

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

С.Е. Душин, А.В. Красов, Ю.В. Литвинов

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
СИСТЕМ И КОМПЛЕКСОВ**

Учебное пособие



Санкт-Петербург
2010

С.Е. Душин, А.В. Красов, Ю.В. Литвинов – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. – 177 с.

В учебном пособии рассматриваются общие сведения о моделях и моделировании систем, принципы и методы получения математических моделей динамических объектов различной природы, методы численного моделирования систем и комплексов в статических и динамических режимах. Приводятся примеры, демонстрирующие возможности применения рассмотренных методов моделирования.

Для студентов (магистров) технических вузов, обучающихся по направлению «Системный анализ и управление» (220100.68). Может быть полезно студентам других технических направлений, а также аспирантам, преподавателям вузов и инженерам, научная и практическая деятельность которых связана с вопросами моделирования систем и комплексов управления

Рекомендовано к печати Учёным советом Факультета КТ и У, 08.06.2010, протокол №11



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

© Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, 2010

© С.Е. Душин, А.В. Красов, Ю.В. Литвинов , 2010

Оглавление

	Список сокращений	5
Глава 1.	Общие сведения о моделях и моделировании	6
1.1.	Основные понятия моделирования	6
1.2.	Виды моделирования	16
1.3.	Общая схема разработки математических моделей	19
	Контрольные вопросы	27
Глава 2.	Методы получения математических моделей систем	28
2.1.	Получение моделей систем на основе уравнения Ньютона	28
2.2.	Получение моделей систем на основе уравнений Лагранжа (формализм Лагранжа)	31
2.3.	Модели сил механических систем	43
2.3.1.	Систематизация обобщённых сил	43
2.3.2.	Модели сил трения	46
2.4.	Получение моделей систем на основе уравнений Гамильтона (формализм Гамильтона)	53
2.5.	Принцип динамического сжатия-расширения фазового пространства	54
2.6.	Получение моделей систем на основе уравнений балансовых соотношений	58
	Контрольные вопросы	81
Глава 3	Методы расчёта статических (равновесных) режимов	82
3.1.	Общие сведения о численных методах моделирования	82
3.2.	Постановка задачи и методы расчёта статических режимов	83
3.3.	Примеры итерационных методов	91
3.4.	Повышение алгоритмической надёжности итерационных методов	106
	Контрольные вопросы	110
Глава 4.	Методы расчёта динамических (переходных) режимов	111
4.1.	Общие сведения о численных методах расчёта динамических режимов	111
4.2.	Численные методы расчёта динамических	

режимов моделей систем с сосредоточенными параметрами	114
4.2.1. Постановка задачи расчёта динамических режимов	114
4.2.2. Многоэтапные методы	122
4.2.3. Многошаговые разностные методы	125
4.2.4. Примеры многошаговых разностных методов	127
4.2.5. Устойчивость многошаговых разностных методов	128
4.2.6. Условно устойчивые и абсолютно устойчивые разностные методы	131
4.2.7. Жёсткие модели систем	133
4.2.8. Чисто неявные разностные методы	139
4.2.9. Примеры жёстких моделей систем	140
4.2.10. Устойчивость жёстких моделей систем	143
4.2.11. Системные методы численного моделирования	148
4.2.12. Погрешности численного моделирования	149
4.2.13. Определение шага дискретизации	154
4.3. Численные методы расчёта динамических режимов моделей систем с распределёнными параметрами	160
Контрольные вопросы	167
Приложение	169
Список литературы	176

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ДУ	– дифференциальное уравнение
дучп	– дифференциальное уравнение в частных производных
ММ	– математическая модель
ОДУ	– обыкновенное дифференциальное уравнение
ОУ	– объект управления
СНКУ	– система нелинейных конечных уравнений
СУ	– система управления
УУ	– управляющее устройство
ФБС	– формула балансовых соотношений

Глава 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МОДЕЛЯХ И МОДЕЛИРОВАНИИ

1.1. Основные понятия моделирования

Моделирование представляет собой одну из категорий теории познания: на идее моделирования, по существу, базируется любой метод научного исследования – как теоретический, так и экспериментальный.

Под *объектом моделирования*, вообще говоря, подразумевается произвольный предмет человеческой деятельности. Им может быть какое-либо устройство, физическое явление или процесс. В теории управления, например, объектом моделирования выступает система управления (СУ) либо каким-то техническим устройством или технологическим процессом, либо объектом или процессом не технической природы (в частности, экономическим или биологическим процессом). Различают *материальные (вещественные)*, *энергетические* и *информационные* объекты моделирования.

Таким образом, в самом широком смысле, моделирование – это методология научной и практической деятельности человека, основанная на изучении свойств и характеристик объектов различной природы посредством естественных или искусственных аналогов объектов.

В более узком смысле, под моделированием понимается замещение одного объекта, называемого *оригиналом* или *натурой*, другим объектом, называемым *моделью* (от латинского *modulus* – мера, образец), позволяющим фиксировать и изучать существенные свойства оригинала.

Например, при проектировании судов требуется устанавливать зависимость силы лобового сопротивления от скорости хода судна. Аналитический расчёт такой зависимости затруднителен, поэтому решение достигается созданием геометрически подобных моделей меньших размеров и их испытаний в специальных бассейнах при создании условий, близких к реальным.

Моделирование представляет собой *двуединый процесс* (рис. 1.1): а) создания (построения) моделей; б) исследования моделей после того, как они построены.

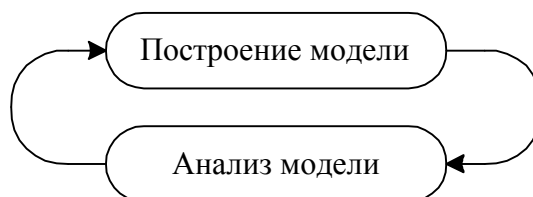


Рис. 1.1. Схема процесса моделирования

При построении модели необходимо исходить из поставленных *целей*, учитывая только наиболее существенные для их достижения факторы.

Модель является *средством описания, понимания и предсказания* как известных, так и новых явлений и процессов. Отсюда вытекают основные функции модели – описательная, объяснительная и прогностическая.

Модель строится для отражения лишь части свойств исследуемого объекта, и поэтому, как правило, она проще оригинала. Модель всегда отличается от оригинала (иначе это не модель) и сходна с познаваемым объектом только по определённой совокупности признаков. «Точная» или «полная» модель всегда тождественна оригиналу. По образному выражению Н. Винера (Weener) и А. Розенблюта (Rosenblueth): «...наилучшей моделью кота является другой кот, а ещё лучше – тот же самый кот».

Модели различаются по степени качественной и количественной адекватности исследуемому объекту относительно выбранных свойств и характеристик. Успех моделирования определяется удачным выбором моделей. Этот выбор часто субъективен и базируется на имеющихся экспериментальных и теоретических представлениях об объекте.

Модель создаётся в форме, более удобной для исследования, чем моделируемый объект. Результаты исследования по модели переносятся на оригинал. Хотя различного рода затраты при создании и использовании моделей могут быть немалыми, однако чаще всего они значительно уступают затратам для получения той же информации от реального объекта. Более того, гипотетические модели могут быть созданы и исследованы до создания самого объекта.

Для более полного исследования объекта обычно привлекается *набор частных моделей* $\{M_j\}$, каждая из которых отражает те или иные свойства изучаемого объекта. Нередко для отражения одних и тех же свойств объекта оказывается целесообразным привлечение различных моделей. В этом состоит *принцип множественности моделей* или *принцип иерархии моделей*.

Например, при исследовании устойчивости линейных СУ рассматривают частные модели: характеристический полином $D(s)$ или характеристический комплекс $D(j\omega)$ замкнутой системы (критерии Гурвица (Hurwitz), Рауса (Routh), Михайлова); амплитудно-фазовую $W_p(j\omega)$ или логарифмические амплитудно-частотную $L_p(\omega) = 20\lg|W_p(j\omega)|$ и фазочастотную $\varphi_p(\omega) = \arg W_p(j\omega)$ характеристики разомкнутой системы (критерий Найквиста (Nyquist)).

При исследовании реальной СУ одновременно могут быть использованы модели динамики и надёжности системы, её энергетическая и стоимостная модели. В свою очередь, динамическая модель системы может быть составлена для работы как в условиях стохастических воздействий и

случайных изменений операторов звеньев (нестационарная стохастическая модель), так и при детерминированных воздействиях и постоянных операторах (стационарная детерминированная модель).

Пусть рассматривается реальная физическая система S (например, подсистема управления энергетической установки с парогенератором) как объект моделирования. Для исследования такой системы на её вход от имитатора сигналов подаются различные типы воздействий f_j (конечно, если это допустимо), отвечающих возможным условиям функционирования (рис. 1.2, а). На выходе системы с помощью измерительных средств производятся измерения соответствующих реакций y_j для установления количественных закономерностей изучаемого объекта. В организации таких операций с целью установления свойств и характеристик системы заключается *проведение натурного эксперимента с объектом (работа с натурой)*.

При формализованном математическом описании прохождения сигналов через систему (например, дифференциальными, разностными или интегральными уравнениями) определение реакций на выходе возможно без привлечения реальной системы, используя лишь ЭВМ. В этом состоит *проведение вычислительного эксперимента с моделью (работа с моделью)* (рис. 1.2, б).

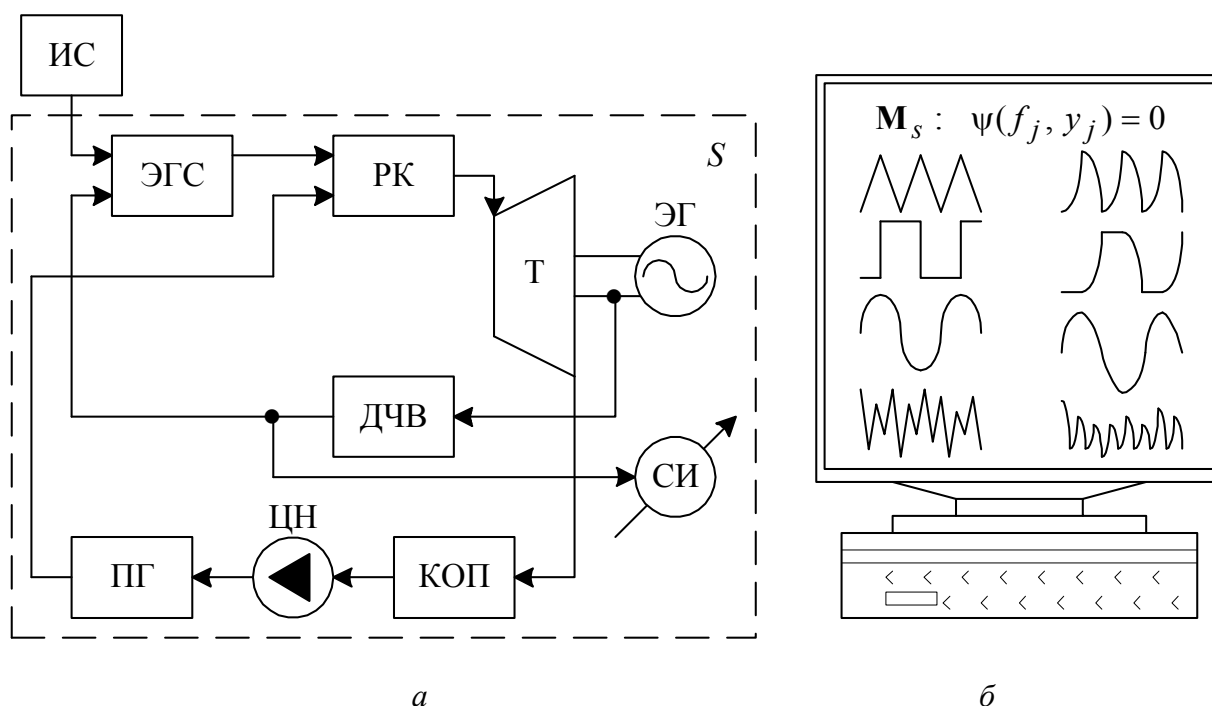


Рис. 1.2. Проведение натурного (а) и вычислительного (б) экспериментов: Т – турбина; ЭГ – электрогенератор; ЭГС – электрогидравлическая система; ПГ – парогенератор; РК – регулировочный клапан; ЦН – циркуляционный насос; КОП – конденсатор отработанного пара; ДЧВ – датчик частоты вращения; ИС – имитатор сигналов; СИ – средства измерений

Между натурным и вычислительным экспериментами можно обнаружить некоторое сходство, что отражает табл. 1.1.

Таблица 1.1

<i>Натурный (физический) эксперимент</i>	<i>Вычислительный (компьютерный) эксперимент</i>
Реальный (физический) объект (система)	Математическая модель объекта (системы)
Средства измерений (меры, измерительные преобразователи, приборы)	Программные средства (языки программирования, пакеты программ)
Поверка средств измерений	Тестирование программных средств
Измерения величин	Моделирование процессов

С ростом сложности системы возможности натурального эксперимента снижаются. Он становится дорогим, трудоёмким, длительным по времени, в слабой степени вариативным. В некоторых случаях вообще отсутствует возможность наблюдать поведение системы в интересующем режиме, например, в аварийном. Зачастую невозможно поставить натуральный эксперимент по проверке какой-либо космологической гипотезы, но вполне возможно проведение компьютерного моделирования. Не гуманен эксперимент на людях по распространению какой-либо эпидемии, однако современные методы и средства моделирования это допускают. Процессы развития многих биологических популяций слишком медленные, чтобы проследить их в реальном времени. Компьютерное моделирование позволяет сравнительно быстро получать результаты в «ускоренном» времени.

Однако и возможности вычислительного эксперимента имеют свои ограничения. Каждая модель справедлива лишь при тех условиях, при которых она определена. И только при этих условиях её следует применять. Например, линейная модель СУ отвечает только соответствующим частотному и динамическому (т. е. при ограниченных по уровням входных сигналов) диапазонам адекватности. Поэтому окончательно удостоверится в правильности построенной модели, т. е. в её достоверности, можно лишь в результате сравнения модельных данных с данными, полученными в ходе натурального эксперимента.

В определённых случаях возникает необходимость проведения *полунатурного эксперимента (полунатурного моделирования)*. Это объясняется тем, что в ходе вычислительного эксперимента иногда оказывается невозможным получить адекватные реальному объекту характеристики вследствие необходимости принятия при разработке модели ряда гипотез и упрощений. Вместе с тем определение характеристик с помощью проведения только натуральных экспериментов возможно лишь при наличии опытно-

го образца (реального объекта), для создания которого требуются значительные затраты времени, материальных средств и финансовых ресурсов.

Методы полунатурного моделирования основаны на исследовании динамических свойств систем, состоящих из натуральных (часто говорят *испытываемых*) элементов исследуемой системы, которые сопрягаются с остальной частью системы, выполненной в виде модели. В зависимости от задачи исследования испытываемым элементом может быть как объект управления (ОУ), так и регулятор, а также отдельные их компоненты. На рис. 1.3 представлена функциональная схема стенда полунатурного моделирования.

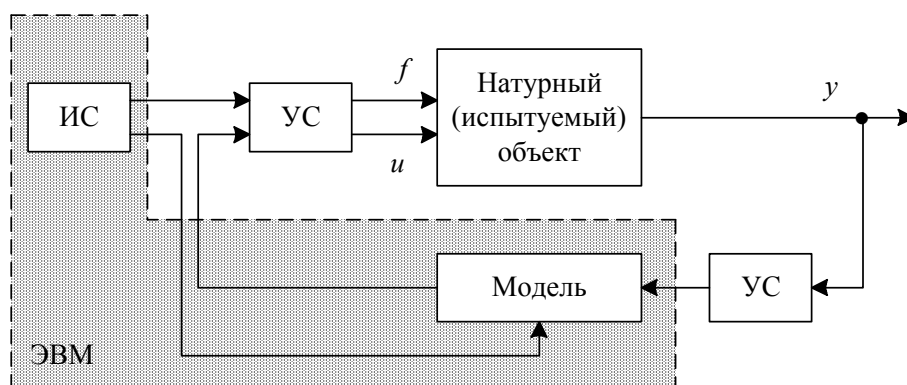


Рис. 1.3. Функциональная схема стенда полунатурного моделирования:
ИС – имитатор сигналов; УС – устройство сопряжения

Ниже приводятся ряд важных понятий из теории систем и теории автоматического управления, которые в дальнейшем будут способствовать лучшему освоению материала. Более подробно с этими и другими понятиями можно ознакомиться, например в [1, 2].

Система – объект, либо совокупность взаимодействующих объектов различной природы с выраженным «системным» свойством целостности.

Свойство целостности определяет внутреннее единство системы, её автономность, независимость, т. е. то, что позволяет выделить систему из окружающей (внешней) среды. Целостность системы проявляется в следующем:

1) свойства системы не являются суммой свойств элементов или частей, т. е. целое не сводится к простой сумме частей. Например, для контура управления с отрицательной обратной связью, состоящего из отдельных устойчивых звеньев, не гарантируется устойчивость процессов всего соединения;

2) свойства системы зависят от свойств элементов или частей, т. е. изменение в одной части приводит к изменениям в остальных частях системы. Например, при обрыве стабилизирующей обратной связи, которая охватывает ОУ, система становится неустойчивой.

Свойство целостности связано с целью, для выполнения которой предназначена система.

Элемент системы – простейшая неделимая часть системы. Другими словами, это предел расчленения (разбиения) системы с позиций решения конкретной задачи. Расчленение системы на элементы неоднозначно и зависит от поставленной цели исследования, от аспекта изучения системы.

Подсистема (субсистема) – часть системы, наделённая свойством целостности. Другими словами, предполагается, что система может быть разделена на элементы не сразу, а в результате предварительного расчленения на части более крупные, чем элементы, и в то же время более мелкие, чем система в целом. Возможность деления системы на подсистемы связана с формированием множеств взаимосвязанных элементов, способных выполнять относительно независимые функции, обладающих самостоятельными подцелями, направленными на достижение общей цели. Этим подсистема отличается от простой группы (совокупности) элементов, для которой не определена подцель и не выполняются свойства целостности (для такой группы можно использовать термин *компоненты* системы).

Надсистема (комплекс систем) – объединение нескольких систем, обладающее свойством целостности.

Внешняя (окружающая) среда – множество элементов, которые не входят в систему, но влияют на неё. Среда представляет собой некоторое окружение, с которым система взаимодействует.

Система характеризуется *входами*, через которые воздействие среды непосредственно передаётся системе, и *выходами*, через которые система воздействует на среду. Любой элемент системы имеет, по крайней мере, один вход и один выход. Воздействие состоит в передаче вещества, энергии, информации или комбинации этих субстанций. Соответственно, можно говорить о вещественном, энергетическом или информационном обмене (своеобразном метаболизме) системы со средой.

Системы, взаимодействующие со средой, называются *открытыми*. Системы, рассматриваемые без учёта взаимодействия с внешней средой, являются *закрытыми (изолированными, автономными)*. Средой для одной из подсистем системы могут служить остальные подсистемы или часть из них, а также «сторонние» системы. Следует отметить, что система может рассматриваться как элемент системы более высокого уровня иерархии, а элемент – как система при более углублённом анализе. Отношение к системе определяется не только её содержанием, но и точкой зрения, задачами, стоящими перед исследователем.

Связь – это существенный в условиях рассматриваемой задачи обмен между элементами веществом, энергией и информацией. Для любых систем характерно наличие *существенных связей* между элементами, значительно превосходящими по силе (по мощности) связи этих элементов с элементами, не входящими в данную систему. Указанное свойство (нали-

чие существенных связей) позволяет выделить систему в виде целостного объекта из окружающей среды. На рис. 1.4 изображены система S , образованная частями (подсистемами) S_i и группа (совокупность) компонентов S_i , не образующая целостную систему. Существенные связи указаны непрерывными стрелками, несущественные – прерывистыми.

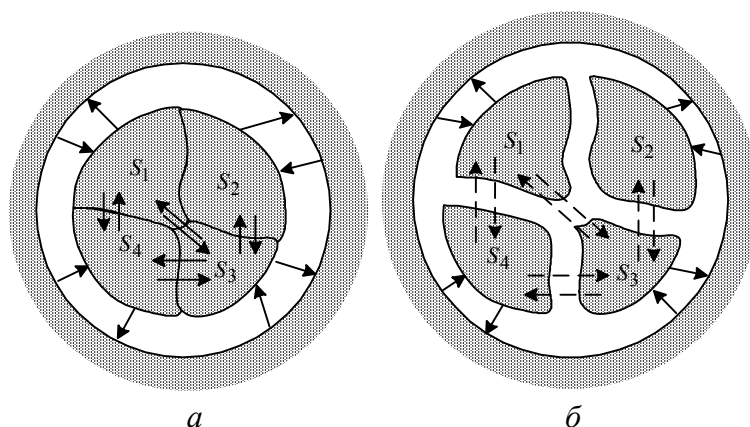


Рис. 1.4. Целостная система (а) и группа компонентов (б)

Связи могут характеризоваться направлением и силой (мощностью). Наряду с элементами, связи обеспечивают возникновение и сохранение структуры и целостных свойств системы. Связность характеризует одновременно и строение (статику), и функционирование (динамику) системы.

Структура – совокупность элементов и связей между ними. Структура системы отражает наиболее существенные взаимоотношения между элементами, которые незначительно меняются в процессе функционирования системы и обеспечивают её устойчивое состояние.

Состояние системы – множество существенных свойств, которыми система обладает в данный момент времени. Состояние системы характеризуется совокупностью внутренних $\{v_i\}$ и внешних $\{f_j\}$ величин, определяющих изменения, происходящие в системе. Множество состояний системы может быть конечным, счётным или континуальным.

Функционирование (поведение) системы заключается в последовательных переходах из одних состояний в другие возможные состояния.

Процесс – упорядоченный набор состояний системы, соответствующий непрерывному или дискретному изменению некоторой физической переменной, определяющей свойства и характеристики системы. Частным случаем такой переменной является время t . Процесс изменения состояния системы во времени называется *динамикой* системы. Переменными процесса могут также выступать и другие физические величины: температура, давление, напряжение и т. п.

Для символьной записи процесса вводится векторная (по числу выделенных переменных) величина y . Множество возможных значений величины y обозначается через Y : $y \in Y$. Вводится независимая переменная процесса t и множество её значений T : $t \in T$. Величину y можно представить как векторную функцию от этого параметра: $y = y(t), t \in T$. Тогда процесс $P_{t_0 t}$ есть некоторое правило перехода системы от состояния со значением параметра t_0 к состоянию со значением $t > t_0$ через все его промежуточные непрерывные или дискретные значения:

$$P_{t_0 t}(y(t_0)) = y(t), \quad y \in Y, t \in T.$$

Возможна и другая запись процесса в виде отображения множеств:

$$P_{t_0 t} : T \times Y \rightarrow Y.$$

Динамическая система – объект или процесс, для которого однозначно определено его состояние и задан закон изменения начального состояния с течением времени. Этот закон позволяет по начальному состоянию однозначно прогнозировать будущее состояние и поэтому его называют *законом эволюции* динамической системы.

Цель – это заранее мыслимый результат, на достижение которого направлены действия. В конкретных условиях понятие цели обязательно должно уточняться. Система с поставленной перед ней целью называется *целенаправленной системой*.

Управление – совокупность операций по организации некоторого процесса для достижения определённых целей. Другими словами, управление – это организация целенаправленного взаимодействия вещества, энергии и информации в системе.

Цель управления определяется значениями, соотношениями значений переменных ОУ или их изменениями во времени, при которых обеспечивается достижение желаемых результатов функционирования. Цели управления задают необходимое поведение системы, т. е. необходимый закон изменения исследуемых переменных или некоторых характеристик СУ в условиях её взаимодействия с внешней средой.

Такие цели управления, как обеспечение абсолютной инвариантности вынужденных составляющих движений к возмущающим воздействиям (абсолютной ковариантности с задающим воздействием); нулевой чувствительности (параметрической инвариантности) к нестабильным параметрам ОУ; автономности одних переменных от других и т. д. зачастую являются идеальными. Обычно на практике идеальные цели не достижимы. Практически осуществимы лишь реальные цели, задаваемые в виде прямых и косвенных показателей качества СУ.

Объект управления – любой объект окружающего мира, будь то техническое устройство, технологический процесс, городское хозяйство или биологическая популяция, в котором возможна и необходима организация воздействий для достижения поставленных целей.

Управляющее устройство (УУ) предназначено для выработки управляющего воздействия по определённому алгоритму.

Управляемый процесс $P_{t_0 t}^u$ с управлением u с помощью символьной записи можно представить как

$$P_{t_0 t}^u(y(t_0)) = y(t, u), \quad y \in Y, u \in U, t \in T,$$

где U – множество возможных управлений.

Управляемому процессу соответствует отображение множеств:

$$P_{t_0 t}^u : T \times U \times Y \rightarrow Y.$$

В представленной записи отражена лишь возможность управления процессом, но отсутствует цель управления. Для записи целенаправленного управляемого процесса выделяются те переменные системы y , на которые можно влиять выбором управления u . Вводится величина J , которую называют *критерием*. Критерий J считается зависящим от выделенных переменных y и от управления u , т. е. $J(y, u)$. При достижении поставленной цели критерий принимает желаемое значение J^* .

Пусть существует управление u^* , позволяющее в некоторый момент времени $t_{ц}$ достичь цели управления J^* . Тогда управляемый процесс можно записать как

$$P_{t_0 t}^u(y(t_0)) = y(t, u), \quad J(y(t_{ц}, u^*), u) = J^*, \quad y \in Y, u, u^* \in U, t \in T.$$

В частности, в качестве цели управления может быть выбран желаемый процесс в системе, т. е. $J(y, u^*) = y^*(t)$. Тогда управляемый процесс записывается как

$$P_{t_0 t}^u(y(t_0)) = y^*(t, u^*).$$

Процесс управления можно представить в виде следующей *информационно-энергетической схемы* (рис. 1.5). На схеме тонкими стрелками указаны информационные связи, фоновые стрелки обозначают силовые (энергетические) воздействия на объект.

Система управления представляет собой особый класс динамических систем, отличающихся от последних наличием определённых функций (например, генерированием и преобразованием энергии, переносом потоков жидкости и газов, формообразованием твёрдых тел, передачей и пре-

образованием информации) и целей управления и необходимой для реализации этих функций и целей специальной организации [3].

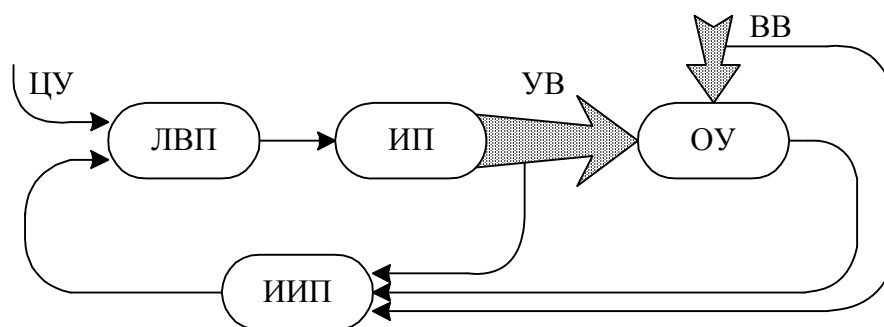


Рис. 1.5. Информационно-энергетическая схема процесса управления: ЛВП – логико-вычислительная подсистема; ИП – исполнительная подсистема; ИИП – информационно-измерительная подсистема; ОУ – объект управления; ЦУ – цель управления; УВ – управляющее воздействие; ВВ – возмущающее воздействие

Под *специальной организацией* понимается целенаправленный выбор топологии (структуры) СУ, типа, вида и параметров операторов звеньев, удовлетворяющих заданным показателям и критериям качества. Принципиальным свойством СУ, выделяющих их в *особый класс динамических систем*, является использование текущей информации об управляющих воздействиях на входе и переменных на выходе СУ для реализации обратной связи (рис. 1.6), обеспечивающей, в частности, уменьшение чувствительности к сигнальным и параметрическим возмущениям.

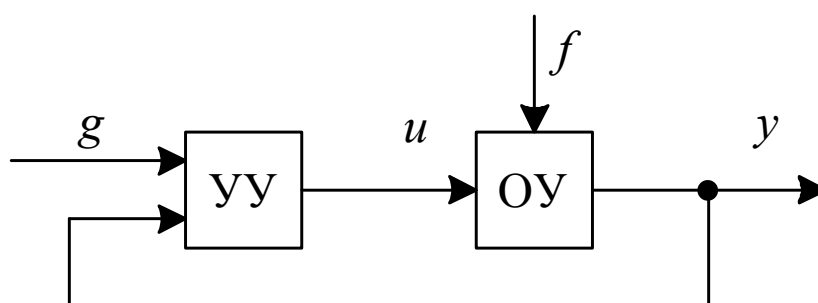


Рис. 1.6. Система управления с обратной связью: ОУ – объект управления; УУ – управляющее устройство

1.2. Виды моделирования

В зависимости от способа существования системы (объекта) моделирование можно разделить на реальное и мысленное.

Реальное (материальное) моделирование предполагает наличие вещественного объекта в виде некоторого устройства, с помощью которого осуществляется моделирование. Объект может быть не только искусственно созданным, но и быть специально отобранным в силу присущих ему определённых свойств. Например, использование мухи дрозофилы в качестве генетической модели для исследования проблемы наследственности человека ввиду большой скорости размножения этого насекомого.

При реальном моделировании используется возможность исследования свойств и характеристик либо целиком на рассматриваемом объекте, либо на его части, либо на другом материальном объекте. Такие исследования производятся на объектах, работающих как в нормальных (эксплуатационных) режимах, так и при организации специальных режимов. Существуют разновидности реального моделирования: натурное, физическое и аналоговое.

При *натурном моделировании* исследование проводят на реальном (действующем) объекте с последующей обработкой результатов экспериментов. К натурному моделированию относят *научный эксперимент* – специально организованные испытания на реальном объекте.

Физическое моделирование отличается от натурного тем, что исследования производятся на установках, которые сохраняют природу явлений и обладают физическим и геометрическим подобием. Например, продувка летательного аппарата в аэродинамической трубе.

Аналоговое моделирование основано на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но описываемых одинаковыми математическими соотношениями. Например, широко применяется электродинамическая модель для описания стационарного поля течения жидкости.

Идеальное (мысленное) моделирование, в отличие от реального, осуществляется умозрительно, т. е. в сознании человека. Идеальное моделирование может предшествовать проведению реального моделирования, либо применяться в случае отсутствия возможности создания вещественной модели. Идеальное моделирование реализуется в виде описательного и/или символического моделирования.

Описательное моделирование в виде вербальных (описательных) моделей представляет собой словесное описание объектов, явлений и процессов на человеческом языке общения. Такой вид моделирования широко используется в гуманитарных областях знаний, например, при изучении социальных, экономических, экологических систем, а также на ранних

стадиях построения моделей технических систем и технологических процессов. Часто такие модели не полностью формализованы.

Символическое (знаковое) моделирование предполагает для описания свойств и характеристик объекта, происходящего явления или процесса использование строго определённых символов (знаков), схем, графиков, чертежей. Кроме того, такое моделирование включает набор правил, по которым можно оперировать с выбранными знаковыми образованиями. В качестве примера можно привести использование знаков и структурных формул в химии.

Следует заметить, что деление моделей на вербальные и знаковые в определённой степени условно. Любая знаковая модель сопровождается описательной, так как любые символы требуют пояснения словами.

Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование.

Математическое моделирование представляет собой идеальное знаковое моделирование, при котором описание объекта, явления или процесса производится на языке математики, а исследование моделей основывается на применении различных математических методов.

Математическая модель (ММ) системы представляет собой приближённое количественное описание функционирования системы в определённых условиях и при принятых допущениях, выраженное с помощью математической символики. Другими словами, ММ – это формализованное описание поведения системы на языке алгоритмических действий с математическими формулами и логических операций (переходов).

К действиям с формулами и логическим операциям относят:

- операции запоминания математического элемента, его вызова, подстановки в нужное место математического выражения (эти операции неявно присутствуют при работе с любой формулой);
- операцию «следование за» в упорядоченной совокупности элементов;
- операцию сравнения и установления совпадения элементов и ряд других операций.

Традиционно ММ допускают работу с таблицами, графиками, номограммами, а также выбор из совокупности процедур и элементов. Выбор требует применения операций предпочтения, частичной упорядоченности, включения и т. д.

Любая ММ, предназначенная для исследования и проектирования, позволяет по заданным исходным данным найти значения интересующих исследователя величин моделируемого объекта или процесса. Поэтому можно предположить, что суть любой ММ заключается в отображении некоторого заданного множества Θ_x входных переменных X на множество значений Θ_y выходных переменных Y . Тогда под ММ следует понимать лю-

бой оператор Ψ , позволяющий по соответствующим значениям входных переменных X установить выходные значения переменных Y объекта моделирования:

$$\Psi: X \rightarrow Y, \quad X \in \Theta_x, \quad Y \in \Theta_y,$$

где Θ_x и Θ_y – множества допустимых значений входных и выходных переменных для моделируемого объекта. В зависимости от природы моделируемого объекта элементами множеств Θ_x и Θ_y могут быть любые математические объекты (числа, векторы, тензоры, функции, множества и т. п.). Понятие оператора в приведённом определении трактуется достаточно широко. Это может быть как некоторая функция, связывающая входные и выходные значения, так и отображение, представляющее символическую запись системы алгебраических, дифференциальных или интегральных уравнений. Наконец, это может быть некоторый алгоритм, совокупность правил или таблиц, обеспечивающих нахождение (или установление) выходных переменных по заданным исходным значениям.

Основное отличие ММ от остальных моделей состоит в вариативности – возможности с помощью одних и тех же математических знаков описывать поведение целого набора различных по своей сущности систем. Так, например, линейным обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) с постоянными коэффициентами описываются:

- колебания математического маятника;
- движение массы на пружине;
- изменение тока в электрическом колебательном контуре и т. д.

На основе ММ возможен дедуктивный вывод свойств поведения системы. Такие модели отличаются компактной формой записи, возможностью изучения системы в форме, абстрагированной от конкретного содержания.

Большинство разделов современной физики связаны с построением и исследованием ММ различных физических объектов и явлений. Так, в ядерной физике ещё до проведения натурных экспериментов проводятся фундаментальные исследования с применением ММ. На основании теоретических исследований и вычислительных экспериментов разрабатывается и уточняется методика натурных экспериментов. Такой подход позволяет значительно снизить затраты на проведение натурных экспериментов, повысить его эффективность. Например, с использованием математического моделирования были получены уникальные результаты по проекту «Гея», связанному с математическим анализом последствий ядерной войны. Выяснилось, что в результате сильнейшего запыления атмосферы возможно глобальное похолодание («ядерная зима») и вызванное этим вымирание живого мира.

1.3. Общая схема разработки математических моделей

При разработке ММ какой-либо системы, в том числе СУ, различают три основных этапа.

1. Построение ММ. На этом этапе осуществляется полная математическая формализация задачи моделирования.
2. Изучение (исследование) построенной ММ.
3. Истолкование (интерпретация) результатов изучения ММ и принятие решения об уточнении (корректировке) модели.

После завершения всех этапов ММ считается готовой к использованию.

Использование ММ возможно для различных целей: проектирования систем, управления процессами в системах, прогнозирования поведения систем.

При проектировании ММ используется для так называемого *предварительного синтеза*, когда структура системы, операторы и параметры элементов, в том числе УУ, могут выбираться в отсутствии реальной системы.

В задачах управления выбор управляющего воздействия на объект, может осуществляться непосредственно в процессе функционирования системы на основе текущей информации о её поведении. В этом состоит так называемый *управляемый (совмещённый) синтез* [4]. Управляемый синтез требует больше текущей информации по сравнению с предварительным синтезом.

Моделирование, как процесс разработки ММ системы, может быть представлен в виде схемы (рис. 1.7). При этом допускается многократное повторение как каждого этапа, так и всего процесса в целом.

Первый этап разработки ММ системы (объекта) включает в себя следующие операции.

1. Сбор, накопление и обобщение сведений о процессах, происходящих в реальной системе, т. е. полное её обследование (мониторинг).
2. Выделение (вычленение) по функционально-целевым признакам частей системы (элементов, подсистем), установление существенных взаимосвязей между ними, а также с внешней средой, т. е. проведение структуризации системы.



Рис. 1.7. Схема разработки математической модели

В результате таких действий выявляется набор величин и параметров, который может составить в дальнейшем основу формируемой ММ:

$$\{t, f_1(t), \dots, f_l(t), x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_r(t), a_1, \dots, a_p\}, (1.1)$$

где t – время; $f_j(t)$ – воздействия внешней среды на входах системы – независимые переменные, изменяющиеся во времени; $x_i(t)$ и $y_k(t)$ – зависимые от воздействий внутренние и выходные переменные системы; a_s – параметры, т. е. величины, которые не меняются в течение определённого интервала времени. Некоторые из переменных x_1, \dots, x_n являются измеримыми, другие – недоступны измерению. Выходные (управляемые) переменные y_1, \dots, y_r обычно подлежат измерению.

3. Для СУ важным является установление множества переменных, которые можно принять в качестве управляющих воздействий

$$\{u_1(t), \dots, u_m(t)\}. (1.2)$$

4. Выяснение объективных законов взаимодействия частей (подсистем, элементов) системы друг с другом и внешней средой.

Необходимая информация о системе для построения ММ может быть получена:

– либо на основе известных законов (физических, химических, биологических, экономических и т. д.) ранее разработанных теорий для исследуемой системы.

дуемой системы. Такой подход составляет *аналитический способ построения* ММ;

– либо на основе проведения натурных экспериментов с реальной системой. При этом *активный натурный эксперимент* предполагает приложение на входах системы специально сформированных воздействий детерминированного и/или случайного характера (рис. 1.2, *а*), а при проведении *пассивного натурального эксперимента* система находится в условиях нормального (естественного, эксплуатационного) функционирования. Данный подход составляет *экспериментальный способ построения* ММ, который принято называть *идентификацией*.

По мере накопления знаний о реальной системе (объекте), о явлениях и процессах в ней, выдвигаются различные гипотезы, принципы, концепции, постулаты, которые позволяют в сжатой и доступной форме объяснять наблюдаемые явления и с достаточной точностью предсказывать возможные состояния в будущие моменты времени, а также выяснять условия, при которых впоследствии может быть произведён синтез – осуществление желаемого поведения системы по корректируемой ММ.

Получаемую таким образом на начальной стадии построения модель называют *содержательной (концептуальной, феноменологической)*. В процессе построения содержательной модели производится абстрагирование (пренебрежение) от различных малозначащих свойств и характеристик изучаемой реальной системы (конечно, если эти несущественные свойства и характеристики сами не являются предметом исследований) и осуществляется переход к её упрощённому, не избыточному описанию. Такая процедура обычно требует неформальных подходов.

В литературе можно встретить и более подробную классификацию моделей, формализуемых на этапе разработки ММ [5]. Например, модель, получаемую на начальной стадии разработки ММ, иногда называют *когнитивной моделью*. Когнитивная модель представляет собой мысленный образ реального объекта (или процесса), формирующийся в результате наблюдений за его работой (или протеканием). При формировании такой идеальной модели все избыточные с точки зрения исследователя детали отбрасываются, получая тем самым компактное и лаконичное описание объекта или процесса.

Представление когнитивной модели на естественном языке называют *содержательной моделью*. В технике содержательную модель нередко именуют *технической постановкой задачи*.

Концептуальной моделью называют содержательную модель, в представлении которой используются понятия из тех предметных областей знаний, которые связаны с изучением объекта или процесса моделирования. В более широком смысле под концептуальной моделью понимают содержательную модель, базирующуюся на определённой концепции или

точке зрения. Например, реальный моделируемый объект – летательный аппарат – заменяется его механической моделью – материальной точкой.

Построение содержательной модели может завершаться разработкой структурно-функциональной модели. *Структурно-функциональная модель* – совокупность взаимосвязанных частей (элементов, подсистем) объекта, выполняющих определённые функции. Для представления такой модели часто используется графическая *функциональная схема*, предшествующая получению ММ.

В процессе изучения системы на последующих этапах разработки модели, последняя постоянно уточняется вследствие учёта новых факторов. Поэтому всегда следует говорить *об иерархии (упорядоченном наборе) моделей*, каждая из которых с той или иной степенью точности описывает реальную систему. Однако и в рамках наиболее простой модели необходимо добиваться согласия с данными экспериментов.

На стадии построения содержательной модели ведущая роль принадлежит специалисту той предметной области знаний, к которой относится исследуемый объект, явление или процесс, поскольку необходимо обладать глубокими теоретическими познаниями в этой области и опытом постановки и анализа результатов экспериментов.

На основе содержательной модели наборы величин (1.1) и (1.2) связываются в определённые уравнения (системы уравнений)

$$\Psi(t, f_1, \dots, f_l, x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_q, u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_r, a_1, \dots, a_p) = 0,$$

либо каким-то иным способом производится формализация модели. Используются также приёмы и символы наглядного графического изображения (электрическая и механическая схемы, диаграмма сигнального графа или структурная схема СУ).

В зависимости от вида системы и степени адекватности (приближения) модели уравнения могут быть: линейными или нелинейными; конечными (алгебраическими и трансцендентными), обыкновенными дифференциальными, дифференциальными в частных производных, разностными, интегральными или интегродифференциальными и т. д.

Процессом окончательной формализации модели, состоящей в приведении её к форме, удобной для последующего анализа (например, к описанию в форме пространства состояний), завершается первый этап разработки ММ.

Второй этап состоит в изучение построенной ММ, т. е. по сути решении поставленной математической задачи. Выбирается подходящий или создаётся новый математический метод и с его помощью отыскиваются решения, соответствующие реальным процессам. Поиск решения математической задачи по ММ часто сводится к отысканию некоторых зависимостей одних величин от других с использованием аналитических или алго-

ритмических методов. Сюда же следует отнести разработку алгоритмического и программного обеспечения.

Очень важно, что все величины, участвующие в создании ММ, определённым образом связаны с физическими величинами реальной системой. Это даёт возможность в ходе работы с моделью привлекать дополнительные сведения о системе, которые позволяют упростить процесс составления модели и её анализа, в частности выбрать из множества решений лишь те, которые удовлетворяют реальным ситуациям.

При изучении ММ нередко выделяют стадию предварительного исследования. На этой стадии с доступной полнотой, на принятом в математике уровне строгости решаются вопросы о корректности поставленной задачи. Стадия предварительного исследования ММ включает постановку упрощённых (модельных) задач и их подробный анализ, поскольку получение решения полной математической задачи часто оказывается слишком сложным. Модельные задачи позволяют провести качественное, иногда аналитическое исследование частичной или полной математической задачи, а также выполнить тестирование вычислительных алгоритмов и программ.

При качественном исследовании модельных задач изучаются вопросы существования и единственности решения, его устойчивости и грубости, выявления границ (особых траекторий) областей качественно эквивалентного поведения и т. д. Большое значение при анализе приобретают вопросы получения точных частных решений существенно нелинейных задач, асимптотических решений. На этой стадии возможно применение всех известных математических методов в рамках поставленной проблемы.

Для контроля адекватности получаемой ММ рекомендуется выполнение следующих действий [6].

Контроль размерностей, включающий правило, согласно которому приравниваться и складываться могут только физические величины одинаковой размерности. При переходе к вычислениям данная проверка сочетается с контролем использования одной и той же системы единиц для значений всех величин.

Контроль порядков, состоящий из грубой, прикидочной оценки сравнительных порядков вычисляемых величин и исключением малозначимых величин. Например, если для выражения $x + y + z = 0$ в результате анализа установлено, что в рассматриваемой области значений величин выполняются неравенства $|z| \ll |x|$ и $|z| \ll |y|$, то третьим слагаемым в исходном выражении можно пренебречь.

Контроль характера зависимостей заключается в проверке того, что направленность и скорость изменения переменных и параметров ММ соответствуют «физическому» смыслу изучаемых процессов.

Контроль экстремальных (предельных) состояний, состоящий в проверке того, какой вид принимают математические соотношения, а также результаты математического моделирования, если переменные и параметры ММ или их комбинации асимптотически приближаются к предельно допустимым для них значениям, чаще всего к нулю или бесконечности. В подобных экстремальных состояниях модель часто упрощается, математические соотношения приобретают более ясный смысл, упрощается их проверка. Например, в результате перехода от динамической модели СУ к статической при $t \rightarrow \infty$ значительно облегчается нахождение равновесных положений (см. 3.1).

Контроль граничных (в том числе, начальных) условий, включающий проверку соответствия ММ данным условиям и их использования в процессе анализа поведения системы по ММ.

Контроль физического смысла, заключающегося в проверке физического (или иного, в зависимости от природы изучаемого объекта) смысла исходных и промежуточных соотношений, появляющихся в процессе построения ММ.

Контроль математической замкнутости, состоящий в проверке того, что принятая ММ даёт возможность, притом однозначно, решить поставленную задачу. Например, если задача свелась к отысканию n неизвестных из некоторой системы конечных уравнений (задача определения состояний равновесия или статических режимов СУ), то контроль замкнутости состоит в проверке того факта, что число независимых уравнений должно равняться n . Если их меньше n , то необходимо установить недостающие уравнения, если их больше n , то либо некоторые уравнения зависимы, либо при их составлении допущена ошибка. Однако если уравнения получаются из эксперимента или в результате наблюдений, то возможна постановка задачи, при которой число уравнений превышает n , но сами уравнения удовлетворяются лишь приближённо, а решение ищется, например, по методу наименьших квадратов. При этом количество используемых ограничений в виде неравенств может быть произвольным.

Свойство математической замкнутости системы математических соотношений тесно связано с понятием *корректно поставленной задачи*, т. е. задачи, для которой решение существует, оно *единственно* и *непрерывно* зависит от исходных данных.

Впервые понятия корректно и некорректно поставленных задач были введены Ж. Адамаром (Hadamard). Задача определения решения x из множества Θ_x по исходным данным y из множества Θ_y или, другими словами, по известному уравнению $\Psi(x) = y$ нахождения $x = \Psi^{-1}(y) = \Omega(y)$, называется корректно поставленной на множествах Θ_x , Θ_y , являющихся пространствами с метриками ρ_x , ρ_y соответственно, если выполняются условия:

- 1) для любого $y \in \Theta_y$ существует $x \in \Theta_x$;
- 2) решение x определяется однозначно;
- 3) решение непрерывно зависит от входных данных (устойчиво), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из соотношений $\rho_y(y_1, y_2) \leq \delta$ и $x_1 = \Omega(y_1)$, $x_2 = \Omega(y_2)$ следует $\rho_x(x_1, x_2) \leq \varepsilon$. Другими словами, решение считается непрерывным (устойчивым), если малому изменению исходных данных соответствует достаточно малое изменение решения.

