t_i, y_i) + h \times f(t_i, y_i), \quad \mathrm{i} = 0,1,2, \dots, \mathrm{n} - 1 \qquad (2)$$

Onde:

- y_{i+1}→ Próximo valor aproximado da solução do problema inicial (na abcissa $t_i + 1$);
- y_i → Valor aproximado da solução do problema inicial na abcissa atual;
- h → Valor de cada intervalo (passo);

4.2.2 Algoritmo/Função

1. Definir o passo h;
2. Criar um vetor y para guardar a solução;
3. Atribuir o primeiro valor de y (condição inicial) do PVI;
4. Cálculo da inclinação no início do intervalo;
5. Cálculo da inclinação no fim do intervalo;
6. Cálculo da média das inclinações;
7. Cálculo do valor aproximado para a i -ésima iteração.

Função (MatLab):

```
% EULER MELHORADO - Método de Euler melhorado/Modificado para PVI
% y = EulerMelhorado(f,a,b,n,y0) Método numérico para a resolução de um PVI
% y' = f(t,y), Equação Diferencial
% t = [a,b]
% y(a) = y0, cI (condição inicial)
%
%INPUTS:
% f - função do 2.º membro da Equação Diferencial
% [a,b] - extremos do intervalo da variável independente t
% n - número de subintervalos ou iterações do método
% y0 - condição inicial t=a -> y=y0
%
%OUTPUTS:
% y - vetor das aproximações discretas da solução exata
% y(i+1) = y(i)+(h/2)*(f(t(i),y(i))+h*f(t(i),y(i))), i = 0,1,2,...,n-1
%
% Trabalho realizado por:
% Ana Rita Conceição Pessoa - 2023112690
% João Francisco de Matos Claro - 2017010293
function [t, y] = NEulerMelhorado(f,a,b,n,y0)
h = (b-a)/n;
t = a:h:b;

y = zeros(1,n+1);
y(1) = y0;

for i=1:n
      y(i+1) = y(i)+(h/2)*(f(t(i),y(i))+h*f(t(i),y(i)));
end
```

4.3 Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem

O Método de Runge-Kutta de segunda ordem (RK2) é um método numérico para resolver equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com um problema de valor inicial. Ele envolve calcular duas inclinações da solução em pontos diferentes e usar uma média ponderada delas para atualizar a solução.

É mais eficiente que o Euler porque fornece resultados mais precisos.

4.3.1 Fórmulas

O Método de RK2 para resolver um PVI é dado pela seguinte equação:

$k_1 = h \times f(t_i, y_i);$

$k_2 = h \times f(t_{i+1}, y_i + k_1);$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad \mathrm{i} = 0,1,2,\dots,\mathrm{n}-1 \qquad \textbf{(3)}$$

Onde:

- y_{i+1} → Próximo valor aproximado da solução do problema inicial (na abcissa);
- y_i → Valor aproximado da solução do problema inicial na abcissa atual;
- t_i → Valor da abcissa atual;
- k_2 → Inclinação no fim do intervalo;
- h → Tamanho de cada intervalo (passo);
- k_1 → Inclinação no início do intervalo.

4.3.2 Algoritmo/Função

Algoritmo:

1. Definir o passo h;
2. Criar um vetor y para guardar a solução;
3. Atribuir o primeiro valor de y (condição inicial) do PVI;
4. Cálculo da inclinação no início do intervalo;
5. Cálculo da inclinação no fim do intervalo;
6. Cálculo da média das inclinações;
7. Cálculo do método de RK2 para a iésima iteração.

Função (MatLab):

```
%   RK2 - Método de Runge-Kutta de ordem 2

%   y = RK2(f,a,b,n,y0) Método numérico para a resolução de um PVI
%   y' = f(t,y), Equação Diferencial
%   t = [a,b]
%   y(a) = y0, cI (condição inicial)

%INPUTS:
%   f - função do 2.º membro da Equação Diferencial
%   [a,b] - extremos do intervalo da variável independente t
%   n - número de subintervalos ou iterações do método
%   y0 - condição inicial t=a -> y=y0

%OUTPUTS:
%   y - vetor das aproximações discretas da solução exata
%   y(i+1) = y(i)+h*f(t(i)y(i)), i = 0,1,2,...,n-1
%
%   Trabalho realizado por:
%   Ana Rita Conceição Pessoa - 2023112690
%   João Francisco de Matos Claro - 2017010293
function y = RK2(f, a, b, n, y0)

h = (b-a) /n;
t = a:h:b;

y = zeros(1,n+1);
y(1) = y0;

for i=1:n

    k1 = h*f(t(i), y(i));
    k2 = h*f(t(i+1), y(i)+k1);

    y(i+1) = y(i)+(k1+k2)/2;
end
```

4.4 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

O Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem (RK4) é um método numérico para resolver EDO de primeira ordem com um PVI. Ele é mais preciso que o Método de RK2, mas requer mais cálculos. O RK4 usa a média ponderada de quatro inclinações calculadas em diferentes pontos para encontrar a solução. Isso torna o RK4 altamente preciso e confiável, mas é necessário ajustar o tamanho do passo de tempo para garantir resultados precisos. Em comparação com outros métodos, o RK4 é considerado o mais eficaz para resolver EDO. Ele não precisa calcular derivadas, apenas avalia a função em diferentes pontos.

