БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра компьютерных технологий и систем

Е. С. Чеб

ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

**Методические указания и задания
для управляемой самостоятельной работы студентов
факультета прикладной математики
и информатики
по курсу “Функциональный анализ и интегральные
уравнения”**

**Минск
2022**

УДК 517()
ББК

Рекомендовано Ученым советом
факультета прикладной математики и информатики
00.00. 2022 г., протокол №

Р е ц е н з е н т
доктор физико-математических наук *Н. Н. Гринчик*

Чеб, Е. С.
Ч 11 Принцип сжимающих отображений : метод указания и задания к управляемой самост. работе / Е. С. Чеб. – Минск : БГУ, 2022. – с.

Содержатся задания для самостоятельных работ по теме “Принцип сжимающих отображений” по курсу “Функциональный анализ и интегральные уравнения”. Рассматривается принцип. В каждой теме приводится необходимый теоретический материал, примеры решения задач и набор задач для самостоятельных работ.

Предназначено для студентов факультета прикладной математики и информатики.

УДК 517()
ББК

ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятие неподвижной точки отображения одно из фундаментальных понятий функционального анализа. Вопрос существования и единственности неподвижной точки, связан с существованием и единственностью решений уравнений (например, алгебраических, дифференциальных, интегральных и т. д.). Наиболее простым критерием существования неподвижной точки отображения, порожденного уравнением, является принцип сжимающих отображений в полных пространствах.

В экономике считается, что цены поднимаются, если спрос превышает предложение, и растут тем сильнее, чем выше эксцесс спроса. Если описать этот процесс математически, получим уравнение вида

$$p_{t+1} = p_t + DE(p_t),$$

где $E(p_t)$ – эксцесс или избыток спроса (т. е. разница между спросом и предложением), D – диагональная матрица с неотрицательными коэффициентами. В этом случае неподвижная точка дает стационарные, неизменные по времени цены. Такие цены называются *равновесными.*

Таким образом, нас будут интересовать следующие вопросы:

1) Существуют ли неподвижные точки?
2) Сколько их, одна или несколько?
3) Устойчивость в каком нибудь смысле;
4) Как вычислить неподвижные точки точно или приближенно?

В приложениях часто приходится иметь дело с неподвижными точками многозначных отображений.

ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть в банаховом пространстве E действует отображение f.

Определение 1. Точка $x^* \in E$ называется *неподвижной точкой отображения* f, если

$$f(x^*) = x^*. \tag{1}$$

Таким образом, неподвижные точки f – это решения уравнения

$$x = f(x), \tag{2}$$

а поскольку к такому виду довольно часто удается преобразовать уравнение $F(x) = 0$, где F действует из банахова пространства X в банахово пространство Y, то важность определения неподвижных точек не вызывает сомнения.

Отображение f может и не иметь неподвижной точки. Например, отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$, где $a \neq 0$.

Среди отображений $f : E \to F$ выделим класс отображений специального вида.

Определение 2. Будем говорить, что отображение f является *сжимающим (сжатием)*, если существует константа $0 < \alpha < 1$ такая, что

$$||f(x) - f(y)||_E \leqslant \alpha \|x - y\|_E, \ \ \forall\, x, y \in E. \tag{3}$$

Число α в (3) называют *коэффициентом сжатия.*

Теорема 1 (принцип сжимающих отображений). *Пусть отображение f отображает замкнутое в банаховом пространстве E множество M в себя и является на M сжимающим с коэффициентом сжатия α. Тогда на множестве M отображение f имеет единственную неподвижную точку x^*, которая может быть найдена методом последовательных приближений*

$$x_n = f(x_{n-1}), n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где $(x_n) \subset M$ и $x_n \to x^*$ при $n \to \infty$. Кроме того, справедлива оценка скорости сходимости

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_0 - x_1\|. \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку $f(M) \subset M$, то $(x_n) \subset M$. Покажем, что последовательность x_n фундаментальна. Предварительно оценим для любого $k \in \mathbb{N}$ норму между соседними итерациями:

$$\|x_k - x_{k+1}\| = \|f(x_{k-1}) - f(x_k)\| \leqslant \alpha\|x_{k-1} - x_k\| \leqslant \ldots \leqslant \alpha^k\|x_0 - x_1\|.$$

Пусть $m > n$, пользуясь неравенством треугольника и формулой суммы геометрической прогрессии, получим

$$\begin{aligned}\|x_m - x_n\| &\leqslant \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \ldots + \|x_{m-1} - x_m\| \\ &\leqslant (\alpha^n + \ldots + \alpha^{m-1}) \cdot \|x_0 - x_1\| = \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1-\alpha}.\end{aligned} \tag{6}$$

Учитывая, что $0 < \alpha < 1$, получаем, что последовательность (x_m) – фундаментальна. Вследствие полноты E, последовательность в E сходится к некоторому элементу $x^* \in E$. Так как M замкнуто, то $x^* \in M$.

Докажем теперь, что x^* является неподвижной точкой отображения f. Из условия сжатия вытекает непрерывность и равномерная непрерывность отображения f. Перейдем в равенстве (4) к пределу при $n \to \infty$, получим $x^* = f(x^*)$.

Докажем, что x^* – единственная неподвижная точка на M. Пусть y^* – еще одна неподвижная точка на M, тогда $y^* = f(y^*)$. Оценим норму

$$0 \leqslant \|x^* - y^*\| = \|f(x^*) - f(y^*)\| \leqslant \alpha\|x^* - y^*\|.$$

Это неравенство возможно лишь при $\|x^* - y^*\| = 0$, откуда $x^* = y^*$.

Докажем оценку скорости сходимости. Для этого в неравенстве (6) перейдем к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_0 - x_1\|.$$

$\otimes$

Условие сжатия нельзя, вообще говоря, заменить на более слабое, например: $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$ для всех $x, y \in M$.

Пример 1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f(x) = |x| + \dfrac{1}{1+|x|}$. Видно, что отображение f не имеет неподвижной точки. Однако справедлива оценка

$$|f(x) - f(y)| = \left|\left(1 - (1+|x|)^{-1}(1+|y|)^{-1}\right)\right|(|x| - |y|) \leqslant |x - y|.$$

Отметим теперь, что наиболее часто принцип сжимающих отображений применяется в двух следующих случаях: $M = E$ – все пространство и $M = B[x_0, r_0]$. Сформулируем соответствующие утверждения в виде следствий из теоремы 1.

***Следствие** 1.* Пусть f отображает банахово пространство E само на себя и является сжатием. Тогда f имеет единственную неподвижную точку, которая может быть найдена методом последовательных приближений.

***Следствие** 2.* Пусть f определено на $B[a, r_0] \subset E$, E – банахово пространство. Пусть f является на $B[a, r_0]$ сжатием и выполнено условие $\|f(a) - a\| \leqslant (1-\alpha) r_0$. Тогда в шаре $B[a, r_0]$ существует единственная неподвижная точка отображения f, которая может быть найдена методом последовательных приближений.

Доказательство. Достаточно показать, что шар инвариантен относительно отображения f, т. е. $f(B[a,r_0]) \subset B[a,r_0]$. Действительно, пусть $x \in B[a, r_0]$, т. е. $\|x - a\| \leqslant r_0$, тогда

$$\|f(x) - a\| \leqslant \|f(x) - f(a)\| + \|f(a) - a\| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \|x - a\| + r_0(1-\alpha) \leqslant \alpha r_0 + r_0(1-\alpha) = r_0,$$

Это означает, что $f(x) \in B[a, r_0]$. ⊗

Теорема 1 фактически устанавливает единственность решения нелинейного уравнения, что сравнительно редко.

Замечание.

Метод последовательных приближений позволяет построить приближенное решение уравнения $x = f(x)$. Поскольку точное решение уравнения, как правило, неизвестно, то для организации итерационного процесса используют следующие оценки точности:

- априорная оценка $\|x_n - x^*\| \leqslant \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} \|x_0 - x_1\|$;
- апостериорная оценка $\|x_n - x^*\| \leqslant \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \|x_n - x_{n+1}\|$.

