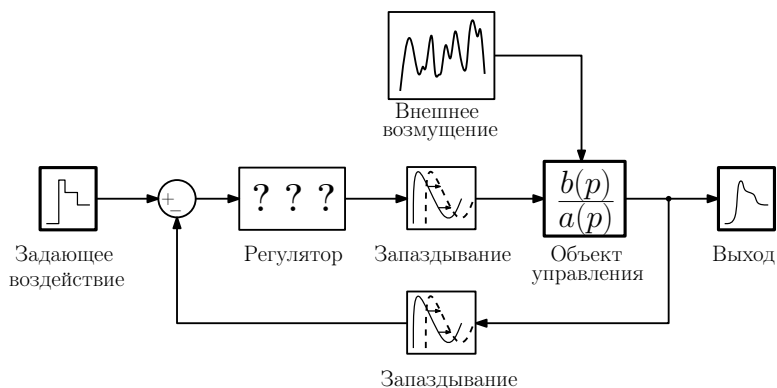


А.А. Ведяков, А.А. Пыркин, А.А. Бобцов

# АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ И СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ



Санкт-Петербург

2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.А. Ведяков, А.А. Пыркин, А.А. Бобцов

АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ  
СТАБИЛИЗАЦИИ И СЛЕЖЕНИЯ  
ДЛЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ  
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2016

УДК 681.51, 681.53, 681.58

А.А. Ведяков, А.А. Пыркин, А.А. Бобцов. Адаптивные системы стабилизации и слежения для объектов управления с запаздыванием. Учебное пособие. — СПб: Университет ИТМО, 2016. — 129 с.

Учебное пособие посвящено синтезу адаптивных систем управления в задачах стабилизации и слежения для объектов управления с запаздыванием. Подробно описано использование непрямого метода адаптивного управления для построения регулятора. В качестве подзадач рассмотрены идентификация параметров и построение наблюдателя компонент мультисинусоидального сигнала. Пособие предназначено для студентов факультета систем управления и робототехники Университета ИТМО, обучающихся по направлениям 15.04.06 Мехатроника и робототехника, 27.04.03 Системный анализ и управление, 27.04.04 Управление в технических системах.

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета систем управления и робототехники, протокол № 7 от 22 ноября 2016г.

Пособие подготовлено при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (Госзадание 2014/190 (проект 2118)).



**Университет ИТМО** — ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО — участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО — становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2016

© А.А. Ведяков, А.А. Пыркин, А.А. Бобцов, 2016

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1 Аналитический обзор и обобщенная постановка задачи</b>	<b>5</b>
1.1 Обзор методов управления в условиях запаздывания и мультисинусоидальных воздействий . . . . .	5
1.2 Обобщенная постановка задачи . . . . .	9
<b>Глава 2 Наблюдатели мультисинусоидальных сигналов</b>	<b>11</b>
2.1 Смещенный гармонический сигнал . . . . .	12
2.2 Мультисинусоидальные сигналы со смещением . . . . .	34
2.3 Некоторые особенности работы и применения разработанных алгоритмов . . . . .	60
2.4 Выводы по главе . . . . .	61
<b>Глава 3 Компенсация внешних возмущений</b>	<b>62</b>
3.1 Присутствие возмущения на входе и на выходе линейного объекта . . . . .	63
3.2 Многоканальная система . . . . .	77
3.3 Нелинейная система специального вида . . . . .	94
3.4 Выводы по главе . . . . .	102
<b>Глава 4 Адаптивная следящая система</b>	<b>103</b>
4.1 Задача слежения . . . . .	103
4.2 Выводы по главе . . . . .	112
<b>Заключение</b>	<b>113</b>
<b>Список литературы</b>	<b>115</b>

# Введение

Управление системами с запаздыванием является важной и актуальной проблемой в теории автоматического управления, которая всегда привлекала внимание многих исследователей [1–20]. Запаздывание в системах автоматического управления может возникать по различным причинам [14], например: в силу ограниченности быстродействия отдельных её компонентов, инерционности процессов протекающих в ней, удаленности объекта управления и многим другим. Иногда этими факторами можно пренебречь, но зачастую это приводит к ухудшению качества функционирования системы, а в некоторых случаях к потере устойчивости.

В связи с широким распространением цифровых систем управления рассматриваемая проблема становится все актуальнее. Для расчета управляющих воздействий микроконтроллерам требуется некоторое время. Ограниченная пропускная способность цифровых каналов связи приводит к увеличению запаздывания. Здесь стоит упомянуть работу [21], где рассматриваются результаты в области управления при информационных ограничениях.

Среди значимых результатов в области управления при наличии запаздывания в канале связи стоит отметить подход предложенный Отто Смитом [15], получивший название «предиктор Смита». Он заключается в построении системы управления, в которой запаздывание не влияет на устойчивость и качество переходных процессов. Данный подход может быть применен к параметрически неопределенным асимптотически устойчивым объектам. Впоследствии были разработаны его различные модификации, в том числе адаптивная версия [22] для объектов с относительной степенью меньше либо равной двум. Кроме того стоит отметить результаты для дискретных [23] и параметрически неопределенных объектов управления [5, 24, 25].

Подход, позволяющий стабилизировать систему при наличии входного запаздывания, впервые был предложен в работах [18, 19]. Строгое доказательство устойчивости замкнутой систе-

мы было получено Мирославом Крстичем с помощью его метода «backstepping» («обратный обход интегратора») [17].

Кроме запаздывания в пособии особое внимание уделяется мультисинусоидальным воздействиям. Рассматривается проблема компенсации внешних возмущений, являющаяся фундаментальной в современной теории автоматического управления [26–35], и задача слежения за мультисинусоидальным задающим воздействием [36–39].

Проблема компенсации возмущающих воздействий, представимых как конечная сумма синусоидальных сигналов, встречаются достаточно часто [40], например в системах активной виброзащиты [41, 42].

Несмотря на большое количество работ, посвященных управлению в условиях запаздывания и компенсации внешних возмущающих воздействий, эти проблемы в совокупности рассматриваются относительно недавно. В статьях [43, 44] алгоритмы стабилизации для неустойчивых линейных систем с входным запаздыванием [16, 17] были модифицированы для случая компенсации неизвестных внешних возмущений.

В пособии изложены основные результаты, полученные при решении задачи стабилизации и слежения в условиях внешних возмущений и запаздывания [45–53].

# Глава 1

## Аналитический обзор и обобщенная постановка задачи

Глава посвящена обзору методов адаптивного управления в условиях запаздывания и компенсации внешних возмущающих воздействий. Кратко обсуждаются достоинства и недостатки известных подходов. Выделяются ключевые особенности рассматриваемой в пособии проблемы, формулируется обобщенная постановка задачи.

### 1.1 Обзор методов управления в условиях запаздывания и мультисинусоидальных воздействий

Запаздывание в системе автоматического управления может быть как в состоянии, так и в канале управления и измерения, включая различные их комбинации. При этом рассматриваемые запаздывания могут быть как постоянные, так и переменные. Их величина может быть известна или неизвестна.

Системы управления с постоянными запаздываниями в канале связи могут быть сведены к системам с запаздыванием только в канале управления.

В пособии мы будем рассматривать системы с входным запаздыванием, так как для таких задач получено мало конструктивных решений в силу их сложности [7, 17]. Для систем с запаздыванием только по состоянию зачастую могут быть использованы методы для систем без запаздывания, например использующие сильную обратную связь. Для таких случаев были получены конструктивные результаты, позволяющие решать задачи слежения для нелинейных и параметрически неопределенных объектов управления,

включая задачи компенсации внешних возмущающих воздействий [54]. К недостаткам подхода [54], использующего принцип комбинированного регулятора с прямыми связями по оценке задающего воздействия, и других подходов, использующих сильную обратную связь, можно отнести ухудшение качества их функционирования при наличии ограничений на управляющее воздействие.

Важным результатом в области управления системами с входным запаздыванием является «предиктор Смита» [15]. Данный подход с помощью введения дополнительного контура управления позволяет получить модель замкнутой системы без запаздывания в характеристическом уравнении и использовать классические методы управления.

К аналогичным подходам, использующим контур прогнозирования регулируемой величины, можно отнести регулятор Ресвика [1], а для дискретных систем — предиктор Цыпкина [7].

В [7] метод управления на основе пассивности был распространен на системы с постоянным запаздыванием в управлении и измерении. В [55] рассматривается задача адаптивного управления системой по выходу с входным запаздыванием в задаче слежения за эталонным сигналом с заданной точностью. Подход базируется на алгоритме адаптации высокого порядка [56]. К недостаткам такого рода подходов можно отнести бесконечномерность получаемых законов управления, в результате чего применение на практике таких регуляторов может оказаться затруднительным.

Кроме того, к недостаткам подходов [1, 15, 56–58] можно отнести требование асимптотической устойчивости объектов управления и их минимально-фазовости.

Впрочем, в [59] рассматривается регулятор по выходу на основе пассивфикации, не имеющий требований к относительной степени объекта управления и его минимально-фазовости.

Позже были получены различные адаптивные версии предиктора Смита [22, 60], в том числе для неизвестного запаздывания [61]. К недостаткам [60] можно отнести требование измеримости состояния системы. В [22] рассматриваются объекты с относительной степенью меньшей или равной двум, а также не гарантируется устойчивость замкнутой системы управления.

В [62, 63] рассматриваются адаптивные системы управления с входным запаздыванием. К недостаткам можно отнести тот факт,



что алгоритм управления строится по состоянию и вопрос работоспособности алгоритмов при использовании наблюдателя состояний остается открытым.

Закон управления, позволяющий стабилизировать систему при наличии входного запаздывания, впервые был предложен на основе конечно-мерного представления системы и редуцированного подхода [57] в работах [18, 19]. В то же время, строгое доказательство устойчивости замкнутой системы было также получено Мирославом Крстичем с помощью его метода «backstepping» («обратный обход интегратора») [17]. Сначала система с запаздыванием представляется в виде гиперболического дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Далее на основе [16] доказывается экспоненциальная устойчивость замкнутой системы.

Если рассматривать задачу отработки или компенсации внешних мультисинусоидальных воздействий, то она является классической проблемой современной теории управления. Базовым подходом является использование принципа внутренней модели [64, 65], который был расширен на случай параметрически неопределенного возмущающего воздействия в работах [35, 65–67].

Другим подходом является использование сильной обратной связи [65, 68, 69]. С другой стороны, как было указано выше, такие методы сложно применить к системам с входным запаздыванием.

Для систем с запаздыванием и мультисинусоидальными воздействиями на данный момент существует не так много результатов. В статье [70] рассматривается случай управления параметрически неопределенным линейным объектом, подверженным влиянию внешнего возмущения. Однако, авторам не удалось добиться полной компенсации возмущения.

В [71] решена задача компенсации неизвестного синусоидального возмущения для линейного объекта управления любой относительной степени, которая была расширена на случай наличия запаздывания в канале управления в [72].

Позже работа [72], с использованием [17], была расширена на задачу стабилизации неустойчивой системы при наличии внешних возмущений [43, 44] для задачи управления по состоянию и выходу соответственно.

В пособии описано расширение результатов, опубликованных в [43, 44], по компенсации внешних возмущений, в частности на слу-

чай влияния возмущений на сигнал измерения. Известные подходы для решения такой задачи были получены группой итальянских ученых Р. Марино и П. Томей [33–35].

Проблема возмущающих воздействий, присутствующих в канале измерения, часто встречается на практике. Например, такая проблема весьма актуальна для систем динамического позиционирования надводного судна в точке. Волновые возмущения являются причиной качки судна. Антенна глобальной системы позиционирования GPS, используемая для измерения географических координат судна, как правило, размещается как можно выше для лучшего приема. Из-за качки антенна может перемещаться в радиусе нескольких метров, в то время как фактические координаты судна (долгота и широта) практически не изменяются.

В [33] рассматривается объект управления в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), & x &\in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= cx(t) + \delta(t), & y &\in \mathbb{R}, \\ \dot{v}(t) &= Rv(t), & v &\in \mathbb{R}^{2m+1}, \\ \delta(t) &= qv(t), \end{aligned}$$

где матрица с неизвестными параметрами  $R$  имеет чисто мнимые собственные числа.

В [33] синтезирован адаптивный регулятор, стабилизирующий переменные состояния  $x \in \mathbb{R}^n$  с помощью управляющего воздействия  $u(t)$ , сформированного на основе измерения только выходной переменной. В качестве дополнения к [33] в [34] рассмотрена комплексная задача слежения за задающим воздействием с компенсацией неизвестных возмущений, оказывающих влияние на состояние и выходную переменную линейного стационарного неминимально-фазового объекта управления.

В [35] авторами решена комплексная задача слежения за задающим воздействием с компенсацией неизвестных возмущений, оказывающих влияние на состояние и выходную переменную линейного стационарного минимально-фазового объекта с неизвестными параметрами.

Методы управления, предложенные в [33–35], не являются универсальными и представляются очень сложными для практической

реализации. Кроме того, не рассматривался случай наличия запаздывания в канале связи.

В пособии изложены основные результаты, опубликованные в [45–53] и посвященные задаче управления объектом с входным запаздыванием для мультисинусоидальных воздействий, которые могут выступать в качестве сигнала задания и/или возмущения. При этом рассматривается случай компенсации эффекта внешнего возмущающего воздействия, приложенного к входу и выходу объекта управления, в том числе для многоканальной системы. Кроме этого, расширяется класс рассматриваемых нелинейных систем.

## 1.2 Обобщенная постановка задачи

Рассмотрим задачу слежения для объекта управления с входным запаздыванием, подверженного влиянию внешнего возмущения:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h) + f(y(t - \tau)) + E\delta(t), \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + D\delta(t), \quad (1.2)$$

$$e(t) = g(t) - y(t), \quad (1.3)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния;  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  — сигнал управления;  $f(y(t - \tau))$  — векторная функция векторного аргумента  $y(t - \tau)$ ;  $h$  и  $\tau$  — известные постоянные запаздывания,  $\tau > h$ ;  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  — выход системы;  $\delta(t) \in \mathbb{R}^m$  — возмущающее воздействие;  $g(t) \in \mathbb{R}^m$  — задающий сигнал в виде желаемого выхода системы, определяемого целью функционирования;  $e(t) \in \mathbb{R}^m$  — ошибка слежения за задающим сигналом;  $A_{n \times n}$ ,  $B_{n \times m}$ ,  $E_{n \times n}$ ,  $C_{m \times n}$ ,  $D_{m \times n}$  — матрицы, содержащие параметры объекта.

Возмущение  $\delta(t)$  и задающий сигнал  $g(t)$  представляют собой вектора, компонентами которых являются смещенные мультисинусоидальные сигналы.

**Допущение 1.2.1** Все параметры системы (1.1)-(1.2) известны.

**Допущение 1.2.2** Тройка матриц  $(A, B, C)$  полностью управляемая и наблюдаемая.

**Допущение 1.2.3** Известна нижняя граница частот  $\omega_0$  для компонент задающего сигнала  $g(t)$  и возмущающего воздействия  $\delta(t)$ .

**Допущение 1.2.4** Все частоты задающего и возмущающего воздействия различны.

В пособии описано решение задачи слежения в классе идентификационных адаптивных методов управления. На первом шаге оцениваются параметры возмущающего и задающего воздействий, строится наблюдатель и предиктор значений этих воздействий. На втором шаге для нулевого задающего сигнала решается задача компенсации внешнего возмущения. На третьем шаге полученный результат обобщается на задачу слежения.

В соответствии с этим, структура пособия построена следующим образом:

- Глава 2 посвящена синтезу схемы оценивания параметров мультисинусоидального сигнала, построению его текущей и упреждающей оценки.
- В главе 3 рассматриваются частные постановки задач компенсации внешнего возмущающего воздействия. Особенностью является влияние возмущения на данные измерений выходных регулируемых переменных.
- В главе 4 полученные результаты применяются для решения различных постановок задачи слежения.

# Глава 2

## Наблюдатели

### мультисинусоидальных сигналов

Глава посвящена методам оценивания параметров смещенных синусоидальных и мультисинусоидальных сигналов, а также построению наблюдателей и предикторов для мгновенных значений сигналов.

В целом, рассматриваемая проблема является базовой и кроме теоретической ценности имеет широкое практическое применение как в измерительных [73], так и адаптивных системах регулирования [27, 29, 32–34, 74–76]. Известны также результаты для случая, когда количество гармоник в спектре сигнала заранее не известно [28, 35, 77].

Рассматриваемый в главе алгоритм оценивания частот мультигармонического сигнала имеет динамический порядок, равный  $3l$ , где  $l$  — число гармоник, что является наименьшей размерностью среди наиболее известных результатов, опубликованных в [26, 33–35, 77–79].

Наиболее близкий аналог, предложенный в работе [79], также обладает динамической размерностью  $3l$  для случая мультисинусоидального сигнала, состоящего из  $l$  гармоник и не содержащего смещения. Но при наличии смещения в сигнале, размерность алгоритма становится больше  $3l$ . Надо отметить, что полное отсутствие смещения в измеряемом сигнале в практической задаче зачастую является существенной идеализацией, в силу конечной точности калибровки измерительных устройств.

Сначала рассматривается схема оценивания параметров смещенного гармонического сигнала, где подробно изучается вопрос робастности предложенного подхода в [80–82] к аддитивным составляющим в сигнале измерения [46]. Рассматривается способ динамической настройки параметров алгоритма, что в свою очередь поз-

воляет существенно увеличить скорость получения оценки частоты при сохранении той же точности, что и в схеме с постоянными параметрами [45]. Далее описывается интегральная схема оценивания амплитуд и смещения сигнала [45].

Во втором разделе рассматривается смещенный мультисинусоидальный сигнал. Для схемы оценивания параметров мультисинусоидального сигнала [82] приведено доказательство экспоненциальной сходимости к истинным значениям оценок параметров гармоник. Далее описан синтез интегральной схемы оценивания, позволяющей избежать трудоемких вычислений значений комплексной передаточной функции блока, связанного с оцениванием параметров, что является важным аспектом в практических задачах.

Третий раздел посвящен дополнительному анализу описанных схем оценивания и рассмотрению некоторых особенностей их работы.

## 2.1 Смещенный гармонический сигнал

Рассматривается задача оценивания параметров сигнала

$$y(t) = \sigma + \gamma \sin(\omega t + \phi), \quad (2.1)$$

где  $\sigma$  — смещение,  $\omega$  — частота,  $\gamma$  — амплитуда,  $\phi$  — фазовый сдвиг. Константы  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$  и  $\phi$  являются неизвестными.

Рассматриваемый сигнал (2.1) также может быть представлен в виде

$$y(t) = \sigma + \mu \sin(\omega t) + \nu \cos(\omega t), \quad (2.2)$$

где  $\mu = \gamma \sin(\phi)$ ,  $\nu = \gamma \cos(\phi)$ .

Две записи (2.1) и (2.2) эквивалентны и используются ниже в зависимости от удобства описания.

### 2.1.1 Оценивание частоты

Ставится задача оценивания частоты гармоники сигнала (2.1):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\omega - \hat{\omega}(t)| = 0. \quad (2.3)$$

Согласно подходу, описанному в [43, 80–84], предлагается рассмотреть не сам сигнал (2.1), а его первую производную, так как это сигнал той же частоты, но в нем отсутствует смещение  $\sigma$ :

$$\dot{y}(t) = \omega\gamma \cos(\omega t + \phi). \quad (2.4)$$

Сигнал (2.4) можно представить как выход некоторой динамической системы:

$$\ddot{y}(t) = \theta \dot{y}(t), \quad (2.5)$$

где  $\theta = -\omega^2$  — параметр генератора сигнала. Начальные условия на генераторе будут определять амплитуду  $\omega\gamma$  и фазу  $\phi$ .

