Теоретическая Домашняя работа №2

Проничкин Юрий

13 ноября 2019 г.

1. Задание №1

1.1. a

Найти $\partial max(0, 1 - ax)$

Если $a > 0$:

В точке $x_0 > \frac{1}{a}$:

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Rightarrow \partial f(x_0) = 0$$

В точке $x_0 < \frac{1}{a}$:

$$f(x_0) = 1 - ax_0 \Rightarrow f'(x_0) = -a \Rightarrow \partial f(x_0) = -a$$

В точке $x_0 = \frac{1}{a}$:

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{z : f(x) \geq z(x - \frac{1}{a})\}$$

Если $x > \frac{1}{a}$:

$$0 \geq z(x - \frac{1}{a}) \Rightarrow z \leq 0$$

Если $x < \frac{1}{a}$:

$$1 - ax \geq z(x - \frac{1}{a}) \Rightarrow z \geq a\frac{1 - ax}{ax - 1} = -a$$

Значит в $x_0 = \frac{1}{a}$ $\partial f(x_0) = [-a, 0]$
Если $a < 0$:

В точке $x_0 < \frac{1}{a}$:

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Rightarrow \partial f(x_0) = 0$$

В точке $x_0 > \frac{1}{a}$:

$$f(x_)) = 1 - ax \Rightarrow f'(x_0) = -a \Rightarrow \partial f(x_0) = -a$$

В точке $x_0 = \frac{1}{a}$:

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{z : f(x) \geq z(x - \frac{1}{a})\}$$

Если $x < \frac{1}{a}$:

$$0 \geq z(x - \frac{1}{a}) \Rightarrow z \geq 0$$

Если $x > \frac{1}{a}$:

$$1 - ax \geq z(x - \frac{1}{a}) \Rightarrow z \leq a\frac{1 - ax}{ax - 1} = -a$$

Значит в $x_0 = \frac{1}{a}$ $\partial f(x_0) = [0, -a]$

Если $a = 0$:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \partial f(x) = 0$$

1.2. b

Найти $\partial\sqrt{|x|}$

Если $x_0 > 0$:

$$f(x_0) = \sqrt{x_0} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \Rightarrow \partial f(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Если $x_0 < 0$:

$$f(x_0) = \sqrt{-x_0} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{-1}{2\sqrt{-x_0}} \Rightarrow \partial f(x_0) = \frac{-1}{2\sqrt{-x_0}}$$

Если $x_0 = 0$:

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{z : f(x) \geq zx\}$$

$x > 0$:

$$\frac{\sqrt{x}}{x} \geq z \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq z \Rightarrow z \leq 0$$

$x < 0$:

$$\frac{\sqrt{-x}}{x} \leq z \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{-x}} \leq z \Rightarrow z \geq 0$$

$x = 0$:

$$0 \geq z0 \Rightarrow z - \forall$$

Значит в $x_0 = 0$ $\partial f(x_0) = 0$

2. Задание №2

По определению, т.к. в x и y существует субдиффиренциал:

$f(x) \geq f(\frac{x+y}{2}) + (z, x - \frac{x+y}{2})$ и $f(y) \geq f(\frac{x+y}{2}) + (z, y - \frac{x+y}{2})$

Сложим:

$$f(x) + f(y) \geq 2f(\frac{x+y}{2}) + (z, \frac{x-y}{2}) + (z, \frac{y-x}{2}) = 2f(\frac{x+y}{2})$$

что и означает выпуклость.

3. Задание №3

По определению и т.к. $||0||_2 = 0$:

$$\partial||0|| = \{z : ||x|| \geq (z, x)\} \Rightarrow 1 \geq \frac{(z, x)}{||x||||z||}||z|| = cos(\phi)||z||$$

где ϕ - любой, значит $||z|| \leq 1$ что и требовалось.

4. Задание №4

X_i - равномерно распределены по шару еденичного радиуса. Тогда вероятность попасть в шар радиуса r : $P(||X_i|| \leq r) = \frac{V_r}{V_1}$ - отношение объемов соответствующих шаров. Оно равно r^d где d размерность пространства. Тогда вероятность ближайшего соседа из n попасть в шар радиуса r:

$$P(min(X_i) < r) = 1 - P(min(X_i) > r) = 1 - \prod_i P(X_i > r) = 1 - \prod_i (1 - P(X_i < r)) = 1 - (1 - r^d)^n$$

Тогда медиана т.е. $r : P(min(X_i) < r) = \frac{1}{2}$:

$$1 - (1 - r^d)^n = \frac{1}{2} \Rightarrow (1 - r^d)^n = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \sqrt[d]{1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}}}$$

Таким образом при фиксированном d и с ростом n ближайший сосед попадает с вероятностью 0.5 в шар меньшего радиуса т.е. будет все ближе к 0, значит, если предположить что в какой-то окрестности нуля лежат объекты одного класса то при достаточно большой выборке 0 будет правильно классифицирован методом одного ближайшего соседа.
Также с ростом d - размерности пространства медиана растет при фиксированном n т.е. в пространствах большей размерности нужно будет больше выборки для правильной классификации 0.