4.4.1 Fórmulas

O Método de RK4 para resolver um PVI é dado pela seguinte equação:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad \mathrm{i} = 0,1,2,\ldots,\mathrm{n}-1 \tag{4}$$

Onde:

- y_{i+1}→ Próximo valor aproximado da solução do problema inicial (em $t_i +$ 1);
- y_i → Valor aproximado da solução do problema inicial na abcissa atual;
- h → Tamanho de cada intervalo (passo);

$$k_1 = h \times \mathrm{f}(t_i, y_i)$$

$$k_2 = h \times f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = h \times f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = h \times f(t_{i+1}, y_i + k_3)$$

- k_1 → Inclinação no início do intervalo;
- k_2 → Inclinação no ponto médio do intervalo;
- k_3 → Inclinação no ponto médio do intervalo;
- k_4 → Inclinação no final do intervalo

Média ponderada das inclinações:

$$\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

4.4.2 Algoritmo/Função

Algoritmo:

1. Definir e calcular o passo h;
2. Criar um vetor y para guardar a solução e atribuir $y(1) = y(0)$;
3. Atribuir o primeiro valor de y;
4. Cálculo da inclinação no início do intervalo;
5. Cálculo da inclinação no ponto médio do intervalo;
6. Cálculo de uma nova inclinação no ponto médio do intervalo;
7. Cálculo da inclinação no final do intervalo;
8. Cálculo do método RK4.

Função (MatLab):

```
%   RK4 - Método de Runge-Kutta de ordem 4

%   y = RK4(f,a,b,n,y0) Método numérico para a resolução de um PVI
%   y' = f(t,y), Equação Diferencial
%   t = [a,b]
%   y(a) = y0, cI (condição inicial)

%INPUTS:
%   f - função do 2.º membro da Equação Diferencial
%   [a,b] - extremos do intervalo da variável independente t
%   n - número de intervalos ou iterações do método
%   y0 - condição inicial t=a -> y=y0

%OUTPUTS:
%   y - vetor das aproximações discretas da solução exacta
%   y(i+1) = y(i)+h*f(t(i)y(i)), i = 0,1,2,...,n-1
%
%   Trabalho realizado por:
%   Ana Rita Conceição Pessoa - 2023112690
%   João Francisco de Matos Claro – 2017010293
function y = RK4(f,a,b,n,y0)

h = (b-a)/n;
t = a:h:b;

y = zeros(1,n+1);
y(1) = y0;

for i=1:n

    k1 = h*f(t(i),y(i));
    k2 = h*f(t(i)+(h/2),y(i)+(1/2)*k1);
    k3 = h*f(t(i)+(h/2),y(i)+(1/2)*k2);
    k4 = h*f(t(i)+(h/2),y(i)+(1/2)*k3);

    y(i+1) = y(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
end
```

4.5 Função ODE45 do Matlab

A função ODE45 é uma das funções nativas do MATLAB, e é baseada num método de Runge-Kutta.

4.5.1 Fórmulas

Para resolver um PVI com uma EDO de ordem 2, a função ODE45 pode ser chamada da seguinte forma:

$$[t, y] = ode45(f, \mathrm{t}, y_0) \quad \textbf{(5)}$$

Onde:

- t → Vetor das abcissas;
- f → Equação diferencial em t e em y;
- y_0→ Valor inicial do PVI (condição inicial).

4.5.2 Algoritmo/Função

1. Definir o passo h;
2. Aproximação através da função ODE45

Função (MatLab):

```
% N_ODE45  Método Númerico para resolver um PVI: Função ODE45 do MATLAB

%   y = N_ODE45(f,a,b,n,y0) Método numérico para a resolução de um PVI

%INPUTS:
%   f - Função da equação diferencial, em t e y
%   t - vetor dos pontos
%   y0 - Valor (condição) Inicial do PVI

%OUTPUTS:
%   y - vetor das soluções aproximadas
%   t - vetor dos pontos

%   Trabalho realizado por:
%   Ana Rita Conceição Pessoa - 2023112690
%   João Francisco de Matos Claro - 2017010293
h = (b-a)/n;
t = a:h:b;
[t,y] = ode45(f, t, y0);
```

4.6 Método de Adams-Bashforth

O Método de Adams-Bashforth é um método numérico para resolver EDO com PVI. Ele utiliza informações de pontos anteriores para estimar a solução no próximo ponto, através de uma fórmula polinomial. A ordem do método determina o grau desse polinómio. É amplamente utilizado pela sua simplicidade e facilidade de implementação, podendo ser estendido para ordens mais elevadas.

4.6.1 Fórmulas

A fórmula geral do Método de Adams-Bashforth de ordem k para estimar a solução no ponto t_{n+1}é:

$$y_{n+1} = y_n + \mathrm{h}\sum_{i=0}^{k-1} \beta_i f\,(t_{n-i}\,, y_{n-i}) \quad \mathrm{i} = 0,1,2,\ldots,\mathrm{n}-1 \qquad (6)$$

Onde:

- y_{n+1}→ Estimativa da solução no próximo ponto;
- y_n → Solução no ponto atual;
- h → Tamanho de cada subintervalo (passo);
- $f(t_{n-i}\,, y_{n-i})$→ Derivada da solução no ponto $(t_{n-i}\,, y_{n-i})$;
- β_i → Coeficientes determinados pelo método.

4.6.2 Algoritmo/Função

Algoritmo:

1. Definir o passo h;
2. Aproximar os primeiros pontos usando um método de passo único (como o método de Euler);
3. Usar a fórmula do Método de Adams-Bashforth para calcular o próximo ponto;
4. Repetir o passo 3 até alcançar o ponto final desejado.

