Appunti per il 1° Anno - 2° Semestre - Gruppo C2

Geometria

Dalle lezioni della prof.ssa Cioffi Francesca

Anno 2023/24 - Di Tota Gaetano

Siete pregati di segnalare ogni tipo di errore!

Geometria - a.a. 2023/2024

Simboli

$\cup$ unione

$\cap$ intersezione

$\forall$ per ogni

$\exists$ esiste

$\in$ appartiene

$\notin$ non appartiene

$\vee$ o disgiunzione

$\wedge$ e congiunzione

$\Leftrightarrow$ equivalente

$\neg$ negazione

$\Rightarrow$ implica

$\subseteq$ inclusione

$\subset$ inclusione propria

$\triangle$ differenza simmetrica

$\setminus$ differenza insiemistica

$\bigcup$ unione unaria

$\bigcap$ intersezione unaria

Lezione 1° del 04/03/2024

Vettore libero

Definizione - Vettore libero

Un vettore rappresenta lo spostamento da un punto ad un altro, esso ha come caratteristiche: direzione, verso e lunghezza.

Definizioni e Notazioni

Definizione - Simboli

- $\emptyset$ = Insieme vuoto
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A (x \in B)$
- $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- $A \cap B \Leftrightarrow \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B \Leftrightarrow \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- $B \setminus A \Leftrightarrow \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$

Domanda - Come assegnare un'insieme?

Per assegnare degli oggetti ad un'insieme abbiamo due modi distinti

1. Elencare gli elementi che appartengono all'insieme
   $x \in A$ oppure $y \notin A$
2. Caratterizzare gli elementi che appartengono all'insieme mediante una proprietà
   $B = \{x \mid x \text{ è uno studente del corso di Geometria}\}$

Definizione - Complemento

Prendiamo $A \subseteq X$ e chiamiamo l'operazione $X \setminus A$ complemento di A in X che indichiamo con $C_X(A)$

Definizione - Leggi di De Morgan sul Complemento

Unione dei Complementi

$$C_X(A \cup B) = C_x(A) \cap C_X(B)$$

Dimostrazione

$$y \in C_X(A \cup B) \Leftrightarrow y \in X \wedge y \notin A \cup B \Leftrightarrow y \in X \wedge (y \notin A \vee y \notin B) \Leftrightarrow (y \in X \vee y \notin A) \wedge (y \in X \vee y \notin b) \Leftrightarrow y \in C_X(A) \wedge y \in C_x(B) \Leftrightarrow y \in C_X(A) \cap C_X(B)$$

Intersezione dei Complementi

$$C_X(A \cap B) = C_x(A) \cup C_X(B)$$

Dimostrazione

$$y \in C_X(A \cap B) \Leftrightarrow y \in X \wedge y \notin A \cap B \Leftrightarrow y \in X \wedge (y \notin A \vee y \notin B) \Leftrightarrow (y \in X \wedge y \notin A) \vee (y \in X \wedge y \notin b) \Leftrightarrow y \in C_X(A) \vee y \in C_x(B) \Leftrightarrow y \in C_X(A) \cup C_X(B)$$

Prodotto Cartesiano

Definizione - Prodotto Cartesiano

Siani $A, B \neq \emptyset$ allora definiamo prodotto cartesiano tra due insiemi $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\}$

Esempio - Prodotto Cartesiano

Siano $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y\}$ allora otteniamo $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$

Sia $A_1, A_2, ..., A_n \neq \emptyset$ abbiamo che $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1 \land a_2 \in A_2 \land ... \land a_n \in A_n\}$ allora

- Preso il polinomio $3x_1 - x_2 + 4x_3 + x_5 = 1$
- Definiamo l'insieme di soluzioni $S = \{(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}) \in \mathbb{R}^5 \mid 3\overline{x_1} - \overline{x_2} + 4\overline{x_3} + \overline{x_5} = 1\}$
- Dove sappiamo che $(1, 3, -1, 0, 5) \in S$

Principio di Induzione

Definizione - Principio di Induzione

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ sia $P(n)$ un'affermazione che dipende da n allora

1. **Base induttiva**: $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}^* \quad (P(\overline{n} \text{ è verificata}))$
2. **Passo induttivo**: $\forall n > \overline{n} \quad (P(n-1) \Rightarrow P(n))$

Esempio - Principio di Induzione

Sia $P(n) =$ "Se A ha n elementi allora $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi" allora abbiamo

- **Base induttiva**: $\overline{n} = 0$ allora $P(0) : A = \emptyset$ e $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$ esattamente $2^0 = 1$ elementi
- **Passo induttivo**: $\forall n > 0 \quad P(n-1) \Rightarrow P(n)$

Siano $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}\} \subseteq B = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ allora so che

1. $\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\} = \{x \mid x \subseteq B \land \alpha_n \notin x\} \subseteq \mathcal{P}(B)$
2. $\mathcal{P}(B) \setminus \mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq B \land \alpha_n \in x\}$
3. $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) \cup \{x \cup \{\alpha_n\} \mid x \subseteq A\}$

Concludo quindi che $\mathcal{P}(A)$ ha $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ elementi

Relazione tra insiemi

Definizione - Relazione

Siano $A, B \neq \emptyset$ chiamiamo relazione (oppure corrispondenza) di A in B un sottoinsieme $\rho \subseteq A \times B$

$$\text{Sia } a \in A \text{ e } b \in B \text{ allora indichiamo } a \ \rho \ b \Leftrightarrow (a, b) \in \rho$$

Chiamiamo **relazione capovolta** la sua inversa $\overset{\frown}{\rho} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$

$$\forall a, b \in A (a \ \overset{\frown}{\rho} \ b \Leftrightarrow b \ \rho \ a)$$

Definizione - Relazione di equivalenza

Sia $A = B = \emptyset$ è detta relazione binaria in A ed è di equivalenza se rispetta le seguenti proprietà

1. **Riflessiva**: $\forall a \in A(a\ \rho\ a)$
   in termini di coppia ordinata $(a, a) \in \rho$
2. **Simmetrica**: $\forall a, b \in A(a\ \rho\ b \wedge b\ \rho\ a)$
   in termini di coppia ordinata $(a, b) \Rightarrow (b, a) \in \rho$
3. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A(a\ \rho\ b \wedge b\ \rho\ c \Rightarrow a\ \rho\ c)$
   in termini di coppia ordinata $(a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho$

Esempio - Relazione di equivalenza

Sia $A = \{1, 3, 5\}$ allora $\rho = \{(1, 1), (3, 3), (5, 5), (3, 5), (5, 3)\}$

Sia $A = \mathbb{N}^*$ allora $\rho = \{(x, y) \mid |x - y|$ è pari o nullo$\}$

Sia $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ allora $\rho \subseteq A \times A$ abbiamo che $\rho = \{(m, n), (m', n') \mid m \cdot n' = m' \cdot n\} = \mathbb{Q}$

Teorema - $\rho = \overset{\curvearrowleft}{\rho}$ quando ρ è di equivalenza

Sia $\rho \subseteq A \times A$ posso dimostrare una sola inclusione perché $(\overset{\curvearrowleft}{\overset{\curvearrowleft}{\rho}}) = \rho$

Dimostrazione Sia $(a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho \Rightarrow (a, b) \in \overset{\curvearrowleft}{\rho}$

Domanda - Quale relazione identifica due vettori applicati uguali?

È chiamata relazione di equipollenza quella che identifica due coppie di punti sul piano che hanno stessa direzione, verso e lunghezza.

Definiamo quindi ρ che identifica due vettori applicati uguali:

- $F = \{P \mid P$ è un punto nello spazio della geometria elementare$\}$
- $A = F \times F = \{(P, Q) \mid P, Q \in F\}$ ottenendo l'insieme dei vettori applicati
- Sia poi $\rho \subseteq A \times A$ ottenendo $\rho = \{((P, Q), (P', Q')) \mid (P, Q)$ e (P', Q') abbiamo stessa direzione, verso e lunghezza$\}$

Classe di equivalenza

Definizione - Classe di equivalenza

Sia $A \neq \emptyset$ e ρ una relazione di equivalenza su A allora chiamo classe di equivalenza

$$\forall a \in A \quad [a]_\rho := \{x \in A \mid x \ \rho \ a\}$$

Le classi di equivalenza hanno le seguenti proprietà

1. $\forall a \in A \quad a \in [a]_\rho$
2. $\forall a, b \in A \quad a \in [b]_\rho \Rightarrow [a]_\rho = [b]_\rho$
3. $\forall a, b \in A \quad [a]_\rho \cap [b]_\rho = \emptyset \vee [a]_\rho = [b]_\rho$

Dimostrazione

1. $(a, a) \in \rho$
2. Qui dobbiamo osservare una doppia inclusione
   - "$\subseteq$" $\left.\begin{array}{l} z \in [a]_\rho \Rightarrow z \ \rho \ a \Rightarrow (z, a) \in \rho \\ \text{per ipotesi } a \in [b]_\rho \Rightarrow (a, b) \in \rho \end{array}\right\} \Rightarrow (z, b) \in \rho \Rightarrow z \in [b]_\rho$
   - "$\supseteq$" $\left.\begin{array}{l} z \in [b]_\rho \Rightarrow z \ \rho \ b \Rightarrow (z, b) \in \rho \\ \text{per ipotesi } a \in [b]_\rho \Rightarrow (a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho \end{array}\right\} \Rightarrow (z, a) \in \rho \Rightarrow z \in [a]_\rho$
3. Se $\exists z \in [a]_\rho \cap [b]_\rho$ allora sappiamo che $z \in [a]_\rho$ e $z \in [b]_\rho \Rightarrow [a]_\rho = [z]_\rho = [b]_\rho$

Domanda - Qual'è l'insieme delle classi di equivalenza?

Se ρ è una relazione di equivalenza su A allora definiamo insieme quoziente (oppure partizione) $\frac{A}{\rho} := \{[a]_\rho \mid a \in \rho\}$ l'insieme di tutte le classi di equivalenza, questo ci dice due cose

- $A = \bigcup\limits_{[a]_\rho \in \frac{A}{\rho}} [a]_\rho$
- Se $[a]_\rho \cap [b]_\rho = \emptyset \Rightarrow [a]_\rho \neq [b]_\rho$

Esempio - Classi di Equivalenza

Sia $A = \{1, 3, 5\}$ e la relazione $\rho = \{(1, 1), (3, 3), (5, 5), (3, 5), (5, 3)\}$ allora abbiamo le seguenti classi di equivalenza

- $[1] = \{1\}$
- $[3] = \{3, 5\}$
- $[5] = \{5, 3\}$

Dove otteniamo che $[3] = [5]$ e inoltre che $[1] \,\dot{\cup}\, [3] = A$

Lezione 2° del 06/03/2024

Relazione di Parallelismo

Definizione - Relazione di Parallelismo

Siano r_1 e r_2 due rette distinte, allore diciamo che sono parallele se sono complanari, cioè se esiste un piano che contiene sia r_1 e r_2 dove la loro intersezione risulta vuota.

NOTA una retta si dice sempre parallela a se stessa.

Definiamo quindi l'insieme delle rette $A = \{r \mid \text{retta dello spazio nella geometria elementare}\}$ e su questo costruiamo $\rho \subseteq A \times A$ che definiamo usando la relazione di parallelismo $\rho = \{(r_1, r_2) \mid r_1, r_2 \text{ sono parallele}\}$

Sappiamo che la relazione di parallelismo è di equivalenza perché:

- **Riflessiva**: $\forall r \in A \quad (r, r) \in \rho$
- **Simmetrica**: $\forall r, r_1 \in A \quad (r, r_1) \in \rho \Rightarrow (r_1, r) \in \rho$
- **Transitiva**: $\forall r, r_1, r_2 \in A \quad (r, r_1)$ e $(r_1, r_2) \in \rho \Rightarrow (r, r_2) \in \rho$

Direzione e Verso

Definizione - Direzione

Per dare la definizione di direzione, dobbiamo partire dalla definizione di retta per poi usare questo strumento per definire la direzione, vediamo come

1. **Retta**: usiamo le classi di equivalenza per definire se due rette hanno la stessa direzione, ovvero se sono parallele, quindi $[r]_\rho = \{r_1 \in A \mid r_1 \; \rho \; r\}$
2. **Vettore applicato**: due vettori applicati (P, Q) e (R, T) hanno la stessa direzione se sono contenuti in rette parallele
3. **Vettore libero**: due vettori liberi $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RT}$ hanno la stessa direzione se si possono disegnare su rette parallele

Nota - Vettore Nullo

Definiamo (P, P) il vettore nullo che ha direzione e verso indefinite.

Definizione - Verso

Per questa definizione dobbiamo sfruttare come strumento la retta e le classi di equivalenza, perché

- **Vettore applicato**: siano (P, Q) e (R, T) due vettori applicati paralleli, allora hanno lo stesso verso se applicando uno dei due nel punto di applicazione dell'altro, otteniamo che i due secondi estremi si trovano nella stessa parte della retta individuata rispetto al comune punto di applicazione
- **Vettore libero**: siano $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RT}$ due vettori liberi paralleli, allora hanno lo stesso verso se lo hanno i loro rappresentati (P, Q) e (R, T)

Applicazione

Definizione - Applicazione

Siano $A, B \neq \emptyset$ allora definiamo una corrispondenza $f \subseteq A \times B$ che chiamiamo applicazione (oppure funzione) di A in B che indichiamo con $f : A \to B$ se verifica la seguente condizione:

$$\forall a \in A \quad \exists! b \in B \quad (a, b) \in f$$

Chiamiamo A dominio e B codominio di f, inoltre questa applicazione si dice

- **Iniettiva**: due elementi distinti di A corrispondono a due elementi distinti di B

$$\forall a, b \in A \quad f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

- **Suriettiva**: ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad f(a) = b$$

- **Biettiva**: se è sia iniettiva che suriettiva

$$\forall b \in B \quad \exists! a \in A \quad f(a) = b$$

Definizione - Applicazione inversa

Sia $f : A \to B$ allora definiamo $f^{-1} = \{(b, a) \mid f(a) = b\}$ applicazione inversa che indichiamo con $f^{-1} : B \to A$ ed esiste quando

- $f_o f^{-1} : B \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{f} B$ quindi $f_o f^{-1} = id_B$
- $f_o^{-1} f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} A$ quindi $f_o^{-1} f = id_A$

Nota - Se f è biettiva allora anche f^{-1} è biettiva

Sia $f : A \to B$ un'applicazione biettiva allora sappiamo dire per f^{-1} che è un'applicazione biettiva perché

$$f^{-1} \subseteq B \times A \text{ biettiva} \Leftrightarrow \forall b \in B \quad \exists! a \in A \quad (b, a) \in f^{-1} \Leftrightarrow \forall b \in B \quad \exists! a \in A \quad (a, b) \in f \Leftrightarrow f \subseteq A \times B \text{ è biettiva}$$

Esempio - Applicazione

Siano $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{x, y\}$ allora data $f : A \to B$ composta in questo modo $f = \{(1, x), (3, x), (5, y)\}$ sappiamo che è un'applicazione.