С помощью априорной оценки можно предварительно оценить достаточное число итераций для нахождения приближенного решения с заданной точностью из неравенства

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|x_0 - x_1\| \leqslant \varepsilon.$$

Откуда

$$n_{apr} = \left[\log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\|x_0 - x_1\|}\right] + 1.$$

Апостериорная оценка используется в процессе организации итерационного процесса, где на каждом шаге сравнивают значения x_n и x_{n-1} по формуле

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \varepsilon.$$

Фактическое число итераций всегда не превышает n_{apr}.

Приведем одно обобщение теоремы о неподвижной точке.

Теорема 2. *Пусть отображение f отображает замкнутое множество $M \subset E$ в себя и при этом при некотором $m \in N$ отображение $f^m(x)$ является на M сжатием. Тогда в M существует единственная неподвижная точка f.*

Доказательство. Если $m = 1$, то мы имеем теорему 1. Пусть $m > 1$. Рассмотрим сжатие $g = f^m$. По теореме 1 g имеет единственную неподвижную точку $x^* : \ g(x^*) = x^*$. Поскольку g и f перестановочны на M, имеем $g(f^m(x^*)) = f\ g(x^*) = f(x^*)$. Это означает, что $f(x^*) \in M$ и является неподвижной точкой отображения g. Но g имеет единственную неподвижную точку, поэтому $x^* = f(x^*)$. $\otimes$

В заключение приведем еще одно следствие из теоремы 1.

Следствие *3.* Пусть отображение f отображает замкнутое выпуклое множество $M \subset E$ в себя, причем на M оно непрерывно дифференцируемо и $\|f'(x)\|_E \leqslant \alpha < 1$. Тогда справедливы утверждения теоремы 1.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Показать, что отображение

$$F : L_2[0,1] \to L_2[0,1] \quad F(x)(t) = \frac{1}{4}\, x\left(\sqrt[4]{t}\right) + t.$$

является сжимающим. Вычислить $x_3(t)$, если $x_0(t) = 0$.

Решение. По определению сжимающего отображения оценим $\|F(x) - F(y)\|_{L_2[0,1]}$:

$$\|F(x)-F(y)\|_{L_2[0,1]} = \left(\int\limits_0^1 \left|\tfrac{1}{4}x\left(\sqrt[4]{t}\right)+t-\tfrac{1}{4}y\left(\sqrt[4]{t}\right)-t\right|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\tfrac{1}{16}\int\limits_0^1 |x(z)-y(z)|^2 4z^3\,\mathrm{d}z\right)^{1/2} = \tfrac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 |x(z)-y(z)|^2\,\mathrm{d}z\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\|x-y\|_{L_2[0,1]}.$$

Значит, отображение сжимающее с коэффициентом сжатия $\alpha = 1/2$. Построим последовательные приближения

$$x_1 = F(x_0) = \frac{1}{4}x_0\left(\sqrt[4]{t}\right)+t = t,$$

$$x_2 = F(x_1) = \frac{1}{4}x_1\left(\sqrt[4]{t}\right)+t = \frac{1}{4}\sqrt[4]{t}\,t,$$

$$x_3 = F(x_2) = \frac{1}{4}x_2\left(\sqrt[4]{t}\right)+t = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt[4]{\sqrt[4]{t}}\right)+\sqrt[4]{t}\right)+t = \frac{1}{16}t^{1/16}+\frac{1}{4}t^{1/4}+t.$$

Задача 2. Показать, что последовательность цепных дробей

$$2,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\dots$$

сходится. Найти ее предел.

Решение. Используем принцип сжимающих отображений в $\mathbb{R}$ и построим приближения

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2+\frac{1}{x_1},\ \dots,\ x_n = 2+\frac{1}{x_{n-1}}(n \geqslant 2).$$

Заметим, что $x_n \leqslant 5/2$ для всех $n \geqslant 1$. А так как $x_n = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x_{n-2}}}$ для $n \geqslant 3$, то $x_n \geqslant 2$.

Рассмотрим отображение $f(x) = 2+\dfrac{1}{x}$ отрезка $[2{,}5/2]$ в себя. Оно является сжимающим, поскольку $|f(x)-f(y)| = \left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right| \leqslant \dfrac{1}{4}|x-y|$. Следовательно, существует неподвижная точка отображения f. Найдем ее

$$x^\star = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\Bigl(2+\frac{1}{x_{n-1}}\Bigr) = 2+\frac{1}{x^\star}.$$

Решая уравнение $x^\star = 2+\dfrac{1}{x^\star}$, находим $x^\star = 1+\sqrt{2}$.

Таким образом, последовательность цепных дробей сходится, ее предел равен $1+\sqrt{2}$.

Задача 3. Приводя уравнение к виду, для которого справедлив принцип сжимающих отображений, найти корни уравнения

$$g(x) = 3x^2 - 18x + 11 = 0.$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

Решение. Приведем уравнение $g(x) = 0$ к уравнению вида $x = f(x)$ и применим локальный принцип сжимающих отображений. Для этого найдем шар $B[a, r_0]$, инвариантный относительно отображения f, на котором отображение будет сжимающим. Перепишем уравнение в виде

$$x = \frac{1}{18}(3x^2+11),$$

тогда $f(x) = \dfrac{1}{18}(3x^2+11)$. Поскольку функция f является дифференцируемой, то в качестве константы Липшица можно взять $\alpha = \max\limits_x |f'(x)|$. В нашем случае $|f'(x)| = \dfrac{1}{3}x$. Согласно локального принципа сжимающих отображений условие $|f'(x)| < 1$ выполнено, если $|x| < 3$. Построим шар с центром в точке $a = 0$. Радиус шара r_0, в котором существует неподвижная точка, выберем из следующих условий:

$$\begin{cases} \|a - f(a)\| < (1-\alpha)r_0, \\ \alpha(r_0) < 1, \end{cases}$$

где $\alpha(r_0) = \dfrac{r_0}{3}$, $f(a) = \dfrac{11}{18}$. Наши условия примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{11}{18} < \Bigl(1 - \dfrac{r_0}{3}\Bigr) r_0, \\ \dfrac{r_0}{3} < 1. \end{cases}$$

Выберем оно из решений этой системы. Пусть $r_0 = 1$. Тогда отрезок $[-1, 1]$ инвариантен относительно отображения f, на нем отображение сжимающее с коэффициентом сжатия $\alpha = \dfrac{1}{3}$. Оценим расстояние

$$\|x_n - x^\star\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\| \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{11}{18} \leqslant \frac{1}{100}.$$

Следовательно, уже x_5 является приближенным решением с требуемой точностью ε, при условии, что в качестве начального приближения выбрано $x_0 = 0$.

Для нахождения второго корня уравнения перепишем уравнение в виде

$$x = \sqrt{\frac{18x - 11}{3}}.$$

Тогда

$$\alpha = \max_x |f'(x)| = \max_x \left| \frac{3}{\sqrt{\dfrac{18x-11}{3}}} \right| < 1.$$

Выберем шар с центром в точке $a = 2$ радиуса $r_0 = 1$. Шар $B[2,1]$ инвариантен относительно отображения f, на котором есть второй корень уравнения. Аналогично можно посчитать количество итераций для его нахождения. Выберем $x_0 = 2$, $\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{22}}$.

В общем случае для применения принципа сжимающих отображений целесообразно провести процедуру отделения корней.

ЗАДАНИЯ

1. Доказать, что всякое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

2. Пусть $f : m \to m$ и $(\alpha_k)_{k=1}^\infty$ – некоторая фиксированная последовательность. При каком условии на $(\alpha_k)_{k=1}^\infty$ отображение будет сжимающим.

3. При каком условии отображение $f : \ell_1 \to \ell_1$ будет сжимающим, если

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^\infty a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^\infty a_{2i}x_i, \ldots \right)$$

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Одним из подходов для приближенного решения уравнений можно отнести метод последовательных приближений (последовательных итераций). Остановимся на его рассмотрении.

Пусть задано уравнение

$$x = f(x), \tag{7}$$

где $f : [a, b] \to [a, b]$. Сформулируем для него принцип сжимающих отображений.

Теорема 1. *Пусть f удовлетворяет условию Липшица с константой $L < 1$. Тогда уравнение (7) имеет единственное решение $x^* \in [a, b]$, которое может быть найдено методом последовательных приближений*

$$x_n = f(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \dots. \tag{8}$$

Теорема 1 вытекает из основной теоремы 1. Здесь в качестве множества A выступает отрезок $[a, b]$.