Função (MatLab):

```
%AdamBashford  Método de Adams-Bashforth para ED/PVI.

%   y = AdamBashford(f,a,b,n,y0)
%   Método de 2 passos numérico para a resolução de um PVI
%   y'= f(t,y) com t=[a, b] e y(a)=y0 condição inicial

%INPUTS:
%   f - função do 2.º membro da Equação Diferencial
%   [a, b] - extremos do intervalo da variável independente t
%   n - número de subintervalos ou iterações do método
%   y0 - condição inicial t=a -> y=y0

%OUTPUTS:
%   y - vetor das soluções aproximações
%   y(i+2)=y(i+1)+(3/2)*f(t(i+1),y(i+1))-(1/2)*h*f(t(0),y(0)), i=1,2,...,n-1

% Autores: Arménio Correia  | armenioc@isec.pt
%          Ana Rita Conceição Pessoa .: a2023112690@isec.pt
%          João Francisco de Matos Claro .: a21270422@isec.pt
%
%   13/03/2024
function y = AdamBashford(f,a,b,n,y0)

h = (b-a)/n;
t = a:h:b;

y = zeros(1,n+1);
t(1) = a;
y(1) = y0;
% Usa o Método de Euler para estimar o segundo valor de y
y(2) = NEuler(f,a,a+h,n,y0);

% n-1 pontos pois calculamos i+2 a cada passo
for i=1:(n-1)
    y(i+2)=y(i+1)+(3/2)*f(t(i+1),y(i+1))-(1/2)*h*f(t(0),y(0));
End
```

5. Exercício 3 do Teste Farol

5.1 Exercício 3 do Teste Farol

5.1.1 PVI - Equação Diferencial de 1ª ordem e Condições Iniciais

3. Considere o problema de valor inicial $y' = -2ty,\ y(0) = 2, t \in [0, 1.5]$

(a) Verifique que $y(t) = 2e^{-t^2}$ é a solução exata do problema

É possível confirmar usando 2 métodos:

1º Método:

Sabemos que:

$y(0) = 2$

Então:

$y(0) = 2 \times 2e^{-t}$

$\Leftrightarrow y(0) = 2 \times 2e^{0}$

$\Leftrightarrow y(0) = 2$

Logo confirma-se que $y(t) = 2e^{-t^2}$ é solução do problema.

2ºMétodo

Sabemos que:

$y' = -2\text{ty}$

$(2e^{-t^2})' = -2t(2e^{-t^2})$

$\Leftrightarrow 2(-2e^{-t^2})' = -4te^{-t^2}$

$\Leftrightarrow -4te^{-t^2} = -4te^{-t^2}$

Logo confirma-se que $y(t) = 2e^{-t^2}$ é solução do problema.

(b) Complete a tabela seguinte e interprete os resultados obtidos. Para o preenchimento da coluna das aproximações de Euler, deve apresentar os cálculos das iterações da aplicação da fórmula do método de Euler.

Tabela 3 - Exercício 3 do Teste Farol

			Aproximações		Erros	
		$y(t_i)$	y_i	y_i	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$
i	t_i	**Exata**	**Euler**	**RK2**	**Euler**	**RK2**
0	**0**	**2**	2	2	**0**	**0**
1	0.5	**1.5576**	2	**1.5000**	0.4424	**0.0576**
2	**1**	0.7358	1	0.7500	0.2642	**0.0142**
3	**1.5**	**0.2108**	0	**0.3750**	0.2108	0.1642

Passo 01: Completar a coluna dos instantes de tempo

$\boldsymbol{t_{i+1} = t_i + h}$

Onde h é o passo do método

$h = t_3 - t_2$

$\Leftrightarrow h = 0.5$

Logo,

$t_1 = t_0 + h$

$\Leftrightarrow t_1 = 0 + 0.5$

$\Leftrightarrow t_1 = \mathbf{0.5}$

Passo 02: Completar a coluna dos valores da solução exata

$\mathrm{y}(t_2) = \mathrm{y}(1) = 2e^{-1} \approx \mathbf{0.7358}$

Passo 03: Completar a coluna do Método de Euler

Para $\mathbf{y(t_0)}$ → Sabemos que o valor pelo Método de Euler será igual ao seu valor da solução exata, então, $y_0 = \mathbf{2}$

Para $\mathbf{y(t_1)}$, $\boldsymbol{i} = \mathbf{0} \rightarrow y_1 = y_0 + h \times f(t_0, y_0)$
$\Leftrightarrow y_1 = y_0 + h \times (-2 \times t_0 \times y_0)$
$\Leftrightarrow y_1 = 2 + 0.5 \times (-2 \times 0 \times 2)$
$\Leftrightarrow y_1 = 2 + 0.5 \times (-2 \times 0 \times 2)$
$\Leftrightarrow y_1 = \mathbf{2}$

Para $\mathbf{y(t_2)}$, $\boldsymbol{i} = \mathbf{1} \rightarrow y_2 = y_1 + h \times f(t_1, y_1)$
$\Leftrightarrow y_2 = y_1 + h \times (-2 \times t_1 \times y_1)$
$\Leftrightarrow y_2 = 2 + 0.5 \times (-2 \times 0.5 \times 2)$
$\Leftrightarrow y_2 = 2 - 1$
$\Leftrightarrow y_2 = \mathbf{1}$