Далее используется интегральный закон идентификации параметра  $\theta$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = k\dot{y}^2(t) \left( \theta - \hat{\theta}(t) \right), \quad (2.6)$$

где  $\hat{\theta}(t)$  — оценка параметра  $\theta$  генератора сигнала (2.5), связанная с оценкой частоты  $\hat{\theta}(t) = -\hat{\omega}^2(t)$ ,  $k > 0$  — некоторый настраиваемый параметр.

Выражение (2.6) содержит неизвестный параметр  $\theta$ . Раскрывая скобки и используя соотношение (2.5), получим

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = k\dot{y}(t)\ddot{y}(t) - k\dot{y}^2(t)\hat{\theta}(t). \quad (2.7)$$

Далее вводится в рассмотрение вспомогательная функция  $\chi(t)$ , позволяющая снизить порядок необходимых производных  $y(t)$  в выражении: (2.6)

$$\chi(t) = \hat{\theta}(t) - k\dot{y}(t)\ddot{y}(t). \quad (2.8)$$

Выразим из (2.8) оценку  $\hat{\theta}(t)$ :

$$\hat{\theta}(t) = \chi(t) + k\dot{y}(t)\ddot{y}(t). \quad (2.9)$$

После дифференцирования (2.9) получим

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \dot{\chi}(t) + k\dot{y}^2(t) + k\dot{y}(t)\ddot{y}(t). \quad (2.10)$$

Из (2.10) и (2.6) найдем выражение для  $\dot{\chi}(t)$  и запишем получившийся закон оценивания частоты  $\omega$ :

$$\hat{\omega}(t) = \sqrt{|\hat{\theta}(t)|}, \quad (2.11)$$

$$\hat{\theta}(t) = \chi(t) + k\dot{y}(t)\ddot{y}(t), \quad (2.12)$$

$$\dot{\chi}(t) = -k\dot{y}^2(t)\hat{\theta}(t) - k\ddot{y}^2(t), \quad (2.13)$$

где  $k > 0$  — некоторый параметр.

Закон идентификации (2.11)–(2.13) обеспечивает экспоненциальную сходимость к нулю ошибки оценивания  $\tilde{\omega}(t) = \omega - \hat{\omega}(t)$ :

$$|\tilde{\omega}(t)| \leq \rho e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.14)$$

где  $\rho$  и  $\beta$  — положительные константы.

Если производные сигнала (2.1) не измеряются, вводится линейный фильтр:

$$\xi(s) = F(s)y(s), \quad (2.15)$$

где  $F(s)$  — передаточная функция фильтра с гурвицевым знаменателем,  $y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  — изображение по Лапласу функции  $y(t)$ ,  $\xi(s)$  — выходной сигнал фильтра. При реализации фильтра в управляемой форме становятся доступны для измерения производные выходного сигнала  $\xi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\xi(s)\}$  и их количество равно степени полинома знаменателя. Здесь и далее  $\mathcal{L}\{\cdot\}$ ,  $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$  — прямое и обратное преобразования Лапласа соответственно.

Для оценивания частоты в схеме (2.11)–(2.13) используется первая и вторая производные сигнала, поэтому степень полинома знаменателя должна быть не меньше двух. Вопрос выбора конкретного вида  $F(s)$  будет рассмотрен позже.

Так как фильтр линейный, то на выходе фильтра будет смещенный гармонический сигнал той же частоты  $\omega$ , что и у гармонического сигнала  $y(t)$ , поступающего на вход, с некоторой аддитивной



экспоненциально затухающей составляющей  $\varepsilon(t)$  с экспоненциально затухающими производными, в силу гурвицевости полинома, стоящего в знаменателе передаточной функции  $F(s)$ :

$$\xi(t) = \sigma + \mu_\xi \sin(\omega t) + \nu_\xi \cos(\omega t) + \varepsilon(t) = \quad (2.16)$$

$$= \sigma + \gamma_\xi \sin(\omega t + \phi) + \varepsilon(t). \quad (2.17)$$

Смещение  $\sigma$  в сигналах  $y(t)$  и  $\xi(t)$  совпадают, так как коэффициент усиления фильтра для постоянного сигнала равен единице. Амплитуды компонент  $\mu_\xi$ ,  $\nu_\xi$  и фаза  $\phi$  могут быть рассчитаны на основе частотных свойств звена (2.15):

$$\mu_\xi = L_\omega \mu, \quad (2.18)$$

$$\nu_\xi = L_\omega \nu, \quad (2.19)$$

$$\varphi = \phi + \varphi_f, \quad (2.20)$$

где  $L_\omega = |F(j_c \omega)|$  и  $\varphi_f = \arg F(j_c \omega)$  — коэффициент усиления и сдвиг по фазе фильтра (2.15) для гармонического сигнала частоты  $\omega$  соответственно,  $j_c = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Далее для сигнала  $\xi(t)$  и его производных формулируется лемма.

*Лемма 1 Для линейного фильтра (2.15) и для сигнала (2.1) справедливо следующее выражение:*

$$\ddot{\xi}(t) = \theta \dot{\xi}(t) + \varepsilon_1(t), \quad (2.21)$$

где функции  $\dot{\xi}(t)$  и  $\ddot{\xi}(t)$  — производные выходного сигнала фильтра (2.15),  $\varepsilon_1(t)$  — экспоненциально затухающая функция.

*Доказательство леммы 1.* Выполняя преобразование Лапласа для (2.5), имеем

$$s^3 y(s) = \theta s y(s) + Q(s), \quad (2.22)$$

где  $y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  — изображение по Лапласу переменной  $y(t)$ , а полином  $Q(s)$  — изображение по Лапласу для начальных условий.

Умножая обе части (2.22) на  $F(s)$ , получим

$$s^3 F(s)y(s) = \theta s F(s)y(s) + F(s)Q(s). \quad (2.23)$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа для (2.23) с учетом (2.15), имеем

$$\ddot{\xi}(t) = \theta \dot{\xi}(t) + \varepsilon_1(t), \quad (2.24)$$

где  $\varepsilon_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)F(s)\}$  — экспоненциально затухающая функция с экспоненциально затухающими производными, что и требовалось доказать.

Схема оценивания в этом случае примет вид:

$$\hat{\omega}(t) = \sqrt{|\hat{\theta}(t)|}, \quad (2.25)$$

$$\hat{\theta}(t) = \chi(t) + k\xi_1(t)\xi_2(t), \quad (2.26)$$

$$\dot{\chi}(t) = -k\xi_1^2(t)\hat{\theta}(t) - k\xi_2^2(t), \quad (2.27)$$

где  $\xi_1(t) = \dot{\xi}(t)$ ,  $\xi_2(t) = \ddot{\xi}(t)$ .

В отличие от (2.11)–(2.13), в схеме оценивания (2.25)–(2.27) не используются недоступные для измерения производные сигнала  $y(t)$ .

### 2.1.2 Оценивание частоты гармоник по зашумленным измерениям

Рассмотрим проблему оценивания частоты  $\omega$  сигнала (2.1) по измерению  $\hat{y}(t)$ , отличающегося наличием ограниченной аддитивной составляющей  $\varsigma_0(t)$  с ограниченными производными:

$$\hat{y}(t) = \sigma + \gamma \sin(\omega t + \phi) + \varsigma_0(t). \quad (2.28)$$

**Допущение 2.1.1** Функция  $\varsigma_0(t)$  удовлетворяет следующим ограничениям:

$$\left| \int_0^\infty \dot{\varsigma}_0(\tau) d\tau \right| < \infty, \quad \left| \int_0^\infty \cos(\omega\tau) \dot{\varsigma}_0(\tau) d\tau \right| < \infty. \quad (2.29)$$

На выходе линейного фильтра (2.15), как реакция на  $\varsigma_0(t)$ , также добавится ограниченная аддитивная составляющая  $\varsigma_1(t)$  с ограниченными производными:

$$\xi(t) = \sigma + \gamma_\xi \sin(\omega t + \varphi) + \varsigma_1(t) + \varepsilon(t). \quad (2.30)$$

Можно записать следующие соотношения для производных выхода фильтра (2.15):

$$\dot{\xi}(t) = \gamma_\xi \omega \cos(\omega t + \varphi) + \dot{\varsigma}_1(t) + \dot{\varepsilon}(t), \quad (2.31)$$

$$\ddot{\xi}(t) = -\gamma_\xi \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + \ddot{\varsigma}_1(t) + \ddot{\varepsilon}(t), \quad (2.32)$$

$$\ddot{\xi}(t) = -\gamma_\xi \omega^3 \cos(\omega t + \varphi) + \ddot{\varsigma}_1(t) + \ddot{\varepsilon}(t). \quad (2.33)$$

Соотношение между производными, аналогичное (2.21), примет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}(t) &= \theta \dot{\xi}(t) - \theta \dot{\varsigma}_1(t) - \theta \dot{\varepsilon}(t) + \ddot{\varsigma}_1(t) + \ddot{\varepsilon}(t) = \\ &= \theta \dot{\xi}(t) + \varsigma_\xi(t) + \varepsilon_\xi(t), \end{aligned} \quad (2.34)$$

где  $\varsigma_\xi(t)$  — некоторая аддитивная составляющая,  $\varepsilon_\xi(t)$  — экспоненциально затухающая функция с экспоненциально затухающими производными, определяемые выражениями:

$$\varsigma_\xi(t) = \ddot{\varsigma}_1(t) - \theta \dot{\varsigma}_1(t), \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_\xi(t) = \ddot{\varepsilon}(t) - \theta \dot{\varepsilon}(t). \quad (2.36)$$

Рассмотрим производную ошибки оценивания параметра  $\theta$ , используя (2.26), (2.27) и (2.34):

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}}(t) = -\dot{\hat{\theta}}(t), \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}
-\dot{\hat{\theta}}(t) &= -\dot{\chi}(t) - k\ddot{\xi}^2(t) - k\dot{\xi}(t)\ddot{\xi}(t) = \\
&= k\dot{\xi}^2(t)\hat{\theta}(t) + k\ddot{\xi}^2(t) - k\ddot{\xi}^2(t) - k\dot{\xi}(t)\ddot{\xi}(t) = \\
&= k\dot{\xi}^2(t)\hat{\theta}(t) - k\dot{\xi}(t)(\theta\dot{\xi}(t) + \varsigma_{\xi}(t) + \varepsilon_{\xi}(t)) = \\
&= -k\dot{\xi}^2(t)\tilde{\theta}(t) - k\dot{\xi}(t)(\varsigma_{\xi}(t) + \varepsilon_{\xi}(t)). \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функцию Ляпунова:

$$V(t) = \frac{1}{2}f(t)\tilde{\theta}^2(t), \tag{2.39}$$

где  $f(t)$  — некоторая непрерывная положительно определенная функция, конкретный вид которой будет рассчитан ниже.

Найдем выражение для её производной в силу системы (2.25)–(2.27):

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \frac{1}{2}\dot{f}(t)\tilde{\theta}^2(t) + f(t)\tilde{\theta}(t)\dot{\tilde{\theta}}(t) = \\
&= \frac{1}{2}\dot{f}(t)\tilde{\theta}^2(t) + f(t)\tilde{\theta}(t) \left( -k\dot{\xi}^2(t)\tilde{\theta}(t) - k\dot{\xi}(t)(\varsigma_{\xi}(t) + \varepsilon_{\xi}(t)) \right) = \\
&= \frac{1}{2}\dot{f}(t)\tilde{\theta}^2(t) - f(t)k\dot{\xi}^2(t)\tilde{\theta}^2(t) - f(t)\tilde{\theta}(t)k\dot{\xi}(t)(\varsigma_{\xi}(t) + \varepsilon_{\xi}(t)) \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\dot{f}(t)\tilde{\theta}^2(t) - \frac{1}{2}kf(t)\dot{\xi}^2(t)\tilde{\theta}^2(t) + \\
&\quad + \frac{1}{2}kf(t)(\varsigma_{\xi}(t) + \varepsilon_{\xi}(t))^2. \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Запишем выражения для  $\dot{\xi}$  и  $\dot{\xi}^2$  с учетом (2.31):

$$\dot{\xi}(t) = \gamma_{\xi}\omega \cos(\omega t + \varphi) + \dot{\varsigma}_1(t) + \varepsilon(t), \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}^2(t) &= \gamma_{\xi}^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \dot{\varsigma}_1^2(t) + \varepsilon^2(t) + 2\gamma_{\xi}\omega \cos(\omega t + \varphi)\dot{\varsigma}_1(t) + \\
&\quad + 2\gamma_{\xi}\omega \cos(\omega t + \varphi)\varepsilon(t) + 2\dot{\varsigma}_1(t)\varepsilon(t) = \\
&= \frac{1}{2}\gamma_{\xi}^2\omega^2(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)) + \dot{\varsigma}_1^2(t) + \varepsilon^2(t) + \\
&\quad + 2\gamma_{\xi}\omega \cos(\omega t + \varphi)\dot{\varsigma}_1(t) + 2\gamma_{\xi}\omega \cos(\omega t + \varphi)\varepsilon(t) + \\
&\quad + 2\dot{\varsigma}_1(t)\varepsilon(t). \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Подставим (2.41) и (2.42) в (2.40):

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \frac{1}{2}\dot{f}(t)\tilde{\theta}^2(t) - \frac{1}{2}kf(t)\tilde{\theta}^2(t)\frac{1}{2}\gamma_\xi^2\omega^2 + \frac{1}{2}kf(t)(\varsigma_\xi(t) + \varepsilon_\xi(t))^2 - \\ & - \frac{1}{2}kf(t)\tilde{\theta}^2(t)\dot{\varsigma}_1^2(t) - \frac{1}{2}kf(t)\tilde{\theta}^2(t)\left(\frac{1}{2}\gamma_\xi^2\omega^2 \cos(2\omega t + 2\varphi) + \right. \\ & + \varepsilon^2(t) + 2\gamma_\xi\omega \cos(\omega t + \varphi)\dot{\varsigma}_1(t) + 2\gamma_\xi\omega \cos(\omega t + \varphi)\varepsilon(t) + \\ & \left. + 2\dot{\varsigma}_1(t)\varepsilon(t)\right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

В качестве  $f(t)$  выберем функцию, удовлетворяющую следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) = & kf(t)\left(\frac{1}{2}\gamma_\xi^2\omega^2 \cos(2\omega t + 2\varphi) + \varepsilon^2(t) + \right. \\ & + 2\gamma_\xi\omega \cos(\omega t + \varphi)\dot{\varsigma}_1(t) + \\ & \left. + 2\gamma_\xi\omega \cos(\omega t + \varphi)\varepsilon(t) + 2\dot{\varsigma}_1(t)\varepsilon(t)\right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Уравнение (2.44) является обыкновенным дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, где в скобках стоит некоторая функция от времени. Найдём общее решение (2.44):

$$\begin{aligned} f(t) &= C_0 e^{g(t)}, \\ g(t) &= k \int_0^t \left( \frac{1}{2}\gamma_\xi^2\omega^2 \cos(2\omega\tau + 2\varphi) + \varepsilon^2(\tau) + \right. \\ &+ 2\gamma_\xi\omega \cos(\omega\tau + \varphi)\dot{\varsigma}_1(\tau) + 2\gamma_\xi\omega \cos(\omega\tau + \varphi)\varepsilon(\tau) + \\ &\left. + 2\dot{\varsigma}_1(\tau)\varepsilon(\tau) \right) d\tau, \end{aligned} \quad (2.45)$$

где  $C_0$  — константа, зависящая от начальных условий.

Для положительной определенности функции Ляпунова  $V(t)$  (2.39) необходимо, чтобы  $C_0 > 0$ . Рассмотрим частное решение (2.44) для  $C_0 = 1$ .

Так как функция  $g(t)$  зависит от ограниченных синусоидальной и экспоненциальной составляющих и с учетом допущения 2.1.1, то

она ограничена:

$$|g(t)| \leq C_1 \leq \infty. \quad (2.46)$$

Откуда получим нижнюю и верхнюю оценки  $f(t)$  в виде:

$$C_{f1} = e^{-C_1} \leq f(t) \leq e^{C_1} = C_{f2}. \quad (2.47)$$

Подставляя (2.44) в (2.43):

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{1}{2}kf(t)\tilde{\theta}^2(t) \left( \frac{1}{2}\gamma_\xi^2\omega^2 + \dot{\zeta}^2(t) \right) + \frac{1}{2}kf(t)(\varsigma_\xi(t) + \varepsilon_\xi(t))^2 \leq \\ &\leq -\beta V(t) + \frac{1}{2}kf(t)(\varsigma_\xi(t) + \varepsilon_\xi(t))^2 \leq \\ &\leq -\beta V(t) + \frac{1}{2}kf(t)v^2(t) \leq \\ &\leq -\beta V(t) + C_3v^2(t), \end{aligned} \quad (2.48)$$

где

$$\beta = \min \left( \frac{1}{2}\gamma_\xi^2\omega^2 + \dot{\zeta}^2(t) \right) = \frac{1}{2}\gamma_\xi^2\omega^2 + \min \dot{\zeta}^2(t), \quad (2.49)$$

$$v = \varsigma_\xi(t) + \varepsilon_\xi(t), \quad (2.50)$$

$$C_3 = \frac{1}{2}kC_{f2}. \quad (2.51)$$

Рассмотрим случай равенства:

$$\dot{V}(t) = -\beta V(t) + C_3v^2(t). \quad (2.52)$$

Уравнение (2.52) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением. Для нахождения его решения рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$\dot{V}(t) = -\beta V(t), \quad (2.53)$$

$$\int \frac{dV(t)}{V(t)} = -\int \beta dt, \quad (2.54)$$

$$\ln V(t) = -\beta t + \tilde{C}_4, \quad (2.55)$$

$$V(t) = C_4 e^{-\beta t}, \quad (2.56)$$

где  $\tilde{C}_4$  и  $C_4$  — постоянные, зависящие от начальных условий, причем  $C_4 = e^{\tilde{C}_4}$ .

Решение неоднородного уравнения получим методом Лагранжа:

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = \dot{C}_4 e^{-\beta t} + C_4(-\beta)e^{-\beta t}, \\ \dot{V}(t) = -\beta C_4 e^{-\beta t} + C_3 v^2(t). \end{cases} \quad (2.57)$$

Откуда найдем:

$$\dot{C}_4 e^{-\beta t} = C_3 v^2(t), \quad (2.58)$$

$$\dot{C}_4 = C_3 e^{\beta t} v^2(t), \quad (2.59)$$

$$\int dC_4 = \int C_3 e^{\beta t} v^2(t) dt, \quad (2.60)$$

$$C_4 = \int C_3 e^{\beta t} v^2(t) dt + C_5, \quad (2.61)$$

$$C_5 = V(0). \quad (2.62)$$

Тогда решение дифференциального уравнения (2.52) примет следующий вид:

$$V(t) = V(0)e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \int C_3 e^{\beta t} v^2(t) dt = \quad (2.63)$$

$$= V(0)e^{-\beta t} + \int C_3 e^{\beta(\tau-t)} v^2(\tau) d\tau. \quad (2.64)$$

По теореме сравнения [85] получим:

$$V(t) \leq V(0)e^{-\beta t} + \int_0^t C_3 e^{\beta(\tau-t)} v^2(\tau) d\tau. \quad (2.65)$$

Найдем оценку функции  $v^2(t)$  с учетом

$$v(t) = \varsigma_\xi(t) + \varepsilon_\xi(t), \quad (2.66)$$

где  $\varsigma_\xi(t)$  из (2.35) — ограниченная функция,  $\varepsilon_\xi(t)$  из (2.36) — экспоненциально убывающая функция с экспоненциально затухающими

производными. Тогда справедлива оценка:

$$|v(t)| \leq b_1 + e^{-b_2 t}, \quad (2.67)$$

где  $b_1$  и  $b_2$  — положительные константы.