Задача, не удовлетворяющая перечисленным условиям, называется некорректно поставленной.

Понятие корректности задачи имеет большое значение при исследовании ММ. Так, численные методы моделирования оправдано применять лишь к корректно поставленным задачам. При этом далеко не все задачи, возникающие на практике, можно считать корректными (например, так называемые обратные задачи динамики [7]). Доказательство корректности конкретной математической задачи – достаточно сложная проблема; она решена только для некоторого класса ММ. Проверка математической замкнутости является менее сложной по сравнению с проверкой корректности математической постановки. В настоящее время активно исследуются свойства некорректных задач, разрабатываются методы их решения. Понятию «корректно поставленная задача» можно поставить в соответствие понятие «корректная математическая модель» [5].

Математическая модель корректна, если она удовлетворяет всем контрольным проверкам: размерности, порядков, характера зависимостей, экстремальных условий, граничных условий, физического смысла и математической замкнутости.

На следующей стадии производится дискретизация непрерывной модели, разрабатываются, при необходимости, численные алгоритмы решения поставленной задачи на ЭВМ и соответствующее программное обеспечение. При построении численных алгоритмов и их исследовании возможны два подхода.

Первый подход теоретического направления изучает дискретные модели и численные методы их исследования в контексте решения конкретной прикладной проблемы вне связи с реализацией на ЭВМ. При этом проводят строгие доказательства о существовании решения дискретной задачи, получают теоретические оценки погрешности приближённого решения, изучают сходимость итерационного процесса и т. п.

Второй подход прикладного направления исследования, обычно с помощью ЭВМ, работает на «практическом» уровне строгости, для которого характерны такие нестрогие понятия, как «практическая сходимость», «реальные сетки» и т. д.

Процесс разработки ММ характеризуется двумя особенностями, которые необходимо учитывать при создании адекватного программного обеспечения. Это многовариантность расчётов в рамках фиксированной ММ и многомодельность. В цикле вычислительного эксперимента проводится серия расчётов на ЭВМ при изменении тех или иных параметров, воздействий, начальных или граничных условий с различными моделями из упорядоченного набора для одной и той же реальной системы.

Третий этап состоит в истолковании (интерпретации) результатов исследования системы по ММ. В него может входить проверка адекватности модели на основе сравнения результатов математического моделирования с экспериментальными данными. Всесторонний анализ результатов позволяет:

- выполнить модификацию исследуемой системы, найти её оптимальные характеристики;
- определить область применения ММ, что особенно важно в случае проектирования систем автоматического управления;
- проверить обоснованность гипотез, принятых на этапе построения ММ, оценить возможность упрощения модели с целью повышения её эффективности при сохранении требуемой точности;
- показать, в каком направлении следует корректировать модель.

Под *адекватностью* ММ понимается степень соответствия результатов, полученных по разработанной модели, данным эксперимента или тестовой (модельной) задачи. Прежде чем переходить к проверке адекватности модели, необходимо убедиться в правильном комплексном функционировании всех алгоритмов и программ модели, выполнить независимое тестирование и отладку всех отдельных алгоритмов (например, используемых программных модулей, реализующих применяемый численный метод).

Проверка адекватности модели преследует две цели:

- убедиться в справедливости гипотез, сформулированных на этапах построения и анализа ММ;
- установить, что точность полученных результатов соответствует точности, оговорённой в техническом задании.

Проверка разработанной ММ выполняется путём сравнения с имеющимися экспериментальными данными о реальной системе, а также с результатами других, созданных ранее и хорошо зарекомендовавших моделей. В первом случае говорят о проверке путём сравнения с экспериментом, во втором – о сравнении с результатами решения модельной задачи.

Принято различать качественное и количественное совпадение результатов. При качественном сравнении требуется лишь совпадение некоторых характерных особенностей в поведении исследуемых величин (например, наличие экстремумов, положительное или отрицательное значение величины, её убывание или возрастание и т. п.). При количественном срав-

нении большее значение придаётся точности исходных данных для моделирования и соответствующих им значений сравниваемых величин.

При возникновении проблем, связанных с адекватностью модели, её корректировку следует начинать с последовательного анализа всех причин, приведших к расхождению результатов моделирования и эксперимента. В первую очередь требуется исследовать модель и оценить степень её адекватности при различных значениях начальных и граничных условий, воздействий, параметров. Если модель неадекватна в интересующей исследователя области параметров и переменных, то можно попытаться уточнить их значения. Если и в этом случае не достигаются положительные результаты, то единственной возможностью улучшения ММ остаётся изменение принятой системы гипотез. Такой путь фактически означает возвращение к исходному этапу разработки ММ и может повлечь не только серьёзное изменение математической постановки задачи, но и методов её решения (например, переход от аналитических к численным), полной переработки программного обеспечения и нового цикла проверки модели на адекватность.

Описанные этапы тесно связаны между собой и их расчленение является до некоторой степени искусственным. Нередко ММ строятся с ориентацией на предполагаемый метод решения математической задачи – в частности, с учётом того, будет ли привлекаться ЭВМ и какой мощности. С другой стороны, при проведении математического исследования или интерпретации результатов могут возникнуть потребности в уточнении или существенном изменении ММ. Схема предполагает наличие «обратных связей», которые позволяют корректировать ММ на любом этапе.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой моделирование?
2. Назовите основные функции модели.
3. С какой целью создаются модели?
4. В чём состоит принцип множественности (принцип иерархии) моделей?
5. В чём проявляются недостатки натурного эксперимента по отношению к вычислительному?
6. Какие ограничения накладываются на вычислительный эксперимент?
7. Для чего проводится полунатурный эксперимент?
8. Чем отличается идеальное моделирование от реального?
9. Что представляет собой математическая модель?
10. В чём состоят достоинства математических моделей?
11. Назовите основные этапы разработки математических моделей.
12. Из каких операций складывается этап построения содержательной модели?
13. Обоснуйте значимость проверки адекватности модели.

Глава 2. МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ

Получение многих ММ как технических, так и нетехнических систем основывается на применении фундаментальных законов природы, вариационных принципов, принципов аналогий.

К числу фундаментальных следует отнести различные законы сохранения, например: энергии, массы вещества, числа частиц (в частности, фотонов), импульса, момента импульса, заряда (электрического и барионного). Законы сохранения представляют собой условия постоянства некоторых функционалов на возможных движениях системы. Существует известная теорема Э. Нётер (Noether), указывающая простой и универсальный способ нахождения законов сохранения. В упрощённом виде смысл формулировки теоремы сводится к тому, что если свойства исследуемой физической системы не изменяются при каком-либо преобразовании переменных, то этому соответствует некоторый закон сохранения. Например, согласно теореме закон сохранения энергии является следствием однородности времени, т. е. независимости законов движения системы от выбора начала отсчёта времени.

Наряду с законами сохранения большое распространение, особенно в механике, получили вариационные принципы, основанные на формализме Лагранжа (Lagrange) и Гамильтона (Hamilton). Вариационные принципы представляют собой достаточно общие утверждения об изучаемой системе и гласят, что из всех возможных вариантов её поведения (эволюции) выбираются лишь те, которые удовлетворяют определённому условию. Согласно этим принципам некоторая, связанная с системой величина (обычно функционал), достигает своего экстремального значения при переходе системы из одного состояния в другое.

В связи с широким практическим распространением подвижных механических и электромеханических СУ целесообразно подробнее остановиться на вопросах получения их описания, в том числе с использованием вариационных принципов.

2.1. Получение моделей систем на основе уравнения Ньютона

Математическая модель механической системы может быть представлена с помощью уравнения *второго закона Ньютона*, который полностью характеризует динамику системы. Предполагается, что исследуемая система состоит из совокупности N материальных точек, которые находятся под действием каких-либо сил:

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где \mathbf{r}_i – радиус-вектор i -й материальной точки, проведённый из начала выбранной системы координат; m_i – её масса; $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t)$ – результирующая всех сил, приложенных к i -й точке. Величины \mathbf{F}_i считаются заданными.

Закон Ньютона носит аксиоматический характер и справедлив для евклидова пространства. В отличие от классической механики теория релятивистской механики А. Эйнштейна (Einstein) опирается на риманово пространство, что в результате приводит к модификации второго закона Ньютона.

Если представить уравнение движения в координатной форме записи и задать начальные координаты $x_i(t_0)$, $y_i(t_0)$, $z_i(t_0)$, $i = 1, \dots, N$ точек и их скорости $\dot{x}_i(t_0)$, $\dot{y}_i(t_0)$, $\dot{z}_i(t_0)$ в начальный момент времени $t = t_0$, то по заданной модели возможно определение координат точек и их скоростей в любой момент времени $t > t_0$.

Рассматриваемая ММ поведения системы справедлива для *инерциальной* или *галилеевой системы отсчёта* (системы координат), в которой свободная (не подвергнутая каким-либо воздействиям) материальная точка движется равномерно и прямолинейно. Иначе можно сказать, что в этой системе отсчёта выполняется *первый закон Ньютона* – скорость свободной материальной точки не меняется во время её движения.

С позиций классической механики все инерциальные системы равноправны. Это утверждение означает, что все законы и уравнения механики, установленные для замкнутой системы в какой-либо инерциальной системе отсчёта, не изменяются при переходе к любой другой инерциальной системе отсчёта. В этом состоит *принцип относительности Галилея* (Galilei).

Обобщение принципа относительности Галилея на все физические явления (исключая тяготение) было осуществлено А. Эйнштейном в специальной теории относительности.

Множество инерциальных систем, «порождаемое» исходной системой отсчёта x, y, z, t , характеризуется следующими преобразованиями координат и времени.

$$1. \quad x_* = x + a, \quad y_* = y + b, \quad z_* = z + c, \quad t_* = t,$$

где a, b, c – произвольные постоянные.

Данное преобразование означает, что законы и уравнения механики не изменяются при сдвигах систем отсчёта. Это следует как следствие из

предположения об *однородности пространства*, т. е. отсутствия преимущественных точек пространства.

$$2. \ x_* = x, \ y_* = y, \ z_* = z, \ t_* = t + h,$$

где h – постоянная.

Такое преобразование означает, что законы и уравнения механики не изменяются при сдвиге по оси времени, что следует из предположения об *однородности времени*. При этом отсутствует преимущество какого-либо выбора начала отсчёта времени.

$$3. \ x_* = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \ y_* = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \ z_* = z, \ t_* = t.$$

Приведённое преобразование означает, что законы и уравнения механики не изменяются при поворотах систем отсчёта относительно любой из осей координат. В рассматриваемом случае – это поворот вокруг оси z на угол α . Утверждение следует из предположения об *изотропности пространства*, т. е. отсутствия в нём преимущественных направлений.

$$4. \ x_* = x - v_x t, \ y_* = y - v_y t, \ z_* = z - v_z t, \ t_* = t,$$

где v_x, v_y, v_z – постоянные, характеризующие скорости относительно соответствующих координат.

Рассматриваемое преобразование означает, что законы и уравнения механики не изменяются при переходе к системе отсчёта, движущейся равномерно и поступательно относительно исходной. Это преобразование получило название *преобразований Галилея*.

В тех случаях, когда уравнения механики не меняются при некоторых преобразованиях систем отсчёта, говорят, что эти уравнения *инвариантны* по отношению к этим преобразованиям, если они удовлетворяют следующим двум условиям.

1°. В результате преобразований структура уравнений не меняется.

2°. В результате преобразований все функции от координат, скоростей и ускорений, которые содержатся в уравнениях, не меняются.

В тех случаях, когда в результате преобразований 1 – 4 не происходит изменения структуры уравнений (условие 1°), однако вид функций, зависящих от координат и скоростей (определяющих силу, энергию, количество движения и т. д.), не сохраняется (условие 2°), говорят, что форма записи уравнений механики *ковариантна* по отношению к указанным преобразованиям в классе инерциальных моделей.

В качестве примера можно привести ММ движения объекта, описываемого уравнением вида

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}),$$

где сила $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\gamma m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$, $\gamma, m = \text{const}$. Это уравнение инвариантно относительно свойства временного сдвига (преобразование 2)

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r}, \quad t_* = t + h.$$

Применительно к свойству пространственного сдвига (преобразование 1)

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{r} + \mathbf{a}, \quad t_* = t$$

получается уравнение движения вида

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_*}{dt^2} = \mathbf{F}_*(\mathbf{r}_*),$$

где $\mathbf{F}_*(\mathbf{r}_*) = -\frac{\gamma m}{(\mathbf{r}_* - \mathbf{a})^2} \frac{\mathbf{r}_* - \mathbf{a}}{|\mathbf{r}_* - \mathbf{a}|}$. Таким образом, в результате преобразования структура уравнения не изменилась, а вид функции $\mathbf{F}_*(\mathbf{r}_*)$ отличается от вида функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, следовательно, преобразованное уравнение ковариантно относительно пространственного сдвига.

Можно убедиться, что это же уравнение инвариантно относительно свойства поворота системы отсчёта (преобразование 3), но лишь ковариантно относительно преобразований Галилея (преобразование 4).

2.2. Получение моделей систем на основе уравнений Лагранжа (формализм Лагранжа)

Модели в форме уравнений Лагранжа часто используются для описания механических систем. Рассмотрим простейшую механическую систему, изображённую на рис. 2.1, которая представляет собой абсолютно твёрдое тело, движущееся по гладкой поверхности вдоль оси x . Тело с одной стороны крепится к стенке с помощью пружины. Силы сопротивления внешней среды (например, трения) не учитываются.

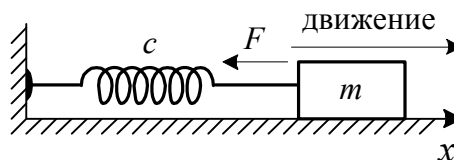


Рис. 2.1. Модель движения твёрдого тела под действием пружины

В соответствии со вторым законом Ньютона уравнение движения тела:

$$m\ddot{x} = F(x) = -cx, \quad (2.1)$$

где $F(x)$ – сила со стороны пружины с коэффициентом жёсткости c (в общем случае $c = c(x)$); m – масса тела. Тело находится в поле потенциальной силы пружины, т. е. $F(x)$ – потенциальная сила, которая в соответствии с законом Гука (Hooke) всегда направлена противоположно движению тела.

Потенциальные силы (консервативные силы) – силы, работа которых зависит только от начального и конечного положений точки и не зависит ни от вида траектории этой точки, ни от закона её движения. Работа потенциальных сил вдоль произвольной замкнутой траектории всегда равна нулю. Поле потенциальных сил характеризуется скалярным потенциалом. Потенциальная сила F , действующая на материальную точку, равна взятому с обратным знаком градиенту потенциальной энергии Π этой точки в поле силы F , т. е. $F = -\text{grad } \Pi$.

Историческая справка [5]. Закон Гука представляет собой одну из первых линейных моделей. Этот закон был впервые опубликован Робертом Гуком в 1676 году. Сам Гук свой закон формулировал так: «какова сила, таково и растяжение». Он отмечал, что закон был им открыт ещё в 1660 году, но от публикации его удерживало желание защитить своё изобретение спиральных пружин в часовых механизмах. Для их конструирования Гук использовал свойство независимости частоты колебаний пружины от их амплитуды, вытекающей из линейности (2.1).

Открытие, сделанное Гуком, вызвало значительный интерес со стороны научного сообщества. Опыты Гука были продемонстрированы королю Англии Карлу II. Обобщая свои результаты, Гук заявлял: «Линейную зависимость можно наблюдать ... в любых упругих материалах, будь то металл, дерево, камни, спекшаяся глина, волос, шёлк, кость, сухожилия, стекло и тому подобное».

Тем не менее не все учёные того времени разделяли оптимизм по поводу универсальности линейного закона. Так Лейбниц (Leibniz) в 1691 году высказывал осторожное недоверие линейному закону и просил Гюйгенса (Huygens) прислать результаты проводимых им экспериментов по закону Гука. Гюйгенс признавал результаты Гука, но только при условиях незначительного растяжения пружины. В 1849 году британская королевская комиссия, назначенная для оценки исследований в области применения металлов для железнодорожных сооружений, своим постановлением «отменила» линейный закон в пользу нелинейного (параболического). Заключение комиссии основывалось на многолетнем детальном изучении данных экспериментальных исследований на образцах из железа.

И всё же факт, что при достаточно малых деформациях в металлах наблюдается линейная зависимость, привёл к господству идей линейной тео-

рии упругости в течение почти трёх столетий. Дж. Белл подчёркивал: «Если бы в 17 веке для твёрдых тел наблюдались исключительно нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями, то большинство достижений в физике и технике, имевших место за прошедшие 200 лет, задержалось бы на несколько столетий». Исследователи получили возможность продвигаться вперёд, развивая математический аппарат линейной теории упругости, пригодный для построения моделей многих других явлений и процессов. Из этих фактов следует, что линейная модель упругости занимает только определённую нишу в теории упругости. В науке и технике данное положение достаточно распространено. Любая линейная теория, как правило, справедлива в определённых пространственных и временных границах и при малой интенсивности воздействий на изучаемую систему.

Кинетическая энергия T движущегося тела с массой m равна

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2. \quad (2.2)$$

Потенциальная энергия Π движущегося тела, находящегося в поле действия силы пружины, равна

$$\Pi = - \int_0^x F(x) dx = \int_0^x c x dx = \frac{1}{2} c x^2. \quad (2.3)$$

Закон сохранения полной энергии механической системы без потерь, находящейся в поле потенциальных сил, выражается формулой

$$E = T + \Pi = \text{const}. \quad (2.4)$$

Равенство (2.2) можно продифференцировать по переменной \dot{x} :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}. \quad (2.5)$$

При дифференцировании (2.5) по переменной t получается выражение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}. \quad (2.6)$$

Равенство (2.3) можно продифференцировать по переменной x :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = c x. \quad (2.7)$$

С учётом выражения (2.1) получается уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) представляет собой специальный (частный) случай уравнения движения Лагранжа с одной степенью свободы.

В общем случае уравнения движения Лагранжа 2-го рода для систем без потерь (консервативных систем) записываются в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.9)$$

причём $\dot{q}_i = dq_i/dt$. В аналитической механике переменные q_i и \dot{q}_i принято называть *обобщёнными координатами* и *обобщёнными скоростями*, а присутствующие в правых частях *обобщённые силы* Q_i являются потенциальными (консервативными) и определяются выражениями:

$$Q_i = Q_i^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Система (2.9) характеризуется n степенями свободы.

Уравнения Лагранжа содержат $(n+1)$ функций. Этими функциями являются обобщённые силы Q_i и кинетическая энергия T . Структура уравнений сохраняется для любой выбранной системы координат и различие проявляется лишь в виде функций Q_i и T , входящих в эти уравнения. Поэтому принято говорить, что уравнения Лагранжа *ковариантны относительно преобразования координат* (например, при переходе от декартовой системы координат к обобщённым координатам).

Разность между кинетической и потенциальными энергиями

$$L = L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - \Pi(\mathbf{q}), \quad (2.10)$$

где $\mathbf{q} = (q_1 \dots q_n)^T$, $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n)^T$, определяет *лагранжиан* (функцию Лагранжа, кинетический потенциал) системы. Как видно из (2.10), кинетическая энергия, в общем случае, зависит как от \mathbf{q} , так и от $\dot{\mathbf{q}}$, тогда как потенциальная – только от \mathbf{q} .

С учётом (2.10) уравнения Лагранжа (2.9) для консервативной системы в случае отсутствия внешних (неконсервативных) сил можно записать в виде однородных ДУ:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.11)$$

Из выражения (2.10) следует, что частные производные лагранжиана равны

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

С помощью этих формул устанавливается связь между лагранжианом L , кинетической T и потенциальной Π энергиями.

Пример 2.1. Ещё одной простейшей моделью механической системы являются колебания математического маятника в потенциальном поле сил тяжести. Система представляет собой груз массы m , находящийся на конце стержня длины l . Рассматриваемая система может совершать плоские свободные колебания (рис. 2.2).

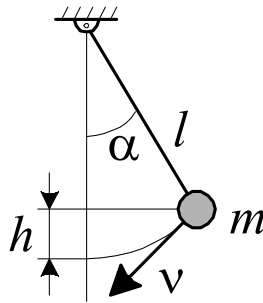


Рис. 2.2. Модель колебаний математического маятника

Относительно изучаемой системы делаются следующие предположения. Шарнир считается идеально гладким (трение в нём отсутствует). К тому же он неподвижен, т. е. энергия от него не поступает в систему «стержень-груз». Следовательно, шарнир не способен совершать над системой какую-либо работу. Стержень невесом и абсолютно жёсткий. Поскольку геометрический размер груза пренебрежимо мал по сравнению с длиной стержня l , груз можно заменить материальной точкой. Ускорение свободного падения g постоянно, сопротивление воздуха исключено.

Требуется получить описание движения системы с помощью уравнений Лагранжа.

С учётом сделанных предположений, можно считать, что положение маятника в плоскости совершаемых колебаний определяется одной обобщённой координатой, в качестве которой выбирается угол отклонения маятника от вертикали, т. е. $q(t) = \alpha(t)$. Тогда обобщённой скоростью можно считать угловую скорость $\dot{q}(t) = \dot{\alpha}(t) = \omega(t)$.

Кинетическая энергия системы, записанная через линейную скорость $v = l\omega$, определяется выражением

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\omega)^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2.$$

Потенциальная энергия системы, принимая во внимание, что отклонение маятника по вертикали относительно нижнего положения определяется значением h , равна

$$\Pi = mgh = mg(l - l \cos \alpha) = mgl(1 - \cos q).$$

Тогда лагранжиан системы имеет вид

$$L = T - \Pi = ml \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 - g + g \cos q \right).$$

В результате дифференцирования L по обобщённым переменным q_i и \dot{q}_i :

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -ml g \sin q; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ml^2 \dot{q},$$

а также дифференцирования $\partial L / \partial \dot{q}$ по переменной t

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = ml^2 \ddot{q},$$

уравнение Лагранжа приобретает окончательный вид

$$ml^2 \ddot{q} + ml g \sin q = 0.$$

Уравнения Лагранжа выводятся из *вариационного принципа Гамильтона*. Этот принцип формулируется следующим образом. Любая механическая консервативная система будет двигаться под действием потенциальных сил из любого практически возможного начального состояния, определённого в момент времени t_0 , в конечное состояние, установленного для момента времени t_k таким образом, чтобы минимизировался интеграл разности между кинетической и потенциальной энергиями, т. е.:

$$\int_{t_0}^{t_k} (T - \Pi) dt \rightarrow \min.$$

Для механических систем, не подчиняющихся уравнениям Лагранжа, применяется более общий *принцип Гамильтона–Остроградского*.

Пусть рассматривается поведение системы в $(n+1)$ -мерном расширенном пространстве обобщённых координат и времени $(q_1, \dots, q_n; t)$. В нём можно выделить начальную c_0 и конечную c_k точки, зафиксировав тем самым положения системы в моменты времени t_0 и t_k (на рис. 2.3 поведение системы рассматривается в 3-х мерном пространстве). При этом обобщённые скорости $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ в моменты t_0 и t_k не фиксируются.

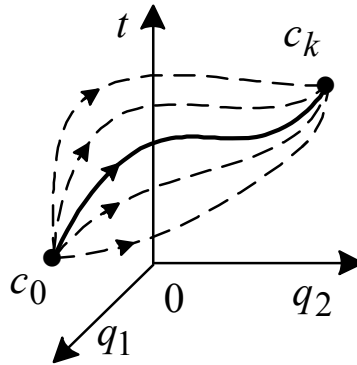


Рис. 2.3. Семейство возможных траекторий

В аналитической механике принято изучать поведение систем в четырёх основных пространствах.

Координатное (конфигурационное) пространство – n -мерное пространство, каждая точка которого характеризуется заданием n независимых обобщённых координат q_1, \dots, q_n . При движении системы любая точка координатного пространства, определяемая в каждый момент времени функциями $q_1(t), \dots, q_n(t)$, описывает соответствующую траекторию.

Расширенное координатное пространство – $(n + 1)$ -мерное пространство, задаваемое координатами $q_1, \dots, q_n; t$.

Фазовое пространство – $2n$ -мерное пространство, каждая точка которого определяется заданием n обобщённых координат q_1, \dots, q_n и n обобщённых скоростей $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$. В фазовом пространстве выбор точки задаёт полную систему начальных данных, поэтому выбор точки фазового пространства (за исключением особых точек) полностью определяет движение механической системы. Траектории, соответствующие движению в фазовом пространстве, нигде, кроме особых точек, не пересекаются.

Расширенное фазовое пространство – $(2n + 1)$ -мерное пространство с координатами $q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t$.

Система из точки c_0 может попасть в точку c_k , двигаясь в расширенном координатном пространстве, вообще говоря, по любым возможным траекториям (рис. 2.3). Эти траектории обусловлены вариациями (приращениями) $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ обобщённых координат и $\delta \dot{q}_1, \dots, \delta \dot{q}_n$ обобщённых скоростей, вызванными изменениями (возмущениями) $\delta \alpha$ какого-либо параметра α , от которого зависят вариации $\{\delta q_i(\alpha)\}$, $\{\delta \dot{q}_i(\alpha)\}$.

Среди возможных варьированных траекторий существует *основная* (не варьированная) *траектория (прямой путь)*, для которой $\delta\alpha = 0$. Эта траектория, отвечающая уравнениям Лагранжа, в вариационном исчислении называется *экстремалью*.

Совокупность траекторий из c_0 в c_K образуют *однопараметрическое семейство траекторий (пучок траекторий)* с параметром α . В точках c_0 и c_K при изменении параметра α вариации $\delta q_i = 0$.

Поскольку в общем случае $t_0(\alpha)$, $t_K(\alpha)$, вариации $\delta t_0(\alpha) = 0$, $\delta t_K(\alpha) = 0$.

Величину

$$S = \int_{t_0}^{t_K} L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) dt$$

принято называть *действием по Гамильтону на временном интервале* $[t_0, t_K]$. Действие представляет собой функционал, который зависит от движения системы на рассматриваемом интервале $[t_0, t_K]$. На экстремали действие S достигает своего минимального значения по сравнению с другими возможными траекториями, поэтому принцип Гамильтона ещё называют *принципом наименьшего действия*. Математически принцип Гамильтона выражается через вариацию функционала:

$$\delta S = 0$$

или

$$\delta \int_{t_0}^{t_K} (T - \Pi) dt = \delta \int_{t_0}^{t_K} L dt = \int_{t_0}^{t_K} \delta L dt = 0.$$

Приращение лагранжиана δL вследствие вариаций обобщённых координат и обобщённых скоростей можно представить в виде

$$\delta L = \delta L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i$$

с граничными условиями $\delta q_i = 0$, определёнными в моменты времени $t = t_0$ и $t = t_K$.

Обе части этого соотношения интегрируются в пределах от t_0 до t_K :

$$\int_{t_0}^{t_K} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_K} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt + \int_{t_0}^{t_K} \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt.$$

Используя свойство интегрирования по частям для первого интеграла в правой части, а также учитывая $\delta \dot{q}_i = d(\delta q_i)/dt$ и принятые граничные условия, можно получить:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_K} \delta L dt &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_K} - \int_{t_0}^{t_K} \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \int_{t_0}^{t_K} \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_K} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Поскольку вариации δq_i не равны тождественно нулю, соотношение (2.12) удовлетворяется только тогда, когда выражения, заключённые в квадратные скобки, равны нулю, что и приводит к уравнениям Лагранжа (2.11).

Строгий и подробный вывод уравнений Лагранжа для нестационарных систем можно найти, например, в [8].

Для ряда сложных механических систем вариационные принципы, рассмотренные выше, оказываются единственно возможными при построении их моделей. Например, модели для механических робототехнических устройств, состоящих из большого числа связанных между собой элементов, представляют собой системы уравнений, получаемые по единой методике с помощью вариационных принципов.

Принцип Гамильтона также распространяется и на немеханические системы. В качестве примера можно рассмотреть колебательный электрический контур, включающий конденсатор с ёмкостью C_K и катушку с индуктивностью L_K (рис. 2.4). Активное сопротивление проводников и потери энергии на излучение электромагнитных волн не учитываются. В начальный момент времени цепь разомкнута, электрический заряд сосредоточен на обкладках конденсатора. В результате замыкания цепи конденсатор разряжается и по ней будет протекать ток i .

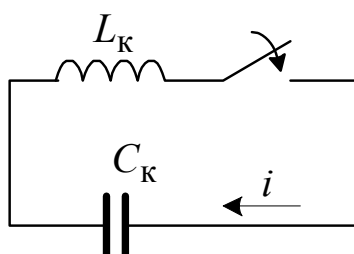


Рис. 2.4. Модель электрического колебательного контура

Для данной электрической системы уместно использовать *электро-механическую аналогию*, которая состоит в следующем [9]. Обобщённой ме-

ханической координате соответствует заряд q на обкладках конденсатора. Величина электрического тока равна изменению заряда, т. е. $i = dq/dt$ и отвечает обобщённой механической скорости. Электрические аналоги кинетической T и потенциальной Π энергий механического движения устанавливаются таким образом.

Движущиеся вдоль проводника электрические заряды обладают энергией, зависящей от скорости v их направленного перемещения. Протекающий ток, определяемый величиной заряда, проходящего через поперечное сечение s проводника в единицу времени, задаётся выражением

$$i = q_0 n s v,$$

где q_0 – величина элементарного заряда, n – величина объёмной концентрации зарядов-носителей тока. Следовательно, кинетическая энергия движения заряженных частиц пропорциональна квадрату тока, т. е.

$$T \sim v^2 \sim i^2.$$

Коэффициентом пропорциональности (аналогом массы) служит величина индуктивности L_K , тогда

$$T = T(\dot{q}) = \frac{1}{2} L_K \dot{q}^2.$$

Потенциальная энергия контура сосредоточена в конденсаторе. Для его зарядки требуется затратить определённую работу по разделению разноимённых зарядов. Согласно закону Кулона (Coulomb) сила, совершающая эту работу, пропорциональна q^2 . Следовательно, работа по разделению зарядов, равная потенциальной энергии Π контура, пропорциональна квадрату обобщённой координаты и равна

$$\Pi = \Pi(q) = \frac{1}{2C_K} q^2,$$

где C_K^{-1} – коэффициент пропорциональности – аналог коэффициента упругой силы в законе Гука или величине $\sqrt{g/l}$ в случае колебаний математического маятника.

Силы, действующие в контуре, определяются только обобщённой координатой q и не зависят от \dot{q} , вследствие чего они потенциальны. Отсюда можно заключить, что система находится в поле потенциальных сил. Поэтому у неё должен существовать лагранжиан $L = T - \Pi$ и к ней применим принцип Гамильтона: вариация действия S равна нулю.

Пусть функция заряда $q_э(t)$ отвечает основной траектории – экстремали. Возможные траектории на интервале $[t_0, t_k]$ можно обозначить $q(t)$. Тогда вариация действия по Гамильтону

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_k} L dt = \delta \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{1}{2} L_k \dot{q}^2 - \frac{1}{2C_k} q^2 \right) dt = \int_{t_0}^{t_k} \delta L(q) dt.$$

Поскольку $q = q_э + \delta q$, $\dot{q} = \dot{q}_э + \delta \dot{q}$, подынтегральное выражение записывается как

$$\begin{aligned} \delta L(q) &= L(q) - L(q_э) = \\ &= \frac{1}{2} L_k (\dot{q}_э^2 + 2\dot{q}_э \delta \dot{q} + \delta \dot{q}^2) - \frac{1}{2C_k} (q_э^2 + 2q_э \delta q + \delta q^2) - \frac{1}{2} L_k \dot{q}_э^2 + \frac{1}{2C_k} q_э^2 = \\ &= \left(L_k \dot{q}_э \delta \dot{q} - \frac{1}{C_k} q_э \delta q \right) + \frac{1}{2} L_k \delta \dot{q}^2 - \frac{1}{2C_k} \delta q^2. \end{aligned}$$

Пренебрегая членами второго порядка малости $\delta \dot{q}^2$, δq^2 , можно получить

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_k} \left(L_k \dot{q}_э \delta \dot{q} - \frac{1}{C_k} q_э \delta q \right) dt.$$

С учётом того, что $\delta \dot{q} = d\delta q/dt$, производится интегрирование по частям

$$\delta S = L_k \dot{q}_э \delta q \Big|_{t_0}^{t_k} - \int_{t_0}^{t_k} L_k \ddot{q}_э \delta q dt - \int_{t_0}^{t_k} \frac{1}{C_k} q_э \delta q dt.$$

Так как $\delta q(t_0) = \delta q(t_k) = 0$, окончательное выражение для δS имеет вид

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_k} \left(L_k \ddot{q}_э + \frac{1}{C_k} q_э \right) \delta q dt = 0.$$

Отсюда, при исключении индекса «э» для заряда q , вытекает уравнение модели колебаний в электрическом контуре без потерь

$$L_k \ddot{q} + \frac{1}{C_k} q = 0.$$

Для систем с потерями (диссипативные системы) уравнения Лагранжа приобретают вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.13)$$

где функцию R называют *диссипативной функцией Рэля* (Rayleigh) (*функцией рассеивания*).

Диссипативная функция Рэля определяется выражением

$$R = \frac{1}{2} \sum_i r_i \dot{q}_i^2, \quad (2.14)$$

отсюда

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = \sum_i r_i \dot{q}_i,$$

где $r_i \dot{q}_i$ – i -я сила трения, приложенная к системе; r_i – i -й коэффициент трения.

Следует заметить, что при малых перемещениях работа A по преодолению сил трения равна

$$A = \sum_i r_i \dot{q}_i \Delta q_i.$$

Мощность N , рассеиваемая за счёт сил трения, определяется формулой

$$N = \sum_i r_i \dot{q}_i^2.$$

В общем случае, когда система движется в поле потенциальных сил и, кроме того, находится под действием непотенциальных сил, уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где Q_i – обобщённые силы, которые могут быть представлены в форме двух слагаемых:

$$Q_i = Q_i^{\Pi} + Q_i^{\text{нп}},$$

причём $Q_i^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$, $Q_i^{\text{нп}}$ – *потенциальные и непотенциальные составляющие обобщённых сил*.

При действии непотенциальных сил уравнения Лагранжа можно также записать в виде неоднородных ДУ:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^{\text{нп}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В векторной форме уравнения Лагранжа приобретают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^{\text{нп}}.$$

2.3. Модели сил механических систем

2.3.1. Систематизация обобщённых сил

Остановимся подробнее на описании обобщённых сил, участвующих в уравнениях Лагранжа.

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (2.15)$$

используемая в уравнениях Лагранжа, представляет собой определённо-положительную квадратичную форму обобщённых скоростей \dot{q}_i с коэффициентами инерции $a_{ij}(\mathbf{q}) = a_{ji}(\mathbf{q})$, зависящими от вектора обобщённых координат \mathbf{q} , а обобщённые силы $Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ являются функциями \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{q}}$. Вектор \mathbf{q} определяет положение изображающей точки в пространстве обобщённых координат, вектор \mathbf{Q} характеризует различные силы, приложенные к этой точке. Рассмотрим возможное разнообразие действующих на механическую систему обобщённых сил [10].

Линейные силы. Вектор сил \mathbf{Q} может быть представлен в виде линейной комбинации

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{Q}_q \mathbf{q} - \mathbf{Q}_{\dot{q}} \dot{\mathbf{q}},$$

где \mathbf{Q}_q и $\mathbf{Q}_{\dot{q}}$ – заданные квадратные матрицы $n \times n$ с постоянными элементами.

Матрицы \mathbf{Q}_q и $\mathbf{Q}_{\dot{q}}$ удобно записать в виде сумм симметричных матриц \mathbf{Q}_{sq} и $\mathbf{Q}_{s\dot{q}}$, для которых элементы $q_{ij} = q_{ji}$, и кососимметричных матриц \mathbf{Q}_{aq} и $\mathbf{Q}_{a\dot{q}}$, для которых элементы $q_{ij} = -q_{ji}$, $q_{jj} = 0$, так что

$$\mathbf{Q}_q = \mathbf{Q}_{sq} + \mathbf{Q}_{aq}, \quad \mathbf{Q}_{\dot{q}} = \mathbf{Q}_{s\dot{q}} + \mathbf{Q}_{a\dot{q}},$$

где

$$\mathbf{Q}_{sq} = \mathbf{Q}_{sq}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_q + \mathbf{Q}_q^T), \quad \mathbf{Q}_{aq} = -\mathbf{Q}_{aq}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_q - \mathbf{Q}_q^T),$$

$$\mathbf{Q}_{s\dot{q}} = \mathbf{Q}_{s\dot{q}}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{\dot{q}} + \mathbf{Q}_{\dot{q}}^T), \quad \mathbf{Q}_{a\dot{q}} = -\mathbf{Q}_{a\dot{q}}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{\dot{q}} - \mathbf{Q}_{\dot{q}}^T).$$

В результате силу \mathbf{Q} можно представить как

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{D} + \mathbf{G},$$

причём составляющие $\mathbf{P} = -\mathbf{Q}_{sq}\mathbf{q}$, $\mathbf{N} = -\mathbf{Q}_{aq}\mathbf{q}$, $\mathbf{D} = -\mathbf{Q}_{s\dot{q}}\dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{G} = -\mathbf{Q}_{a\dot{q}}\dot{\mathbf{q}}$.

Сила \mathbf{P} с симметричной матрицей $\mathbf{Q}_{sq} = \|p_{ij}\|$ называется *потенциальной* или *консервативной*, а соответствующая ей квадратичная форма равна потенциальной энергии системы, т. е.

$$\frac{1}{2}\mathbf{Q}_{sq}\mathbf{q}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} p_{ij}q_iq_j = \Pi.$$

Сила \mathbf{D} называется *диссипативной силой с положительным сопротивлением* или просто *диссипативной силой*. С помощью симметричной матрицы $\mathbf{Q}_{s\dot{q}} = \|r_{ij}\|$ можно составить квадратичную форму

$$\frac{1}{2}\mathbf{Q}_{s\dot{q}}\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} r_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = R.$$

Если эта функция не отрицательна, то она называется *диссипативной функцией Рэлея*. Приведённое выражение является более общим, чем (2.14).

Если квадратичная форма R определённо-положительна, то диссипация называется *полной*, в противном случае – *неполной*. Если функция R может принимать отрицательные значения, то среди составляющих силы \mathbf{D} имеются *ускоряющие силы* (силы с отрицательным сопротивлением). Ускоряющие силы в механических системах, как правило, создаются искусственно с помощью специальных устройств.

Сила \mathbf{G} , линейно зависящая от скорости $\dot{\mathbf{q}}$ с кососимметричной матрицей коэффициентов $\mathbf{Q}_{a\dot{q}} = \|g_{ij}\|$, называется *гироскопической*.

Сила \mathbf{N} , линейно зависящая от координаты \mathbf{q} с кососимметричной матрицей коэффициентов $\mathbf{Q}_{aq} = \|n_{ij}\|$, называется *неконсервативной позиционной* или просто *неконсервативной силой*. Сила позиционная, так как зависит от \mathbf{q} ; неконсервативная, так как её работа зависит от совершённого пути.

Нелинейные силы. Работа потенциальной силы $\mathbf{P}(\mathbf{q})$, по определению, не зависит от пути перемещения точки приложения силы. Для этой силы справедливо выражение

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = -\text{grad } \Pi$$

или

$$P_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Для потенциальности силы $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ необходимо, чтобы её проекции удовлетворяли соотношениям

$$\frac{\partial P_j}{\partial q_i} = \frac{\partial P_i}{\partial q_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

По определению сила $\mathbf{G}(\dot{\mathbf{q}})$ является гироскопической, если мощность (работа) её тождественно равна нулю, т. е.

$$N = \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^n G_i \dot{q}_i \equiv 0.$$

Из этого определения следует, что вектор гироскопической силы направлен перпендикулярно вектору скорости $\dot{\mathbf{q}}$ изображающей точки. Линейная сила $\mathbf{G} = -\mathbf{Q}_{a\dot{q}}\dot{\mathbf{q}}$ удовлетворяет этому условию, так как в силу кососимметричности матрицы $\mathbf{Q}_{a\dot{q}}$ произведение $\mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{Q}_{a\dot{q}}\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}$ тождественно равно нулю.

Сила $\mathbf{D}(\dot{\mathbf{q}})$ называется диссипативной силой с положительным или отрицательным сопротивлением, если её мощность не равна нулю тождественно. Диссипативным силам положительного сопротивления отвечает отрицательная мощность

$$N = \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^n D_i \dot{q}_i \leq 0,$$

а силам отрицательного сопротивления – положительная мощность.

Если мощность $N(\dot{\mathbf{q}})$ является определённо-положительной функцией скорости $\dot{\mathbf{q}}$, то диссипацию называют полной; если же $N(\dot{\mathbf{q}})$ – отрицательная функция скорости $\dot{\mathbf{q}}$, то диссипацию называют неполной.

Из определения линейной неконсервативной силы следует, что её вектор направлен перпендикулярно радиусу-вектору \mathbf{q} изображающей точки ($\mathbf{N} \cdot \mathbf{q} = -\mathbf{Q}_{a\mathbf{q}}\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \equiv 0$, так как матрица $\mathbf{Q}_{a\mathbf{q}}$ кососимметрична).

Обобщая это свойство, будем называть любую силу $\mathbf{N}(\mathbf{q})$ неконсервативной позиционной силой, если она ортогональна радиусу-вектору \mathbf{q} изображающей точки

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{q} = \sum_{i=1}^n N_i q_i \equiv 0.$$

2.3.2. Модели сил трения

При моделировании механических и электромеханических СУ важное значение имеет учёт непотенциальных сил трения. В связи с этим модели трения требуют особого рассмотрения.

Трение (внешнее трение) представляет собой взаимодействие между твёрдыми телами, которое возникает в местах их соприкосновения и препятствует относительному перемещению тел в направлении, лежащем в плоскости их соприкосновения. Силу сопротивления, направленную в сторону, противоположную сдвигающему усилию, называют *силой трения*. Как всякая сила, она связана с изменением конфигурации тел, но не с макроскопическим, а с микроскопическим, локализованным в поверхностных слоях.

Понятие силы трения возникает в результате усреднения огромного числа элементарных взаимодействий между молекулами соприкасающихся тел в поверхностном слое. Это взаимодействие осуществляется посредством полей. Важное свойство таких полей – очень быстрое ослабление при увеличении расстояния. Это позволяет результат всех таких взаимодействий представлять как действие силы, возникающей при контакте между телами. Такое представление – удобная идеализация, принятая на практике.

По величине перемещения в зависимости от его сдвигающего усилия различают: силу трения движения и силу трения покоя, которая, в свою очередь, разделяется на неполную силу трения покоя и полную силу трения покоя.

Сила трения движения (сила кинематического трения) соответствует большим необратимым относительным перемещениям, величина которых не зависит от приложенной силы. В условиях равномерного движения приложенная сила уравнивается силой трения движения.

Неполная сила трения покоя $F_{\text{тр}}^{\text{н}}$ соответствует очень малым, частично обратимым перемещениям, величина которых пропорциональна приложенной силе. Перемещение, соответствующее неполной силе трения покоя, называется *предварительным смещением*. Обычно визуально обнаружить предварительное смещение не удаётся, так как оно измеряется мик-

ронами. В случае предварительного смещения приложенная сила уравновешивается неполной силой трения и тело (объект) остаётся в покое. Неполная сила трения зависит от сдвигающего усилия и изменяется с увеличением последнего от нуля до некоторого максимального значения $F_{\text{тр}}^0$, которое называется *полной силой трения покоя*, т. е. $0 \leq F_{\text{тр}}^{\text{н}} \leq F_{\text{тр}}^0$.

Трение покоя объясняет явление *застоя*, заключающееся в отсутствии относительного перемещения двух соприкасающихся тел при действии на них касательных сил

$$|F| \leq F_{\text{тр}}^0 = \kappa_0 P_{\text{н}},$$

где $P_{\text{н}}$ – сила нормального давления тел друг на друга, κ_0 – коэффициент трения покоя.

Силы трения между твёрдыми поверхностями различным образом зависят от скорости относительного перемещения этих поверхностей. При сравнительно медленном относительном перемещении поверхностей, разделённых слоем смазочного материала (жидкостная или газовая смазка), сила трения $F_{\text{тр}}$ линейно зависит от скорости \dot{x} . Такое трение принято называть *линейным*. С увеличением скорости зависимость $F_{\text{тр}}$ от \dot{x} становится *нелинейной* и её можно представить в виде

$$F_{\text{тр}} = -\kappa |\dot{x}|^{\alpha-1} \dot{x}, \quad \alpha, \kappa = \text{const} > 0,$$

где κ – коэффициент трения. Знак минус указывает на то, что сила трения имеет направление, противоположное направлению скорости \dot{x} . В этом случае часто используется обобщающий термин «*вязкое трение*». Под *вязкостью* или *внутренним трением* понимается способность жидкостей или газов оказывать сопротивление перемещению трущимся поверхностям. При значении $\alpha = 2$, когда абсолютная величина силы трения пропорциональна квадрату скорости, нередко говорят о *турбулентном трении*. В слое окружающей среды, непосредственно прилегающем к поверхности твёрдого тела, режим течения становится турбулентным (от латинского слова *turbulentus* – бурный, беспорядочный) с крайне неравномерным, пульсирующим характером скорости жидкости или газа. Аналогично можно представить силу сопротивления при движении с большой скоростью твёрдого тела в жидкости или газе.

В настоящее время установлено [11], что коэффициент трения κ в равной степени зависит от трёх факторов: 1) материала трущихся тел и характера смазки, плёнки, имеющейся на поверхности; 2) конструкции фрикционного сочленения: размера поверхности, геометрического очертания, в основном от отношения площадей контактирующих деталей; 3) режима работы: температуры, скорости, нагрузки, в основном температурного поля, возникающего в тонком поверхностном слое.

Коэффициент трения κ для одной и той же пары трущихся материалов изменяется в широком диапазоне. Например, для стали, трущейся по стали, от 0,05 до 0,8. Природа материалов влияет на коэффициент трения меньше, чем внешние условия.

Характер изменения коэффициента трения κ , например, в зависимости от температуры для различных пар трущихся частей из пластмассы показан на рис. 2.5.

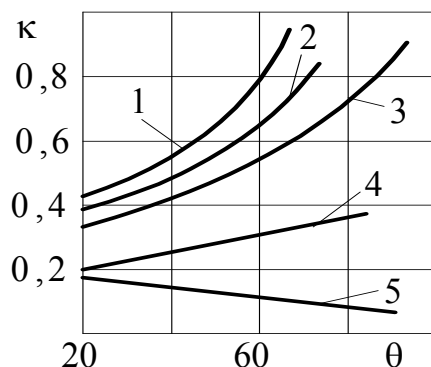


Рис. 2.5. Графики зависимостей коэффициента трения от температуры:
1 – капрон; 2 – П68; 3 – АК-7; 4 – полиэтилен; 5 – фторопласт

При существовании между трущимися поверхностями обильного слоя смазочного материала принято говорить о *жидкостном трении*, при отсутствии смазки – о *сухом трении*. Различают также *сухое трение покоя*, возникающее между взаимно неподвижными телами, и *сухое кинематическое трение*, проявляющееся между движущимися телами.