Para $\mathbf{y(t_3)}$, $\boldsymbol{i} = \mathbf{2} \rightarrow y_3 = y_2 + h \times f(t_2, y_2)$
$\Leftrightarrow y_3 = y_2 + h \times (-2 \times t_1 \times y_1)$
$\Leftrightarrow y_3 = 1 + 0.5 \times (-2 \times 1 \times 2)$
$\Leftrightarrow y_3 = 1 - 1$
$\Leftrightarrow y_3 = \mathbf{0}$

Passo 04: Completar a coluna do Método RK2

Sabemos que este método segue a fórmula:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad \mathrm{i} = 0,1,2,\ldots,\mathrm{n}-1$$

Onde:

$$k_1 = h \times \mathrm{f}(t_i, y_i)$$
$$k_2 = h \times f(t_{i+1}, y_i + k_1)$$

Para $\mathbf{y(t_0)}$

$\mathrm{y}(t_0) = \mathbf{2}$, É o valor dado no problema

Para $\mathbf{y(t_2)}$, $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}$

$k_1 = h \times \mathrm{f}(t_1, y_1)$
$\Leftrightarrow k_1 = h \times (-2 \times t_1 \times y_1)$
$\Leftrightarrow k_1 = 0.5 \times (-2 \times 1 \times 1.5000)$
$\Leftrightarrow k_1 = -1.5000$

$k_2 = h \times f(t_{1+1}, y_1 + k_1)$
$\Leftrightarrow k_2 = h \times (-2 \times t_2 \times (y_1 + k_1))$
$\Leftrightarrow k_2 = 0.5 \times (-2 \times 1 \times (1.5000 + (-1.5000)))$
$\Leftrightarrow k_2 = 0$

$$y_2 = y_1 + \frac{k_1 + k_2}{2}$$
$$\Leftrightarrow y_2 = 1.5000 + \frac{(-1.5000) + 0}{2}$$
$$\Leftrightarrow y_2 = \mathbf{0.7500}$$

Passo 05: Completar a coluna do Erro de Euler

Para $\mathbf{y}(\boldsymbol{t_1}),\ \boldsymbol{i} = \mathbf{1}$
$|\mathbf{y(ti)} - \mathbf{yi}|$
$= |\mathrm{y}(t_1) - y_1|$
$= |1.5576 - 2|$
$= \mathbf{0}.4424$

Para $\mathbf{y}(\boldsymbol{t_2}),\ \boldsymbol{i} = \mathbf{2}$
$|\mathbf{y(ti)} - \mathbf{yi}|$
$= |\mathrm{y}(t_2) - y_2|$
$= |0.7358 - 1|$
$= \mathbf{0}.2642$

Para $\mathbf{y}(\boldsymbol{t_3}),\ \boldsymbol{i} = \mathbf{3}$
$|\mathbf{y(ti)} - \mathbf{yi}|$
$= |\mathrm{y}(t_3) - y_3|$
$= |0.2108 - 0|$
$= \mathbf{0}.2108$

Passo 06: Completar a coluna do Erro de RK2

Para $\mathbf{y}(\boldsymbol{t_3}),\ \boldsymbol{i} = \mathbf{3}$
$|\mathbf{y(ti)} - \mathbf{yi}|$
$= |\mathrm{y}(t_3) - y_3|$
$= |0.2108 - 0.3750|$
$= \mathbf{0.1642}$

(c) Qual das figuras seguintes representa graficamente uma solução do PVI dado? Justifique a sua resposta

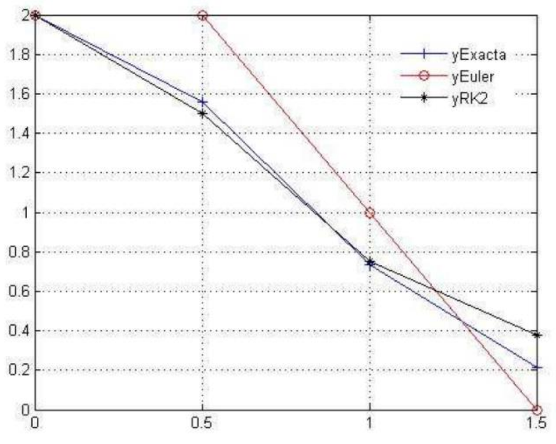


Figura 4

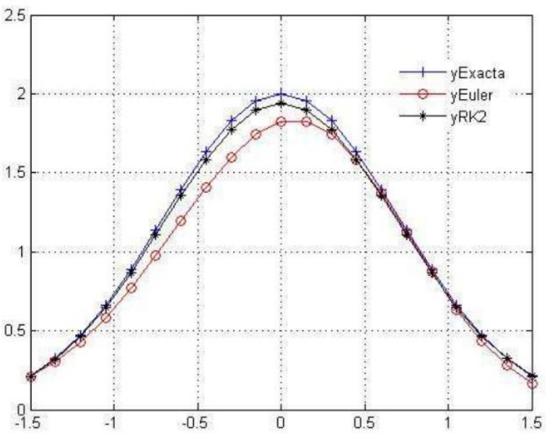


Figura 5

Figura 1 – Figuras do exercício 3 do Teste Farol

Vendo os instantes de tempo para a equação de Euler teremos de ter os seguintes pontos:

- (0, 2)
- (0.5, 1.5000)
- (1, 0.7500)
- (1.5, 0.3750)