Из положительности слагаемых  $b_1$  и  $e^{-b_2 t}$  в (2.67) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$(b_1 - e^{-b_2 t})^2 + b_1 e^{-b_2 t} \geq 0, \quad (2.68)$$

$$b_1^2 - b_1 e^{-b_2 t} + e^{-2b_2 t} \geq 0, \quad (2.69)$$

$$b_1^2 + e^{-2b_2 t} \geq b_1 e^{-b_2 t}, \quad (2.70)$$

$$2(b_1^2 + e^{-2b_2 t}) \geq 2b_1 e^{-b_2 t}. \quad (2.71)$$

С учетом

$$(b_1 + e^{-b_2 t})^2 = b_1^2 + 2b_1 e^{-b_2 t} + e^{-2b_2 t}, \quad (2.72)$$

получим

$$b_1^2 + 2b_1 e^{-b_2 t} + e^{-2b_2 t} \leq 3(b_1^2 + e^{-2b_2 t}). \quad (2.73)$$

Тогда оценка для  $v^2(t)$  имеет следующий вид:

$$v^2(t) \leq 3(b_1^2 + e^{-2b_2 t}) = 3b_1^2 + 3e^{-2b_2 t}. \quad (2.74)$$

Найдем оценку интеграла из (2.65), применяя неравенство (2.74) и подставляя значение константы  $C_3$  из (2.51):

$$\begin{aligned} \int_0^t C_3 e^{\beta(\tau-t)} v^2(\tau) d\tau &\leq \int_0^t C_3 e^{\beta(\tau-t)} (3b_1^2 + 3e^{-2b_2 \tau}) d\tau = \\ &= 3C_3 b_1^2 \int_0^t e^{\beta(\tau-t)} d\tau + 3C_3 \int_0^t e^{\tau(\beta-2b_2)-\beta t} d\tau = \\ &= \frac{3C_3 b_1^2}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) + \frac{3C_3}{\beta - 2b_2} (e^{-2b_2 t} - e^{-\beta t}) = \\ &= \frac{3C_3 b_1^2}{\beta} - e^{-\beta t} \left( \frac{3C_3 b_1^2}{\beta} + \frac{3C_3}{\beta - 2b_2} \right) + \frac{3C_3}{\beta - 2b_2} e^{-2b_2 t} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{3kC_{f2}b_1^2}{2\beta} - e^{-\beta t} \left( \frac{3kC_{f2}b_1^2}{2\beta} + \frac{3kC_{f2}}{2\beta - 4b_2} \right) + \\
&\quad + \frac{3kC_{f2}}{2\beta - 4b_2} e^{-2b_2 t}. \tag{2.75}
\end{aligned}$$

Подставим полученную оценку (2.75) в неравенство (2.65):

$$\begin{aligned}
V(t) &\leq V(0)e^{-\beta t} + \frac{3kC_{f2}b_1^2}{2\beta} - \\
&\quad - \left( \frac{3kC_{f2}b_1^2}{2\beta} + \frac{3kC_{f2}}{2\beta - 4b_2} \right) e^{-\beta t} + \frac{3kC_{f2}}{2\beta - 4b_2} e^{-2b_2 t} = \\
&= \frac{3kC_{f2}b_1^2}{2\beta} + \\
&\quad + \left( V(0) - \frac{3kC_{f2}b_1^2}{2\beta} - \frac{3kC_{f2}}{2\beta - 4b_2} \right) e^{-\beta t} + \frac{3kC_{f2}}{2\beta - 4b_2} e^{-2b_2 t} \leq \\
&\leq \rho_1 k b_1^2 + \rho_2 e^{-\rho_3 t}, \tag{2.76}
\end{aligned}$$

где

$$\rho_1 = \frac{3C_{f2}}{2\beta}, \quad \rho_2 = \max \left( 0, V(0) - \frac{3kC_{f2}b_1^2}{2\beta} \right), \quad \rho_3 = \min(\beta, 2b_2).$$

Из (2.39) имеем

$$\tilde{\theta}^2(t) = \frac{2V(t)}{f(t)} \leq \frac{2(\rho_1 k b_1^2 + \rho_2 e^{-\rho_3 t})}{C_{f1}}. \tag{2.77}$$

Из условия неотрицательности коэффициентов (2.77) справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^2(t) &\leq \frac{2\rho_1 k b_1^2}{C_{f1}} + \frac{2\rho_2 e^{-\rho_3 t}}{C_{f1}} = \left( \sqrt{\frac{2\rho_1 k b_1^2}{C_{f1}}} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{2\rho_2 e^{-\rho_3 t}}{C_{f1}}} \right)^2 \leq \\
&\leq \left( \sqrt{\frac{2\rho_1 k b_1^2}{C_{f1}}} + \sqrt{\frac{2\rho_2 e^{-\rho_3 t}}{C_{f1}}} \right)^2,
\end{aligned}$$

$$|\tilde{\theta}(t)| \leq \sqrt{\frac{2\rho_1 k b_1^2}{C_{f1}}} + \sqrt{\frac{2\rho_2 e^{-\rho_3 t}}{C_{f1}}}. \quad (2.78)$$

Исходя из (2.78), рассмотрим характер сходимости функции невязки  $\tilde{\omega}(t)$  для оценки частоты:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(t) &= \sqrt{|\tilde{\theta}(t) + \hat{\theta}(t)|} - \sqrt{|\hat{\theta}(t)|} \leq \sqrt{|\tilde{\theta}(t)|}, \\ \tilde{\omega}(t) &= \sqrt{|\theta|} - \sqrt{|\theta - \tilde{\theta}(t)|} \geq -\sqrt{|\tilde{\theta}(t)|}, \\ |\tilde{\omega}(t)| &\leq \sqrt{|\tilde{\theta}(t)|}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

С учетом (2.79) найдем оценку функции невязки  $\tilde{\omega}(t)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^2(t) &\leq \sqrt{\frac{2\rho_1 k b_1^2}{C_{f1}}} + \sqrt{\frac{2\rho_2 e^{-\rho_3 t}}{C_{f1}}} = \left( \sqrt[4]{\frac{2\rho_1 k b_1^2}{C_{f1}}} \right)^2 + \left( \sqrt[4]{\frac{2\rho_2 e^{-\rho_3 t}}{C_{f1}}} \right)^2 \leq \\ &\leq \left( \sqrt[4]{\frac{2\rho_1 k b_1^2}{C_{f1}}} + \sqrt[4]{\frac{2\rho_2 e^{-\rho_3 t}}{C_{f1}}} \right)^2, \\ \tilde{\omega}(t) &\leq \sqrt[4]{\frac{2\rho_1 k b_1^2}{C_{f1}}} + \sqrt[4]{\frac{2\rho_2 e^{-\rho_3 t}}{C_{f1}}} \leq \rho_4 + \rho_5 e^{-\rho_6 t}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

где

$$\rho_4 = \sqrt[4]{\frac{2\rho_1 k b_1^2}{C_{f1}}}, \quad (2.81)$$

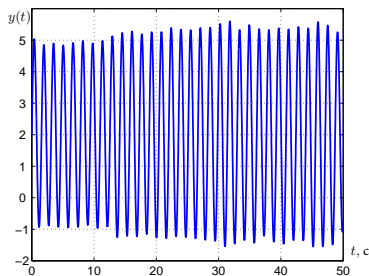
$$\rho_5 = \sqrt[4]{\frac{2\rho_2}{C_{f1}}}, \quad (2.82)$$

$$\rho_6 = \frac{\rho_3}{4}. \quad (2.83)$$

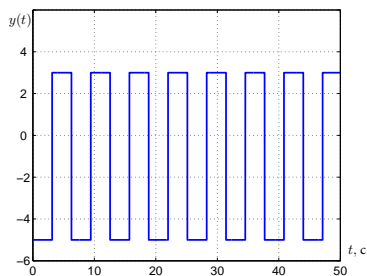
Исходя из (2.79), получаемая оценка частоты  $\hat{\omega}(t)$  экспоненциально сходится в некоторую ограниченную область, зависящую от

параметров схемы оценивания и линейного фильтра, начальных условий и аддитивной составляющей  $\zeta(t)$  в измеряемом сигнале.

*Пример 1* Рассмотрим пример, иллюстрирующий робастные свойства адаптивного закона оценивания частоты (2.25)–(2.27). В качестве фильтра рассмотрим  $\xi(s) = F(s)y(s)$ ,  $F(s) = \frac{1}{f(s)}$  (2.15), где  $f(s) = \frac{1}{\lambda^2}s^2 + \frac{1}{\lambda}s + 1$ . На рисунках 2.2 изображены графики оценки частоты  $\hat{\omega}(t)$  для различных значений параметра адаптивного закона  $k$ , коэффициента фильтра  $\lambda$  и входного сигнала  $y(t)$ , различные варианты которого представлены на рисунках 2.1.



(а) Входной сигнал  $y(t) = 2 + 3 \sin(4t) + \delta(t)$ , где  $\delta(t)$  — ограниченный шум



(б) Входной сигнал «меандр»

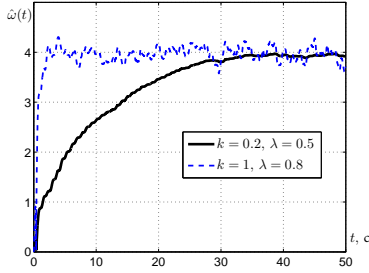
Рис. 2.1. Временные диаграммы входных сигналов  $y(t)$

### 2.1.3 Анализ качества оценивания частоты

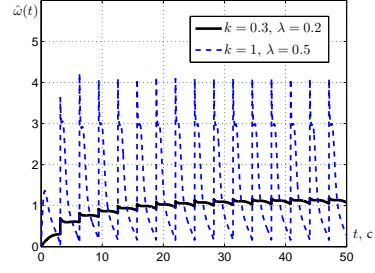
Для определенности, в качестве фильтра  $\xi(s) = F(s)y(s)$ ,  $F(s) = \frac{1}{f(s)}$  из (2.15) примем  $f(s) = \frac{1}{\lambda^2}s^2 + \frac{1}{\lambda}s + 1$ :

$$F(s) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda^2}s^2 + \frac{1}{\lambda}s + 1}. \quad (2.84)$$

В этом разделе рассматривается связь между параметром адаптивного закона  $k$  из (2.25)–(2.27), коэффициента фильтра  $\lambda$  из (2.84) и точностью оценивания частоты  $\hat{\omega}(t)$ .



(а) Оценка частоты  $\omega = 4$  для сигнала 2.1а



(б) Оценка частоты сигнала «меандр» 2.1б

Рис. 2.2. Графики оценки частоты  $\hat{\omega}(t)$

Рассмотрим неравенство (2.48) и вспомогательную систему:

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t) + \frac{1}{2} k C_{f2} \delta_v(t). \quad (2.85)$$

Применим преобразование Лапласа к выражению (2.85):

$$x(s) = \left[ \frac{k C_{f2}}{2s + 2\beta} \right] \delta_v(s), \quad (2.86)$$

где  $x(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ ,  $\delta_v(s) = \mathcal{L}\{\delta_v(t)\}$ .

Для анализа асимптотического поведения фильтра нижних частот  $W(s) = \frac{k C_{f2}}{2s + 2\beta}$  рассмотрим его частотную передаточную функцию. Для синусоидального сигнала  $\delta_v(t)$  с частотой  $\omega_\delta \gg \omega$ , амплитуда выходного сигнала  $x(t)$  пропорциональна

$$|W(j_c \omega_\delta)| = \frac{k C_{f2}}{\sqrt{4\omega_\delta^2 + 4\beta^2}}, \quad (2.87)$$

и зависит от параметра  $k$ . Таким образом, выходной сигнал  $x(t)$  системы (2.86) убывает с уменьшением значения параметра  $k$

$$\lim_{k \rightarrow 0} |W(j_c \omega_\delta)| = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k C_{f2}}{\sqrt{4\omega_\delta^2 + 4\beta^2}} = 0, \quad (2.88)$$

где  $j_c$  — мнимая единица.

Используя принцип сравнения [85] и выражения (2.48), (2.85), получим, что при выполнении условия  $x(0) \geq V(0)$  справедливо

$$V(t) \leq x(t), \quad (2.89)$$

следовательно, параметр  $k$  влияет на асимптотическую сходимость функции  $V(t)$ , а также на сходимость функции невязки  $\tilde{\omega}(t)$  в ограниченную область.

Отметим, что время переходного процесса функции  $V(t)$  зависит от константы  $\beta$ . Хорошо известно, что экспоненциальная функция сходится в течении трех постоянных времени в 5% зону от ее начальной амплитуды. То есть для любой постоянной  $b \in \mathbb{R}_+$ ,  $be^{-\beta t} \leq 0,05b$  для  $\forall t \geq \frac{3}{\beta}$ . Тогда за время

$$t_f = \frac{3}{\beta} \quad (2.90)$$

функция  $\hat{\omega}(t)$  сходится к ограниченной окрестности истинного значения частоты  $\omega$ . Таким образом, константа  $t_f$  определяет момент времени, после которого влиянием начальных условий на переходные процессы можно пренебречь.

## Гибридное переключение

Рассмотрим гибридный алгоритм оценивания частоты  $\omega$ , предложенный в работе [86], при котором параметры  $k$  и  $\lambda$  представимы убывающими кусочно-постоянными функциями.

Применение предложенной схемы позволяет улучшить асимптотическую точность оценки частоты  $\omega$  функцией  $\hat{\omega}(t)$ .

Пусть  $t_i, i \geq 0$  с  $t_0 = 0$  — возрастающая последовательность моментов времени переключения значения параметра  $k$ :

$$k_{i+1} = \frac{1}{\alpha} k_i, \quad (2.91)$$

$$t_{i+1} = t_i + \frac{3}{\beta(k_i)}, \quad (2.92)$$

где  $k(t) = k_i, \forall t \in (t_i, t_{i+1})$  — кусочно постоянная функция, определяющая значение параметра  $k$  в зависимости от времени,  $\alpha > 1$ .

Функция  $\beta(k_i)$  линейно зависит от параметра  $k$  и удовлетворяет условию:

$$\beta(k_{i+1}) = \frac{1}{\alpha} \beta(k_i). \quad (2.93)$$

Перепишем (2.92) в более простом виде:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t_i, \quad t(0) = 0, \quad (2.94)$$

$$\Delta t_{i+1} = \alpha \Delta t_i, \quad \Delta t_0 = \frac{3}{\beta(k_0)}. \quad (2.95)$$

Использование алгоритма (2.91), (2.94), (2.95), позволяет получить быструю первоначальную сходимость невязки оценивания частоты  $\tilde{\omega}(t)$  в некоторую окрестность нуля.

Отметим, что при уменьшении значения коэффициентов  $k_i$  и  $\lambda_i$ , увеличивается длительность переходных процессов  $\Delta t_i$ , но правило изменения коэффициентов (2.91)–(2.92) гарантирует асимптотическую сходимость к нулю величины  $|W(j_c \omega_\delta)|$ .

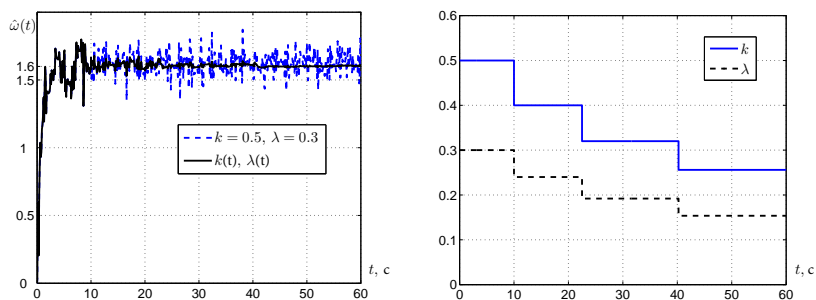
*Пример 2 Рассмотрим сигнал*

$$y(t) = 2 + 8 \sin(1,6t + 1) + \delta, \quad (2.96)$$

где  $\delta$  — белый шум с ограниченным спектром и мощностью, равной 0,1.

Результаты оценивания частоты для фиксированного коэффициента  $k = 0,5$  и с применением гибридного переключения с параметрами  $\Delta t_0 = 10$ ,  $\alpha = 1,25$ ,  $k_0 = 0,5$  проиллюстрированы на рисунке 2.3а. Значение функции  $k(t)$  для подхода с переменным значением параметра  $k$  показано на рисунке 2.3б.

Как можно заключить из рисунка 2.3а, асимптотические характеристики сходимости у гибридного подхода лучше, чем у алгоритма с постоянным параметром  $k$ . Результаты экспериментов, изображенные на рисунках 2.3а–2.3б, подтверждают теоретические выводы.



(а) Оценивание частоты с постоянным и кусочно-постоянным параметром  $k$

(б) Значение  $k$  при  $k(0) = 0,5$ ;  $\lambda(0) = 0,3$ ;  $\Delta t(0) = 10$  и  $\alpha = 1,25$

Рис. 2.3. Графики для оценивания частоты сигнала  $y(t)$  при кусочно-постоянном  $k$

### Гладкая динамическая настройка параметров алгоритма

Применение алгоритма оценивания частоты, использующего переключение значения параметра  $k$ , описанного в предыдущем разделе, может вызвать нежелательные переходные процессы в замкнутой системе. Рассмотрим алгоритм, использующий в качестве  $k(t)$  гладкую функцию, проходящую через точки переключения гибридного подхода, изложенного выше.

Рассмотрим моменты времени переключения значения параметра  $k$ :

$$\begin{aligned}
 t_0 &= 0, \\
 t_1 &= T, \\
 t_2 &= T + \alpha T, \\
 t_3 &= T + \alpha T + \alpha^2 T, \\
 &\dots \\
 t_i &= T(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{i-1}).
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

Таким образом, запишем формулу времени переключения:

$$t(i) = T \frac{\alpha^i - 1}{\alpha - 1}. \quad (2.98)$$

С учетом того, что во время переключения значение параметра  $k$  изменяется по закону

$$k(t(i)) = k(i) = \frac{k_0}{\alpha^i}, \quad (2.99)$$

перепишем выражение для  $t(i)$  из (2.98), исключая параметр  $i$ :

$$t = T \frac{\frac{k_0}{k(t)} - 1}{\alpha - 1}. \quad (2.100)$$

Теперь заменим дискретный закон изменения параметра  $k$  на непрерывный:

$$k(t) = \frac{k_0}{\frac{\alpha-1}{T}t + 1}. \quad (2.101)$$

Из (2.101) легко видеть, что функция  $k(t)$  является гиперболой, проходящей через все точки переключения  $k(i)$ . Полученный результат [45] формулируется в виде утверждения.