5. Задание №5

Расстояние между z и x после добавления признака: $\rho(z,x)^2 = p_x^2 + Z^2$, где p_x - расстояние между x и z до добавления признака, а Z - новая координата, распределенная равномерно на [0,1]
Расстояние между z и y после добавления признака: $\rho(z,y)^2 = p_y^2 + (Z-Y)^2$, где p_y - расстояние между x и y до добавления признака, а Y - новая координата, распределенная равномерно на [0,1]
Тогда искомая вероятность: $P(\rho(z,y)^2 < \rho(z,x)^2) = P(p_y^2 + (Z-Y)^2 < p_x^2 + Z^2)$ Посмотрим на кривую $p_y^2 + (Z-Y)^2 < p_x^2 + Z^2$, где Z, Y на $[0,1]\times[0,1]$:

$$p_y^2 - p_x^2 = Z^2 - (Z-Y)^2 = 2YZ - Y^2, Z = \frac{p_y^2 - p_x^2 + Y^2}{2Y}$$

и так как $0 < z < 1 \Rightarrow \frac{p_y^2 - p_x^2 + Y^2}{2Y} < 1 \Rightarrow (Y-1)^2 + p_y^2 - p_x^2 - 1 < 0 \Rightarrow (Y-1)^2 < 1 - p_y^2 + p_x^2$ т.е. при $p_y^2 - p_x^2 > 1$ таких в квадрате нет и искомая вероятность равна нулю (т.к. она равна площади над графиком гиперболы в пересечении с квадратом) $\Rightarrow Y - 1 < \sqrt{1 - p_y^2 + p_x^2}, Y < 1 + \sqrt{1 - p_y^2 + p_x^2}$, что в принципе ничего не дает т.к. $Y < 1$ и $Y - 1 > -\sqrt{1 - p_y^2 + p_x^2} \Rightarrow Y > 1 - \sqrt{1 - p_y^2 + p_x^2}$, тогда площадь под графиком гиперболы будет:

$$\int_{1-\sqrt{1-p_y^2+p_x^2}}^{1} \frac{p_y^2 - p_x^2 + Y^2}{2Y} dY = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(1-(1-\sqrt{1-p_y^2+p_x^2})^2) - (p_y^2 - p_x^2) ln(1-\sqrt{1-p_y^2+p_x^2}))$$

а над графиком в квадрате :

$$\sqrt{1-p_y^2+p_x^2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(1-(1-\sqrt{1-p_y^2+p_x^2})^2) - (p_y^2 - p_x^2) ln(1-\sqrt{1-p_y^2+p_x^2}))$$

т.к. $\sqrt{1-p_y^2+p_x^2}$ площадь прямоугольника на котором интегрируем. Полученная функция строго убывает к 0 при увеличении разности квадратов расстояний $p_y^2 - p_x^2$ и не превосходит $\frac{3}{4}$ при совпадении расстояний до 1 и 2 точек, таким образом если разность квадратов расстояний между ближайшим и вторым соседом достаточно велика то введение нового признака, определенного только у второго и целевого объектов не будет влиять на ответ классификатора а при достаточно маленьком расстоянии вероятность поменять предпологаемый класс достаточно велика.