Attenzione che l'applicazione inversa $f^{-1} = \{(x, 1), (x, 3), (y, 5)\}$ non è un'applicazione

Esempio - Suriettività e Iniettività

Siano $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{x, y\}$ osserviamo le seguenti applicazioni

- $g : B \to A$ composta in questo modo $g = \{(x, 1), (y, 5)\}$ vediamo che
  - è iniettiva
  - non è suriettiva perché $3 \in A$ ma $\nexists y \in B : g(y) = 3$
- $h : A \to A$ composta in questo modo $h = \{(1, 3), (3, 5), (5, 1)\}$ vediamo che

- è iniettiva
- è suriettiva
- è biettiva

- $k : A \to A$ composta in questo modo $k = \{(1,5),(3,5),(5,3)\}$ vediamo che
  - non è iniettiva
  - non è suriettiva perché $1 \in A$ ma $\nexists y \in A : k(y) = 1$

Domanda - Cosa succede se considerano l'applicazione f e f^{-1} su una singola parte?

Andiamo prima a considerare una parte del dominio e poi del codominio applicate rispettivamente all'applicazione f e poi alla sua inversa f^{-1}

- $\forall X \subseteq A \quad f(X) = \{f(a) \mid a \in X\} \subseteq B$
- $\forall Y \subseteq B \quad f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \subseteq A$

NOTA da questo deduciamo che $Im\ f = \{f(a) \mid a \in A\}$ ovvero esattamente $Im\ f := f(A)$

Definizione - Applicazione composta

Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ allora possiamo definire l'applicazione composta l'unione di più applicazioni

$$g_o f : A \to C$$

Questa applicazione segue il seguente schema $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ ovvero $g_0 f(a) = g(f(a))$

Domanda - Cosa posso dire sulle proprietà della composizione di applicazioni?

Se prese le singole applicazioni f e g osservando la loro composta $g_o f$ posso dire

f e g	$g_o f$
iniettiva	iniettiva
suriettiva	suriettiva
biettiva	biettiva

Lezione 3° del 11/03/2024

Restrizione e Riduzione

Definizione - Restrizione

Una restrizione è una sostituzione del dominio con un suo sottoinsieme non vuoto, sia $f : A \to B$ e un suo sottinsieme $\emptyset \neq X \subseteq A$, chiamo restrizione di f a X l'applicazione

$$f_{|X} : X \to B \text{ con la proprietà che } \forall x \in X \quad f_{|X}(x) = f(x)$$

Definizione - Riduzione

Una riduzione è una sostituzione del codominio con un suo sottoinsieme non vuoto, sia $f : A \to B$ e un suo sottinsieme $\emptyset \neq Y \subseteq B$, chiamo riduzione di f a Y l'applicazione

$$f^{|Y} : X \to Y \text{ con la proprietà che } f(X) \subseteq Y$$

Cardinalità di un'insieme

Definizione - Insiemi equipotenti

Siano A e B due insiemi, li definiamo equipotenti (ovvero hanno la stessa potenza o ordine) se esiste un'applicazione biettiva $f : A \to B$ con la proprietà che $\exists! f^{-1} : B \to A$

Nota - Potenze numerabili

Sono dette potenze numerabili tutti gli insiemi equipotenti ad $\mathbb{N}$, infatti possiamo prendere in esempio $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ ma sappiamo anche che $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$, da questo deduciamo che "infinito" è solo un aggettivo e non una cardinalità.

Operazioni binarie

Definizione - Operazione binaria

Siano $A, B, C \neq \emptyset$ chiamiamo operazione binaria un'applicazione $\perp : A \times B \to C$ e ne distinguiamo due tipi

1. **Interna** quando $A = B = C$
2. **Esterna** quando $B = C$ e si dice che ha operatori in A

Domanda - Qual è insieme dei vettori liberi?

Sfruttando le classi di equivalenza e l'insieme quoziente, usiamo la relazione di equipollenza ρ e il prodotto cartesiano $F \times F$ dove F è l'insieme dei punti, definendo così l'insieme dei vettori liberi $\mathbb{V}$:

$$\frac{F \times F}{\rho} = \mathbb{V} = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \text{ sono punti dello spazio della geometria elementare}\}$$

Nota - Operazioni tra vettori liberi

Definiamo adesso le operazioni tra vettori liberi usando lo strumento delle operazioni binarie

- $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V} \quad (u, v) \rightsquigarrow w$
- $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V} \quad (\alpha, u) \rightsquigarrow \alpha u$

Andiamo ad osservare più nel dettaglio queste operazioni e le loro proprietà

- $+$ è un'operazione interna che restituisce un vettore libero ottenuto prendendo come rappresentati di u e v coppie del tipo $(P, Q), (Q, R)$ tali che $w = [(P, R)]$
- $\cdot$ è un'operazione esterna tale che αu è un vettore che ha stessa direzione di u, la sua lunghezza è calcolata come $|\alpha||u|$ e stesso verso se $\alpha \geq 0$ oppure opposto se $\alpha < 0$

NOTA Se $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha u = 0 = (P, P)$ ovvero il vettore nullo con verso, direzione e lunghezza indefinita

Struttura algebrica / Spazio Vettoriale

Definizione - Struttura algebrica

Si tratta di una n-upla $(n \in \mathbb{N})$ costituita da insiemi e operazioni definite su questi insiemi.

Definizione - Gruppoide

Una struttura algebrica dalla forma $(A, \perp)$ con l'insieme $A \neq \emptyset$ e l'operazione $\perp : A \times A \to A$ della quale possiamo analizzare le seguenti proprietà:

- **Associativa** $\forall a, b, c \in A \quad (a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$
- **Commutativa** $\forall a, b \in A \quad a \perp b = b \perp a$
- **Neutro** $\exists t \in A \quad \forall x \in A \quad x \perp t = x = t \perp x$
- **Simmetrici** $\forall a \in A \quad \exists \bar{a} \in A \quad a \perp \bar{a} = t = \bar{a} \perp a$

Definizione - Gruppo

Sia data la struttura algebrica $(A, \perp)$ si dice gruppo se $\perp$ è associativa, ammette neturo e simmetrici, inoltre se è anche commutativa è detto **Abeliano**

Definizione - Anello

Sia data la struttura algebrica $(A, +, \cdot)$ con le operazioni definite così $+ : A \times A \to \quad \cdot : A \times A \to A$, allora si chiama anello se

1. $+$ è un gruppo Abeliano
2. $\cdot$ è associativa
3. $\cdot$ è distributiva rispetto a $+$

Inoltre distinguiamo anche i seguenti tipi di anelli

- **Commutativo** $\cdot$ è commutativa
- **Unitario** $\cdot$ ammette neutro
- **Campo** anello commutativo unitario dove ogni elemento, tranne lo 0_A, ha inverso rispetto a $\cdot$

Definizione - Spazio vettoriale

Sia $(K, +, \cdot)$ un campo e V un'insieme non vuoto, definiamo le seguenti operazioni

- $\boxplus : V \times V \to V$ come operazione interna
- $\boxdot : K \times V \to V$ come operazione esterna

Allora la struttura algebrica $(K, V, \boxplus, \boxdot)$ è chiamata spazio vettoriale su K quando

1. $(V, \boxplus)$ è un gruppo Abeliano
2. $\forall \alpha \in K \quad \forall u, v \in V \quad \alpha \boxdot (u \boxplus v) = (\alpha \boxdot u) \boxplus (\alpha \boxdot v)$
3. $\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall u \in V \quad u \boxdot (\alpha + \beta) = (\alpha \boxdot u) \boxplus (\beta \boxdot u)$
4. $\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall u \in V \quad (\alpha \cdot \beta) \boxdot u = \alpha \boxdot (\beta \boxdot u)$
5. $\forall u \in V \quad 1_K \boxdot u = u$

NOTA! Gli elementi di K sono detti scalari e gli elementi di V vettori

Teorema - Sui Gruppoidi

Sia $(A, \perp)$ un gruppoide allora sappiamo che

1. Se $\perp$ ammette neutro t esso è unico
   $\forall a \in A \quad a \perp t = x = t \perp a$
2. Se $\perp$ ammette neutro t ed è associativa, allora se $a \in A$ ha un simmetrico a', esso è unico
   $a \in A \quad \exists a' \in A \quad a \perp a' = t = a' \perp a$
3. Se $\perp$ ammette neutro t ed è associativa, con $a_1, a_2 \in A$ simmetrizzabili, allora $a_1 \perp a_2$ ha come simmetrico $a'' \perp a'$
   $a_1, a_2, \in A \quad \exists a', a'' \in A \quad a_1 \perp a' = t = a' \perp a_1 \quad a_2 \perp a'' = t = a'' \perp a_2$

Dimostrazione

1. Se esiste $t' \in A$ con le stesse proprietà di t allora abbiamo $t = t \perp t' = t'$
2. Se esiste $a'' \in A$ con le stesse proprietà di a' allora abbiamo $a' = a' \perp t = a' \perp (a \perp a'') = (a' \perp a) \perp a'' = t \perp a'' = a''$
3. $(a_1 \perp a_2) \perp (a'' \perp a') = a_1 \perp (a_2 \perp a'') \perp a' = a_1 \perp t \perp a' = a_1 \perp a' = t$

Lezione 4° del 13/03/2024

Teorema - Sugli Spazi Vettoriali

Sia $(K, +, \cdot)$ un campo e $V = K^n$ con $n \in \mathbb{N}^*$, sappiamo che $(K, K^n, \boxplus, \boxdot)$ è uno spazio vettoriale su K, definiamo le operazioni dello spazio vettoriale:

- $\boxplus : K^n \times K^n \to K^n$
  $((a_1, \dots, a_n 2), (b_1, \dots, b_n)) \rightsquigarrow (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$
- $\boxdot : K \times K^n \to K^n$
  $(\alpha, (a_1, \dots, a_n)) \rightsquigarrow (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$

Dimostrazione per il caso in cui $n = 2$

- $(K^2, \boxplus)$ è un gruppo abeliano
  - $\boxplus$ è commutativa $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K^2$
    $$(a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) = (b_1, b_2) \boxplus (a_1, a_2)$$
  - $\boxplus$ è associativa $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in K^2$
    $$((a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2)) \boxplus (c_1, c_2) = ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2) = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2)) = (a_1, a_2) \boxplus ((b_1, b_2) \boxplus (c_1, c_2))$$
  - $\boxplus$ ha elemento neutro $\forall (a_1, a_2) \in K^2 \quad \exists (t_1, t_2) \in K^2$
    $$(a_1, a_2) \boxplus (t_1, t_2) = (a_1 + t_1, a_2 + t_2) = (a_1, a_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + t_1 = a_1 \Leftrightarrow t_1 = 0_K \\ a_2 + t_2 = a_2 \Leftrightarrow t_2 = 0_K \end{cases} \Leftrightarrow (t_1, t_2) = (0_K, 0_K)$$
  - $\boxplus$ ammette simmetrici $\forall (a_1, a_2) \in K^2 \quad \exists (a_1', a_2') \in K^2$

$$(a_1,a_2)\boxplus(a_1',a_2')=(a_1+a_1',a_2+a_2')=(0_K,0_K)\Leftrightarrow\begin{cases}a_1+a_1'=0_K\Leftrightarrow a_1'=-a_1\\ a_2+a_2'=0_K\Leftrightarrow a_2'=-a_2\end{cases}\quad\text{in } K$$

- $\forall\alpha\in K\quad\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in K^2\quad\alpha\boxdot((a_1,a_2)\boxplus(b_1,b_2))=(\alpha\boxdot(a_1,a_2))\boxplus(\alpha\boxdot(b_1,b_2))$

$$\alpha\boxdot((a_1,a_2)\boxplus(b_1,b_2))=\alpha\boxdot(a_1+b_1,a_2+b_2)=(\alpha a_1+\alpha b_1,\alpha a_2+\alpha b_2)=(\alpha a_1,\alpha a_2)\boxplus(\alpha b_1,\alpha b_2)=(\alpha\boxdot(a_1,a_2))\boxplus(\alpha\boxdot(b_1,b_2))$$

- $\forall\alpha,\beta\in K\quad\forall(a_1,a_2)\in K^2\quad(a_1,a_2)\boxdot(\alpha+\beta)=((a_1,a_2)\boxdot\alpha)\boxplus((a_1,a_2)\boxdot\beta)$

$$(\alpha+\beta)\boxdot(a_1,a_2)=((\alpha+\beta)a_1,(\alpha+\beta)a_2)=(\alpha a_1+\beta a_1,\alpha a_2+\beta a_2)=(\alpha a_1,\alpha a_2)\boxplus(\beta a_1,\beta a_2)=(\alpha\boxdot(a_1,a_2))\boxplus(\beta\boxdot(a_1,a_2))$$