*Утверждение 1 Для сигнала (2.28) и схемы оценивания (2.25)–(2.27) настройка параметра  $k(t)$  согласно правилу*

$$\dot{k}(t) = -\nu k^2(t), \quad k(0) = k_0, \quad (2.102)$$

*где  $k_0 > 0$ ,  $\nu = \frac{\alpha-1}{k_0 T} > 0$ , позволяет увеличить быстродействие схемы оценивания и качество получаемой оценки (2.25), сохраняя экспоненциальный характер сходимости.*

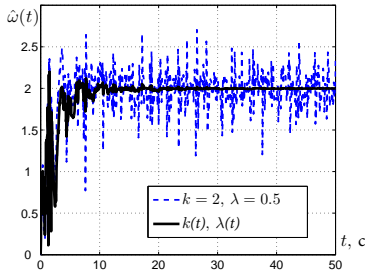
*Пример 3 Рассмотрим сигнал*

$$y(t) = 3 + 8 \sin(2t - 1) + \delta,$$

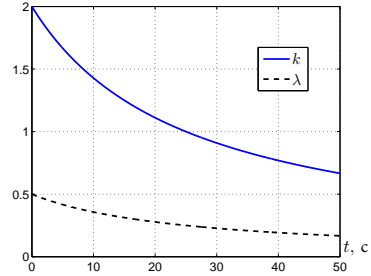
*где  $\delta$  — белый шум с ограниченным спектром и мощностью, равной 0,1.*



Результаты оценивания частоты сигнала  $y(t)$  при помощи алгоритма с фиксированным значением параметра  $k = 2$  и с применением гиперболической функции (2.102) с параметрами  $\nu = 0,01$ ,  $k_0 = 2$ ,  $\beta = 0,25$  изображены на рисунке 2.4а. Характер поведения параметра  $k$  для рассмотренного подхода представлен на рисунке 2.4б.



(а) Оценивание частоты для двух случаев



(б) Значение  $k$  при  $\nu = 0,01$  и  $\beta = 0,25$

Рис. 2.4. Оценивание частоты сигнала  $y(t)$  при гиперболическом законе изменения параметров алгоритма

### 2.1.4 Оценивание параметров смещенного гармонического сигнала

Рассмотрим задачу оценивания параметров сигнала (2.2) [52]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\sigma - \hat{\sigma}(t)| = 0, \quad (2.103)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mu - \hat{\mu}(t)| = 0, \quad (2.104)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\nu - \hat{\nu}(t)| = 0. \quad (2.105)$$

Представим сигнал (2.2) в следующем виде:

$$y(t) = \sigma + \mu \sin(\omega t) + \nu \cos(\omega t) = \bar{\sigma}^T v(t), \quad (2.106)$$

где

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}, \quad v(t) = \begin{bmatrix} v_0(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{bmatrix}. \quad (2.107)$$

Построим оценку  $\hat{v}(t)$  и покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (v(t) - \hat{v}(t)) = 0, \quad (2.108)$$

где

$$\hat{v}(t) = \begin{bmatrix} \hat{v}_0(t) \\ \hat{v}_1(t) \\ \hat{v}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sin \hat{\omega} t \\ \cos \hat{\omega} t \end{bmatrix}. \quad (2.109)$$

Рассмотрим отдельно вторую компоненту вектора  $v(t)$ :

$$\hat{v}_1(t) = \sin \hat{\omega} t = \sin(\omega t - \tilde{\omega} t) = \sin \omega t \cos \tilde{\omega} t - \cos \omega t \sin \tilde{\omega} t, \quad (2.110)$$

где  $\tilde{\omega}(t)$  — ошибка оценивания частоты.

С учетом оценки (2.14) получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\omega}(t)t| \leq \rho e^{-\beta t} t, \quad (2.111)$$

откуда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\omega}(t)t| = 0. \quad (2.112)$$

Таким образом, получаем асимптотическую сходимость функции  $\hat{v}_1(t)$  ко второй компоненте регрессора  $v(t)$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (v_1(t) - \hat{v}_1(t)) = 0.$$

Кроме того, можно показать справедливость аналогичного выражения для третьей компоненты  $v(t)$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (v_2(t) - \hat{v}_2(t)) = 0.$$

Запишем идеальный алгоритм для идентификации вектора  $\bar{\sigma}$ :

$$\dot{\hat{\sigma}}(t) = -\gamma_{\sigma} v(t) v^T(t) \hat{\sigma}(t) + \gamma_{\sigma} v(t) v^T(t) \bar{\sigma}, \quad (2.113)$$

где  $\gamma_{\sigma} > 0$  — некоторая положительная константа,  $\hat{\sigma}(t)$  — оценка вектора параметров  $\bar{\sigma}$ .

Найдем производную вектора невязки  $\tilde{\sigma}(t) = \bar{\sigma} - \hat{\sigma}(t)$  для параметров смещенного гармонического сигнала (2.106):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}}(t) &= -\dot{\hat{\sigma}}(t) = \gamma_{\sigma} v(t) v^T(t) \hat{\sigma}(t) - \gamma_{\sigma} v(t) v^T(t) \bar{\sigma} = \\ &= -\gamma_{\sigma} v(t) v^T(t) (\bar{\sigma} - \hat{\sigma}(t)) = -\gamma_{\sigma} v(t) v^T(t) \tilde{\sigma}(t). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Из выполнения условия незатухающего возбуждения для  $v(t) v^T(t)$  следует, что закон идентификации (2.113) обеспечивает асимптотическую сходимость оценки  $\hat{\sigma}$  к вектору параметров  $\bar{\sigma}$  (см. Теорему 4.3.2 в [87]):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{\sigma} - \hat{\sigma}(t)) = 0.$$

Однако вектор  $\bar{\sigma}$  содержит неизвестные компоненты, что делает алгоритм (2.113) нереализуемым. Используя уравнения (2.106) и (2.113), получим

$$\dot{\hat{\sigma}}(t) = -\gamma_{\sigma} v(t) v^T(t) \hat{\sigma}(t) + \gamma_{\sigma} v(t) y^T(t).$$

Окончательно, с учетом (2.108) для идентификации вектора  $\bar{\sigma}$  предлагается следующий алгоритм:

$$\hat{y}(t) = \hat{\sigma}^T(t) \hat{v}(t), \quad (2.115)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}(t) = -\gamma_{\sigma} \hat{v}(t) \hat{v}^T(t) \hat{\sigma}(t) + \gamma_{\sigma} \hat{v}(t) y^T(t). \quad (2.116)$$

Таким образом, получаем интегральный закон идентификации параметров  $\sigma$ ,  $\mu$  и  $\nu$  сигнала (2.106), который в отличие от [80–82] не требует расчета частотной передаточной функции фильтра (2.15).

## 2.2 Мульти­синусоидальные сигналы со смещением

В этом разделе рассматривается измеряемый сигнал

$$y(t) = \sigma + \sum_{i=1}^l \gamma_i \sin(\omega_i t + \phi_i), \quad (2.117)$$

являющийся суммой постоянного смещения  $\sigma$  и  $l$  гармоник с частотами  $\omega_i$ , амплитудами  $\gamma_i$  и начальными фазами  $\phi_i$ . Константы  $\sigma$ ,  $\omega_i$ ,  $\gamma_i$  и  $\phi_i$  являются неизвестными. Здесь и далее символ  $i$  означает номер гармоники.

Сигнал (2.117), аналогично (2.2), представим в следующем виде:

$$y(t) = \sigma + \sum_{i=1}^l \mu_i \sin(\omega_i t) + \nu_i \cos(\omega_i t), \quad (2.118)$$

где  $\mu_i = \gamma_i \sin(\phi_i)$ ,  $\nu_i = \gamma_i \cos(\phi_i)$ , которые далее будем называть амплитудами  $i$ -й гармоники.

**Допущение 2.2.1** *Количество гармоник  $l$  известно.*

**Допущение 2.2.2** *Все частоты гармоник сигнала  $y(t)$  не меньше некоторого известного числа  $\omega_0 > 0$ , т.е.  $\omega_i \geq \omega_0$ ,  $i = \overline{1, l}$ .*

**Допущение 2.2.3** *Расстояние между соседними частотами сигнала  $y(t)$  не меньше некоторого известного числа  $\delta_0$ , т.е.  $|\omega_i - \omega_j| \geq \delta_0$ ,  $i, j = \overline{1, l}$ ,  $i \neq j$ .*

Сформулируем цель, как решение задачи синтеза устройства оценивания, обеспечивающего для любых  $\omega_i > 0$ ,  $\sigma$ ,  $\mu_i$ ,  $\nu_i$  выполнение условий:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\omega_i - \hat{\omega}_i(t)| = 0, \quad (2.119)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\sigma - \hat{\sigma}(t)| = 0, \quad (2.120)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mu_i - \hat{\mu}_i(t)| = 0, \quad (2.121)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\nu_i - \hat{\nu}_i(t)| = 0, \quad (2.122)$$

где  $\hat{\omega}_i(t)$  — оценка частоты  $\omega_i$ ;  $\hat{\sigma}(t)$  — оценка смещения  $\sigma$ ;  $\hat{\mu}_i(t)$ ,  $\hat{\nu}_i(t)$  — оценки амплитуд  $i$ -й гармоники  $\mu_i$  и  $\nu_i$  соответственно.

### 2.2.1 Алгоритм идентификации частот смещенного мультисинусоидального сигнала

Как и в (2.15), введем в рассмотрение линейный фильтр:

$$\xi(s) = F(s)y(s), \quad (2.123)$$

где  $F(s)$  — передаточная функция фильтра с гурвицевым знаменателем, такая что  $F(0) = 1$ . При реализации фильтра в управляемой форме, становятся доступны для измерения производные выходного сигнала  $\xi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\xi(s)\}$ . Их количество равно степени полинома знаменателя  $n_2$ . В нашем случае, относительная степень фильтра должна быть не меньше  $2l$ . Обозначим  $\lambda_0 = \max\{\lambda_q\}$ ,  $\lambda_q$  — корни полинома, стоящего в знаменателе передаточной функции  $F(s)$ ,  $q = \overline{1, n_2}$ .

Рассмотрим частный вид передаточной функции (2.123)  $F(s) = \frac{1}{f(s)}$ , где для определенности выберем  $f(s)$  в виде:

$$f(s) = \frac{1}{\lambda_0^{2l}} s^{2l} + \frac{f_{2l-1}}{\lambda_0^{2l-1}} s^{2l-1} + \dots + \frac{f_1}{\lambda_0} s + 1, \quad (2.124)$$

где  $f_{2l-1}, f_{2l-2}, \dots, f_1$  — некоторые коэффициенты, такие что все корни полинома  $f(s)$  прямо пропорциональны параметру  $\lambda_0$ .

*Лемма 2 Для фильтра (2.123) и входного сигнала (2.117) будет выполнено соотношение*

$$\xi^{(2l+1)}(t) = \Omega^T(t)\bar{\Theta} + \varepsilon(t), \quad (2.125)$$

где  $\Omega^T(t) = [\xi^{(2l-1)}(t) \ \dots \ \xi^{(3)}(t) \ \xi^{(1)}(t)]$  — регрессор, составленный из функций  $\xi^{(j)}(t)$ , являющихся производными выходного сигнала фильтра (2.123):

$$\xi^{(j)}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{s^j F(s)y(s)\}, \quad (2.126)$$

и  $\bar{\Theta}^T = [\bar{\theta}_1 \ \dots \ \bar{\theta}_{l-1} \ \bar{\theta}_l]$  — вектор параметров, зависящий от частот:

$$\begin{cases} \bar{\theta}_1 = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_l, \\ \bar{\theta}_2 = -\theta_1\theta_2 - \theta_1\theta_3 - \dots - \theta_{l-1}\theta_l, \\ \vdots \\ \bar{\theta}_l = (-1)^{l+1}\theta_1\theta_2\dots\theta_l, \end{cases} \quad (2.127)$$

где  $\theta_i = -\omega_i^2$ , функция  $|\varepsilon(t)| \leq \rho_0 e^{-\lambda t}$  и ее производные ограничены и экспоненциально стремятся к нулю;  $\rho_0, \lambda > 0$ .

*Доказательство.* Хорошо известно, что сигнал (2.117) является решением дифференциального уравнения:

$$y^{(2l+1)}(t) = \bar{\theta}_1 y^{(2l-1)}(t) + \bar{\theta}_2 y^{(2l-3)}(t) + \dots + \bar{\theta}_l \dot{y}(t). \quad (2.128)$$

Выполняя преобразование Лапласа в (2.128), найдем

$$s^{2l+1}y(s) = \bar{\theta}_1 s^{2l-1}y(s) + \dots + \bar{\theta}_l s y(s) + d(s), \quad (2.129)$$

где полином  $d(s)$  соответствует начальным условиям.

Умножая (2.129) на  $F(s)$  с учетом (2.123), получим

$$s^{2l+1}\xi(s) = \bar{\theta}_1 s^{2l-1}\xi(s) + \dots + \bar{\theta}_l s\xi(s) + F(s)d(s). \quad (2.130)$$

После обратного преобразования Лапласа в (2.130) найдем иско­мое уравнение (2.125), где  $\varepsilon(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)d(s)\}$ . В силу структуры полинома  $f(s)$ , функция  $\varepsilon(t)$  может быть представлена как сумма затухающих экспонент, причем показатель экспоненты  $\lambda$  в соотношении  $|\varepsilon(t)| \leq \rho_0 e^{-\lambda t}$  зависит от выбора собственных чисел полинома  $f(s)$ . Производные этих функций также экспоненциально стремятся к нулю. При этом  $\lambda$  прямо пропорционально настраивае­мому параметру  $\lambda_0$ :

$$\lambda = \lambda_0 \cdot C_0, \quad (2.131)$$

где  $C_0 > 0$  — некоторая константа.

*Замечание 1* Так как  $\theta_i$  является корнем полинома  $q^{2l} + \bar{\theta}_1 q^{2l-2} + \dots + \bar{\theta}_{l-1} q^2 + \bar{\theta}_l$ , где  $q$  — некоторая алгебраическая переменная, то можно вычислить значения  $\theta_i$  на основе  $\bar{\theta}_i$ .

Алгоритм оценивания частот представлен в следующей теореме.

*Теорема 1 Алгоритм настройки*

$$\hat{\omega}_i = \begin{cases} \sqrt{|\hat{\theta}_i|}, & \text{для } |\hat{\theta}_i(t)| \geq \omega_0^2, \\ \omega_0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.132)$$

где  $\omega_0$  — известная нижняя граница частот  $\omega_i$ , оценки  $\theta_i$  рассчитаны на основе  $\hat{\theta}_i$ , являющихся элементами вектора  $\hat{\Theta}$ :

$$\hat{\dot{\Theta}}(t) = \Upsilon(t) + K\Omega(t)\xi^{(2l)}(t), \quad (2.133)$$

$$\dot{\Upsilon}(t) = -K\Omega(t)\Omega^T(t)\hat{\Theta}(t) - K\dot{\Omega}(t)\xi^{(2l)}(t), \quad (2.134)$$

где  $K = \text{diag}\{k_i > 0, i = \overline{1, l}\}$ , обеспечивает экспоненциальную сходимость ошибок оценивания  $\tilde{\omega}_i(t) = \omega_i - \hat{\omega}_i(t)$  к нулю:

$$|\tilde{\omega}_i(t)| \leq \rho_1 e^{-\beta_1 t}, \quad \rho_1, \beta_1 > 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.135)$$

*Доказательство.* Используя результат леммы 2, вычислим производную ошибки оценивания  $\tilde{\Theta} = \hat{\Theta} - \bar{\Theta}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Theta}}(t) &= \dot{\hat{\Theta}}(t) - \dot{\bar{\Theta}}(t) = -\dot{\Upsilon}(t) - K\dot{\Omega}(t)\xi^{(2l)}(t) - K\Omega(t)\xi^{(2l+1)}(t) = \\ &= K\Omega(t)\Omega^T(t)\hat{\Theta}(t) + K\dot{\Omega}(t)\xi^{(2l)}(t) - K\dot{\Omega}(t)\xi^{(2l)}(t) - \\ &\quad - K\Omega(t)\xi^{(2l+1)}(t) = \\ &= K\Omega(t)\Omega^T(t)\hat{\Theta}(t) - K\Omega(t)(\Omega^T(t)\bar{\Theta} + \varepsilon(t)) = \\ &= -K\Omega(t)\Omega^T(t)\tilde{\Theta}(t) - K\Omega(t)\varepsilon(t). \end{aligned} \quad (2.136)$$

С использованием функции Ляпунова  $V(t) = \tilde{\Theta}^T K^{-1} \tilde{\Theta} / 2$ , являющейся положительно определенной квадратичной формой в силу выбора диагональной матрицы  $K$ , нетрудно видеть из (2.136), что производная  $\dot{V}(t)$  является неположительной. Исходя из этого,

можно показать лишь то, что ошибка  $\tilde{\Theta}$  стремится к некоторому вектору констант и необязательно к нулю.

Временно предположим, что  $\varepsilon = 0$ . Хорошо известно, что если регрессор  $\Omega(t)$  удовлетворяет условию предельной интегральной невырожденности, то  $\tilde{\Theta}$  как решение уравнения

$$\dot{\tilde{\Theta}}(t) = -K\Omega(t)\Omega^T(t)\tilde{\Theta}(t) \quad (2.137)$$

экспоненциально стремится к нулю (см. Теорему 4.3.2 в [87]).

Так как  $|\varepsilon(t)| \leq \rho_0 e^{-\lambda t}$  — экспоненциально затухающая функция времени, то можно показать, что с учетом принципа сравнения [85] для любой экспоненциально затухающей функции  $\varepsilon(t)$  ошибка оценивания  $\tilde{\Theta}(t)$  экспоненциально сходится к нулю в системе (2.136):

$$\|\tilde{\Theta}(t)\| \leq \rho_2 e^{-\beta_2 t}, \quad \rho_2, \beta_2 > 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.138)$$

Покажем, что если регрессор  $\Omega(t)$  удовлетворяет условию предельной интегральной невырожденности, то  $X \triangleq \tilde{\Theta}$  как решение уравнения

$$\dot{X}(t) = -K\Omega(t)\Omega^T(t)X(t) \quad (2.139)$$

экспоненциально стремится к нулю, где  $K > 0$  — положительная диагональная матрица.

Согласно [87] (см. Теорему 4.3.2) рассмотрим функцию Ляпунова:

$$V = \frac{X^T K^{-1} X}{2}. \quad (2.140)$$

Дифференцируя (2.140) с учетом (2.139), получим:

$$\dot{V} = -X^T \Omega \Omega^T X = -(X^T \Omega)^2 \leq 0. \quad (2.141)$$

Из (2.141) следует, что положительная функция  $V \in \mathcal{L}_\infty$  не возрастает и имеет конечный предел  $V_\infty$ . Также будем пользоваться тем фактом, что вектора  $X, \Omega \in \mathcal{L}_\infty$  ограничены. Заметим, что из (2.141) следует  $(X^T \Omega) \in \mathcal{L}_2$ .