В случае $\dot{x} = 0$ сила сухого трения покоя может быть определена лишь при рассмотрении равновесия тела с учётом действия внешних сил. Если проекция F равнодействующей внешних сил на направление возможного движения тела не превышает по абсолютной величине силу трения покоя $F_{\text{тр}}^0$, то можно принять $F_{\text{тр}} = -F$, а при $|F| > F_{\text{тр}}^0$ тело приходит в движение.

В зависимости от вида движения одного тела по поверхности другого различают кинематические *трение скольжения* и *трение качения*. Сила трения качения $F_{\text{тр}}^{\text{кач}}$, зависящая от кривизны этих поверхностей, обычно значительно меньше силы трения скольжения $F_{\text{тр}}^{\text{ск}}$.

Сила сухого трения скольжения, согласно закону Г. Амонтона (Amontons), пропорциональна силе $P_{\text{н}}$ нормального давления твёрдых тел друг на друга, причём коэффициент пропорциональности слабо зависит от скорости

$$F_{\text{тр}}^{\text{ск}} = \kappa_{\text{ск}} P_{\text{н}},$$

где $\kappa_{\text{ск}}$ – коэффициент трения скольжения (обычно $\kappa_{\text{ск}} < \kappa_0$).

Сила сухого трения качения шара или кругового цилиндра радиуса r по плоской поверхности в соответствии с законом Ш. Кулона равна

$$F_{\text{тр}}^{\text{кач}} = \kappa_{\text{кач}} P_{\text{н}} / r,$$

где $\kappa_{\text{кач}}$ – коэффициент трения качения.

В электромеханических СУ в качестве моделей трения широко применяются характеристики зависимостей *моментов трения* $M_{\text{тр}}$ от относительной скорости \dot{x} перемещения трущихся частей. Типичная характеристика представлена на рис. 2.6, а. Принято различать следующие составляющие момента трения.

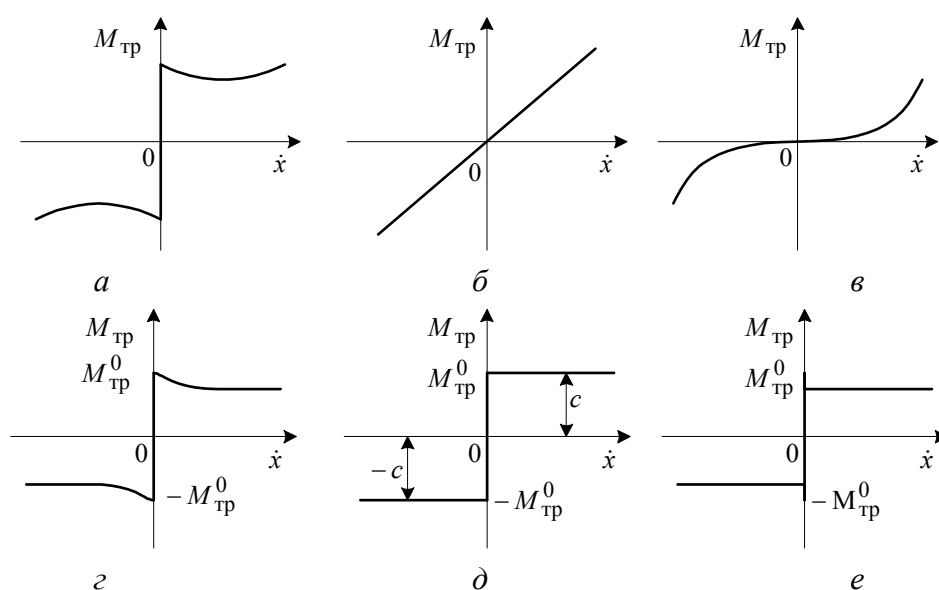


Рис. 2.6. Графики зависимостей момента трения от скорости перемещения

Момент трения, линейно зависящий от скорости \dot{x} (рис. 2.6, б), отражающий линейное или вязкое трение:

$$M_{\text{тр}} = k\dot{x},$$

где k – постоянный коэффициент.

Нелинейная составляющая момента трения, вызванная сухим (*кулоновским*) трением, представлена на рис. 2.6, г. Характеристика может быть аппроксимирована релейной зависимостью

$$M_{\text{тр}} = c_1 \text{sign } \dot{x},$$

где $c_1 = \text{const} > 0$.

При больших скоростях взаимного перемещения трущихся частей иногда учитывают квадратичную зависимость момента трения от относительной скорости перемещения трущихся частей (рис. 2.6, в)

$$M_{\text{тр}} = c_2 (\dot{x})^2 \text{sign } \dot{x},$$

где $c_2 = \text{const} > 0$. Квадратичная составляющая момента трения для исполнительных механизмов электромеханических систем обычно мала и ею часто пренебрегают.

Таким образом, в общем случае типичную зависимость момента трения $M_{\text{тр}}$ от \dot{x} (рис. 2.6, а) можно описать следующим уравнением:

$$M_{\text{тр}} = k\dot{x} + c_1 \text{sign } \dot{x} + c_2 (\dot{x})^2 \text{sign } \dot{x}.$$

Остановимся подробнее на нелинейности типа сухого трения, присутствующей в электромеханических СУ. Нелинейная характеристика, представляющая зависимость момента сухого трения $M_{\text{тр}}$ от относительной скорости перемещения трущихся частей \dot{x} , изображена на рис. 2.6, з. Здесь приняты обозначения: момент трения покоя – $M_{\text{тр}}^0$, момент трения движения – $M_{\text{тр}}$. Тогда, если момент трения определяется трением деталей из пластических материалов, можно принять $M_{\text{тр}} = M_{\text{тр}}^0$. Характеристика сухого трения будет иметь вид, приведённый на рис. 2.6, д. Для механических передач, где момент трения определяется трением металлических частей друг о друга, характеристику сухого трения обычно идеализируют и представляют в виде, показанном на рис. 2.6, д или рис. 2.6, е.

В отличие от идеальной релейной характеристики зависимость $M_{\text{тр}}(\dot{x})$ может принимать не только значение $+c$ и $-c$ (рис. 2.6, д), но и значения $-c \leq M_{\text{тр}} \leq +c$, когда скорость $\dot{x} = 0$. При мгновенном прохождении значения скорости через нуль момент сухого трения скачком меняет знак. Величина момента сухого трения как линейного, так и квадратичного, зависит от условий смазки, притёртости соприкасающихся частей и т. д.

Следует отметить, что момент трения покоя зависит от времени неподвижного контакта трущихся частей. Наблюдается неоднозначность характеристики трения с относительно большим рассеянием её опытных точек, полученных как при испытаниях одного и того же механизма (рис. 2.7), так и его идентичных экземпляров [11]. Поэтому правильнее говорить либо о среднестатистическом значении момента трения, либо о возможных пределах изменения момента трения.

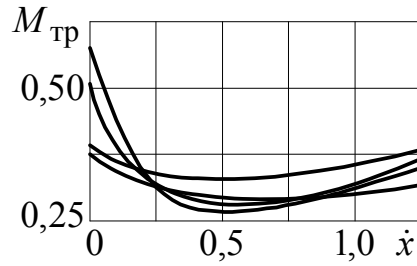


Рис. 2.7. Разброс характеристик

2.4. Получение моделей систем на основе уравнений Гамильтона (формализм Гамильтона)

В описании механических систем, наряду с обобщёнными скоростями, широко используются обобщённые моменты (обобщённые импульсы) p_i , соответствующие обобщённым координатам q_i . Обобщённые моменты записываются как

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.16)$$

Кинетическую энергию (2.15) стационарной системы (например, движущейся в стационарном потенциальном поле) часто представляют в виде функции обобщённых скоростей и обобщённых координат

$$T = T_{\dot{q}}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; q_1, q_2, \dots, q_n) = T_{\dot{q}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}).$$

Эту функцию также называют *функцией Лагранжа для кинетической энергии* (кинетическая энергия в лагранжевых координатах $(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$).

С другой стороны, кинетическую энергию можно выразить в виде функции обобщённых моментов и обобщённых координат

$$T = T_p(p_1, p_2, \dots, p_n; q_1, q_2, \dots, q_n) = T_p(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Эту функцию принято также называть *функцией Гамильтона для кинетической энергии* (кинетическая энергия в гамильтоновых или канонических координатах (\mathbf{p}, \mathbf{q})).

Поскольку энергия не зависит от того, через какие координаты она выражается, справедливо равенство

$$T_p(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T_{\dot{q}}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}). \quad (2.17)$$

Далее будет учитываться, что обобщённая скорость зависит от обобщённых моментов и координат, т. е.

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Уравнение (2.17) можно продифференцировать по координате q_i :

$$\frac{\partial T_p}{\partial q_i} = \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_i} + \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_i} + \dots + \left(\frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_i} + \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \right) + \dots + \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_n} \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial q_i}.$$

С учётом выражения (2.16) последнее соотношение можно представить как

$$\frac{\partial T_p}{\partial q_i} = p_1 \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_i} + p_2 \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_i} + \dots + \left(\frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_i} + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \right) + \dots + p_n \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial q_i}. \quad (2.18)$$

Кинетическая энергия для стационарной системы выражается через обобщённые скорости:

$$T_{\dot{q}} = \frac{1}{2} \left(\dot{q}_1 \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_2} + \dots + \dot{q}_n \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_n} \right).$$

Тогда справедливо равенство

$$2T_{\dot{q}} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + \dots + p_n \dot{q}_n = \langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle, \quad (2.19)$$

где $\langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle$ – скалярное произведение векторов \mathbf{p} и $\dot{\mathbf{q}}$.

Выражение (2.19) получается при использовании *теоремы Эйлера об однородных функциях*: если $T_{\dot{q}}(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ – непрерывно дифференцируемая однородная функция степени k (здесь $k = 2$, поскольку $T_{\dot{q}}$ – квадратичная форма), то

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_i} = k T_{\dot{q}}.$$

С учётом равенства (2.17) выражение (2.19) можно записать

$$2T_p = \langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle. \quad (2.20)$$

Частная производная по q_i для (2.20) определяется уравнением

$$2 \frac{\partial T_p}{\partial q_i} = p_1 \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_i} + p_2 \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_i} + \dots + p_n \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial q_i}. \quad (2.21)$$

В результате при вычитании из уравнения (2.20) уравнение (2.18) получается

$$\frac{\partial T_p}{\partial q_i} = - \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_i}. \quad (2.22)$$

Частная производная по p_i для (2.17) определяется уравнением

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_i} = \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_i} + \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_n} \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial p_i}. \quad (2.23) \quad (2.23)$$

Ранее полученное выражение (2.20) можно продифференцировать по p_i

$$2 \frac{\partial T_p}{\partial p_i} = p_1 \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial p_i} + p_2 \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial p_i} + \dots + \left(\dot{q}_i + p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_i} \right) + \dots + p_n \frac{\partial \dot{q}_n}{\partial p_i}. \quad (2.24) \quad (2.24)$$

Вычитая из уравнения (2.24) уравнение (2.23), можно получить

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_i} = \dot{q}_i. \quad (2.25)$$

Используя равенства (2.22) и (2.25), уравнения движения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_{\dot{q}}}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

могут быть представлены в виде системы уравнений:

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial T_p}{\partial q_i} + Q_i; \quad (2.26)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial T_p}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.27)$$

Систему уравнений (2.26) и (2.27) называют *уравнениями Гамильтона*. Эти ДУ в частных производных связывают кинетическую энергию с обобщёнными координатами и обобщёнными моментами, а также, в общем случае, с обобщёнными силами.

При движении консервативной механической системы в соответствии с (2.4) её полная энергия E , равная сумме кинетической и потенциальной энергий, остаётся неизменной. Функцию, выражающую полную энергию системы через обобщённые координаты \mathbf{q} и обобщённые импульсы \mathbf{p} , называют *функцией Гамильтона* и обозначают H . Тогда

$$H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T_p(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \Pi(\mathbf{q}) = E. \quad (2.28)$$

Функция H – *гамильтониан* системы – нашла широкое применение, в частности, в оптимальном управлении [2].

В результате дифференцирования (2.28):
по обобщённой координате q_i

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial T_p}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}; \quad (2.29)$$

по обобщённому импульсу p_i

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial T_p}{\partial p_i}. \quad (2.30)$$

Полученные формулы устанавливают связь между гамильтонианом H и энергиями T и Π в дифференциальной форме.

При подстановках (2.29) в (2.26), а (2.30) в (2.27), получается система уравнений:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_i}; \quad (2.31)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.32)$$

Система уравнений (2.31) и (2.32) получила название *канонических уравнений Гамильтона*.

Для консервативной системы гамильтониан H не зависит от времени. Производная от H по времени

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right) \quad (2.33)$$

равна нулю при подстановке в неё выражений (2.31) и (2.32), если H не зависит от времени явно. Поэтому любой *гамильтониан, удовлетворяющий каноническим уравнениям (2.31), (2.32), является инвариантом движения* $\left(\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = \text{const} \right)$. Для консервативной системы полное изменение H во времени равно нулю. Следовательно, для *консервативной системы гамильтониан H является её первым интегралом*. Подробнее о первом интеграле излагается, например в [12, 13].

Для тех систем, у которых гамильтониан может зависеть явно от времени, изменение H с течением времени за счёт изменений p_i и q_i по-прежнему равно нулю, однако полное изменение dH/dt будет определяться частной производной $\partial H/\partial t$.

2.5. Принцип динамического сжатия-расширения фазового пространства

Поведение любой динамической (не только механической) системы подчиняется *принципу сжатия-расширения фазового пространства*. Этот принцип заключается в следующем.

Из найденных уравнений (2.31), (2.32) следует, что

$$\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}, \quad \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i},$$

откуда

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \right) = 0.$$

От пространства обобщённых координат и обобщённых моментов $\{q_i, p_i\}, i = \overline{1, n}$ всегда можно перейти к $2n$ -мерному фазовому пространству переменных состояний $\{v_k\}, k = \overline{1, 2n}$, например, при обозначениях $v_i = q_i, v_{n+i} = p_i, i = \overline{1, n}$. В результате получается равенство

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \dot{v}_k}{\partial v_k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial F_k(\mathbf{v})}{\partial v_k} = 0.$$

Данное соотношение означает, что *дивергенция векторного поля скоростей* равна нулю, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{v}) = 0.$$

Дивергенция векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ в точке $\mathbf{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N)^T$ представляет собой скалярную величину, равную

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial v_i}.$$

Дивергенция характеризует скорость сжатия или расширения фазового объёма.

Движение изображающих точек в фазовом пространстве состояний можно интерпретировать как «стационарное течение (поток) несжимаемой жидкости», подчиняющееся уравнению непрерывности. Каждая траектория представляет собой линию потока. Тогда при движении консервативной системы произвольный элемент фазового объёма (элементарный объём) V потока не изменяется во времени; изменяется лишь его форма (рис. 2.8, а).

Известно [12], что в общем случае для динамических систем N -го порядка относительная скорость изменения фазового объёма V в фазовом пространстве равна *производной С. Ли* (Lie):

$$\frac{dV/dt}{V} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial v_i} = \operatorname{div} \dot{\mathbf{v}}.$$

Следовательно, дивергенция вектора фазовой скорости $\dot{\mathbf{v}}$ определяется производной Ли.

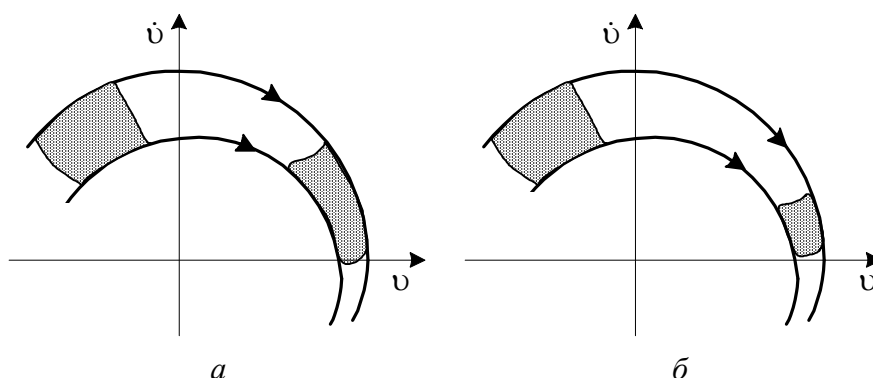


Рис. 2.8. Изменение фазового объёма в системе:
 a – консервативной; b – диссипативной

Дивергенция вектора фазовой скорости системы связана со следом матрицы Якоби (Jacoby)

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \left\| \frac{\partial F_i(\mathbf{v})}{\partial v_j} \right\|, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Тогда

$$\text{div } \dot{\mathbf{v}} = \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \text{Tr } \mathbf{J}.$$

Динамические системы с изменяющимся во времени запасом энергии относятся к *неконсервативным*.

Системы, в которых энергия уменьшается во времени из-за трения или рассеяния, называются *диссипативными*.

Системы, энергия которых может нарастать во времени, принято называть *системами с отрицательной диссипацией*.

В статистической физике системы принято делить на изолированные, закрытые, открытые равновесные и открытые диссипативные. В изолированных системах отсутствует какой-либо обмен веществом или энергией с внешней средой. Процессы самоорганизации в них невозможны. В закрытых системах отсутствует обмен веществом со средой, но возможен обмен энергией. Такие системы способны к фазовым переходам в равновесное упорядоченное состояние. Например, при достаточно низкой температуре в закрытой системе возникает кристаллический порядок.

Открытые системы обмениваются с окружающей средой веществом и энергией. К открытым равновесным системам относятся такие, которые при отклонениях от равновесного состояния возвращаются к нему апериодически, без осцилляций. Открытые диссипативные системы возникают в результате кооперативных (когерентных) процессов. Их поведение нели-

нейно. Такие системы характеризуются переходами в новые устойчивые состояния через точки бифуркации.

Принципиальной особенностью диссипативных систем является зависимость элементарного фазового объёма от времени (рис. 2.8, б). В системах с поглощением энергии фазовый объём во времени уменьшается.

Таким образом, дивергенция (точнее, её знак) разделяет всё бесконечное множество как искусственных (технических), так и природных систем на два класса, которые обладают принципиально различными свойствами.

К первому классу относятся те системы, у которых дивергенция вектора фазовой скорости равна нулю ($\operatorname{div} \dot{\mathbf{v}} = \dot{V}/V \equiv 0$), т. е. фазовый объём остаётся неизменным ($V = \text{const}$). Это свойство определяется известной теоремой Лиувилля (Liouville) [13]. Такие системы являются консервативными. Для них характерно сохранение энергии и обратимость во времени уравнений динамики. В их фазовом пространстве отсутствуют изолированные притягивающие фазовые траектории. В поведении консервативных систем определяющее значение имеют начальные условия. Размерность N консервативных систем является чётной. Однако в природе наиболее распространён второй класс динамических систем – диссипативных. По своей сути природные системы являются диссипативными. На определённых отрезках времени свойство диссипации не успевает заметно проявиться и тогда их можно считать консервативными.

Таким образом, к основным чертам поведения диссипативных систем следует отнести следующие: 1) при движении энергия не сохраняется; 2) фазовый объём сжимается; 3) уравнения не обратимы во времени.

Диссипативные системы могут быть разделены на подкласс *пассивных* систем, не содержащих источников энергии, и на подкласс *активных* систем, имеющих постоянный или переменный источники энергии.

Отличительным признаком (критерием) диссипативных систем является условие

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{v}} < 0.$$

В этой связи производную Ли можно записать как

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt} = -\alpha, \quad \alpha > 0.$$

При интегрировании этого соотношения получается

$$V(t) = V_0 e^{-\alpha t},$$

отсюда при $t \rightarrow \infty$ объём $V(t) \rightarrow 0$, т. е. фазовый объём при движении системы сжимается. Следовательно, относительно свойств диссипативных систем можно сделать важные выводы:

1) все траектории при $t \rightarrow \infty$ сходятся к некоторому компактному множеству, которое принято называться *аттрактором*;

2) аттрактор («притягиватель») имеет нулевой объём. Под областью притяжения Ω аттрактора понимают такую область начальных условий $\{v_{0i}\} \subset \Omega$, что выходящие из них траектории сходятся к аттрактору. Другими словами, множество начальных условий, образующее область притяжения ненулевого объёма, отображается в множество нулевого объёма. Начальные состояния системы, находящиеся вне аттрактора, с течением времени неизбежно «выпадают» на аттрактор [12];

3) в результате притяжения к аттрактору происходит своеобразная «потеря памяти» диссипативной системы о её начальных условиях;

4) размерность аттрактора r всегда меньше размерности N фазового пространства;

5) возможно существование нескольких аттракторов со своими областями притяжения.

Все возможные траектории диссипативных систем могут быть разделены на два подмножества: 1) подмножество траекторий от конкретных начальных условий к предельному множеству – аттрактору; 2) подмножество траекторий, принадлежащих аттрактору.

В процессе движения системы на каких-то ограниченных интервалах времени допустимо выполнение $\operatorname{div} \dot{v} > 0$, при этом фазовый объём увеличивается. Увеличение объёма сопровождается возрастанием энергии и долго продолжаться не может. В реальных нелинейных системах увеличение фазового объёма на конечных интервалах времени связан с процессом перехода из одного в другое аттрактивное состояние.

2.6. Получение моделей систем на основе уравнений балансовых соотношений

При получении ММ, помимо фундаментальных законов природы, различных законов сохранения (энергии, количества движения и кинетического момента – для механических систем), вариационных принципов, широко используется *метод (принцип) балансовых соотношений (уравнений)*. Балансовые соотношения строятся на основе всеобщего закона сохранения вещества и движения – закона Ломоносова–Лавуазье (Lavoisier). Делается базовое предположение о том, что как бы не изменялись величины (переменные, параметры) системы в процессе её функционирования, в ней сохраняется постоянство некоторых функциональных зависимостей между этими величинами. При этом в системе должны проявляться факторы, с одной стороны, направленные на развитие (эволюцию) процесса, а с другой – способствующие его подавлению (торможению). Поэтому при построении моделей необходимо выявлять основные факторы, определяющие противоположно ориентированные тенденции поведения системы.

Можно сказать, что метод балансовых соотношений представляет собой математическое описание *динамического равновесия (баланса)* какой-либо *субстанции* (например, вещества, энергии, теплоты, продукции и т. п.).

Балансовые соотношения могут быть записаны и для таких ситуаций, когда законы сохранения не действуют. Например, баланс может быть составлен для одного из веществ, участвующих в химической реакции. Однако сохранения массы этого вещества может и не происходить, поскольку оно может исчезать или возникать в ходе химической реакции.

В том случае, когда в качестве субстанции, для которой записывается балансовое соотношение, берётся масса (или поток массы), предполагается справедливость выполнения закона сохранения массы (дефект массы, характерный для ядерных реакций, обычно не учитывается).

Баланс по веществу или *материальный баланс* может быть записан для какого-нибудь одного или для части участвующих в процессе компонентов либо для всех исследуемых компонентов одновременно.

При изучении механических и гидромеханических процессов часто используется *баланс импульса (количества движения)*, причём эти балансовые выражения, отнесённые к *единице времени*, приобретают форму *балансов взаимодействующих сил*.

При составлении *энергетического баланса* в качестве субстанции целесообразно (если это допустимо) выделить какого-либо определённого вида энергии, например – теплового. Тогда энергетический баланс превращается в *тепловой баланс*. Если такое выделение невозможно, то необходимо использовать полный энергетический баланс с использованием всех видов энергии.

Процесс составления балансовых соотношений включает выделение исследуемой субстанции, установление для неё *пространственного контура* и *временного интервала*, относительно которых составляется баланс.

Вводятся следующие понятия и обозначения:

- потоки субстанции, входящие в выделенный контур (Π – *приход*) и выходящие из него (Y – *уход*);
- *источники* (I) субстанции и её *стоки* (C) внутри контура;
- *накопление* (H) субстанции или *результат* процесса (P) в контуре за исследуемый временной интервал.

При переносе импульса в *поле внешних массовых сил* причины их появления лежат за пределами выделенного контура; поэтому внешние массовые силы трактуются как *источники* или *стоки* импульса внутри контура. Кроме того, в этом случае говорят не о *накоплении*, что физически оправданно для количества движения, а о *результате* – изменении ситуации под влиянием равнодействующих сил [14].

В общем случае *формула балансового соотношения* (ФБС) может быть записана как:

$$\begin{aligned} < \text{Накопление субстанции} > = < \text{Приход субстанции} > - < \text{Уход субстанции} > + \\ &+ < \text{Источник субстанции} > - < \text{Сток субстанции} > . \end{aligned}$$

С учётом принятых обозначений ФБС выглядит следующим образом

$$H = \Pi - U + И - С .$$

Например, приведённый на рис. 2.9 пространственный контур выделяет из технической или другой по своей природе системы какую-то её часть: устройство, несколько устройств или даже часть устройства (возможно, бесконечно малую его часть). После выделения контура все потоки, пересекающие его границу, трактуются как *приходы* субстанции в контур или её *уходы* из него. Если между потоками происходит обмен субстанцией, нередко при выборе контура потоки целесообразно формально обособить (*сегрегировать*).

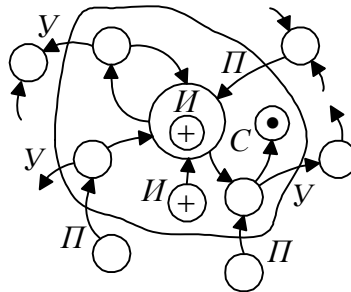


Рис. 2.9. Пространственный контур

Временной интервал Δt представляет собой время протекания процесса от начального состояния до некоторого конечного состояния. Для нестационарных процессов составляется баланс в дифференциальной форме, т. е. для *бесконечно малого* (*элементарного*) промежутка времени dt . Для стационарных процессов за временной интервал часто выбирают единицу времени – 1 с.

В качестве прихода и ухода могут выступать *потоки субстанции* в единицу времени (для непрерывных стационарных процессов) либо её *количества* (для периодических нестационарных процессов), являющиеся конечными (за весь временной интервал или его часть) или бесконечно малыми (за элементарный промежуток времени dt) величинами.

Источники и *стоки* вводятся в балансовые уравнения, когда в изучаемой ситуации для субстанции отсутствует закон сохранения. Это тоже могут быть потоки субстанции (в единицу времени) либо её количества (за конечный или бесконечно малый промежуток времени). На рис. 2.9 источники и стоки изображены крестиками и точками соответственно.

В результате алгебраического сложения приходов, уходов, источников и стоков количество рассматриваемой субстанции в пределах контура может изменяться или не изменяться; при этом происходит или не проис-

ходит *накопление (приращение)* субстанции. В *стационарном (равновесном)* состоянии таких изменений не наблюдается, так что *накопление* субстанции отвечает условию

$$H = 0.$$

Для *нестационарных* процессов характерно изменение количества субстанции внутри контура. При этом накопление представляет собой разность между конечным и начальным количествами субстанции. Эта разность положительна, когда количество субстанции нарастает, и отрицательна, когда убывает.

Пусть, например, рассматривается баланс массы M . В стационарном процессе её количество в контуре не изменяется во времени, так что

$$H = M_{\text{к}} - M_{\text{н}} = 0,$$

где $M_{\text{к}}$, $M_{\text{н}}$ – конечное и начальное количество массы.

В нестационарном процессе конечное количество массы $M_{\text{к}}$ может быть не равно начальному $M_{\text{н}}$, тогда

$$H = M_{\text{к}} - M_{\text{н}} \neq 0.$$

При рассмотрении бесконечно малого промежутка времени dt накопление массы также бесконечно мало. Пусть в начале элементарного промежутка (момент t) количество массы равно M , а в конце его (момент $t + dt$) – равно $M + dM$. Тогда

$$H = (M + dM) - M = dM.$$

Если изменение массы зависит от ряда факторов (причём время t лишь один из них), то количество массы в момент $t + dt$ составляет $M + (\partial M / \partial t)dt$, так что

$$H = (\partial M / \partial t)dt.$$

Формально составленная ММ может допускать величину накопления субстанции равной нулю и в случае нестационарного процесса, когда пространственный контур стягивается, например, в поверхность (граница раздела фаз и т. п.). При этом накопление субстанции в таком контуре нулевого объёма означало бы бесконечно большое повышение потенциала (температуры, концентрации), чего физически происходить не может.

Во многих практических ситуациях ФБС упрощается. Так в условиях *действия закона сохранения* из ФБС исключаются источники и стоки:

$$H = \Pi - \Upsilon.$$

Для стационарных процессов, когда $H = 0$, ФБС принимает вид

$$0 = \Pi - \Upsilon + I - C,$$

а если при этом соблюдаются законы сохранения, то

$$0 = \Pi - \Upsilon.$$

Для *изолированных систем*, когда отсутствуют приходы и уходы субстанции:

$$H = I - C.$$

Составление балансовых уравнений в общем случае не является формальной процедурой, а потому требует глубокого проникновения в суть явления или процесса.

Получение уравнений материального баланса можно проследить на процессах, наблюдаемых в технических объектах, например, работающих по *законам истечения веществ*.

Пример 2.2 [15]. На рис. 2.10, *а* приведена конструкция простейшего цилиндрического резервуара, заполненного жидкостью или пульпой (от латинского слова *pulpa* – суспензия твёрдых частиц в воде, подготовленная для использования в технологическом процессе. Суспензия – это взвешенные в жидкости мелкие твёрдые частицы). Часто в таких резервуарах управляют уровнем, поддержание которого необходимо для нормального протекания технологического процесса.

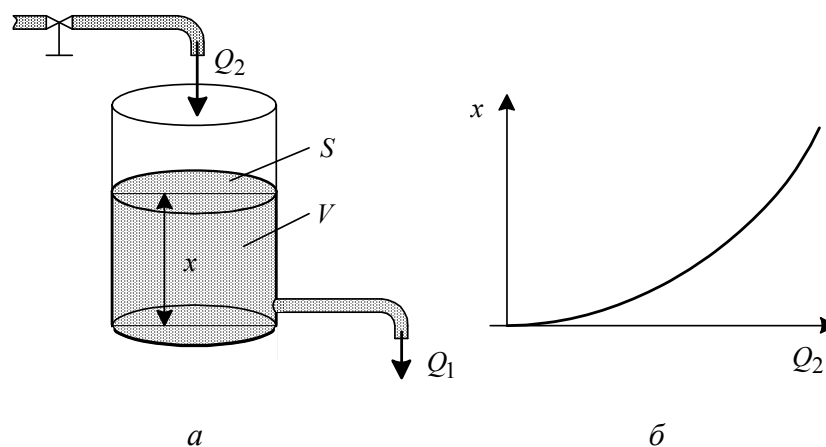


Рис. 2.10. Резервуар цилиндрической формы (*а*) и его нагрузочная характеристика (*б*)

Вводятся обозначения: V – объём жидкости; S – площадь поверхности жидкости; Q_1, Q_2 – объёмные расходы жидкости; F – площадь проходного отверстия сливной трубы. Расход Q_2 принимается в качестве управляющего воздействия.

Уравнение материального баланса жидкости для данного резервуара имеет вид

$$\Delta V + Q_1 \Delta t = Q_2 \Delta t.$$

Уравнение показывает, что расход Q_2 (*приход*) за время Δt уравнивается расходом Q_1 (*уходом*) и приращением объёма ΔV (*накоплением*) жидкости в резервуаре. Разделив левую и правую части уравнения на Δt и полагая, что $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta V \rightarrow 0$, можно получить ДУ:

$$\frac{dV}{dt} + Q_1 = Q_2.$$

Объём жидкости V выражается через её уровень x :

$$V = Sx,$$

тогда

$$\frac{dV}{dt} = S \frac{dx}{dt}.$$

Зависимость между объёмным расходом Q_1 и уровнем x вытекает из уравнения Д. Бернулли (Bernoulli), выводимого из уравнений Навье–Стокса [14]:

$$\frac{\rho v_0^2}{2} + \rho g x + p_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g x_0 + p_2,$$

где v – скорость истечения жидкости из сливного отверстия; v_0 – скорость изменения уровня жидкости в резервуаре; $x - x_0$ – перепад высот жидкости в резервуаре; p_1 , p_2 – статические давления над жидкостью в резервуаре и за сливным отверстием; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения. Величина $\rho v^2/2$ называется динамическим или скоростным давлением. Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (x - x_0),$$

где $\gamma = \rho g$ – удельный вес.

В предположении, что $v \gg v_0$, $x_0 = 0$, $p_1 = p_2$, скорость истечения жидкости будет определяться выражением

$$v = \sqrt{2gx}.$$

При умножении левой и правой частей этого выражения на площадь проходного сечения F , получается:

$$Fv = Q_1 = F\sqrt{2gx}.$$

С помощью поправочного коэффициента μ , часто определяемого экспериментально, может быть учтена форма и состояние поверхности сливного отверстия

$$Q_1 = \mu F \sqrt{2gx}.$$

Например, для отсадочной машины рекомендуется значение $\mu = 0,6$.

Найденное выражение подставляется в ДУ изменения объёма жидкости:

$$S \frac{dx}{dt} + \mu F \sqrt{2gx} = Q_2.$$

Таким образом получено уравнение материального баланса для истечения жидкости в цилиндрическом резервуаре.

При $dx/dt = 0$ можно записать уравнение статического (стационарного) режима резервуара

$$\mu F \sqrt{2gx} = Q_2.$$

Из этого уравнения следует, что нагрузочная характеристика объекта (рис. 2.10, б) имеет вид параболы. Статический, или стационарный, режим характеризует закон, положенный в основу работы объекта, в частности закон свободного истечения жидкости.

Коэффициент S при производной определяется геометрическими размерами резервуара. В зависимости от геометрии объекта этот коэффициент может быть описан различными функциями от уровня:

– для резервуара, имеющего форму усечённого конуса (рис. 2.11, а)

$$S = S(x) = \pi(r^2 + 2r \operatorname{tg} \alpha x + \operatorname{tg}^2 \alpha x^2);$$

– для резервуара сферической формы (рис. 2.11, б)

$$S = S(x) = \pi(2rx - x^2).$$

При отсасывании жидкости или пульпы насосом, расход не будет зависеть от уровня. В этом случае уравнение принимает вид

$$S \frac{dx}{dt} = \Delta Q,$$

где ΔQ – разность между постоянными расходами Q_1 и Q_2 . В результате получается описание астатического (интегрирующего) объекта с постоянной или переменной скоростью изменения уровня.

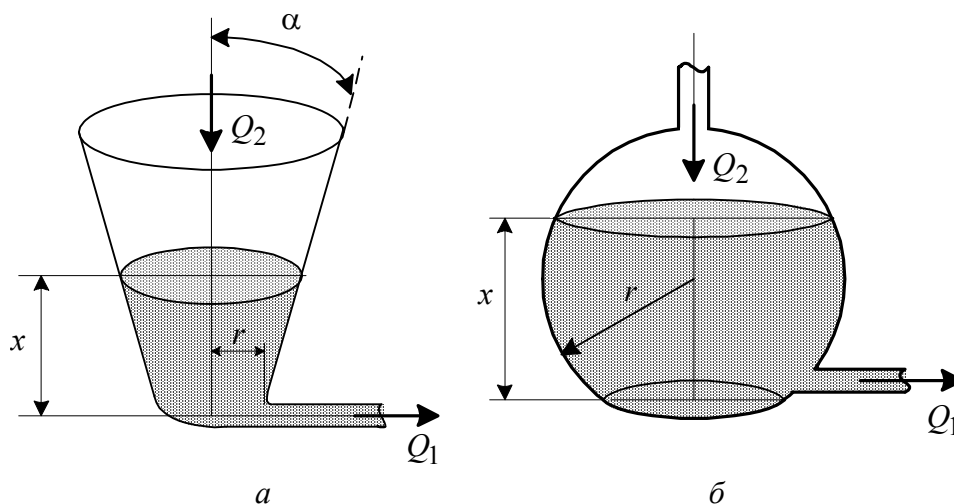


Рис. 2.11. Резервуары конической (а) и сферической (б) форм

Пример 2.3 [15]. На рис. 2.12 представлена камера флотационной машины, у которой слив происходит через порог.

Флотационная машина – аппарат, в котором осуществляется флотация полезных ископаемых. Флотация – способ обогащения полезных ископаемых, основанный на различной смачиваемости водой поверхности частиц, особенно после обработки флотационными реагентами. Принято различать масляную, плёночную и пенную флотации. В последнем случае частицы одних материалов прилипают к воздушным пузырькам и переходят вместе с ними в пенный слой, а других – остаются во взвешенном состоянии в воде (так называемые «хвосты»).

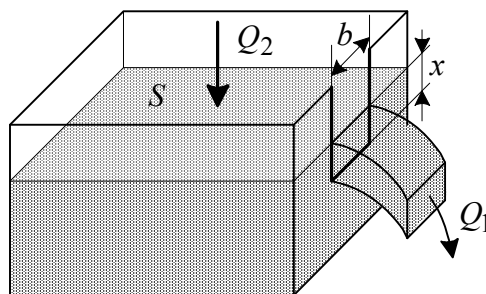


Рис. 2.12. Камера флотационной машины со сливом через порог

Истечение жидкости происходит в соответствии с нелинейным ДУ

$$S \frac{dx}{dt} + \left(0,465 + \frac{0,003}{x} \right) b \sqrt{2gx} \cdot x = Q_2.$$

Статическая зависимость (нагрузочная характеристика)

$$\left(0,465 + \frac{0,003}{x} \right) b \sqrt{2gx} \cdot x = Q_2$$

характеризует физический закон слива жидкости через порог. Здесь зависимость расхода жидкости Q_1 от её уровня x приводится в виде *эмпирической формулы*. Использование эмпирических зависимостей не является каким-то исключением: многие процессы в химической технологии, энергетике, металлургии и т. д. часто представляются математическими выражениями, полученными в результате многочисленных экспериментов.

Расход Q_2 может регулироваться с помощью интегрирующего исполнительного механизма. Для моделирования процессов в регулируемой системе, её модель удобно представить в форме пространства состояний. В качестве переменных состояния выбираются $v_1 = Q_2$, $v_2 = x$. Тогда для цилиндрического резервуара (пример 2.2) можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt} &= b_1 u, \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{S} v_1 - \frac{\mu F \sqrt{2g}}{S} \sqrt{v_2}, \\ y &= v_2.\end{aligned}$$

В векторном виде уравнение состояния имеет вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{S} v_1 - \frac{\mu F \sqrt{2g}}{S} \sqrt{v_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Структурная схема для моделирования процессов приведена на рис. 2.13.

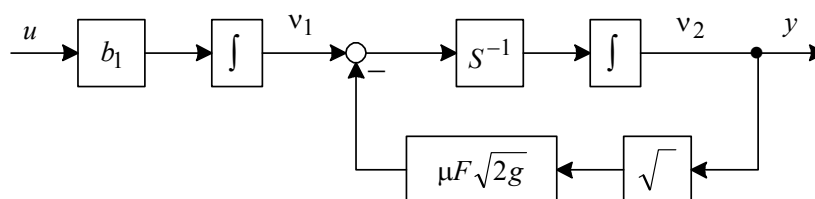


Рис. 2.13. Структурная схема моделирования регулируемых процессов в резервуаре цилиндрической формы

Метод балансовых соотношений широко применяется при построении ММ объектов не только технической природы, но и при описании явлений и процессов, наблюдаемых в экономических, биологических, социальных и других системах. Возникающие при этом принципиальные трудности составления ММ связаны зачастую с использованием полуэмпирических закономерностей, правдоподобных, но не строгих рассуждений, аналогий, опытом исследователя и изученностью объекта. Технические трудности

порождаются необходимостью учёта большого числа переменных и параметров объекта исследования. С целью подбора коэффициентов и установления адекватности модели может потребоваться проведение многочисленных экспериментов.

Пример 2.4 [9]. *Линейная модель накопления вооружений между двумя странами.*

Делается предположение, что общее количество вооружений у каждой страны изменяется со временем в зависимости от трёх факторов:

- количества оружия у противника;
- износа существующего у страны вооружения;
- степени недоверия между противниками.

Темпы прироста и убыли вооружений пропорциональны указанным факторам.

В соответствии с принципом балансовых соотношений изменения количества вооружений ΔB_1 , ΔB_2 у каждой из стран за время Δt определяются выражениями:

$$\Delta B_1 = \alpha_1 B_2 \Delta t - \beta_1 B_1 \Delta t,$$

$$\Delta B_2 = \alpha_2 B_1 \Delta t - \beta_2 B_2 \Delta t,$$

где $B_1 \geq 0, B_2 \geq 0$ – объёмы вооружений стран; коэффициенты $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ – характеризуют скорость наращивания вооружений; коэффициенты β_1, β_2 – характеризуют скорость «старения» вооружений («старение» вооружений – аналог процесса амортизации производственных мощностей в экономических моделях выпуска продукции).

В предлагаемой модели следует учитывать фактор взаимного недоверия введением в уравнения величин N_1, N_2 . При делении левой и правой частей уравнений на Δt , можно получить:

$$\frac{\Delta B_1}{\Delta t} = \alpha_1 B_2 - \beta_1 B_1 + N_1,$$

$$\frac{\Delta B_2}{\Delta t} = \alpha_2 B_1 - \beta_2 B_2 + N_2,$$

где величины $N_1 \geq 0, N_2 \geq 0$ представляют собой уровень взаимной настороженности (недоверия) противников, который считается не зависящим от количества вооружений. Во многом уровень недоверия (или доверия) определяется неформальными (например, дипломатическими) отношениями между странами.

Переходя от конечных приращений к непрерывным производным, в окончательном виде модель накопления вооружений выглядит таким образом:

$$\frac{dB_1}{dt} = \alpha_1 B_2 - \beta_1 B_1 + N_1,$$

$$\frac{dB_2}{dt} = \alpha_2 B_1 - \beta_2 B_2 + N_2.$$

Точно такой же моделью может быть описана экономическая борьба двух конкурирующих фирм, специализирующихся на производстве какого-либо товара.

Представленная модель не учитывает многие важные факторы, влияющие на динамику гонки вооружений, но, тем не менее, даёт возможность проанализировать ряд существенных свойств этого процесса.

Для рассматриваемой системы матрица коэффициентов \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\beta_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином

$$\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) = s^2 + (\beta_1 + \beta_2)s + (\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2).$$

Особое опасение вызывают коэффициенты α_1 , α_2 , поскольку их увеличение способствует тому, что система может пойти «в разнос». Возникает ситуация ничем несдерживаемой гонки вооружения.

Уровни вооружения будут управляемыми, если положить $N_1 = u_1$, $N_2 = u_2$, т. е. рассматривать u_1 , u_2 как управляющие воздействия. При отсутствии вооружений у противника $B_2 = 0$ и полном доверии $N_1 = 0$ имеет место процесс «естественного» разоружения вследствие износа, что определяется следующей формулой:

$$B_1(t) = B_{10}e^{-\beta_1 t},$$

где B_{10} – начальное состояние вооружения.

Пример 2.5 [16]. *Линейная модель распространения эпидемического заболевания.*

Распространение эпидемического заболевания можно представить в виде следующей модели. Пусть всё исследуемое население v , подвергнувшееся эпидемии, можно разделить на три группы: группа v_1 – здоровые люди, восприимчивые к эпидемическому заболеванию; группа v_2 – заболевшие люди; группа v_3 – люди, не подверженные заболеванию из-за невосприимчивости (иммунизации), смерти или изоляции. Группы v_1 и v_2 находятся вне контакта (например, заболевшие v_2 располагаются в больницах). При этом выполняется равенство $v = v_1 + v_2 + v_3$. Группу людей v_1

пополняют здоровые люди u_1 . Группа людей v_2 может увеличиваться за счёт поступающих в неё заболевших лиц u_2 . Распространение заболевания среди этих групп можно представить в виде иллюстрации, приведённой на рис. 2.14.

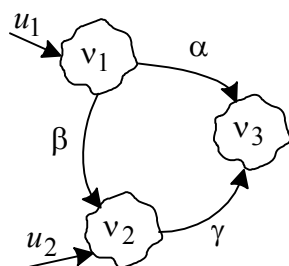


Рис. 2.14. Диаграмма распространения эпидемического заболевания

Математическое описание посредством ДУ имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt} &= -\alpha v_1 - \beta v_2 + u_1, \\ \frac{dv_2}{dt} &= \beta v_1 - \gamma v_2 + u_2, \\ \frac{dv_3}{dt} &= \alpha v_1 + \gamma v_2.\end{aligned}$$

В уравнениях приняты следующие обозначения: α, β, γ – положительные коэффициенты пропорциональности, характеризующие интенсивности убывания или пополнения соответствующих групп; u_1 – скорость, с которой появляются новые люди, восприимчивые к заболеванию; u_2 – скорость, с которой появляются инфицированные.

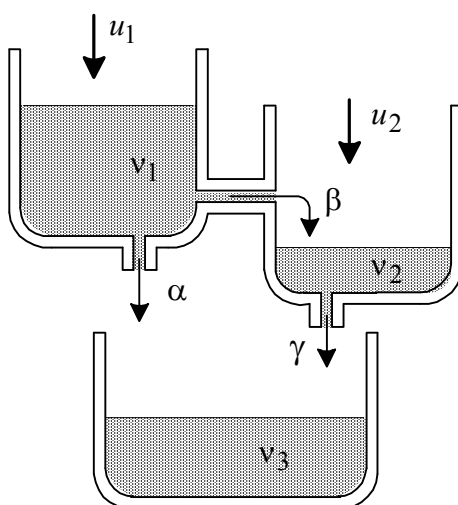


Рис. 2.15. Гидравлическая модель–аналогия

В изолированном сообществе (автономная система)

$$u_1 = u_2 = 0.$$

Данной модели распространения эпидемии, используя *принцип аналогии*, можно поставить в соответствие гидравлическую *модель-аналогию* – систему взаимодействующих резервуаров, как это показано на рис. 2.15. Данная схема отражает вещественные потоки (потоки жидкости) в соответствии с природой явления, аналогичные тем, что наблюдаются при распространении эпидемии. Информационные (сигнальные) потоки в модели, иллюстрируются с помощью структурной схемы (рис. 2.16). Переменная v_3 зависит от переменных v_1 и v_2 , но не оказывает на них влияния.