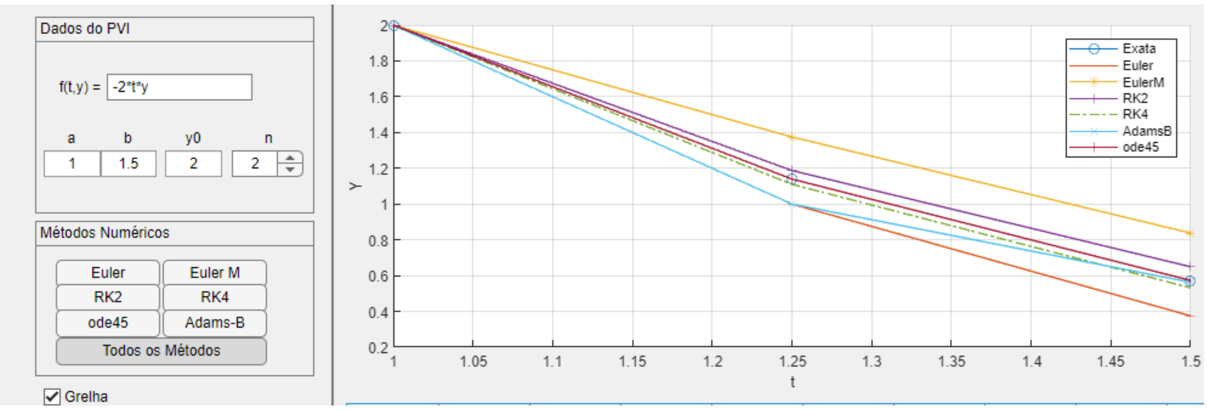
Observando ambos os gráficos concluímos que o gráfico da figura 4 é o correspondente.

(d) Estabeleça um PVI cuja solução em modo gráfico coincide com a figura que excluiu na alínea anterior.

O gráfico excluído na alínea anterior foi o da Figura 5.
Alterando o intervalo da condição inicial ficamos com:

$$\begin{cases} y' = -2ty \\ t \in [-1.5\,, 1.5] \\ y(-1.5) = 0.25 \end{cases}$$

5.1.2 Exemplos de output - App com gráfico e tabela



t	Exata	Euler	EulerM	RK2	RK4	AdamsB	ode45
1.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
1.2500	1.1396	1.0000	1.3750	1.1875	1.1103	1.0000	1.1396
1.5000	0.5730	0.3750	0.8379	0.6494	0.5316	0.5625	0.5730

erroEuler	erroEulerM	erroRK2	erroRK4	erroAdamsB	erroOde
0	0	0	0	0	0
0.1396	0.2354	0.0479	0.0293	0.1396	3.5083e-09
0.1980	0.2649	0.0764	0.0414	0.0105	8.4069e-09

Figura 2 – Gráficos e respetivos valores dos Métodos Numéricos aplicados ao Exercício 3 do Teste Farol

5.2 Problemas de aplicação do livro

5.2.1 Modelação matemática do problema

1. If air resistance is proportional to the square of the instantaneous velocity, then the velocity v of a mass m dropped from a given height is determined from

$$\boldsymbol{m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, k > 0}$$

Let $\boldsymbol{v(0) = 0, k = 0.125, m = 5\ slugs}$, and $\boldsymbol{g = 32\ \mathrm{ft/s^2}}$

(a) Use the RK4 method with $\boldsymbol{h = 1}$ to approximate the velocity $\boldsymbol{v(5)}$.

Tendo em conta os dados do enunciado, podemos representar o problema por:

$$\begin{cases} \boldsymbol{m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, k > 0} \\ \boldsymbol{t \in [0, 5]} \\ \boldsymbol{v(0) = 0} \end{cases}$$

Atendendo à transformação de u = y, podemos simplificar a equação diferencial:

$$m \times \frac{dv}{dt} = m \times g - k \times v^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k \times v^2}{m} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = g - \frac{k \times y^2}{m}, k > 0$$

Adicionando à restante informação dada no enunciado:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g - \frac{kv^2}{m}, k > 0 \\ m = 5\ slugs\ ft/s^2 \\ g = 32 \\ k = 0.125 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = 32 - \frac{0.125v^2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = 32 - 0.125v^2$$

$$\Leftrightarrow v' = 32 - 0.125v^2$$

Concluindo, ficamos com o seguinte PVI:

$$\begin{cases} v' = 32 - 0.125v^2 \\ t \in [0,5] \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

∴ Respondida no parâmetro 5.2.2

(b) Use a numerical solver to graph the solution of the IVP on the interval [0, 6].

∴ Respondida no parâmetro 5.2.2

(c) Use separation of variables to solve the IVP and then find the actual value $\boldsymbol{v(5)}$.

∴ Respondida no parâmetro 5.2.2

2. A mathematical model for the area A (in cm^2) that a colony of bacteria (*B. dendroides*) occupies is given by

$$\frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A)$$

Suppose that the initial area is 0.24 cm^2.

(a) Use the RK4 method with $h = 0.5$ to complete the following table

Tabela 4 - Exercício 2 de Problemas de Aplicação do Livro

T (days)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
A (observed)	**2.78**	**13.53**	**36.30**	**47.50**	**49.40**
A (approximated)	1.72	10.58	34.41	47.35	49.10

Tendo em conta os dados do enunciado, podemos representar o problema por:

$$\begin{cases} A' = A(2.128 - 0.0432A) \\ t \in [0,5] \\ A(0) = 0.24\ cm^2 \end{cases}$$

Adicionalmente, calculamos o valor de $\boldsymbol{n}$ através do valor dado de $\boldsymbol{h}$ para saber os valores dos espaços a serem preenchidos:

$$h = \frac{b-a}{n} \Leftrightarrow 1 = \frac{5-0}{n} \Leftrightarrow n = 5$$

∴ Os resultados apresentados na tabela acima foram observados na aplicação criada (ver parâmetro 5.2.2)

(b) Use a numerical solver to graph the solution of the initial-value problem. Estimate the values A(1), A(2), A(3), A(4), and A(5) from the graph.