Интегрируя (2.141), получим

$$V(t + T_0) = V(t) - \int_t^{t+T_0} (X^T(\tau)\Omega(\tau))^2 d\tau, \quad \forall t, T_0 > 0. \quad (2.142)$$

Выражая  $X^T(\tau)\Omega(\tau) = X^T(t)\Omega(\tau) + (X^T(\tau) - X^T(t))\Omega(\tau)$  и используя неравенство  $(x + y)^2 \geq \frac{1}{2}x^2 - y^2$ , найдем, что

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} (X^T(\tau)\Omega(\tau))^2 d\tau &\geq \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (X^T(t)\Omega(\tau))^2 d\tau - \\ &- \int_t^{t+T} ((X^T(\tau) - X^T(t))\Omega(\tau))^2 d\tau. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Так как регрессор  $\Omega(t)$  удовлетворяет условию предельной интегральной невырожденности, имеем

$$\int_t^{t+T_0} \Omega(\tau)\Omega^T(\tau) d\tau \geq \alpha_0 T_0 I, \quad (2.144)$$

для некоторых положительных констант  $\alpha_0$  и  $T_0$ , где  $I$  — единичная матрица. Тогда

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T_0} (X^T(t)\Omega(\tau))^2 d\tau &\geq \alpha_0 T_0 X^T(t)X(t) \\ &\geq 2\alpha_0 T_0 \lambda_{\min}\{K\} V(t). \end{aligned} \quad (2.145)$$

С другой стороны

$$X^T(\tau) - X^T(t) = \int_t^\tau \dot{X}^T(\zeta) d\zeta = - \int_t^\tau X^T(\zeta)\Omega(\zeta)\Omega^T(\zeta)K d\zeta \quad (2.146)$$

и

$$\begin{aligned}
 (X(\tau) - X(t))^T \Omega(\tau) &= - \int_t^\tau X^T(\zeta) \Omega(\zeta) \Omega^T(\zeta) K \Omega(\tau) d\zeta = \\
 &= - \int_t^\tau (X^T(\zeta) \Omega(\zeta)) (\Omega^T(\zeta) K \Omega(\tau)) d\zeta. \quad (2.147)
 \end{aligned}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского (в английской литературе неравенство Коши-Шварца) для (2.147), получим:

$$\begin{aligned}
 &\int_t^{t+T_0} ((X^T(\tau) - X^T(t)) \Omega(\tau))^2 d\tau \leq \\
 &\leq \int_t^{t+T_0} \left( \int_t^\tau (\Omega(\zeta)^T K \Omega(\tau))^2 d\zeta \int_t^\tau (X^T(\zeta) \Omega(\zeta))^2 d\zeta \right) d\tau \leq \\
 &\leq \beta_3^4 \lambda_{\max}^2 \{K\} \int_t^{t+T_0} (\tau - t) \int_t^\tau (X^T(\zeta) \Omega(\zeta))^2 d\zeta d\tau, \quad (2.148)
 \end{aligned}$$

где  $\beta_3 = \sup_{\tau \geq 0} \|\Omega\|$ .

Меняя порядок интегрирования, получим:

$$\begin{aligned}
 &\int_t^{t+T_0} ((X^T(\tau) - X^T(t)) \Omega(\tau))^2 d\tau \leq \quad (2.149) \\
 &\leq \beta_3^4 \lambda_{\max}^2 \{K\} \int_t^{t+T_0} (X^T(\zeta) \Omega(\zeta))^2 \int_\zeta^{t+T_0} (\tau - t) d\tau d\zeta \leq \\
 &\leq \beta_3^4 \lambda_{\max}^2 \{K\} \int_t^{t+T_0} (X^T(\zeta) \Omega(\zeta))^2 \left\{ \frac{T_0^2 - (\zeta - t)^2}{2} \right\} d\zeta \leq \\
 &\leq \frac{\beta_3^4 \lambda_{\max}^2 \{K\}^2 T_0^2}{2} \int_t^{t+T_0} (X^T(\zeta) \Omega(\zeta))^2 d\zeta.
 \end{aligned}$$

Подставляя (2.145) и (2.149) в (2.143), получим

$$\int_t^{t+T_0} (X^T(\tau)\Omega(\tau))^2 d\tau \geq \alpha_0 T_0 \lambda_{\min}\{K\} V(t) - \frac{\beta_3^4 T_0^2 \lambda_{\max}\{K\}^2}{2} \int_t^{t+T_0} (X^T(\zeta)\Omega(\zeta))^2 d\zeta. \quad (2.150)$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_t^{t+T_0} (X^T(\tau)\Omega(\tau))^2 d\tau \geq \beta_4 V(t),$$

где

$$\beta_4 = \frac{2\alpha_0 T_0 \lambda_{\min}\{K\}}{2 + \beta_3^4 T_0^2 \lambda_{\max}\{K\}^2}. \quad (2.151)$$

Из (2.151) и (2.142) следует, что

$$V(t + T_0) \leq V(t) - \beta_4 V(t) = \beta_5 V(t), \quad (2.152)$$

где  $\beta_5 = 1 - \beta_4$ . Так как  $\beta_4 > 0$  и  $V(t + T_0) \geq 0$ , имеем  $0 < \beta_5 < 1$ . Поскольку (2.152) справедливо для всех  $t \geq 0$ , то, делая подстановку  $t = (n - 1)T_0$  в (2.152), получим

$$V(t) \leq V(nT_0) \leq \beta_5^n V(0), \quad \forall t \geq nT_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.153)$$

Из (2.153) следует, что  $V(t)$  экспоненциально стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , откуда следует, что экспоненциально стремится к нулю  $X(t)$ .

Покажем, что для экспоненциально затухающей функции  $|\varepsilon(t)| \leq \rho_0 e^{-\lambda t}$  ошибки оценивания  $X \triangleq \tilde{\Theta}$  экспоненциально сходится к нулю в системе (2.136). Напомним, что фильтр (2.123) сформирован так, что  $\lambda = \lambda_0 \cdot C_0$  (см. (2.131)).

Рассмотрим динамическую модель

$$\dot{X}(t) = -K \Omega(t) \Omega^T(t) X(t) - K \Omega(t) \varepsilon(t) \quad (2.154)$$

и функцию Ляпунова (2.140).

Для производной функции Ляпунова получим:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -(X^T \Omega)^2 - (X^T \Omega) \varepsilon(t) \leq \\ &\leq -\frac{1}{2} (X^T \Omega)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2(t).\end{aligned}\quad (2.155)$$

Интегрируя (2.155), получим следующее неравенство:

$$V(t + T_0) \leq V(t) - \frac{1}{2} \int_t^{t+T_0} (X^T(\tau) \Omega(\tau))^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_t^{t+T_0} \varepsilon^2(\tau) d\tau, \forall t, T > 0.$$

Выполняя преобразования, аналогичные (2.143)–(2.152), нетрудно получить следующее соотношение для функции Ляпунова:

$$\begin{aligned}V(t + T_0) &\leq \beta_6 V(t) + \frac{\rho_0^2}{2} \int_t^{t+T_0} e^{-2\lambda_0 C_0 \tau} d\tau, \\ &\leq \beta_6 V(t) + C_3 e^{-2\lambda_0 C_0 t},\end{aligned}\quad (2.156)$$

где  $\beta_6 = 1 - \frac{1}{2}\beta_4$ ,  $0 < \beta_6 < 1$ ,  $C_3 = \frac{\rho_0^2}{4\lambda_0 C_0} (1 - e^{-2\lambda_0 C_0 T_0})$ .

Подставим  $t = nT_0$  в (2.156):

$$V((n+1)T_0) \leq \beta_6 V(nT_0) + C_3 e^{-2\lambda_0 C_0 T_0 n}.$$

Используя принцип сравнения [85], имеем  $V(nT_0) \leq V_0(nT_0)$ , где  $V_0(nT_0)$  является решением уравнения:

$$V_0((n+1)T_0) = \beta_6 V_0(nT_0) + C_3 e^{-2\lambda_0 C_0 T_0 n}. \quad (2.157)$$

Из (2.157) получим

$$\begin{aligned}V_0((n+2)T_0) - (\beta_6 + e^{-2\lambda_0 C_0 T_0}) V_0((n+1)T_0) \\ + \beta_6 e^{-2\lambda_0 C_0 T_0} V_0(nT_0) = 0.\end{aligned}\quad (2.158)$$

Выполним  $z$ -преобразование в (2.158):

$$(z^2 - (\beta_6 + e^{-2\lambda_0 C_0 T_0}) z + \beta_6 e^{-2\lambda_0 C_0 T_0}) V_0(nT_0) = 0. \quad (2.159)$$

Корни характеристического полинома в (2.159) имеют вид:  $z_1 = \beta_6$ ,  $z_2 = e^{-2\lambda_0 C_0 T_0}$ . Поскольку корни  $z_{1,2}$  больше нуля и строго меньше единицы, то последовательность  $V_0(nT_0)$  экспоненциально стремится к нулю со скоростью, определяемой корнями  $z_{1,2}$ , откуда нетрудно получить оценку для  $V(t)$  при  $\forall t \geq nT_0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ :

$$V(t) \leq V(nT_0) \leq V_0(nT_0) \leq C_4 e^{-C_5 nT_0}, \quad (2.160)$$

где  $C_4 = C_4(V(0), C_3) = \text{const}$  и  $C_5 = \min \left\{ 2\lambda_0 C_0; -\frac{\ln(\beta_6)}{T_0} \right\}$ .

Таким образом,  $V(t)$  экспоненциально стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , откуда следует, что экспоненциально стремится к нулю  $X(t)$  в модели (2.154), причем показатель экспоненты  $C_5$  для  $V(t)$  в (2.160) комплексно зависит от параметров матрицы  $K$  и коэффициента  $\lambda_0$ .

Аналогичные рассуждения позволяют показать, что для случая ограниченной нерегулярной составляющей в измеряемом сигнале, вектор  $X(t)$  экспоненциально стремится в окрестность, размер которой соизмерим с максимальной амплитудой аддитивной помехи. Регулирование точности в задаче оценивания параметров зашумленного сигнала может осуществляться, например, за счет коэффициентов адаптивного устройства оценки [45], а также за счет расширения размерности фильтра (2.123) для активного подавления шумов на выходе линейного фильтра и на входе в адаптивное устройство оценки (2.133), (2.134).

Согласно замечанию 1 зафиксируем, что вектор оценок частот  $\theta_i$  является доступным для системы управления на основе  $\bar{\theta}_i(t)$ . Так как вычисление  $\theta_i$  на основе  $\bar{\theta}_i(t)$  может быть рассмотрено как алгебраическая задача, то ошибки оценивания  $\tilde{\theta}_i(t) = \theta_i - \hat{\theta}_i(t)$  также сходятся к нулю и ограничены экспоненциально затухающими функциями времени.

Частоты мультисинусоидального сигнала могут быть вычислены по формуле (2.132). Покажем, что ошибки оценивания частот  $\tilde{\omega}_i(t) = \omega_i - \hat{\omega}_i(t)$  для (2.132) экспоненциально сходятся к нулю

(2.135):

$$\tilde{\omega}_i(t) = \sqrt{|\tilde{\theta}_i(t) + \hat{\theta}_i(t)|} - \sqrt{|\hat{\theta}_i(t)|} \leq \sqrt{|\tilde{\theta}_i(t)|}, \quad (2.161)$$

$$\tilde{\omega}_i(t) = \sqrt{|\theta_i|} - \sqrt{|\theta_i - \tilde{\theta}_i(t)|} \geq -\sqrt{|\tilde{\theta}_i(t)|}, \quad (2.162)$$

$$|\tilde{\omega}_i(t)| \leq \sqrt{|\tilde{\theta}_i(t)|} \leq \rho_1 e^{-\beta_1 t}, \quad (2.163)$$

где  $\rho_1$  и  $\beta_1$  зависят от  $\rho_2$  и  $\beta_2$ .

### 2.2.2 Оценивание частот мульти­синусоидального сигнала на основе метода каскадной редукции

Ниже описывается другой способ оценивания частот мульти­синусоидального сигнала [48] с использованием метода каскадной редукции [88].

Рассмотрим сигнал, представленный в виде суммы двух гармоник:

$$y(t) = \gamma_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \gamma_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2), \quad (2.164)$$

где  $\gamma_1, \omega_1, \phi_1, \gamma_2, \omega_2, \phi_2$  — неизвестные постоянные параметры.

Как известно, для генерации мульти­синусоидального сигнала можно использовать систему, описываемую следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^4 y(t)}{dt^4} = \bar{\theta}_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \bar{\theta}_2 y(t), \quad (2.165)$$

где  $\bar{\theta}_1 = -\omega_1^2 - \omega_2^2$ ,  $\bar{\theta}_2 = -\omega_1^2 \omega_2^2$ , используя обозначения, введенные в формуле (2.127).

Таким образом, задачу оценивания параметров исходного сигнала можно свести к задаче идентификации параметров  $\theta_1$  и  $\theta_2$  системы (2.165). На основе получаемых оценок  $\hat{\theta}_1$  и  $\hat{\theta}_2$  нетрудно получить оценки частот двух гармоник исходного сигнала  $\hat{\omega}_1$  и  $\hat{\omega}_2$ , решив квадратное уравнение.

Как и ранее в (2.15), введем в рассмотрение линейный фильтр:

$$\xi(s) = F(s)y(s), \quad (2.166)$$

где  $F(s)$  — передаточная функция фильтра с гурвицевым знаменателем, такая что  $F(0) = 1$ . При реализации фильтра в управляемой форме становятся доступны для измерения производные выходного сигнала  $\xi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \xi(s) \}$ . Их количество равно степени полинома знаменателя  $n_2$ . В нашем случае, она должна быть не меньше четырех.

Введем обозначения согласно (2.126):

$$\xi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ F(s)y(s) \}, \quad (2.167)$$

$$\xi^{(2)}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ s^2 F(s)y(s) \}, \quad (2.168)$$

$$\xi^{(4)}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ s^4 F(s)y(s) \}. \quad (2.169)$$

Применим преобразования (2.165), (2.167) к модели (2.164):

$$\begin{aligned} \xi^{(4)}(t) &= \bar{\theta}_1 \xi^{(2)}(t) + \bar{\theta}_2 \xi(t) + \varepsilon(t) = \\ &= \Omega^T(t) \bar{\Theta} + \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (2.170)$$

где  $\bar{\Theta}^T = [\bar{\theta}_1 \quad \bar{\theta}_2]$ ,  $\Omega^T(t) = [\xi^{(2)}(t) \quad \xi(t)]$  и  $\varepsilon(t)$  — экспоненциально затухающее слагаемое, соответствующее собственному движению системы.

При использовании алгоритма оценивания (2.132)–(2.134) можно достигать увеличения быстродействия параметрической сходимости до некоторого предела [81]. Для мультисинусоидального сигнала с несколькими гармониками увеличение коэффициентов  $k > 0$  менее эффективно, чем для скалярного случая. Для решения этой проблемы может быть использована гибридная схемы настройки параметров, базирующаяся на методе каскадной редукции [88].

Преобразуем (2.170), пренебрегая  $\varepsilon(t)$ , следуя данному методу. Для этого последовательно умножим (2.170) на  $\xi^{(2)}(t)$  и проинте-

гистрируем полученное уравнение:

$$\xi^{(4)}(t)\xi^2(t) = \bar{\theta}_1 \left( \xi^{(2)}(t) \right)^2 + \bar{\theta}_2 \xi(t)\xi^2(t), \quad (2.171)$$

$$\int_0^t \xi^{(4)}(\tau)\xi^2(\tau)d\tau = \int_0^t \bar{\theta}_1 \left( \xi^{(2)}(\tau) \right)^2 d\tau + \int_0^t \bar{\theta}_2 \xi(\tau)\xi^2(\tau)d\tau. \quad (2.172)$$

Введем обозначения для интегралов, входящих в соотношение (2.172):

$$\zeta_1(t) = \int_0^t \xi^{(4)}(\tau)\xi^2(\tau)d\tau, \quad (2.173)$$

$$\zeta_2(t) = \int_0^t \left( \xi^{(2)}(\tau) \right)^2 d\tau, \quad (2.174)$$

$$\zeta_3(t) = \int_0^t \xi(\tau)\xi^2(\tau)d\tau. \quad (2.175)$$

С учетом введенной замены, выражение (2.172) примет вид:

$$\zeta_1(t) = \bar{\theta}_1 \zeta_2(t) + \bar{\theta}_2 \zeta_3(t). \quad (2.176)$$

Поделим последнее соотношение на  $\zeta_2(t)$  и затем продифференцируем по  $t$ , тогда получим:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1(t)\zeta_2^{-1}(t) - \zeta_1(t)\dot{\zeta}_2(t)\zeta_2^{-2}(t) = \\ = \bar{\theta}_2 \left( \dot{\zeta}_3(t)\zeta_2^{-1}(t) - \zeta_3(t)\dot{\zeta}_2(t)\zeta_2^{-2}(t) \right), \end{aligned} \quad (2.177)$$

или

$$\dot{\zeta}_1(t)\zeta_2(t) - \zeta_1(t)\dot{\zeta}_2(t) = \bar{\theta}_2 \left( \dot{\zeta}_3(t)\zeta_2(t) - \zeta_3(t)\dot{\zeta}_2(t) \right). \quad (2.178)$$

Введем следующие обозначения:

$$z_{21}(t) = \dot{\zeta}_1(t)\zeta_2(t) - \zeta_1(t)\dot{\zeta}_2(t), \quad (2.179)$$

$$z_{22}(t) = \dot{\zeta}_3(t)\zeta_2(t) - \zeta_3(t)\dot{\zeta}_2(t). \quad (2.180)$$



Тогда уравнение (2.178) примет вид:

$$z_{21}(t) = \bar{\theta}_2 z_{22}(t). \quad (2.181)$$

Из (2.181) получим алгоритм идентификации параметра  $\bar{\theta}_2$ :

$$\dot{\hat{\theta}}_2(t) = -k_2 z_{22}^2(t) \hat{\theta}_2(t) + k_2 z_{22}(t) z_{21}(t), \quad (2.182)$$

где  $k_2 > 0$  — некоторый параметр, увеличение которого позволяет повысить скорость сходимости  $\hat{\theta}_2(t)$  к  $\theta_2$ .

Подставляя полученную оценку  $\hat{\theta}_2(t)$  вместо  $\theta_2$  в выражение (2.170) и пренебрегая экспоненциально затухающим слагаемым  $\varepsilon(t)$ , для идентификации параметра  $\bar{\theta}_1$  получим алгоритм вида:

$$\dot{\hat{\theta}}_1(t) = -k_1 \left( \xi^{(2)}(t) \right)^2 \hat{\theta}_1(t) + k_1 \xi^{(2)}(t) z_{11}(t), \quad (2.183)$$

где  $k_1 > 0$  — некоторый параметр, увеличение которого, как и в предыдущем случае, позволяет повысить скорость сходимости  $\hat{\theta}_1(t)$  к  $\theta_1$ :

$$z_{11}(t) = \xi^{(4)}(t) - \hat{\theta}_2 \xi(t). \quad (2.184)$$

Таким образом, получаем гибридную схему идентификации параметров  $\bar{\theta}_1 = -\omega_1^2 - \omega_2^2$  и  $\bar{\theta}_2 = -\omega_1^2 \omega_2^2$ . На основе  $\hat{\theta}_1(t)$  и  $\hat{\theta}_2(t)$  нетрудно получить оценки частот двух гармоник исходного сигнала  $\hat{\omega}_1(t)$  и  $\hat{\omega}_2(t)$ , решив квадратное уравнение. Для ускорения процесса параметрической сходимости оценок неизвестных частот мультисинусоидального сигнала (2.164) необходимо увеличивать коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$ .

Сформулируем полученный результат в виде утверждения.

*Утверждение 2 Для сигнала (2.164) схема оценивания:*

$$\hat{\omega}_i = \sqrt{|\hat{\theta}_i|}, \quad (2.185)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1(t) = -k_1 \left( \xi^{(2)}(t) \right)^2 \hat{\theta}_1(t) + k_1 \xi^{(2)}(t) z_{11}(t), \quad (2.186)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2(t) = -k_2 z_{22}^2(t) \hat{\theta}_2(t) + k_2 z_{22}(t) z_{21}(t), \quad (2.187)$$

обеспечивает экспоненциальную сходимость к нулю ошибок оценивания:

$$|\omega_i - \hat{\omega}_i(t)| \leq \rho_1 e^{-\beta_1 t}, \quad \rho_1, \beta_1 > 0, \quad \forall t \geq 0,$$

где  $k_i > 0$ ,  $\hat{\theta}_i = \arg\{q^{2l} + \hat{\theta}_1 q^{2l-1} + \dots + \hat{\theta}_l = 0\}$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\xi^{(2)}(t)$  определена в (2.168);  $z_{11}(t)$ ,  $z_{21}(t)$  и  $z_{22}(t)$  определены в (2.184), (2.179) и (2.180) соответственно.