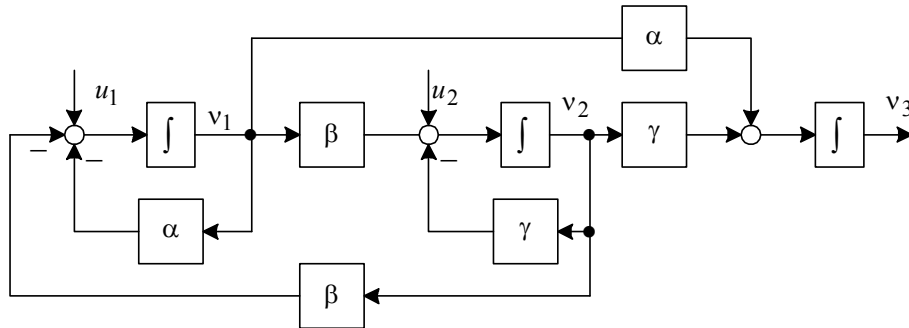


Рис. 2.16. Структурная схема моделирования процесса распространения эпидемического заболевания

Систему уравнений можно представить в векторно-матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta & 0 \\ \beta & -\gamma & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Анализ поведения модели приводит к следующим результатам. Пусть система автономна (изолированное общество), т. е. $u_1 = u_2 = 0$. Объект линейный, следовательно, существует только одно состояние равновесия. Начальные состояния: v_{10}, v_{20}, v_{30} . Для выяснения устойчивости состояния равновесия, т. е. прекращения в сообществе эпидемического заболевания, следует рассмотреть характеристический полином $\det(s\mathbf{E} - \mathbf{A})$. При этом можно учесть, что третье уравнение не влияет на первое и второе (третье уравнение не входит в состав какого-либо контура), поэтому его

можно исключить из анализа. Тогда модель для исследования устойчивости по начальным условиям (по Ляпунову) имеет вид:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{v}},$$

$$\text{где } \tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином

$$\det(s\mathbf{E} - \tilde{\mathbf{A}}) = s^2 + (\alpha + \gamma)s + \alpha\gamma + \beta^2.$$

Поскольку $\alpha + \gamma > 0$, $\alpha\gamma + \beta^2 > 0$, корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости корней. Следовательно, свободное движение асимптотически стремится к нулю, т. е. при $t \rightarrow \infty$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\text{св}}(t) \rightarrow \mathbf{0}.$$

Равновесное состояние $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ будет устойчивым.

Из модели-анalogии (рис. 2.15) непосредственно видно, что равновесие наступит тогда, когда жидкость целиком перетечёт из резервуаров v_1 , v_2 в резервуар v_3 . Состояние резервуара v_3 зависит от его начального состояния v_{30} и в положении равновесия равно $v_3 = v_{10} + v_{20} + v_{30}$.

Рассматриваемый процесс управляем. Например, величину u_1 можно интерпретировать, как управляющее воздействие, связанное с применением вакцинации (прививок) среди здоровых людей, делающее их невосприимчивыми к заболеванию. Величину u_2 можно представить как управляющее воздействие, вызванное эффективными методами лечения, например, применением новейших лекарственных препаратов. Сигналы управления могут формироваться как линейные зависимости от соответствующих координат:

$$u_1 = -k_1 v_1, \quad u_2 = -k_2 v_2.$$

На схеме модели-анalogии с взаимодействующими резервуарами это означало бы регулируемое изменение проходных отверстий сливных труб. На структурной схеме указанные действия эквивалентны введению дополнительных обратных связей (рис. 2.17).

Более точная нелинейная модель распространения эпидемического заболевания имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt} &= -\alpha v_1 - \beta v_1 v_2 + u_1, \\ \frac{dv_2}{dt} &= \beta v_1 v_2 - \gamma v_2 + u_2, \\ \frac{dv_3}{dt} &= \alpha v_1 + \gamma v_2.\end{aligned}$$

Взаимодействие между группами населения здесь учтено наличием нелинейных составляющих $v_1 v_2$. Присутствие таких составляющих отражает тот факт, что группы v_1 и v_2 находятся в непосредственном контакте друг с другом. Другими словами, $v_1 v_2$ представляют собой *контактные составляющие уравнений*.

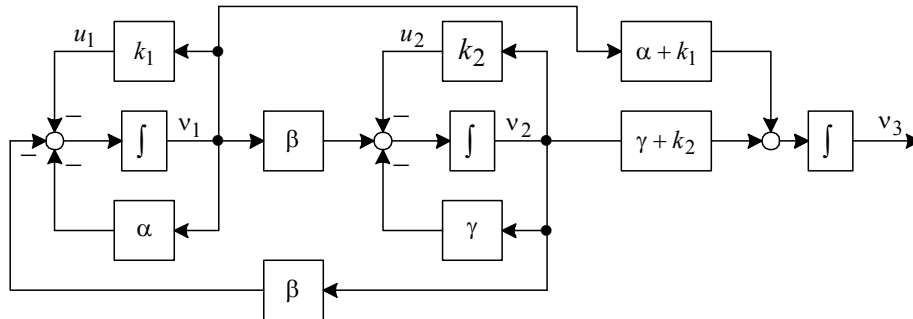


Рис. 2.17. Структурная схема моделирования управляемого процесса распространения эпидемического заболевания

Пример 2.6 [17]. Модель товарного обмена.

Рассматривается экономическая модель обмена товаров видов v_1 и v_2 двух производителей. Считается, что производитель товара вида v_1 нуждается в товаре вида v_2 , а производитель товара вида v_2 испытывает потребность в товаре вида v_1 . Товары v_1 и v_2 считаются различными, так как в противном случае не было бы необходимости в их обмене. В этих условиях может быть предложена следующая нелинейная модель обмена:

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt} &= -b_1 v_1 v_2 - c_1 v_1 + f_1, \\ \frac{dv_2}{dt} &= -b_2 v_1 v_2 - c_2 v_2 + f_2,\end{aligned}$$

причём коэффициенты пропорциональности $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$, $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$.

В рассматриваемой модели $v_1(t)$, $v_2(t)$ – объёмы товаров v_1 и v_2 у первого и второго производителя-потребителя соответственно в момент времени t .

Для обмена товарами, их нужно произвести. Поэтому в исследуемую модель включены величины f_1 и f_2 ($f_1 > 0$, $f_2 > 0$), которые характеризуют производство в единицу времени товаров видов v_1 и v_2 .

Обмен произведённых товаров осуществляется на рынке. Составляющие $b_1 v_1 v_2$ и $b_2 v_1 v_2$ являются *обменными* (контактными) и описывают рыночный обмен.

Коэффициенты b_1 и b_2 характеризуют положительные *эффективности обмена* так, что составляющая $(-b_1 v_1 v_2)$ показывает, сколько товара вида v_1 убывает с рынка в результате его обмена (продажи) на товар v_2 в единицу времени. Аналогично, составляющая $(-b_2 v_1 v_2)$ показывает, сколько товара вида v_2 обменивается на рынке на товар вида v_1 в единицу времени.

Отношение

$$C = \frac{b_1 v_1 v_2}{b_2 v_1 v_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

является *меновою стоимостью обмена (продажи)*, показывающей, что на b_2 единиц товара v_2 обменивается b_1 единиц товара вида v_1 .

Товары v_1 и v_2 могут физически изнашиваться и морально устаревать, поэтому в модель вводятся составляющие $(-c_1 v_1)$ и $(-c_2 v_2)$, призванные отразить эту естественную убыль. При этом коэффициенты

$$\tau_1 = c_1^{-1}, \quad \tau_2 = c_2^{-1}$$

представляют собой *коэффициенты долговечности* соответствующих товаров.

В частном случае под товаром v_2 могут подразумеваться деньги. Тогда величина f_2 характеризует количество имеющихся в наличии денег, необходимых для обмена. Предполагая, что за время производства товара v_1 и его продаж на рынке износ денег отсутствует, коэффициент $c_2 = 0$. При этом коэффициент долговечности денег $\tau_2 \rightarrow \infty$.

Поиск возможных состояний равновесия (рыночные равновесия) производится по равновесной (статической) модели вида:

$$\begin{aligned} b_1 v_1 v_2 + c_1 v_1 &= f_1, \\ b_2 v_1 v_2 + c_2 v_2 &= f_2. \end{aligned}$$

Данная система уравнений отражает статический баланс: весь произведённый в единицу времени товар частично обменивается на другой товар, а частично устаревает и исключается из взаимного рыночного обмена.

При обозначениях $p = b_2 f_1 - b_1 f_2 - c_1 c_2$, $q^2 = 4b_2 c_1 c_2 f_1$ решения этой системы алгебраических уравнений приобретают вид:

$$v_{1,2}^p = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + q^2}}{2b_2 c_1}, \quad v_{2,2}^p = \frac{f_2}{b_2 v_{1,2}^p + c_2}.$$

Отсюда следует, что одно из решений $v_{1,2}^p$ обязательно отрицательное, однако практический интерес может представлять только положительное решение.

В частном случае, когда v_2 – деньги, система уравнений имеет решение

$$v_1^p = \frac{b_2 f_1 - b_1 f_2}{b_2 c_1}, \quad v_2^p = \frac{c_1 f_2}{b_2 f_1 - b_1 f_2}.$$

В результате линеаризации нелинейной модели в равновесном состоянии она может быть представлена как:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= -b_1 v_2^p v_1 - b_1 v_1^p v_2 - c_1 v_1, \\ \frac{dv_2}{dt} &= -b_2 v_2^p v_1 - b_2 v_1^p v_2 - c_2 v_2, \end{aligned}$$

где v_1, v_2 – приращения относительно точки равновесия (v_1^p, v_2^p) .

По линеаризованной модели можно судить о поведении системы в локальной области состояния равновесия.

Матрица коэффициентов

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -(b_1 v_2^p + c_1) & -b_1 v_1^p \\ -b_2 v_2^p & -(b_2 v_1^p + c_2) \end{pmatrix},$$

характеристическая матрица

$$s\mathbf{E} - \mathbf{J} = \begin{pmatrix} s + (b_1 v_2^p + c_1) & b_1 v_1^p \\ b_2 v_2^p & s + (b_2 v_1^p + c_2) \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристический полином системы можно записать как

$$D(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{J}) = s^2 - \text{tr}\mathbf{J}s + \det\mathbf{J},$$

Где $\text{tr}\mathbf{J} = -(b_1 v_2^p + b_2 v_1^p + c_1 + c_2)$, $\det\mathbf{J} = b_1 c_2 v_2^p + b_2 c_1 v_1^p + c_1 c_2$.

На рис. 2.18 представлена бифуркационная диаграмма системы с произвольными значениями параметров. Области I соответствуют особые точки типа «устойчивый узел», области II – особые точки типа «устойчивый фокус». Такая система будет грубой (структурно-устойчивой) по А.А. Андронову и Л.С. Понтрягину, так как при переходе через параболу $\Delta = \sqrt{(\text{tr} \mathbf{J})^2 - 4 \det \mathbf{J}} = 0$ в результате изменения параметров устойчивость сохраняется, хотя и меняется тип особой точки. Однако, поскольку в рассматриваемой системе все параметры неотрицательны, в ней возможны особые точки только типа «устойчивый узел».

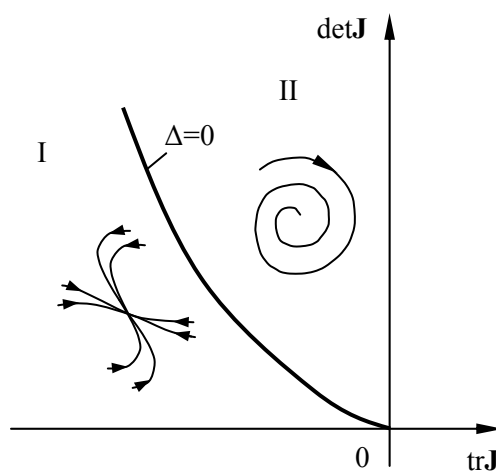


Рис. 2.18. Бифуркационная диаграмма модели товарного обмена

Пример 2.7. *Модель хищник-жертва (модель Вольтерры).*

Широко известная в настоящее время модель «хищник-жертва» была предложена в 1931 году В. Вольтеррой (Volterra). При построении такой модели, отражающей динамику биологических популяций, делается предположение, что в некотором замкнутом пространстве сосуществуют два биологических вида (две популяции): жертвы, питающиеся кормом, имеющимся в неограниченном избытке, и хищники, питающиеся жертвами. Примерами рассматриваемой модели являются сосуществующие биологические «пары»: совы-мыши, щуки-караси, лисицы-зайцы и т. д.

В отсутствии хищников жертвы беспредельно размножались бы и их численность определялась бы уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x,$$

где x – численность жертв, причём $x \geq 0$; $\alpha > 0$ – коэффициент, характеризующий прирост жертв (см. также 4.4). Структура такой модели с положительной обратной связью и процесс размножения приведены на рис. 2.19, *а*.

В отсутствии жертв хищники постепенно вымирали бы и их численность определялась бы уравнением

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y,$$

где y – численность хищников, причём $y \geq 0$; $\beta > 0$ – коэффициент, характеризующий естественную убыль хищников. Структура модели с отрицательной обратной связью и процесс вымирания приведены на рис. 2.19, *б*.

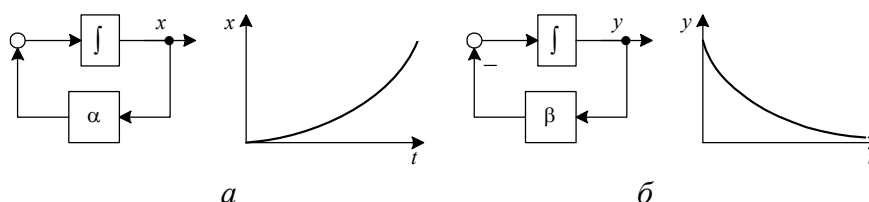


Рис. 2.19. Автономные модели изменения численности жертв и хищников:
а – структура с положительной обратной связью и процесс размножения жертв;
б – структура с отрицательной обратной связью и процесс вымирания хищников

Неограниченному росту жертв препятствуют их встречи (контакты, взаимодействия) с хищниками. Частота встреч пропорциональна как числу жертв, так и числу хищников, т. е. определяется произведением xu (произведение xu – это контактная (обменная) составляющая, характеризующая взаимодействие антагонистических элементов – жертвы и хищника – рассматриваемой модели). Аналогично, гибели хищников будут препятствовать их встречи с жертвами, что также характеризуется произведением xu . Тогда, динамическая модель, учитывающая изменения численностей жертв и хищников, принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \gamma xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y + \delta xy,$$

где γ, δ – коэффициенты, характеризующие интенсивность взаимодействия жертв и хищников, $\gamma > 0$, $\delta > 0$, причём коэффициент γ не обязательно равен δ . Соответствующая этому описанию структура модели приведена на рис. 2.20, *а*. Нелинейная отрицательная обратная связь через коэффициент γ сдерживает рост особей x , а положительная обратная связь через коэффициент δ направлена на поддержание численности особей y . Пред-

ставленная нелинейная модель Вольтерры имеет два состояния равновесия:

$$x_1^p = 0, y_1^p = 0; x_2^p = \beta/\delta, y_2^p = \alpha/\gamma.$$

Линеаризованная в окрестности состояния равновесия модель может быть записана в виде системы уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = k_{11}x + k_{12}y,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_{21}x + k_{22}y,$$

где $k_{11} = \alpha - \gamma y^p$, $k_{12} = -\gamma x^p$, $k_{21} = \delta y^p$, $k_{22} = \delta x^p - \beta$. Структура линеаризованной модели приведена на рис. 2.20, б.

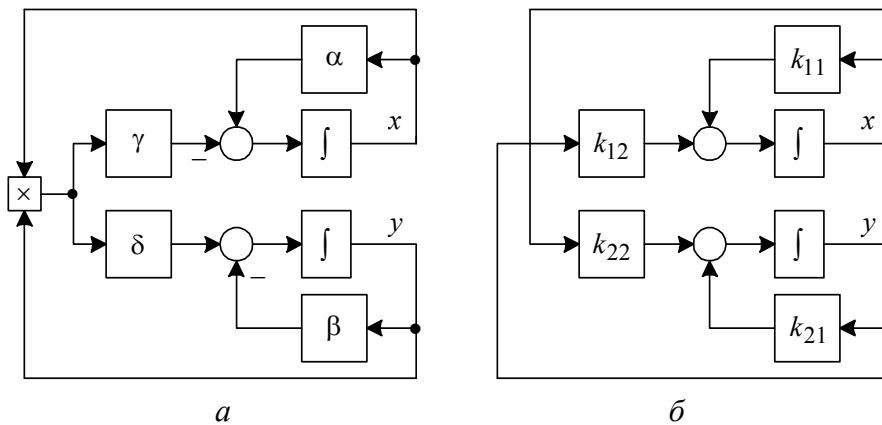


Рис. 2.20. Структуры модели «хищник-жертва»: а – нелинейная; б – линеаризованная

Характеристический полином линеаризованной системы

$$D(s) = s^2 - (k_{11} + k_{22})s + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21},$$

причём $k_{11} + k_{22} = \alpha - \gamma y^p + \delta x^p - \beta$, $k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = \alpha\delta x^p + \beta\gamma y^p - \alpha\beta$.

1. Состояние равновесия $x_1^p = 0$, $y_1^p = 0$. Корни характеристического уравнения $D(s) = 0$ вещественные и равны:

$$s_{1,2} = \frac{\alpha - \beta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}.$$

Состоянию равновесия соответствует особая точка типа «седло». Фазовые траектории вблизи этой особой точки являются гиперболами. При этом взаимные связи $k_{12} = k_{21} = 0$ и структура линеаризованной модели распа-

дается на две «независимые» части: устойчивую с отрицательной и неустойчивую с положительной обратными связями.

2. Состояние равновесия $x_2^p = \beta/\delta$, $y_2^p = \alpha/\gamma$. Корни характеристического уравнения мнимые и равны

$$s_{1,2} = \pm j\sqrt{\alpha\beta}.$$

Состоянию равновесия соответствует особая точка типа «центр». Вблизи этой особой точки фазовые траектории имеют вид замкнутых траекторий – эллипсов. При этом собственные обратные связи $k_{11} = k_{22} = 0$, так что структура линеаризованной модели представляет собой замкнутый отрицательной обратной связью контур, включающий два интегратора.

Динамика численности популяций исследуемой модели «хищник-жертва» в виде фазового портрета приведена на рис. 2.21.

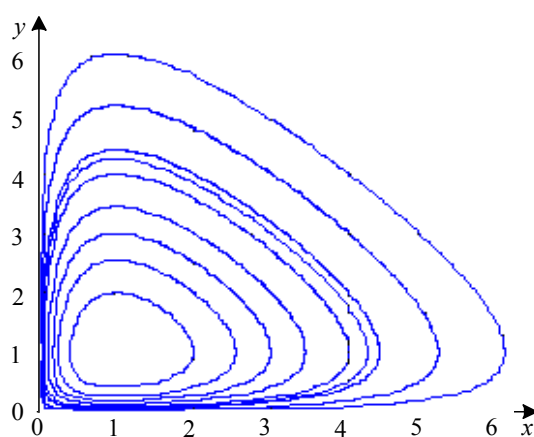
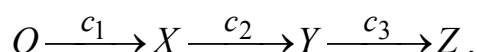


Рис. 2.21. Фазовый портрет модели «хищник-жертва»

Следует отметить, что рассматриваемая модель (точнее, её положение равновесия) не является асимптотически устойчивой по А.М. Ляпунову: при скачкообразном изменении числа особей одной из популяций (например, вследствие миграции хищников, деятельности человека или иных причин, не учтённых в модели), колебания изменят свой характер. При этом система перейдёт с одной замкнутой фазовой траектории на другую. Особая точка типа «центр» не грубая по определению А.А. Андронова и Л.С. Понтрягина.

Пример 2.8. Модель химической кинетики (модель Лотки).

В 1910 году А.Д. Лотка (Lotka) исследовал последовательность химических реакций вида



Эта запись означает следующее. Молекулы вещества O , имеющиеся в избытке, в результате химической реакции с постоянной скоростью c_1 превращаются в молекулы вещества X . Затем вещество X переходит в вещество Y со скоростью c_2 тем большей, чем больше концентрация веществ X и Y . После этого вещество Y необратимо распадается на Z . При анализе рассматриваемых химических реакций пользуются следующим свойством: скорость химической реакции при постоянной температуре пропорциональна произведению концентраций веществ, участвующих в данный момент в реакции.

Если обозначить концентрации веществ X , Y , Z как x , y , z , то получаются следующие кинетические уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = c_1 - c_2xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = c_2xy - c_3y,$$

$$\frac{dz}{dt} = c_3y.$$

Первые два уравнения не зависят от переменной z и поэтому могут исследоваться независимо от третьего уравнения.

При $y=0$ установление равновесия возможно лишь при $c_1=0$ (что непосредственно следует из первого уравнения), но это условие противоречит исходной ситуации протекания реакции. Следовательно, возможно только единственное состояние равновесия, когда

$$x^p = \frac{c_3}{c_2}, \quad y^p = \frac{c_1}{c_3}.$$

Линеаризованная модель (без учёта третьего уравнения) в точке равновесия определяется системой уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = k_{11}x + k_{12}y,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_{21}x + k_{22}y,$$

где $k_{11} = -c_2y^p$, $k_{12} = -c_2x^p$, $k_{21} = c_2y^p$, $k_{22} = c_2x^p - c_3$.

Характеристический полином линеаризованной системы

$$D(s) = s^2 - (k_{11} + k_{22})s + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21},$$

причём $k_{11} + k_{22} = -\frac{c_1 c_2}{c_3}$, $k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21} = c_1 c_2$.

Характеристический полином, выраженный через скорости реакций,

$$D(s) = s^2 + \frac{c_1 c_2}{c_3} s + c_1 c_2.$$

Корни характеристического уравнения $D(s) = 0$:

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{c_1 c_2}{c_3} \pm \sqrt{\left(\frac{c_1 c_2}{c_3} \right)^2 - 4 c_1 c_2} \right).$$

Анализ корней приводит к следующим возможным ситуациям: если подкоренное выражение отрицательное, то корни комплексно-сопряжённые и, следовательно, особая точка – устойчивый «фокус»; если подкоренное выражение положительное, то корни действительные отрицательные, т. е. особая точка – устойчивый «узел». Для уточнения направленности фазовых траекторий следует учесть, что особый случай $y = 0$ соответствует положительной производной \dot{x} , т. е. положительное направление оси x совпадает с направлением фазовых траекторий. Фазовый портрет модели химической кинетики представлен на рис. 2.22.

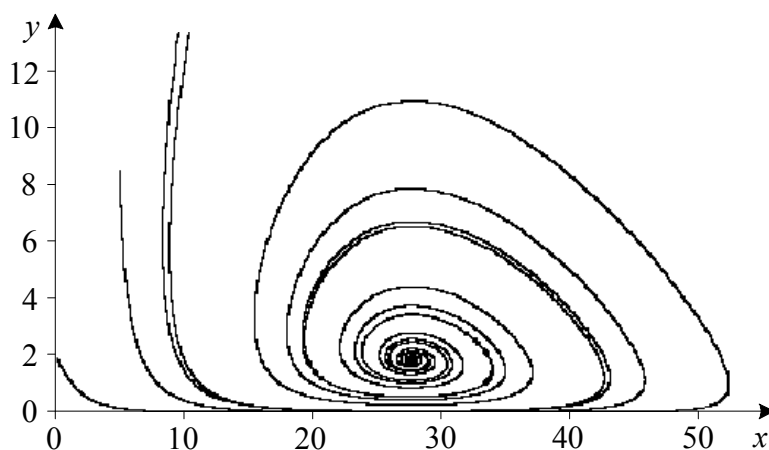
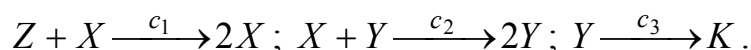


Рис. 2.22. Фазовый портрет модели химической кинетики

Позднее в 1925 году Лоткой была рассмотрена ещё одна цепь химических реакций:



Вещество Z имеется в избытке, т. е. его уменьшением в результате реакции можно пренебречь. Все реакции необратимы. Последнюю реакцию самораспада можно не учитывать. При обозначениях концентраций ве-

ществ Z, X, Y как z, x, y , такой модели будет отвечать следующая система ДУ:

$$\frac{dx}{dt} = c_1 zx - c_2 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = c_2 xy - c_3 y.$$

Модель имеет две особые точки:
первая типа «седло»

$$x_1^p = 0, y_1^p = 0;$$

вторая типа «центр»

$$x_2^p = \frac{c_3}{c_2}, y_2^p = \frac{c_1 z}{c_2}.$$

Концентрации реагирующих веществ испытывают периодические колебания во времени.

Можно заметить, что приведённая выше модель Лотки отличается от модели Вольтерры только обозначениями. В связи с этим модели, описывающие подобные химические и биологические процессы, называют *моделями Вольтерры–Лотки*.

Контрольные вопросы

1. Объясните принцип относительности Галилея.
2. Каким преобразованиям подчиняются инерциальные системы?
3. В каких случаях уравнения механики считаются инвариантными к преобразованиям систем отсчёта?
4. Запишите уравнения Лагранжа консервативной системы через лагранжиан.
5. В чём состоит вариационный принцип Гамильтона?
6. Что представляет собой действие по Гамильтону?
7. Запишите уравнение Лагранжа для диссипативной системы.
8. От каких величин зависят диссипативная и гироскопическая силы?
9. Что представляет собой внешнее трение?
10. Изобразите график характеристики сухого трения.
11. Что физически представляет собой гамильтониан и в чём состоит его отличие от лагранжиана?
12. Запишите канонические уравнения Гамильтона.
13. Почему гамильтониан консервативной системы является её первым интегралом?

14. В чём заключается принцип сжатия-расширения фазового пространства?
15. Какой геометрический смысл в фазовом пространстве имеет производная Ли?
16. В чём заключается принцип балансовых соотношений? Приведите формулу балансового соотношения.
17. Покажите, что модель товарного обмена допускает особые точки только типа «устойчивый узел».
18. Что характеризуют контактные составляющие модели «хищник-жертва»?
19. Какими особыми точками характеризуется модель «хищник-жертва»?

Глава 3. МЕТОДЫ РАСЧЁТА СТАТИЧЕСКИХ (РАВНОВЕСНЫХ) РЕЖИМОВ

3.1. Общие сведения о численных методах моделирования

Методы исследования систем по ММ можно разделить на *аналитические* и *алгоритмические*. Однако и при использовании аналитических методов для доведения результата до числа часто требуется применение соответствующих алгоритмов, реализуемых на ЭВМ. Аналитические методы, которые, в частности, могут основываться на символьных преобразованиях на компьютере, более удобны для анализа, но их применение ограничено сравнительно простыми моделями и узким кругом задач.

Поведение (динамика) многих нелинейных ММ СУ, характеризующихся сложной структурой, высоким порядком ДУ, разнообразием условий функционирования, может быть исследовано только на ЭВМ численными методами. Численное решение возможно и для тех систем, для которых аналитического решения не существует, поэтому численные методы относят к универсальным. В отличие от аналитических методов, которые позволяют получать явную зависимость процесса управления от тех или иных факторов (например, воздействий внешней среды, начальных условий, параметров звеньев), при использовании численных методов для получения такой зависимости требуется многократное решение задачи при изменяющихся факторах.

Численное моделирование (численный или вычислительный эксперимент) представляет собой исследование реальной системы по ММ с помощью ЭВМ. Согласно определению, данному академиком А. А. Самарским [18], «под численным методом понимается такое представление математической модели (обычно в дискретном виде), которое доступно для реализации на ЭВМ». Например, если ММ СУ представлена в форме ДУ,

то численным методом является аппроксимирующее его разностное уравнение совместно с алгоритмом, позволяющим отыскать решение этого разностного уравнения. Поэтому численный метод всегда *приближённый*. В результате реализации численного метода на ЭВМ получается набор (таблица) чисел.

Численные методы анализа поведения систем применимы только для корректно поставленных математических задач, что, вообще говоря, ограничивает их использование в математическом моделировании.

Алгоритмы, реализующие численные методы, должны обладать свойствами *численной сходимости и устойчивости*.

Алгоритм считается сходящимся, если при последовательном уменьшении шага получается всё более точный ответ.

Алгоритм считается устойчивым, если небольшая ошибка на любой стадии моделирования приводит к небольшой ошибке в решении.

При разработке конкретных алгоритмов, реализующих методы численного моделирования, в некоторых случаях желательно учитывать следующие свойства.

1. *Консервативность* – способность алгоритма отвечать физическим законам сохранения (массы вещества, количества движения, энергии, числа частиц и т. п.), присущим реальной системе. Законы сохранения могут использоваться при построении разностных схем, в которых сохраняются некоторые суммы моделируемых физических величин. Если не требовать выполнения законов сохранения, то ошибки аппроксимации и округления могут неограниченно расти, приводя к непредсказуемому поведению даже весьма простых моделей.

2. *Причинность* – свойство алгоритма правильно отражать причинно-следственные отношения компонентов изучаемой реальной системы.

3. *Положительность* – возможность воспроизведения алгоритмом строго неотрицательных процессов.

4. *Обратимость* – возможность реализации в консервативных системах свойства инвариантности процессов относительно преобразования вида $t \rightarrow -t$. Реализация условия обратимости наталкивается на определённые трудности, связанные, прежде всего, с нелинейными свойствами модели.

3.2. Постановка задачи и методы расчёта статических режимов

Практическая задача расчёта статических режимов (статики) – нахождение равновесных состояний СУ – часто связана с определением *статических характеристик* модели системы (зависимостей выходных переменных от входных), которые могут быть представлены как в явной координатной форме

$$y_l = \varphi_l(f_1, \dots, f_m), \quad l = \overline{1, r},$$

где y_l – l -й выход, f_j – j -й вход или в явной векторной форме

$$\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{f}),$$

так и в неявной векторной форме

$$\Phi(\mathbf{f}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

При рассмотрении динамических режимов системы нередко приходится решать *задачу балансировки*. Эта задача заключается в определении такого вектора переменных, который можно принять в качестве начального для последующих расчётов динамических режимов. В этом случае также применяются методы расчёта статических режимов или, короче, методы статических расчётов.

В общем случае целью статического расчёта системы по заданной ММ является определение неизвестных переменных выходов $y_l^p, l = \overline{1, r}$ и внутренних переменных $x_i^p, i = \overline{1, n}$, причём $\forall t \geq t_p: y_l^p = y_l(t) = \text{const}, x_i^p = x_i(t) = \text{const}$, t_p – момент установления равновесного состояния (состояния покоя) системы при различных, но постоянных во времени значениях входов (воздействий), т. е. $\forall t \geq t_0, t_0 \leq t_p: f_j = f_j(t) = \text{const}, j = \overline{1, m}$, где t_0 – начальный момент времени.

С учётом скрытой (немоделируемой) динамики системы обычно принимается $t_0 < t_p$.

Для линейных непрерывных моделей СУ теоретически $t_p \rightarrow \infty$.

Решение задачи статики может быть как *однозначным*, так и *неоднозначным* в зависимости от того, является ли модель СУ *монотабильной* (с одним состоянием равновесия) или *полистабильной* (с несколькими состояниями равновесия).

К числу основных проблем, возникающих при статическом расчёте СУ с использованием ЭВМ, относят следующие.

1. Обеспечение высокой *алгоритмической надёжности*, т. е. сходимости к состоянию равновесия в возможно более широкой области начальных приближений при возможно большем разнообразии функций φ_l и в возможно большем интервале численных значений параметров, входящих в эти функции.

2. Наряду с требованием алгоритмической надёжности, задачу статики необходимо решать с *минимальными временными вычислительными*

затратами. Поэтому встаёт вопрос об обеспечении компромисса между алгоритмической надёжностью и вычислительными затратами.

Методы расчёта статических режимов, как отмечалось ранее, разделяются на аналитические и численные. Аналитические методы расчёта статики нелинейных моделей имеют на практике весьма ограниченное применение. В частности, если статические характеристики нелинейных элементов в СУ описываются полиномами, то задачу определения состояний равновесия иногда удаётся свести к нахождению корней алгебраического уравнения. Однако, как было показано в работах Э. Галуа (Galois), алгебраические уравнения степеней выше четвёртой не разрешимы в радикалах.

Историческая справка [19]. Научное наследие Галуа составляют теория конечных полей (поля Галуа), исследования в области теории групп.

Эварист Галуа родился 25 октября 1811 году в местечке Бур-ла-Рен близ Парижа. Его отец должен был стать мэром, его мать происходила из семьи известных юристов. Несмотря на своё происхождение, Галуа прожил примечательную жизнь, полную неудач.

До 12 лет обучением сына занималась мать. В 1823 году он поступает в Парижский классический лицей Людовика Великого. Однако учёба ему быстро наскучила, успеваемость ухудшилась. В возрасте 14 лет Галуа увлёкся математикой: вначале по учебнику Лежандра, а позднее, самостоятельно, осваивал научные труды Лежандра (Legendre) и Абеля (Abel). Увлечение математикой сопровождалось посредственной успеваемостью в школе.

В 16 лет Галуа предпринял попытку сдать вступительные экзамены в Политехническую школу (ведущее математическое учебное заведение Франции того времени), которая завершилась неудачей. Историки полагают, что придирчивые экзаменаторы не сумели распознать в нём гения, а ему самому не хватало терпения для разъяснения своих идей. Тем не менее, он продолжал заниматься математикой и в 1829 году опубликовал свою первую научную статью по непрерывным дробям.

Через некоторое время Галуа послал написанную им важную статью французскому математику О. Коши для представления её во Французскую академию наук. Однако Коши умудрился забыть о ней и потерять резюме. Через некоторое время Галуа снова пытался сдать вступительные экзамены в Политехническую школу. Но и эта попытка завершилась провалом. Чувствуя, что ему не хватает терпения, он запустил тряпкой для вытирания доски в одного из экзаменаторов. В экзаменатора он попал, а в школу нет.

Вскоре из-за политического скандала отец Галуа покончил жизнь самоубийством. В это же время в возрасте 19 лет он отправляет статью по алгебраическим функциям в Академию наук для участия в конкурсе по математике. Секретарь академии, известный математик Ж. Фурье, взял статью домой и ... потерял её.

После революции 1830 году Галуа стал проявлять политическую активность. За участие в революционной деятельности он был арестован, но суд признал его невиновным. В 1831 году его снова арестовали, обвинив в незаконном ношении военной формы. Галуа приговаривается к нескольким месяцам тюрьмы. Почти в то же время его третья научная статья, посланная им в академию наук, была оценена С. Пуассоном как непонятная.

Галуа был освобождён из тюрьмы в 1832 году и почти сразу был вызван на дуэль. Обстоятельства этого вызова не ясны. Накануне дуэли он всю ночь записывал разработанные им математические идеи. Свои записи он передал своему другу Огюсту Шевалье. Они были опубликованы через 14 лет под редакцией Ж. Лиувилля.

Утром 30 мая 1832 году на дуэли Галуа был ранен в живот и через несколько часов умер в возрасте 21 года. Накануне дуэли он оставил друзьям предсмертное письмо, примерно следующего содержания.

«Я был вызван на дуэль двумя патриотами – отказаться было невозможно. Я прошу прощения, что не посоветовался ни с кем из вас. Но мои противники взяли с меня слово чести, что никто из патриотов не узнает об этом. Ваша задача проста: засвидетельствовать, что я дрался против воли после того, как перепробовал все средства уладить конфликт ... Сохраните память обо мне, так как судьба не отвела мне достаточного срока, чтобы моя страна узнала моё имя. Я умираю вашим другом ...».

Э. Галуа был похоронен в безымянной могиле.

Метод установления. Этот метод часто называют методом «расчёта статики через динамику». Математическая модель статики для расчёта равновесного режима специально не формируется, а используется исходная динамическая модель СУ, например вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}), \quad \mathbf{x}(0).$$

Метод основан на численном интегрировании системы ДУ при неизменном во времени векторе входов \mathbf{f} и заданном векторе начальных состояний $\mathbf{x}(0)$ переменных системы. Интегрирование производится в течение достаточно большого промежутка времени $t_{\text{н}}$, что должно привести к равновесному (стационарному, неподвижному) решению, для которого $\dot{\mathbf{x}}(t_{\text{н}}) \approx \mathbf{0}$. Это решение и будет *приближённым решением задачи расчёта статики*.

Критерием окончания расчёта (останова) на k -м шаге интегрирования является выполнение условия

$$\|\Delta \mathbf{x}_{k+1}\| = \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| < \delta,$$

где $\|\cdot\|$ – символ нормы вектора, δ – заданная погрешность, при которой переходный процесс в системе затухает и переменные принимают почти

постоянные значения, соответствующие статическому режиму. Поскольку точность расчёта переходного процесса в данном случае не имеет значения, для ускорения вычислений шаг интегрирования

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k = h$$

следует выбирать максимально большим, при котором ещё сохраняется устойчивость расчёта переходного процесса. Для этого целесообразно применять, например, А-устойчивый неявный метод Эйлера (см. 4.1.10).

Норма вектора \mathbf{x} – это вещественное неотрицательное число, обозначаемое символом $\|\mathbf{x}\|$ и удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$\|\mathbf{x}\| > 0, \text{ если } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}; \|\mathbf{0}\| = 0 \text{ (невырожденность);}$$

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\| \text{ для любого числа } \alpha \text{ (однородность);}$$

$$\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\| \leq \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_2\| \text{ (неравенство треугольника).}$$

Задать норму можно несколькими способами. При реализации численных методов выбор конкретной нормы имеет важное значение. Примеры наиболее употребительных норм вектора в конечномерном вещественном векторном пространстве:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \text{ – октаэдральная норма; } \|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}^T} \text{ – сферическая (евклидова, шуровская) норма; } \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i| \text{ – кубическая норма.}$$

Метод установления можно рассматривать как метод продолжения по неограниченному параметру t с использованием движущейся области сходимости (см. 3.4).

Рассматриваемый метод приводит к нужным результатам только в том случае, если исходная СУ является асимптотически устойчивой (точнее, состояние равновесия является асимптотически устойчивым в области адекватности модели). Для полистабильных систем получение множества стационарных точек возможно повторением процесса моделирования при различных начальных условиях $\mathbf{x}(0)$.

Основные преимущества метода установления перед другими численными методами заключаются в следующем.

1. Реализация метода установления в виде алгоритма расчёта статического режима мало отличается, за исключением выбора шага интегрирования и критерия окончания расчёта, от алгоритма расчёта динамического режима (переходного процесса). Другими словами, сохраняется алгоритмическое единообразие.

2. Метод установления для многих СУ допускает достаточно произвольный выбор начальных условий $\mathbf{x}(0)$ внутри области притяжения состояния равновесия, поскольку, в конечном итоге, переходный процесс, независимо от $\mathbf{x}(0)$, асимптотически приближается к одним и тем же рав-

новесным значениям. Исключение составляют полистабильные нелинейные СУ, равновесные состояния которых зависят от выбора $x(0)$.

3. Метод установления позволяет без дополнительных преобразований исходной модели определять начальные значения переменных для расчёта переходных режимов из устойчивых состояний равновесия.

4. Если заранее известен вектор равновесия для какого-либо устойчивого режима системы, например для номинального (расчётного), то легко проверяется правильность введённой в ЭВМ модели.

К недостаткам метода следует отнести: 1) завышенное время расчёта статического режима, когда начальное состояние «далеко» расположено от равновесного состояния; 2) невозможность определения неустойчивого равновесного состояния.

Более экономичными по временным затратам являются подходы, основанные на рассмотрении *статической модели*, получаемой из исходной динамической в результате «обнуления» производных [2].

Итерационные методы. Численный метод, в котором производится последовательное, шаг за шагом, уточнение первоначального «грубого» приближения, принято называть *итерационным методом*, а каждый шаг в таком методе – *итерацией*.

Пусть модель статики СУ представлена системой нелинейных конечных (т. е. алгебраических и трансцендентных) уравнений (СНКУ) в неявной координатной форме записи:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1,\dots,x_n) &=0, \\ \text{.....} \\ \varphi_n(x_1,\dots,x_n) &=0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

где x_1, \dots, x_n – неизвестные переменные. Воздействия f_j принимаются как постоянные параметры и в явном виде не задаются. Система уравнений (3.1) является *определённой*, т. е. число неизвестных переменных равно числу уравнений.

Так, например, если система (3.1) линейная, то при её переопределённости (число уравнений превышает число неизвестных) или недоопределённости (число неизвестных превышает число уравнений) будут нарушены условия корректности задачи по Адамару (см. 1.3).

Векторная форма записи имеет вид

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

При численном решении нелинейной системы (3.1) или (3.2) следует учитывать, что не существует математических методов, позволяющих в общем случае выяснить вопрос о существовании и количестве решений. Нахождение решения можно рассматривать как поиск в n -мерном вектор-

ном пространстве \mathbf{R}^n множества точек, общих для n поверхностей, каждая из которых определяется уравнением системы (3.1).

Смысл итерационных методов состоит в следующем.

Задаётся *начальное приближение (начальный вектор)* \mathbf{x}_0 , начиная с которого осуществляется последовательное приближение к решению с помощью *итерационной процедуры (дискретного отображения)* вида

$$\mathbf{x}_{k+1} = S(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

где k – номер итерации (приближения), $S(\cdot)$ – *итерационный оператор*. Последовательность, полученных на каждом шаге векторов $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$, должна сходиться к вектору предельных значений \mathbf{x}^* , который удовлетворяет тождественному преобразованию

$$\mathbf{x}^* \equiv S(\mathbf{x}^*),$$

где \mathbf{x}^* – *неподвижная (стационарная) точка* в пространстве \mathbf{R}^n , отвечающая равновесному состоянию системы. Итерационный оператор $S(\cdot)$ определяется таким образом, чтобы вектор \mathbf{x}^* совпадал с решением системы (3.2).

Итерационный процесс (3.3) считается завершённым после того, как текущая точка \mathbf{x}_k окажется в заранее задаваемой δ -окрестности стационарной точки \mathbf{x}^* :

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\| < \delta.$$

Однако непосредственно воспользоваться этим неравенством нельзя, так как вектор \mathbf{x}^* неизвестен. Поэтому его заменяют условием

$$\|\Delta \mathbf{x}_k\| = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| < \delta, \quad (3.4)$$

которое позволяет достичь малой δ -окрестности стационарной точки, если скорость сходимости процесса практически приемлема. Критерий (3.4) является *критерием окончания расчёта по норме поправок*. В формуле могут использоваться не только абсолютные, но и относительные величины $\Delta x_i / x_i$.

Для контроля сходимости наряду с (3.4) применяется и другой критерий

$$\|\Phi(\mathbf{x}_k)\| < \varepsilon, \quad (3.5)$$

который называется *критерием окончания расчёта по норме невязок*. В частности (3.5) может иметь вид

$$\|\Phi(\mathbf{x}_k)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i^2(\mathbf{x}_k)},$$

где c_i – специально подобранные весовые коэффициенты, учитывающие особенности исследуемой модели.

Если $\|\Delta \mathbf{x}_k\| = 0$, то и $\|\Phi(\mathbf{x}_k)\| = 0$, однако при $\|\Phi(\mathbf{x}_k)\| < \varepsilon$ может оказаться, что $\|\Delta \mathbf{x}_k\| \gg \varepsilon$, и наоборот. Поэтому целесообразно для контроля сходимости итерационного процесса потребовать выполнения *совместного критерия окончания расчёта*

$$\max(\|\Delta \mathbf{x}_k\|, \|\Phi(\mathbf{x}_k)\|) < \varepsilon.$$

При плохой обусловленности матрицы $\Phi'(\mathbf{x}) = \partial \Phi(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$ вблизи точки равновесия критерий сходимости при слишком малых допустимых ε может не выполняться из-за «флуктуации» ошибок округления, хотя итерационный метод и не расходится. В этом случае для остановки вычислений можно рекомендовать *правило Гарвика*, состоящее в том, что выбирается не слишком малое, но приемлемое для исследуемой модели значение ε , при котором ещё «срабатывает» совместный критерий сходимости в условиях «флуктуации» норм невязок или поправок, после чего итерации продолжают до тех пор, пока уменьшается хотя бы какая-нибудь из норм.

Матрица \mathbf{A} называется плохо обусловленной, если её *число обусловленности* $\text{cond}(\mathbf{A}) = \text{cond}(\mathbf{A}^{-1}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| = \mu_{\max} / \mu_{\min}$, где μ_{\max}, μ_{\min} – максимальное и минимальное сингулярные числа, относительно велико (обычно более 10^4).

Таким образом, при расчёте статических режимов с использованием модели, представленной СНКУ, возникают следующие задачи:

- определение итерационного оператора $S(\cdot)$;
- определение вектора начального приближения \mathbf{x}_0 к состоянию равновесия;
- анализ сходимости последовательности $\mathbf{x}_k, k = 0, 1, 2, \dots$;
- оценка скорости сходимости при реализации метода.

Следует обратить внимание на то, что если с помощью какого-либо итерационного метода удалось найти одно или несколько равновесных состояний (для различных значений векторов начальных приближений \mathbf{x}_0), то это ещё не гарантирует, что метод позволит определить все возможные состояния равновесия.

Практический опыт показывает, что результаты теоретического анализа сходимости итерационных алгоритмов (в частности, нелинейных) могут не отражать их реальную эффективность. Удачный алгоритм в условиях конкретной задачи зачастую сходится лучше, чем может быть предска-

зано теорией. Примером является метод Ньютона (см. 3.3), который нередко сходится достаточно быстро, хотя доказательства его сходимости получены только при дополнительных условиях, налагаемых на СНКУ, и хорошем начальном приближении.

Для многих одношаговых итерационных методов, когда нахождение \mathbf{x}_{k+1} по известному вектору \mathbf{x}_k производится за один шаг, т. е. в пределах одной итерации отсутствуют дополнительные шаги вычислений, поиск решения (3.2) осуществляется по формуле

$$\mathbf{B}_{k+1} \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\tau_{k+1}} + \Phi(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.6) \quad (3.6)$$

где k – номер шага (итерации); \mathbf{x}_0 – заданный вектор начального приближения; $\mathbf{x}_k = (x_{1k} \dots x_{nk})^T$ – вектор приближения на k -м шаге; τ_{k+1} – числовой параметр; \mathbf{B}_{k+1} – числовая матрица размера $n \times n$, имеющая обратную. Формула (3.6) является *канонической (единообразной) формой записи итерационного метода* [18].

Для нахождения \mathbf{x}_{k+1} по известному приближению \mathbf{x}_k из уравнения (3.6) необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{B}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_k),$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{B}_{k+1} \mathbf{x}_k - \tau_{k+1} \Phi(\mathbf{x}_k)$.

Итерационный метод (3.6) называется *явным*, если для всех значений $k = 0, 1, 2, \dots$ матрица $\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{E}$ (\mathbf{E} – единичная матрица) и *неявным* – в противном случае. Итерационный метод (3.6) называется *стационарным*, если \mathbf{B} и τ не зависят от номера итерации k .