- $\forall\alpha,\beta\in K\quad\forall(a_1,a_2)\in K^2\quad(\alpha\cdot\beta)\boxdot(a_1,a_2)=\alpha\boxdot(\beta\boxdot(a_1,a_2))$

$$(\alpha\cdot\beta)\boxdot(a_1,a_2)=((\alpha\cdot\beta)\cdot a_1,(\alpha\cdot\beta)\cdot a_2)=(\alpha\cdot(\beta\cdot a_1),\alpha\cdot(\beta\cdot a_2))=\alpha\boxdot(\beta\boxdot(a_1,a_2))$$

- $\forall(a_1,a_2)\in K^2\quad 1_a\boxdot(a_1,a_2)=(a_1,a_2)$

$$1_K\boxdot(a_1,a_2)=(1_K\cdot a_1,1_K\cdot a_2)=(a_1,a_2)$$

Teorema - Propietà Aritmetiche sugli Spazi Vettoriali

1. $\forall\alpha\in K\quad\forall u\in V\quad\alpha\boxdot u=\underline{0}\Leftrightarrow\alpha=0$ oppure $u=\underline{0}$
2. $\forall\alpha\in K\quad\forall u\in V\quad-(\alpha\boxdot u)=-(\alpha)\boxdot u=\alpha\boxdot-(u)$
3. $\forall\alpha\neq0\quad\forall u,v\in V\quad\alpha\boxdot u=\alpha\boxdot v\Rightarrow u=v$
4. $\forall\alpha,\beta\in K\quad\forall u\in V\setminus\{\underline{0}\}\quad\alpha\boxdot u=\beta\boxdot u\Rightarrow\alpha=\beta$

Dimostrazione

1. - " $\Leftarrow$ "
     - Sia $\alpha=0$ ed osserviamo che $0\boxdot u=(0+0)\boxdot u=(0\boxdot u)\boxplus(0\boxdot u)$ quindi so che $\exists-(0\boxdot u)$
       $\underline{0}=\quad(0\boxdot u)-(0\boxdot u)=((0\boxdot u)\boxplus(0\boxdot u))-(0\boxplus u)\quad=0\boxdot u$
     - Sia $u=\underline{0}$ ed osserviamo che $\alpha\boxdot\underline{0}=\alpha\boxdot(\underline{0}+\underline{0})=(\alpha\boxdot\underline{0})\boxplus(\alpha\boxdot 0)$ quindi so che $\exists-(\alpha\boxdot\underline{0})$
       $\underline{0}=\quad(\alpha\boxdot\underline{0})-(\alpha\boxdot\underline{0})=((\alpha\boxdot\underline{0})\boxplus(\alpha\boxdot\underline{0}))-(\alpha\boxdot\underline{0})\quad=\alpha\boxdot0$
   - " $\Rightarrow$ "
     - Se $\alpha\neq0\Rightarrow\exists\alpha^{-1}$ allora
       $u=1\boxdot u=\quad(\alpha^{-1}\alpha)\boxdot u=\alpha^{-1}\boxdot(\alpha\boxdot u)\quad=\alpha^{-1}\boxdot\underline{0}=\underline{0}$
2. $\forall\alpha\in K\quad\forall u\in V\quad-(\alpha\boxdot u)=-(\alpha)\boxdot u=\alpha\boxdot-(u)$

$$(-(\alpha)\boxdot u)\boxplus(\alpha\boxdot u)=(-\alpha+\alpha)\boxdot u=0\boxdot u=\underline{0}$$

$$(\alpha\boxdot-(u))\boxplus(\alpha\boxdot u)=\alpha\boxdot(-(u)\boxplus u)=\alpha\boxdot\underline{0}=\underline{0}$$

3. $\forall\alpha\neq0\quad\forall u,v\in V\quad\alpha\boxdot u=\alpha\boxdot v\Rightarrow u=v$

$$u=1\boxdot u=(\alpha^{-1}\cdot\alpha)\boxdot u=\quad\alpha^{-1}\boxdot(\alpha\boxdot u)=\alpha^{-1}\boxdot(\alpha\boxdot v)\quad=(\alpha^{-1}\cdot\alpha)\boxdot v=1\boxdot v=v$$

4. $\forall\alpha,\beta\in K\quad\forall u\in A\setminus\{\underline{0}\}\quad\alpha\boxdot u=\beta\boxdot u\Rightarrow\alpha=\beta$

$$\alpha\boxdot u=\beta\boxdot u\Rightarrow\alpha\boxdot u\boxplus-(\beta)\boxdot u=\underline{0}\Rightarrow(\alpha-\beta)\boxdot u=\underline{0}\Rightarrow\alpha-\beta=\underline{0}\Rightarrow\alpha=\beta$$

Sotto-spazio Vettoriale / Linearmente Chiuso

Definizione - Linearmente Chiuso

Sia $(K, V, \boxplus, \boxdot)$ uno spazio vettoriale e $X \subseteq V$ questo si dice Linearmente chiuso se

1. $X \neq \emptyset$
2. $\forall u, v \in X \quad u \boxplus v \in X$
3. $\forall \alpha \in K \quad \forall u \in X \quad \alpha \boxdot u \in X$

Esempio - Linearmente Chiuso

Sia $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{R}$ allora siano

- $H = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- $U = \{(\alpha, 3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Sappiamo che H è linearmente chiuso mentre U non lo è perché non è chiuso rispetto alle operazioni

Domanda - Ma $\underline{0}$ e l'opposto di u appartengono a X?

- Se $X \neq \emptyset$ allora sappiamo che $\exists u \in X$ con la proprietà che $\underline{0} = 0 \boxdot u \in X$
- Se $u \in X$ e $-u \in V$ allora sappiamo che $-u = (-1) \boxdot u \in X$

Definizione - Sotto-Spazio Vettoriale

Un sottoinsieme $X \subseteq V$ linearmente chiuso si dice sotto-spazio vettoriale di V se $(K, X, \boxplus_{|X}, \boxdot_{|X})$ è uno spazio vettoriale su K

Esempio - Sotto-Spazio Vettoriale

Sia $(R, R^3, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale, allora preso $H = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_3 = a_1, a_2\} = \{(a_1, a_2, a_1 + a_2) \in R^3\}$ osserviamo che sia un sotto-spazio vettoriale

- $(\mathbb{R}, +)$ è ancora un gruppo abeliano
- Le proprietà di distributività della $\cdot$ rispetto all'$+$ sono ancora rispettate perché ogni vettore di H è vettore di $\mathbb{R}^3$
- La proprietà di associatività della $\cdot$ è ancora rispettata perché ogni vettore di H è vettore di $\mathbb{R}^3$
- La proprietà di neutro di R rispetto alla $\cdot$ è conservata perché ogni vettore di H è vettore di $\mathbb{R}^3$

Ci resta solo da controllare la chiusura lineare di H

- $H \neq \emptyset$ perché se prendiamo $a_1 = a_2 = 0$ otteniamo il vettore $(0, 0, 0) \in H$
- $(a_1, a_2, a_1 + a_2) + (b_1, b_2, b_1 + b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_1 + a_2 + b_1 + b_2) \in H$
- $\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha(a_1, a_2, a_1 + a_2) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha(a_1 + a_2)) \in H$

Quindi $(\mathbb{R}, H, +, \cdot)$ è un sotto-spazio vettoriale

Combinazione lineare

Definizione - Combinazione lineare

Sia $(K, V, \boxplus, \boxdot)$ uno spazio vettoriale e preso una n-upla di vettori $(u_1, ..., u_n)$ definiamo una sua combinazione lineare

$$\text{un vettore } u = \alpha_1 \boxdot u_1 \boxplus ... \boxplus \alpha_n \boxdot u_n \text{ dove } (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K$$

Chiusura lineare

Definizione - Chiusura lineare

Sia $(K, V, \boxplus, \boxdot)$ uno spazio vettoriale e $X \subseteq V$ allora chiamiamo chiusura lineare di X l'insieme di tutte le combinazioni lineari

$$\mathscr{L}(X) = \left\{ \begin{array}{l} \{\underline{0}\}, \text{ se } X = \emptyset \\ \{\alpha_1 \boxdot u_1 \boxplus ... \boxplus \alpha_n \boxdot u_n \mid n \in \mathbb{N}^* \quad u_1, ..., u_n \in X \quad \alpha_1, ..., \alpha_n \in K\} \end{array} \right\}$$

NOTA! Si dice $\mathscr{L}(X)$ è il sotto-spazio vettoriale generato da X

Sistema di Generatori

Definizione - Sistema di Generatori

Sia $S \subseteq V$ allora si dice sistema di generatori di V se $V = \mathscr{L}(S)$, ossia ogni vettore di V è combinazione lineare dei vettori di S

$$S \text{ è sistema di generatori di } V \Leftrightarrow \forall u \in V \quad u \in \mathscr{L}(S)$$

NOTA! V si dice finitamente generato se ha un sistema di generatori finito

Esempio - Sistema di Generatori

Osservando il caso di K^n sappiamo che preso $S = \{(1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), (0, ..., 0, 1)\}$ è un sistema di generatori di K^n perché

- $S \subseteq K^n$
- $|S| = n$
- $\forall(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n \quad (a_1, a_2, ..., a_n) = a_1(1, 0, ..., 0) + a_2(0, 1, 0, ..., 0) + a_3(0, ..., 0, 1)$

Se osserviamo il campo dei polinomi abbiamo che se $K[x] \leq h$ sappiamo che preso $S = \{\ , x, ..., x^h\}$ è un sistema di generatori di $K[x] \leq h$ perché

- $|S| = h + 1$
- Sia $a_i \in K$ allora $a_0 + a_1 x + ... + a_h x^h = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + ... + a_h \cdot x^h$ che è combinazione lineare di S

$(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale, sappiamo allora che $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$, osserviamo allora che $S' = \{(2, 2), (3, 1)\}$ sia un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$

- Siamo certi che $S' \subseteq \mathscr{L}(S) = \mathbb{R}^2$
- Vediamo che $S \subseteq \mathscr{L}(S')$
  - $(1, 0) = \alpha_1(2, 2) + \alpha_2(3, 1) = (2\alpha_1, 2\alpha_1) + (3\alpha_2, \alpha_2)$

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 0 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\alpha_1 - 6\alpha_1 \\ \alpha_2 = -2\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 4\alpha_1 \\ \alpha_2 = -2\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{4} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi $(1,0) = -\frac{1}{4}(2,2) + \frac{1}{2}(3,1)$

- $(0,1) = \alpha_1(2,2) + \alpha_2(3,1) = (2\alpha_1, 2\alpha_1) + (3\alpha_2, \alpha_2)$

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2\alpha_1 + 3 - 6\alpha_1 \\ \alpha_2 = 1 - 2\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{3}{4} \\ \alpha_2 = 1 - \frac{6}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{3}{4} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi $(0,1) = \frac{3}{4}(2,2) - \frac{1}{2}(3,1)$

S' è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$

Nota - $K[x]$ non è finitamente generato

Sappiamo che $K[x] \neq \emptyset$ perché ha sicuramente x al suo interno, ma vediamolo perché

- Preso $X = \{p_1(x), ..., p_m(x)\}$ con $m \in \mathbb{N}^*$ pongo $d_1 = gr(p_1(x)) \dots d_m = gr(p_m(x))$
- allora $\forall \alpha_1, ..., \alpha_m \in K$ abbiamo che $gr(\alpha_1 \cdot p_1(x) + ... + \alpha_m \cdot p_m(x)) \leq max(d_1, ..., d_m)$
- Posto $d = max(d_1, ..., d_m)$ allora so per certo che $x^{d+1} \notin \mathscr{L}(X)$ ma $x^{d+1} \in K[x]$

Nota - Allegeriamo la notazione!

Da ora in poi useremo i simboli usuali anche per l'addizione e la motiplicazione dello spazio vettoriale, quindi per distinguerli da quelli del campo basterà confrontare gli operandi, se le operazioni hanno come operando un vettore stiamo usando l'operazione dello spazio vettoriale

Teorema - Sulla Chiusura Lineare

1. $X \subseteq \mathscr{L}(X)$
2. $\mathscr{L}(X)$ è linearmente chiuso
3. Comunque prendo un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ con la proprietà che $X \subseteq W$ allora $\mathscr{L}(X) \subseteq W$

Dimostrazione

1. $u \in X \Rightarrow u = 1 \cdot u \in \mathscr{L}(X)$
2. Osserviamo la chiusura lineare di entrambe le operazioni
   - **Addizione** siano $v, w \in \mathscr{L}(X) \Rightarrow \begin{cases} \exists u_1, ..., u_n \in X \quad \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in V \quad v = \alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n \\ \exists k_1, ..., k_m \in X \quad \exists \beta_1, ..., \beta_m \in V \quad w = \beta_1 \cdot k_1 + ... + \beta_m \cdot k_m \end{cases}$

     Quindi $v + w = \alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n + \beta_1 \cdot k_1 + ... + \beta_m \cdot k_m \in \mathscr{L}(X)$
   - **Moltiplicazione** Sia $\gamma \in K$ e $v \in \mathscr{L}(X)$ allora $\gamma \cdot v = \gamma(\alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n) = \gamma(\alpha_1 \cdot u_1) + ... + \gamma(\alpha_1 \cdot u_n)$

     Quindi $\gamma \cdot v = (\gamma \cdot \alpha_1) \cdot u_1 + ... + (\gamma \cdot \alpha_n) \cdot u_n \in \mathscr{L}(X)$
3. Sia $v \in \mathscr{L}(X)$ allora $\exists u_1, ..., u_n \in X \quad \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in K \quad v = \alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n$

   Ma per la linearità di W sappiamo che $\left.\begin{array}{ccc} u_1 \in X & \Rightarrow & \alpha_1 \cdot u_1 \in W \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 \in X & \Rightarrow & \alpha_1 \cdot u_1 \in W \end{array}\right\} \Rightarrow v = \alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n \in W$

Matrici

Definizione - Matrici

Sia K un'insieme non vuoto e presi $n, m \in \mathbb{N}^*$ chiamiamo matrice su K di tipo $n \times m$ l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} f: & \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} & \to & K \\ & (i, j) & \rightsquigarrow & f((i, j)) \end{array}$$

Lezione 5° del 18/03/2024

Linearmente Dipendente

Definizione - Linearmente Dipendente

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale, presa una n-upla $(u_1, \dots, u_n)$ di vettori di V si dice lienearmente dipendente se il vettore nullo si può scrivere come una combinazione lineare di vettori della n-upla anche con scalari non tutti nulli

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n \setminus \{\underline{0}\} \quad \underline{0} = \alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_n \cdot u_n$$

Esempio - Linearmente Dipendente

$S = \{(1, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ è un sistema di generatori, ma è linearmente dipendente?