Рассмотрим применение теоремы 1 к решению уравнения, заданного в общем виде

$$g(x) = 0. \tag{9}$$

Предположим, что функция $g(x) \in C^{(1)}[a, b]$, т. е. является непрерывно дифференцируемой. Пусть выполнены на $[a, b]$ следующие ограничения

$$0 < k_1 \leqslant g'(x) \leqslant k_2 \text{ или } 0 < -k_1 \leqslant g'(x) \leqslant -k_2. \tag{10}$$

Перепишем (9) в виде

$$x = x - \lambda g(x) \text{ или } x = f(x), \tag{11}$$

где $f(x) = x - \lambda g(x)$. С помощью (10) выберем параметр λ таким образом, чтобы отображение f переводило отрезок $[a, b]$ в себя и при этом было сжимающим.

Предположим, что выполнено первое соотношение в (10). Тогда

$$1 - \lambda k_2 \leqslant f'(x) = 1 - \lambda g'(x) \leqslant 1 - \lambda k_2.$$

В качестве параметра λ можно взять точку минимума функции

$$h(\lambda) = \max\{|1 - \lambda k_1|, |1 - \lambda k_2|\},$$

т. е.
$$\lambda^\star = \frac{2}{k_1 + k_2}.$$
В этом случае
$$|f'(x)| \leqslant \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} < 1. \tag{12}$$
Так как уравнение (7) имеет решение, то $a < f(a), b > f(b)$, а это означает, что $f : [a,b] \to [a,b]$. Следовательно, к уравнению (11) применим принцип сжимающих отображений. Для вычисления коэффициента сжатия можно воспользоваться оценкой на производную.

Пример 1. Покажем, что уравнение
$$\cos^4 t - \cos^2 t - 5t + 1 = 0$$
имеет единственное решение в пространстве $\mathbb{R}$.

Перепишем уравнение в виде
$$t = \frac{1}{5}\Big(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2t\Big).$$
Обозначим правую часть данного соотношения через $f(t)$. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и оценим его на сжатие.
$$\big|f(t_1) - f(t_2)\big| \leqslant \frac{1}{10}\big|\sin(4c)\big||t_1 - t_2| \leqslant \frac{1}{10}|t_1 - t_2|,\ c \in [t_1, t_2].$$

Таким образом, отображение f является сжимающим с коэффициентом сжатия $\alpha = 1/10$. Заметим, что
$$\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{5}\cdot 1.$$
Поэтому множество значений $E(f)$ отображения f совпадает с отрезком $[0{,}15; 0{,}2]$. Выберем в качестве начального приближения $t_0 = 0{,}2$, $t_0 \in [0{,}15; 0{,}2]$. Получим решение исходного уравнения как неподвижную точку отображения f. Для вычисления используем формулу последовательных приближений
$$t_n = f(t_{n-1}), n = 1, 2, \dots .$$
В процессе расчетов использованы средства компьютерной математики. Неподвижная точка отображения $t^\star = 1/5$.

Пример 2. Покажем, что уравнение

$$x(t) - e^{-x(t)} = \sin t$$

имеет единственное решение в пространстве $C[0,1]$.

Перепишем уравнение в виде

$$x(t) = e^{-x(t)} + \sin t.$$

Рассмотрим отображение $f: C[0,1] \to C[0,1]$ и оценим его на сжатие.

$$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leqslant e^{-\xi(t)}\big|x_1 - x_2\big| \leqslant \max_{x_1(t) \leqslant \xi(t) \leqslant x_2(t)} |e^{-\xi(t)}| \cdot \|x_1 - x_2\|_{C[0,1]}.$$

Теперь для любого $\delta > 0$ рассмотрим множество $X_\delta = \{x(t) \in C[0,1] : x(t) \geqslant \delta\}$. На X_δ функция $|e^{-\xi(t)}| \leqslant 1$, однако множество X_δ не инвариантно относительно отображения f. Поэтому будем строить замкнутое множество A, которое присутствует в основной теореме 1. Итак,

$$f(x) \leqslant e^{-\xi(t)} + \sin t \leqslant 2, \;\; f(x) \geqslant e^{-\xi(t)} \geqslant e^{-2},$$

так как $x(t) \leqslant 2$. В качестве множества A рассмотрим множество

$$A = \{x(t) \in C[0,1] : \; e^{-2} \leqslant x(t) \leqslant 2\},$$

которое инвариантно относительно отображения f и является сжатием с коэффициентом $\alpha = e^{-(e^{-2})}$. Поэтому существует неподвижная точка $x^*(t) \in A$.

Перейдем к рассмотрению нелинейных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$x(t) = f\big(t, x(t)\big), \tag{13}$$

где $x(t)$ – неизвестная функция $x(t) \in C[a,b]$. Сформулируем для (13) достаточные условия существования решения, которое можно найти по принципу сжимающих отображений.

Теорема 2. *Пусть $f(t,u)$ непрерывна на множестве $[a,b] \times \mathbb{R}$ и по переменой u удовлетворяет условию Липшица с константой $L < 1$. Тогда уравнение (13) имеет единственное решение $x^*(t) \in C[a,b]$, которое может быть найдено методом последовательных приближений*

$$x_n = f\big(t, x_{n-1}(t)\big), \;\; n = 1, 2, \ldots . \tag{14}$$

Выполнение условия Липшица по переменной u означает, что

$$\Big|f(t,u)-f(t,v)\Big| \leqslant L|u-v|, \forall u,v \in \mathbb{R}.$$

А это фактически сжатие отображения.

ЗАДАНИЕ

Приводя уравнение $g(x)=0$ к виду, для которого справедлив принцип сжимающих отображений, найти корни уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. Составить алгоритм и написать программный код, реализующий метод последовательных приближений, предусматривающий:

- построение графика $g(x)$;
- вычисление априорной оценки количества итераций;
- вывод на печать последней итерации и ее номера.

1. $x^7+4x^5+2x+1=0$;
2. $x+\sin\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{1+x^2}-6=0$;
3. $3x+\ln(1+x^2)+\sin x+\cos x-7=0$;
4. $2x+\sin x+\operatorname{arctg} x+\dfrac{x}{1+x^2}-6=0$;
5. $x+\operatorname{arctg} x+\dfrac{x}{1+x^2}-3=0$;
6. $x^7+x^3+2x^2+x-1=0$;
7. $x^5+3x-1=0$;
8. $\dfrac{5}{2}x+\sqrt{3}\sin x-\cos x-6=0$;
9. $2x+\dfrac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg} x-4=0$;
10. $x^{13}+x^7+x-1=0$;
11. $x^5+2x^3+x-2=0$;
12. $x\sqrt{2}+\ln x^2+1+\operatorname{arctg} 4x+4=0$;
13. $x^3+5x^2-15x-7=0$;
14. $x\sqrt{5}+\sin x-\sqrt{3}\cos x-\sqrt{5}=0$;
15. $8x-3\sqrt{3}-3\sin x+3(\operatorname{arctg}\pi x-3\pi)=0$;
16. $3x+\sin x+\sqrt{1+x^2}=0$;
17. $x^5+x^3-1=0$;
18. $x^3\sin x-12x+1=0$;
19. $2x+\cos x+\dfrac{2x}{1+x^2}=0$;
20. $x^3+5x^2-15x-7=0$;
21. $x\sqrt{5}+\sqrt{1+x^2}-\sin^2 x+4=0$;
22. $x^4+10x^3-1=0$;
23. $x^{13}-x^5+x-1=0$;
24. $5x+\cos^2(3x)+\sqrt{1+x^2}+7=0$;
25. $3x-\cos(2x+1)+6x-15=0$;
26. $x^7+14x-14=0$;
27. $x\sqrt{3}+\operatorname{arctg} 3x-2-\sin^2 x=0$;
28. $x^{11}+3x-1=0$.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Метод сжимающих отображений широко применяется при решении СЛАУ (систем линейных алгебраических уравнений). Наиболее эффективен данный метод при решении систем большой размерности с сильно разреженной матрицей. Проблема решения таких систем возникает при решении прикладных задач, например, поиска безусловного экстремума функций многих переменных с помощью необходимых условий, при применении неявных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m, \end{aligned} \tag{15}$$

которую можно записать в матричном виде

$$AX = B. \tag{16}$$

Предположим, что определитель матрицы A $detA \neq 0$, тогда существует единственное решение системы (15). Для применения принципа сжимающих отображений перепишем уравнение (16) в виде

$$X = CX + D. \tag{17}$$

Обозначим через $F(X) = CX + D$, тогда отображение $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ задается системой линейных уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j + d_i \ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{18}$$

Если отображение F – сжатие, то мы можем применить метод последовательных приближений к решению уравнения $X = F(X)$.