3.3. Примеры итерационных методов

Метод релаксации (метод простой итерации). В данном методе полагается $\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{E}$, $\tau_{k+1} = \tau$, следовательно, это *явный стационарный итерационный метод*, который можно записать как

$$\mathbf{x}_{k+1} = S(\mathbf{x}_k),$$

где итерационный оператор принимает вид $S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \tau \Phi(\mathbf{x})$.

Метод сходится к решению \mathbf{x}^* , если $\left\| \frac{\partial S(\mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} \right\| < 1$, причём *сходимость линейная*. В данном случае $\partial S(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} = \mathbf{E} - \tau \Phi'(\mathbf{x})$ и

$$\Phi'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Здесь обозначено $\|\cdot\|$ как символ нормы матрицы, подчинённой норме вектора $\|\mathbf{x}\|$. Для квадратной матрицы \mathbf{A} норма определяется как

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|},$$

причём норма вектора \mathbf{x} устанавливается соотношением $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$.

Пусть последовательность итераций $\{x_k\}$ сходится к x^* и $\varepsilon_k = x^* - x_k$. Тогда, если существуют такие положительные константы $K \neq 0$ и $p > 0$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|^p} = K,$$

то говорят, что последовательность решений сходится к x^* с *порядком сходимости* p . Число K называют *постоянной асимптотической ошибкой*.

Если $p = 1$, то сходимость метода *линейная*, если $p = 2$ – *квадратичная*. Для некоторых итерационных методов порядок сходимости может не являться целым числом.

В случае скалярного уравнения (одного уравнения с одной переменной) метод имеет простую геометрическую интерпретацию (рис. 3.1).

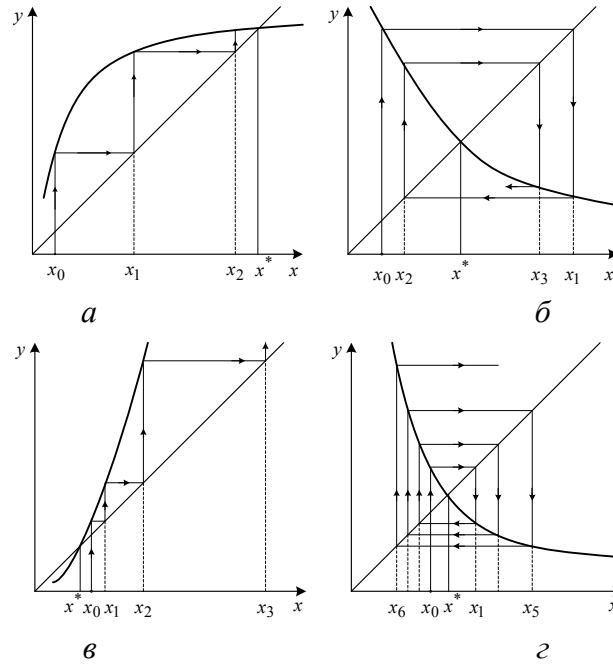


Рис. 3.1. Геометрическая интерпретация метода релаксации:

$a - 0 < \partial S(x^*)/\partial x < 1$; $б - -1 < \partial S(x^*)/\partial x < 0$; $в - \partial S(x^*)/\partial x > 1$; $г - \partial S(x^*)/\partial x < -1$

Пусть рассматривается плоскость координат (x, y) , причём $y = S(x)$. На плоскости строятся графики $y = S(x)$ и $y = x$. Точки пересечения этих графиков соответствуют искомым неподвижным точкам x^* – равновесным состояниям. На рис. 3.1 представлена процедура последовательного отображения $y = S(x)$ с использованием лестницы Ламерея.

В том случае, если итерационный процесс сходится к x^* , то неподвижная точка называется *точкой притяжения*, если процесс расходится, то неподвижная точка называется *точкой отталкивания*.

Монотонный (рис. 3.1, *а, в*) либо колебательный (рис. 3.1, *б, г*) характер сходимости или расходимости процесса следует из рассмотрения соотношения

$$x_{k+1} - x^* = S(x_k) - S(x^*) \approx \frac{\partial S(x^*)}{\partial x} (x_k - x^*).$$

Пример 3.1. На рис. 3.2, *а* представлена структурная схема СУ с нелинейным элементом в обратной связи, характеристика которого имеет вид

$$z = \xi(y) = y^3 - 3y^2 + 2,75y.$$

Передаточные функции линейных звеньев: $W_1(s) = 1/(2s + 1)$, $W_2(s) = 1/s$. Воздействие $f = 0,75$. Требуется определить состояния равновесия.

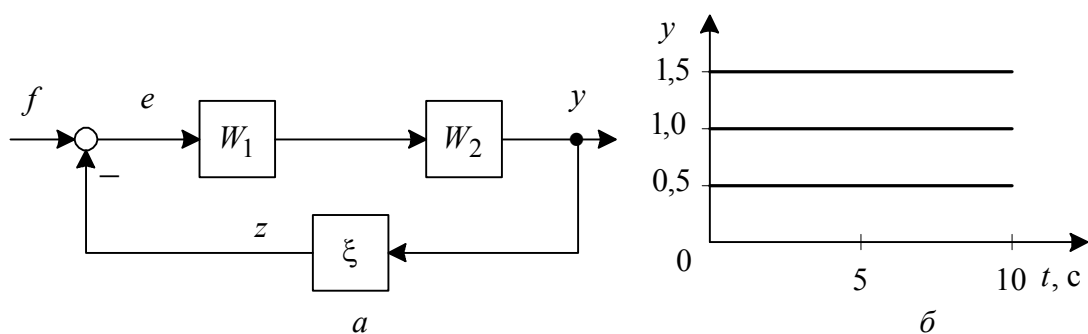


Рис. 3.2. Исследование статических режимов:
 a – структурная схема; b – процессы на выходе

Поскольку в системе присутствует интегратор, то в равновесном состоянии значение ошибки e должно быть равно нулю. Следовательно

$$z = f = 0,75 = \xi(y).$$

При подстановке нелинейности получается кубическое уравнение

$$\varphi(y) = y^3 - 3y^2 + 2,75y - 0,75 = 0,$$

вещественные решения которого соответствуют состояниям равновесия.

В данном случае решения уравнения могут быть получены аналитически:

$$y_1 = 0,5; \quad y_2 = 1,0; \quad y_3 = 1,5.$$

Если задавать на выходе интегратора начальные условия, соответствующие равновесным состояниям (0,5; 1,0; 1,5), то при численном моделировании значения переменных системы со временем не изменяются (рис. 3.2, b). Эти вычислительные эксперименты служат одним из подтверждений того, что модель введена в ЭВМ правильно. Следует заметить, что поскольку равновесное состояние $y_2 = 1,0$, как показано ниже, неустойчиво, процесс со временем может разойтись.

Задавая различные начальные значения на интеграторе, например: 0,75; 2,0, можно методом установления убедиться в том, что система приходит в состояния равновесия $y_1 = 0,5$, $y_3 = 1,5$ соответственно (рис. 3.3).

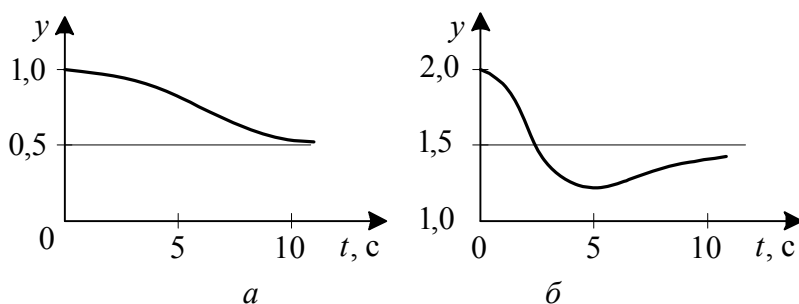


Рис. 3.3. Процессы установления равновесия

Состояние равновесия $y_2 = 1,0$ (это состояние служит границей областей начальных условий, при которых процесс завершается в одном из устойчивых состояний) является неустойчивым, так как коэффициент линеаризации

$$k_{\text{л}} = d\xi(y)/dy|_{y_2=1} = 3y^2 - 6y + 2,75|_{y_2=1} = -0,25.$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы

$$D(s) = 2s^2 + s - 0,25.$$

Поскольку получен неустойчивый характеристический полином, методом установления состояние y_2 не может быть достигнуто.

При использовании численного метода простой итерации оператор преобразования S имеет вид

$$S(y_k) = y_k - \varphi(y_k).$$

Последовательность вычислений при различных начальных значениях y приведена в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Номер итерации k	y_k	$y_{k+1} = S(y_k)$	Номер итерации k	y_k	$y_{k+1} = S(y_k)$
0	0,7500	0,7031	0	2,0000	1,2500
1	0,7031	0,6550	1	1,2500	1,2969
2	0,6550	0,6098	2	1,2969	1,3450
3	0,6098	0,5717	3	1,3450	1,3902
4	0,5717	0,5432	4	1,3902	1,4283
5	0,5432	0,5243	5	1,4283	1,4568
6	0,5243	0,5130	6	1,4568	1,4757
7	0,5130	0,5068	7	1,4757	1,4870
8	0,5068	0,5035	8	1,4870	1,4932
9	0,5035	0,5018	9	1,4932	1,4965
10	0,5018	0,5009	10	1,4965	1,4982

Состояние равновесия y_2 не может быть получено методом простой итерации ни при каких начальных значениях, так как

$$dS(y)/dy|_{y_2=1} = 1 + 0,25 > 1.$$

Метод Пикара (Picard). Этот метод является разновидностью метода простой итерации. Пусть левая часть (3.2) имеет вид

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{G}(\mathbf{x}), \quad (3.7)$$

где \mathbf{A} – матрица размера $n \times n$.

Итерационная процедура определяется следующим образом:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{G}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

а с учётом (3.7) её можно представить в канонической форме

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) + \Phi(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

причём в соответствии с (3.6) получается $\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{A}$, $\tau_{k+1} = 1$.

Действительно,

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{G}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0},$$

откуда

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) + \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) + \Phi(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}.$$

Можно ввести итерационный параметр τ и рассматривать более общий метод

$$\mathbf{A} \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\tau} + \Phi(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Метод Пикара обладает *линейной сходимостью*.

Метод Ньютона. Метод Ньютона является наиболее распространённым в практике расчёта статических режимов СУ.

Пусть k -е приближение $\mathbf{x}_k = (x_{1k} \dots x_{nk})^T$ к равновесному состоянию уже известно. В предположении дифференцируемости по своим аргументам любую функцию $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ из системы (3.1) можно разложить в ряд по формуле Тейлора в точке \mathbf{x}_k :

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x}_k) + \sum_{j=1}^n (x_j - x_{jk}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j} + O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|),$$

где $O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|)$ – сумма величин высшего порядка малости по сравнению с нормой $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|$. Пренебрегая величинами второго и выше порядков малости, система уравнений (3.1) заменяется на систему

$$\sum_{j=1}^n (x_j - x_{jk}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j} + \varphi_i(\mathbf{x}_k) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.8)$$

Полученная система уравнений (3.8) относительно приращений $x_j - x_{jk}$ ($j = \overline{1, n}$) линейна.

Далее, решение $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)^T$ системы (3.8) можно принять за следующее $(k + 1)$ -е приближение, которое обозначается как

$$\mathbf{x}_{k+1} = (x_{1\ k+1} \dots x_{n\ k+1})^T.$$

Тогда окончательно итерационный метод Ньютона для (3.1) определяется системой уравнений

$$\sum_{j=1}^n (x_{j\ k+1} - x_{jk}) \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j} + \varphi_i(\mathbf{x}_k) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \text{ т} \quad (3.9)$$

из которой последовательно, начиная с заданного $\mathbf{x}_0 = (x_{10} \dots x_{n0})^T$, находятся векторы \mathbf{x}_k , $k = 1, 2, \dots$.

Итерационную процедуру (3.9) можно записать в векторной форме

$$\Phi'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) + \Phi(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.10)$$

где $\Phi'(\mathbf{x}_k) = \partial \Phi(\mathbf{x}_k) / \partial \mathbf{x}$ – матрица Якоби.

Итерационный оператор $S(\cdot)$ приобретает вид

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - [\Phi'(\mathbf{x})]^{-1} \Phi(\mathbf{x}).$$

Формула (3.10) представляется в каноническом виде (3.6), если принять $\mathbf{B}_{k+1} = \Phi'(\mathbf{x}_k)$, $\tau_{k+1} = 1$. Для реализации метода необходимо существование обратных матриц $[\Phi'(\mathbf{x}_k)]^{-1}$.

Метод характеризуется *квадратичной сходимостью*, если начальное приближение выбрано достаточно близко к равновесному состоянию.

Для скалярного уравнения $\varphi(x) = 0$ метод Ньютона имеет простую и наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 3.4, а). Расчётная формула записывается в виде

$$x_{k+1} = S(x_k) = x_k - [\varphi'(x_k)]^{-1} \varphi(x_k),$$

причём $\varphi'(x_k) \neq 0$. Для получения x_{k+1} необходимо найти абсциссу точки пересечения с осью x касательной кривой $y = \varphi(x)$ в точке $(x_k, \varphi(x_k))$.

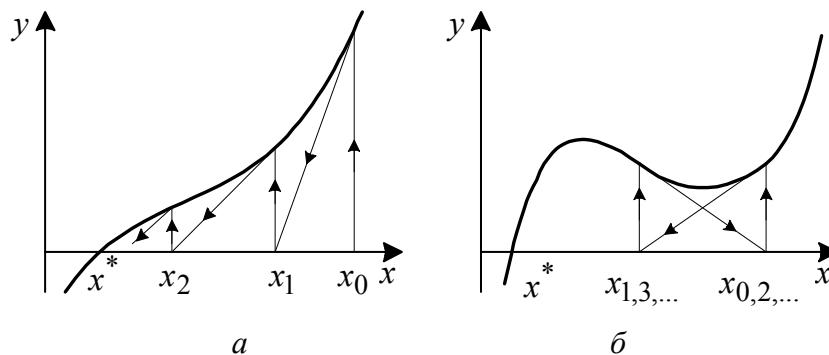


Рис. 3.4. Геометрическая интерпретация метода Ньютона:
а – сходящийся процесс; б – закливание

При использовании метода Ньютона возможна ситуация, когда $\varphi'(x_k) = 0$. В этом случае необходимо проверить, является ли x_k приемлемым приближением к x^* и выполнение $\varphi(x_k) \approx 0$, а также, какова кратность корня x^* ? Пусть функция $\varphi(x)$ и её производные $\varphi'(x), \dots, \varphi^{(q)}(x)$ определены и непрерывны на интервале в окрестности точки $x = x^*$. Говорят, что уравнение $\varphi(x) = 0$ имеет корень порядка q в точке $x = x^*$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x^*) = 0, \quad \varphi'(x^*) = 0, \dots, \varphi^{(q-1)}(x^*) = 0, \quad \varphi^{(q)}(x^*) \neq 0.$$

При $q = 1$ имеет место *простой* корень, при $q > 1$ – *кратный* корень.

В том случае, если уравнение $\varphi(x) = 0$ имеет кратный корень при $x = x^*$, функцию $\varphi(x)$ следует представить как

$$\varphi(x) = (x - x^*)^q \chi(x),$$

где $\chi(x)$ – непрерывная функция, причём $\chi(x^*) \neq 0$. Определение других возможных корней с помощью метода Ньютона уже производится для уравнения $\chi(x) = 0$.

Основной недостаток метода состоит в повторных вычислениях матрицы Якоби $\partial\Phi(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}$. При этом требуется на каждом итерационном шаге производить n вычислений функций $\varphi_i(\cdot)$ и n^2 вычислений функций $\partial\varphi_i(\cdot)/\partial x_j$, т. е. всего выполнить $n^2 + n$ вычислений.

При больших порядках n и сложных векторных функциях $\Phi(\mathbf{x})$ получение аналитических выражений элементов матрицы Якоби может быть затруднено, поэтому обычно на практике применяют конечно-разностные приближения вида

$$\frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \approx \frac{1}{2\Delta} \left[\varphi_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + \Delta, x_{j+1}, \dots, x_n) - \varphi_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j - \Delta, x_{j+1}, \dots, x_n) \right],$$

где Δ – шаг дифференцирования. В приведённом соотношении использовано *численное дифференцирование функции с применением формулы центральной разности*.

Другим недостатком метода Ньютона является необходимость решения на каждом шаге системы линейных алгебраических уравнений.

Пример 3.2. Рассматривается система из примера 3.1, статический режим которой описывается уравнением

$$\varphi(y) = y^3 - 3y^2 + 2,75y - 0,75 = 0.$$

Требуется найти состояния равновесия системы методом Ньютона.

Оператор преобразования

$$S(y) = y - \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)}.$$

Определив производную

$$\varphi'(y) = 3y^2 - 6y + 2,75,$$

можно записать формулу итерационной процедуры

$$y_{k+1} = y_k - \frac{(y_k)^3 - 3(y_k)^2 + 2,75y_k - 0,75}{3(y_k)^2 - 6y_k + 2,75}.$$

Результаты численных расчётов состояний равновесия y_1 , y_2 , y_3 системы сведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Но- мер ите- ра- ции k	y_{1k}	$y_{1\ k+1}$	Но- мер ите- ра- ции k	y_{3k}	$y_{3\ k+1}$	Но- мер ите- ра- ции k	y_{2k}	$y_{2\ k+1}$
0	0,2500	0,4130	0	2,000	1,7273	0	1,100	0,9909
1	0,4130	0,4838	1	1,7273	1,5755	1	0,9909	1,0000
2	0,4838	0,4993	2	1,5755	1,5127	2	0,9000	1,0091
3	0,4993	0,5000	3	1,5127	1,5005	3	1,0091	1,0000
			4	1,5005	1,5000			

Если задавать $y_0 = 0,7500$, то уже на первом шаге достигается $y_1 = 1,5000$; если задавать $y_0 = 1,2500$, то на первом шаге достигается $y_1 = 0,5000$, т. е. при удачном выборе начального приближения решение находится сразу (за одну итерацию).

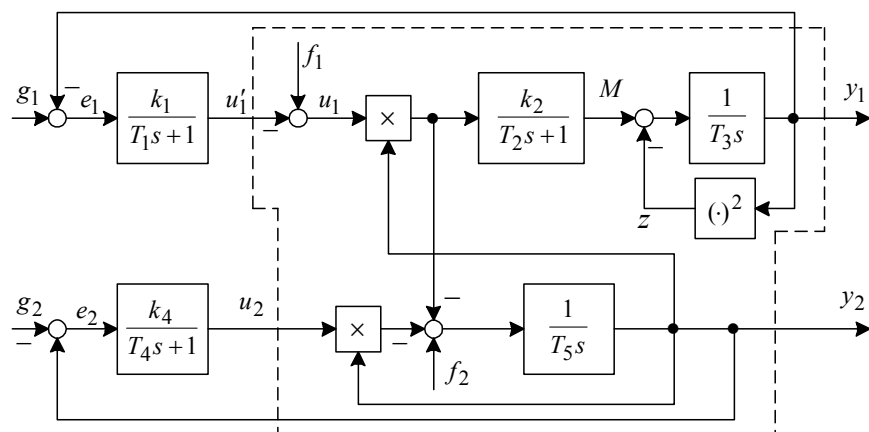
Пример 3.3. Рассматривается модель СУ, структурная схема которой приведена на рис. 3.5, а. Объект управления обведён прерывистой линией. Регуляторы представляют собой апериодические звенья. Изучаемый ОУ является многомерным и многосвязным, т. е. характеризуется двумя входами u_1 , u_2 и двумя выходами y_1 , y_2 , а также взаимными связями.

Воздействия и параметры звеньев задаются следующими значениями:

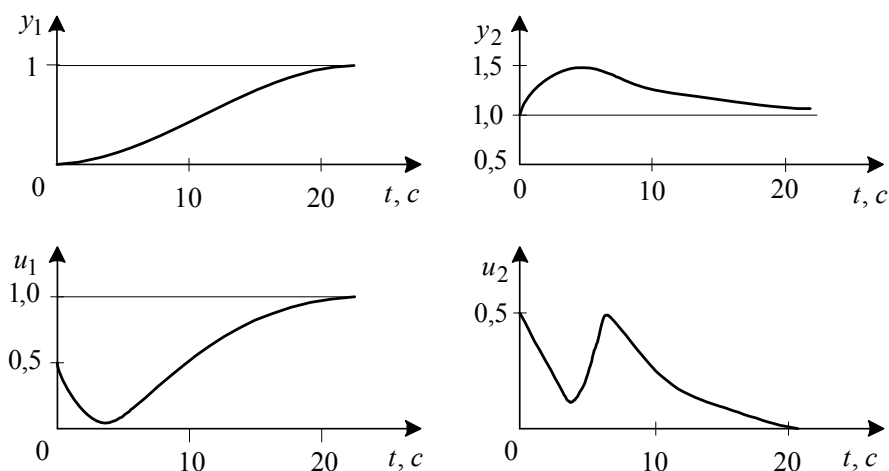
$$g_1 = g_2 = f_1 = f_2 = 1; \quad k_1 = k_2 = k_4 = 1; \quad T_1 = T_4 = 0,1; \quad T_2 = 0,2; \quad T_3 = 5; \quad T_5 = 1.$$

Нелинейная характеристика $z = y_1^2$. Переменные y_1 и y_2 представляют собой выходы многомерного ОУ. Процессы на выходах ОУ физически не могут принимать отрицательные значения.

Графики переходных процессов при заданных начальных значениях переменных $u'_1(0) = u_2(0) = 0,5$; $M(0) = 1$; $y_1(0) = 0,1$; $y_2(0) = 1,0$ приведены на рис. 3.5, б.



а



б

Рис. 3.5. Многомерная нелинейная система:
а – структура; б – процессы установления равновесия

Рассматриваемую СУ целесообразно представить как две взаимосвязанные подсистемы с входами и выходами (g_1, y_1) и (g_2, y_2) соответственно.

Статическая модель первой подсистемы:

$$\begin{aligned}
0 &= M - y_1^2, \\
M &= k_2 u_1 y_2, \\
u_1 &= f_1 - k_1 e_1, \\
e_1 &= g_1 - y_1.
\end{aligned}$$

Исключая промежуточные переменные, т. е. сворачивая модель, можно получить уравнение

$$y_1^2 - k_1 k_2 y_1 y_2 + k_2 (k_1 g_1 - f_1) y_2 = 0.$$

Статическая модель второй подсистемы:

$$\begin{aligned}
0 &= -u_2 y_2 - M / k_2 + f_2, \\
u_2 &= k_4 e_2, \\
e_2 &= y_2 - g_2.
\end{aligned}$$

При исключении промежуточных переменных получается уравнение

$$k_4 y_2^2 + k_1 y_1 y_2 - (k_1 g_1 + k_4 g_2 - f_1) y_2 - f_2 = 0.$$

С учётом численных значений воздействий и параметров система алгебраических уравнений принимает вид

$$\begin{aligned}
y_1^2 - y_1 y_2 &= 0, \\
y_2^2 + y_1 y_2 - y_2 - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Аналитическое решение

Из первого уравнения находится решение $y_1^p = 0$, тогда второе уравнение

$$y_2^2 - y_2 - 1 = 0,$$

откуда получается его решение $y_{21}^p = 1,618$. Второе решение $y_{22}^p = -0,618$ не отвечает физическому смыслу.

Из первого уравнения можно также получить $y_1 = y_2$. Подставляя это условие во второе уравнение, получаем

$$2y_2^2 - y_2 - 1 = 0.$$

Решение этого уравнения $y_{21}^p = 1$, поскольку второе решение $y_{22}^p = -0,5$ не отвечает физическому смыслу.

Линеаризованная модель в окрестности равновесного состояния представлена на рис. 3.6. Возмущение Δf выводит систему из состояния равновесия. Это возмущение может быть приложено в любом месте линеари-

зованной модели, но с целью сохранения стереотипного (типичного) представления структуры, оно прилагается к входу регулятора первой подсистемы.

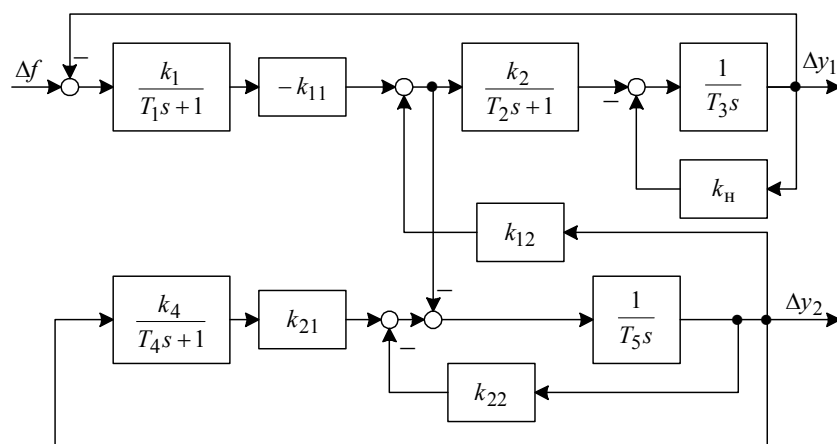


Рис. 3.6. Структура линейризованной системы

Коэффициенты линеаризации приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Формулы для расчёта коэффициентов линеаризации	Значения коэффициентов линеаризации	
	$y_1^p = 0, y_2^p = 1,618$	$y_1^p = 1, y_2^p = 1$
$k_H = 2y_1^p$	0	2
$k_{11} = y_2^p$	1,618	1
$k_{12} = u_1^p$	0	1
$k_{21} = y_2^p$	1,618	1
$k_{22} = u_2^p$	0,618	0

Первое состояние равновесия является неустойчивым, второе – устойчивым.

Аналитико-численное решение

Статическую модель системы можно представить как

$$\varphi_1(y_1, y_2) = y_1^2 - y_1 y_2 = 0,$$

$$\varphi_2(y_1, y_2) = y_2^2 + y_1 y_2 - y_2 - 1 = 0.$$

Тогда функциональная матрица Якоби

$$\Phi'(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 & -y_1 \\ y_2 & 2y_2 + y_1 - 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы Якоби

$$\det \Phi' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1}.$$

Присоединённая матрица

$$(\Phi')^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} \\ -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, итерационная процедура записывается как

$$y_{1k+1} = y_{1k} - \left(\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial y_2} \varphi_{1k} - \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial y_2} \varphi_{2k} \right) / \det(\Phi')_k,$$

$$y_{2k+1} = y_{2k} - \left(\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial y_1} \varphi_{1k} - \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial y_1} \varphi_{2k} \right) / \det(\Phi')_k.$$

Результаты численных вычислений по найденным выражениям приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

y_{1k}	y_{2k}	y_{1k+1}	y_{2k+1}
2,0000	2,0000	1,2857	1,2857
1,2857	1,2857	1,0394	1,0394
1,0394	1,0394	1,0010	1,0010
1,0010	1,0010	1,0000	1,0000

Следует заметить, что начальная точка (0,0) не может быть взята в качестве нулевого приближения, так как $\det \Phi' = 0$. Поскольку такая ситуация часто встречается на практике, её следует учитывать при разработке алгоритмов.

Модифицированный метод Ньютона. Итерационная процедура, записанная в канонической форме

$$\Phi'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) + \Phi(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

обладает *линейной сходимостью*. При этом обращение матрицы $\Phi'(\mathbf{x}_0)$ происходит не на каждой итерации, а лишь однократно.

Возможно циклическое применение модифицированного метода Ньютона, когда $\Phi'(\mathbf{x})$ обращается через определённое число итераций.

Метод Ньютона с параметром (метод Ньютона–Бройдена (Broyden)). Вид итерационной процедуры в канонической форме:

$$\Phi'(\mathbf{x}_k) \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\tau_{k+1}} + \Phi(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Параметр τ_{k+1} выбирается на каждой итерации из условия минимума нормы невязки:

$$\|\Phi(\mathbf{x}_{k+1})\| = \left\| \Phi \left[\mathbf{x}_k - \tau_{k+1} (\Phi'(\mathbf{x}_k))^{-1} \Phi(\mathbf{x}_k) \right] \right\| \rightarrow \min_{\tau}.$$

Минимизация нормы невязки $\|\Phi(\mathbf{x}_{k+1})\|$ на каждой итерации расширяет область сходимости этого метода по сравнению с методом Ньютона.

Нелинейный метод Якоби. Рассмотренные до сих пор итерационные методы являлись *линейными* относительно поиска новой итерации \mathbf{x}_{k+1} . Существуют также и *нелинейные итерационные методы*, когда для вычисления \mathbf{x}_{k+1} приходится решать систему нелинейных уравнений.

Пусть система уравнений (3.1), составленная для модели статики, может быть представлена в следующей итерационной форме записи:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_{1k+1}, x_{2k}, \dots, x_{nk}) &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_i(x_{1k}, \dots, x_{i-1k}, x_{ik+1}, x_{i+1k}, \dots, x_{nk}) &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_n(x_{1k}, \dots, x_{n-1k}, x_{nk+1}) &= 0. \end{aligned}$$

С целью отыскания вектора \mathbf{x}_{k+1} необходимо решать n независимых скалярных уравнений. Для решения каждого скалярного уравнения можно применить какой-либо из рассмотренных итерационных методов, причём не обязательно один и тот же для всех уравнений.

Нелинейный метод Зейделя (Seidel). Метод состоит в последовательном решении системы уравнений (3.1), представленной в итерационной форме записи:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_{1k+1}, x_{2k}, \dots, x_{nk}) &= 0, \\
\varphi_2(x_{1k+1}, x_{2k+1}, \dots, x_{nk}) &= 0, \\
&\dots\dots\dots \\
\varphi_i(x_{1k+1}, \dots, x_{ik+1}, x_{i+1k}, \dots, x_{nk}) &= 0, \\
&\dots\dots\dots \\
\varphi_n(x_{1k+1}, \dots, x_{nk+1}) &= 0.
\end{aligned}$$

В настоящее время распространение получили *гибридные методы*, в которых организован *двойной итерационный процесс*, например Ньютона–Зейделя, когда в пределах внешнего шага внутренний итерационный процесс организован по методу Ньютона, а внешние итерации производятся методом Зейделя. На практике внутренние итерации ограничивают до 1–3. Такие методы допускают сравнительно несложное распараллеливание вычислительного процесса [20].

Кроме рассмотренных численных итерационных методов (3.3), которые относятся к группе *прямых* методов, существует группа *оптимизационных* методов. Оптимизационные методы основаны на процедуре минимизации функционала, составленного по уравнению (3.2). Однако эти методы не нашли практического применения для расчёта статических режимов, так как они уступают методу Ньютона по скорости сходимости и не обладают высокой надёжностью сходимости.

Возможность применения итерационных методов для определения статических режимов в СУ с использованием универсального программного средства MATLAB/Simulink приведена в приложении.

По результатам практического использования метода Ньютона при расчётах статических режимов можно сделать определённые выводы.

1. По сравнению с методом простой итерации метод Ньютона всегда имеет область сходимости, хотя размер этой области может быть меньше.
2. Существуют модели СУ, для которых метод Ньютона расходится или происходит заикливание итераций (рис. 3.4, б).
3. Сходимость метода Ньютона в начале итерационного процесса, когда начальная точка расположена «далеко» от состояния равновесия, чаще всего линейная.
4. Начиная с некоторого шага, номер которого трудно предсказать заранее, сходимость метода Ньютона значительно увеличивается и становится квадратичной.
5. Применённый к линейной СУ, статическая модель которой описывается системой алгебраических уравнений

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

метод Ньютона сходится за одну итерацию. При этом шаг дифференцирования должен быть больше, чем при решении нелинейных уравнений.

Метод Ньютона особенно эффективен, когда $\Phi(\mathbf{x})$ – *выпуклая функция* (выпуклая функция – для любых x', x'' и при каждом $\lambda \in (0, 1)$ удовлетворяется неравенство $\Phi(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') \leq \lambda \Phi(x') + (1 - \lambda)\Phi(x'')$).

Теоретические условия сходимости метода Ньютона – существование и ограниченность обратной матрицы Якоби $[\Phi'(\mathbf{x})]^{-1}$ в точке начального приближения, ограниченность и непрерывность первых и вторых производных функций – сложно использовать на практике для определения границ области сходимости. В связи с этим начальные приближения \mathbf{x}_0 приходится задавать эмпирически; при этом сходимость уже не гарантируется. Рекомендуется при выборе начального приближения руководствоваться физическими соображениями, т. е. использовать известную информацию о равновесии хотя бы части переменных СУ.

3.4. Повышение алгоритмической надёжности итерационных методов

Для повышения надёжности сходимости итерационных методов, связанных с определением состояний равновесия, обычно используют *метод продолжения решения по параметру*. В соответствии с этим методом уравнение (3.2) заменяется эквивалентным уравнением

$$\Phi(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{0}, \quad (3.11)$$

где параметр $\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ выбирается так, что решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ уравнения $\Phi(\mathbf{x}, \tau_{\min}) = \mathbf{0}$ известно, а $\Phi(\mathbf{x}, \tau_{\max}) \equiv \Phi(\mathbf{x})$.

С целью удобства объяснения сути метода вводятся оператор $a[\Phi(\mathbf{x}, \tau)]$, обозначающий промежуточное решение уравнения (3.11), полученное в результате совершения одной итерации любым численным методом k -м шаге, и оператор $A[\Phi(\mathbf{x}, \tau)]$, обозначающий окончательное решение того же уравнения в результате совершения нескольких итераций на последнем шаге.

Тогда *метод продолжения решения по параметру* с ограниченным параметром и одной итерацией на каждом k -м продолжении (шаге), кроме последнего, можно записать в виде

$$\tau_{k+1} = p(\tau_k), \quad k = 0, 1, \dots, q-1; \quad \tau_0 = \tau_{\min}, \quad \tau_q = \tau_{\max};$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = a(\Phi(\mathbf{x}_k, \tau_{k+1})), \quad (3.12)$$

а на последнем шаге

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_q = A(\Phi(\mathbf{x}_{q-1}, \tau_{\max})),$$

где \mathbf{x}^* – решение системы.

Таким образом, согласно методу продолжения осуществляется серия итераций с изменяющимся параметром τ и с однократным решением уравнения (3.2) на каждой итерации, кроме последней, на которой производится многократное итерационное решение уравнения (3.2).

Разновидностью метода продолжения решения по параметру является *метод движущейся области сходимости*, для которого

$$\tau_{k+1} = p(\tau_k), k = 0, 1, \dots, q-1; \quad \tau_0 = \tau_{\min}, \tau_q = \tau_{\max};$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = A(\Phi(\mathbf{x}_k, \tau_{k+1})). \quad (3.13)$$

В основе этого метода лежит следующий принцип. Если $\mathbf{x}_k \in \delta_k$, где δ_k – область сходимости около точки \mathbf{x}_k , то возмущение параметра τ на $(k+1)$ -м шаге, имеющее вид $\Delta\tau_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k$, передвигает область сходимости таким образом, что выполняется включение $\mathbf{x}_{k+1} \in \delta_{k+1}$ (рис. 3.7).

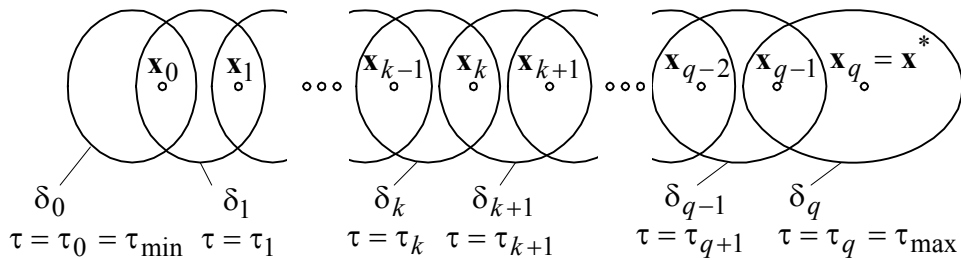


Рис. 3.7. Интерпретация метода движущейся области сходимости

Условием надёжной работы метода движущейся области сходимости является выполнение условия $\mathbf{x}_k \in \delta_{k+1}$, т. е. в этом случае предыдущая точка \mathbf{x}_k попадает в область сходимости δ_{k+1} последующей точки \mathbf{x}_{k+1} и процесс поиска решения (3.13) не расходится. Это условие достигается выбором τ_{k+1} .

Конкретные алгоритмы реализации методов (3.12), (3.13) отличаются способом изменения параметра τ , т. е. выбором функции p . Часто в качестве параметра τ выбирают внешнее воздействие f на СУ, причём

$$f_{k+1} = f_k + \Delta f_{k+1},$$

где Δf_{k+1} подбирается на каждом продолжении из условия сходимости метода (3.13).

Метод (3.12) более быстрый по сравнению с (3.13), но менее надёжен, так как $\Delta \tau_k$ выбирается произвольно (независимо от δ_{k+1}) и на последнем приближении в (3.12) может оказаться, что $\mathbf{x}_{q-1} \notin \delta_q$.

Пример 3.4. Рассматривается СУ с НЭ в цепи обратной связи (рис. 3.2, а). Характеристика НЭ задаётся в виде табл. 3.5. На входе системы приложено воздействие f постоянного уровня, $f = 10$.

Таблица 3.5

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z	0	1	2,5	4,5	7,5	10	11	11,5	11	10,5
y	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
z	10,2	10,1	10,05	10,03	10,02	10,01	10,005	10,001	10	10

Требуется найти состояние равновесия, используя метод Ньютона. Уравнение статического режима имеет вид

$$\varphi(y) = \xi(y) - f = 0.$$

В соответствии с методом Ньютона оператор преобразования можно записать как

$$S(y) = y - \frac{\xi(y)}{\xi'(y)} = y - \frac{\xi(y) - f}{\xi'(y)}.$$

Значения функций $\xi'(y)$, $\xi(y)$ определяются следующим образом: если $y \in [y_i, y_{i+1})$, $i = \overline{0, 17}$, то

$$\xi'(y) = \frac{z_{i+1} - z_i}{y_{i+1} - y_i}, \quad z = \xi(y) = z_i + \xi'(y)(y - y_i);$$

если $y \in [18, \infty)$, то $\xi'(y) = 0$, $z = \xi(y) = f$.

Итерационная процедура имеет вид

$$y_{k+1} = y_k - \frac{\xi(y_k) - f}{\xi'(y_k)}.$$

Результаты численных расчётов состояния равновесия сведены в табл. 3.6.

Таблица 3.6

Номер итерации k	y_k	$\xi'(y_k)$	$z_k = \xi(y_k)$	y_{k+1}
0	0	1	0	10
1	10	-0,1	10,2	12
2	12	-0,02	10,05	14,5
3	14,5	-0,01	10,015	16
4	16	-0,004	10,005	17,25
5	17,25	-0,001	10,0008	18
6	18	0	10	∞

Как видно из таблицы, процесс определения состояния равновесия расходуется.

Можно воспользоваться методом движущейся области сходимости, последовательно изменяя воздействия: $f_1 = 2$; $f_2 = 4$; $f_3 = 6$; $f_4 = 8$; $f_5 = 10$. Результаты расчётов сведены в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Номер итерации k	y_k	$\xi'(y_k)$	$z_k = \xi(y_k)$	y_{k+1}
$f_1 = 2$				
0	0	1	0	2
1	2	2	2,5	1,75
2	1,75	1,5	2,125	1,667
3	1,667	1,5	2	1,667
$f_2 = 4$				
0	1,667	1,5	2	3
1	3	3	4,5	2,833
2	2,833	2	4,167	2,75
3	2,75	2	4	2,75
$f_3 = 6$				
0	2,75	2	4	3,75
1	3,75	3	5,25	4
2	4	2,5	7,5	3,4
3	3,4	3	5,7	3,5
4	3,5	3	6	3,5
$f_4 = 8$				
0	3,5	3	6	4,167
1	4,167	2,5	7,917	4,2
2	4,2	2,5	8	4,2
$f_5 = 10$				
0	4,2	2,5	8	5
1	5	1	10	5

Контрольные вопросы

14. Приведите достоинства численных методов расчёта систем по отношению к аналитическим.
15. В чём заключаются достоинства и недостатки метода установления?
16. Поясните смысл итерационных методов.
17. Обоснуйте целесообразность применения итерационных методов при расчёте статических режимов.
18. Какие используются критерии окончания расчёта статических режимов итерационными методами?
19. Приведите каноническую форму записи итерационного метода.
20. В каком случае итерационный метод является неявным?
21. При каком условии метод простой итерации является сходящимся?
22. Запишите условия сходимости итерационного метода Пикара.
23. В чём состоят достоинства итерационного метода Ньютона?
24. Какие ограничения присущи итерационному методу Ньютона? Приведите примеры статических характеристик нелинейных элементов, для которых метод Ньютона не применим.
25. В чём состоит особенность итерационного метода Ньютона с параметром?
26. Почему итерационные методы Якоби и Зейделя относят к нелинейным?
27. Какие итерационные методы называются гибридными?
28. Что представляет собой метод продолжения решения по параметру? С какой целью он применяется?
29. Объясните принцип, лежащий в основе метода движущейся области сходимости.

Глава 4. МЕТОДЫ РАСЧЁТА ДИНАМИЧЕСКИХ (ПЕРЕХОДНЫХ) РЕЖИМОВ

4.1. Общие сведения о численных методах расчёта динамических режимов

Как уже ранее отмечалось, несмотря на глубину и разнообразие аналитических методов, область их применения ограничена либо линейными динамическими моделями, либо относительно простыми, изученными нелинейными моделями. Поэтому единственным универсальным подходом к исследованию поведения сложных СУ по ММ является применение численных методов с использованием средств современной вычислительной техники и информационных технологий.

Вычислительный алгоритм, т. е. последовательность операций (арифметических, логических и т. д.), в результате выполнения которых находится решение поставленной задачи, должен удовлетворять жёстким и нередко противоречивым требованиям. Решение должно быть получено с заданной точностью за разумное и по возможности минимальное время. Объёмы обрабатываемой информации не должны превышать возможностей ёмкости машинной памяти. В процессе вычислений следует избегать возникновения не воспринимаемых компьютером слишком больших или малых чисел, структура алгоритма должна быть достаточно простой и т. д. Только при выполнении перечисленных требований вычислительные алгоритмы позволяют проводить всестороннее численное исследование исходной модели, подвергая её вычислительному эксперименту в различных ситуациях и получая исчерпывающую информацию об изучаемом объекте. Такое понимание численного моделирования означает не просто уточнение количественных характеристик объектов, явлений и процессов, но также изучение их качественных свойств. Особенно это касается нелинейных систем, поведение которых может быть весьма разнообразным и непредсказуемым.

Часто модели СУ, предназначенные для расчёта динамики, представляются в виде системы линейных или нелинейных ДУ. В зависимости от числа независимых переменных и типа производных, входящих в ДУ, модели СУ делятся на два существенно различных класса:

- а) модели с *сосредоточенными параметрами*, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), содержащими одну независимую переменную (обычно время t);
- б) модели с *распределёнными параметрами*, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных, содержащими несколько независимых переменных.

Чтобы решить ОДУ, необходимо дополнительно знать значения зависимой переменной и её производных при некоторых значениях независимой переменной. Если эти дополнительные условия задаются при одном значении независимой переменной, то такая задача называется *задачей с начальными условиями* или *задачей Коши*. Если же дополнительные условия задаются при двух и более значениях независимой переменной, то задача называется *краевой*. В задаче Коши дополнительные условия называются *начальными*, а в краевой – *граничными* или *краевыми*.

В дальнейшем при изучении численных методов будут рассматриваться корректно поставленные задачи, когда решение ДУ: 1) существует; 2) единственно; 3) непрерывно зависит от начальных и граничных условий, а также от коэффициентов (параметров) уравнения.

Все численные методы решения задачи Коши разделяются на *скалярные* и *системные*, или *матричные*. Наиболее распространённые на практике скалярные методы характеризуются тем, что для каждого скалярного уравнения системы ОДУ составляется соответствующее разностное уравнение.

Разностные уравнения, используемые в численном анализе, получаются в результате *дискретизации* исходной непрерывной модели. Под дискретизацией понимается процедура замены ДУ приближённым разностным уравнением. Обратный процесс – получение непрерывной модели по дискретной, называется *континуализацией*.

Следует заметить, что в результате дискретизации возможна потеря важной информации о свойствах модели, что может существенно исказить представления о реальных процессах в системе при анализе поведения методами численного моделирования.

Пример 4.1. Рассматривается система с «обострением» процесса (рис. 4.1). Предполагается, что воздействие на входе имеет вид $f(t) = f_0 + f_1 t$, причём $f_0 = -1$, $f_1 = 1$. Нелинейный элемент описывается функцией $y = -kx^2$. Начальные условия принимаются равными: $t_0 = 0$, $x(t_0) = x_0 = 2$.

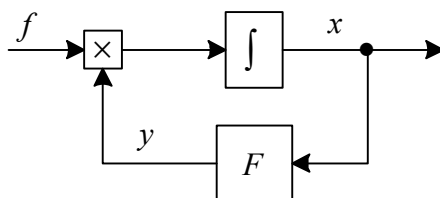


Рис. 4.1. Структура системы с «обострением»

Дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = F(x)f(t) = (-kx^2)(t - 1).$$

Разделяя переменные ДУ, можно получить

$$\frac{dx}{x^2} = k(1-t)dt.$$

В результате интегрирования обеих частей равенства

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = k\left(t - \frac{t^2}{2}\right),$$

аналитическое решение примет вид

$$x = \frac{1}{k(0,5t^2 - t) + x_0^{-1}}.$$

Полагая, например, $k=1$, решение запишется как

$$x = \frac{1}{0,5t^2 - t + 0,5} = \frac{2}{(t-1)^2}.$$

На рис. 4.2 приведены графики процессов, соответствующих точному и приближённому решению. Приближённое решение найдено методом численного моделирования с «неудачно» выбранным шагом интегрирования и значительно отличается от точного. Моменты времени, при которых имеет место разрыв кривой, определяются соотношением $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2/kx_0}$. При $x_0 < 2/k$ вещественных значений $t_{1,2}$ нет и, следовательно, разрыв отсутствует.

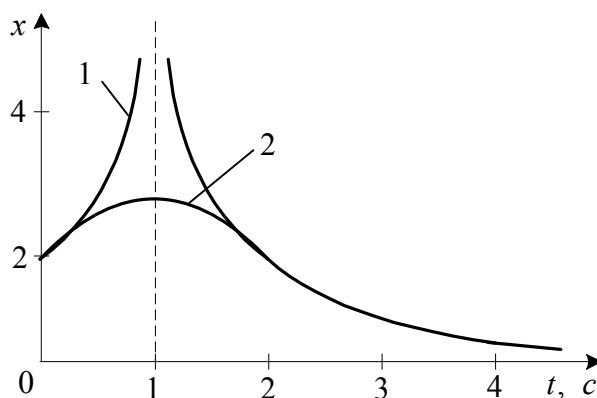


Рис. 4.2. Графики процессов в системе с «обострением»:
1 – точный; 2 – приближённый

Рассматриваемый пример указывает на важность проведения этапа аналитических исследований, позволяющего установить характерные особенности поведения непрерывной модели. Игнорирование аналитических исследований в процессе построения модели может привести к катастрофическим последствиям при работе реальной системы.