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(1, 1) + \alpha_3(0, 2) = (\alpha_1, 0) + (\alpha_2, \alpha_2) + (0, 2\alpha_3) = (0, 0)$$

Risolviamo il sistema lineare e troviamo la nostra soluzione

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = \alpha_2 + 2\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_1 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_1 \\ \alpha_3 = -\frac{\alpha_1}{2} \end{cases}$$

Quindi S è linearmente dipendente perché $\forall \alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad -\alpha_1(1, 0) + \alpha_1(1, 1) - \frac{\alpha_1}{2}(0, 2) = (0, 0)$

Linearmente Indipendente

Definizione - Lienearmente Indipendente

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale, presa una n-upla $(u_1, \dots, u_n)$ di vettori di V si dice linearmente indipendente se il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare di vettori della n-upla solo con scalari tutti nulli

$$(\alpha_1, \dots, \alpha) \in K^n \quad \underline{0} = \alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_n \cdot u_n \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

NOTA! L'insieme vuoto è linearmente indipendente

Domanda - Come posso capire velocemente se un'insieme è linearmente dipendente?

Sia $X \subseteq V$ allora X si dice linearmente dipendente se esiste un sotto-insieme finito di X linearmente dipendente

Sia $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ linearmente dipendente allora vediamo che se $T = S \cup \{u_{n+1}, \dots, u_m\}$ allora T è linearmente dipendente, siccome S è linearmente dipendente allora

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n \setminus \{\underline{0}\} \quad \alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_n \cdot u_n = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_{n+1} \cdot u_{n+1} + \dots + \alpha_m \cdot u_m = \underline{0}$$

Esempio - Linearmente Indipendente

$S = \{(2,1),(1,-2)\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$ ma è linearmente indipendente?

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} : \alpha_1(2,1) + \alpha_2(1,-2) = (2\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, -2\alpha_2) = (0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Risolviamo il sistema lineare e troviamo la nostra soluzione

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 = \alpha_1 - 2\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 = 2\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 4\alpha_2 + \alpha_2 \\ \alpha_1 = 2\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

Quindi S è linearmente indipendente

Teorema - Sulla Dipendenza Lineare

Sia $(K, V, +, \cdot)$ con $X \subseteq V$ sappiamo che X è linearmente dipendente $\Leftrightarrow \exists u \in X \quad \mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X \setminus \{u\})$

Unico caso particolare da osservare è se $X = \{\underline{0}\}$ sappiamo che $X \setminus \{\underline{0}\} = \emptyset$ ed abbiamo che $\mathscr{L}(X) = \{\underline{0}\} = \mathscr{L}(\emptyset)$

Dimostrazione Se $|X| \geq 2$ osserviamo entrambi i lati della dell'implicazione

- "$\Rightarrow$" per ipotesi X è linearmente dipendente, ovvero $\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n \setminus \{\underline{0}\} \quad \underline{0} = \alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_n \cdot u_n$

  Sia allora $\alpha_1 \neq 0$ e questo ci dice che $\exists \alpha_1^{-1} \quad \alpha_1^{-1}(\alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_n \cdot u_n) = \alpha_1^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0}$ sfruttando la distributività e l'associatività abbiamo $(\alpha_1^{-1} \cdot \alpha_1)u_1 + \ldots + (\alpha_1^{-1} \cdot \alpha_n)u_n = u_1 + \ldots + (\alpha_1^{-1} \cdot \alpha_n)u_n$

  Sfruttando l'uguaglianza precedente abbiamo che $u_1 = -(\alpha_1^{-1} \cdot \alpha_2) - \ldots. - (\alpha_1^{-1} \cdot \alpha_n)u_n \in \mathscr{L}(X \setminus \{u_1\})$

- "$\Leftarrow$" per ipotesi $\exists u \in X \quad \mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X \setminus \{u\})$

  Allora sappiamo che $\exists v_1, \ldots, v_n \in X \setminus \{u\} \quad \exists \beta_1, \ldots, \beta_n \in A \quad u = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_n \cdot v_n$

  Ma questo ci porta a dire che $1 \cdot u - (\beta_1) \cdot u_1 - \ldots. - (\beta_n) \cdot u_n = \underline{0}$ e quindi X è linearmente dipendente

Esempio - Teorema sulla Dipendenza Lineare

Sia $S = \{(1,0,1),(1,1,0),(2,2,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ so che è linearmente dipendente perché

1. $(0,0,0) = 0(1,0,1) - 2(1,1,0) + (2,2,0)$
2. Inoltre $(2,2,0) = 0(1,0,1) + 2(1,1,0)$

Sia $S' = \{(1,0,1),(1,1,0)\}$ allora $(2,2,0) \in \mathscr{L}(S')$ quindi $\mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(S \setminus \{(2,2,0)\}) = \mathscr{L}(S')$

Lezione 6° del 20/03/2024

Domanda - Quando due chiusure lineari coincidono?

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale e $S, T \subseteq V$ allora sappiamo che $\mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(T) \Leftrightarrow S \subseteq \mathscr{L}(T)$ e $T \subseteq \mathscr{L}(S)$

- "$\Rightarrow$" $S \subseteq \mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(T)$ e $T \subseteq \mathscr{L}(T) = \mathscr{L}(S)$
- "$\Leftarrow$" $\left.\begin{matrix} S \subseteq \mathscr{L}(T) \Rightarrow \mathscr{L}(S) \subseteq \mathscr{L}(T) \\ T \subseteq \mathscr{L}(S) \Rightarrow \mathscr{L}(T) \subseteq \mathscr{L}(S) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(T)$

Base di uno Spazio-Vettoriale

Definizione - Base di uno Spazio-Vettoriale

Una base di uno spazio vettoriale V è un sistema di generatori di V linearmente indipendente

NOTA! è chiamata base canonica la base composta da $\{(1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), (0, ..., 0, 1)\}$

Base ordinata (oppure riferimento), dove l'unica n-upla di scalari che da luogo a un vettore è detta n-upla delle componenti

Teorema - Di estrazione di una Base

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo K e sia $S = \{u_1, ..., u_n\}$ un suo sistema di generatori finito, allora sappiamo che esiste una base B di V tale che $B \subseteq S$

Dimostrazione Per ipotesi sappiamo che $\mathscr{L}(S) = V$

1. Se S è linearmente indipendente allora $B = S$ ed è base di V
2. Altrimenti $\exists u \in S \quad \mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(S \setminus \{u\})$ e sia $u = u_1$
3. Allora $S' = S \setminus \{u\} = \{u_2, ..., u_n\}$ se è linearmente indipendente e anche un sistema di generatori di V

Ripetiamo il processo finché non si trova un base di V

Esempio - Estrazione di una base

Sia $S = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (0, 1)\}$ sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$, sappiamo che è linearmente dipendente perché

$$(2, 2) = 2(1, 1) + 0(2, 3) + 0(0, 1)$$

Quindi sia $S' = S \setminus \{(2, 2)\} = \{(1, 1), (2, 3), (0, 1)\}$ sappiamo che è linearmente dipendente perché

$$(1, 1) = \frac{1}{2}(2, 3) - \frac{3}{2}(0, 1)$$

Quindi sia $S'' = S' \setminus \{(1, 1)\} = \{(2, 3), (0, 1)\}$ sappiamo che è linearmente indipendente perché

$$(0, 0) = \alpha(2, 3) + \beta(0, 1) = (2\alpha, 3\alpha) + (0, \beta)$$

Risolviamo il sistema lineare e troviamo la nostra soluzione

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha_1 \\ 0 = 3\alpha_1 + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

S'' è sistema di generatori e linearmente indipendente $\Rightarrow$ base di $\mathbb{R}^2$

Nota - Cosa succede nel caso di un'insieme linearmente dipendente con due vettori?

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale con $S \subseteq V$ dove $S = \{u, v\}$ allora

$$S \text{ è linearmente dipendente} \Leftrightarrow \exists \gamma \in K \quad u = \gamma \cdot v \text{ oppure } v = \gamma \cdot u$$

Infatti per ipotesi $\exists (\alpha, \beta) \in K^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \alpha u + \beta v = \underline{0}$ ma questo ci dice che $\alpha \neq 0$ oppure $\beta \neq 0$

- Se $\alpha \neq 0$ allora $\exists \alpha^{-1}$ ottenendo $\left.\begin{array}{l} \alpha^{-1}(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0} \\ (\alpha^{-1} \cdot \alpha)u + (\alpha^{-1} \cdot \beta)v = 1 \cdot u + (\alpha^{-1} \cdot \beta)v \end{array}\right\} \Rightarrow u = -(\alpha^{-1} \cdot \beta)v$
- Se $\beta \neq 0$ allora $\exists \beta^{-1}$ ottenendo $\left.\begin{array}{l} \beta^{-1}(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \beta^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0} \\ (\beta^{-1} \cdot \alpha)u + (\beta^{-1} \cdot \beta)v = (\beta^{-1} \cdot \alpha)u + 1 \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow v = -(\beta^{-1} \cdot \alpha)u$

Nota - Se poniamo lo stesso caso sui vettori?

Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ allora sappiamo che

- $u, v \in \mathbb{V} \quad \{u, v\}$ è linearmente dipendente $\Leftrightarrow u \parallel v$
- $u, v, w \in \mathbb{V} \quad \{u, v, w\}$ è linearmente dipendente $\Leftrightarrow u, v, w$ sono complanari

Teorema - Sull'Indipendenza Lineare

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale, presa $S \subseteq V$, sia S linearmente indipendente allora $\exists u \in V \quad u \notin \mathscr{L}(S) \Rightarrow S \cup \{u\}$ è linearmente indipendente

Dimostrazione Sia $S \cup \{u\} = \{u, v_1, \dots, v_n\}$ allora $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \quad \alpha \cdot u + \dots + \alpha_n \cdot v_n = \underline{0}$ con la proprietà che $\alpha = \dots = \alpha_n = \underline{0}$

Supponiamo per assurdo che $\alpha \neq 0$ allora $\exists \alpha^{-1} \in K$ allora abbiamo la seguente uguaglianza

$$1 \cdot u + (\alpha^{-1} \cdot \alpha_1)v_1 + \dots + (\alpha^{-1} \cdot \alpha^n)v_n = \quad \alpha^{-1}(\alpha \cdot u + \dots + \alpha_n \cdot v_n) \quad = \alpha^{-1} \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

Quindi $u = -(\alpha^{-1} \cdot \alpha_1)v_1 + \dots + -(\alpha^{-1} \cdot \alpha_n)v_n \in \mathscr{L}(\{v_1, \dots, v_n\}) = \mathscr{L}(S)$ ma questo è impossibile

Esempio - Teorema sull'Indipendenza Lineare

Sia $S = \{(1,0,0), (0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente perché

$$\forall (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha(1,0,0) + \beta(0,0,1) = (\alpha, 0, \beta)$$

Ma $(0,1,0) \notin \mathscr{L}(S)$ quindi $S \cup \{(0,1,0)\}$ è linearmente indipendente

Teorema - di Steinitz

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo K allora sappiamo che

- $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq V$ con la proprietà che $V = \mathscr{L}(S)$
- $X = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$

Allora sappiamo che se $|X| = m > n = |S| \Rightarrow X$ è linearmente dipendente

Domanda - Cosa succede nel caso opposto?