При каких условиях отображение F будет сжатием? Ответ на этот вопрос зависит от выбора нормы в $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^m$ кубическую норму $\|x\|_k = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|$. Тогда

$$\|y^{(1)} - y^{(2)}\|_k = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}| = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \Big| \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{m}|c_{ij}|\cdot|x_j^{(1)}-x_j^{(2)}| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{m}|c_{ij}|\cdot\max_{1\leqslant j\leqslant m}|x_j^{(1)}-x_j^{(2)}| =$$

$$= \Big(\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{m}|c_{ij}|\Big)\cdot\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_k = \alpha\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_k.$$

Отсюда вытекает, что условие сжимаемости имеет вид

$$\alpha = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{m}|c_{ij}| < 1. \tag{19}$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^m$ октаэдрическую норму $\|x\|_0 = \sum\limits_{i=1}^{m}|x_i|$, тогда

$$\|y^{(1)}-y^{(2)}\|_0 = \sum_{i=1}^{m}|y_i^{(1)}-y_i^{(2)}| = \sum_{i=1}^{m}\Big|\sum_{j=1}^{m}c_{ij}(x_j^{(1)}-x_j^{(2)})\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|c_{ij}|\cdot|x_j^{(1)}-x_j^{(2)}| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant m}\sum_{i=1}^{m}|c_{ij}|\cdot\sum_{j=1}^{m}|x_j^{(1)}-x_j^{(2)}| =$$

$$= \Big(\max_{1\leqslant j\leqslant m}\sum_{i=1}^{m}|c_{ij}|\Big)\cdot\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_0 = \alpha\|x^{(1)}-x^{(2)}\|_0.$$

Условие сжатия имеет вид

$$\alpha = \max_{1\leqslant j\leqslant m}\sum_{i=1}^{m}|c_{ij}| < 1. \tag{20}$$

Таким образом, если выполнено хотя бы одно из условий (19), (20), то выполнены условия теоремы 1 и ее можно сформулировать в эквивалентной формулировке

Теорема 1. *Если матрица C системы* (17) *такова, что* $0 \leqslant \alpha < 1$, *где величина α определяется формулой* (19) *или* (20), *то система уравнений* (17) *имеет единственное решение. Это решение может быть найдена методом последовательных приближений*

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_j^{(n)} + d_i, \tag{21}$$

а в качестве $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)})$ *можно взять любую точку из* $\mathbb{R}^m$. *Скорость сходимости итерационного процесса оценивается неравенством* (5).

Отметим, что условие (19) или (20) не являются необходимыми для применения метода последовательных приближений, а лишь достаточными.

Важно заметить, что если матрица $C = (c_{ij})_{i,j=1}^m$ симметрична, то по сферической норме условие сжатия имеет вид

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| < 1, \tag{22}$$

и, фактически означает, что $\|C\| < 1$. Из курса линейной алгебры известно, что $\|C\|$ совпадает с $|\lambda_1|$, где λ_1 – наибольшее по абсолютной величине собственное значение матрицы C. Тогда условие (22) не только достаточно, но и необходимо для сходимости метода последовательных приближений. Действительно, выбирая в (17) собственный вектор, отвечающий λ_1, и полагая $x_i^{(0)} = 0$, получим $x_i^{(1)} = d_i$, $x_i^{(n+1)} = (1 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_1^n)b_i$, откуда следует, что при $n \to \infty$ последовательность $(x_i^{(n)})$ не имеет предела, если $|\lambda_1| \geqslant 1$ $(b_i \neq 0)$.

Таким образом, когда матрица C симметрична, процесс последовательных приближений для решения системы линейных уравнений сходится к решению тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы C меньше единицы по абсолютной величине.

Обратимся к вопросу преобразования системы (16) к виду (17).

Самый простой способ следующий. Из первого уравнения (15) выразим x_1, из второго x_2 и т. д. Тогда на главной диагонали матрицы C стоят нули, а ненулевые элементы выражаются по формулам

$$c_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}},\ d_i = \frac{b_i}{a_{ii}},\ i, j = \overline{1, m},\ i \neq j. \tag{23}$$

Обратимся ко второму способу. Пусть $A^\top$ – транспонированная к A матрица, E – единичная матрица, $\lambda(A^\top A)$ – максимальное собственное значение матрицы $A^\top A$. Тогда исходное уравнение (16) можно записать так:

$$X = \left(E - \frac{A^\top A}{\lambda(A^\top A)}\right) X + \frac{A^\top B}{\lambda(A^\top A)}, \tag{24}$$

тогда
$$C = E - \frac{A^\top A}{\lambda(A^\top A)},\ D = \frac{A^\top B}{\lambda(A^\top A)}, \tag{25}$$

Если матрица C получена таким образом, то все ее собственные числа положительны и меньше единицы.

Рассмотрим теперь бесконечную систему линейных алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j + b_i \ (i = 1{,}2, \ldots). \tag{26}$$

Решением такой системы назовем бесконечную последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$, которая обращает (26) тождество. Заметим, что в этом случае автоматически требуется сходимость рядов, входящих в (26). Ограничимся случаем, когда последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ ограничена, т. е. $x \in m$, $\sup\limits_i |x_i| < \infty$. Как и в первом случае приведем систему к виду

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j + b_i \ (i = 1{,}2, \ldots), \tag{27}$$

где $c_{ij} = -a_{ij} + \delta_{ij}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Определение 1. Система (27) называется *вполне регулярной*, если $\exists q : \ 0 < q < 1$ такое, что

$$\sum_{i,j=1}^{m} c_{ij} \leqslant q \ \ \forall i. \tag{28}$$

Определим отображение $F : m \to m$ и потребуем, чтобы вектор правой части $b = (b_1{,}b_2, \ldots, b_i, \ldots) \in m$.

Теорема 2. *Вполне регулярная система* (27) *имеет единственное решение $x \in m$ при любом $b = (b_1{,}b_2, \ldots, b_i, \ldots) \in m$. Если $\|b\|_m \leqslant B$, то*
$$|x_i| \leqslant \frac{B}{1-q}, \ \ i = 1, 2, \ldots.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Методом последовательных приближений решить систему линейных алгебраических уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\begin{cases} 0{,}7x_1 + 0{,}1x_2 = 1, \\ 0{,}2x_1 - 1{,}4x_2 + 0{,}01x_3 = 2, \\ 0{,}2x_2 - 0{,}9x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в виде $x = Bx + y$.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3x_1 - 0{,}1x_2 = -1, \\ x_2 = 0{,}2x_1 - 0{,}4x_2 + 0{,}01x_3 = 2, \\ x_3 = 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = 5, \end{cases}$$

где матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, решение системы равносильно нахождению неподвижной точки отображения $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, в $\mathbb{R}^3$ будем рассматривать кубическую норму. Вычислим норму матрицы B по формуле (19), получим $\|B\| = 0{,}61$. Пусть $x_0 = (0, 0, 0)^\top$, тогда $x_1 = F(x_0) = (-1, 2, 5)^\top$. Для получения решения с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ нам понадобится n итераций, которые находятся по формуле

$$\|x_n - x\|_{\mathbb{R}^3} \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|x_0 - x_1\|_{\mathbb{R}^3} = \frac{0{,}61^n}{1 - 0{,}61} \cdot 5 < 10^{-2}.$$

Откуда следует, что $n = 8$. Последовательные приближения вычисляются по формуле $x_n = Bx_{n-1} + y$. Расчеты проведены с использованием системы компьютерной математики. Полученное решение имеет вид $x_1 = 1{,}595$, $x_2 = -1{,}163$, $x_3 = 5{,}297$.

ЗАДАНИЯ

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. Составить алгоритм и написать программный код, реализующий метод последовательных приближений, предусматривающий:

- приведение системы к специальному виду для применения метода последовательных приближений;
- вычисление коэффициента сжатия;
- вычисление априорной оценки количества итераций;
- вывод на печать последней итерации и ее номера.