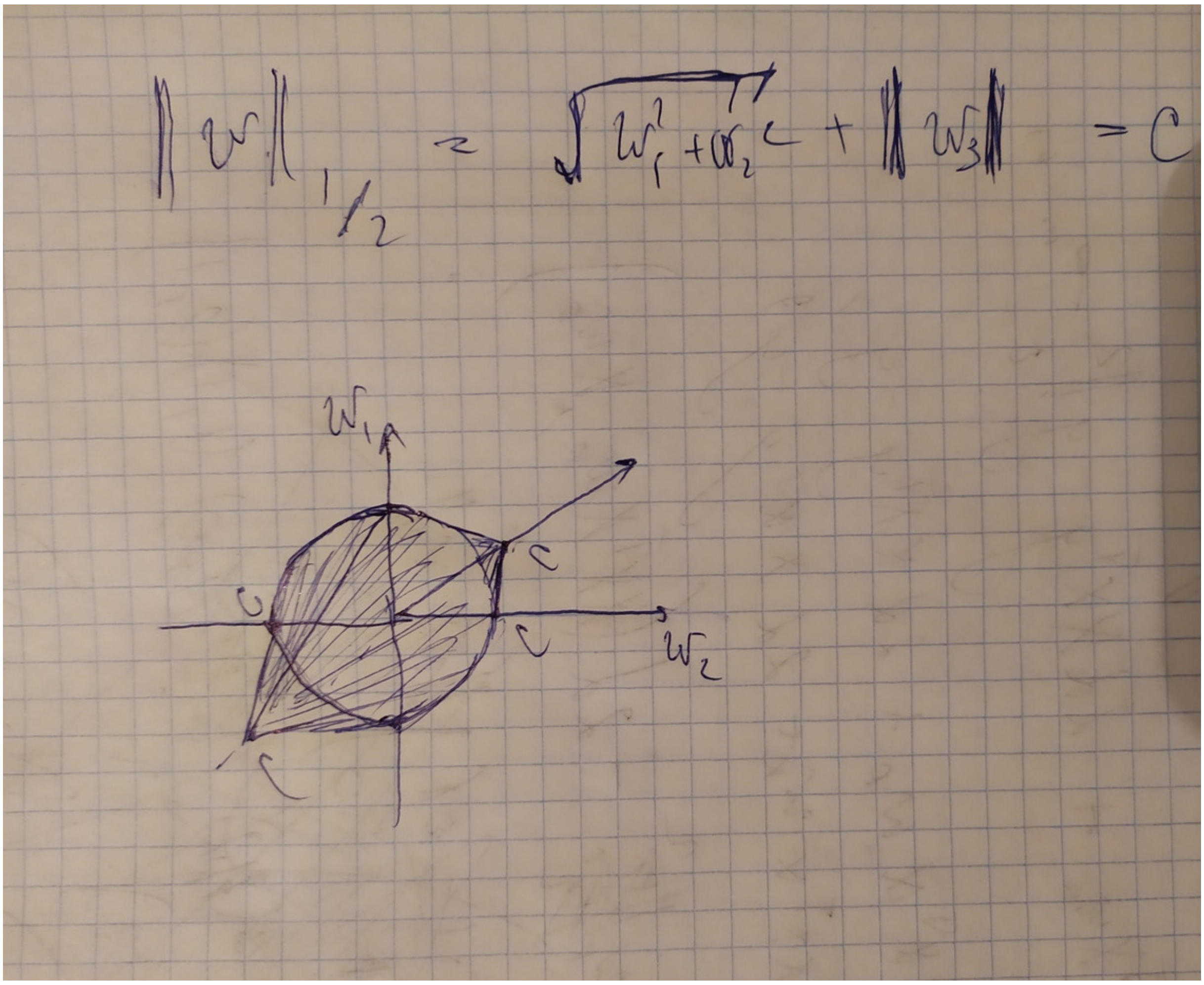
6. Задание №7

$L(w) = ||Xw - y||_2^2, w_{k+1} = w_k - \alpha \nabla L(w_k), \Rightarrow L(w_{k+1}) = ||Xw_k - \alpha X \nabla L(w_k) - y||_2^2$
$\nabla L(w_k) = 2X^T(Xw_k - y) \Rightarrow L(w_{k+1}) = ||Xw_k - 2\alpha X^T(Xw_k - y) - y||_2^2$, распишем его по α:
$L(w_{k+1}) = (Xw_k - 2\alpha X^T(Xw_k - y) - y, Xw_k - 2\alpha X^T(Xw_k - y) - y) =$
$4\alpha^2 ||X^T(Xw_k - y)||_2^2 + 4\alpha[(X^T(Xw_k - y), y) - (Xw_k, X^T(Xw_k - y))] + C$, где C не

зависит от α, тогда это парабола у которой ветви направлены вверх, значит она имеет единственный минимум, найдем его:

$0 = L(w_{k+1})'_{\alpha} = 8\alpha||X^T(Xw_k - y)||_2^2 + 4[(X^T(Xw_k - y), y) - (Xw_k, X^T(Xw_k - y))]$, откуда $\alpha = \frac{[(Xw_k, X^T(Xw_k - y)) - (X^T(Xw_k - y), y)]}{2||X^T(Xw_k - y)||_2^2} = \frac{(X^T(Xw_k - y), (Xw_k - y))}{2||X^T(Xw_k - y)||_2^2}$

7. Задание №8



Таким образом линии уровня - объеденение усеченных конусов. Таким образом если линии уровня оптимизируемой функции - концентрические окружности или элипсы, то пересечение линий уровня $||w||_{\frac{1}{2}}$ и минимальными линиями уровня оптимизируемой фукции будут пересекаться в углах графика $||w||_{\frac{1}{2}}$ (Так же как и с l_1 регуляризацией) , а значит это будут либо точки $|w_3| = C$ либо $\sqrt{w_1^2 + w_2^2} = C$, что и значит зануление группы признаков.