Алгоритм оценивания частот (2.187)–(2.187) на базе метода каскадной редукции работает быстрее и точнее при одинаковых настоящих коэффициентах  $k_1$  и  $k_2$ , чем описанная выше схема оценивания частот мультигармонического сигнала (2.133)–(2.134).

Отметим, что метод каскадной редукции также может быть применен в задаче оценивания параметров зашумленного гармонического сигнала (2.28) для улучшения параметрической сходимости алгоритма [46].

Обобщенную версию указанного подхода, которую можно использовать для сигнала с произвольным количеством гармоник, можно найти в [89].

### 2.2.3 Алгоритм идентификации смещения, амплитуд и фаз гармоник

В этом разделе рассмотрим алгоритм оценивания общего смещения, амплитуд и фаз всех гармоник мультисинусоидального сигнала [82] на основе полученной оценки частот  $\hat{\omega}_i(t)$ . Сигнал (2.117) является суммой постоянного смещения  $\sigma$  и синусоидальных функций  $y_i(t) = \gamma_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$ .

Учитывая, что сигнал  $y(t)$  поступает на устойчивый линейный фильтр (2.166), то выходная переменная фильтра будет представлять собой сумму постоянной составляющей, синусоидальных гармоник с теми же частотами  $\omega_i$  и экспоненциально затухающей

функции времени, описывающей переходный процесс:

$$\begin{aligned}\xi(s) &= F(s)\sigma + \sum_{i=1}^l F(s)y_i(s), \\ \xi(t) &= \xi_0(t) + \sum_{i=1}^l \xi_i(t) + \varepsilon_\xi(t),\end{aligned}\tag{2.188}$$

где  $F(s)$  — передаточная функция фильтра (2.166),  $\xi(s) = \mathcal{L}\{\xi(t)\}$ ,  $y_i(s) = \mathcal{L}\{y_i(t)\}$ ,  $\mathcal{L}\{\cdot\}$  — оператор Лапласа,  $\xi_0(t)$ ,  $\xi_i(t)$  и  $\varepsilon_\xi(t)$  — постоянная, синусоидальные и экспоненциальная составляющие соответственно,  $i = \overline{1, l}$ .

Для постоянной и синусоидальных членов нетрудно получить следующие соотношения:

$$\xi_0(t) = \sigma, \tag{2.189}$$

$$\xi_i(t) = L_{\xi_i} y_i \left( t + \frac{\varphi_{\xi_i}}{\omega_i} \right), \tag{2.190}$$

где  $|F(j_c\omega)|_{\omega=0} = 1$  — положительный передаточный коэффициент для постоянного входного сигнала,  $L_{\xi_i} = |F(j_c\omega)|_{\omega=\omega_i}$  и  $\varphi_{\xi_i} = \arg F(j_c\omega)|_{\omega=\omega_i}$  — положительный передаточный коэффициент и фазовый сдвиг для синусоидального входного сигнала с частотой  $\omega_i$ , действующего на фильтр (2.166),  $j_c = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Пренебрегая экспоненциально затухающей составляющей  $\varepsilon_\xi(t)$  и дифференцируя (2.188)  $2l$  раз, получим две системы из  $l$  линейных уравнений:

$$\begin{cases} \xi^{(1)}(t) = \dot{\xi}_1(t) + \dot{\xi}_2(t) + \dots + \dot{\xi}_l(t), \\ \xi^{(3)}(t) = \theta_1 \dot{\xi}_1(t) + \theta_2 \dot{\xi}_2(t) + \dots + \theta_l \dot{\xi}_l(t), \\ \vdots \\ \xi^{(2l-1)}(t) = \theta_1^{l-1} \dot{\xi}_1(t) + \theta_2^{l-1} \dot{\xi}_2(t) + \dots + \theta_l^{l-1} \dot{\xi}_l(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi^{(2)}(t) = \theta_1 \xi_1(t) + \theta_2 \xi_2(t) + \dots + \theta_l \xi_l(t), \\ \xi^{(4)}(t) = \theta_1^2 \xi_1(t) + \theta_2^2 \xi_2(t) + \dots + \theta_l^2 \xi_l(t), \\ \vdots \\ \xi^{(2l)}(t) = \theta_1^l \xi_1(t) + \theta_2^l \xi_2(t) + \dots + \theta_l^l \xi_l(t), \end{cases}$$

или два матричных уравнения:

$$\begin{bmatrix} \xi^{(1)}(t) \\ \xi^{(3)}(t) \\ \vdots \\ \xi^{(2l-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^{l-1} & \theta_2^{l-1} & \dots & \theta_l^{l-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_l(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \xi^{(2)}(t) \\ \xi^{(4)}(t) \\ \vdots \\ \xi^{(2l)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_l \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \dots & \theta_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^l & \theta_2^l & \dots & \theta_l^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_l(t) \end{bmatrix}.$$

Откуда имеем:

$$\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_l(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_l \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \dots & \theta_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^l & \theta_2^l & \dots & \theta_l^l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi^{(2)}(t) \\ \xi^{(4)}(t) \\ \vdots \\ \xi^{(2l)}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.191)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_l(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^{l-1} & \theta_2^{l-1} & \dots & \theta_l^{l-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi^{(1)}(t) \\ \xi^{(3)}(t) \\ \vdots \\ \xi^{(2l-1)}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.192)$$

*Замечание 2 Обратные матрицы в (2.191) и (2.192) существуют, так как в силу постановки задачи измеряемый сигнал  $y(t)$  имеет  $l$  гармоник различной частоты.*

Реализуемый алгоритм оценки переменных  $\xi_i(t)$  и  $\dot{\xi}_i(t)$  примет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}_1(t) \\ \hat{\xi}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\xi}_l(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 & \cdots & \hat{\theta}_l \\ \hat{\theta}_1^2 & \hat{\theta}_2^2 & \cdots & \hat{\theta}_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^l & \hat{\theta}_2^l & \cdots & \hat{\theta}_l^l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi^{(2)}(t) \\ \xi^{(4)}(t) \\ \vdots \\ \xi^{(2l)}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.193)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\dot{\xi}}_1(t) \\ \hat{\dot{\xi}}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\dot{\xi}}_l(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 & \cdots & \hat{\theta}_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^{l-1} & \hat{\theta}_2^{l-1} & \cdots & \hat{\theta}_l^{l-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi^{(1)}(t) \\ \xi^{(3)}(t) \\ \vdots \\ \xi^{(2l-1)}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.194)$$

*Замечание 3 При вычислении обратных матриц для*

$$\hat{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 & \cdots & \hat{\theta}_l \\ \hat{\theta}_1^2 & \hat{\theta}_2^2 & \cdots & \hat{\theta}_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^l & \hat{\theta}_2^l & \cdots & \hat{\theta}_l^l \end{bmatrix}, \quad \hat{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 & \cdots & \hat{\theta}_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^{l-1} & \hat{\theta}_2^{l-1} & \cdots & \hat{\theta}_l^{l-1} \end{bmatrix} \quad (2.195)$$

возможно потенциальное деление на ноль, так как в знаменателе явно присутствует определитель соответствующих матриц. В силу допущений 2.2.2 и 2.2.3 определено, что минимальная частота и расстояние между соседними частотами отделены от нуля соответствующими константами. В установившемся режиме, когда переменные  $\hat{\theta}_i$  асимптотически стремятся к истинным значениям  $\theta_i$ , определители матриц  $\det\{\Phi_1\}$  и  $\det\{\Phi_2\}$  отличны от нуля, а модули этих величин больше чем некоторые константы  $C_1(\omega_0, \delta_0)$  и  $C_2(\omega_0, \delta_0)$ . Следовательно, для расчета обратных матриц  $\hat{\Phi}_1^{-1}$  и  $\hat{\Phi}_2^{-1}$  вместо деления на определитель соответствующей матрицы целесообразно использовать следующие перемен-

ные:

$$\Delta_1 = \begin{cases} \det\{\Phi_1\}, & \text{при } |\det\{\Phi_1\}| \geq C_1, \\ C_1, & \text{при } 0 \leq \det\{\Phi_1\} < C_1, \\ -C_1, & \text{при } -C_1 < \det\{\Phi_1\} < 0, \end{cases} \quad (2.196)$$

$$\Delta_2 = \begin{cases} \det\{\Phi_2\}, & \text{при } |\det\{\Phi_2\}| \geq C_2, \\ C_2, & \text{при } 0 \leq \det\{\Phi_2\} < C_2, \\ -C_2, & \text{при } -C_2 < \det\{\Phi_2\} < 0, \end{cases} \quad (2.197)$$

что исключает деление на ноль и гарантирует асимптотическую сходимость (2.193) и (2.194) к (2.191) и (2.192) соответственно.

Далее представим алгоритм оценки общего смещения, амплитуд и начальных фаз всех гармоник мультисинусоидального сигнала  $y(t)$ , описанный в [82], для которого с использованием теоремы 1 докажем экспоненциальную сходимость к нулю ошибок оценивания.

Наблюдатель общего смещения получим на основе (2.188) и (2.189):

$$\hat{\sigma} = \hat{\xi}_0(t) = \xi(t) - \sum_{i=1}^l \hat{\xi}_i(t). \quad (2.198)$$

Заметим, что в силу (2.189) переменная  $\hat{\xi}_0(t)$  является оценкой смещения  $\sigma$ .

Так как выполнено соотношение (2.135), то из (2.191)–(2.226) имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |\xi_0(t) - \hat{\xi}_0(t)| &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\xi_i(t) - \hat{\xi}_i(t)| &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\xi}_i(t) - \dot{\hat{\xi}}_i(t)| &= 0, \end{aligned}$$

причем невязки наблюдения за гармониками сигнала стремятся к нулю экспоненциально в силу результата теоремы 1.

Располагая оценками компонент выходной переменной фильтра (2.166)  $\xi_i(t)$  и их производными  $\dot{\xi}_i(t)$ , можно оценить параметры сигнала (2.117): амплитуды  $\gamma_i$  и фазы  $\phi_i$  сигнала  $y(t)$ .

*Теорема 2 Алгоритм оценивания амплитуд  $\gamma_i$  и фаз  $\phi_i$ :*

$$\hat{\gamma}_i(t) = \frac{\hat{\gamma}_{\xi i}(t)}{\hat{L}_{\xi i}(t)}, \quad \hat{\phi}_i(t) = \left( -\hat{\varphi}_{\xi i}(t) + \hat{\phi}_{\xi i}(t) \right) \bmod 2\pi, \quad (2.199)$$

$$\hat{\gamma}_{\xi i}(t) = \sqrt{\hat{\xi}_i^2(t) + \left( \frac{\hat{\dot{\xi}}_i(t)}{\hat{\dot{\omega}}_i(t)} \right)^2}, \quad (2.200)$$

$$\hat{\phi}_{\xi i}(t) = \left( \text{sign} \left( \hat{\xi}_i(t) \right) \arccos \left( \frac{\hat{\dot{\xi}}_i(t)}{\hat{\gamma}_{\xi i}(t) \hat{\dot{\omega}}_i(t)} \right) - \hat{\omega}_i(t)t \right) \bmod 2\pi, \quad (2.201)$$

$$\hat{L}_{\xi i}(t) = |F(j_c \omega)|_{\omega=\hat{\omega}_i}, \quad \hat{\varphi}_{\xi i}(t) = \arg F(j_c \omega)|_{\omega=\hat{\omega}_i}, \quad (2.202)$$

обеспечивает ограниченность и экспоненциальную сходимость к нулю ошибок  $\tilde{\gamma}_i(t) = \gamma_i - \hat{\gamma}_i(t)$  и  $\tilde{\phi}_i(t) = \phi_i - \hat{\phi}_i(t)$ . Переменные  $\hat{\gamma}_{\xi i}(t)$  и  $\hat{\phi}_{\xi i}(t)$  являются оценками  $\gamma_{\xi i}$  и  $\phi_{\xi i}$  в (2.203) соответственно, а  $\hat{L}_{\xi i}(t)$  и  $\hat{\varphi}_{\xi i}(t)$  являются оценками  $L_{\xi i}$  и  $\varphi_{\xi i}$  соответственно.

*Доказательство.* Для входного сигнала (2.117) выходная переменная фильтра (2.166) принимает следующий вид:

$$\xi(t) = \sigma + \sum_{i=1}^l \gamma_{\xi i} \sin(\omega_i t + \phi_{\xi i}) + \varepsilon_{\xi}(t), \quad (2.203)$$

где  $\sigma$  — смещение,  $\omega_i$  — частота  $i$ -ой гармоники,  $\gamma_{\xi i}$  — амплитуда  $i$ -ой гармоники,  $\phi_{\xi i}$  — фазовый сдвиг  $i$ -ой гармоники и  $\varepsilon_{\xi}(t)$  — экспоненциально затухающая функция с экспоненциально затухающими производными.

Из (2.190) следует, что

$$\xi_i(t) = L_{\xi i} \gamma_i \sin(\omega_i t + \phi_i + \varphi_{\xi i}).$$

Откуда имеем соотношения:

$$\gamma_{\xi i} = L_{\xi i} \gamma_i, \quad \phi_{\xi i} = \phi_i + \varphi_{\xi i}. \quad (2.204)$$

Для определения  $\gamma_i$  и  $\phi_i$  предварительно найдем выражения для  $\gamma_{\xi i}$ ,  $\phi_{\xi i}$ ,  $L_{\xi i}$  и  $\varphi_{\xi i}$ .

Дифференцируя  $\xi_i(t)$ , имеем

$$\dot{\xi}_i(t) = \gamma_{\xi i} \omega_i \cos(\omega_i t + \phi_{\xi i}).$$

Легко показать, что

$$\sqrt{\xi_i^2(t) + \left(\frac{\dot{\xi}_i(t)}{\omega_i}\right)^2} = \gamma_{\xi i}(t). \quad (2.205)$$

Вычислим значение корня:

$$\begin{aligned} \sqrt{\xi_i^2(t) + \left(\frac{\dot{\xi}_i(t)}{\omega_i}\right)^2} &= \sqrt{\gamma_{\xi i}^2 \sin^2(\omega_i t + \phi_{\xi i}) + \gamma_{\xi i}^2 \cos^2(\omega_i t + \phi_{\xi i})} = \\ &= \gamma_{\xi i}, \end{aligned}$$

где использовано основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2(\omega_i t + \phi_{\xi i}) + \cos^2(\omega_i t + \phi_{\xi i}) = 1.$$

Далее определим значение фазы  $\phi_{\xi i}$ , выразив эту переменную из системы уравнений:

$$\begin{cases} \xi_i(t) = \gamma_{\xi i} \sin(\omega_i t + \phi_{\xi i}), \\ \dot{\xi}_i(t) = \gamma_{\xi i} \omega_i \cos(\omega_i t + \phi_{\xi i}). \end{cases} \quad (2.206)$$

Значение функций  $\arcsin(\cdot)$  и  $\arccos(\cdot)$  изменяются в диапазоне  $[0; \pi]$ , в то время как реальное значение фазовой переменной функции  $\sin(\cdot)$  или  $\cos(\cdot)$  может меняться в пределах  $2\pi$ . Будем рассматривать фазовую переменную  $(\omega_i t + \phi_{\xi i})$  по модулю  $2\pi$  и искать решение на полуинтервале  $(-\pi; \pi]$ . Если функция  $\sin(\cdot)$  отрицательна, значит фазовую переменную следует определять на интервале  $(-\pi; 0)$ , иначе на отрезке  $[0; \pi]$ . Из системы (2.206), с учетом преды-



дущих рассуждений, имеем

$$\omega_i t + \phi_{\xi i} = \text{sign}(\xi_i(t)) \arccos\left(\frac{\dot{\xi}_i(t)}{\gamma_{\xi i} \omega_i}\right). \quad (2.207)$$

Так как значение времени  $t$  растет неограниченно, то при определении  $\phi_{\xi i}$  на основе (2.207) следует пользоваться функцией деления по модулю:

$$\phi_{\xi i} = \left( \text{sign}(\xi_i(t)) \arccos\left(\frac{\dot{\xi}_i(t)}{\gamma_{\xi i} \omega_i}\right) - \omega_i t \right) \bmod 2\pi. \quad (2.208)$$

Для определения  $\gamma_{\xi i}$  и  $\phi_{\xi i}$  мы использовали недоступные для измерения переменные. Однако у нас построены все необходимые наблюдатели, обеспечивающие экспоненциальную сходимость оценок к истинным значениям. Вместо  $\omega_i$ ,  $\xi_i(t)$ ,  $\dot{\xi}_i(t)$  и  $\gamma_{\xi i}$  подставим в (2.205) и (2.208) значения оценок  $\hat{\omega}_i(t)$ ,  $\hat{\xi}_i(t)$ ,  $\hat{\dot{\xi}}_i(t)$  и  $\hat{\gamma}_{\xi i}(t)$  соответственно и получим соотношения (2.200) и (2.201).

*Замечание 4 Поскольку в (2.201) есть явное деление на нестационарный параметр  $\hat{\gamma}_{\xi i}$ , то целесообразно сделать процедуру ограничения этого параметра снизу, аналогичную (2.132), чтобы он не был меньше некоторого заранее условленного числа  $\gamma_0$ , соответствующего минимально допустимому значению амплитуд всех гармоник  $\gamma_i \geq \gamma_0$ ,  $\forall i = 1, \dots, l$ :*

$$\hat{\gamma}_i = \begin{cases} \hat{\gamma}_i(\hat{\omega}_i, \hat{\xi}_i, \hat{\dot{\xi}}_i), & \text{для } \hat{\gamma}_i \geq \gamma_0, \\ \gamma_0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.209)$$

Рассматривая ошибки оценивания для (2.200) и (2.201), нетрудно убедиться в том, что ошибки  $\tilde{\gamma}_{\xi i}(t) = \gamma_{\xi i} - \hat{\gamma}_{\xi i}(t)$  и  $\tilde{\phi}_{\xi i}(t) = \phi_{\xi i} - \hat{\phi}_{\xi i}(t)$  ограничены и экспоненциально стремятся к нулю.

В силу того, что оценка частоты  $\hat{\omega}(t)$  экспоненциально стремится к значению  $\omega$ , то ошибки оценивания  $\tilde{L}_{\xi}(t) = L_{\xi} - \hat{L}_{\xi}(t)$  и  $\tilde{\varphi}_{\xi}(t) = \varphi_{\xi} - \hat{\varphi}_{\xi}(t)$  ограничены и экспоненциально стремятся к нулю. В этом легко убедиться, рассмотрев разности между истинными значениями переменных  $L_{\xi}$ ,  $\varphi_{\xi}$  и их оценками. На основе

соотношений (2.204) и алгоритмов оценки (2.200)–(2.202) получим (2.199).

Анализ ограниченности и экспоненциальной сходимости к нулю ошибок оценивания амплитуд, фаз и смещения сводится к рассмотрению разности оценок и их истинных значений. Такой анализ хотя и весьма громоздкий, но представляет собой тривиальные алгебраические и тригонометрические преобразования, аналогичные (2.161)–(2.163). На этом доказательство теоремы 2 заканчивается.

### 2.2.4 Интегральное оценивание параметров смещенного мультисинусоидального сигнала

Рассмотрим задачу построения интегральной схемы оценивания параметров смещенного мультисинусоидального сигнала (2.118) [53, 90]:

$$y(t) = \sigma + \sum_{i=1}^l \mu_i \sin(\omega_i t) + \nu_i \cos(\omega_i t). \quad (2.210)$$

Требуется синтезировать схему получения оценок  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\mu}_i$  и  $\hat{\nu}_i$ , соответствующих смещению  $\sigma$  и амплитудам  $\mu_i$ ,  $\nu_i$  гармоник сигнала (2.210).