1.1. $\begin{cases} 3{,}2x_1 - 11{,}5x_2 + 3{,}8x_3 = 2{,}8, \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 - 6{,}4x_3 = -6{,}5, \\ 2{,}4x_1 + 7{,}2x_2 - 1{,}2x_3 = 4{,}5. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 6{,}25x_1 - x_2 + 0{,}5x_3 = 7{,}5, \\ -x_1 + 5x_2 + 2{,}12x_3 = -8{,}68, \\ 0{,}5x_1 + 2{,}12x_2 + 3{,}6x_3 = -0{,}24. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 7x_2 + x_3 = -6, \\ x_1 + x_2 + 9x_3 = -3. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} -0{,}1x_1 + 0{,}1x_3 = -1, \\ -0{,}3x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}1x_3 = 1, \\ -0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 1{,}1x_3 = -1. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} -1{,}1x_1 + 0{,}1x_3 = 0, \\ -0{,}1x_1 + 1{,}4x_2 = 1, \\ -0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}9x_3 = -1. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 1{,}2x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = 1, \\ x_2 + 0{,}1x_3 = 1, \\ 0{,}1x_1 + 1{,}3x_3 = 1. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 0{,}9x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 = 1, \\ 0{,}2x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}2x_3 = 1, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 1{,}2x_3 = 0. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} -1{,}3x_1 - 0{,}2x_2 = 0, \\ -0{,}2x_1 + 1{,}0x_2 + 0{,}1x_3 = 1, \\ -0{,}1x_2 + 1{,}0x_3 = 1. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} -0{,}13x_1 - 0{,}02x_2 = 0, \\ -0{,}02x_1 + 0{,}1x_3 = 0{,}1, \\ -0{,}1x_2 + 1{,}0x_3 = 1. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} -1{,}4x_1 - 0{,}1x_3 = 1, \\ 0{,}1x_1 + 1{,}1x_2 - 0{,}1x_3 = 0, \\ 0{,}1x_2 - 1{,}2x_3 = -1. \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 = -38, \\ 20x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 29, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 = -8, \\ 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 29. \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 40x_3 + 15x_4 = 29, \\ -4x_1 - 2x_3 + 20x_4 = 70, \\ -5x_1 + 10x_2 + 3x_3 - x_4 = -41, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 32, \\ -16x_1 - 3x_3 + 5x_3 - 4x_4 = -74, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 0, \\ -x_1 + 20x_2 + 12x_3 = -6. \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} 16x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 55, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 28, \\ -2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 25x_4 = 144, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_4 = -14. \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 77, \\ 5x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 9x_4 = 62, \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 59, \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 84. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 102, \\ -6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -47, \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 8x_4 = -122, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -24. \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ x_1 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 60, \\ 9x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 13, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 35. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 128, \\ 6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 158. \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 94, \\ 8x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 45, \\ 9x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 27, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 39. \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 20, \\ 10x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 70, \\ 15x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 645, \\ -8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = -210. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -43, \\ 2x_1 + x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 42, \\ 3x_1 + 7x_2 - 6x_3 - 6x_4 = 7. \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 19{,}5, \\ 3x_1 + 4x_3 + x_4 = 23, \\ 2x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_4 = 39. \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} -8x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 79, \\ 9x_1 + 2x_2 - 15x_3 = -27, \\ 4x_1 + 3x_3 - 14x_4 = 303, \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 246. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 60, \\ 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27. \end{cases}$

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральными уравнениями называют уравнения относительно неизвестной функции, входящей в уравнение под знаком интеграла.

Ограничимся рассмотрением уравнений вида

$$a(t)x(t) - \int\limits_a^b \mathcal{K}\big(t, s; x(s)\big)\mathrm{d}s = y(t),\ t \in [a, b], \tag{29}$$

здесь $a(t)$, $y(t)$ – заданные функции; $\mathcal{K}\big(t, s; x(s)\big)$ – заданная функция, называемая *ядром интегрального уравнения;* $x(t)$ – неизвестная функция. Решение $x(t)$ разыскивается в различных пространствах функций в зависимости от свойств функции $\mathcal{K}(t, s; z)$ и y. Пространства выбираются так, чтобы интеграл в (29) существовал. Уравнение (29) называется уравнением Фредгольма. Если $a(t) \equiv 0$, то уравнение (29) называется уравнением Фредгольма первого рода, соответственно, при $a(t) \equiv 1$ – второго рода и уравнением третьего рода при $a(t) \neq 0$. Исследование уравнений второго и третьего рода не отличаются, поэтому мы ограничимся рассмотрением случая $a(t) = 1$.

Интегральное уравнение (29) называется *линейным,* если функция $\mathcal{K}(t,s,z)$ линейна по z. Если $y(t) = 0$, то уравнение (29) называется *однородным,* в противном случае *неоднородным.*

Решением уравнения (29) называется функция $x(t)$, при подстановке которой в уравнение выполняется равенство для всех $t \in [a,b]$ или почти всех. Линейное однородное уравнение всегда имеет решение $x(t) \equiv 0$.

Выделим класс уравнений с переменным верхним пределом вида

$$a(t)x(t) - \int\limits_a^t \mathcal{K}\big(t, s; x(s)\big)\mathrm{d}s = y(t), \tag{30}$$

называемые *интегральными уравнениями Вольтерра.*

Уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма, если переопределить ядро $\mathcal{K}\big(t, s; x(s)\big)$.

Идея применения принципа сжимающих отображений и интегральным уравнениям (29) либо (30) заключается в следующем.

Пусть имеется интегральное уравнение

$$x(t) = \int\limits_T \mathcal{K}\big(t, s; x(s)\big)\,\mathrm{d}s + y(t), \tag{31}$$

где $T = [a,b]$ либо $T = [a,t]$. Соответствие $x \to \int\limits_T \mathcal{K}\big(t, s; x(s)\big)\mathrm{d}s + y(t)$ определяет отображение множества функций, заданных на T, на себя. Тогда уравнение (31) записывается в виде $x = F(x)$, а это означает, что искомое решение является неподвижной точкой отображения F. Для того, чтобы применить принцип сжимающих отображений, нужно:

- выбрать банахово пространство функций;
- проверить, что (31) определяет сжимающее отображение.

Покажем, каким образом такая схема реализуется в пространстве $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ для линейного неоднородного уравнения Фредгольма

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t, s) x(s)\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{32}$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{K}(t,s)$ – *непрерывная функция на множестве* $[a,b] \times [a,b] = \Omega$ *и* $M = \max\limits_{(t,s)\in\Omega} |\mathcal{K}(t,s)|$, *тогда для любого* λ *такого, что* $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ *интегральное уравнение Фредгольма второго рода имеет единственное решение для любой правой части* $y(t) \in C[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем пространство $C[a,b]$. Формула

$$F(x)(t) = \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s) x(s)\,\mathrm{d}s + y(t)$$

задает отображение банахова пространство $C[a,b]$ на $C[a,b]$. Проверим, что отображение F сжимающее. Оценим норму

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_{C[a,b]} = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |\lambda| \Big| \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s)(x_1(s) - x_2(s))\,\mathrm{d}s \Big| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \max_{a\leqslant t\leqslant b} \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t,s)||x_1(s)-x_2(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant |\lambda| \max_{t,s} |\mathcal{K}(t,s)|(b-a)\times$$

$$\times \max_{a\leqslant s\leqslant b} |x_1(s)-x_2(s)| = |\lambda| M(b-a)\|x_1-x_2\| = \alpha\|x_1-x_2\|_{C[a,b]}.$$

Тогда $\alpha = |\lambda| M(b-a) < 1$, так как $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$. Следовательно, отображение F – сжимающее. Значит, по принципу сжимающих отображений уравнение (32) имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений. Процесс последовательных приближений строится по формуле

$$x_n(t) = \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s) x_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s + y(t). \tag{33}$$

$\otimes$

На практике при численной реализации метода последовательных приближений необходимо приближенно вычислять интегралы по методу квадратур, что вносит дополнительную погрешность и довольно большую при большом числе итераций. С этой целью интегрирование нужно выполнять с большей точностью, чем погрешность метода последовательных приближений.