4.2. Численные методы расчёта динамических режимов моделей систем с сосредоточенными параметрами

4.2.1. Постановка задачи расчёта динамических режимов

Пусть непрерывная модель СУ на временном сегменте $t_0 \leq t \leq t_k$ представлена векторным дифференциальным уравнением 1-го порядка, разрешённым относительно вектора первой производной (модель в форме Коши):

$$\frac{dv(t)}{dt} = F(t, v(t)), \quad v(t_0) = v_0. \quad (4.1)$$

Требуется найти решение (процесс) $v(t)$, удовлетворяющее этому уравнению и начальному условию (задача Коши).

Для решения задачи (4.1) по переменной t на сегменте $[t_0, t_k]$ можно ввести *равномерную сетку с шагом* $h > 0$, т. е. множество узлов (точек)

$$\omega_h = \{t_n = nh, n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Следует заметить, что сетка узлов может быть и неравномерной.

Использование сеток для решения ДУ позволяет отнести рассматриваемый метод к числу *сеточных (разностных)* в отличие от *проекционных* методов.

Пусть через $v(t)$ обозначается *точное решение* ОДУ (4.1), а через $x_n = x(t_n)$ – *приближённое решение*. Приближённое решение является *сеточной* или *решётчатой (дискретной)* функцией, т. е. определено только в узлах сетки ω_h . Численным решением задачи Коши для ОДУ называют таблицу вида

$$\{t_n, x_n : n = 0, 1, 2, \dots; t_n \in \omega_h\},$$

полученную с помощью численного метода.

Если требуется знать решение не только в узловых точках сегмента $[t_0, t_k]$, но и в промежуточных точках, то к определению численного решения добавляется требование аппроксимации получаемой таблицы (например, методами интерполяции).

Для упрощения последующего изложения будет рассматриваться непрерывная модель системы, заданная скалярным ОДУ

$$\frac{dv(t)}{dt} = F(t, v(t)), \quad v(t_0) = v_0. \quad (4.2)$$

Пример 4.2. Явный метод Эйлера.

Исходное ДУ (4.2) заменяется *разностным уравнением* (осуществляется дискретизация), которое записывается в канонической форме (3.6):

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} - F(t_n, x_n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 = v_0. \quad (4.3)$$

Решение этого уравнения находится *явным образом по рекуррентной формуле*

$$x_{n+1} = x_n + hF(t_n, x_n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При использовании приближённых методов важным вопросом является *вопрос о сходимости*. Применительно к разностным методам наибольшее распространение получило *понятие сходимости приближённого метода при $h \rightarrow 0$* [18].

Зафиксируем точку t и построим последовательность сеток ω_h , таких, что $h \rightarrow 0$ и $t_n = nh = t$, при этом необходимо, чтобы $n \rightarrow \infty$.

Говорят, что *метод сходится в точке $t = t_n$* , если выполняется условие

$$|x_n - v(t_n)| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Другими словами, приближённое решение в точке $t = t_n$ сходится к точному в этой точке при $h \rightarrow 0$.

Метод сходится на полуинтервале $(t_0, t_k]$, если он сходится в каждой точке $t \in (t_0, t_k]$.

Применение численного метода неизбежно связано с погрешностью или, другими словами, точностью решения.

Метод имеет p -й порядок точности, если существует такое целое число $p > 0$, что

$$|x_n - v(t_n)| = O(h^p) \text{ при } h \rightarrow 0,$$

где $O(h^p)$ означает *порядок малости, соизмеримый с величиной h^p* .

Погрешность метода определяется выражением

$$\Delta_n = x_n - v(t_n)$$

и является мерой удалённости приближённого решения от точного.

При подстановке выражений для погрешностей, определённых в моменты времени t_{n+1} и t_n , в формулу (4.3) явного метода Эйлера, получается

$$\frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{h} = F(t_n, v_n + \Delta_n) - \frac{v_{n+1} - v_n}{h} = \varepsilon_n + \Delta F_n,$$

$$\text{где } \varepsilon_n = F(t_n, v_n) - \frac{v_{n+1} - v_n}{h}, \quad \Delta F_n = F(t_n, v_{n+1}) - F(t_n, v_n).$$

Функция ε_n называется *невязкой* или *погрешностью аппроксимации разностного уравнения (4.3) на решении исходного уравнения (4.2)*.

Невязка представляет собой результат подстановки точного решения $v(t)$ в левую часть уравнения (4.3). Если бы приближённое решение x_n совпадало бы с точным решением $v(t_n)$, то невязка $\varepsilon_n = 0$.

Разностный метод *аппроксимирует* исходное ДУ, если выполняется условие $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Разностный метод имеет p -й *порядок погрешности аппроксимации* при

$$\varepsilon_n = O(h^p).$$

Порядок точности разностного метода обычно совпадает с порядком погрешности аппроксимации.

Порядок погрешности аппроксимации метода Эйлера (4.3) можно найти, используя разложение по формуле Тейлора (Taylor). Действительно,

$$v_{n+1} = v_n + v'_n h - O(h^2)$$

или

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = \frac{dv(t_n)}{dt} - O(h).$$

Тогда погрешность аппроксимации ε_n с учётом уравнения (4.2) выражается как

$$\varepsilon_n = F(t_n, v_n) - \frac{v_{n+1} - v_n}{h} = F(t_n, v_n) - \frac{dv(t_n)}{dt} + O(h) = O(h).$$

Таким образом, метод Эйлера имеет 1-й *порядок погрешности аппроксимации*.

В общем случае *приращение функции* ΔF_n пропорционально погрешности Δ_n метода. Действительно, используя формулу конечных приращений (формулу Лагранжа), можно записать

$$\Delta F_n = F(t_n, v_n + \Delta_n) - F(t_n, v_n) = \frac{\partial F(t_n, v_n + \theta \Delta_n)}{\partial v} \Delta_n, \quad 0 \leq \theta < 1.$$

Пример 4.3. *Симметричная схема метода Эйлера (неявный метод Эйлера).*

Уравнение (4.2) заменяется разностным уравнением вида

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} - \frac{1}{2}[F(t_{n+1}, x_{n+1}) + F(t_n, x_n)] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 = v_0. \quad (4.4)$$

Значение x_{n+1} определяется по найденному ранее решению x_n в результате решения уравнения

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(F_{n+1} + F_n),$$

где $F_n = F(t_n, x_n)$, $F_{n+1} = F(t_{n+1}, x_{n+1})$, поэтому метод называется *неявным*.

Преимуществом неявного метода (4.4) по сравнению с явным (4.3) является *более высокий порядок точности*. Действительно,

$$v_{n+1} = v_n + v'_n h + \frac{1}{2}v''_n h^2 - O(h^3)$$

или

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = v'_n + \frac{h}{2}v''_n - O(h^2).$$

Аналогичным образом можно записать для производной

$$v'_{n+1} = v'_n + v''_n h - O(h^2)$$

или

$$\frac{v'_{n+1} - v'_n}{h} = v''_n - O(h).$$

Тогда выражение для невязки

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{1}{2}(F_n + F_{n+1}) - \frac{v_{n+1} - v_n}{h} = \frac{1}{2}(F_n + F_{n+1}) - \left(v'_n + \frac{h}{2}v''_n - O(h^2)\right) = \\ &= \frac{1}{2}(v'_n + v'_{n+1}) - v'_n - \frac{h}{2}v''_n + O(h^2) = \\ &= \frac{1}{2}v'_n + \frac{1}{2}v'_n + \frac{h}{2}v''_n - \frac{1}{2}O(h^2) - v'_n - \frac{h}{2}v''_n + O(h^2) = \frac{1}{2}O(h^2), \end{aligned}$$

т. е. $\varepsilon_n \sim O(h^2)$. Таким образом, метод (4.4) имеет 2-й порядок погрешности аппроксимации (2-й порядок точности).

Историческая справка. Леонард Эйлер (1707–1783) родился в Базеле (Швейцария) в семье небогатого пастора. Образование получал сначала у отца, затем поступил в 1720 году в Базельский университет, где в 1724 году произнёс речь, посвящённую сравнению философий Р. Декарта и И. Ньютона, и был удостоен степени магистра искусств. Его учитель Й. Бернулли отзывался об Эйлере как о «знаменитейшем и мудрейшем математике». Первые публикации Эйлера по математике появляются в 1726 году. В 1727 году он приглашается для работы в Петербургскую Академию наук. В Петербурге, где Эйлер жил с 1727 по 1741 год и с 1766 до конца жизни, ему были предоставлены самые благоприятные условия для научной деятельности: материальное обеспечение, возможность публикации тру-

дов, широкий круг общения с другими учёными. Значение своего пребывания в Петербургской академии он сам в 1749 году оценил таким образом: «Что собственно до меня касается, то при отсутствии такого превосходного обстоятельства я бы вынужден был, главным образом, обратиться к другим занятиям, в которых, по всем признакам, мог бы заниматься только крохоборством. Когда его королевское величество (Фридрих II) недавно меня спросил, где я изучал то, что знаю, я, согласно истине, ответил, что всем обязан своему пребыванию в Петербургской академии». В Петербурге Эйлер изучил русский язык. Здесь же он женился на дочери академического живописца.

В беспокойное время регентства Анны Леопольдовны в 1741 году по предложению прусского короля Фридриха II Эйлер переезжает в Берлин, где занимается реорганизацией Берлинской академии, которой фактически руководил с 1759 года. Одновременно он деятельно участвует в подготовке русских математиков в Берлине, оказывал постоянную помощь Петербургской академии, приобретая для неё научную литературу и оборудование. Однако возникшие разногласия с королём привело к тому, что в 1766 году он вынужден был вместе с семьёй возвратиться в Петербург.

Эйлер отличался поразительной продуктивностью: только при жизни им было опубликовано 550 книг и статей (общий список его трудов составляет порядка 850 наименований). Его влияние в математике было столь велико, что нередко восемнадцатое столетие называют математической эпохой Эйлера. Он внёс существенный вклад не только в математику, но и в астрономию, механику, гидродинамику, оптику, сопротивление материалов, в теорию электромагнетизма. У Эйлера была исключительная память. В 1771 году в результате болезни он ослеп, однако почти половина его научных трудов написана после этой даты, и в возрасте семидесяти лет был способен наизусть воспроизвести строки каждой страницы вергилиевской «Энеиды» (Вергилий (Vergilius) – римский поэт, «Энеида» – героический эпос о странствиях троянца Энея). Только за один 1777 год им было подготовлено почти 100 статей. Эйлер похоронен в Санкт–Петербурге на территории городского некрополя.

Явный и неявный методы Эйлера удобно представить с помощью расчётных структурных схем, приведённых на рис. 4.3. Как видно из схем, неявный метод отличается от явного наличием обратной связи по искомому значению x_{n+1} .

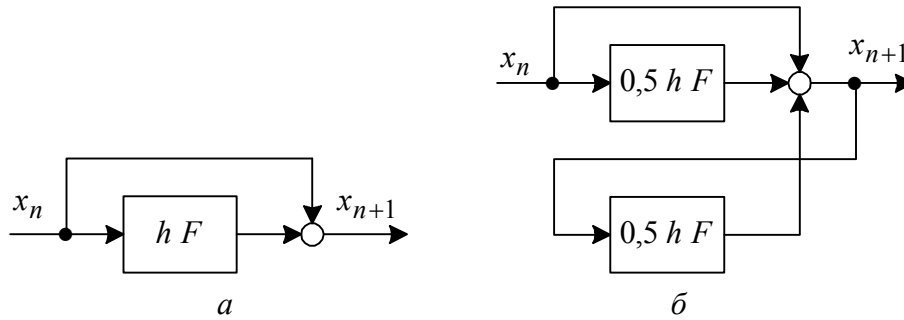


Рис. 4.3. Расчётные структурные схемы для метода Эйлера:
а – явный; б – неявный

Приведённые примеры представляют собой простейшие случаи *разностных методов*, или, как их ещё называют, *разностных схем*.

Пример 4.4. Для автономной системы 1-го порядка (рис. 4.4) необходимо на интервале $[0 \ 3]$ произвести вычисление свободного процесса на выходе, применяя схемы Эйлера (4.3), (4.4) с шагом сетки $h = 0,2$. Описание системы посредством ДУ имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = -y, \quad y(0) = 1.$$

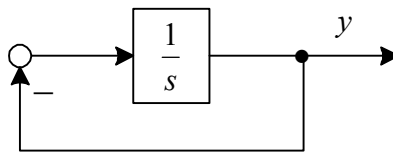


Рис. 4.4. Автономная система

Точное аналитическое решение имеет вид $y^*(t) = e^{-t}$.

При использовании обычной схемы метода Эйлера (4.3) расчёт производится по формуле

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n - h\tilde{y}_n = (1 - h)\tilde{y}_n = 0,8\tilde{y}_n.$$

При использовании симметричной схемы метода Эйлера (4.4) расчёт ведётся по формуле

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n + \frac{h}{2}(-\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}),$$

откуда получается

$$\hat{y}_{n+1} = \frac{1 - h/2}{1 + h/2} \hat{y}_n = \frac{0,9}{1,1} \hat{y}_n.$$

Заметим, что вследствие линейности системы неявную схему удалось привести к явной.

Результаты вычислений сведены в табл. 4.1, из которой видно, что точность вычислений с использованием неявной схемы Эйлера выше.

Таблица 4.1

t_n	y^*	\tilde{y}_n	\hat{y}_n	t_n	y^*	\tilde{y}_n	\hat{y}_n
0	1	1	1	1,6	0,2019	0,1678	0,2008
0,2	0,8187	0,8000	0,8182	1,8	0,1653	0,1342	0,1643
0,4	0,6703	0,6400	0,6694	2,0	0,1353	0,1074	0,1344
0,6	0,5488	0,5120	0,5477	2,2	0,1108	0,0859	0,1100
0,8	0,4493	0,4096	0,4481	2,4	0,0907	0,0687	0,0900
1,0	0,3679	0,3277	0,3666	2,6	0,0743	0,0550	0,0736
1,2	0,3012	0,2622	0,2999	2,8	0,0608	0,0440	0,0602
1,4	0,2466	0,2098	0,2454	3,0	0,0498	0,0352	0,0493

Существует две группы скалярных численных методов решения задачи Коши [18]:

- 1) методы Рунге–Кутта (Runge–Kutta) или одношаговые методы;
- 2) многошаговые разностные методы.

Методы Рунге–Кутта отличаются от разностных методов тем, что в них допускается вычисление правых частей $F(t, v)$ уравнения (4.1) не только в узловых точках сетки, но и в некоторых промежуточных точках.

Пример 4.5. *Метод Рунге–Кутта второго порядка точности.*

Пусть приближённое значение решения x_n при $t = t_n$ известно. Для нахождения $x_{n+1} = x(t_{n+1})$ используется следующий двухэтапный алгоритм.

1. По схеме Эйлера

$$\frac{x_{n+1/2} - x_n}{0,5h} = F(t_n, x_n),$$

где $x_{n+1/2} = x(t_n + \frac{1}{2}h)$, вычисляется промежуточное значение

$$x_{n+1/2} = x_n + \frac{1}{2}hF(t_n, x_n).$$

2. Используется разностное уравнение

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = F\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_{n+1/2}\right) = F\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hF(t_n, x_n)\right),$$

из которого явным образом находится искомое значение x_{n+1} :

$$x_{n+1} = x_n + hF\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_{n+1/2}\right).$$

Метод имеет 2-й порядок погрешности аппроксимации $\varepsilon_n = O(h^2)$ и в отличие от (4.4) является явным.

Реализация метода Рунге–Кутта в виде двух этапов называется *методом предиктора-корректора* (прогноза-коррекции, предсказывающе-исправляющим). На первом этапе приближённое значение предсказывается с невысокой точностью $O(h)$. На втором этапе оно исправляется, так что окончательный результат будет иметь 2-й порядок точности $O(h^2)$ вычисления.

Распространённая форма записи метода Рунге–Кутта

$$k_1 = F(t_n, x_n), \quad k_2 = F\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_1\right).$$

Значение x_{n+1} находится по формуле

$$x_{n+1} = x_n + hk_2.$$

Поскольку требуется вычислить две промежуточные функции k_1, k_2 , данный метод относится к *двухэтапным методам*. Геометрическая иллюстрация двухэтапного метода Рунге–Кутта и его расчётная структурная схема приведены на рис. 4.5.

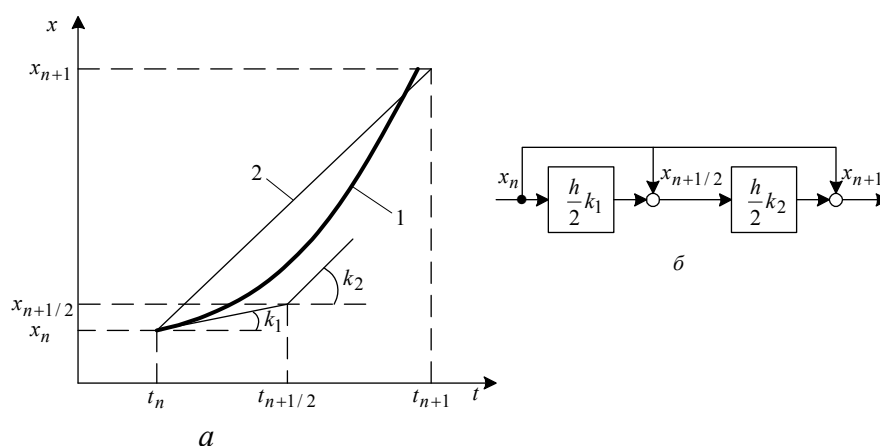


Рис. 4.5. Двухэтапный метод Рунге–Кутта:

a – геометрическая интерпретация (1 – точное решение, 2 – приближённое решение);
б – расчётная структурная схема

Пример 4.6. С помощью метода Рунге–Кутта исследуется ранее рассмотренная автономная система 1-го порядка (пример 4.4). Пусть $y(0) = 1$, $h = 0,2$.

На первом этапе используется формула

$$\tilde{y}_{n+1/2} = \tilde{y}_n - \frac{h}{2} \tilde{y}_n = 0,9 \tilde{y}_n.$$

На втором этапе используется уточнённая формула

$$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n - h \tilde{y}_{n+1/2} = \tilde{y}_n - 0,2 \cdot 0,9 \tilde{y}_n = 0,82 \tilde{y}_n.$$

Результаты вычислений сведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

t_n	\tilde{y}_n	t_n	\tilde{y}_n
0	1	1,6	0,1994
0,2	0,8200	1,8	0,1635
0,4	0,6724	2,0	0,1341
0,6	0,5514	2,2	0,1100
0,8	0,4521	2,4	0,0902
1,0	0,3617	2,6	0,0740
1,2	0,2966	2,8	0,0607
1,4	0,2432	3,0	0,0498

Сравнение результатов, представленных в табл. 4.1 и табл. 4.2, указывает на то, что точность вычислений по методу Рунге–Кутты соизмерима с точностью, достигнутой при использовании неявной схемы Эйлера, и превышает точность вычислений, полученных по явной схеме Эйлера.

4.2.2. Многоэтапные методы

Явные многоэтапные (m -этапные) методы Рунге–Кутты в общем случае определяются следующим образом. Пусть решение $x_n = x(t_n)$ уже известно. Правая часть уравнения (4.2) аппроксимируется суммой вида

$$F(t_n, x_n) = \sum_{i=1}^m \sigma_i k_i,$$

где функции k_i последовательно вычисляются по формулам:

$$k_1 = F(t_n, x_n),$$

$$k_2 = F(t_n + a_2 h, x_n + b_{21} h k_1),$$

$$k_3 = F(t_n + a_3 h, x_n + b_{31} h k_1 + b_{32} h k_2),$$

$$\dots$$

$$k_m = F(t_n + a_m h, x_n + b_{m1} h k_1 + b_{m2} h k_2 + \dots + b_{mm-1} h k_{m-1}).$$

Новое значение $x_{n+1} = x(t_{n+1})$ определяется выражением

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^m \sigma_i k_i.$$

Коэффициенты a_i, b_{ij}, σ_i ($i = 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m-1$) выбираются из соображений требуемой точности. Предполагается также, что

$$\sum_{i=1}^m \sigma_i = 1.$$

Обычно методы Рунге–Кутты при $m \geq 6$ на практике не используются.

Частные случаи метода Рунге–Кутты

При $m = 1$ метод соответствует схеме Эйлера (4.3).

При $m = 2$ существует семейство методов:

$$k_1 = F(t_n, x_n), \quad k_2 = F(t_n + a_2 h, x_n + b_{21} h k_1), \quad x_{n+1} = x_n + h(\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2).$$

Если $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$, то методы будут иметь 1-й порядок погрешности аппроксимации, т. е. $O(h)$.

Если дополнительно потребовать $\sigma_2 a_2 = \sigma_2 b_{21} = 1/2$, то формируются методы 2-го порядка погрешности аппроксимации, т. е. $O(h^2)$. При этом различают следующие случаи.

1. При $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma = 1$, $a_2 = 1/2$, $b_{21} = 1/2$ можно получить:

$$k_1 = F(t_n, x_n), \quad k_2 = F(t_n + 1/2 h, x_n + 1/2 h k_1), \quad x_{n+1} = x_n + h k_2.$$

Этот метод рассматривался в примере 4.5.

2. При $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/2$, $a_2 = 1$, $b_{21} = 1$ можно получить другой метод 2-го порядка (метод Хойна (Heun)):

$$k_1 = F(t_n, x_n), \quad k_2 = F(t_n + h, x_n + h k_1), \quad x_{n+1} = x_n + 1/2 h(k_1 + k_2).$$

Двухэтапные методы 3-го порядка погрешности аппроксимации отсутствуют.

При $m = 3$ существует семейство методов:

$$1. \quad k_1 = F(t_n, x_n), \quad k_2 = F(t_n + 1/2 h, x_n + 1/2 h k_1),$$

$$k_3 = F(t_n + h, x_n - h k_1 + 2 h k_2), \quad x_{n+1} = x_n + 1/6 h(k_1 + 4 k_2 + k_3).$$

$$2. \quad k_1 = F(t_n, x_n), \quad k_2 = F(t_n + 1/3 h, x_n + 1/3 h k_1),$$

$$k_3 = F(t_n + 2/3 h, x_n + 2/3 h k_2), \quad x_{n+1} = x_n + 1/4 h(k_1 + 3 k_3).$$

Это методы 3-го порядка погрешности аппроксимации.

При $m = 4$ существует семейство методов:

$$1. \quad k_1 = F(t_n, x_n), \quad k_2 = F(t_n + 1/2 h, x_n + 1/2 h k_1),$$

$$k_3 = F(t_n + 1/2 h, x_n + 1/2 h k_2), \quad k_4 = F(t_n + h, x_n + h k_3),$$

$$x_{n+1} = x_n + 1/6 h(k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4).$$

$$2. \quad k_1 = F(t_n, x_n), \quad k_2 = F(t_n + 1/4 h, x_n + 1/4 h k_1),$$

$$k_3 = F(t_n + 1/2 h, x_n + 1/2 h k_2),$$

$$k_4 = F(t_n + h, x_n + h k_1 - 2 h k_2 + 2 h k_3),$$

$$x_{n+1} = x_n + 1/6 h(k_1 + 4 k_3 + k_4).$$

Это методы 4-го порядка погрешности аппроксимации.

На практике рекомендуется метод Рунге–Кутты–Гилла (Gill) 4-го порядка погрешности аппроксимации. Его вычислительная схема имеет вид:

$$\begin{aligned}k_1 &= F(t_n, x_n), \quad k_2 = F(t_n + 1/2 h, x_n + 1/2 h k_1), \\k_3 &= F(t_n + 1/2 h, x_n + (-1/2 + \sqrt{2}/2) h k_1 + (1 - \sqrt{2}/2) h k_2), \\k_4 &= F(t_n + h, x_n + (1 - \sqrt{2}/2) h k_2 + (1 + \sqrt{2}/2) h k_3), \\x_{n+1} &= x_n + 1/6 h [k_1 + 2(1 - \sqrt{2}/2) k_2 + 2(1 + \sqrt{2}/2) k_3 + k_4].\end{aligned}$$

Применяют также неявные методы Рунге–Кутты, для которых по крайней мере один из коэффициентов $b_{ij} \neq 0$ при $j \geq i$, так что одна из функций k_i находится неявно. Хотя неявные методы Рунге–Кутты требуют применения итерационных процедур, они являются весьма точными и устойчивыми.

Историческая справка [19]. Карл Давид Рунге (1856–1927) родился в Германии, в Бремене. Его родители стремились привить сыну «английские взгляды» на жизнь, придавая, в частности, особое значение спорту, воспитывая в мальчике уверенность в своих силах и честность. Всю свою профессиональную жизнь он провёл в Германии – в Мюнхене, Берлине, Ганновере и Гёттингене. Близким другом Рунге в течение всей его жизни был физик Макс Планк (Planck). Сам Рунге всегда считал себя последователем К. Вейерштрасса (Weierstrass). Его ранняя работа по теории функции была выполнена под руководством Л. Кронекера (Kronecker), но затем Рунге погрузился в задачи спектроскопии и астрофизики, которыми он в дальнейшем в основном и занимался. Хотя почти все его значительные работы относились к этим областям, но он никогда не прекращал считать себя математиком. Его интересы постепенно сфокусировались на вопросах точности вычислений, обработки и преобразования данных.

Прикладная математика, как её понимал и применял Рунге, отличалась от науки его современников. Его совсем не интересовала строгая математическая трактовка моделей, полученных из физических опытов, и очень мало интересовали математические методы, которые в то время использовались в технике. Он главным образом хотел заниматься теорией и практикой численных методов, придавая при этом особое значение практике. Некоторые из его методов широко используются и сегодня; особенно распространён численный метод решения ДУ. Тем не менее математики долго не признавали Рунге как математика; не признавали его своим и физики. В результате он долго не получал достойной университетской должности. В 1904 году при интенсивном содействии Планка и К. Клейна (Klein) Рунге получил место профессора в Гёттингене; это была первая (и последняя) профессорская должность по прикладной математике в Герма-

нии. В некотором смысле он был создателем этой дисциплины и в те времена оставался в ней единственным практикующим преподавателем. Со временем Рунге получал всё большее признание среди коллег по профессии, и в 1920 году П. Дебай (Debye) рекомендовал его как своего преемника на заведование кафедрой. По словам Дебая Рунге был «единственным человеком в Гёттингене, способным руководить физическим заведением».

Рунге отошёл от практических дел в 1925 году, при этом не оставив ни одного способного ученика, пожелавшего стать последователем его подхода к математике, который сегодня можно было бы назвать численным анализом.

4.2.3. Многошаговые разностные методы

Линейным многошаговым (m -шаговым) разностным методом называется система разностных уравнений

$$\frac{a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_m x_{n-m}}{h} = b_0 F_n + b_1 F_{n-1} + \dots + b_m F_{n-m},$$

$$n = m, m+1, m+2, \dots, \quad (4.5)$$

где a_k, b_k – числовые коэффициенты, не зависящие от n , причём $a_0 \neq 0$; $x_{n-k} = x(t_{n-k})$, $F_{n-k} = F(t_{n-k}, x_{n-k})$, $k = 0, 1, \dots, m$. Эти уравнения следует рассматривать как *рекуррентные соотношения*, выражающие каждое новое значение x_n через ранее найденные значения $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m}$.

Численное моделирование начинается при $n = m$, т. е. с уравнения

$$\frac{\sum_{k=0}^m a_k x_{m-k}}{h} = \sum_{k=0}^m b_k F_{m-k}. \quad (4.6)$$

Для начала моделирования, в соответствии с (4.6) необходимо задать или предварительно вычислить m начальных значений x_0, x_1, \dots, x_{m-1} . Этим обуславливается название – *m -шаговые методы*. Значение x_0 определяется исходной постановкой задачи, т. е. полагается, что $x_0 = v_0$. Значения x_1, \dots, x_{m-1} можно найти, например, с помощью метода Рунге–Кутты.

Многошаговые разностные методы допускают вычисление правых частей уравнений (4.5) только в узлах сетки ω_h .

Многошаговый метод (4.5) называется *явным*, если $b_0 = 0$ и, следовательно, искомое значение x_n выражается явным образом через предыдущие значения $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m}$. В противном случае ($b_0 \neq 0$) многошаго-

вый метод является *неявным*. Тогда для нахождения x_n приходится решать нелинейное уравнение

$$\frac{a_0}{h} x_n - b_0 F_n = \tilde{F}(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m}),$$

где $\tilde{F}(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m}) = \sum_{k=1}^m \left(b_k F_{n-k} - \frac{a_k}{h} x_{n-k} \right).$

Часто это уравнение решается методом Ньютона с начальным приближением $x_{n0} = x_{n-1}$.

Числовые коэффициенты в (4.5) определены с точностью до множителя. Поэтому, чтобы устранить этот произвол, полагается

$$\sum_{k=0}^m b_k = 1.$$

В практике численного моделирования большое распространение получили *методы Адамса* (Adams), которые представляют собой частный случай многошаговых методов (4.5), когда производная dv/dt аппроксимируется только по двум точкам t_n и t_{n-1} , т. е. $a_0 = -a_1 = 1$, $a_k = 0$, $k = 2, 3, \dots, m$.

Методы Адамса имеют вид

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \sum_{k=0}^m b_k F_{n-k}. \quad (4.7)$$

В случае $b_0 = 0$ методы Адамса называются *явными*, иначе – *неявными*.

Погрешностью аппроксимации на решении или невязкой разностного метода (4.5) принято называть функцию

$$\varepsilon_n = - \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{h} v_{n-k} + \sum_{k=0}^m b_k F(t_{n-k}, v_{n-k}),$$

получающуюся в результате подстановки точного решения $v(t_{n-k})$ уравнения исходной модели в разностное уравнение (4.5).

В зависимости от выбора коэффициентов a_k, b_k ($k = 0, 1, \dots, m$) определяется порядок погрешности аппроксимации метода при $h \rightarrow 0$.

Установлено, что *наивысший порядок погрешности аппроксимации m -шагового метода Адамса ($b_0 \neq 1$) равен $m+1$, а наивысший порядок погрешности аппроксимации явного метода Адамса ($b_0 = 0$) равен m .*

Сравнивая достоинства и недостатки одношаговых и многошаговых методов, можно отметить следующее. В одношаговых методах для нахождения решения в следующем узле сетки необходимо несколько раз вычислять значение вектор-функции правой части ДУ. Одношаговые методы ти-

па Рунге–Кутта предпочтительны для моделирования с низкими требованиями к точности, когда вычисление производных не связано с большим числом операций. Методы Рунге–Кутта в общем случае нуждаются в меньших объёмах памяти и являются *самостартующими*. В многошаговых методах правая часть ДУ вычисляется один раз, следовательно, алгоритмы, основанные на многошаговых методах, работают быстрее. Основным недостатком многошаговых методов является то, что к началу моделирования по формуле (4.6) требуется знать решение в предыдущих узлах сетки, т. е. они не являются самостартующими.

4.2.4. Примеры многошаговых разностных методов

Явные m -шаговые методы (методы Адамса–Бэшифорта (Bashforth), экстраполяционные методы) приведены в табл. 4.3. Наивысший порядок аппроксимации этих методов $p = m$.

Таблица 4.3

m	Формула
1	$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = F_{n-1}$ – метод Эйлера
2	$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \frac{1}{2}(3F_{n-1} - F_{n-2})$
3	$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \frac{1}{12}(23F_{n-1} - 16F_{n-2} + 5F_{n-3})$
4	$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \frac{1}{24}(55F_{n-1} - 59F_{n-2} + 37F_{n-3} - 9F_{n-4})$
5	$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \frac{1}{720}(190F_{n-1} - 2774F_{n-2} + 2616F_{n-3} - 1274F_{n-4} + 251F_{n-5})$

Подбор коэффициентов осуществляется исходя из обеспечения погрешности аппроксимации ε_n необходимого порядка, т. е. $\varepsilon_n = O(h^p)$.

Неявные m -шаговые методы (методы Адамса–Мултона (Moulton), интерполяционные методы) приведены в табл. 4.4. Наивысший порядок аппроксимации неявных методов $p = m + 1$.

Таблица 4.4

m	Формула
1	$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \frac{1}{2}(F_n + F_{n-1})$ – метод трапеций (неявный метод Эйлера)
2	$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \frac{1}{12}(5F_n + 8F_{n-1} - F_{n-2})$
3	$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \frac{1}{24}(9F_n + 19F_{n-1} - 5F_{n-2} + F_{n-3})$
4	$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = \frac{1}{720}(251F_n + 646F_{n-1} - 264F_{n-2} + 106F_{n-3} - 19F_{n-4})$

В приведённых в табл. 4.4 формулах искомое значение x_n входит нелинейно. При реализации неявных методов могут применяться итерационные методы.

Например, при использовании неявного метода Адамса 4-го порядка аппроксимации в качестве начального приближения x_{n0} можно взять решение, полученное с помощью явного метода Адамса 3-го порядка

$$\frac{x_{n0} - x_{n-1}}{h} = \frac{1}{12}(23F(t_{n-1}, x_{n-1}) - 16F(t_{n-2}, x_{n-2}) + 5F(t_{n-3}, x_{n-3})).$$

Последующие приближения x_{ns} , $s = 1, 2, \dots$ рекомендуется [18] определять, используя итерационный метод

$$\begin{aligned} \frac{x_{ns+1} - x_{n-1}}{h} = \frac{1}{24} & (9F(t_n, x_{ns}) + 19F(t_{n-1}, x_{n-1}) - 5F(t_{n-2}, x_{n-2}) + \\ & + F(t_{n-3}, x_{n-3})), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где s – номер итерации, $s = 1, 2, \dots$.

Если в (4.8) ограничиться только одной итерацией $s = 1$, то получается метод предиктора-корректора.

4.2.5. Устойчивость многошаговых разностных методов

Применение численных методов может приводить к неустойчивости решения и отсутствию сходимости к точному решению даже в тех случаях, когда известно, что точное решение существует и оно единственно. Неустойчивость численного решения может быть вызвана как малыми изменениями начальных условий, так и погрешностями промежуточных вычислений. Численные методы, приводящие к неустойчивым решениям, принято называть *плохо обусловленными* или *некорректными*. Применение плохо обусловленных методов затрудняет проведение численных расчётов.

В соответствии с (4.5) может быть составлено *однородное разностное уравнение*

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_m x_{n-m} = 0, \quad n = m, m+1, \dots, \quad (4.9)$$

коэффициенты которого a_0, \dots, a_m не зависят от n .

Частные решения уравнения (4.9) разыскиваются в виде степенной последовательности $x_n = z^n$. Если произвести подстановки $x_{n-k} = z^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, m$ в (4.9) и сокращение на z^{n-m} , то можно получить уравнение полиномиального вида

$$D(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m = 0, \quad (4.10)$$

не зависящее от n , которое называется *характеристическим уравнением разностного уравнения (разностного метода)* (4.9).

Разностное уравнение (4.9) будет иметь решение

$$x_n = z^n \quad (4.11)$$

тогда и только тогда, когда z является корнем характеристического уравнения (4.10). При кратности корня $r > 1$, частные решения разностного уравнения (4.9) приобретают вид

$$x_n = n^l z^n, \quad l = 0, 1, \dots, r-1.$$

Таким образом, поиск решения уравнения (4.9) сводится к отысканию сеточной функции x_n , удовлетворяющей при всех $n \geq m$ уравнению (4.9) и принимающей при $n = 0, 1, \dots, m-1$ заданные начальные значения x_0, x_1, \dots, x_{m-1} .

При $a_0 \neq 0$ уравнение (4.9) разрешается относительно x_n :

$$x_n = -\frac{a_m}{a_0} x_{n-m} - \frac{a_{m-1}}{a_0} x_{n-m+1} - \dots - \frac{a_1}{a_0} x_{n-1},$$

т. е. решение уравнения существует и единственно.

Разностное уравнение (разностный метод) (4.9) *устойчиво по начальным данным*, если существует такое постоянное число M_1 , не зависящее от n , что при любых начальных данных x_0, x_1, \dots, x_{m-1} для решения справедлива оценка

$$|x_n| \leq M_1 \max_{0 \leq j \leq m-1} |x_j|, \quad n = m, m+1, \dots$$

Следовательно, устойчивость разностного метода означает равномерную по n ограниченность решения.

Устойчивость или неустойчивость уравнения (4.9) по начальным данным полностью определяется расположением корней характеристического

уравнения (4.10) на комплексной плоскости. Принято считать, что выполняется *условие корней*, если все корни z_1, \dots, z_m характеристического уравнения (4.10) лежат внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости z , причём на границе круга кратные корни отсутствуют (рис. 4.6).

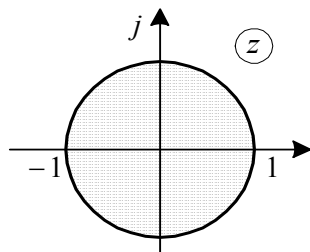


Рис. 4.6. Область выполнения условия корней

Условие корней – необходимое и достаточное условие для устойчивости уравнения (4.9) по начальным данным.

Существует определённое ограничение на порядок аппроксимации устойчивого метода. Доказано, что если метод (4.5) удовлетворяет условию корней и имеет порядок аппроксимации p , то

$$p \leq m + 1 \text{ при нечётном } m, \quad p \leq m + 2 \text{ при чётном } m.$$

Для явных устойчивых m -шаговых методов порядок аппроксимации не превосходит m .

В соответствии с (4.5) может быть записано *неоднородное разностное уравнение*

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_m x_{n-m} = h G_{n-m}, \quad (4.12)$$

где $n = m, m + 1, \dots$, причём значения x_0, x_1, \dots, x_{m-1} заданы, а правая часть G_k ($k = 0, 1, \dots$) – известные функции.

При $a_0 \neq 0$ для каждой правой части уравнения (4.12) удовлетворяет условиям существования и единственности. Решение определяется по рекуррентной формуле

$$x_n = -\frac{a_m}{a_0} x_{n-m} - \frac{a_{m-1}}{a_0} x_{n-m+1} - \dots - \frac{a_1}{a_0} x_{n-1} + h \frac{G_{n-m}}{a_0},$$

исходя из заданных начальных условий x_0, x_1, \dots, x_{m-1} и известной правой части.

Если однородное уравнение (4.9) устойчиво по начальным данным, то уравнение (4.12) будет *устойчивым по правой части* при выполнении неравенства

$$|x_n| \leq M_1 \max_{0 \leq j \leq m-1} |x_j| + M_2 \sum_{k=0}^{n-m} h |G_k|,$$

где M_1, M_2 – постоянные числа, не зависящие от n .

Методы Адамса вида (4.7) всегда удовлетворяют условию корней, так как для них $a_0 = -a_1 = 1$ и в соответствии с (4.11) $z = z_1 = 1$.

4.2.6. Условно устойчивые и абсолютно устойчивые разностные методы

При моделировании процессов в непрерывной системе, представленной в форме (4.2), можно рассматривать аппроксимирующую её *дискретную модель*, записанную в виде разностного уравнения (4.5).

Как было установлено, устойчивость и сходимость разностного метода определяются расположением корней характеристического уравнения (4.9). Однако условие корней является слишком общим и не может учесть некоторые характерные особенности поведения исходной непрерывной модели (4.2). Это условие означает лишь, что при $n \rightarrow \infty$ все решения однородного разностного уравнения, соответствующего (4.5), остаются ограниченными. При выполнении условия корней коэффициенты $b_k, k = 0, 1, 2, \dots, m$, входящие в правую часть уравнения (4.5), никак не влияют на устойчивость.

Предположим, что заранее известна та или иная характерная особенность поведения исходной непрерывной модели. Тогда естественно требовать, чтобы эта особенность сохранялась и у дискретной модели. Конечно, такое требование ведёт к сужению класса допустимых разностных методов.

Рассмотрим методы численного моделирования непрерывных систем (4.2), для которых известно, что процессы в них *асимптотически устойчивы* при любых начальных условиях.

В качестве модельного (тестового) примера, иллюстрирующего указанное свойство, может быть выбрано аperiodическое звено, представленное ДУ

$$T \frac{dv}{dt} + v = 0, \quad t > 0, \quad v(0) = v_0, \quad (4.13)$$

где $T > 0$ – постоянная времени звена. Свободный процесс на выходе звена имеет вид

$$v(t) = v_0 e^{\lambda t}, \quad \lambda = -T^{-1} < 0,$$

который монотонно убывает при $t \rightarrow \infty$. Для любых значений шага $h > 0$ выполняется неравенство

$$|v(t+h)| < |v(t)|, \quad (4.14)$$

означающее асимптотическую устойчивость процесса. Это неравенство должно выполняться и для дискретной модели.

Пусть дискретная модель описывается разностным методом Эйлера

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.15)$$

Из уравнения (4.15) можно получить

$$x_{n+1} = (1 + h\lambda)x_n = qx_n.$$

Условие, аналогичное (4.14), т. е.

$$|x_{n+1}| < |x_n|, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.16)$$

для разностного метода (4.15) будет выполнено тогда и только тогда, когда $|q| < 1$. В случае $\lambda < 0$ это условие эквивалентно выполнению ограничения на шаг h :

$$0 < h < 2/|\lambda|. \quad (4.17)$$

Действительно, можно записать последовательность неравенств:

$$|1 + h\lambda| < 1 \Rightarrow -1 < 1 + h\lambda < 1 \Rightarrow -2 < h\lambda < 0 \Rightarrow 0 < h|\lambda| < 2,$$

откуда следует (4.17).

Таким образом, разностный метод (4.15) устойчив в смысле выполнения условия (4.16), если шаг h удовлетворяет (4.17).

Разностный метод (4.12) называется *абсолютно устойчивым*, если он устойчив при любых $h > 0$, и *условно устойчивым*, если он устойчив при некоторых ограничениях на шаг h .

Метод Эйлера (4.15) условно устойчив при условии (4.17).

Примером абсолютно устойчивого метода для уравнения (4.13) с параметром $\lambda < 0$ является неявный метод Эйлера

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \lambda x_{n+1},$$

для которого $|q| = |1 - h\lambda|^{-1} < 1$ при любых $h > 0$.

Обобщая полученные результаты на асимптотически устойчивые модели СУ более высокого порядка, можно утверждать, что применяемые явные разностные методы будут условно устойчивыми. Среди применяемых неявных методов существуют абсолютно устойчивые.

Условная устойчивость является недостатком явного метода, так как вынуждает брать слишком мелкий шаг h при моделировании. Например, если параметр $\lambda = -200$, то условие (4.17) выполняется при шаге $h < 0,01$. Для того чтобы вычислить процесс $v(t)$ при $t=1$, надо произвести не менее ста шагов по методу Эйлера. Неявный метод лишён этого недостатка, однако его применение к модели (4.2) приводит к необходимости решения

на каждом шаге системы конечных уравнений, в общем случае нелинейной.

4.2.7. Жёсткие модели систем

Рассмотренные численные методы исследования поведения моделей, представленных одним уравнением (4.2), без изменения переносятся на модели, характеризуемые системами ДУ (4.1). Однако в случае численного решения системы ДУ могут появиться дополнительные трудности, связанные с разномасштабностью (разнотемповостью) процессов в системе, представленной данной моделью.

Историческая справка. Ещё в 50-х годах прошлого века при моделировании динамических систем, описывающих, в частности, кинетику (кинетика – область знаний, которая изучает скорость и механизмы химических реакций) реагирующих друг с другом химических веществ, исследователи столкнулись с «неприятным» явлением. Расчёты производились с помощью хорошо отлаженных программ с применением методов Рунге–Кутты при автоматическом выборе шага интегрирования. В процессе расчётов шаг численного интегрирования быстро уменьшался до минимума так, что часто не было никакой возможности получить процесс на требуемом для практических приложений отрезке времени, даже используя наиболее мощные ЭВМ. Визуальный анализ правых частей уравнений указывал на существенную разницу в значениях коэффициентов; они отличались на несколько порядков. Затратив значительное машинное время, удалось получить начальные отрезки траекторий и провести анализ ситуации. Выявилась следующая характерная картина.

В начале процесса происходит значительное изменение вектора переменных $\mathbf{v}(t)$ и выбираемый программой шаг численного интегрирования вполне разумен: он сравнительно мал, но так и должно быть для интегрирования столь быстро меняющихся функций. Через небольшое время t характер поведения резко меняется. Процесс становится значительно более гладким, медленно меняющимся, но программа этого «не замечает» и выбирает столь же малый шаг. Попытки принудительно «навязать» программе выбор существенно большего шага, согласованного с гладкостью процесса, немедленно приводили к вычислительной катастрофе – стремительно расходящемуся процессу. Модели с таким поведением получили название *жёстких*.

Жёсткие модели нередко встречаются в приложениях, например, в задачах ядерной физики, механики, электротехники, автоматического управления, экономики, биологии, медицины и т. д. Поэтому изучению свойства жёсткости моделей следует уделять самое пристальное внимание.

Пояснить возникающие трудности можно на примере поведения автономной линейной системы, состоящей из двух независимых подсистем:

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt} + a_1 v_1 &= 0, \\ \frac{dv_2}{dt} + a_2 v_2 &= 0\end{aligned}\tag{4.18}$$

с начальными условиями $v_1(0), v_2(0)$, где $a_1 > 0, a_2 > 0$ – параметры системы.

Система (4.18) характеризуется свободными движениями

$$v_1(t) = v_1(0) e^{-a_1 t}, \quad v_2(t) = v_2(0) e^{-a_2 t},$$

монотонно убывающими с ростом t .

Предположим, что значение параметра a_2 значительно превышает значение a_1 ($a_2 \gg a_1$). Тогда переменная $v_2(t)$ затухает гораздо быстрее, чем $v_1(t)$, и, начиная с некоторого момента времени t , поведение системы, характеризуемое вектором $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t))^T$, почти полностью определяется изменением переменной $v_1(t)$.

Однако при нахождении движения системы (4.18) разностным методом шаг интегрирования h определяется изменением переменной $v_2(t)$, несущественной с точки зрения поведения системы. Например, при использовании явного метода Эйлера

$$\frac{x_{1n+1} - x_{1n}}{h} + a_1 x_{1n} = 0, \quad \frac{x_{2n+1} - x_{2n}}{h} + a_2 x_{2n} = 0, \tag{4.19}$$

где $x_{in} = x_i(t_n)$, $i = 1, 2$, движения будут устойчивы, если шаг h удовлетворяет одновременно двум неравенствам: $a_1 h \leq 2$, $a_2 h \leq 2$. Поскольку выполняется $a_2 \gg a_1 > 0$, условие устойчивости приводит к ограничению шага $h \leq 2/a_2$.

