Домашняя работа №2

Проничкин Юрий

11 октября 2019 г.

1. Задание

1.1.

$$f(x) = (c^\intercal x)^2$$

По свойству дифференцирования 8:

$$f^{'}(x) = 2(c^\intercal x)^{'}$$

3-я стандартная производная:

$$f^{'}(x) = 2c$$

1.2.

$$h(x) = x^\intercal A[x]^2 [x]^2 = (x_1^2, \ldots, x_n^2)^\intercal$$

Воспользуемся свойством 6 для $f(x) = x, g(x) = A[x]^2$:

$$J_f = E$$

$$A[x]^2 = \begin{pmatrix} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \ldots + a_{1n}x_n^2 \\ a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_n^2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1^2 + a_{n2}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{pmatrix}$$

Тогда,

$$J_g = \begin{pmatrix} 2a_{11}x_1 & 2a_{12}x_2 & \ldots & 2a_{1n}x_n \\ 2a_{21}x_1 & 2a_{22}x_2 & \ldots & 2a_{2n}x_n \\ \vdots & & & \\ 2a_{n1}x_1 & 2a_{n2}x_2 & \ldots & 2a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$h^{'}(x) = Eg(x) + J_g f(x) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \ldots + a_{1n}x_n^2 \\ a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_n^2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1^2 + a_{n2}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \ldots + a_{1n}x_n^2 \\ a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_n^2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1^2 + a_{n2}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{pmatrix} =$$

$$= 3A[x]^2$$

1.3.

$$f(x) = \frac{-1}{1 + x^\intercal x}$$

По свойству дифференцирования 8:

$$f^{'} = \frac{1}{(1 + x^\intercal x)^2}(1 + x^\intercal x)^{'} =$$

Из примера 2:

$$= \frac{2x}{(1 + x^\intercal x)^2}$$

1.4.

$$f(x) = log(1 + x^\intercal Ax)$$

По свойству дифференцирования 8:

$$f^{'} = \frac{1}{1 + x^\intercal Ax}(1 + x^\intercal Ax)^{'} =$$

Из примера 3:

$$= \frac{(A + A^\intercal)x}{1 + x^\intercal Ax}$$

2. Задание

$$KL(q||p) = -\int q(x) log(\frac{p(x)}{q(x)}) dx$$

Докажем , используя интегральное неравенство Йенсена (его можно доказать в предельном переходе неравенства Йенсена $f(\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n) \geq \alpha_1 f(y_1) + \ldots +$

$\alpha_n f(y_n)$ для вогнутой $f(x)$, где $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, где равенство достигается на $y_1 = \dots y_n$):

$$f(\int \alpha(x)y(x)dx) \geq \int \alpha(x)f(y(x))dx \int \alpha(x)dx = 1, \alpha(x) \geq 0$$

Теперь положим $\alpha(x) = q(x)f(x) = log(x)y(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, тогда:

$$0 = log(\int q(x)\frac{p(x)}{q(x)}) \geq \int q(x)log(\frac{p(x)}{q(x)}) = -KL(q||p)$$

где равенство достигается при $y(x) = const$, т.е. $p(x) = q(x)$

3. Задание

Выборка временного ряда, использующаяся для прогнозирования среднемесячного расхода электричества, включает в себя только летние месяцы т.е. время с наибольшей продолжительностью дня и приходящееся на период отпусков, когда расход электричества меньше, т.е. очевидно не может использоваться для прогнозирования в осенние и зимние месяцы когда продолжительность дня будет меньше, а сотрудников в рабочее время больше.