Представим компоненты сигнала (2.188) в следующем виде:

$$\xi_0(t) = M_0 \sigma, \quad (2.211)$$

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= M_i \mu_i \sin(\omega_i t + \phi_i) + M_i \nu_i \cos(\omega_i t + \phi_i) = \\ &= \begin{bmatrix} \mu_i & \nu_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \\ M_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_i & \nu_i \end{bmatrix} \zeta_i(t), \end{aligned} \quad (2.212)$$

где  $M_0$  — передаточный коэффициент для постоянного сигнала,  $M_i$  и  $\phi_i$  — передаточный коэффициент и сдвиг фазы для гармонического сигнала с частотой  $\omega_i$

$$M_0 = |F(j_c \omega)|_{\omega=0} = 1, \quad (2.213)$$

$$M_i = |F(j_c \omega)|_{\omega=\omega_i}, \quad (2.214)$$

$$\varphi_i = \arg F(j_c \omega)|_{\omega=\omega_i}. \quad (2.215)$$

Смещение, как и выше в (2.226), найдем как

$$\hat{\sigma} = \hat{\xi}_0(t). \quad (2.216)$$

Для оценивания амплитуд  $\mu_i$  и  $\nu_i$  рассмотрим соотношение (2.212), которое представляет собой регрессионную модель, где  $\xi_i(t)$  измеряемая функция,  $\mu_i$  и  $\nu_i$  компоненты вектора неизвестных параметров,  $\varsigma_i(t)$  — регрессор.

Регрессор  $\varsigma_i(t)$  не измеряется, но его оценка может быть вычислена на основе оценок передаточного коэффициента  $M_i$  и сдвига фазы  $\phi_i$  по соотношениям (2.214)-(2.215) при подстановке  $\hat{\omega}_i(t)$ . С другой стороны, эти расчеты в реальном времени могут быть сложны при реализации алгоритма на практике.

Предложим способ оценки регрессора  $\varsigma_i(t)$ , не требующий расчета  $M_i$  и  $\phi_i$ , для этого введем в рассмотрение специальный сигнал:

$$\Delta(t) = \sum_{i=0}^l \sin(\omega_i t) \quad (2.217)$$

и фильтр с передаточной функцией, как и у фильтра (2.166),  $F(s)$ :

$$\vartheta(s) = F(s)\Delta(s), \quad (2.218)$$

где  $\vartheta(s) = \mathcal{L}\{\vartheta(t)\}$ ,  $\Delta(s) = \mathcal{L}\{\Delta(t)\}$ ,  $s$  — переменная Лапласа.

*Замечание 5* Передаточная функция  $F(s)$  имеет относительную степень не менее, чем  $2l$ , поэтому с помощью фильтра (2.218) можно получить производные  $\vartheta(t)$  вплоть до  $\vartheta^{(2l)}(t)$ .

Заметим, что в силу линейности фильтра, сигнал  $\vartheta(t)$  представим в виде суммы синусоид с теми же частотами  $\omega_i$ , что и входной сигнал  $\Delta(t)$ , и экспоненциально затухающим слагаемым  $\varepsilon_\vartheta(t)$ :

$$\vartheta(t) = \sum_{i=1}^l \vartheta_i(t) + \varepsilon_\vartheta(t). \quad (2.219)$$

Производя аналогичные расчеты, что и в (2.211), (2.212), получим, что сигналы  $\vartheta_i(t)$ ,  $i = \overline{1, l}$  выражаются в виде

$$\vartheta_i(t) = M_i \sin(\omega_i t + \phi_i), \quad (2.220)$$

а производные  $\dot{\vartheta}_i(t)$ ,  $i = \overline{1, l}$  соответственно равны

$$\dot{\vartheta}_i(t) = \omega_i M_i \cos(\omega_i t + \phi_i). \quad (2.221)$$

Используя алгоритм выделения гармоник (2.191)-(2.192), покажем построение наблюдателя для всех компонент регрессора  $\varsigma_i$ :

$$\begin{bmatrix} \hat{\vartheta}_1(t) \\ \hat{\vartheta}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\vartheta}_l(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \cdots & \hat{\theta}_l \\ \hat{\theta}_1^2 & \cdots & \hat{\theta}_l^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^l & \cdots & \hat{\theta}_l^l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vartheta^{(2)}(t) \\ \vartheta^{(4)}(t) \\ \vdots \\ \vartheta^{(2l)}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.222)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\dot{\vartheta}}_1(t) \\ \hat{\dot{\vartheta}}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\dot{\vartheta}}_l(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \hat{\theta}_1 & \cdots & \hat{\theta}_l \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^{l-1} & \cdots & \hat{\theta}_l^{l-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vartheta^{(1)}(t) \\ \vartheta^{(3)}(t) \\ \vdots \\ \vartheta^{(2l-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.223)$$

где  $\hat{\vartheta}_1(t), \hat{\vartheta}_2(t), \dots, \hat{\vartheta}_l(t)$  — оценки производных сигналов  $\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \dots, \vartheta_l(t)$ .

*Замечание 6* Обратные матрицы в выражениях (2.222) и (2.223) существуют, если в мультисинусоидальном сигнале  $y(t)$  не менее чем  $l$  гармоник имеют различные друг от друга частоты. Функции  $\hat{\theta}_i$  сходятся экспоненциально к  $\theta_i$ ,  $i = \overline{1, l}$ , а функции  $\tilde{\xi}_0 = \xi_0 - \hat{\xi}_0$ ,  $\tilde{\xi}_i = \xi_i(t) - \hat{\xi}_i(t)$  и  $\tilde{\dot{\xi}}_i(t) = \dot{\xi}_i(t) - \dot{\hat{\xi}}_i(t)$  экспоненциально сходятся к нулю.

Таким образом, запишем алгоритм вычисления функций регрессора  $\varsigma_i(t)$ :

$$\tilde{\varsigma}_i^T(t) = \begin{bmatrix} \hat{\vartheta}_i(t) & \frac{\hat{\dot{\vartheta}}_i(t)}{\eta_i(t)} \end{bmatrix}, \quad (2.224)$$

где

$$\eta_i(t) = \begin{cases} \hat{\omega}_i(t), & \text{если } \hat{\omega}_i \geq \omega_0, \\ \omega_0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.225)$$

Найдем выражения для нахождения амплитуд мультисинусоидального сигнала  $\mu_i$  и  $\nu_i$ , используя стандартный градиентный подход [87], основанный на регрессионной модели (2.212), и сформируем результат в виде утверждения.

*Утверждение 3 Для сигнала (2.117) алгоритм идентификации:*

$$\hat{\sigma} = \xi(t) - \sum_{i=1}^l \hat{\xi}_i(t), \quad (2.226)$$

$$\dot{\hat{\mu}}_i(t) = k_\mu \hat{\vartheta}_i(t) \left( \hat{\xi}_i(t) - \hat{\mu}_i(t) \hat{\vartheta}_i(t) - \hat{\nu}_i(t) \frac{\hat{\vartheta}_i(t)}{\eta_i(t)} \right), \quad (2.227)$$

$$\dot{\hat{\nu}}_i(t) = k_\nu \frac{\hat{\vartheta}_i(t)}{\eta_i(t)} \left( \hat{\xi}_i(t) - \hat{\mu}_i(t) \hat{\vartheta}_i(t) - \hat{\nu}_i(t) \frac{\hat{\vartheta}_i(t)}{\eta_i(t)} \right), \quad (2.228)$$

обеспечивает сходимость к нулю ошибок оценивания:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\sigma - \hat{\sigma}(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\mu_i - \hat{\mu}_i(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\nu_i - \hat{\nu}_i(t)| = 0, \quad (2.229)$$

где  $k_\mu, k_\nu > 0$  — параметры закона идентификации,

$$\zeta_i^T(t) = \begin{bmatrix} \hat{\vartheta}_i(t) & \frac{\hat{\vartheta}_i(t)}{\eta_i(t)} \end{bmatrix}, \quad \eta_i(t) = \begin{cases} \hat{\omega}_i(t), & \hat{\omega}_i \geq \omega_0, \\ \omega_0, & \hat{\omega}_i \leq \omega_0 \end{cases} \quad (2.230)$$

$\hat{\vartheta}_i(t)$  и  $\hat{\vartheta}_i(t)$  определены (2.222)–(2.223).

Анализ экспоненциальной сходимости к нулю ошибок оценивания  $\tilde{\mu}_i(t) = \mu_i - \hat{\mu}_i(t)$  и  $\tilde{\nu}_i(t) = \nu_i - \hat{\nu}_i(t)$  аналогичен рассуждениям, приведенным в теореме 1.

## 2.3 Некоторые особенности работы и применения разработанных алгоритмов

В этой главе были разобраны проблемы оценивания параметров смещенных синусоидальных и мультисинусоидальных сигналов. В силу неизмеримости необходимых производных входного сигнала  $y(t)$ , вводился линейный фильтр (2.15), (2.166) с передаточной функцией  $F(s)$ , имеющей гурвицев знаменатель относительную степень  $2l$  и удовлетворяющей условию  $F(0) = 1$ .

Важным условием выбора передаточной функции фильтра является отсутствие чисто мнимых нулей и полюсов. В первом случае для гармоник с частотами соответствующими корням числителя передаточный коэффициент будет равен нулю, а значит, если в возмущении будет гармоника с такой частотой, она не пройдет на выход фильтра, что сделает невозможным её оценивание. Во втором случае фильтр сам станет генератором гармонических сигналов с частотами соответствующими корням полинома знаменателя передаточной функции фильтра.

Минимальная возможная степень фильтра при этом равна  $2l$ . В этом случае на  $2l$ -я производную сигнала  $\xi(s)$  будет напрямую поступать входной сигнал фильтра. При наличии шума в канале измерения полезно провести дополнительную фильтрацию, для этого следует увеличить порядок фильтра.

Так как линейный фильтр влияет на спектр сигнала, имеет смысл при наличии априорных данных настроить его так, чтобы полоса пропускания фильтра включала предполагаемые частоты гармоник возмущающего воздействия. Более того, можно объединить несколько схем оценивания друг за другом, используя получаемую оценку частоты на каждом этапе для настройки фильтра следующей схемы оценивания [91].

Кроме вариантов выбора фильтра упомянутых выше (2.84) и (2.124), которые являются фильтрами нижних частот, при наличии априорных данных о сигнале возмущения имеет смысл использовать полосовой фильтр с частотой пропускания настроенной на предполагаемые частоты сигнала возмущения. Это позволит отфильтровать аддитивную составляющую в возмущении и помехи измерения, ко-

торые негативно сказываются на получаемых оценках параметров основных гармоник сигнала.

При наличии помех измерения, аддитивной составляющей в сигнале возмущения, получаемые оценки частот гармоник будут сходиться в некоторую окрестность истинного значения. Чтобы снизить влияние ошибки оценивания частоты на другие получаемые оценки, имеет смысл использовать фильтры с гладкой и монотонной характеристикой в полосе пропускания. К таким фильтрам относятся фильтры Баттерворта и Лежандра. В первом случае характеристика более гладкая, во втором обеспечивается более крутой спад амплитудно-частотной характеристики вне частоты пропускания.

## 2.4 Выводы по главе

Во второй главе были рассмотрены методы оценивания параметров смещенных гармонических и мультисинусоидальных сигналов. В первом разделе был рассмотрен алгоритм оценивания параметров смещенного гармонического сигнала, не требующий расчета частотных характеристик его звеньев. Описан способ динамической настройки параметров схем оценивания частот, который позволяет существенно повысить быстродействие при сохранении точности оценивания. Во втором разделе приведено доказательство экспоненциальной сходимости к нулю ошибок оценивания частот гармоник смещенного мультисинусоидального сигнала и алгоритм интегральной идентификации амплитуд его гармоник.

Результаты, представленные в настоящей главе, опубликованы в статьях [45–48, 52, 53, 84, 90, 92].

## Глава 3

### Компенсация внешних возмущений

В главе рассматривается задача управления неустойчивыми объектами с запаздыванием в канале связи, подверженными влиянию внешних возмущений.

В качестве возмущающего воздействия рассматривается смещенные гармонические и мультисинусоидальные сигналы. В рамках этой идеализации синтезируются законы управления, гарантирующие сходимость к нулю регулируемых переменных.

Если сигнал возмущения не может быть представлен как набор синусоидальных функций со смещением с достаточной степенью точности, то тогда разницу можно рассматривать как часть некоторой аддитивной составляющей, которая также может описывать помехи в канале связи и ошибки измерения. В таком случае гарантируется сходимость регулируемой переменной в некоторую окрестность, зависящую от аддитивной составляющей.

Возмущающее воздействие характеризуется параметрической неопределенностью частот, амплитуд, начальных фаз и смещения.

В пособии описано решение задачи компенсации в классе идентификационных методов адаптивного управления [93]. Результаты предыдущей главы используются для построения устройства оценки частот возмущения и предиктора возмущающего воздействия. Затем синтезируется регулятор, стабилизирующий объект управления с помощью предиктора для неустойчивых систем [18, 19], основанного на концепции предиктора Смита [15].

В первом разделе будет рассмотрен алгоритм управления для неустойчивых систем с входным запаздыванием, параметрически не определенным мультисинусоидальным возмущением, оказывающим влияние на выходную переменную объекта. Проблема возмущающих воздействий, присутствующих в канале измерения, может встречаться в реальных технических системах, например, как результат его приложения напрямую к датчикам.



Во втором разделе описано расширение полученного результата на многоканальную систему специального вида. Так как общий подход не зависит от количества подсистем, рассматривается система с двумя выходами и двумя входами. На каждую подсистему действует свое возмущающее воздействие. Синтезируется алгоритм стабилизации системы и компенсации внешнего возмущающего воздействия на каждом выходе объекта управления.

В третьем разделе рассматривается неустойчивая нелинейная система специального вида, для которой синтезируется закон управления по состоянию. Особенностью системы является зависимость переменных состояния от запаздывающего выхода системы.

### 3.1 Присутствие возмущения на входе и на выходе линейного объекта

#### 3.1.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу компенсации мультисинусоидального возмущения, присутствующего на входе и на измеряемом выходе линейной системы, в условиях запаздывания по управлению [53, 90]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h) + B\delta(t), \quad (3.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + \alpha\delta(t), \quad (3.2)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $y \in \mathbb{R}$  — выход системы,  $u \in \mathbb{R}$  — сигнал управления,  $h$  — известное постоянное запаздывание,  $A_{n \times n}$  — матрица состояния,  $B_{n \times 1}$  — матрица входов,  $C_{1 \times n}$  — матрица выхода,  $\alpha$  — ненулевой параметр.

Для сигнала управления справедливо:  $u(t - h) = 0$  для  $t < h$ .

В качестве возмущающего воздействия рассматривается мультисинусоидальный сигнал, состоящий из  $l$  гармоник, с неизвестными параметрами:

$$\delta(t) = \sigma + \sum_{i=1}^l [\mu_i \sin(\omega_i t) + \nu_i \cos(\omega_i t)], \quad (3.3)$$

где  $\sigma$  — смещение,  $\mu_i$  и  $\nu_i$  — соответствующие амплитуды компонент  $i$ -й гармоники,  $\omega_i$  — частота  $i$ -й гармоники,  $i = \overline{1, l}$  — номер гармоники.

Требуется синтезировать закон управления по выходу, обеспечивающий стабилизацию состояний системы:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (3.4)$$

с учетом изложенных ниже допущений.

**Допущение 3.1.1** Все параметры системы известны.

**Допущение 3.1.2** Тройка матриц  $(A, B, C)$  полностью управляемая и наблюдаемая.

**Допущение 3.1.3** Известна нижняя граница  $\omega_0 > 0$  частот задающего сигнала  $\omega_i \geq \omega_0$ ,  $i = \overline{1, l}$ .

**Допущение 3.1.4** Передаточная функция системы (3.1)–(3.2) по управлению  $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$  не имеет нулей соответствующих частотам возмущающего воздействия  $\omega_i$ , где  $I$  — единичная матрица.

### **3.1.2 Выделение сигнала возмущения**

Сначала выделим сигнал, содержащий все параметры возмущающего воздействия, для этого введем в рассмотрение наблюдатель:

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = A\hat{x}_1(t) + Bu(t - h) + L\tilde{y}_1(t), \quad (3.5)$$

$$\hat{y}_1(t) = C\hat{x}_1(t), \quad (3.6)$$

где матрица  $L$  выбирается таким образом, чтобы обеспечить гурвицевость матрицы  $A - LC$ .

Рассмотрим невязку по выходу:

$$\tilde{x}_1(t) = x(t) - \hat{x}_1(t), \quad (3.7)$$

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = (A - LC)\tilde{x}_1(t) + B\delta(t) - L\alpha\delta(t), \quad (3.8)$$

$$\tilde{y}_1(t) = y(t) - \hat{y}(t) = C\tilde{x}_1(t) + \alpha\delta(t). \quad (3.9)$$

Применяя преобразование Лапласа к (3.8), получим

$$\tilde{x}_1(s) = (sI - (A - LC))^{-1} [(B - L\alpha)\delta(s) + \tilde{x}_1(0)], \quad (3.10)$$

где  $s$  — комплексная переменная,  $\tilde{x}_1(s) = \mathcal{L}\{\tilde{x}_1(t)\}$  — изображение Лапласа для функции  $\tilde{x}_1(t)$ .

Из (3.9) и (3.10) мы можем получить изображение Лапласа для невязки по выходу  $\tilde{y}_1(t)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(s) = [C(sI - (A - LC))^{-1}(B - L\alpha) + \alpha] \delta(s) + \\ + C(sI - (A - LC))^{-1} \tilde{x}_1(0). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из (3.3) найдем  $\delta(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\}$ :

$$\delta(s) = \sigma \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^l \mu_i \frac{\omega_i}{s^2 + \omega_i^2} + \nu_i \frac{s}{s^2 + \omega_i^2}. \quad (3.12)$$

Так как матрица  $A - LC$  гурвицева, после применения обратного преобразования Лапласа к (3.11) получим

$$\tilde{y}_1(t) = \bar{\sigma} + \bar{\varepsilon}(t) + \sum_{i=1}^l [\bar{\mu}_i \sin(\omega_i t) + \bar{\nu}_i \cos(\omega_i t)], \quad (3.13)$$

где  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\mu}_i$ ,  $\bar{\phi}_i$  — некоторые постоянные параметры,  $\bar{\varepsilon}(t)$  — экспоненциально затухающая составляющая.

Так как  $\bar{\varepsilon}(t)$  связана с переходным процессом в устойчивой системе с гурвицевой матрицей состояния  $A - LC$ , эта функция может быть представлена как сумма убывающих экспонент умноженных на константы, полиномы и синусоиды. По этой причине её производные также экспоненциально затухают.

Как можно видеть из (3.13), невязка по выходу  $\tilde{y}_1(t)$  является смещенным мультисинусоидальным сигналом с теми же частотами, что и  $\delta(t)$ , с точностью до экспоненциально затухающего члена  $\bar{\varepsilon}(t)$ . Этот сигнал будет использован для оценивания частот  $\omega_i$  и других параметров возмущающего воздействия.

### 3.1.3 Оценивание параметров возмущающего воздействия

Для оценивания частот гармоник сигнала  $\tilde{y}_1(t)$  будет применена схема, описанная в разделе 2.2.1. Без ущерба к полноте доказательства решения поставленной задачи она может быть заменена на любой другой алгоритм, работающий в непрерывном времени и обеспечивающий глобальную экспоненциальную сходимость к нулю ошибок оценивания частот  $\tilde{\omega}_i$ .