Dal teorema di Steinitz ricaviamo che se $Y \subseteq V$ con la proprietà che Y è linearmente indipendente $\Rightarrow |Y| \leq |S|$

Teorema - Di Equipotenza delle Basi

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo K allora ogni base di V è finita ed ha lo stesso numero di vettori (sono equipontenti)

Dimostrazione Sia S un sistema di generatori finito di V allora

1. Presa B una base estratta da S allora $|B| = n < +\infty$
2. Sia B' un'altra base di V
3. B' è linearmente indipendente e sistema di generatori di V, ovvero $\mathscr{L}(B') = V = \mathscr{L}(B)$

Quindi per il teorema di Steinitz abbiamo che

$$\left.\begin{array}{l} |B'| \leq |B| \text{ altrimenti avremmo } B' = \{v_1, ..., v_{n+1}\} \text{ linearmente indipendente} \\ B \text{ è linearmente indipendente} \\ \mathscr{L}(B') = V \end{array}\right\} \Rightarrow |B| = |B'|$$

Esempio - Teorema Equipotenza delle Basi

Sia $S = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $\mathscr{L}(S) = \mathbb{R}^2$, S è linearmente dipendente perché

$$S' = S \setminus \{(2, 2)\} = \{(1, 1), (2, 3), (0, 1)\} \text{ allora sappiamo che } \mathscr{L}(S') = \mathscr{L}(S \setminus \{(2, 2)\})$$

Sappiamo che S' è linearmente dipendente perché

$$S'' = S' \setminus \{(1, 1)\} = \{(2, 3), (0, 1)\} \text{ allora sappiamo oche } \mathscr{L}(S'') = \mathscr{L}(S' \setminus \{(1, 1)\})$$

Sappiamo che S'' è linearmente indipendente perché $(0, 0) = \alpha(2, 3) + \beta(0, 1) = (2\alpha, 3\alpha), (0, \beta)$

$$\begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

S'' è sistema di generatori e linearmente indipendente, ovvero base di $\mathbb{R}^2$

Dimensione

Definizione - Dimensione

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale, sia V finitamente generato su K allora la cardinalità comune alle sue basi si dice dimensione di V e si indica con $dim(V)$

Teorema - sui Sistemi di Generatori Linearmente Indipendenti

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale, sia V finitamente generato su K con $dim(V) = n$

Allora preso $S = \{u_1, ..., u_n\} \subseteq V$ ottengo che S è linearmente indipendente $\Leftrightarrow$ S è un sistema di generatori di V

Dimostrazione

- "⇒" Per assurdo supponiamo che $\mathscr{L}(S) \subset V$, ovvero $\exists u \in V \quad u \notin \mathscr{L}(S)$ quindi otteniamo che

$$\left.\begin{array}{l} S \text{ è linearmente indipendente} \\ u \notin \mathscr{L}(S) \\ u \in V \end{array}\right\} \Rightarrow S \cup \{u\} \text{ è linearmente indipendente}$$

  ma questo è assurdo perché $|S \cup \{u\}| = n + 1 > n = dim(V)$

- "⇐" Per assurdo S è linearmente dipendente, quindi $\exists u \in S \quad \mathscr{L}(S \setminus \{u\}) = \mathscr{L}(S) = V$ allora per il teorema di estrazione di una base sappiamo che

$$\exists B \subseteq S \setminus \{u\} \text{ tale che } B \text{ è una base di } V \text{ con la proprietà che } |B| \leq |S \setminus \{u\}| = n - 1$$

  Ma questo è assurdo proprio per il teorema di equipotenza delle basi

Lezione 7° del 25/03/2024

Teorema - Di Completamento di una Base

Sia $(K, V, +, \cdot)$ finitamente generato su un campo K dove $n = dim(V)$

Sia $X = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ linearmente indipendente con $|X| < n$

Allora sappiamo che $\exists v_{t+1}, ..., v_n \in V$ tali che $X \cup \{v_{t+1}, ..., v_n\}$ è base di K

Dimostrazione

Siccome $|X| < n$ sappiamo che X non è un sistema di generatori di V e non una base perché $dim(V) = n \neq t$ allora seguiamo i seguenti passaggi

1. Allora $\mathscr{L}(X) \subset V$ quindi $\exists v_{t+1} \in V \setminus \mathscr{L}(X)$ per cui $X' = X \cup \{v_{t+1}\}$ è linearmente dipendente
2. Se $t + 1 = n$ allora X' è una base di V è abbiamo terminato
3. Altrimenti X' è un sistema di generatori di V, ovvero $\mathscr{L}(X') \subset V$, e ripetiamo il procedimento dal passaggio 1

Esempio - Teorema di Completamento di una Base

Trovare una base di $\mathbb{R}^2$ che contenga $(2, 7)$

1. Partiamo da $S = \{(2, 7)\}$ che sappiamo essere linearmente indipendente ma non sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$
2. inoltre $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ sappiamo che $\alpha(2, 7) \neq (0, 1)$ allora $(0, 1) \notin \mathscr{L}(S) \Rightarrow S' = S \cup \{(0, 1)\} = \{(2, 7), (0, 1)\}$
3. S' è linearmente indipendente e sappiamo che $|S'| = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$

Teorema - sulle Basi Ordinate

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo K con $dim(V) = n$

Sia $B = (u_1, ..., u_n)$ un'insieme ordinato con la proprietà che $|B| = n$ allora abbiamo che

$$B \text{ è base di } K \Leftrightarrow \forall v \in V \quad \exists!(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n \quad v = \alpha \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n$$

Dimostrazione

- $\Leftarrow$ per ipotesi $\forall v \in V \quad \exists!(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n \quad v = \alpha \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n \in \mathscr{L}(B)$ quindi sappiamo che
  1. B è un sistema di generatori di V
  2. B è linearmente indipendente perché se $v = \underline{0}$ allora $\underline{0} = 0 \cdot u_1 + ... + 0 \cdot u_n$ ma $\exists!(0, ..., 0)$
- $\Rightarrow$ Siccome B è una base di V allora è anche un suo sistema di generatori, quindi
  1. $\forall v \in V \quad \exists(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n \quad v = \alpha \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n \in \mathscr{L}(B)$ ma questa n-upla è unica
  2. Se prendiamo una n-upla con le stesse proprietà $(\beta_1, ..., \beta_n) \in K^n \quad v = \beta_1 \cdot u_1 + ... + \beta_n \cdot u_n$ otteniamo
     (a) $v - v = \underline{0}$
     (b) $\underline{0} = \alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n - (\beta_1 \cdot u_1 + ... + \beta_n \cdot u_n) = (\alpha_1 - \beta_1)u_1 + ... + (\alpha_n - \beta_n)u_n$

$$\text{Ma essendo } B \text{ linearmente indipendente} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \dots \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \dots \\ \alpha_n = \beta_n \end{cases}$$

Esempio - Teorema Basi Ordinate

Sia $V = \mathbb{R}[x] \leq 2$ allora questo mi dice che $dim(V) = 3$

Sia $B = (1 + x, 1 - x, 1 + x^2)$ andiamo a determinare il vettore delle componenti di $u = 3 + 2x - x^2$

$$u = 3 + 2x - x^2 = \alpha_1(1 + x) + \alpha_2(1 - x) + \alpha_3(1 + x^2) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 - \alpha_2)x + \alpha_3 x^2$$

Allora giungiamo al seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 2 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ -1 = \alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 2\alpha_2 + 1 \\ \alpha_1 = 2 + \alpha_2 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = 2 + \alpha_2 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Questo ci dice che le componenti di u in B sono $(3, 1, -1)$

Isomorfismo associato ad una Base

Definizione - Isomorfismo associato ad una Base

Sia $(V, K, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato su K con $n = dim(V)$

Sia $B = (u_1, ..., u_n)$ una base ordinata di V allora definiamo osomorfismo associato a B l'applicazione:

$$\begin{array}{rccc} \phi_B : & V & \rightarrow & K^n \\ & u & \rightsquigarrow & (\alpha_1, ..., \alpha_n) \end{array}$$

Ovvero ad ogni vettore associa i suoi componenti in B

Esempio - Omomorfismo associato ad una base

Sia $B = \{(1, 1), (-1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ quindi abbiamo che $|B| = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$, determiniamo ϕB

$$\forall(a_1, a_2) \quad \exists!(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R} : (a_1, a_2) = \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(-1, 1) = (\alpha_1, \alpha_1) + (-\alpha_2, \alpha_2)$$

Risolviamo il sistema lineare e troviamo la nostra soluzione

$$\begin{cases} a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_2 = \alpha_1 - \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a_1 - \alpha_2 \\ a_2 = a_1 - 2\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a_1 - \alpha_2 \\ 2\alpha_2 = a_1 - a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a_1 - \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} \\ \alpha_2 = \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} \\ \alpha_2 = \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} \end{cases}$$

Quindi otteniamo il seguente omomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \phi_B: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (a_1, a_2) & \rightsquigarrow & (\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}, \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2}) \end{array}$$

Teorema - sui Sottospazi Vettoriali

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato con $dim(V) = n$ e W un sottospazio vettoriale di V allora

1. $dim(W) = 0 \Leftrightarrow W = \{\underline{0}\}$
2. $dim(W) \leq dim(V)$
3. $dim(W) = dim(V) \Leftrightarrow W = V$

Dimostrazione

1. - "$\Rightarrow$" Se $dim(W) = 0$ allora $\emptyset$ è una base di W per cui $\mathscr{L}(W) = W = \{\underline{0}\}$
   - "$\Leftarrow$" Se $W = \{\underline{0}\}$ allora $W = \{\underline{0}\} = \mathscr{L}(W)$ percui

$$\left.\begin{array}{l} \emptyset \text{ è un sistema di generatori di } W \\ \emptyset \text{ è linearmente indipendente} \\ \emptyset \text{ è una base di W quindi } |\emptyset| = 0 = dim(W) \end{array}\right\} \Rightarrow |\emptyset| = 0 = dim(W)$$

2. Sia $B_w = \{u_1, ..., u_t\}$ una base di W, allora B_w è un sottoinsieme di V linearmente indipendente percui $|B_w| = t \leq n = dim(V)$
3. Sia $B_w = \{u_1, ..., u_t\}$ una base di W allora
   - "$\Rightarrow$" per ipotesti $t = dim(W) = dim(V) = n$ ma B_w allora

$$\left.\begin{array}{l} B_w \text{ è linearmente indipendente} \\ B_w \text{ è sistema di generatori di } V \end{array}\right\} \Rightarrow V = \mathscr{L}(B_w) = W$$

   - "$\Rightarrow$" per ipotesi ogni base di W è base di V e viceversa e quindi $|W| = dim(V)$

Lezione 8° del 27/05/2024

Teorema - Intersezione di due Spazi Vettoriali

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale su un campo K

Presi due sottospazi vettoriali W_1, W_2 di V allora sappiamo che $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio vettoriale

Dimostrazione

- $W_1 \cap W_2$ non è vuoto

$$\underline{0} \in W_1 \quad \underline{0} \in W_2 \Rightarrow \underline{0} \in W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$$

- $W_1 \cap W_2$ è linearmente chiuso rispetto alla somma

$$\text{Siano } u, v \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow u, v \in W_1 \quad u, v \in W_2 \Rightarrow u + v \in W_1 \quad u, v \in W_2 \Rightarrow u + v \in W_1 \cap W_2$$

- $W_1 \cap W_2$ è linearmente chiuso rispetto al prodotto

$$\text{Sia } \alpha \in K \text{ allora } u \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow u \in W_1 \quad u \in W_2 \Rightarrow \alpha \cdot u \in W_1 \quad \alpha \cdot uW_2 \Rightarrow \alpha \cdot u \in W_1 \cap W_2$$

Esempio - Intersezione di due Spazi Vettoriali

Siano $W_1 = \mathscr{L}((1,0,2),(0,1,1))$ e $W_2 = \mathscr{L}((1,1,1),(2,0,1))$

Quindi sappiamo che $u \in W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow u \in W_1$ e $u \in W_2$ ovvero

- $u \in W_1 \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha(1,0,2) + \beta(0,1,1) = (\alpha, 0, 2\alpha) + (0, \beta, \beta) = (\alpha + \beta, \beta, 2\alpha + \beta)$
- $u \in W_2 \quad \exists \gamma, \delta \in \mathbb{R} : \gamma(1,1,1) + \delta(2,0,1) = (\gamma, \gamma, \gamma) + (2\delta, 0, \delta) = (\gamma + 2\delta, \gamma, \gamma + \delta)$

Allora $u = (\alpha, \beta, 2\alpha + \beta) = (\gamma + 2\delta, \gamma, \gamma + \delta)$ quindi risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha = \gamma + 2\delta \\ \beta = \gamma \\ 2\alpha + \beta = \gamma + \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2\delta \\ \beta = \gamma \\ 2\alpha + \beta = \beta + \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \beta = \gamma \\ 2\alpha = \frac{\alpha - \beta}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \beta = \gamma \\ \frac{3}{2}\alpha = -\frac{\beta}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \beta = \gamma \\ -3\alpha = \beta \end{cases}$$

Ricaviamo quindi che $W_1 \cap W_2 = \mathscr{L}((1, 3, -1)$ perché

$$u \in W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow u = \alpha(1,0,2) - 3\alpha(0,1,1) = (\alpha, 0, 2\alpha) + (0, -3\alpha, -3\alpha) = (\alpha, -3\alpha, -\alpha) = \alpha(1, -3, -1)$$

Teorema - Somma (Unione) di due Spazi Vettoriali

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale su un campo K

Presi due sottospazi vettoriali W_1, W_2 di V allora sappiamo che $W_1 + W_2$ in generale non è un sottospazio vettoriale

Infatti è un sottospazio vettoriale soltanto in due casi

1. $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_1 \cup W_2 = W_2$
2. $W_2 \subseteq W_1 \Rightarrow W_1 \cup W_2 = W_1$

La soluzione è definire l'unione come la somma sapendo che questo è un sottospazio vettoriale

Dimostrazione È un sottospazio vettoriale $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$

- $W_1 + W_2$ non è vuoto

$$\underline{0} \in W_1 \quad \underline{0} \in W_2 \Rightarrow \underline{0} \in W_1 + W_2 \neq \emptyset$$

- $W_1 + W_2$ è linearmente chiuso rispetto alla somma

$$\text{Siano } u, v \in W_1 + W_2 \Rightarrow w_1, w_1' \in W_1 \quad w_2, w_2' \in W_2 \quad u = w_1 + w_1' \quad v = w_2 + w_2'$$

$$\text{Ma allora } u + v = w_1 + w_1' + w_2 + w_2' = (w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') \in W_1 + W_2$$

- $W_1 + W_2$ è linearmente chiuso rispetto al prodotto

$$\text{Sia } \alpha \in K \text{ allora } \alpha \cdot u = \alpha(w_1 + w_1') = \alpha \cdot w_1 + \alpha \cdot w_1' \in W_1 + W_2$$

Adesso vediamo che se $W_1 = \mathscr{L}(S_1)$ e $W_2 = \mathscr{L}(S_2)$ allora $W_1 + W_2 = \mathscr{L}(S_1 \cup S_2)$

- "$\supseteq$" Sia $u \in \mathscr{L}(S_1 \cup S_2)$ allora

$$\left.\begin{array}{ll} \exists v_1, ..., v_n \in S_1 & \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in K \\ \exists u_1, ..., u_m \in S_2 & \exists \beta_1, ..., \beta_m \in K \end{array}\right\} u = \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n + \beta_1 \cdot u_1 + ... + \beta_m \cdot u_m \in W_1 + W_2$$

- "$\subseteq$" Sia $u \in W_1 + W_2$ allora $\exists w_1 \in W_1$ e $\exists w_2 \in W_2 \quad u = w_1 + w_2$ con $W_1 = \mathscr{L}(S_1)$ e $W_2 = \mathscr{L}(S_2)$

$$\left.\begin{array}{l} \exists v_1, ..., v_n \in S_1 \\ \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in K \end{array}\right\} w_1 = \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n$$

$$\Rightarrow u = \alpha_1 \cdot v_1 + ... + \alpha_n \cdot v_n + \beta_1 \cdot u_1 + ... + \beta_m \cdot u_m \in \mathscr{L}(S_1 \cup S_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \exists u_1, ..., u_m \in S_2 \\ \exists \beta_1, ..., \beta_m \in K \end{array}\right\} w_2 = \beta_1 \cdot u_1 + ... + \beta_m \cdot u_m$$

Teorema - Relazione di Grassmann

Sia $(K, V, +, \cdot)$ e siano W_1 e W_2 sottospazio vettoriali finitamente generati di V allora sappiamo che

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$$

Somma Diretta

Definizione - Somma Diretta

Sia $(K, V, +, \cdot)$ e siano W_1 e W_2 sottospazio vettoriali di V allora si dice somma diretta quando

$$W_1 + W_2 = W_1 \boxplus W_2 \text{ se } W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$$

Nel caso avessimo $W_1 + ... + W_n$ dove $n > 2$ allora si dice somma diretta se

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \quad W_i \cap (W_1 \boxplus ... \boxplus W_{i-1} \boxplus W_{i+1} \boxplus ... \boxplus W_n) = \{\underline{0}\}$$

Domanda - Cosa succede se applico la relazione di Gaussmann alla somma diretta?