∴ Respondida no parâmetro 5.2.2

(c) Use separation of variables to solve the initial-value problem and compute the actual values A(1), A(2), A(3), A(4), and A(5).

$$\frac{dA}{dt} = A(2.218 - 0.432A) \Leftrightarrow dA = A(2.218 - 0.432A)dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{A(2.218 - 0.432A)} dA = \int 1t$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{A}(2.218 - 0.432A) = \mathrm{t}$$

∴ Respondida no parâmetro 5.2.2

5.2.2 Resolução através da App desenvolvida

Exercício 1 – Resistência do Ar

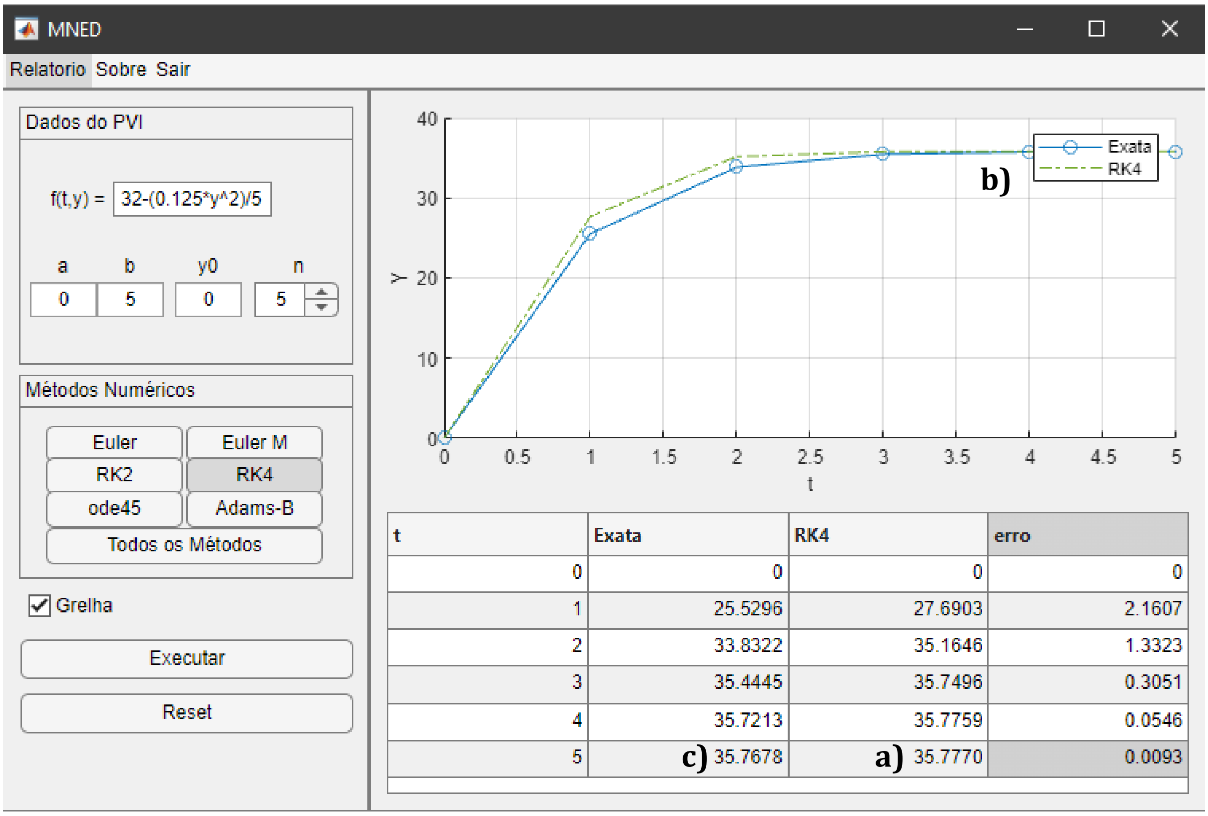


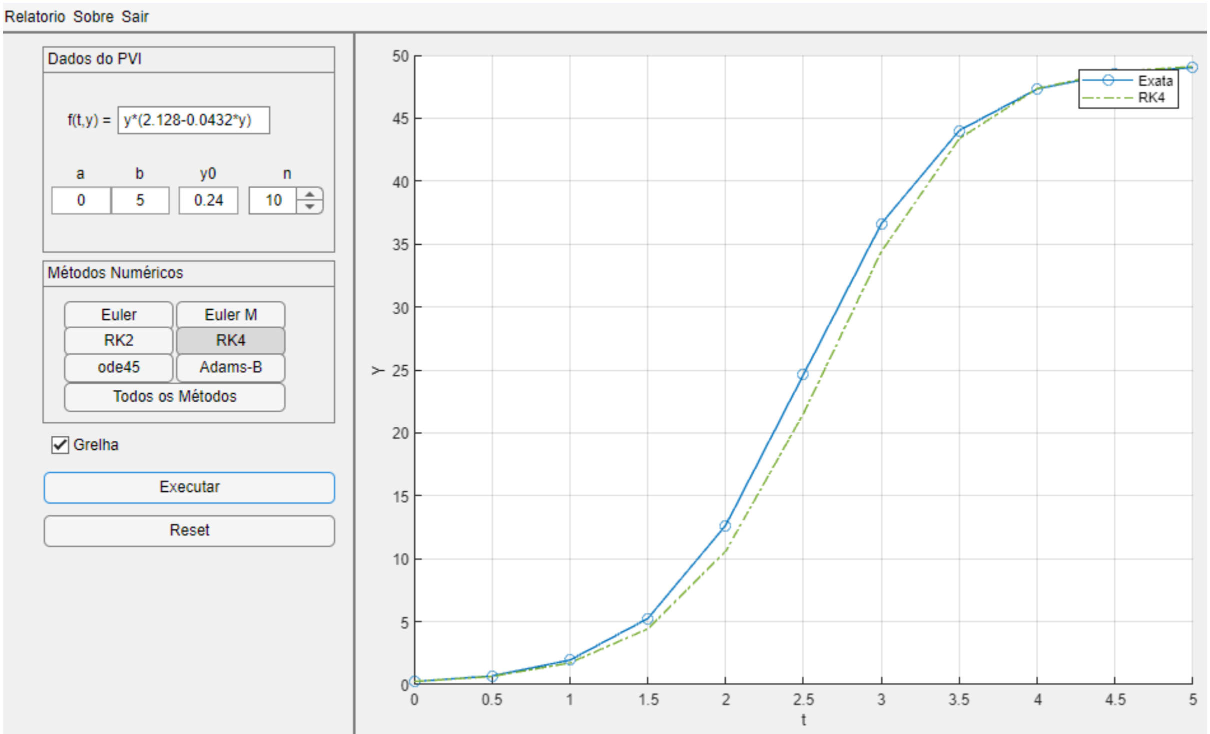
Figura 2 – Respostas ao Exercício 1 de Problemas de Aplicação do Livro

a) Aproximação pelo método RK4 da velocidade da massa em queda em t=5s

b) Gráfico da solução do PVI

c) Valor real de v (5)

Exercício 2 – Crescimento de colónias de bactérias



t	Exata Valores reais	RK4 Valores aproximados	erro
A(0) 0	0.2400	0.2400	0
0.5000	0.6891	0.6464	0.0427
A(1) 1.0000	1.9454	1.7199	0.2255
1.5000	5.2446	4.4334	0.8112
A(2) 2.0000	12.6436	10.5820	2.0616
2.5000	24.6379	21.5408	3.0971
A(3) 3.0000	36.6283	34.4076	2.2207
3.5000	44.0210	43.3767	0.6443
A(4) 4.0000	47.3164	47.3525	0.0361
4.5000	48.5710	48.6940	0.1230
A(5) 5.0000	49.0196	49.0967	0.0772

Figura 3 - Respostas ao Exercício 2 de Problemas de Aplicação do Livro

a) Valor aproximado de A pelo método RK4

b) Valores aproximados de A(1), A(2), A(3), A(4) e A(5)

c) Valores reais de A(1), A(2), A(3), A(4) e A(5)

5.3 Problemas de aplicação da alínea 2.b do teste Farol