Из анализа приведённого примера сразу становится ясным, что каждое из уравнений системы (4.19) следует решать независимо друг от друга со своим шагом интегрирования h_j , $j = 1, 2$; $h_j \leq 2/a_j$. Однако аналогичные трудности возникают и при исследовании поведения линейной модели СУ любой сложности, представленной в форме Коши

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v}, \tag{4.20}$$

если матрица коэффициентов \mathbf{A} этой системы имеет большой разброс собственных чисел.

Рассмотрим ещё один, часто встречающийся в литературе пример. Система описывается линейным однородным ДУ 2-го порядка

$$\ddot{y} + 100\dot{y} + 0,9999y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Аналитическое решение ДУ приводит к движению вида

$$y(t) = -0,0001e^{-99,99t} + 1,0001e^{-0,01t}.$$

Первая составляющая движения имеет начальное значение, равное $-0,0001$. Эта составляющая быстро затухает. Вторая составляющая движения имеет начальное значение в 10^4 раз больше и убывает в 10^4 раз медленнее. Таким образом, поведение системы определяется медленной составляющей.

График точного решения приведён на рис. 4.7, а. На рис. 4.7, б представлен график процесса, полученный с использованием численного метода Эйлера. Расходящееся численное решение при неудачно подобранном шаге $h = 0,022$ включает высокочастотную составляющую.

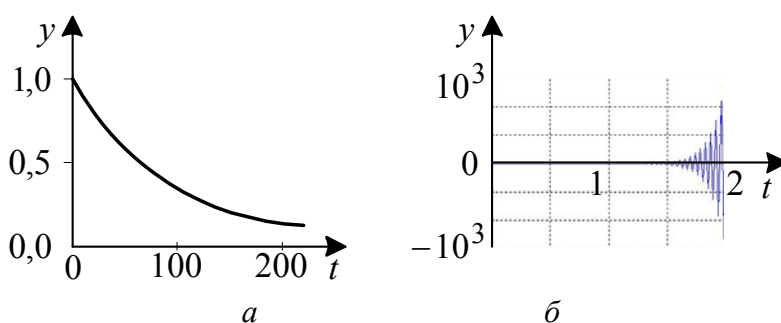


Рис. 4.7. Графики решений: а – аналитического; б – численного

При анализе поведения рассматриваемых систем следует принимать во внимание два существенных фактора:

- 1) строение поля направлений траекторий в окрестности изучаемой временной траектории;
- 2) свойства матрицы \mathbf{A} , а в более общем, нелинейном случае – свойства матрицы Якоби $\mathbf{J}(\mathbf{v})$.

Анализ поля направлений жёстких моделей показал характерную картину, представленную на рис. 4.8. Траектория $\mathbf{v}(t)$ состоит из короткого участка быстрого её изменения, так называемого «пограничного слоя», и длительного участка очень медленной её эволюции, который обычно называют «квазистационарным режимом». Основные трудности связаны именно с расчётом последнего.

Пограничный слой интегрируется с очень малым шагом, но он настолько мал, что время, затраченное на численное моделирование процесса, вполне приемлемо. На рис. 4.8 при помощи «микроскопа с последовательно увеличивающимся разрешением» показана структура поля направ-

лений в окрестности $v(t)$ в квазистационарном режиме. Сначала видны траектории, отвесно падающие на $v(t)$. При последующем «увеличении» видно, что, приближаясь к траектории $v(t)$, они поворачиваются, стремясь двигаться параллельно $v(t)$. И лишь при ещё большем «увеличении» видна картина практически параллельных линий.

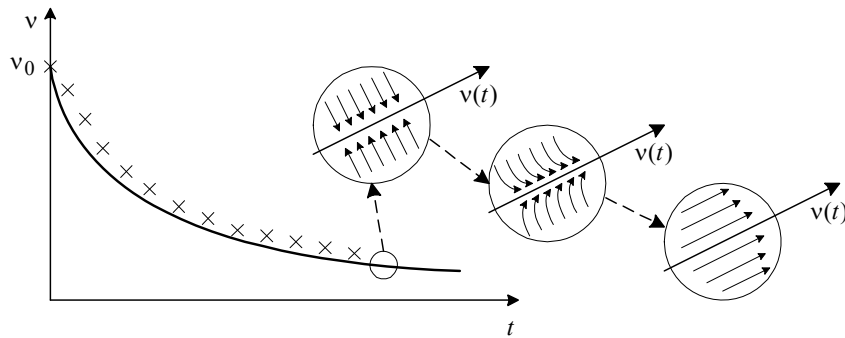


Рис. 6.8. Поле направлений жёсткой модели

Если из точки $v(t)$ траектории сдвинуться по касательной в точку $v^*(t+h) = v(t) + h\dot{v}(t)$, то, хотя расстояние $v(t+h) - v^*(t+h) = O(h^2)$ ничтожно, фазовая скорость $\dot{v}^*(t+h)$ не имеет ничего общего с $\dot{v}(t+h)$. Направление фазовой скорости $\dot{v}^*(t+h)$ перпендикулярно к траектории $v(t)$. То же самое получается и в случае представления $v^*(t+h)$ отрезком ряда Тейлора при том значении h , которое можно было бы использовать для численного интегрирования квазистационарного режима.

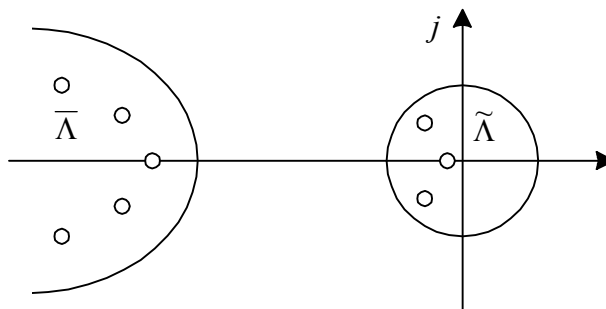


Рис. 4.9. Спектры собственных значений матрицы \mathbf{A} жёсткой модели

Анализ матрицы \mathbf{A} в окрестности траектории показал специфическую картину распределения собственных значений – спектра $\Lambda = \{\lambda_k\}$ матрицы \mathbf{A} . На комплексной плоскости (рис. 4.9) выделяются две области Λ – область «жёсткого» $\bar{\Lambda} = \{\lambda_i\}$ и область «мягкого» $\tilde{\Lambda} = \{\lambda_j\}$ спектров.

Определение

Модель системы, представленной ДУ (4.20) с постоянной матрицей \mathbf{A} размера $n \times n$ называется *жесткой*, если:

- 1) $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, т. е. система асимптотически устойчива по Ляпунову;
- 2) отношение

$$S = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_k|}{\min_{1 \leq k \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_k|}$$

велико, т. е. $S \gg 1$ (на практике обычно принимают $S > 10$).

Отношение S принято называть *числом жесткости* модели (4.20).

Если модель системы является *нестационарной* и матрица \mathbf{A} зависит от переменной t , то $\lambda_k = \lambda_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Для каждого t можно определить число жесткости

$$S(t) = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_k(t)|}{\min_{1 \leq k \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_k(t)|}.$$

В этом случае свойство жесткости может зависеть от длины отрезка интегрирования.

Модель нестационарной системы, представленной уравнением

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{v}$$

называется жесткой на временном сегменте $[0, T]$, если:

- 1) $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) $\forall t \in [0, T]$;
- 2) число $\sup_{t \in [0, T]} S(t)$ велико.

Процессы в жесткой модели (4.20) содержат как быстро убывающие, так и медленно убывающие составляющие. Начиная с некоторого значения $t > 0$, поведение системы почти полностью определяется медленно убывающими составляющими. Однако при использовании явных разностных методов быстро убывающие составляющие отрицательно влияют на устойчивость, что вынуждает выбирать шаг интегрирования h слишком малым.

Выход из этой парадоксальной ситуации был найден благодаря применению *неявных абсолютно устойчивых разностных методов*.

Например, систему (4.18) можно моделировать, используя неявный метод Эйлера

$$\frac{x_{1\,n+1} - x_{1\,n}}{h} + a_1 x_{1\,n+1} = 0, \quad \frac{x_{2\,n+1} - x_{2\,n}}{h} + a_2 x_{2\,n+1} = 0,$$

который абсолютно устойчив при всех $h > 0$. Поэтому шаг интегрирования h в этом случае можно выбирать, руководствуясь лишь соображениями точности, а не устойчивости.

Понятие жёсткости можно распространить и на нелинейную модель вида

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{v}(t)), \quad \mathbf{v}(0). \quad (4.21)$$

Для этого следует зафиксировать какое-либо невозмущённое по Ляпунову движение $\mathbf{v}^*(t)$, удовлетворяющее (4.21), и образовать разность (приращение) вида $\delta\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}^*(t)$. Эта разность удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\delta\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{v}^*(t) + \delta\mathbf{v}(t)) - \mathbf{F}(t, \mathbf{v}^*(t)). \quad (4.22)$$

Если считать, что $\delta\mathbf{v}(t)$ представляет собой малое возмущение невозмущённого движения $\mathbf{v}^*(t)$, то при разложении в ряд Тейлора правой части (4.22) можно получить

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{v}^* + \delta\mathbf{v}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{v}^*) = \mathbf{J}(t, \mathbf{v}^*)\delta\mathbf{v} + O(\|\delta\mathbf{v}\|),$$

где

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{v}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(t, \mathbf{v}^*)}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial F_1(t, \mathbf{v}^*)}{\partial v_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n(t, \mathbf{v}^*)}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial F_n(t, \mathbf{v}^*)}{\partial v_n} \end{pmatrix} - \text{матрица Якоби.}$$

Через $O(\|\delta\mathbf{v}\|)$ обозначен вектор величин более высокого, чем первый, порядка малости по $\delta\mathbf{v}$.

В результате разложения уравнение (4.22) принимает вид

$$\frac{d\delta\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{J}(t, \mathbf{v}^*(t))\delta\mathbf{v}(t) + O(\|\delta\mathbf{v}\|). \quad (4.23)$$

При отбрасывании в (4.23) малого вектора $O(\|\delta\mathbf{v}\|)$ получается уравнение модели первого приближения (линеаризованной модели)

$$\frac{d\delta\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{J}(t, \mathbf{v}^*(t))\delta\mathbf{v}(t). \quad (4.24)$$

Записанное уравнение линейно относительно вектора $\delta\mathbf{v}(t)$, так как функция $\mathbf{v}^*(t)$ задана. В общем случае модель (4.24) нестационарная.

Пусть $\lambda_k = \lambda_k(t, \mathbf{v}^*(t))$ ($k=1, 2, \dots, n$) – собственные числа матрицы $\mathbf{J}(t, \mathbf{v}^*(t))$. Число жёсткости нелинейной модели системы определяется как

$$S(t) = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_k(t, \mathbf{v}^*(t))|}{\min_{1 \leq k \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_k(t, \mathbf{v}^*(t))|}.$$

Нелинейная модель (4.21) называется *жёсткой на временном сегменте* $[0, T]$ относительно невозмущённого движения $\mathbf{v}^*(t)$, если:

- 1) $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ ($k=1, 2, \dots, n$) $\forall t \in [0, T]$;
- 2) число $\sup_{t \in [0, T]} S(t)$ велико ($\sup_{t \in [0, T]} S(t) \gg 1$).

Структурная сложность СУ, наличие нелинейных характеристик элементов и постоянных времени динамических звеньев, нередко отличающихся друг от друга на несколько порядков, могут привести к появлению жёстких составляющих движений в различных частях модели системы («пространственная жёсткость») и на разных интервалах времени («временная жёсткость»). Установить заранее свойство жёсткости без целенаправленного изучения поведения системы не представляется возможным, поэтому для нелинейных моделей СУ со сложной структурой необходимо использовать специальные устойчивые неявные многошаговые разностные методы (схемы) численного моделирования.

4.2.8. Чисто неявные разностные методы

В настоящее время при моделировании жёстких СУ широко используется *метод Гира* (Gear), в основу которого положены *чисто неявные многошаговые разностные методы высокого порядка точности*.

Разностный метод

$$\frac{1}{h} \sum_{k=0}^m a_k x_{n-k} = F(t_n, x_n) \quad (4.25)$$

называется *чисто неявным*. Выражение (4.25) является частным случаем (4.6), если положить $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, $b_0 = 1$. Правая часть $F(t, v)$ вычисляется только при $t = t_n$, а производная dv/dt аппроксимируется в точке t_n по нескольким предыдущим точкам

Для отыскания x_n используется нелинейное уравнение вида

$$a_0 x_n - h F(t_n, x_n) = - \sum_{k=1}^m a_k x_{n-k},$$

которое можно решать тем или иным итерационным методом.

Наивысший достижимый порядок p погрешности аппроксимации чисто неявного m -шагового метода равен m . Метод Гира использует чисто неявные схемы наивысшего порядка аппроксимации.

Разностные схемы метода Гира представлены в табл. 4.5. Их также называют формулами «дифференцирования назад».

Таблица 4.5

m	Формула
1	$x_n - x_{n-1} = hF(t_n, x_n)$ – неявный метод Эйлера
2	$\frac{3}{2}x_n - 2x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-2} = hF(t_n, x_n)$
3	$\frac{11}{6}x_n - 3x_{n-1} + \frac{3}{2}x_{n-2} - \frac{1}{3}x_{n-3} = hF(t_n, x_n)$
4	$\frac{25}{12}x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} - \frac{4}{3}x_{n-3} + \frac{1}{4}x_{n-4} = hF(t_n, x_n)$

Для практических расчётов используют разностные схемы порядков до $p = 10$. Чисто неявные разностные методы обладают хорошими свойствами устойчивости, позволяющими использовать их для моделирования жёстких СУ.

4.2.9. Примеры жёстких моделей систем

Ниже приводятся различные жёсткие модели систем, представленные в виде ДУ.

Пример 4.7. Рассматривается поведение линейной стационарной модели простейшей системы [19] на отрезке времени $0 \leq t \leq 1$, представленной ДУ

$$\frac{dx}{dt} = -ax + u(t), \quad u(t) = a \sin t + \cos t, \quad x(0) = 1,$$

где $u(t)$ – управляющее воздействие, причём параметр $a = 1000$.

Собственное значение матрицы Якоби равно -1000 , так что модель можно считать жёсткой. На рис. 4.10 приведён график процесса, построенный с использованием метода Гира пакета Simulink. На отрезке времени $0 \leq t \leq 0,002$ эта модель не является жёсткой.

Компонента x_1 быстро возрастает на сегменте $[0, 1,25]$ от значения $x_1 = 4$ до $x_1 = 1,18 \cdot 10^5$. Затем процесс на сегменте $[1,25, 17,4]$ убывает почти до единицы, а на остальном промежутке медленно растёт до начального значения. В дальнейшем процесс периодически повторяется. Компонента x_2 убывает на промежутке $[0, 1,17]$ до значения $x_2 = 0,003$, затем возрастает до значения $x_2 = 1770$ на промежутке $[1,17, 17,4]$, и далее медленно убывает на остальной части периода. Компонента x_3 на промежутке $[0, 3,87]$ быстро возрастает до значения $x_3 = 3,1 \cdot 10^4$, затем убывает на промежутке $[3,87, 115]$ почти до единицы и медленно восстанавливает своё начальное значение к концу периода.

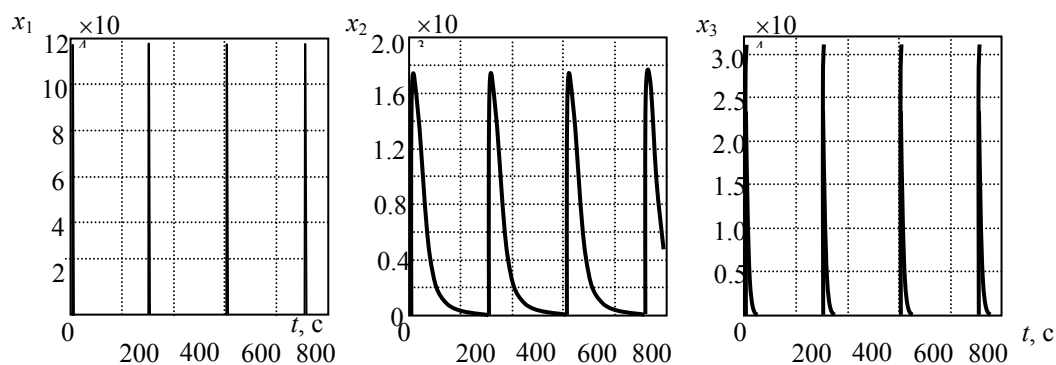


Рис. 4.12. Процессы в системе управления химическими реакциями для примера 4.8

Пример 4.9. Рассматривается нелинейная модель химической кинетики:

$$\frac{dx_1}{dt} = -0,013x_1 + 10^3 x_1 x_3,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2,5 \cdot 10^3 x_2 x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0,013x_1 - 10^3 x_1 x_3 - 2,5 \cdot 10^3 x_2 x_3, \quad t, \text{ c}$$

где $x_1(0) = x_2(0) = 1$; $x_3(0) = 0$.

Матрица Якоби

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -0,013 + 10^3 x_3 & 0 & 10^3 x_1 \\ 0 & 2,5 \cdot 10^3 x_3 & 2,5 \cdot 10^3 x_2 \\ 0,013 - 10^3 x_3 & -2,5 \cdot 10^3 x_3 & -10^3 x_1 - 2,5 \cdot 10^3 x_2 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения, изменяющиеся в процессе химической реакции.

Структурная схема для моделирования с использованием пакета Simulink приведена на рис. 4.13. Процессы иллюстрируются на рис. 4.14.

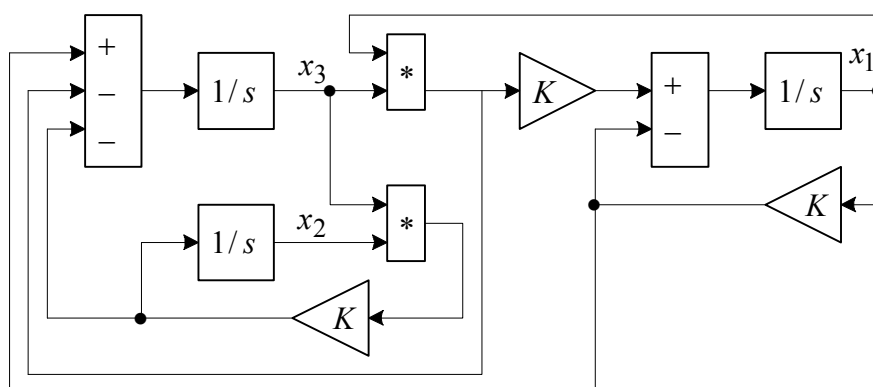


Рис. 4.13. Структурная схема модели химической кинетики для примера 4.9

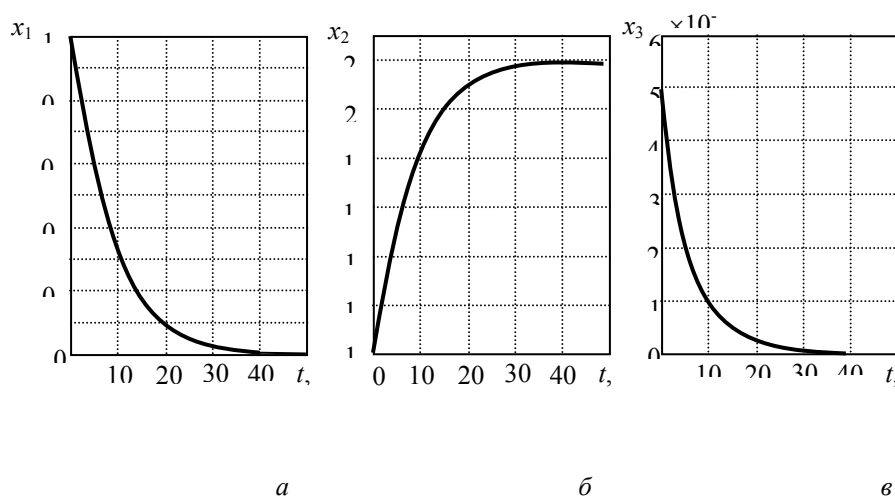


Рис. 4.14. Процессы для различных компонент модели химической кинетики для примера 4.9

4.2.10. Устойчивость жёстких моделей систем

При исследовании устойчивости жёстких моделей СУ с применением разностных методов обычно рассматривается векторно-матричное уравнение вида

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (4.26)$$

или соответствующее ему эквивалентное уравнение

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \Lambda\mathbf{u},$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{u}$, причём \mathbf{T} – невырожденная матрица эквивалентного преобразования переменных; $\Lambda = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ – диагональная матрица, элементами $\lambda = \sigma + j\omega$ которой являются собственные числа матрицы \mathbf{A} . Тогда характеристическое уравнение, соответствующее разностному уравнению, записывается в виде $D(z, h\lambda) = 0$, а границу условия абсолютной устойчивости можно рассматривать либо как окружность единичного радиуса в комплексной плоскости (см. рис. 4.6), либо как соответствующую этой окружности кривую (рис. 4.15) в комплексной плоскости с координатами $\operatorname{Re} h\lambda = h\sigma$, $\operatorname{Im} h\lambda = jh\omega$. Уравнение этой кривой получается, если в характеристическом уравнении $D(z, h\lambda) = 0$ положить $|z| = 1$ и решить его относительно $h\lambda$. Полученная кривая разделяет комплексную плоскость $h\lambda$ на области абсолютной устойчивости и неустойчивости. Различный вид этих областей порождает разнообразные определения абсолютной устойчивости.

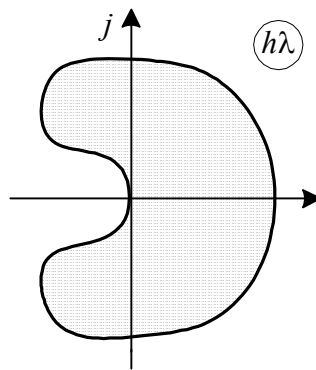


Рис. 4.15. Область абсолютной устойчивости

Рассмотрим модельное уравнение 1-го порядка

$$\frac{dv}{dt} = \lambda v, \quad (4.27)$$

где λ – произвольное комплексное число. Свойства различных разностных методов принято изучать и сопоставлять с помощью этого модельного уравнения. Для того чтобы уравнение (4.27) действительно моделировало исходную систему (4.26), необходимо рассматривать его при всех λ , которые являются собственными числами матрицы \mathbf{A} .

Разностный метод (4.5), применённый к модельному уравнению (4.27), имеет вид

$$\frac{1}{h} \sum_{k=0}^m a_k x_{n-k} - \sum_{k=0}^m \lambda b_k x_{n-k} = 0$$

или

$$\sum_{k=0}^m (a_k - \mu b_k) x_{n-k} = 0, \quad n = m, m+1, \dots \quad (4.28)$$

где $\mu = h\lambda$ – комплексный параметр.

При поиске решения уравнения (4.28) в виде (4.11) характеристическое уравнение может быть записано как

$$D(z, \mu) = \sum_{k=0}^m (a_k - \mu b_k) z^{m-k} = 0. \quad (4.29)$$

В отличие от (4.10), его коэффициенты зависят от параметра $\mu = h\lambda$. Ранее коэффициенты b_k не учитывались. Следует заметить, что при малых μ корни уравнений (4.10) и (4.29) близки.

Областью устойчивости разностного метода (4.5) называется множество всех точек комплексной плоскости $\mu = h\lambda$, для которых данный метод, применённый к модельному уравнению (4.27), является устойчивым.

Пример 4.10. Исследуем явный метод Эйлера

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = F(t_n, x_n).$$

При замене F_n на λx_n этот метод принимает вид

$$x_{n+1} = (1 + \mu)x_n, \quad \mu = h\lambda.$$

Условие устойчивости $|1 + \mu| \leq 1$ для комплексного параметра $\mu = \mu_0 + j\mu_1$ будет означать, что $(\mu_0 + 1)^2 + \mu_1^2 \leq 1$. Область устойчивости явного метода Эйлера представляет собой круг единичного радиуса с центром в точке с координатами $(-1, j0)$ (рис. 4.16, а).

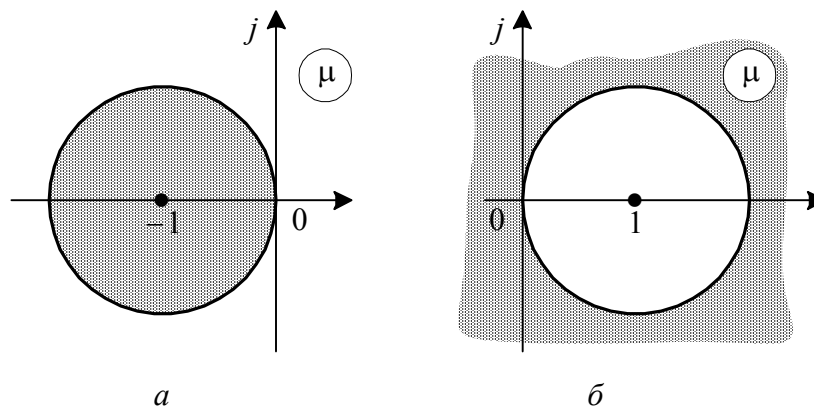


Рис. 4.16. Области устойчивости метода Эйлера: а – явного; б – неявного

Пример 4.11. Исследуем неявный метод Эйлера

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = F(t_{n+1}, x_{n+1}).$$

При замене F_{n+1} на λx_{n+1} получаем

$$x_{n+1} = (1 - \mu)^{-1} x_n.$$

Тогда можно записать

$$|1 - \mu|^{-1} \leq 1 \text{ или } |1 - \mu| \geq 1.$$

Область устойчивости располагается вне круга единичного радиуса с центром в точке $(1, j0)$ (рис. 4.16, б).

В случае жёстких моделей, кроме обычных понятий устойчивости разностного метода (по начальным данным, по правой части), используют и другие, более узкие понятия устойчивости.

Разностный метод называется А-устойчивым, если область его устойчивости совпадает с открытой левой полуплоскостью (рис. 4.17, а), где $\operatorname{Re} \mu < 0$.

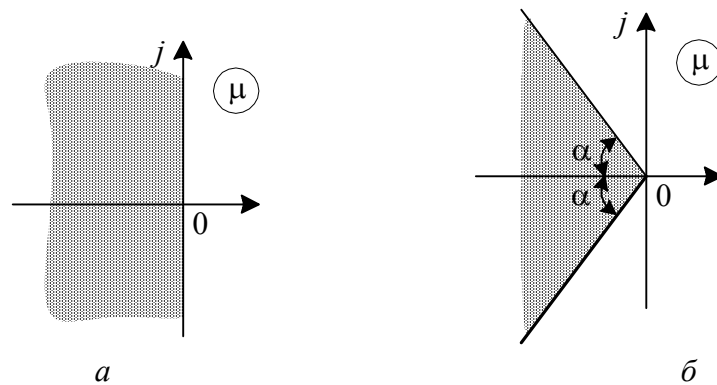


Рис. 4.17. Области устойчивости разностного метода:
а – А-устойчивого; б – А(α)-устойчивого

Следует отметить, что модельное уравнение (4.27) при $\operatorname{Re} \mu < 0$ асимптотически устойчиво. Поэтому сущность приведённого выше определения состоит в том, что А-устойчивый разностный метод является абсолютно устойчивым (устойчивым при любых $h > 0$), если устойчива исходная модель.

Неявный метод Эйлера является А-устойчивым, а явный метод Эйлера таким не является.

Пример 4.12. Рассмотрим одношаговый метод 2-го порядка точности

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \frac{1}{2}(F(t_{n+1}, x_{n+1}) + F(t_n, x_n)).$$

Для уравнения (4.27) метод принимает вид

$$x_{n+1} = qx_n,$$

где $q = (1 + 0,5\mu)/(1 - 0,5\mu)$. Неравенство $|q| \leq 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} \mu \leq 0$. Следовательно, метод является А-устойчивым.

Таким образом, при моделировании жёстких систем было бы желательно пользоваться именно А-устойчивыми методами, поскольку условия их применения не накладывают ограничений на шаг h . Однако теоретические исследования показали, что класс А-устойчивых методов весьма узок. В частности, среди линейных многошаговых разностных методов вида (4.5) не существует явных А-устойчивых методов. Существуют неявные многошаговые А-устойчивые методы (пример 4.12), порядок точности которых не выше двух.

С целью расширения класса устойчивых методов вводится другое понятие устойчивости.

Разностный метод называется $A(\alpha)$ -устойчивым, если область его устойчивости образована углом $|\arg(-\mu)| < \alpha$, $\mu = h\lambda$ (рис. 4.17, б) на комплексной плоскости.

В частности, понятие $A(\pi/2)$ -устойчивость совпадает с понятием А-устойчивости.

Доказано [18], что ни для какого α не существует явного $A(\alpha)$ -устойчивого линейного многошагового метода.

В настоящее время получены $A(\alpha)$ -устойчивые неявные методы 3-го и 4-го порядков точности. К ним относятся, в частности, чисто неявные многошаговые разностные схемы. Например, разностная схема Гира 4-го порядка точности (см. табл. 4.5)

$$\frac{25x_n - 48x_{n-1} + 36x_{n-2} - 16x_{n-3} + 3x_{n-4}}{12h} = F(t_n, x_n)$$

$A(\alpha)$ -устойчива при некотором α .

Необходимо подчеркнуть, что все приведённые определения типов устойчивости справедливы только для линейных систем, моделируемых с постоянным шагом h .

Теория устойчивости для нелинейных систем, моделируемых с переменным шагом, в настоящее время не разработана. Имеются только частные результаты, подтверждающие, например, А-устойчивость неявного метода Эйлера. Однако многолетняя практика моделирования СУ показы-

вает, что выводы, полученные на основе теории устойчивости линейных моделей, можно применять к нелинейным моделям.

4.2.11. Системные методы численного моделирования

Рассмотренная ранее группа методов численного моделирования относится к числу скалярных. Существуют также системные (матричные) численные методы [22], которые сводятся к следующему.

Решение системы уравнений (4.1) ищется в векторном виде

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Phi(\mathbf{J}, H)\mathbf{F}_n, \quad (4.30)$$

где $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}(t_n)$, $\mathbf{F}_n = \mathbf{F}(t_n, \mathbf{v}_n)$. Матричный множитель Φ в (4.30) играет ту же роль, что и шаг интегрирования h в методе Эйлера. Требуется определённым образом подобрать матрицы \mathbf{J} и Φ .

Матрица Φ выбирается в виде

$$\Phi(\mathbf{J}, H) = \int_0^H e^{\mathbf{J}\tau} d\tau, \quad (4.31)$$

где $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}(t_n, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}$ – матрица Якоби, при этом шаг H определяется соотношением

$$H = h \cdot 2^N. \quad (4.32)$$

Здесь h – начальный шаг интегрирования. Верхняя граница для h определяется соотношением

$$h \leq \|\mathbf{J}\|^{-1}. \quad (4.33)$$

Для быстрого вычисления матрицы (4.31) можно воспользоваться рекуррентным соотношением

$$\Phi_{\eta+1} = \Phi_{\eta}(2\mathbf{E} + \mathbf{J}\Phi_{\eta}), \quad \eta = \overline{0, N-1}, \quad (4.34)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, N – число шагов.

Начальную матрицу целесообразно выбрать как

$$\Phi_0 = h(\mathbf{E} - \mathbf{J}h/2)^{-1}. \quad (4.35)$$

Таким образом, алгоритм системного метода численного моделирования состоит из следующих этапов:

1. Вычисление матрицы \mathbf{J} .
2. Выбор шага h по формуле (4.33).
3. Вычисление матрицы Φ_0 по формуле (4.35).

4. Вычисление матрицы Φ_N по формуле (4.34).
5. Вычисление шага H по формуле (4.32).
6. Вычисление \mathbf{v}_{n+1} по формуле (4.30).

Системные методы численного моделирования на практике применяются значительно реже, чем скалярные.

4.2.12. Погрешности численного моделирования

При моделировании СУ с использованием численных методов вместо точного решения $\mathbf{v}(t_n)$ всегда имеет место приближённое решение \mathbf{x}_n . Ниже рассматриваются основные причины возникновения погрешностей.

Неустраняемая погрешность $\varepsilon_{\text{ну}}$ в исходных данных модели. Вектор начальных условий \mathbf{v}_0 , а также параметры $\{a_i\}$, характеризующие модель, обычно точно не известны и могут определяться, например, в результате измерений. В этом случае вместо исходной модели (4.1) рассматривается близкая к ней модель

$$\frac{d\tilde{\mathbf{v}}(t)}{dt} = \tilde{\mathbf{F}}(t, \tilde{\mathbf{v}}(t)), \quad \tilde{\mathbf{v}}(t_0) = \tilde{\mathbf{v}}_0 \neq \mathbf{v}_0.$$

Тогда *неустраняемой погрешностью в исходных данных модели* называется норма разности

$$\varepsilon_{\text{ну } n} = \|\tilde{\mathbf{v}}(t_n) - \mathbf{v}(t_n)\|.$$

Методическая погрешность (погрешность метода) $\varepsilon_{\text{м}}$. Эта погрешность полностью обусловлена применяемым численным методом и не зависит от характеристик ЭВМ. Например, погрешность может быть обусловлена применением формул численного дифференцирования

$$\frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{h}$$

или заменой интеграла от правой части уравнения (4.2) конечной суммой

$$\int_0^t F(t, v) dt \rightarrow h \sum_{k=0}^m b_k F(t_{n-k}, x_{n-k}).$$

Методическая погрешность определяется выражением

$$\varepsilon_{\text{м } n} = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{v}(t_n)\|,$$

где \mathbf{x}_n – приближённое решение, зависящее от применяемого метода.

Погрешность округления ε_o . Эта погрешность связана с приближённым представлением вещественных чисел в ЭВМ, обусловленным ограниченностью разрядной сетки. Хотя исходные данные представляются в ЭВМ с большой точностью, накопление погрешностей в процессе вычислений может привести к значительной результирующей погрешности, а некоторые алгоритмы из-за этого могут оказаться и вовсе не пригодными для моделирования на ЭВМ.

Погрешностью округления называется выражение

$$\varepsilon_{on} = \|\mathbf{x}_{on} - \mathbf{x}_n\|,$$

где \mathbf{x}_{on} – значение векторной величины \mathbf{x}_n после округления.

Погрешность трансформации ε_T . Погрешность трансформации возникает при вычислении значения переменной \mathbf{x}_n на основе полученных неточных предыдущих значений $\tilde{\mathbf{x}}_{n-1}, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{n-m}$. Их неточность может быть порождена как аппроксимацией модели и выбором соответствующей разностной схемы, так и округлением вычисляемых значений переменных. Данная погрешность зависит от функции φ преобразования переменных, для которой

$$\mathbf{x}_n = \varphi(t_n, \mathbf{x}_{n-1}, \dots, \mathbf{x}_{n-m}) \neq \tilde{\mathbf{x}}_n = \varphi(t_n, \tilde{\mathbf{x}}_{n-1}, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{n-m}).$$

Таким образом, **погрешность трансформации** определяется как

$$\varepsilon_{Tn} = \|\tilde{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_n\|$$

Схема формирования погрешностей при численном моделировании приведена на рис. 4.18.

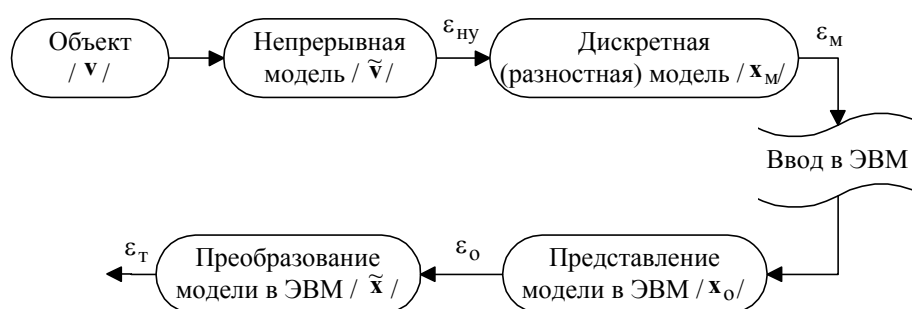


Рис. 4.18. Схема формирования погрешностей

Указанные причины возникновения погрешностей образуют ошибки численного моделирования двух типов:

1) **глобальная ошибка** – оценивается нормой разности между точным и вычисленным решениями, определяющей суммарную погрешность, накопившуюся с момента начала вычислений

$$\varepsilon_n = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{v}(t_n)\|;$$

2) *локальная ошибка* – оценивается нормой разности погрешностей, вносимых в вычислительный процесс на каждом шаге

$$e_n = \|\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}\|.$$

Геометрическая иллюстрация типов погрешностей в пределах шага дискретизации по времени (без учёта неустранимой погрешности в исходных данных) приведена на рис. 4.19.

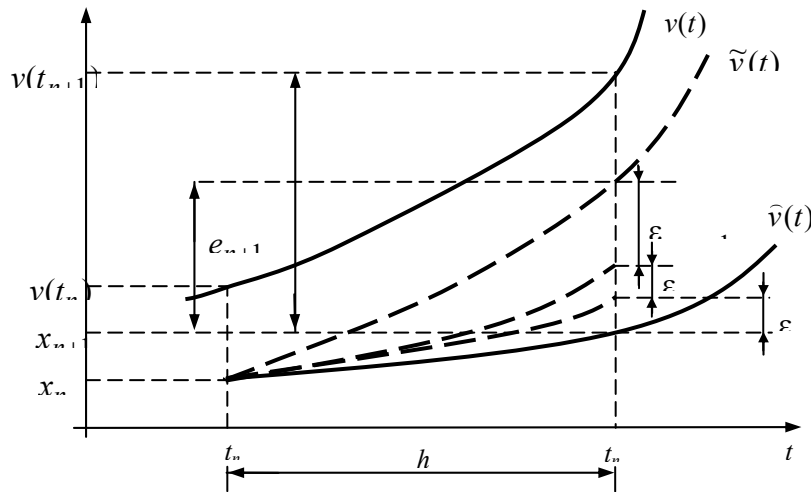


Рис. 4.19. Формирование ε_{n+1} погрешностей на шаге интегрирования

На рисунке приняты следующие обозначения:

$v(t)$ – точный процесс при заданном начальном условии $v_0(t)$;

$\tilde{v}(t)$ – точный процесс, начинающийся со значения, равного приближённому начальному условию $\tilde{v}(t_n) = x_n$;

$\hat{v}(t)$ – точный процесс, начинающийся со значения, равного приближённому начальному условию $\hat{v}(t_{n+1}) = x_{n+1}$;

$\varepsilon_{M\ n+1}$ – погрешность метода для момента t_{n+1} ;

$\varepsilon_{T\ n+1}$ – погрешность трансформации для момента t_{n+1} ;

$\varepsilon_{O\ n+1}$ – погрешность округления для момента t_{n+1} ;

e_{n+1} – локальная ошибка, вносимая на $(n+1)$ -м шаге;

$\varepsilon_{n+1} = |v(t_{n+1}) - x_{n+1}|$ – глобальная ошибка.

Следует отметить, что методическая погрешность ε_m при уменьшении шага h на фиксированном интервале интегрирования уменьшается, а погрешность округления ε_o – увеличивается. Погрешность округления может существенно сказаться на значении глобальной ошибки, если необходимо использовать слишком малые шаги. Существует оптимальный шаг интегрирования $h_{\text{опт}}$, при котором суммарная погрешность аппроксимации и округления минимальна (рис. 4.20).

Многие методы численного интегрирования контролируют локальную ошибку e , но при этом не всегда ясно, как её выбрать, чтобы обеспечить требуемую точность вычислений на всём временном интервале. Глобальная ошибка ε более понятна исследователю, однако в большинстве алгоритмов используется локальная ошибка.

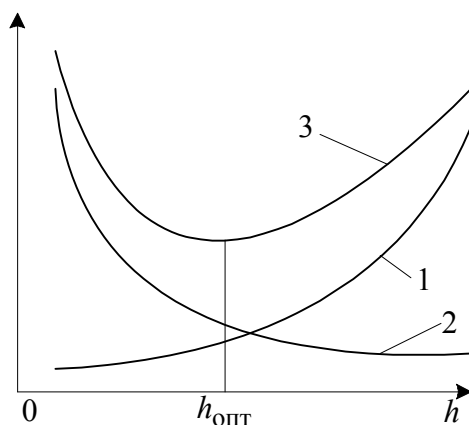


Рис. 4.20. Графики зависимостей погрешностей от шага интегрирования:
1 – методическая; 2 – округления; 3 – суммарная

Между локальной и глобальной ошибками возможно установить взаимосвязь. Для этого глобальную ошибку ε следует рассматривать как результат накопления локальных ошибок e_k , т. е.

$$\varepsilon \leq \sum_{k=1}^n e_k.$$

Если ввести значения e_d , ε_d допустимых локальной и глобальной ошибок, то

$$\sum_{k=1}^n e_k \leq n e_d = T e_d / h \leq \varepsilon_d,$$

где T – интервал интегрирования. Отсюда справедливо неравенство $e_d \leq h \varepsilon_d / T$.

Следовательно, контроль за локальной ошибкой можно производить, используя соотношение

$$e_k \leq h\varepsilon_d / T.$$

Например, если $\varepsilon_d = 0,01$, $T = 10$ с, $h = 0,01$ с, то

$$e_k \leq 0,01 \cdot 0,01 / 10 = 0,00001 = 10^{-5}.$$

Погрешность, возникшая на определённом этапе вычислений, распространяется (трансформируется) далее, т. е. её влияние по мере выполнения последующих операций (вычислений) может возрастать или убывать.

Для вычисления *относительных погрешностей* при выполнении основных арифметических операций может быть использована табл. 4.6.

Таблица 4.6

Функция	Относительные погрешности аргументов	Относительная погрешность функции
$x_i \pm x_j$	$\delta_{x_i} = \frac{\Delta x_i}{x_i}, \delta_{x_j} = \frac{\Delta x_j}{x_j}$	$\frac{x_i}{x_i \pm x_j} \delta_{x_i} \pm \frac{x_j}{x_i \pm x_j} \delta_{x_j}$
$x_i x_j$		$\delta_{x_i} + \delta_{x_j}$
x_i / x_j		$\delta_{x_i} - \delta_{x_j}$

Как видно из таблицы, наиболее неблагоприятным случаем является вычитание двух почти равных чисел x_i и x_j . Даже при пренебрежимо малых погрешностях обоих чисел относительная погрешность их разности может оказаться недопустимо большой, поэтому надо избегать, по возможности, таких случаев. Для того чтобы проследить последовательность распространения систематических (не случайных) погрешностей и их трансформации при вычислениях, иногда удобно воспользоваться так называемыми *графами вычислительных процессов*.

Пример 4.13. Производится вычисление функции $y = (x_1 + x_2)x_3$.

Граф вычислительного процесса приведён на рис. 4.21. В вершинах графа записываются исходные данные x_1 и x_2 или результаты предыдущих вычислений. Рядом с вершинами указываются коэффициенты распространения погрешностей $x_1/(x_1 + x_2)$ и $x_2/(x_1 + x_2)$, на которые необходимо умножить относительные погрешности исходных значений $\delta x_1 = \Delta x_1/x_1$ и $\delta x_2 = \Delta x_2/x_2$ для учёта их влияния на результаты выполнения операции сложения. При вычитании эти коэффициенты будут равны $x_1/(x_1 - x_2)$ и $x_2/(x_1 - x_2)$, а при умножении и делении принимают значе-

ния +1 и –1 соответственно. Кроме того, в результате выполнения каждой операции появляется погрешность округления δ_o .

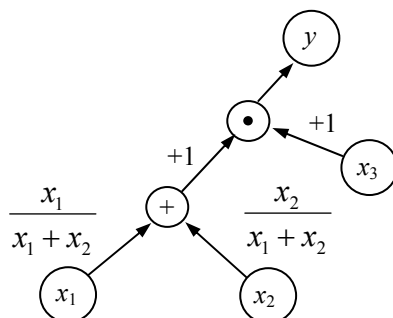


Рис. 6.21. Граф вычислительного процесса

Таким образом, *полная относительная погрешность* результата сложения для рассматриваемого графа равна следующей сумме:

$$\frac{\Delta(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \delta x_1 + \frac{x_2}{x_1 + x_2} \delta x_2 + \delta_{o1}.$$

После умножения суммы на x_3 окончательно получается выражение

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \delta x_1 \cdot 1 + \frac{x_2}{x_1 + x_2} \delta x_2 \cdot 1 + \delta_{o1} \cdot 1 + \delta x_3 \cdot 1 + \delta_{o2}.$$

Для уменьшения погрешностей, возникающих при вычислениях на ЭВМ, необходимо соблюдать следующие правила:

1. Сложение или вычитание длинной последовательности чисел целесообразно начинать с наименьших чисел.
2. Следует избегать вычитания двух почти равных чисел. Например, относительная погрешность разности чисел $0,5631 \cdot 10^4$ и $0,5628 \cdot 10^4$ составляет около 33%.
3. В любых случаях целесообразно сводить к минимуму число арифметических операций.

4.2.13. Определение шага дискретизации

До сих пор предполагалось, что исходная конечномерная модель СУ непрерывна, но при вводе в ЭВМ осуществляется её дискретизация – переход к разностной модели с выбранным шагом дискретизации (шагом интегрирования) h . Однако исходная модель может быть и дискретной или дискретно-непрерывной, т. е. содержать импульсный элемент, работающий с периодом квантования τ_0 . При численном моделировании дискретных систем между периодом квантования τ_0 импульсного элемента и шагом

интегрирования h разностной схемы обычно устанавливается соотношение $\tau_0 \geq h$. Чтобы обобщить методику выбора периода квантования и шага интегрирования исходя из допустимой погрешности аппроксимации процессов при моделировании, вводится обозначение:

$T_0 = h$ для непрерывных ($\tau_0 \rightarrow 0$) моделей;

$T_0 = \tau_0 \geq h$ для дискретных моделей.