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale e $W_1, ..., W_n$ sottospazio vettoriale di V tali che abbiano una somma diretta, allora

1. $dim(W_1 \boxplus ... \boxplus W_n) = dim(W_1) + ... + \mathrm{dim}(W_n)$
2. $\left.\begin{array}{l} B_1 \text{ base di } W_1 \\ ... \\ B_n \text{ base di } W_n \end{array}\right\} \Rightarrow B_1 \cup ... \cup B_n$ base di $W_1 \boxplus ... \boxplus W_n$

Dimostrazione Per induzione su n

- Se $n = 2$ basta usare la relazione di Gaussmann e otteniamo

$$dim(W_1 \boxplus W_2) = dim(W_1) + dim(W_2)$$

$$\text{Inoltre } \left.\begin{array}{l} \text{Se } B_1 \text{ è base di } W_1 \\ \text{Se } B_2 \text{ è base di } W_2 \end{array}\right\} \Rightarrow W_1 \boxplus W_2 = \mathscr{L}(B_1 \cup B_2)$$

Ossia $B_1 \cup B_2$ è base di $W_1 \boxplus W_2$ perché

1. $B_1 \cup B_2$ è sistema di generatori di $W_1 \boxplus W_2$
2. $|B_1 \cup B_2| = dim(W_1 \boxplus W_2)$

- Se $n > 2$ per ipotesi di induzione $dim(W_1 \boxplus ... \boxplus W_{n-1}) = d_1 + ... + d_{n-1}$ con base $B_1 \cup .. \cup B_{n-1}$
  Per Grassmann $(W_1 \boxplus ... \boxplus W_{n-1}) \boxplus W_n = (d_1 + ... + d_{n-1}) + d_n = |(B_1 \cup ... \cup B_{n-1}) \cup B_n|$

Domanda - Quando so che una somma è una somma diretta?

Sia $(K, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale e W_1 e W_2 sottospazi vettoriali di V

Allora so che è una somma diretta quando $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow \forall u \in W_1 + W_2 \quad \exists!(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2 \quad u = w_1 + w_2$

Dimostrazione

- "$\Rightarrow$" Per ipotesi $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ quindi $u \in W_1 + W_2 \Rightarrow \exists w_1 \in W_1 \quad \exists w_2 \in W_2 \quad u = w_1 + w_2$
  Siano allora $w_1' \in W_1$ e $w_2' \in W_2$ tali che $u = w_1' + w_2'$ osserviamo che
  $$\underline{0} = u - u = w_1 + w_2 - (w_1' + w_2') = w_1 + w_2 - w_1' - w_2' \Rightarrow w_1 - w_1' = w_2 - w_2' \in W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$$
  Perché se $w_1 - w_1' = \underline{0} \Rightarrow w_1 = w_1'$ e analogamente $w_2 - w_2' = \underline{0} \Rightarrow w_2 = w_2'$
- "$\Leftarrow$" Quindi $u \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow u \in W_1$ e $u \in W_2 \Rightarrow \underline{0} = u + \underline{0} = \underline{0} + u$
  Per ipotesi sappiamo che $(u, \underline{0}) = (\underline{0}, u) \Rightarrow u = \underline{0}$

Esempio - Somma Diretta tra due Spazi Vettoriali

Siano $W_1 = \mathscr{L}((2, 0, 1), (1, -1, 2))$ e $W_2 = \mathscr{L}((1, 1, -1), (0, 0, 1))$ cerchiamone la base

- Le loro rispettive basi $B_1 = \{(2, 0, 1), (1, -1, 2)\}$ e $B_2 = \{(1, 1, -1), (0, 0, 1)\}$
- Allora $W_1 + W_2 = \mathscr{L}(B_1 \cup B_2) = \mathscr{L}((2, 0, 1), (1, 1, -2), (1, 1, -1), (0, 0, 1))$
- Controlliamo che $B = B_1 \cup B_2$ è linearmente dipendente

Sappiamo che B è linearmente dipendente perché $(1, 1, -1) = (1)(1, 1, -2) + (1)(0, 0, 1)$

Allora $B' = B \setminus \{(1, 1, -1)\} = \{(2, 0, 1), (1, 1, -2), (0, 0, 1)\}$ che è linearmente indipendente perché
$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha(2, 0, 1) + \beta(1, 1, -2) + \gamma(0, 0, 1) = (2\alpha, 0, \alpha) + (\beta, \beta, -2\beta) + (0, 0, \gamma)$$

Risolviamo il sistema lineare
$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Osserviamo il caso $\mathbb{R}[x] \leq 2$ e sia $W_1 = \mathscr{L}(B_1)$ con $B_1 = \{1 - x, 1 + x\}$ e determiniamo uno sotto-spazio vettoriale $W_2 \subseteq \mathbb{R}[x] \leq 2$ tale che la somma sia diretta

Se prendiamo $W_2 = \mathscr{L}(B_2)$ con $B_2 = \{x^2\} \notin \mathscr{L}(B_1)$ abbiamo che $B = B_1 \cup B_2 = \{1 - x, 1 + x, x^2\}$ è linearmente indipendente

Lezione 9° del 03/04/2024

Applicazioni Lineari

Definizione - Applicazione Lineare

Siano $(K, V, +, \cdot)$ e $(K, W, +, \cdot)$ definiamo $T : V \to W$ un'applicazione lineare quando

1. $\forall u, v \in V \quad T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $\forall u \in V \quad \forall \alpha \in K \quad T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$

Inoltre diciamo che questa applicazione è

- **Monomorfismo**: Se T è iniettiva
- **Epimorfismo**: Se T è suriettiva
- **Isomorfismo**: Se T è biettiva
- **Endomorfismo**: Se dominio e codominio coincidono
- **Automorfismo**: Se dominio e codominio coincidono e T è biettiva

Esempio - Applicazione Lineare

$$\begin{array}{cccc} id_V : & V & \to & V \\ & u & \rightsquigarrow & u \end{array} \text{ è lineare}$$

$$\begin{array}{cccc} f : & V & \to & w \\ & u & \rightsquigarrow & \underline{0}_W \end{array} \text{ è l'unica applicazione costante lineare}$$

$$\begin{array}{cccc} h : & \mathbb{R}[x] \leq 2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 & \rightsquigarrow & (a_0 + 3a_1, a_2 - a_0) \end{array} \text{ è lineare}$$

Teorema - Proprietà delle Applicazioni Lineari

Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare

1. $T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$
2. T conserva le combinazioni lineari, ovvero

$$\forall u_1, \dots, u_n \in V \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \quad T(\alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_n \cdot u_n))\alpha_1 \cdot T(u_1) + \dots + \alpha_n \cdot T(u_n)$$

Dimostrazione

1. $T(\underline{0}_V) = T(0 \cdot \underline{0}_V) = \underline{0}_W$
2. Per induzione su n abbiamo che
   - $n = 1 \quad T(\alpha_1 \cdot u_1) = \alpha_1 \cdot T(u_1)$
   - $n > 1 \quad n - 1 \Rightarrow n$

$$T((\alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_{n-1} \cdot u_{n-1}) + \alpha_n \cdot u_n) =$$

$$= T(\alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_{n-1} \cdot u_{n-1}) + T(\alpha_n + u_n) =$$

$$= \alpha_1 \cdot T(u_1) + \dots + \alpha_{n-1} \cdot T(u_{n-1}) + \alpha_n + T(u_n)$$

Domanda - Come caratterizziamo iniettività e suriettività di un'applicazione lineare?

Data $T : V \to W$ applicazione lineare. caratterizziamo la suriettività secondo la classica definizione.

Per l'iniettività? T è iniettiva $\Leftrightarrow Kern(T) = \{u \in V \mid T(u) = \underline{0}_W\} = \{\underline{0}_v\}$

Dimostrazione

- "$\Rightarrow$" Prendiamo $v \in V \setminus \{\underline{0}_v\}$ $\quad v \neq \underline{0}_v \Rightarrow T(v) \neq \underline{0}_W \Rightarrow v \notin Kern(T)$
- "$\Leftarrow$" Presi $u, v \in V : T(u) = T(v)$ sappiamo che

$$\underline{0}_W = T(u) - T(v) = T(u - v) \Rightarrow u - v \in Kern(T) = \{\underline{0}_v\} \Rightarrow u - v = \underline{0}_v \Rightarrow u = v$$

Teorema - Le Applicazioni Lineari conservano Sotto-Spazi Vettoriali

Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare

1. Sia $X \subseteq V$ dove X è sotto-spazio vettoriale di $V \Rightarrow T(X)$ è sotto-spazio vettoriale di W
2. Sia $Y \subseteq W$ dove Y è sotto-spazio vettoriale di $W \Rightarrow T^{-1}(Y)$ è sotto-spazio vettoriale di V

Dimostrazione

1. Verifichiamo che $T(X)$ sia un sotto-spazio vettoriale sapendo che X è sotto-spazio vettoriale
   - $T(X)$ non è vuoto perché possiamo prendere $u \in X$ ma allora $T(u) \in T(X) \Rightarrow T(X) \neq \emptyset$
   - Prendiamo $u', v' \in T(X)$ con la proprietà che $\exists u, v \in X : T(u) = u'$ e $T(v) = v'$

     $$\text{Allora } u' + v' \Rightarrow T(u) + T(v) \Rightarrow T(u + v) \in T(X)$$
   - Preso $\alpha \in K$ abbiamo che $\alpha \cdot u' = \alpha \cdot T(u') = T(\alpha \cdot u') \in T(X)$
2. Verifichiamo che $T^{-1}(Y)$ sia un sotto-spazio vettoriale sapendo che Y è sotto-spazio vettoriale
   - $T^{-1}(Y)$ non è vuoto perché $T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W \in Y \Rightarrow T^{-1}(Y) \neq \emptyset$
   - Prendiamo $u, v \in T^{-1}(Y)$ e sappiamo che $T(u), T(v) \in Y$

     $$\text{Allora } T(u) + T(v) \in Y \Rightarrow T(u + v) \in Y \Rightarrow u + v \in T^{-1}(Y)$$
   - Preso $\alpha \in K$ abbiamo che $\alpha \cdot T(u) \in Y \Rightarrow T(\alpha \cdot u) \in Y \Rightarrow \alpha \cdot u \in T^{-1}(Y)$

Nota - Sotto-spazi vettoriali conservati dalle Applicazioni Lineari

Sappiamo che sono sotto-spazio vettoriali

- $Im(T) = T(V)$ è un sotto-spazio vettoriale di W
- $Kern(T) = T^{-1}(\{\underline{0}_W\})$ è un sotto-spazio vettoriale di V

Teorema - Le Applicazioni Lineari conservano Sistemi di Generatori

Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare

1. Sia $X = \mathscr{L}(S)$ sotto-spazio vettoriale di $V \Rightarrow T(X) = \mathscr{L}(T(S))$
2. $(u_1, ..., u_n)$ una $n - upla$ di vettori di V linearmente dipendente $\Rightarrow (T(u_1), ..., T(u_n))$ è linearmente dipendente
3. Se T è iniettiva allora $(u_1, ..., u_n)$ una $n - upla$ di vettori di V linearmente indipendente $\Rightarrow (T(u_1), ..., T(u_n))$ è

linearmente indipendente

Dimostrazione

1. Controlliamo la doppia inclusione
   - "$\supseteq$" Essendo $S \subseteq X$ allora $T(S) \subseteq T(X) \Rightarrow \mathscr{L}(T(S)) \subseteq T(X)$
   - "$\subseteq$" Sia $u' \in T(\mathscr{L}(S))$ allora sappiamo che $\exists u \in \mathscr{L}(S) : T(u) = u'$ allora

   $$\begin{cases} \exists u_1, ..., u_n \in S \\ \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in K \end{cases} : u = \alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n \Rightarrow u' = T(\alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n)$$