5.3.1 Modelação matemática do problema

2. Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

(b) A força eletromotriz e de um circuito RL com intensidade i, resistência R=10 Ω(ohms) e indutância L = 0.5 H (henry), é igual à queda de tensão Ri mais a força eletromotriz de autoindução $\boldsymbol{L\frac{di}{dt}}$. Assim, a intensidade de corrente i, no instante t, se e t = 3sin(2) (em volts) e i = 6 quando t = 0 é dada pela solução particular $\boldsymbol{i(t) = \frac{609}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}sin2t + \frac{3}{101}cos2t}$. À medida que o tempo aumenta, o termo que envolve $\boldsymbol{e^{-20t}}$ perde influência no valor da intensidade da corrente. Diz-se que este termo é o termo do estado transitório e o outro é o termo do estado permanente.

Do enunciado podemos retirar a seguinte informação:

$$\boldsymbol{e = R \times i + L \times \frac{di}{dt}}$$

Sabendo que R=10, L=0.5 = $\frac{1}{2}$, e=3sin(2t) temos,

$$3\sin(2t) = 10i + \frac{1}{2} \times \frac{di}{dt}$$

Considerando o "y" como "i", e $\frac{di}{dt}$ é y' obtemos,

$\frac{1}{2} \times y' + 10i \ = 3\sin(2t)$ **OU** $y' + 20y \ = 6\sin(2t)$

Podemos concluir que é uma ED linear de 1ª Ordem com p(t)=20 e q(t)=6sin(2t).

Escrevendo a equação na forma

$y' = 6\sin(2t) - 20y$

Temos

$f(t, y) = 6\sin(2t) - 20y$

Compilando toda a informação obtida através dos cálculos e do enunciado, temos:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y' = 6\sin(2t) - 20y} \\ \boldsymbol{[0, b], b > 0} \\ \boldsymbol{y(0) = 6} \end{cases}$$