Так, для приближенного вычисления интеграла от гладкой функции хорошо подходит метод Симпсона или метод парабол.

$$\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{b-a}{m}\Big[f_0+f_m+2(f_2+f_4+\ldots+f_{m-2})+4(f_1+f_3+\ldots+f_{m-1})\Big],$$

где $f_m = f(t_m)$, $t_m = t_0 + \frac{b-a}{m}$.

Обозначим через t_i, $i = 0{,}1,\ldots,m$ узлы сетки, расположенной на отрезке a, b. Тогда соотношение (33) перепишется в виде

$$x_n(t_i) = \lambda \int\limits_a^b \mathcal{K}(t_i,s) x_{n-1}(s_i)\,\mathrm{d}s + y(t_i).$$

Если воспользоваться квадратурной формулой трапеций на равномерной сетке с шагом $h = \dfrac{b-a}{m}$, то расчетные формулы метода последовательных приближений примут вид

$$x_n(t_i) = \lambda\frac{h}{2}\Big[k_{i,0}x_{n-1,0} + 2\big(k_{i,1}x_{n-1,1} + \ldots k_{i,m-1}x_{n-1,m-1}\big) + k_{i,m}x_{n-1,m}\Big] +$$

$$+y(t_i), i = 0, 1, \ldots, m.$$

Здесь $k_{i,j} = \mathcal{K}(t_i, s_j)$, $x_{n,j} = x_n(s_j)$.

Отметим, что при решении линейных интегральных уравнений сходимость метода последовательных приближений не зависит от вида правой части и начального приближения, которые влияют на скорость сходимости итерационного процесса.

Перейдем к рассмотрению нелинейного уравнения

$$x(t) - \lambda\int_a^b \mathcal{K}(t, s; x(s))\,\mathrm{d}s = y(t). \tag{34}$$

Выясним, можно ли применить метод последовательных приближений к построению решения уравнения (34)

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}(t, s; z)$ – непрерывная функция переменных t, s, z, удовлетворяющая условию Липшица по переменной z с константой $L > 0$. Если выполнено условие $L(b-a)|\lambda| < 1$, то интегральное уравнение (34) имеет единственное непрерывное решение для любой правой части $y(t) \in C[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$F(x)(t) = \lambda\int_a^b \mathcal{K}(t, s; x(s))\,\mathrm{d}s + y(t)$$

и покажем, что $F\colon C[a, b] \to C[a, b]$. Поскольку $y(t) \in C[a, b]$, то достаточно показать, что $z(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}(t, s, x(s))\mathrm{d}s$ непрерывна. Действительно, при фиксированной непрерывной функции x подынтегральная функция $\mathcal{K}(t, s, x(s))$ есть непрерывная функция переменных t и s и по теореме об непрерывности интеграла, зависящего от параметра, непрерывна.

Покажем, что отображение F сжимающее. Используя условие Липшица, имеем

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant |\lambda| \int\limits_a^b |\mathcal{K}(t, s; x_1(s)) - \mathcal{K}(t, s; x_2(s))| \,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| L \int\limits_a^b |x_1(s) - x_2(s)| \,\mathrm{d}s \leqslant |\lambda| L(b-a)\|x_1 - x_2\| = \alpha \|x_1 - x_2\|_{C[a,b]},$$

где $\alpha = |\lambda| L(b-a) < 1$. $\otimes$

Таким образом, разрешимость уравнений Фредгольма зависит от условий на ядро. Покажем, что для уравнения Вольтерра условие разрешимости проще.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение Вольтерра

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^t \mathcal{K}(t, s) x(s) \,\mathrm{d}s = y(t). \tag{35}$$

Выясним, когда можно применить метод последовательных приближений для его решения.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{K}(t, s)$ – непрерывная функция по переменным t и s. Тогда для любой $y(t) \in C[a, b]$ и любого λ из поля P интегральное уравнение Вольтерра второго рода имеет единственное решение.*

Доказательство. Зафиксируем пространство $C[a,b]$ и рассмотрим отображение

$$F(x) = \lambda \int\limits_a^t \mathcal{K}(t, s) x(s) \,\mathrm{d}s + y(t).$$

Покажем, что некоторая степень отображения F является сжатием. Для этого рассмотрим ряд последовательных оценок.

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leqslant |\lambda| \int\limits_a^t |\mathcal{K}(t, s)||x_1(s) - x_2(s)| \,\mathrm{d}s \leqslant |\lambda| M(t-a)\|x_1 - x_2\|,$$

где $M = \max\limits_{t,s} |\mathcal{K}(t,s)|$.

$$|F^2(x_1) - F^2(x_2)| \leqslant |\lambda|^2 \int\limits_a^t \int\limits_a^s |\mathcal{K}(t,s)||\mathcal{K}(s,\tau)||x_1(\tau) - x_2(\tau)| \,\mathrm{d}\tau \,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2!} \|x_1 - x_2\| \leqslant |\lambda|^2 M^2 \frac{(b-a)^2}{2!} \|x_1 - x_2\|,$$

и т. д. Следовательно,

$$\|F^N(x_1) - F^N(x_2)\| \leqslant |\lambda|^N M^N \frac{(b-a)^N}{N!} \|x_1 - x_2\|.$$

Из последнего соотношения следует, что найдется такое натуральное N, что $|\lambda|^N M^N \dfrac{(b-a)^N}{N!} < 1$, тогда F^N является сжатием и, следовательно, F имеет единственную неподвижную точку. Это означает, что интегральное уравнение Вольтерра имеет единственное решение. $\otimes$

Существует класс интегральных уравнений, которые сводятся к линейным системам алгебраических уравнений. Это линейные интегральные уравнения с вырожденным ядром.

Ядро $\mathcal{K}(t, s)$ называется *вырожденным,* если оно имеет вид

$$\mathcal{K}(t, s) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t) b_i(s), \tag{36}$$

где $a_i(t)$, $b_i(s)$ – равномерно непрерывные, линейно независимые функции, хотя независимость функций не существенна. Предположим, что уравнение (32) является уравнением с вырожденным ядром.

Пусть $x(t)$ — решение уравнения (32), тогда

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{m} a_i(t) b_i(s) x(s) \,\mathrm{d}s + y(t),$$

или

$$x(t) = \lambda \sum_{k=1}^{m} a_i(t) \int\limits_a^b b_i(s) x(s) \,\mathrm{d}s + y(t).$$

Положим $c_i = \int\limits_a^b b_i(s)x(s)\,\mathrm{d}s$, тогда

$$x(t) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_i(t)c_i + y(t). \tag{37}$$

Таким образом, если решение уравнения (32) существует, то оно имеет вид (36). Подставим (36) в уравнение, введем обозначения

$$a_{ij} = \lambda \int\limits_a^b b_i(s)a_j(s)\,\mathrm{d}s, \quad y_i = \int\limits_a^b b_i(s)y(s\,\mathrm{d}s,$$

получим

$$c_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j + y_i. \tag{38}$$

Итак, всякое решение интегрального уравнения (32) с ядром (35) однозначно определяется набором $(c_1, \ldots, c_m)$. Этот набор единственнен в силу линейной независимости $a_i(t)$. Таким образом, задача свелась к исследованию СЛАУ.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода вида

$$x(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 tsx(s)\,\mathrm{d}s + \frac{5}{6}\,t.$$

Р е ш е н и е. Поскольку ядро $\mathcal{K}(t,s) = ts$ непрерывно в квадрате $[0,1] \times [0{,}1]$, причем $|\mathcal{K}(t,s)| \leqslant 1 = M$, то коэффициент сжатия $\alpha = |\lambda|M(b-a) = 1/2$. Следовательно, условие сжатия выполнено, и интегральное уравнение можно решить по принципу сжимающих отображений. Пусть

$$x_0(t) = \frac{5}{6}\,t.$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 tsx_0(s)\,\mathrm{d}s + \frac{5}{6}\,t = \frac{5}{6}\,t\Big(1 + \frac{1}{6}\Big),$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 tsx_1(s)\mathrm{d}s + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t\Big(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2}\Big),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 tsx_{n-1}(s)\mathrm{d}s + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t\Big(1 + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6^n}\Big).$$

Значит,

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{6}t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6^n} = t.$$

Заметим, что если в качестве начального приближения выбрать $x_0(t) = t$, то за одну итерацию получим решение интегрального уравнения. Таким образом, выбор начального приближения влияет на скорость сходимости итерационного процесса.