   Ma allora $u' = \alpha_1 \cdot T(u_1) + ... + \alpha_n \cdot T(u_n) \in \mathscr{L}(T(S))$
2. Per ipotesi $\exists(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n \setminus \{0\} : \alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n = \underline{0}_V \Rightarrow T(\alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n) = T(0_V)$

   Allora $T(\alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n) = T(\alpha_1 \cdot u_1) + ... + T(\alpha_n \cdot u_n) \Rightarrow (T(u_1), ..., T(u_n))$ è linearmente dipendente
3. Per ipotesi T è iniettiva, siano $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in K : \alpha_1 \cdot T(u_1) + ... + \alpha_n \cdot T(u_n) = \underline{0}_W$ allora

   $T(\alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n) = T(\underline{0}_V) \Rightarrow \alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n \in Kern(T) = \{\underline{0}_V\} \Rightarrow \alpha_1 \cdot u_1 + ... + \alpha_n \cdot u_n = 0_V$

   Ma $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$ quindi $(u_1, ..., u_n)$ è linearmente indipendente

Esempio - Iniettività e Suriettività delle Applicazioni Lineari

Sia $T : \mathbb{R}[x] \leq 2 \to \mathbb{R}^3$ ovvero che ad ogni $a_0 + a_1x + a_2x^2 \rightsquigarrow (a_1 + 3a_2, -a_0 + a_1, a_0 + 3a_2)$

Controlliamo se sia lineare, suriettiva ed iniettiva

- Controlliamo conservi l'operazione di addizione
  - Sia $u = a_o + a_1x + a_2x^2$
  - Sia $v = b_0 + b_1x + b_2x^2$
  - Sia $u + v = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$

  $$T(u) + T(v) = (a_1 + 3a_2, -a_0 + a_1, a_0 + 3a_2) + (b_1 + 3b_2, -b_0 + b_1, b_0 + 3b_2) = \\ (a_1 + b_1 + 3(a_2 + b_2), -(a_0 + b_0) + a_1 + b_1, a_0 + b_0 + 3(a_2 + b_2) = T(u + v)$$
- Controlliamo conservi l'operazione di moltiplicazione
  - $\forall \alpha \in K$
  - Sia $u = a_o + a_1x + a_2x^2$
  - Sia $\alpha \cdot u = \alpha \cdot a_o + \alpha \cdot a_1x + \alpha \cdot a_2x^2$

    $T(\alpha \cdot u) = (\alpha \cdot a_1 + 3\alpha \cdot a_2, -\alpha \cdot a_0 + \alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_0 + 3\alpha \cdot a_2) = \alpha(a_1 + 3a_2, -a_0 + a_1, a_0 + 3a_2) = \alpha \cdot T(u)$
- Controlliamo sia suriettiva
  - Sia $Im(T) = \{T(u) \mid u \in V\} = T(V) = T(\mathbb{R}[x] \leq 2) = \mathscr{L}(T(1), T(x), T(x^2))$
  - Calcolate le immagini della base canonica $T(1) = (0, -1, 1) \quad T(x) = (1, 1, 0) \quad T(x^2) = (3, 0, 3)$
  - Controlliamo che sia suriettiva ottenendo che $\mathscr{L}((0, -1, 1), (1, 1, 0), (3, 0, 3))$ sia base di $\mathbb{R}^3$
  - Risolviamo il sistema di $\alpha(0, -1, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(3, 0, 3) = (0, 0, 0)$

  $$\begin{cases} \beta + 3\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\frac{1}{3}\beta \\ \alpha = \beta \end{cases} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

Questa n-upla è linearmente dipendente quindi non è una base di $\mathbb{R}^3$ e la nostra applicazione non è suriettiva

- Controlliamo che sia iniettiva
  - Sia $Kern(T) = \{u \in V \mid T(u) = \underline{0}_W)\} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid (a_1 + 3a_2, -a_0 + a_1, a_0 + 3a_2) = (0, 0, 0)\}$
  - Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 0 \\ -a_0 + a_1 = 0 \\ a_0 + 3a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{3}a_1 \\ a_0 = a_1 \end{cases}$$

  - Quindi otteniamo che $Kern(T) = \{a_1 + a_1x - \frac{1}{3}a_1x^2 \mid a_1 \in \mathbb{R}\} = \{a_1(1 + x - \frac{1}{3}x^2 \mid a_1 \in \mathbb{R}\} = \mathscr{L}(1 + x - \frac{1}{3}x^2)$
  - Quindi T non è iniettiva perché $dim(Kern(T)) = 1$

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare che ad ogni $(a_1, a_2) \rightsquigarrow (2a_1 - a_2, a_1 + a_2)$

- Controlliamo che sia iniettiva
  - Sia $Kern(T) = \{u \in V \mid T(u) = \underline{0}_W\} = \{(a_1, a_2) \mid (2a_1 - a_2, a_1 + a_2) = (0, 0)\}$
  - Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 2a_1 \\ a_! + 2a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

  - Quindi otteniamo che $Kern(T) = \{(0, 0)\}$ è questo ci dice che T è iniettiva
- Controlliamo sia suriettiva
  - Sia $Im(T) = \{T(u) \mid u \in V\} = T(V) = T(\mathbb{R}^2) = \mathscr{L}(T((1, 0)), T((0, 1))$
  - Calcolate le immagini della base canonica $T((1, 0)) = (2, 1) \quad T((0, 1)) = (-1, 1)$
  - Controlliamo che sia suriettiva ottenendo che $\mathscr{L}((2, 1), (0, 1))$ sia base di $\mathbb{R}^2$
  - Risolviamo il sistema di $\alpha(2, 1) + \beta(0, 1)$

$$\begin{cases} 2\beta - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \alpha = 0 \\ \alpha = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = -\beta \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2 = 2 = dim(\mathscr{L}((2, 1), (0, 1)))$ ed è linearmente indipendente e la nostra applicazione è suriettiva

Lezione 10° del 08/04/2024

Teorema - Dell'Equazione Dimensionale

Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare dove $dim(V) = n$

$$dim(V) = dim(Kern(T)) + dim(Im(T))$$

Domanda - Cosa so dire sulla $dim(V)$ se T è iniettiva o suriettiva?

Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare dove $dim(V) = n$ vediamo che

1. Se T è iniettiva $\Rightarrow dim(V) \leq dim(W)$
2. Se T è suriettiva $\Rightarrow dim(V) \geq dim(W)$

Dimostrazione

1. Se T è iniettiva allora $Kern(T) = \{\underline{0}_V\}$ quindi $dim(Kern(T)) = 0$ e riscrivendo l'equazione dimensionale

$$dim(V) = 0 + dim(Im(T)) = dim(Im(T)) \leq dim(W)$$

2. Se T è suriettiva allora $Im(T) = W$ e riscrivendo l'equazione dimensionale

$$dim(V) = Kern(T) + dim(Im(T)) = Kern(T) + dim(W) \geq dim(W)$$

Teorema - Una n-upla di vettori è linearmente indipendente solo se lo sono i suoi componenti

Sia V uno spazio vettoriale su K dove $dim(V) = n$ allora sappiamo che $V \simeq K^n$

Una n-upla di vettori di V $(u_1, ..., u_n)$ è linearmente indipendente $\Leftrightarrow$ $(\phi_B(u_1), ..., \phi_B(u_n))$ è linearmente indipendente

Dimostrazione

- "$\Rightarrow$" Basta ricordarsi che ϕ_B è un omomorfismo è quindi ad ogni vettore associa una sola coppia di componenti
- "$\Leftarrow$" ϕ_B^{-1} è un isomorfismo allora $(\phi_B^{-1}(\phi_B(u_1)), ..., \phi_B^{-1}(\phi_B(u_n)) = (u_1, ..., u_n)$

Esempio - Una n-upla di vettori è linearmente indipendente solo se lo sono i suoi componenti

Sia $\mathbb{R}[x] \leq 3$ uno spazio vettoriale su R quindi $dim(\mathbb{R}[x] \leq 3) = 4 = \mathbb{R}^4$ allora $\mathbb{R}[x] \leq 3 \simeq \mathbb{R}^4$

Presa $B = \{1-x, 1+x, x^2-x^3, 1+x^3\}$ base di $\mathbb{R}[x] \leq 3$ vediamo che è linearmente indipendente tramite l'isomorfismo associato alla base

1. Prendiamo $\overline{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ base canonica
2. Prendiamo l'isomorfismo associato $\phi_{\overline{B}}$ che ad ogni $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \rightsquigarrow (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$
3. Prendiamo l'immagine dei vettori di B ottenendo
   (a) $\phi_{\overline{B}}(1-x) = (1, -1, 0, 0)$
   (b) $\phi_{\overline{B}}(1+x) = (1, 1, 0, 0)$
   (c) $\phi_{\overline{B}}(x^2-x^3) = (0, 1, -1, 0)$
   (d) $\phi_{\overline{B}}(1+x^3) = (1, 0, 0, 1)$
4. Essendo B una base sappiamo che $((1, -1, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (1, 0, 0, 1))$ è linearmente indipendente
5. Risolviamo il sistema $\alpha(1, -1, 0, 0) + \beta(1, 1, 0, 0) + \gamma(0, 1, -1, 0) + \delta(1, 0, 0, 1)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \delta = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = \alpha \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ \beta = \alpha \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \alpha \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

   Allora B è linearmente indipendente

Calcoliamo adesso l'isomorfismo associato a B ovvero $\phi_B : \mathbb{R}[x] \leq 3 \rightarrow \mathbb{R}^4$

1. Allora noi associamo ad ogni $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ il corrispettivo $\alpha(1-x) + \beta(1+x) + \gamma(x^2 - x^3) + \delta(1 + x^3)$
2. Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \delta = a_0 \\ \alpha - \beta = a_1 \\ \gamma = a_2 \\ -\gamma + \delta = a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta = a_0 - a_1 - a_2 - a_3 \\ \alpha = \beta + a_1 \\ \gamma = a_2 \\ \delta = a_3 + a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}(a_0 - a_1 - a_2 - a_3) \\ \alpha = \frac{1}{2}(a_0 + a_1 - a_2 - a_3) \\ \gamma = a_2 \\ \delta = a_3 + a_2 \end{cases}$$

3. Allora ϕ_B associa $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \rightsquigarrow (\frac{1}{2}(a_0 + a_1 - a_2 - a_3), \frac{1}{2}(a_0 - a_1 - a_2 - a_3), a_2, a_2 + a_3)$

Matrice

Definizione - Matrice

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ e dato il campo $(K, +, \cdot)$ chiamiamo $A \in M_{m\times n}$ una matrice su K

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} = (a_j^i)$$

Indicando le righe come $\begin{cases} a^1 = (a_1^1, \dots, a_n^1) \\ \vdots \\ a^m = (a_1^m, \dots, a_n^m) \end{cases}$ e le colonne come $\begin{cases} a_1 = (a_1^1, \dots, a_1^m) \\ \vdots \\ a_n = (a_n^1, \dots, a_n^m) \end{cases}$

Definizione - Matrice Trasposta

Data una matrice A chiamiamo la sua trasposta ${}^tA = B \in M_{m\times n}(K)$ tale che $b^1 = a_1, \dots, b^m = a_n$

Esempio - Matrice Trasposta

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -\pi & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -\pi \\ 0 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Definizione - Rango di una matrice

Il rango di A che indichiamo con $rango(A)$ è la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle colonne di A

Esempio - Rango di una matrice

$$rango\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2$$

Teorema - Una matrice ha lo stesso rango della sua trasposta

Data una matrice $A \in M_{m \times n}(K)$ allora sappiamo che

$$rango(A) = rango({}^tA)$$

Esempio - Una matrice ha lo stesso rango della sua trasposta

Presa la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ sappiamo che il $rango(A) = 2$

Osserviamo che la dimensione dello spazio vettoriale delle colonne è uguale a quello delle righe

$$\mathbb{R}^2 \cong \mathscr{L}((1,2,3,4),(0,1,2,3),(1,1,1,1)) = \mathscr{L}((1,0,1),(2,1,1),(3,2,1),(4,3,1)) \cong \mathbb{R}^2$$

Trasformazioni elementari

Definizione - Trasformazioni elementari

Sono chiamate Trasformazioni elementari le seguenti operazioni effettuabili sulle matrici

- **Scambio di una riga**: $h, k \in \{1, ..., m\} \quad a^h \Leftrightarrow a^k$
- **Moltiplicazione di una riga per uno scalare**: $h \in \{1, ..., m\} \quad \alpha \in K \setminus \{0\} \quad a^h \to \alpha \cdot a^h$
- **Somma di una riga moltiplicata per uno scalare**: $h, k \in \{1, ..., m\} : h \neq k \quad \beta \in K \quad a \to a^h + \beta \cdot a^k$

Nota - Le Trasformazioni elementari sono invertibili

Questo vuol dire che posso sempre riottenere la matrice di partenza applicando le operazioni inverse!