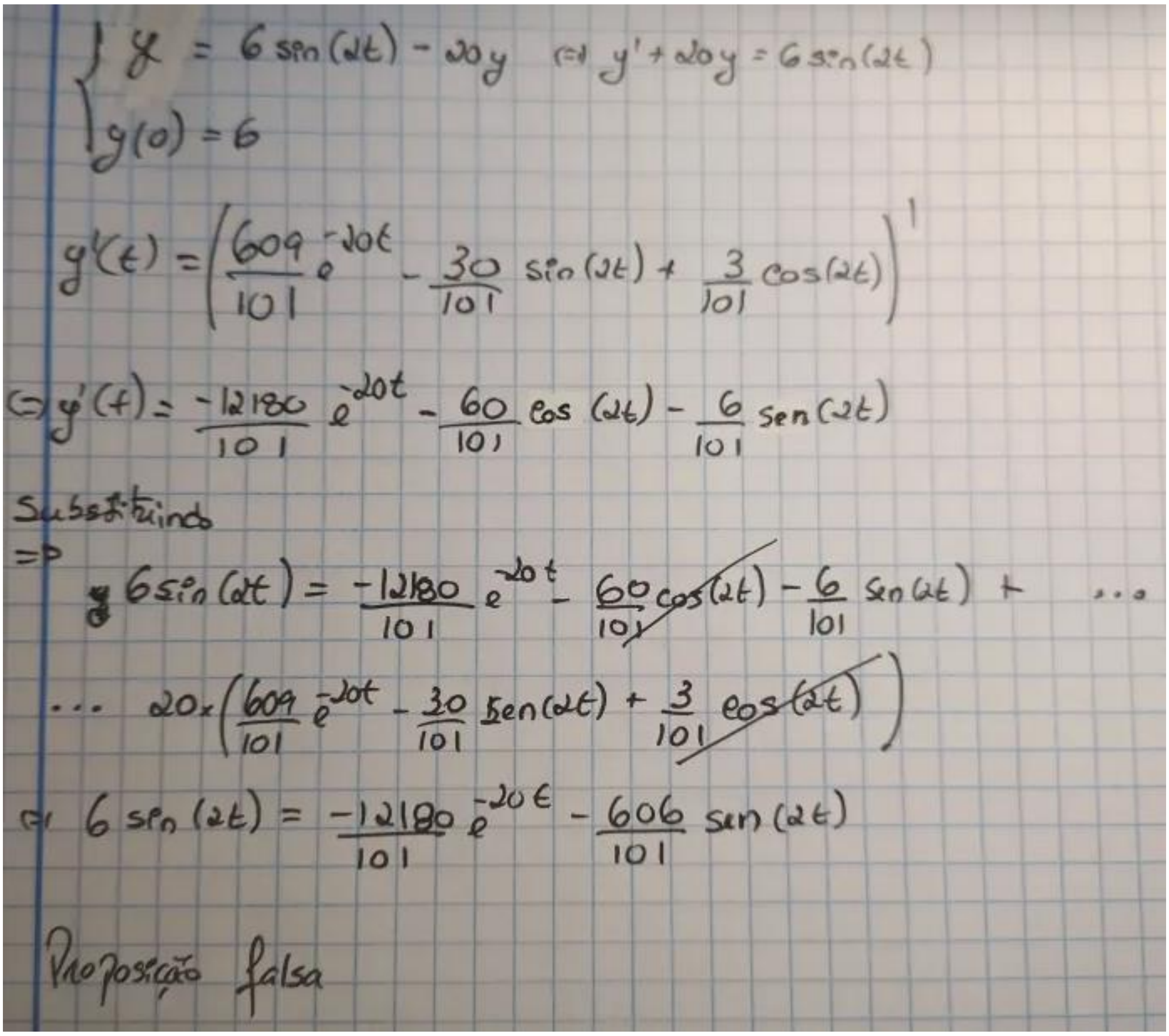


Figura 4 – Resolução do exercício 2. b) do Teste Farol

5.3.2 Resolução através da App desenvolvida

Como a proposição é falsa não é possível.

6. CONCLUSÃO

Concluímos que os métodos numéricos são valiosos na resolução de Problemas de Valor Inicial (PVI), especialmente em contextos reais e práticos, pois produzem aproximações com erros mínimos, dependendo do método utilizado. Uma regra geral observada é que quanto maior o número de subintervalos, menor será o erro dos métodos.

Ao comparar os métodos, notou-se que o método de Runge-Kutta de ordem 4 e o método usando a função ODE45 do MATLAB geralmente apresentam os menores erros, resultando numa maior proximidade com o valor exato. Em contraste, o método de Euler frequentemente produz erros significativamente maiores em comparação com os outros métodos explorados.

Além do conhecimento matemático adquirido, houve um desenvolvimento significativo no conhecimento de programação com MATLAB. Lidar com os desafios e limitações dessa linguagem de programação contribuiu para o aprimoramento do trabalho de pesquisa e resolução de problemas.

7. BIBLIOGRAFIA

[1] Contribuidores dos projetos da Wikimedia. (2007, 17 de dezembro). *Função transcendente – Wikipédia, a enciclopédia livre*. Wikipédia, a enciclopédia livre. https://pt.wikipedia.org/wiki/Função_transcendente

[2] Correia, A. (s.d.). *doc02_EDO_rascunho* [Imagem anexada] [Publicação]. https://moodle.isec.pt/moodle/mod/folder/view.php?id=253929

[3] Zill, D. (2017). *First Course in Differential Equations with Modeling Applications*. Blue Kingfisher.

8. AUTOAVALIAÇÃO E HETEROAVALIAÇÃO DO TRABALHO SUBMETIDO

Tendo em conta o que foi feito ao longo do trabalho e que o mesmo vale 5 valores, concluímos assim as seguintes auto e hétero avaliações:

Autoavaliação:

Ana Rita Conceição Pessoa – 4 valores

João Francisco de Matos Claro – 5 valores

Heteroavaliação:

Ana Rita Conceição Pessoa – 4 valores

João Francisco de Matos Claro – 5 valores

Instituto Superior
de Engenharia
Politécnico de Coimbra