Задача 2. Решить интегральное уравнение Вольтерра второго рода вида

$$x(t) + \int\limits_0^t (t-s)x(s)\,\mathrm{d}s = t.$$

Решение. Известно, что интегральное уравнение Вольтерра разрешимо в пространстве непрерывных функций при любой правой части. Построим последовательные приближения по правилу $x_n(t) = t - \int\limits_0^t (t-s)x_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s$. В качестве начального приближения выберем $x_0(t) = 0$. Тогда

$$x_1(t) = t, x_2(t) = t - \int\limits_0^t (t-s)s\,\mathrm{d}s = t - \frac{t^3}{3!},$$

$$x_3(t) = t - \int\limits_0^t (t-s)\left(t - \frac{t^3}{3!}\right)\mathrm{d}s = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}$$

Очевидно, что

$$x_n(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Тогда решение интегрального уравнения $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = \sin t$.

Задача 3. Найти приближенное решение интегрального уравнение Вольтерра второго рода

$$x(t) + \int\limits_0^t (t-s)x(s)\,\mathrm{d}s = 1.$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Приближенное решение уравнения, построенное по принципу сжимающих отображений имеет вид

$$x_n(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

За приближенное решение примем с заданной точностью примем $x_2(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}$. Действительно, по критерию Лейбница для знакочередующихся рядов погрешность не превосходит максимума первого члена отброшенного остатка ряда, т. е.

$$\varepsilon \leqslant \max_t \left|\frac{t^6}{6!}\right| = \frac{1}{720} \approx 0{,}0014.$$

Задача 4. Выяснить, при каких значениях параметра $\lambda \neq 0$ к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$x(t) - \lambda \int\limits_0^1 ts^2 x(s)\,\mathrm{d}s = t^2.$$

применим принцип сжимающих отображений в пространстве $C[0,1]$ и в пространстве $L_2[0,1]$. При $\lambda = 1/3$ найти приближенное решение уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ и сравнить его с точным решением.

Решение. Приведем уравнение к виду $x = F(x)$, тогда можно применить принцип сжимающих отображений при условие, что в банаховых пространствах $C[0,1]$ и $L_2[0,1]$ отображение является сжимающим.

Пусть $F(x) = \lambda \int\limits_0^1 ts^2 x(s)\,\mathrm{d}s + t^2$. Рассмотрим пространство $C[0,1]$. Отображение F задает отображение $C[0,1]$ на $C[0,1]$, так как представляет собой сумму двух непрерывных функций. Покажем, что отображение на $C[0,1]$ является сжимающим, т. е. существует постоянная

$0 < \alpha < 1$ такая, что для всех непрерывных функций $x(t)$ и $z(t)$ выполняется неравенство $\|F(x) - F(z)\|_{C[0,1]} \leqslant \alpha \|x - z\|_{C[0,1]}$.

$$\|F(x) - F(z)\|_{C[0,1]} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \left| \lambda \int\limits_0^1 ts^2 (x(s) - z(s))\,\mathrm{d}s \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \int\limits_0^1 s^2\,\mathrm{d}s \max_{0\leqslant s\leqslant 1} |x(s) - z(s)| = |\lambda|/3 \|x - z\|_{C[0,1]}.$$

Тогда $\alpha = |\lambda|/3$ является коэффициентом сжатия и при $|\lambda| < 3$ к исходному интегральному уравнению в пространстве $C[0,1]$ можно применить принцип сжимающих отображений.

Рассмотрим приближенное решение уравнения при $\lambda = 1/3$. Для этого оценим количество приближений по формуле

$$\|x_n - x\|_{C[0,1]} \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|x_0 - x_1\|.$$

Пусть $x_0 = 0$, тогда $x_1 = F(x_0) = t^2$, $\alpha = 1/9$, $\|x_0 - x_1\| = 1$. Для определения n решаем неравенство $\left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot \frac{9}{8} < \varepsilon$. Откуда $n = 4$. Следовательно, x_4 является приближенным решением интегрального уравнения с точностью ε. Данное n представляет собой априорную оценку количества итераций.

Вычислим последовательно x_2, x_3, x_4:

$$x_2 = F(x_1) = \frac{1}{3} \int\limits_0^1 ts^2 x_1(s)\,\mathrm{d}s + t^2 = \frac{1}{3} t \int\limits_0^1 s^2 \cdot s^2\,\mathrm{d}s + t = \frac{1}{15} t + t^2;$$

$$x_3 = F(x_2) = \frac{1}{3} \int\limits_0^1 ts^2 x_2(s)\,\mathrm{d}s + t^2 = \frac{13}{180} t + t^2;$$

$$x_4 = F(x_3) = \frac{1}{3} \int\limits_0^1 ts^2 x_3(s)\,\mathrm{d}s + t = \frac{157}{1728} t + t^2.$$

Таким образом, приближенное решение исходного уравнения имеет вид

$$x_4 = \frac{157}{2160} t + t.$$

Поскольку данное уравнение представляет собой интегральное уравнение с вырожденным ядром, то можно найти его точное решение. Обозначим через $c = \int\limits_0^1 s^2 x(s)\,\mathrm{d}s$. Тогда $x(t) = \dfrac{1}{3}ct + t$. Подставляя его в исходное уравнение, получаем $c\Big(1 - \frac{1}{12}\Big) = \frac{1}{5}$ или $c = \frac{12}{55}$. Значит точное решение уравнение имеет вид

$$x(t) = \frac{4}{55}\,t + t^2.$$

Вычислим $\|x_4 - x\|$:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\Big(\frac{157}{2160} - \frac{4}{55}\Big)t\right| < 10^{-3}.$$

Рассмотрим пространство $L_2[0,1]$. Оценим ядро $\mathcal{K}(t,s) = \lambda t s^2$:

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |\mathcal{K}(t,s)|^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}s = |\lambda|^2 \int\limits_0^1 t^2 s^4 \mathrm{d}t\mathrm{d}s = |\lambda|^2 \frac{1}{15} < \infty.$$

Отображение F отображает пространство $L_2[0,1]$ на себя и является сжимающим, если $|\lambda| < \sqrt{15}$. Поэтому при $\lambda = 1/3$ можно применить принцип сжимающих отображений в пространстве $L_2[0,1]$. В этом случае понадобится число итераций, определяемое соотношением

$$\frac{\left(\frac{1}{3\sqrt{15}}\right)^n}{1 - \frac{1}{3\sqrt{15}}}\left(\int\limits_0^1 |x_1(s) - x_0(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2} < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{(3\sqrt{15})^n}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{3\sqrt{15} - 1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} < 10^{-3}.$$

Из последнего неравенства следует, что $n = 3$.

ЗАДАНИЯ

Задание 1. Выяснить, при каких значениях параметра $\lambda \neq 0$ к интегральному уравнению Фредгольма второго рода применим принцип сжимающих отображений в пространстве $C[a,b]$ и в пространстве

$L_2[a,b]$. При $\lambda = \lambda_0$ найти приближенное решение уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ и сравнить его с точным решением. Составить алгоритм и написать программный код, реализующий метод последовательных приближений, предусматривающий:

- приведение интегрального уравнения к специальному виду для применения метода последовательных приближений;
- вычисление коэффициента сжатия;
- вычисление априорной оценки количества итераций;
- выбор начального приближения;
- составление итерационного процесса в каждой фиксированной точке t_i, $i = 1, \ldots, n$ по правилу

$$x_n(t_i) = \lambda_0 \int\limits_a^b \mathcal{K}(t_i, s) x_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s + y(t_i)$$

  с приближенным вычислением интеграла по формуле Симсона с шагом 0,05;
- вывода на печать номера последней итерации, апостериорной погрешности, графика точного и приближенного решения.