Esempio - Trasformazioni elementari

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ allora possiamo applicare una serie di trasformazioni elementari

1. Somma di una riga moltiplicata per uno scalare dove $h = 2 \quad k = 1 \quad \beta = -1$

$$a^2 \to a^2 + (-1)a^1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Moltiplicazione di una riga per uno scalare dove $h = 2 \quad \alpha = -\frac{1}{2}$

$$a^2 \to (-\tfrac{1}{2})a^2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Somma di una riga moltiplicata per uno scalare dove $h = 4 \quad k = 1 \quad \beta = -1$

$$a^4 \to a^4 + (-1)a^1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Somma di una riga moltiplicata per uno scalare dove $h = 4 \quad k = 2 \quad \beta = 1$

$$a^4 \to a^4 + 1 \cdot a^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Effettuando le operazioni inverse troviamo la matrice originale A

Lezione 11° del 10/04/2024

Definizione - Matrice Ridotta a Scalini

Sia $A \in M_{m\times n}$ allora si dice ridotta a scalini se $\exists h : 0 \leq h \leq m$ tale che

1. $\forall r \in \{1, ..., h\}$ e posto $j_r = min(\{j \in \{1, ..., n\}\} \mid a^r_j \neq 0)$ e $j_1 < j_2 < ... < j_h$
   (Per ogni riga da 1 a h il minimo della riga diverso da 0 si trova "più a sinistra" del minimo della prossima riga)
2. $\forall r \in \{h+1, ..., m\} \quad a^r = \underline{0}$
   (Tutte le righe successive a quella di h sono uguali al vettore nullo)

Pivot: Viene chiamato pivot l'elemento più "più a sinistra" di ogni riga che indichiamo con $a^r_{j_r}$

Esempio - Matrice Ridotta a Scalini

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definizione - Matrice Completamente Ridotta

Sia $A \in M_{m\times n}$ allora si dice completamente ridotta se, già ridotta a scalini, e inoltre

- $\forall r \in \{1, ..., h\} \quad a^r_{j_r} = 1$ e $\forall i < r \quad a^i_{j_r} = 0$
  (Ovvero ogni elemento nella colonna del pivot che si trova sopra di lui è uguale a zero)

Esempio - Matrice Completamente Ridotta

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema - Algoritmo di Gauss

Ogni matrice su un campo K può essere trasformata in una matrice a gradini oppure in una matrice completamente ridotta mediante un numero finito di trasformazioni elementari

Dimostrazione

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$ e allora definiamo

- Il minimo indice di colonna con elementi non nulli $k = min(\{j \in \{1, ..., n\} \mid a_j \neq 0\})$
- Il minimo indice di riga con elementi non nulli $h = min(\{i \in \{1, ..., m\} \mid a_k^i \neq 0\})$

Allora eseguiamo i passi dell'algoritmo

1. Scambio di una riga (dove indichiamo con P il pivot di ogni riga)

$$a^1 \leftrightarrow a^h \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & P & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & \end{pmatrix}$$

2. Somma di una riga moltiplicata per uno scalare (rendendo nulli tutti gli elementi sotto il pivot)

$$\forall i \in \{2, ..., m\} \quad a^i \leftrightarrow a^i + \beta_i \cdot a^1 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & P & \dots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

   Tale che $a_k^i + \beta_i \cdot a_k^1 = 0 \Rightarrow \beta_i = -a_k^i \cdot (a_k^1)^{-1}$

3. Ripetiamo questo tipo di trasformazioni fino a quando non si ottiene una matrice a scalini

$$a^1 \leftrightarrow a^h \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & P & \dots \\ \vdots & & \vdots & 0 & P \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Per trasformare questa matrice a gradini in matrice completamente ridotta eseguiamo le seguenti trasformazioni
   (a) Normalizziamo i pivot (indichiamo con p il numero di pivot): $\forall i \in \{1, ..., p\} \quad a^i \to \frac{1}{a_{j_i}^i} \cdot a^i$
   (b) $\forall r = p, ..., 2 \quad \forall i = 1, ..., r-1 \quad a^i \to a^1 - a_r^i \cdot a^r$

Esempio - Algoritmo di Gauss

Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 6}(\mathbb{R})$ allora

1. Individuiamo il minimo indice di una colonna non nulla, in questo caso la 3
2. Individuiamo il minimo indice di riga di un elemento non nullo sulla colonna 3 in questo caso il 2
3. Scambio di una riga dove $h = 1$ e $k = 2$

$$a^1 \leftrightarrow a^2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Somma di una riga moltiplicata per uno scalare dove $h = 3 \quad k = 1 \quad \beta = -\frac{1}{2}$

$$a^3 \rightarrow a^3 + (-\tfrac{1}{2})a^1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5. Somma di una riga moltiplicata per uno scalare dove $h = 3 \quad k = 2 \quad \beta = -1$

$$a^3 \rightarrow a^3 + (-1)a^2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

   NOTA: Adesso la matrice è ridotta a scalini

6. Moltiplicazione di una riga per uno scalare dove $h = 1 \quad \alpha = \frac{1}{2}$

$$a^1 \rightarrow \tfrac{1}{2} \cdot a^1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

7. Moltiplicazione di una riga per uno scalare dove $h = 3 \quad \alpha = -\frac{2}{3}$

$$a^3 \rightarrow -\tfrac{2}{3} \cdot a^3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

8. Somma di una riga moltiplicata per uno scalare dove $h = 2 \quad k = 3 \quad \beta = -2$

$$a^2 \rightarrow a^2 + (-2)a^3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

9. Somma di una riga moltiplicata per uno scalare dove $h = 2 \quad k = 3 \quad \beta = -2$

$$a^1 \rightarrow a^1 + \tfrac{1}{2} \cdot a^3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Teorema - Il rango di una matrice ridotta a gradini è uguale al numero di pivot

Sia $A \in M_{m \times n}$ allora $rango(A) =$ numero di pivot $=$ righe non nulle di A
Dimostrazione Per induzione sul numero di pivot (che indichiamo con h)

- Se $h = 0$ allora la matrice A è nulla per cui $rango(A) = 0$

- Supponiamo verso l'enunciato, per ipotesi di induzione, per matrici $h-1$ pivot allora
  - Cancellando la prima riga otteniamo da A otteniamo che $\{a^2, ..., a^h\}$ è linearmente indipendete
  - Osserviamo che $a^1 \notin \mathscr{L}(a^2, ..., a^h)$
  - Allora $\{a^1, a^2, ..., a^h\}$ è linearmente indipendente e $rango(A) = h$

Esempio - Teorema del rango di una matrice ridotta a scalini

Sia $K = \mathbb{R}[x] \leq 3$ allora prendiamo $W = \mathscr{L}(1+x^2, 1-x-x^2)$ e $U = \mathscr{L}(2-x, x+x^2+x^3)$ e osserviamo se la loro somma è diretta.

Ricordiamo che per la relazione di Grassmann abbiamo che $dim(W+U) = dim(W) + dim(U) \Leftrightarrow W \boxplus U$

Procediamo quindi con l'esercizio

1. Osserviamo che $dim(W) = 2 = dim(U)$ quindi $W \boxplus U \Leftrightarrow dim(W+U = 4$
2. Calcoliamo la loro somma $W+U = \mathscr{L}(1+x^2, 1-x-x^2, 2-x, x+x^2+x^3)$
3. Presa la base canonica $B = (1, x, x^2, x^3)$ consideriamo le componenti di ogni vettore
   - $\phi_B(1+x^2) = (1,0,1,0)$
   - $\phi_B(1-x-x^2) = (1,-1,-1,0)$
   - $\phi_B(2-x) = (2,-1,0,0)$
   - $\phi_B(x+x^2+x^3) = (0,1,1,1)$
4. Adesso sappiamo che $\{1+x^2, 1-x-x^2, 2-x, x+x^2+x^3\}$ è linearmente indipendente $\Leftrightarrow$ $\{(1,0,1,0), (1,-1,-1,0), (2,-1,0,0), (0,1,1,1)\}$ è linearmente indipendente
5. $\{(1,0,1,0), (1,-1,-1,0), (2,-1,0,0), (0,1,1,1)\}$ è linearmente indipendente $\Leftrightarrow rango(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}) = 4$
6. Riducendo la matrice precedente a scalini otteniamo $rango(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 3 \neq 4$

Quindi abbiamo che $W + U \neq W \boxplus U$

Sistemi di Equazioni Lineari

Definizione - Sistema di Equazioni Lineari

Sia $(K, +, \cdot)$ un campo e $m \in \mathbb{N}$ allora definiamo un sistema di equazioni lineari in questo modo

$$\Sigma \begin{cases} a_1^1 x_1 + \ldots + a_n^1 x_n = b_1 \\ a_1^2 x_1 + \ldots + a_n^2 x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_1^m x_1 + \ldots + a_n^m x_n = b_m \end{cases}$$

Σ è un sistema di m equazioni con coefficienti in K in n incognite

Definizione - Sistema di Equazione in forma matriciale

Sia $\Sigma : \begin{cases} a_1^1 x_1 + \ldots + a_n^1 x_n = b_1 \\ a_1^2 x_1 + \ldots + a_n^2 x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_1^m x_1 + \ldots + a_n^m x_n = b_m \end{cases}$ un sistema di m equazioni lineari in n incognite sul campo K (ovvero $a_j^i, b_i \in K$)

Allora possiamo osservare il sistema in forma matriciale come $\Sigma : A \cdot X = B$ dove

- **Matrice dei coefficienti** $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}$
- **Matrice delle incognite** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- **Matrice dei termini noti** $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$
- **Matrice completa** $C = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1^1 & \ldots & a_n^1 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \ldots & a_n^m & b_m \end{array}\right)$

Esempio - Sistema di Equazioni Lineari in forma matriciale

Sia $\Sigma : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ allora otteniamo che

- **Matrice dei coefficienti** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
- **Matrice delle incognite** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
- **Matrice dei termini noti** $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- **Matrice completa** $C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$

Definizione - Soluzione di un sistema lineare

Una soluzione di un sistema lineare $\Sigma : A \cdot X = B$ di m equazioni in n incognite sul campo K è una n-upla di scalare $(y_1, \ldots, y_n) \in K^n$ tale che sostituiti ordinatamente alle n variabili soddisfano le equazioni del sistema, ovvero

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad a_1^i \cdot y_1 + a_2^i \cdot y_2 + \ldots a_n^i \cdot y_n = b_i \text{ oppure più semplicemente } A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = B$$

Incompatibile o Impossibile Σ si dice incompatibile o impossibile se non ammette soluzioni ovvero, $S = \emptyset$ (se ammette soluzioni invece è detto compatibile)

Esempio - Soluzione di un sistema lineare

Sia $\Sigma : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ allora agiamo per sostituzione

$$\begin{cases} 2(3x_2 + 2_x3) - x_2 + 4x_3 = 1 \Rightarrow 6x_2 + 4x_3 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 = 3_x2 + 2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_2 = 1 - 8x_3 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}x_3 \\ x_1 = 3(\frac{1}{5} - \frac{8}{5})x_3 - 8x_3 = \frac{3}{5} - \frac{24}{5}x_3 - 8x_3 = \frac{3}{4} - \frac{32}{5}x_3 \end{cases}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni di Σ è $S = \{(\frac{3}{5} - \frac{32}{5}x_3, \frac{1}{5} - \frac{8}{5}x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Teorema - di Rouché-Capelli

Sia $\Sigma : A \cdot X = B$ allora abbiamo che

$$\Sigma \text{ è compatibile} \Leftrightarrow rango(A) = rango(C)$$

Esempio - Teorema di Rouché-Capelli

Sia $\Sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ sappiamo allora che Σ è incompatibile perché

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \text{ allora } rango(A) = 1 \neq 2 = rango(C) \text{ che è uguale a } C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$$

Definizione - Sistemi di equazioni lineari Equivalenti

Siano $\Sigma : A \cdot X = B$ e $\Sigma' : A' \cdot X = B'$ sistemi lineari in n incognite su un campo K

Chiamiamo S l'insieme delle soluzioni di Σ e S' l'insieme delle soluzioni di Σ' allora

$$\Sigma \text{ e } \Sigma' \text{ sono equivalenti} \Leftrightarrow S = S'$$

(Ovvero hanno le stesse soluzioni)

Teorema - Metodo di risoluzione di Gauss-Jordan

Sia $\Sigma : A \cdot X = B$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite su K la cui matrice completa è $C = (A|B)$

Se $\Sigma' : A' \cdot X = B'$ è un sistema lineare la cui matrice completa C' è ottenuta da C mediante un numero finito di operazioni elementari (di riga) allora Σ e Σ' sono equivalenti

Esempio - Metodo di rosluzione di Gauss-Jordan

Prendiamo in esempio il seguente sistema di equazioni

$$\Sigma : \begin{cases} \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Dal quale abbiamo la seguente matrice completa

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La riduciamo quindi a gradini

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi il sistema di equazione Σ' che è equivalente a Σ

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ \phantom{x_1 + x_2 +{}} 3x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

Da qui abbiamo due possibilità

1. Sostituzione a ritroso
2. Continuiamo a ridurre completamente la matrice

Se adottiamo la prima possibilità otteniamo che

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 + 2x_4 = -x_2 - \frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3} + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - x_4 + 1 = -2(-\frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}) - x_4 + 1 \\ x_3 = -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{3}x_4 - \frac{1}{3} - \frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3} + 2x_4 = -2x_4 \\ x_2 = \frac{7}{3}x_4 + \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \{(-2x_4, \frac{7}{3}x_4 + \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3}, x_4 \mid x_4 \in \mathbb{R}\}$

Se adottiamo la seconda soluzioni abbiamo che la matrice ridotta completamente è

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dandoci il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1 2x_2 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ x_3 + \frac{5}{3}x_4 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2 = \frac{7}{3}x_4 + \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \{(-2x_4, \frac{7}{4}x_4 + \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3}, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R}\}$

Risolviamo il seguente sistema lineare

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 \phantom{{}+x_5} = 2 \\ - x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_2 + 2x_3 \phantom{{}+3x_4} + x_5 = 0 \end{cases}$$

Ne ricaviamo la seguente matrice completa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Che ridotta completamente diventa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & -8 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ne ricaviamo il seguente sistema d'equazione

$$\begin{cases} x_1 - 11x_4 - 8x_5 = -11 \\ x_2 + 6x_4 + 5x_5 = 6 \\ x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 11x_4 + 8x_5 - 11 \\ x_2 = -6x_4 - 5x_5 + 6 \\ x_3 = 3x_4 + 2x_5 - 3 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \{(11x_4 + 8x_5 - 11, -6x_4 - 5x_5 + 6, 3x_4 + 2x_5 - 3, x_4, x_5) \mid x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5$

Nota - Variabili Libere

Le variabili che corrispondono a colonne che non contengono pivot si dicono variabili libere esse sono esattamente $n - rango(A)$