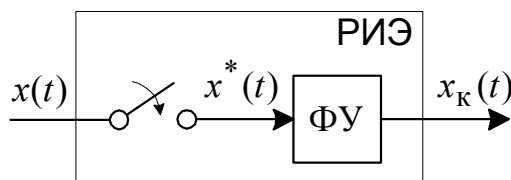


Рис. 4.22. Структурная схема реального импульсного элемента

Пусть дискретная СУ (рис. 4.22) содержит реальный импульсный элемент РИЭ, модель которого включает идеальный импульсный элемент ИИЭ и формирующее устройство ФУ типа экстраполятора 0-го или 1-го порядка [2]. На схеме приняты обозначения: $x(t)$ – непрерывный процесс на входе РИЭ; $x^*(t) = x(t)\delta_{T_0}(t)$ – модулированная последовательность δ -импульсов на выходе ИИЭ, причём $\delta_{T_0}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(t - iT_0)$; $x_k(t)$ – квантованный процесс на выходе РИЭ. Возможный вид процесса на выходе РИЭ в зависимости от типа экстраполятора изображён на рис. 4.23.

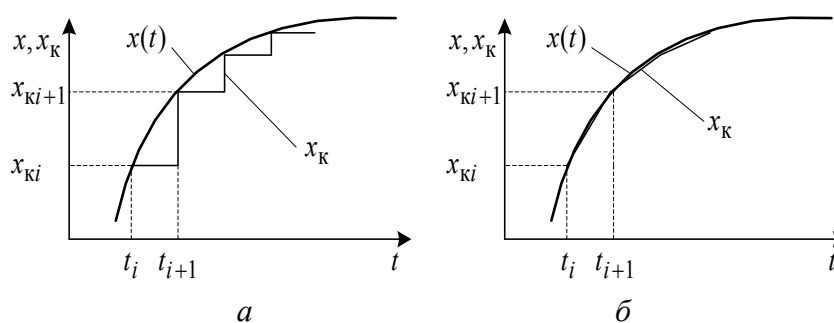


Рис. 4.23. Процесс на выходе РИЭ:

a – кусочно-постоянный; $б$ – кусочно-линейный

Период квантования (шаг дискретизации по времени) принимается постоянным, т. е. $\forall i: \Delta t_i = t_{i+1} - t_i = T_0 = \text{const}$.

Величина $\Delta x_i = \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |x(t) - x_k(t)|$ представляет собой максимальную абсолютную погрешность аппроксимации (экстраполяции) непрерывной функции $x(t)$ квантованной функцией $x_k(t)$ на i -м интервале времени.

Максимальная абсолютная погрешность квантования на заданном интервале T моделирования процесса

$$\Delta x_{\max} = \max_{i \in [1, N]} \Delta x_i,$$

где $N = \text{Ent}[T/T_0]$, $\text{Ent}[\cdot]$ – целая часть числа.

Пусть максимальное по модулю значение процесса на интервале моделирования

$$x_{\max} = \max_{0 \leq t \leq T} |x(t)|.$$

Тогда отношение

$$\Delta x_{\max} / x_{\max} = \delta$$

представляет собой *приведённую к максимальному значению погрешность аппроксимации*.

Требуется определить период квантования T_0 исходя из условия

$$\delta \leq \delta_0,$$

где δ_0 – допустимое значение приведённой погрешности аппроксимации.

По существу, здесь рассматривается задача аппроксимации функции $x(t)$ на интервале $T = [t_{\min}, t_{\max}]$ другой функцией, в частности, степенным полиномом $p(t)$. Например, этой аппроксимирующей функцией может быть *интерполяционный полином Лежандра*

$$p_n(t) = \sum_{i=0}^n x(t_i) \frac{q_{n+1}(t)}{(t - t_i)q'_{n+1}(t_i)}, \quad (4.36)$$

где $q_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^n (t - t_i)$, t_i – узлы интерполяции.

При аппроксимации функции с высокой точностью в широком интервале изменения аргумента степень аппроксимирующего полинома p_n может оказаться слишком высокой, а полином (4.36) слишком сложным для реализации. В этом случае целесообразно интервал T разбить на m отрезков

$$t_{\min} = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t_{\max}$$

и на каждом из отрезков аппроксимировать функцию своим полиномом. Аппроксимирующая функция $\varphi_m(t)$, составленная из полученных таким образом кусков, называется *ломаной* и представляет собой кусочно-непрерывную на интервале T функцию.

Возможность сколь угодно точной равномерной (с равномерным шагом) аппроксимации обеспечивается выполнением условий следующей теоремы.

Теорема. Если функция $x(t)$ непрерывна на $[t_{\min}, t_{\max}]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует ломаная функция $\varphi_m(t)$ (m – конечно), для которой справедливо

$$|\varphi_m(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Следствие. Любая непрерывная на $[t_{\min}, t_{\max}]$ функция может быть аппроксимирована полиномиальной ломаной функцией $p_{nm}(t)$. В частности, аппроксимирующая функция может быть ступенчатой ломаной $p_{0m}(t)$ или линейной ломаной $p_{1m}(t)$. Следует отметить, что к классу кусочно-полиномиальных аппроксимирующих функций относятся также и так называемые полиномиальные сплайны.

Абсолютная погрешность аппроксимации функции $x(t)$ интерполяционным полиномом Лежандра (4.36) определяется остаточным членом этого полинома

$$|\Delta x_i(t)| \leq \frac{\max |x^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} \max |q_{n+1}(t)|, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

или

$$|\Delta x_i(t)| \leq \frac{\max |x^{(n+1)}(t_i + \theta \Delta t_i)|}{(n+1)!} \max |q_{n+1}(t_i + \theta \Delta t_i)|, \quad \theta \in [0,1].$$

Возвращаясь к рассматриваемой задаче, на каждом интервале дискретизации (t_i, t_{i+1}) , $t_{i+1} = t_i + T_0$ можно получить:

для $n = 0$

$$|\Delta x_i(t)| \leq \max |\dot{x}(t_i + \theta T_0)| T_0 = M_{1i} T_0;$$

для $n = 1$

$$|\Delta x_i(t)| \leq \frac{1}{2} \max |\ddot{x}(t_i + \theta T_0)| \frac{T_0^2}{4} = \frac{\max |\ddot{x}(t_i + \theta T_0)| T_0^2}{8} = \frac{M_{2i} T_0^2}{8}$$

(так как

$$\max |\ddot{x}(t_i + \theta T_0)| = \max |(t - t_i)(t - t_{i+1})| = \max |\theta T_0 (\theta T_0 - T_0)| = T_0^2/4,$$

что достигается при $\theta = 0,5$). Здесь M_{1i}, M_{2i} – максимальные значения модуля соответствующих производных на i -м интервале дискретизации.

Для оценки максимальной погрешности аппроксимации на всём интервале моделирования процессов используются максимально возможные значения модулей соответствующих производных

$$M_1 = \max_{i \in [1, N]} \{M_{1i}\}, \quad M_2 = \max_{i \in [1, N]} \{M_{2i}\},$$

определяемые на множестве всех интервалов дискретизации.

Следовательно, можно записать:

$$\text{для } n = 0 - \Delta x_{\max} \leq M_1 T_0; \quad \text{для } n = 1 - \Delta x_{\max} \leq \frac{M_2 T_0^2}{8}.$$

Возможны различные способы определения M_1 и M_2 . В частности, можно воспользоваться неравенством С. Н. Бернштейна, которое вытекает из следующего утверждения.

Утверждение. Если процесс $x(t)$ ограничен по модулю некоторым максимальным значением x_{\max} , т. е. $|x(t)| \leq x_{\max}$, и имеет ограниченную спектральную характеристику в диапазоне $[0, \omega_{\max}]$ (рис. 4.24), то максимальное значение производной k -го порядка ограничено неравенством

$$|x_{\max}^{(k)}| \leq \omega_{\max}^k x_{\max}. \quad (4.37)$$

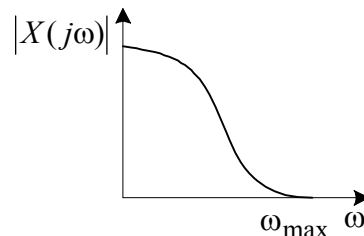


Рис. 4.24. Спектральная характеристика процесса

Для гармонического сигнала вида $x(t) = a \sin \omega t$ соотношение (4.37) очевидно. Переходные процессы, получаемые по моделям, представленным в форме систем ДУ, теоретически имеют неограниченные спектры. Однако ММ любой реальной СУ справедлива лишь в определенном диапазоне частот, поэтому в качестве ω_{\max} можно взять границу частотного диапазона адекватности ММ.

Для линейных моделей СУ часто рекомендуется принять в качестве $\omega_{\max} = (5 \div 10) T_{\min}^{-1}$, где T_{\min} — значение наименьшей постоянной времени.

С учётом (4.37) можно записать следующие соотношения:

$$M_1 \leq \omega_{\max} x_{\max}; \quad M_2 \leq \omega_{\max}^2 x_{\max}.$$

Отсюда имеем:

$$\text{для } n = 0 - \Delta x_{\max} \leq \omega_{\max} x_{\max} T_0;$$

$$\text{для } n = 1 - \Delta x_{\max} \leq \frac{\omega_{\max}^2 x_{\max} T_0^2}{8}.$$

Эти выражения можно записать иначе:

$$\text{для } n = 0 - \frac{\Delta x_{\max}}{x_{\max}} = \delta \leq \omega_{\max} T_0 \leq \delta_0, \quad T_0 \leq \frac{\delta_0}{\omega_{\max}};$$

$$\text{для } n = 1 - \frac{\Delta x_{\max}}{x_{\max}} = \delta \leq \frac{\omega_{\max}^2 T_0^2}{8} \leq \delta_0, \quad T_0 \leq \frac{\sqrt{8\delta_0}}{\omega_{\max}}.$$

Например, при $\delta_0 = 0,05$ (или $\delta_0 = 5\%$):

$$\text{для } n = 0 - T_0 \leq 0,05 / \omega_{\max};$$

$$\text{для } n = 1 - T_0 \leq \sqrt{0,4} / \omega_{\max} \approx 0,63 / \omega_{\max}.$$

При использовании логарифмических амплитудно-частотных характеристик разомкнутых линейных импульсных СУ [2] (рис. 4.25) учитывается ограничение $\omega_{\text{ср}} \leq 2 / T_0$.

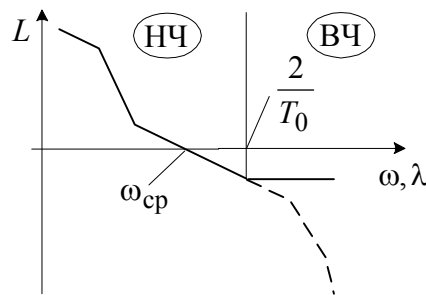


Рис. 4.25. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (асимптотическая) разомкнутой линейной импульсной системы

Это неравенство согласуется с условием теоремы Шеннона (Shannon)–Котельникова

$$\omega_{\max} \leq \omega_0 / 2,$$

если $\omega_{\max} = (\pi / 2) \omega_{\text{ср}}$.

В результате получается неравенство

$$(\pi / 2) \omega_{\text{ср}} \leq \omega_0 / 2 = \pi / T_0,$$

откуда

$$\omega_{\text{ср}} \leq 2 / T_0.$$

Следовательно, период квантования отвечает соотношению

$$T_0 \leq 2 / \omega_{\text{ср}}.$$

Сравнивая это неравенство с результатами, полученными с использованием неравенства Бернштейна, находим:

для $n = 0 - T_0 \leq \delta_0 / \omega_{\max} = (2 / \omega_{\text{ср}})(\delta_0 / \pi)$;

для $n = 1 - T_0 \leq \sqrt{8\delta_0} / \omega_{\max} = (2 / \omega_{\text{ср}})(\sqrt{8\delta_0} / \pi)$.

В том случае, если рассматривается исходная непрерывная модель, то для определения шага интегрирования следует принять $h = T_0$ и воспользоваться полученными соотношениями.

Кроме рассмотренного подхода существуют другие способы выбора шага дискретизации (шага интегрирования) [19, 23].

4.3. Численные методы расчёта динамических режимов моделей систем с распределёнными параметрами

Численные методы, благодаря их универсальности и хорошо разработанной теории, широко применяются при анализе линейных и нелинейных моделей, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП). Ниже рассматриваются некоторые распространённые разностные (сеточные) методы, используемые, в частности, при моделировании процессов передачи тепла.

В областях изменений пространственной $0 \leq z \leq l$ и временной $0 \leq t \leq T$ переменных требуется найти решение линейного ДУ параболического типа в частных производных

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} + f(z, t) \quad (4.38)$$

при начальном условии $u(z, 0) = \mu_0(z)$ и граничных условиях $u(0, t) = \mu_1(t)$, $u(l, t) = \mu_2(t)$. Здесь обозначены: $\mu_0(z)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – заданные функции; $f(z, t)$ – известная функция, характеризующая влияние внутренних тепловых источников в точке z в момент времени t .

Классической физической задачей, приводящей к уравнению (4.38), является процесс теплопередачи по длинному стержню вдоль оси z от $z = 0$ до $z = l$. Предполагается, что при $z = 0$ температура стержня u изменяется в соответствии с функцией $\mu_1(t)$, при $z = l$ изменению температуры u отвечает функция $\mu_2(t)$. Постоянная a – коэффициент теплопроводности, причём $a = \lambda / (c\rho)$, где c – удельная теплоёмкость материала стержня, ρ – плотность материала стержня, λ – коэффициент теплопроводности стержня.

Известно, что при определённых предположениях гладкости функции $u(z, t)$ решение задачи существует и единственно. Решение непрерывно зависит от начальных и граничных данных.

Кроме численного метода решения, рассматриваемая задача допускает и аналитическое решение уравнения, например с помощью рядов Фурье.

Явная схема. Для построения разностной схемы прежде всего необходимо ввести сетку в области изменения независимых переменных и задать *шаблон*, т. е. множество точек сетки, участвующих в аппроксимации ДУЧП.

Сетка задаётся по пространственной переменной z с шагом h

$$\omega_h = \{z_i = ih, i = 0, 1, \dots, N; hN = l\}$$

и по временной переменной t с шагом τ

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, M; \tau M = T\}.$$

Множество точек $\{(z_i, t_n)\}$ образуют узлы *пространственно-временной сетки* $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$, изображённой на рис. 4.26.

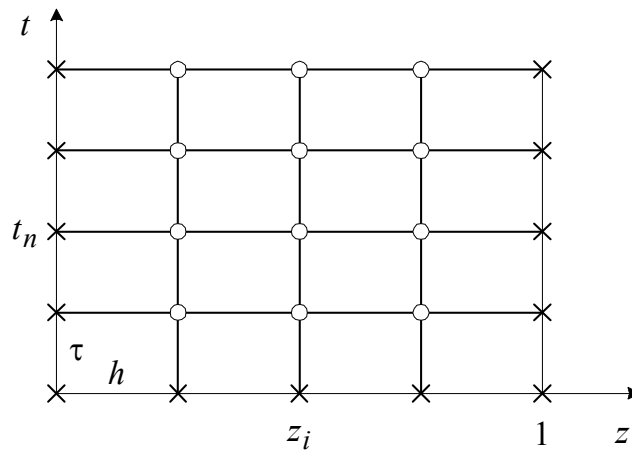


Рис. 4.26. Пространственно-временная сетка

Узлы (z_i, t_n) , принадлежащие отрезкам $I_0 = \{0 \leq z \leq l, t = 0\}$, $I_1 = \{z = 0, 0 \leq t \leq T\}$, $I_2 = \{z = l, 0 \leq t \leq T\}$, называют *граничными узлами* сетки $\omega_{h,\tau}$, а остальные – *внутренними узлами*.

Слоем называется множество всех узлов сетки $\omega_{h,\tau}$, имеющих одну и ту же временную координату. Так, n -м слоем называется множество узлов $\{(z_0, t_n), (z_1, t_n), \dots, (z_N, t_n)\}$.

Для аппроксимирующей сеточной функции $x(z, t)$, определённой на сетке $\omega_{h,\tau}$, вводятся обозначения:

$$x_i^n = x(z_i, t_n), \quad x_{t,i}^n = \frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau}, \quad x_{zz,i}^n = \frac{x_{i+1}^n - 2x_i^n + x_{i-1}^n}{h^2},$$

$$\text{где } x_{\bar{z},i}^n = \frac{x_{\bar{z},i}^n - x_{z,i}^n}{h}, \quad x_{\bar{z},i}^n = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{h}, \quad x_{z,i}^n = \frac{x_i^n - x_{i-1}^n}{h}.$$

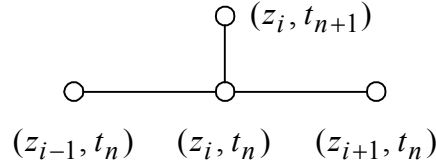


Рис. 4.27. Четырёхточечный шаблон явной разностной схемы

Для аппроксимации уравнения (4.38) в узловой точке (z_i, t_n) задаётся четырёхточечный шаблон (рис. 4.27), состоящий из узлов $(z_{i\pm 1}, t_n)$, (z_i, t_n) , (z_i, t_{n+1}) . Производная $\partial u / \partial t$ в точке (z_i, t_n) заменяется разностным отношением $x_{t,i}^n$, а производная $\partial^2 u / \partial z^2$ – второй разностной производной $x_{zz,i}^n$, т. е. в выражениях

$$\left. \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \right|_{\substack{z=z_i, \\ t=t_n}} = x_{t,i}^n + O(\tau), \quad \left. \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} \right|_{\substack{z=z_i, \\ t=t_n}} = x_{zz,i}^n + O(h^2)$$

отбрасываются величины высших порядков малости.

Функция $f(z, t)$ в правой части уравнения (4.38) приближённо заменяется сеточной функцией ϕ_i^n . В качестве ϕ_i^n обычно рекомендуется одно из следующих выражений:

$$f(z_i, t_n), \quad \frac{1}{h} \int_{z_{i-0,5}}^{z_{i+0,5}} f(z, t_n) dz, \quad \frac{1}{h\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \int_{z_{i-0,5}}^{z_{i+0,5}} f(z, t) dz,$$

причём второе и третье выражения представляют собой соответственно усреднение по координате и совместное усреднение по координате и по времени.

В результате можно получить разностное уравнение

$$\frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau} = a \frac{x_{i+1}^n - 2x_i^n + x_{i-1}^n}{h^2} + \phi_i^n,$$

которое аппроксимирует исходное ДУЧП в точке (z_i, t_n) с первым порядком малости $O(\tau)$ по τ и со вторым порядком малости $O(h^2)$ по h при условии, что разность $\phi_i^n - f(z_i, t_n)$ имеет тот же порядок малости $O(\tau + h^2)$.

Под разностной схемой понимается совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих ДУЧП во всех внутренних узлах сетки, и дополнительные (начальные и граничные) условия – в граничных узлах сетки.

В данном случае разностная схема имеет вид

$$\frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau} = a \frac{x_{i+1}^n - 2x_i^n + x_{i-1}^n}{h^2} + \phi_i^n, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad n = \overline{0, M-1}, \quad (4.39)$$

причём значения $x_0^n = \mu_1(t_n)$, $x_N^n = \mu_2(t_n)$, $n = \overline{0, M}$ соответствует описанию границ; значения $x_i^0 = \mu_0(z_i)$, $i = \overline{0, N}$ соответствует описанию нулевого слоя; $hN = l$; $\tau M = T$.

Предлагаемая схема представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, число которых равно числу неизвестных. Поиск решения такой системы следует производить по слоям. Решение на нулевом слое определяется начальными условиями $x_i^0 = \mu_0(z_i)$, $i = \overline{0, N}$ (рис. 4.28).

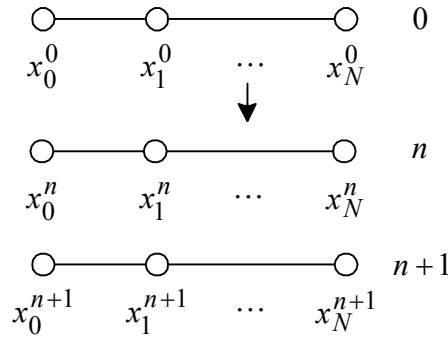


Рис. 4.28. Послойное решение по явной разностной схеме

Если решение x_i^n , $i = \overline{0, N}$ на n -м слое уже найдено, то решение x_i^{n+1} на $(n+1)$ -м слое находится по явной формуле

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \tau(ax_{\bar{z}z,i}^n + \phi_i^n), \quad i = \overline{1, N-1},$$

а значения $x_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1})$, $x_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1})$ доопределяются из граничных условий. По этой причине схема (4.39) называется *явной разностной схемой*.

При введении параметра $\gamma = a\tau/h^2$ решение можно записать как

$$x_i^{n+1} = (1 - 2\gamma)x_i^n + \gamma(x_{i+1}^n + x_{i-1}^n) + \tau\phi_i^n, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Решение устойчиво тогда и только тогда, когда параметр γ удовлетворяет соотношению

$$0 \leq \gamma \leq 0,5.$$

Это означает, что шаг по времени должен отвечать неравенству

$$\tau \leq 0,5h^2 / a.$$

Если данное соотношение не выполняется, то ошибки, возникающие на каком-либо n -м слое при переходе к другим слоям $n + 1, n + 2, \dots$ могут увеличиваться.

Узлы, в которых разностная схема записана на шаблоне, называются *регулярными*, а остальные узлы – *нерегулярными*. Нерегулярными обычно являются граничные узлы, а в некоторых случаях узлы, располагающиеся около границы (такие, что взятый около этого узла шаблон выходит за границу области).

Пример 4.14. Пусть процесс теплопроводности для физического тела без внутренних тепловых источников описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

где $a = 0,5$; длина тела $l = 1$. Предполагается, что начальное условие задаётся функцией (рис. 4.29)

$$\mu_0(z) = u(z, 0) = z - z^2 \quad (\text{для } t = 0, 0 \leq z \leq 1);$$

граничные условия определяются соотношениями

$$u(0, t) = 0 \quad (\text{для } z = 0 - \text{температура постоянная}),$$

$$u(1, t) = 0 \quad (\text{для } z = 1 - \text{температура постоянная}).$$

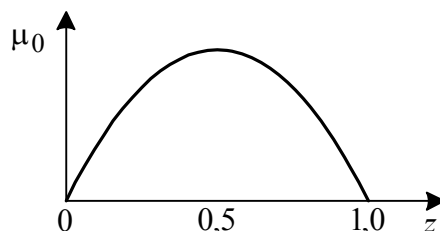


Рис. 4.29. Начальное распределение температуры

Выбирается шаг $h = 0,25$, тогда $h^2 = 0,0625$; шаг $\tau = 0,5$. Требуется численным методом определить изменение температуры тела по истечению 2 с.

С учётом того, что $\gamma = (0,5 \cdot 0,5) / 0,0625 = 4$, расчёт производится по формуле

$$x_i^{n+1} = 4(x_{i+1}^n + x_{i-1}^n) - 7x_i^n.$$

Результаты расчёта температуры сведены в табл. 4.7.

Таблица 4.7

n	t	$z_0 = 0$	$z_1 = 0,25$	$z_2 = 0,50$	$z_3 = 0,75$	$z = 1,00$
0	0	0	0,1875	0,25	0,1875	0
1	0,5	0	-0,3125	-0,25	-0,3125	0
2	1,0	0	1,1875	-0,75	1,1875	0
3	1,5	0	-11,3125	14,75	-11,3125	0
4	2,0	0	70,3125	-193,75	70,3125	0

Из табл. 4.7 следует, что процесс расходится.

Изменим шаг τ в соответствии с формулой для устойчивого процесса. Пусть $\tau = 0,05$. Тогда $\gamma = (0,5 \cdot 0,05)/0,0625 = 0,4$. Следовательно, расчёт будет производиться по формуле

$$x_i^{n+1} = 0,4(x_{i+1}^n + x_{i-1}^n) + 0,2x_i^n.$$

Результаты расчёта сведены в табл. 4.8, из которой видно, что процесс устойчивый.

Таблица 4.8

n	t	$z_0 = 0$	$z_1 = 0,25$	$z_1 = 0,25$	$z_3 = 0,75$	$z = 1,00$
0	0	0	0,1875	0,25	0,1875	0
1	0,05	0	0,1375	0,20	0,1375	0
2	0,10	0	0,1075	0,15	0,1075	0
3	0,15	0	0,0815	0,116	0,0815	0
4	0,20	0	0,0627	0,0884	0,0627	0
5	0,25	0	0,0479	0,06784	0,0479	0
6	0,30	0	0,036716	0,051888	0,036716	0
7	0,35	0	0,0280984	0,03975040	0,0280984	0
8	0,40	0	0,02151984	0,03042880	0,02151984	0
9	0,45	0	0,01647549	0,02330163	0,01647549	0
10	0,50	0	0,01261575	0,01784072	0,01261575	0

Неявные схемы. Разностная схема, использующая шаблон, приведённый на рис. 4.30, имеет вид

$$\frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau} = a \frac{x_{i+1}^{n+1} - 2x_i^{n+1} + x_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \varphi_i^n, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad n = \overline{0, M-1}, \quad (4.40)$$

причём значения $x_i^0 = \mu_0(z_i)$, $i = \overline{0, N}$ отвечают начальным условиям; значения $x_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1})$, $x_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1})$, $n = \overline{0, M-1}$ – граничным условиям. Здесь принято, что $\varphi_i^n = f(z_i, t_n) + O(\tau + h^2)$. Разностная схема (4.40) (схема с опережением) для процесса теплопроводности является *чисто неявной*, которая имеет первый порядок аппроксимации по τ и второй – по h .

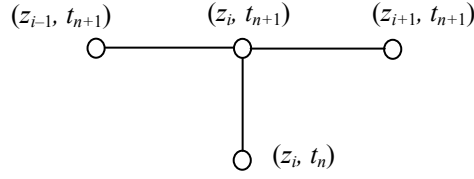


Рис. 4.30. Четырёхточечный шаблон чисто неявной разностной схемы

Решение системы (4.40) находится, как и в случае явной схемы, по слоям, начиная с $n = 1$. Однако в отличие от явной схемы, для нахождения x_i^{n+1} по известным x_i^n требуется решение системы уравнений

$$\gamma x_{i+1}^{n+1} - (1 + 2\gamma)x_i^{n+1} + \gamma x_{i-1}^{n+1} = -x_i^n - \tau \phi_i^n, \quad i = \overline{1, N-1},$$

причём $x_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1})$, $x_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1})$, $\gamma = a\tau/h^2$.

Алгоритм работы чисто неявной разностной схемы состоит из следующих этапов (рис. 4.31).

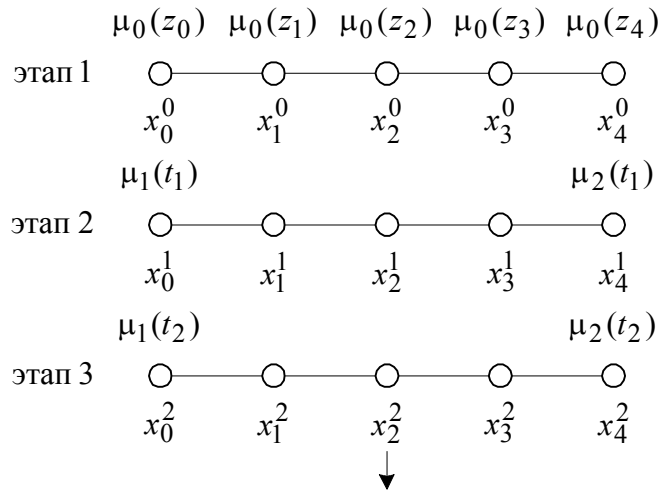


Рис. 4.31. Пояснение работы алгоритма чисто неявной разностной схемы

Этап 1. По начальным условиям определяются решения на нулевом слое: $x_0^0, x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0$.

Этап 2. Составляется система уравнений относительно внутренних узлов первого слоя:

$$i = 1: \quad \gamma x_2^1 - (1 + 2\gamma)x_1^1 + \gamma x_0^1 = -x_1^0 - \tau \phi_1^0;$$

$$i = 2: \quad \gamma x_3^1 - (1 + 2\gamma)x_2^1 + \gamma x_1^1 = -x_2^0 - \tau \phi_2^0;$$

$$i = 3: \quad \gamma x_4^1 - (1 + 2\gamma)x_3^1 + \gamma x_2^1 = -x_3^0 - \tau \phi_3^0.$$

Из этой системы определяются неизвестные значения: x_1^1, x_2^1, x_3^1 . Значения x_0^1, x_4^1 определяются граничными условиями:

$$x_0^1 = \mu_1(t_1), \quad x_4^1 = \mu_2(t_1).$$

Этап 3. Составляется и решается система уравнений относительно внутренних узлов второго слоя.

Работа алгоритма продолжается вплоть до завершения на N -м слое.

Шеститочечная симметричная схема (схема Кранка–Николсона (Crank–Nicholson)) (рис. 4.32) имеет вид

$$\frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} a(x_{zz,i}^{n+1} + x_{zz,i}^n) + \varphi_i^n.$$

Начальные и граничные условия для неё задаются так же, как и в схеме (4.40).

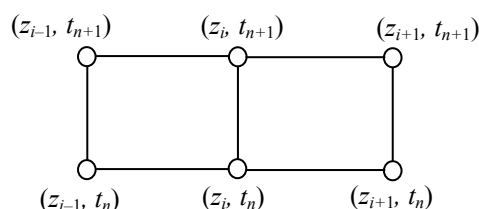


Рис. 4.32. Шеститочечный шаблон симметричной разностной схемы

Разностная схема записывается как

$$\frac{x_i^{n+1} - x_i^n}{\tau} = \frac{a}{2} \left(\frac{x_{i+1}^{n+1} - 2x_i^{n+1} + x_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{x_{i+1}^n - 2x_i^n + x_{i-1}^n}{h^2} \right) + \varphi_i^n,$$

$$i = \overline{1, N-1}, \quad n = \overline{0, M-1}.$$

Отсюда можно получить формулу для вычислений:

$$\gamma x_{i+1}^{n+1} - 2(1 + \gamma)x_i^{n+1} + \gamma x_{i-1}^{n+1} = -\gamma x_{i+1}^n - 2(1 - \gamma)x_i^n - \gamma x_{i-1}^n - 2\tau\varphi_i^n, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

При вычислении x_{i+1}^{n+1} , x_i^{n+1} , x_{i-1}^{n+1} значения x_{i+1}^n , x_i^n , x_{i-1}^n , φ_i^n предыдущего слоя считаются известными.

Контрольные вопросы

1. Что отличает модели с сосредоточенными параметрами от моделей с распределёнными параметрами?
2. Как осуществляется процедура дискретизации исходной непрерывной модели?

3. Что понимается под численным решением задачи Коши?
4. Что понимается под сходимостью и порядком точности численного метода?
5. Как определяется невязка погрешности аппроксимации разностного уравнения на решении исходного уравнения?
6. В чём состоят отличия методов Рунге–Кутты от разностных методов?
7. Объясните суть метода предиктора-корректора (прогноза-коррекции).
8. Из каких соображений выбираются коэффициенты явных многоэтапных методов Рунге–Кутты?
9. Дайте определение многошагового разностного метода. В чём заключается его отличие от метода Рунге–Кутты?
10. В каком случае многошаговый разностный метод является неявным?
11. Какие недостатки присущи методам Адамса?
12. Что понимается под характеристическим уравнением разностного уравнения? С какой целью определяется характеристическое уравнение?
13. Дайте определение понятию устойчивости разностного метода по начальным данным.
14. В чём заключается выполнение условия корней характеристического уравнения?
15. Почему методы Адамса всегда удовлетворяют условию корней?
16. Какие разностные методы называются абсолютно устойчивыми?
30. Какие разностные методы называются условно устойчивыми?
31. Существуют ли абсолютно устойчивые явные разностные методы?
32. Какие существенные факторы следует принимать во внимание при анализе поведения жёстких моделей?
33. Что можно сказать о траекториях жёстких моделей?
34. В чём состоит особенность спектра собственных значений матрицы коэффициентов жёсткой модели?
35. В каком случае нелинейную модель системы можно назвать жёсткой?
36. Какие численные методы интегрирования следует применять для моделирования жёстких систем?
37. Приведите определение чисто неявного разностного метода.
38. В чём состоят достоинства чисто неявных разностных методов?
39. Какой разностный метод называется А-устойчивым? $A(\alpha)$ -устойчивым?
40. Чем вызваны погрешности численного моделирования?
41. Как локальная ошибка численного моделирования связана с глобальной?
42. Объясните, как используется неравенство С.Н. Бернштейна для определения шага интегрирования?
43. Что представляет собой пространственно-временная сетка?
44. Поясните работу алгоритма численного моделирования, основанного на неявной разностной схеме.

Определение равновесных режимов и линеаризация нелинейных моделей с использованием программной среды MATLAB/Simulink

Программное средство MATLAB совместно с пакетом расширения Simulink предоставляет исследователю удобные возможности для анализа статических и динамических режимов.

Для определения положений равновесия СУ, представленной схемой моделирования (структурной схемой) в графическом окне пакета Simulink, используется команда

trim,

вводимая в окне пакета MATLAB. При этом входные и выходные переменные схемы должны быть заданы с помощью блоков In и Out (входной и выходной порты) библиотеки Simulink.

Команда

$$[x,u,y,dx]=\text{trim}('turbo') \quad (\text{П.1})$$

определяет для модели с заранее выбранным именем, например 'turbo', установившиеся значения вектора состояния x , входного сигнала u и выходного сигнала y , при которых производная вектора состояния dx принимает нулевое значение (или, по крайней мере, становится близкой к нулю, если задача не имеет точного решения). Здесь dx – оценка точности, с которой определяется решение. Команда (П.1) обычно используется для проверки правильности введённой модели в графическом окне пакета Simulink.

Команда

$$[x,u,y,dx]=\text{trim}('turbo',x_0,u_0,y_0)$$

определяет установившиеся значения x , u и y с учётом предварительно заданных начальных приближений x_0 , u_0 и y_0 .

Команда

$$[x,u,y,dx]=\text{trim}('turbo',x_0,u_0,y_0, ix,iu,iy) \quad (\text{П.2})$$

определяет установившиеся значения x , u и y с учётом начальных приближений x_0 , u_0 и y_0 при фиксированных (не меняющихся при расчётах) значениях некоторых координат x , u и y . Номера координат, не подлежащие изменению, указываются в специально предназначенных целочисленных векторах ix , iu и iy .

Пример П.1. Линейная модель СУ представлена в форме пространства состояний

$$\dot{x} = k(u - k_1 x),$$

$$y = x.$$

На рис. П.1 приведена соответствующая структурная схема, полученная с использованием графической среды пакета Simulink. В состав схемы включены усилители Gain и интегратор Integrator. Файлу присваивается определённое имя, например 'turbo'.

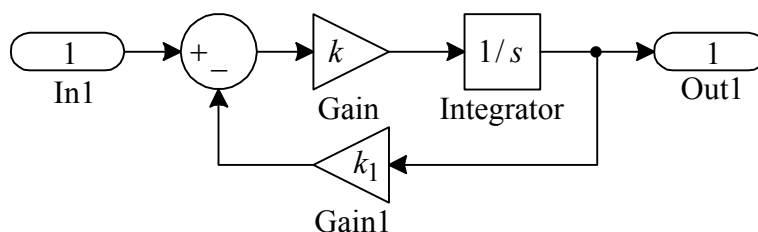


Рис. П.4.1. Структура модели для примера П.4.1

Требуется определить состояние равновесия СУ.

Пусть значения параметров $k = 1$, $k_1 = 1$. Применение команды (П.1) приводит к результату: $x = 0$, $u = 0$, $y = 0$, $dx = 0$.

Для фиксации значения входного воздействия $u = 1$ в окне пакета MATLAB необходимо набрать следующие команды:

```
ix = [ ];      % значение x не фиксируется;
iu = [1];     % фиксируется значение u входного сигнала;
iy = [ ];     % значение y не фиксируется
```

(здесь % – символ комментария).

Начальному состоянию переменных присваиваются значения:
 $x0 = 0$, $u0 = 1$, $y = 0$.

Применение команды

```
[x,u,y,dx]=trim('turbo',0,1,0, ix,iu,iy)
```

даёт результат: $x = 1$, $u = 1$, $y = 1$, $dx = 0$.

Если изменить параметр СУ на $k_1 = 2$, то использование последней команды приводит к результату: $x = 0.5$, $u = 1$, $y = 0.5$, $dx = 0$.

Пример П.2. На рис. П.2 приведена структура линейной модели СУ 3-го порядка, набранная в окне пакета Simulink. Звено в прямой цепи описывается передаточной функцией Transfer Fcn.

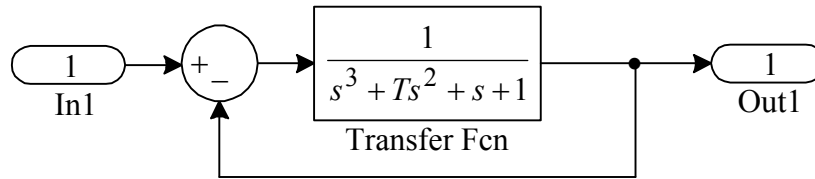


Рис. П.4.2. Структура линейной модели для примера П.4.2

В соответствии, например, с критерием Гурвица при $T > 1$ система устойчива, однако результаты расчёта равновесного состояния не зависят от устойчивости.

Модель СУ можно представить в координатной форме пространства состояний (наблюдаемая каноническая форма):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - x_2 - Tx_3, \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

В векторно-матричном виде модель записывается как

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \quad 0 \quad 0).$$

Пусть $T = 3$. Тогда, если задать начальные приближения равновесного состояния СУ

$$\mathbf{x}0 = [0; 0; 0]; \quad u0 = 1; \quad y0 = 0;$$

фиксированные и свободные (независимые и зависимые) переменные

$$ix = []; \quad iu = [1]; \quad iy = [];$$

то использование команды (П.2) приводит к результату:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad u = 1; \quad y = 1; \quad d\mathbf{x} = 1 \cdot e^{-23} \begin{pmatrix} -0.0015 \\ 0.0591 \\ -0.1726 \end{pmatrix}.$$

В зависимости от версии MATLAB и используемого компьютера значения векторов могут несколько отличаться.

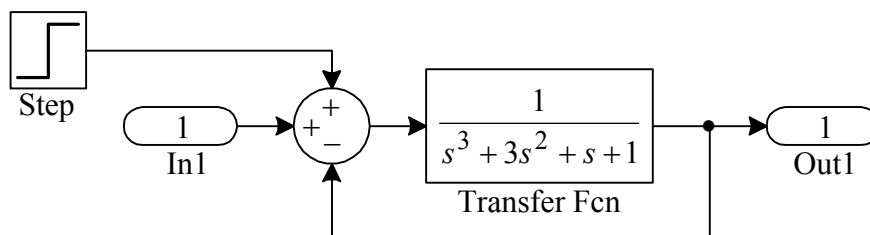


Рис. П.4.3. Изменения в структуре модели для примера П.4.2

В структурной схеме на входе системы можно произвести изменения (рис. П.3). При задании

$$\begin{aligned} \mathbf{x}0 &= [0;0;0]; & ix &= []; \\ u0 &= 0; & iu &= [1]; \\ y0 &= 0; & iy &= []; \end{aligned}$$

и применении команды (П.2) результат будет таким же.

Если переменную u не фиксировать, т. е. $iu = []$ (либо вообще не указывать фиксированные переменные), то результат вычислений получается другой:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; u = -0.5; y = 0.5.$$

В этом случае значение u , а следовательно, и значения компонент вектора \mathbf{x} и u могут быть любыми.

Пример П.3. Исследуется модель нелинейной системы 1-го порядка, структура которой представлена на рис. П.4. Нелинейный элемент, обозначенный на схеме Fcn, имеет описание $y = F(w) = w^2 - 1$. Блок Fcn имеет принятое в Simulink обозначение входной величины u . Непосредственно из рассмотрения структурной схемы следует, что модель системы характеризуется двумя состояниями равновесия: $(w = -1; v = 0)$; $(w = 1; v = 0)$.

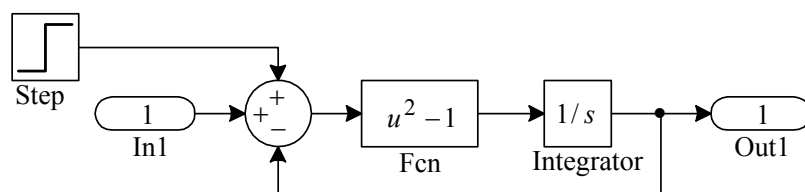


Рис. П.4.4. Структура нелинейной модели для примера П.4.3

В форме пространства состояний модель описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(f, u, x) = (f + u - x)^2 - 1, \\ y &= x.\end{aligned}$$

Пусть $f = 1, u = 0$. Тогда, задавая

$$\begin{aligned}x0 &= 0; & ix &= []; \\ u0 &= 0; & iu &= [1]; \\ y0 &= 0; & iy &= [];\end{aligned}$$

можно получить решение: $x = 0, y = 0$.

При задании $x0 = 10$ решение примет вид: $x = 2, y = 2$.

Для примера П.3 возможно решение *обратной задачи*:

при задании определённого значения y^* требуется определить постоянное воздействие u , обеспечивающее заданное y^* .

При этом задаётся

$$\begin{aligned}x0 &= 0; & ix &= []; \\ u0 &= 0; & iu &= []; \\ y0 &= 1; & iy &= [1];\end{aligned}$$

Решение обратной задачи имеет вид

$$x = 1; u = 1; y = 1.$$

Рассматриваемый подход к решению обратной задачи целесообразно использовать при нахождении статических режимов в системах со сложной структурой.

В результате линеаризации нелинейной системы в точке равновесия обеспечивается переход от модели

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, u), \\ y &= \mathbf{H}(\mathbf{x}, u)\end{aligned}$$

к линеаризованной модели вида

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \\ y &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}.\end{aligned}$$

Исследуемая модель СУ представляется схемой моделирования в среде пакета Simulink, записанной в файл с именем 'turbo'. При этом входные и выходные переменные схемы должны быть заданы с помощью блоков In и Out соответственно.

В результате выполнения *команды*

$$[A,B,C,D]=\text{linmod}(\text{'turbo'}) \quad (\text{П.3})$$

в рабочем пространстве среды MATLAB будут получены числовые матрицы **A**, **B**, **C**, **D** линеаризованной модели в терминах «вход–состояние–выход». Линеаризованная модель будет получена в результате линеаризации исходной модели в окрестности точки $x = 0$ и $u = 0$.

Для линеаризации системы в окрестности произвольной точки x и u применяется команда

$$[A,B,C,D]=\text{linmod}(\text{'turbo'},x,u). \quad (\text{П.4})$$

Полученные матрицы **A**, **B**, **C**, **D** могут быть использованы в среде пакета MATLAB для дальнейшего анализа свойств системы. Применяя команды библиотеки Control System Toolbox можно, например, получить:

передаточную функцию линеаризованной системы

$$[\text{num},\text{den}]=\text{ss2tf}(A,B,C,D);$$

частотные характеристики линеаризованной системы

$$\text{bode}(A,B,C,D);$$

переходную характеристику

$$\text{step}(A,B,C,D);$$

импульсную переходную функцию (весовую функцию)

$$\text{impulse}(A,B,C,D).$$

Команда

$$[A_d,B_d,C_d,D_d]=\text{dlinmod}(\text{'turbo'},ts,x,u)$$

позволяет получить линеаризованную модель пространства состояний дискретной или непрерывно-дискретной модели в окрестности значений x и u . При этом параметр ts задаёт период квантования.

Пример П.4. На рис. П.5 приведена нелинейная модель СУ 2-го порядка с характеристикой нелинейного элемента $v = F(w) = w^2 + 2w$.

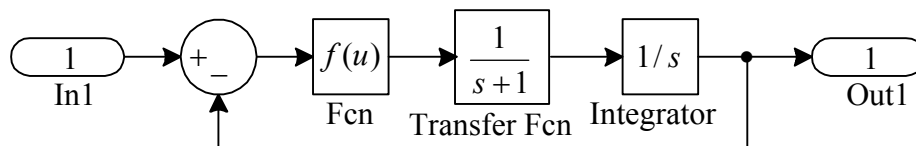


Рис. П.4.5. Структура нелинейной модели для примера П.4.4

Начальное состояние модели задаётся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}0 &= [0;0]; & ix &= []; \\ u0 &= 1; & iu &= [1]; \\ y0 &= 0; & iy &= []; \end{aligned}$$

Тогда решение задачи определения статического режима

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; u = 1; y = 1.$$

При использовании команды (П.4.3) матрицы линеаризованной модели СУ принимают вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \quad 0), \quad \mathbf{D} = 0.$$

Команда (П.4) даёт то же самое решение.

Список литературы

1. *Острейковский В.А.* Теория систем: Учеб. пособие. – М.: Высш. школа, 1997.
2. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов / С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев и др.; Под ред. В.Б. Яковлева. – М.: Высш. школа, 2005.
3. *Вавилов А.А., Имаев Д.Х.* Машинные методы расчёта систем управления: Учеб. пособие. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.
4. *Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. – СПб.: Наука, 2001.
5. Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие / Под ред. П.В. Труслова. – М.: Логос, 2005.
6. *Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. – М: Физматлит, 1994.
7. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем: Линейные системы; Нелинейные системы. – М: Машиностроение, 2004.
8. *Айзерман М.А.* Классическая механика. – М.: Физматлит, 2005.
9. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2005.
10. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения: Учеб. пособие для вузов. – М.: Лань, 2003.
11. *Зельченко В.Я., Шаров С.Н.* Расчёт и проектирование автоматических систем с нелинейными динамическими звеньями. – Л.: Машиностроение, 1986.
12. Современная прикладная теория управления: Ч. I. Оптимизационный подход в теории управления; Ч. II. Синергетический подход в теории управления; Ч. III. Новые классы регуляторов технических систем / Под ред. А.А. Колесникова. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000.
13. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984.
14. Общий курс процессов и аппаратов химической технологии: Учебник: В 2 кн. / В.Г. Айнштейн, М.К. Захаров, Г.А. Носов и др.; Под ред. В.Г. Айнштейна. – М.: Университетская книга; Логос; Физматкнига, 2006. Кн.1.
15. *Олейников В.А.* Оптимальное управление технологическими процессами в нефтяной и газовой промышленности. Л.: – Недра, 1982.
16. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.
17. *Милованов В.П.* Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация. – М.: Эдиториал УРСС, 2001.
18. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989.

19. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение / Пер. с англ. – М.: Мир, 1998.
20. *Пупков К.А., Карпенко А.П.* Моделирование динамических систем на транспьютерных сетях. – М.: Биоинформ, 1995.
21. *Воскобойников С.П., Сениченков Ю.Б., Устинов С.М.* Сравнение программных реализаций численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. СПбГТУ «Вычислительные, измерительные и управляющие системы». № 462. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1996. С.122-140.
22. *Ракитский Ю.В., Черноруцкий И.Г., Устинов С.М.* Численные методы решения жёстких систем. – М.: Наука, 1979.
23. *Оран Э., Борис Дж.* Численное моделирование реагирующих потоков. – М.: Мир, 1990.