1.1. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 (1+t)s^2 x(s)\,\mathrm{d}s = t^2;$

1.2. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 e^{t-s} x(s)\,\mathrm{d}s = 1;$

1.3. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 \cos\pi(t-s) x(s)\,\mathrm{d}s = 1;$

1.4. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 \dfrac{t}{\sqrt{1+s}} x(s)\,\mathrm{d}s = t^2;$

1.5. $a = -1,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 (t^2-1)s^3 x(s)\,\mathrm{d}s = t;$

1.6. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 \dfrac{t}{1+s} x(s)\,\mathrm{d}s = -5;$

1.7. $a = 0,\ b = 1,\ x(t) - \lambda \int\limits_0^1 t^2 s x(s)\,\mathrm{d}s = t^3;$

1.8. $a=-1,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1(t^2-1)sx(s)\,\mathrm{d}s=t;$

1.9. $a=-2,\ b=2,\ x(t)-\lambda\int\limits_{-2}^{2}(1+t)(1+s)x(s)\,\mathrm{d}s=t;$

1.10. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1\frac{\sqrt{1+t}}{1+s}\,x(s)\,\mathrm{d}s=3;$

1.11. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1 t\sqrt{1-s}\,x(s)\,\mathrm{d}s=\sqrt{1-t};$

1.12. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1 t^3s^2x(s)\,\mathrm{d}s=t^2;$

1.13. $a=-1,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}(1+t)s^2x(s)\,\mathrm{d}s=t^2;$

1.14. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1\frac{\sqrt[4]{1+t}}{1+s}\,x(s)\,\mathrm{d}s=1+t;$

1.15. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1\frac{t}{1+s}\,x(s)\,\mathrm{d}s=t;$

1.16. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1 t^2(1+s)x(s)\,\mathrm{d}s=2;$

1.17. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1 t^3\sqrt{1+s}\,x(s)\,\mathrm{d}s=t^2;$

1.18. $a=-1,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1} t(s^2-1)x(s)\,\mathrm{d}s=1+\tfrac{4}{3}\,t;$

1.19. $a=-1,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}(ts+t^2)x(s)\,\mathrm{d}s=1;$

1.20. $a=-1,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1} s^2e^tx(s)\,\mathrm{d}s=1+t;$

1.21. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1 s^2(t^2+1)x(s)\,\mathrm{d}s=1;$

1.22. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_0^1 s(t^2-1)x(s)\,\mathrm{d}s=t;$

1.23. $a=-1,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1} t^3 s x(s)\,\mathrm{d}s=t;$

1.24. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_{-1}^{1} \frac{1+t}{1+s}\,x(s)\,\mathrm{d}s=t;$

1.25. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{1} t^3 s\,x(s)\,\mathrm{d}s=t^2;$

1.26. $a=1,\ b=e,\ x(t)-\lambda\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln s}{t}\,x(s)\,\mathrm{d}s=\ln t;$

1.27. $a=0,\ b=1,\ x(t)-\lambda\int\limits_{0}^{1} te^{t-s}\,x(s)\,\mathrm{d}s=e^t.$

Задание 2. Методом последовательных приближений найти решение следующих уравнений Вольтерра второго рода в пространстве $C[0,1]$:

2.1. $x(t)-\int\limits_{0}^{t}(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s=t;$

2.2. $x(t)+\int\limits_{0}^{t}(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s=1;$

2.3. $x(t)-\int\limits_{0}^{t}(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s=1;$

2.4. $x(t)+\int\limits_{0}^{t}x(s)\,\mathrm{d}s=\frac{t^2}{2}+t;$

2.5. $x(t)-\int\limits_{0}^{t}(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s=1+t;$

2.6. $x(t)+\int\limits_{0}^{t}x(s)\,\mathrm{d}s=2t+2;$

2.7. $x(t)-\int\limits_{0}^{t}x(s)\,\mathrm{d}s=\frac{t^3}{3}-2t;$

2.8. $x(t)+\int\limits_{0}^{t}tx(s)\,\mathrm{d}s=2t^2+2;$

2.9. $x(t)-\int\limits_{0}^{t}(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s=1+t.$

2.10. $x(t) - \int\limits_0^t ts^2 x(s)\,\mathrm{d}s = 1;$

2.11. $x(t) - \int\limits_0^t ts^3 x(s)\,\mathrm{d}s = t;$

2.12. $x(t) - \int\limits_0^t t\,x(s)\,\mathrm{d}s = 2t^2 + t;$

2.13. $x(t) - \int\limits_0^t t^2 s^2 x(s)\,\mathrm{d}s = t.$

ФРАКТАЛЬНОЕ СЖАТИЕ ГРАФИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Принцип сжимающих отображений является математическим фундаментом метода фрактального сжатия графической информации, который позволяет значительно уменьшить объем хранимых данных о некоторых изображениях. В данном случае речь идет о кодировании – переводе информации из одного вида в другой. Чтобы объяснить эффект кодирования, сначала сформулируем понятие сходства изображений (геометрических фигур). Для этого введем понятие метрики на множестве изображений.

Отождествим изображение с некоторым замкнутым ограниченным подмножеством X фиксированного прямоугольника Π на плоскости. Пусть $G_1, G_2 \in X$. Введем расстояние Хаусдорфа между G_1, G_2. Назовем *отклонением множества* G_1 от G_2 величину

$$\delta(G_1, G_2) = \max_{x \in G_1} \delta(x, G_2) = \max_{x \in G_1} \min_{y \in G_2} \|x - y\|.$$

Отклонение $\delta(G_1, G_2)$ показывает, насколько фигура G_1 выходит за пределы фигуры G_2.

Аналогично

$$\delta(G_2, G_1) = \max_{y \in G_2} \delta(y, G_1) = \max_{y \in G_2} \min_{x \in G_1} \|x - y\|.$$

В качестве $\|\cdot\|$ на плоскости можно выбрать, например, евклидову норму. Заметим, что отклонение точки плоскости от заданного множества

$$\delta(x, G_2) = \min_{y \in G_2} \|x - y\| = f(y)$$

определяет непрерывную функцию.

Отклонение не является метрикой.

О п р е д е л е н и е 1. *Расстоянием Хаусдорфа* называется величина

$$d_H(G_1, G_2) = \max\{\delta(G_1, G_2), \delta(G_2, G_1)\}.$$

Расстояние Хаусдорфа характеризует максимальный выступ одной из фигур G_1 или G_2 за пределы другой.

Рассмотрим геометрический смысл метрики Хаусдорфа. Определим замкнутую ε-окрестность множества G, $\varepsilon > 0$,

$$G(\varepsilon) = \{z \in X : \delta(z, G) \leqslant \varepsilon\}.$$

Тогда отклонение

$$\delta(G_1, G_2) = \min_{\varepsilon}\{\varepsilon : G_1 \subset G_2(\varepsilon)\},$$

а $d_H(G_1, G_2)$ – больший из радиусов соответствующих окрестностей множеств G_1 и G_2.

Обозначим через (X, d_H) метрическое пространство изображений.

Теорема 1. (X, d_H) – *полное метрическое пространство, т. е. любая фундаментальная в метрике Хаусдорфа последовательность непустых замкнутых в* Π *множеств сходится к не пустому замкнутому в* Π *множеству.*

Данную теорему можно обобщить на случай любого пространства конечной размерности, состоящего из замкнутых ограниченных (компактных) множеств. Мы ограничимся рассмотрением плоскости $\mathbb{R}^2$.

Отображение $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *аффинным преобразованием плоскости*, если оно является композицией линейного преобразования на плоскости и параллельного переноса, т. е.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Определение 2. Набор аффинных преобразований $A_1, A_2, \ldots, A_m$ называется *аффинным коллажем* (коллаж – изображение объекта в стиле мозаики) на заданном прямоугольнике Π, если

- $A_i (i = 1, \ldots, m)$ – сжатие;
- $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Pi$, т. е. выполнены условия сохранения области.

Условие сжатия равносильно условию

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leqslant \alpha \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|, \ 0 < \alpha < 1.$$

Если условие сжатия выполнено, то второе условие говорит о том, что вектор сдвига не выводит точки за пределы прямоугольника Π.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – аффинный коллаж на заданном прямоугольнике П, (X, d_H) – пространство изображений, заданных на П. Преобразование $F: X \to X$

$$F(\cdot) = \bigcup_{i=1}^{m} A_i(\cdot)$$

называется *преобразованием аффинного коллажа* на П.

Теорема 2. *Преобразование аффинного коллажа является сжимающим отображением в пространстве изображений.*

Из теоремы вытекает, что если F – преобразование аффинного коллажа, то существует единственное изображение $G^\star \in X$ такое, что

$$F(G^\star) = G^\star, \ G^\star = \lim_{n\to\infty} F^n(G_0),$$

т. е. каждое преобразование аффинного коллажа является кодом некоторого изображения.

Коэффициент сжатия показывает отношение размера файла с первоначальным изображением к размеру файла со сжатым изображением.