Введем в рассмотрение линейный фильтр, аналогичный рассмотренным ранее (2.15), (2.123):

$$\xi(s) = F(s)\tilde{y}_1(s), \quad (3.14)$$

где  $F(s)$  — дробно-рациональная передаточная функция с гурвицевым знаменателем степени не меньше  $2l$ , такая что  $F(0) = 1$ . Фильтр реализуется в нормальной форме, в результате чего становятся доступны для измерения как минимум  $2l$  производных выходного сигнала фильтра  $\xi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \xi(s) \}$ :

$$\xi^{(j)}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ s^j F(s)\tilde{y}_1(s) \}, \quad (3.15)$$

где  $\xi^{(j)}(t)$  —  $j$ -я производная функции  $\xi(t)$ ,  $j = \overline{1, 2l}$  — порядок производной.

Схема оценивания примет вид:

$$\hat{\dot{\Theta}}(t) = \Upsilon(t) + K\Omega(t)\xi^{(2k)}(t), \quad (3.16)$$

$$\dot{\Upsilon}(t) = -K\Omega(t)\Omega^T(t)\hat{\dot{\Theta}}(t) - K\dot{\Omega}(t)\xi^{(2k)}(t), \quad (3.17)$$

где  $\Omega^T(t) = [\xi^{(2k-1)}(t) \ \dots \ \xi^{(3)}(t) \ \xi^{(1)}(t)]$  — регрессор,  $K = \text{diag}\{k_i > 0, i = \overline{1, l}\}$ ,  $\hat{\Theta}^T(t) = [\hat{\theta}_1(t) \ \dots \ \hat{\theta}_{l-1}(t) \ \hat{\theta}_l(t)]$  — вектор оценок неизвестных параметров.

Откуда оценки частот могут быть вычислены следующим образом:

$$\hat{\omega}_i(t) = \sqrt{|\hat{\theta}_i(t)|}, \quad (3.18)$$

где  $\hat{\theta}_i(t)$  связаны по теореме Виета с элементами  $\hat{\theta}_i(t)$  вектора  $\hat{\Theta}(t)$ , аналогично (2.127):

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1(t) = \hat{\theta}_1(t) + \hat{\theta}_2(t) + \dots + \hat{\theta}_l(t), \\ \hat{\theta}_2(t) = -\hat{\theta}_1(t)\hat{\theta}_2(t) - \hat{\theta}_1(t)\hat{\theta}_3(t) - \dots - \hat{\theta}_{l-1}(t)\hat{\theta}_l(t), \\ \vdots \\ \hat{\theta}_l(t) = (-1)^{l+1}\hat{\theta}_1(t)\hat{\theta}_2(t)\dots\hat{\theta}_l(t). \end{cases} \quad (3.19)$$

Схемой оценивания (3.16)–(3.19) гарантируется экспоненциальная сходимость к нулю ошибок оценивания частот  $\tilde{\omega}_i(t) = \omega_i - \hat{\omega}_i(t)$ :

$$|\tilde{\omega}_i(t)| \leq \rho_1 e^{-\beta_1 t}, \quad \rho_1, \beta_1 > 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.20)$$

### 3.1.4 Наблюдатель внешнего возмущения

Следующим шагом является синтез наблюдателя возмущающего воздействия  $\delta(t)$  и предиктора для получения упреждающей оценки  $\delta(t+h)$ .

Оценку внешнего возмущения  $\delta(t)$  построим следующим образом:

$$\hat{\delta}(t) = \hat{\sigma} + \sum_{i=1}^l [\hat{\mu}_i \sin(\omega_i t) + \hat{\nu}_i \cos(\omega_i t)], \quad (3.21)$$

где  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\mu}_i$  и  $\hat{\nu}_i$  — соответствующие оценки параметров возмущения  $\sigma$ ,  $\mu_i$  и  $\nu_i$ .

Упреждающую оценку  $\hat{\delta}(t+h)$  найдем из (3.21):

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(t+h) &= \hat{\sigma} + \sum_{i=1}^l [\hat{\mu}_i \sin(\omega_i(t+h)) + \hat{\nu}_i \cos(\omega_i(t+h))] = \\ &= \hat{\sigma} + \sum_{i=1}^l [\kappa_i \sin(\omega_i t) + \zeta_i \cos(\omega_i t)], \end{aligned} \quad (3.22)$$

где

$$\kappa_i = \hat{\mu}_i \cos(\omega_i h) - \hat{\nu}_i \sin(\omega_i h), \quad (3.23)$$

$$\zeta_i = \hat{\mu}_i \sin(\omega_i h) + \hat{\nu}_i \cos(\omega_i h). \quad (3.24)$$

Таким образом, для получения оценок  $\hat{\delta}(t)$  и  $\hat{\delta}(t+h)$  требуется предварительно получить оценки параметров  $\sigma$ ,  $\mu_i$  и  $\nu_i$ . Для этого модифицируем описанную в разделе 2.2.4 схему оценивания параметров мультисинусоидальных сигналов. В отличие от разобранной ранее задачи нам требуется получить оценку параметров функции  $\delta(t)$ , а не сигнала  $\tilde{y}_1(t)$ , поступающего на фильтр (3.14).

Из (3.11) имеем

$$\tilde{y}_1(t) = \left[ \frac{b(p)}{a(p)} \right] \delta(t) + \bar{\varepsilon}(t), \quad (3.25)$$

где  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования,

$$\frac{b(p)}{a(p)} = C(pI - (A - LC))^{-1}(B - L\alpha) + \alpha \quad (3.26)$$

передаточная функция от возмущения  $\delta(t)$  к невязке  $\tilde{y}_1(t)$ .

Рассмотрим прохождение сигнала  $\tilde{y}_1(t)$  через фильтр (3.14). Для выходного сигнала  $\xi(t)$  можем записать

$$\xi(t) = F(p) \left( \left[ \frac{b(p)}{a(p)} \right] \delta(t) + \bar{\varepsilon}(t) \right), \quad (3.27)$$

где  $F(p)$  — передаточная функция фильтра (3.14), записанная с использованием оператора дифференцирования  $p$ .

Из (3.27), в силу линейности фильтра (3.14), можем переписать  $\xi(t)$  в следующем виде:

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \varepsilon_\xi(t) + \sum_{i=1}^l \xi_i(t), \quad (3.28)$$

где  $\xi_0$  — некоторая константа,  $\xi_i$  — синусоидальная функции с частотой  $\omega_i$ ,  $\varepsilon_\xi$  — экспоненциально затухающая составляющая.

Введем в рассмотрение передаточную функцию от  $\delta(t)$  к  $\xi(t)$ , пренебрегая экспоненциально затухающей составляющей  $\bar{\varepsilon}(t)$ :

$$W_1(s) = F(s) \frac{b(s)}{a(s)}. \quad (3.29)$$

Связь между компонентами функций  $\delta(t)$  и  $\xi(t)$  можно найти, рассмотрев комплексную передаточную функцию соответствующую (3.29):

$$W_1(j_c\omega) = F(j_c\omega) \frac{b(j_c\omega)}{a(j_c\omega)}. \quad (3.30)$$

Тогда

$$\xi_0(t) = M_0\sigma, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= M_i\mu_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) + M_i\nu_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) = \\ &= \begin{bmatrix} \mu_i & \nu_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \\ M_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где  $M_0$  — передаточный коэффициент для постоянного сигнала,  $M_i$  и  $\varphi_i$  — передаточный коэффициент и сдвиг фазы для гармонического сигнала с частотой  $\omega_i$ :

$$M_0 = |W_1(j_c\omega)|_{\omega=0} = \frac{b_0}{a_0}, \quad (3.33)$$

$$M_i = |W_1(j_c\omega)|_{\omega=\omega_i}, \quad (3.34)$$

$$\varphi_i = \arg W_1(j_c\omega)|_{\omega=\omega_i}. \quad (3.35)$$

Аналогично подходу, описанному выше в разделе 2.2.3, получим оценки для компонент  $\xi_i(t)$ :

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}_1(t) \\ \hat{\xi}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\xi}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \cdots & \hat{\theta}_k \\ \hat{\theta}_1^2 & \cdots & \hat{\theta}_k^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^k & \cdots & \hat{\theta}_k^k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi^{(2)}(t) \\ \xi^{(4)}(t) \\ \vdots \\ \xi^{(2k)}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$$\hat{\xi}_0 = \xi(t) - \sum_{i=1}^l \hat{\xi}_i(t). \quad (3.37)$$

Из (3.31) и (3.37) найдем оценку смещения  $\sigma$ :

$$\hat{\sigma}(t) = \frac{a_0}{b_0} \hat{\xi}_0(t). \quad (3.38)$$

Для оценивания амплитуд  $\mu_i$  и  $\nu_i$  используем градиентный подход, описанный ранее в разделе 2.2.4:

$$\dot{\hat{\mu}}_i(t) = k_\mu \hat{\vartheta}_i(t) \left( \hat{\xi}_i(t) - \hat{\mu}_i(t) \hat{\vartheta}_i(t) - \hat{\nu}_i(t) \frac{\hat{\dot{\vartheta}}_i(t)}{\eta_i(t)} \right), \quad (3.39)$$

$$\dot{\hat{\nu}}_i(t) = k_\nu \frac{\hat{\dot{\vartheta}}_i(t)}{\eta_i(t)} \left( \hat{\xi}_i(t) - \hat{\mu}_i(t) \hat{\vartheta}_i(t) - \hat{\nu}_i(t) \frac{\hat{\dot{\vartheta}}_i(t)}{\eta_i(t)} \right), \quad (3.40)$$

где  $k_\mu, k_\nu > 0$  — параметры закона идентификации,

$$\eta_i(t) = \begin{cases} \hat{\omega}_i(t), & \text{если } \hat{\omega}_i \geq \omega_0, \\ \omega_0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.41)$$

$\hat{\vartheta}_i(t)$  и  $\hat{\dot{\vartheta}}_i(t)$  — оценки гармоники и ее производной, соответственно для выходного сигнала  $\vartheta_i(t)$  дополнительного фильтра (3.29) и его производной  $\dot{\vartheta}_i(t)$ . Фильтр можно представить в виде:

$$\vartheta(s) = W_1(s) \Delta(s), \quad (3.42)$$

где  $\vartheta(s) = \mathcal{L}^{-1} \{ \vartheta(t) \}$ ,  $\Delta(s) = \mathcal{L}^{-1} \{ \Delta(t) \}$  на вход которого подается сигнал

$$\Delta(t) = \sum_{i=0}^l \sin(\hat{\omega}_i(t)t). \quad (3.43)$$

Оценки  $\hat{\vartheta}_i(t)$  и  $\hat{\dot{\vartheta}}_i(t)$  вычисляются на основе измеряемых производных выходного сигнала  $\vartheta(t)$  фильтра (3.42) по следующим со-



отношениям:

$$\begin{bmatrix} \hat{\vartheta}_1(t) \\ \hat{\vartheta}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\vartheta}_l(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \hat{\theta}_1 & \cdots & \hat{\theta}_l \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^{l-1} & \cdots & \hat{\theta}_l^{l-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vartheta^{(1)}(t) \\ \vartheta^{(3)}(t) \\ \vdots \\ \vartheta^{(2l-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\vartheta}_1(t) \\ \hat{\vartheta}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\vartheta}_l(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \cdots & \hat{\theta}_l \\ \hat{\theta}_1^2 & \cdots & \hat{\theta}_l^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^l & \cdots & \hat{\theta}_l^l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vartheta^{(2)}(t) \\ \vartheta^{(4)}(t) \\ \vdots \\ \vartheta^{(2l)}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

*Замечание 7* Передаточная функция  $W_1(s)$  имеет относительную степень не менее чем  $2l$ , поэтому с помощью фильтра (3.42) можно получить производные  $\vartheta(t)$  вплоть до  $\vartheta^{(2l)}(t)$ .

*Замечание 8* Обратные матрицы в выражениях (3.36), (3.45) и (3.44) существуют, если в мультисинусоидальном сигнале  $y(t)$  не менее чем  $l$  гармоник имеют различные друг от друга частоты. В силу того, что функции  $\hat{\theta}_i(t)$  сходятся экспоненциально к  $\theta_i$ , функции  $\tilde{\xi}_0(t) = \xi_0(t) - \hat{\xi}_0(t)$ ,  $\tilde{\xi}_i(t) = \xi_i(t) - \hat{\xi}_i(t)$ , и  $\tilde{\xi}_i(t) = \dot{\xi}_i(t) - \dot{\hat{\xi}}_i(t)$  экспоненциально сходятся к нулю.

На данном этапе мы получили оценки  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\mu}_i$ , и  $\hat{\nu}_i$ , необходимые для оценивания  $\delta(t)$  и  $\delta(t+h)$ . Заметим, что  $\tilde{\mu}_i(t) = \mu_i - \hat{\mu}_i(t)$  и  $\tilde{\nu}_i(t) = \nu_i - \hat{\nu}_i(t)$  экспоненциально сходятся к нулю [87], что также распространяется на  $\tilde{\delta}_1(t) = \delta(t) - \hat{\delta}(t)$  и  $\tilde{\delta}_2(t) = \delta(t+h) - \hat{\delta}(t+h)$ .

### 3.1.5 Стабилизация системы

Выберем управление в следующем виде:

$$u(t) = -\hat{\delta}(t+h) + \psi(t), \quad (3.46)$$

где  $\psi(t)$  — часть закона управления, обеспечивающая устойчивость замкнутой системы.

Подставляя (3.46) в (3.1), получим

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\psi(t-h) + B\tilde{\delta}_1(t), \quad (3.47)$$

где  $\tilde{\delta}_1(t) = \delta(t) - \hat{\delta}(t)$  — ошибка оценивания возмущения.

На основе (3.47), введем наблюдатель переменных состояния:

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = A\hat{x}_2(t) + B\psi(t-h) + L\tilde{y}_2(t), \quad (3.48)$$

$$\hat{y}_2(t) = C\hat{x}_2(t) + \alpha\hat{\delta}(t), \quad (3.49)$$

где  $\hat{x}_2(t)$  — вектор состояния наблюдателя,  $\hat{y}_2(t)$  — выходной сигнал наблюдателя,  $L$  — постоянная матрица, выбираемая из условия гурвицевости матрицы  $A - LC$ .

Рассмотрим ошибку наблюдения  $\tilde{x}_2(t) = x(t) - \hat{x}_2(t)$  с учетом (3.1), (3.2), (3.48) и (3.49):

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = (A - LC)\tilde{x}_2(t) + B\tilde{\delta}_1(t) - L\alpha\tilde{\delta}_1(t), \quad (3.50)$$

$$\tilde{y}_2(t) = C\tilde{x}_2(t) + \alpha\tilde{\delta}_1(t), \quad (3.51)$$

где  $\tilde{y}_2(t) = y(t) - \hat{y}_2(t)$  — невязка выходного сигнала.

Система (3.50)-(3.51) линейная, матрица  $A - LC$  гурвицева, функция  $\tilde{\delta}_1(t)$  экспоненциально убывает, значит можно записать, что ошибки наблюдения  $\tilde{x}_2(t)$  и  $\tilde{y}_2(t)$  сходятся к нулю:

$$\|\tilde{x}_2(t)\| \leq \rho_4 e^{-\beta_4 t}, \quad |\tilde{y}_2(t)| \leq \rho_5 e^{-\beta_5 t}, \quad (3.52)$$

где  $\rho_4, \beta_4, \rho_5, \beta_5 > 0$ .

На этом этапе мы получили наблюдатель состояния для объекта управления (3.1), (3.2), такой что оценки переменных состояния экспоненциально сходятся к истинным значениям. На этом основании он может быть использован (3.48), (3.49) при синтезе  $\psi(t)$ .

Следуя подходу описанному в [17, 44, 94], представим блок запаздывания в виде уравнения в частных производных:

$$\Psi_t(z, t) = \Psi_z(z, t), \quad 0 < z < h, \quad (3.53)$$

$$\Psi(h, t) = \psi(t), \quad (3.54)$$

с начальными условием  $\Psi(z, 0) = \psi(z - h)$ . Решение такого уравнения имеет вид  $\Psi(z, t) = \psi(t + z - h)$ , следовательно,  $\Psi(0, t) = \psi(t - h)$  описывает запаздывающий сигнал управления. Тогда выражение (3.47) примет вид:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\Psi(0, t) + B\tilde{\delta}_1(t). \quad (3.55)$$

Следуя методу «backstepping» («обратный обход интегратора») [16], исследованному в работах [44, 94], рассмотрим преобразование:

$$\begin{aligned} W(z, t) = & \Psi(z, t) - Ke^{Az}\hat{x}_2(t) - K \int_0^z e^{A(z-\tau)} B\Psi(\tau, t) d\tau + \\ & + K \int_z^h e^{A(z+h-\tau)} L\tilde{Y}(\tau, t) d\tau, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\tilde{Y}(z, t) = \tilde{y}_2(t + z - h), \quad (3.57)$$

$$\tilde{Y}_t(z, t) = \tilde{Y}_z(z, t), \quad (3.58)$$

$$\tilde{Y}(h, t) = \tilde{y}_2(t), \quad (3.59)$$

и закон управления

$$\psi(t) = Ke^{Ah}\hat{x}_2(t) + K \int_0^h e^{A(h-\tau)} B\Psi(\tau, t) d\tau. \quad (3.60)$$

*Лемма 3 Преобразование (3.56) и закон управления (3.60) приводит объект (3.55) к устойчивой системе:*

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + BW(0, t) + B\varepsilon_2(t), \quad (3.61)$$

$$W_t(z, t) = W_z(z, t), \quad (3.62)$$

$$W(h, t) = 0, \quad (3.63)$$

где  $W(0, t)$  сходится к нулю за конечное время, матрица  $K$  выбирается из условия гурвицевости матрицы  $A + BK$ ,  $\varepsilon_2(t)$  — экспоненциально затухающая составляющая.

*Доказательство.* Найдем частные производные по времени  $t$  и по пространственному аргументу  $z$  преобразования (3.56):

$$\begin{aligned}
 W_z(z, t) &= \Psi_z(z, t) - KAe^{Az}\dot{\hat{x}}_2(t) - KB\Psi(z, t) - \\
 &\quad - KA \int_0^x e^{A(z-\tau)} B\Psi(\tau, t) d\tau - Ke^{Ah} L\tilde{Y}(z, t) + \\
 &\quad + KA \int_z^h e^{A(z+h-\tau)} L\tilde{Y}(\tau, t) d\tau, \\
 W_t(z, t) &= \Psi_t(z, t) - Ke^{Az}\dot{\hat{x}}_2(t) - \\
 &\quad - K \int_0^z e^{A(z-\tau)} B\Psi_t(\tau, t) d\tau + K \int_z^h e^{A(z+h-\tau)} L\tilde{Y}_t(\tau, t) d\tau = \\
 &= \Psi_z(z, t) - KAe^{Az}\dot{\hat{x}}_2(t) - KB\Psi(z, t) - Ke^{Az}B\Psi(0, t) - \\
 &\quad - Ke^{Az}L\tilde{Y}(h, t) + Ke^{Az}B\Psi(0, t) + Ke^{Az}L\tilde{Y}(h, t) - \\
 &\quad - KA \int_0^z e^{A(z-\tau)} B\Psi(\tau, t) d\tau - Ke^{Ah}L\tilde{Y}(z, t) + \\
 &\quad + KA \int_z^h e^{A(z+h-\tau)} L\tilde{Y}(\tau, t) d\tau = \\
 &= W_z(z, t). \tag{3.64}
 \end{aligned}$$

При  $z = h$  выражение (3.56) принимает вид (3.63). Подставляя  $z = 0$  в (3.56) и  $\Psi(0, t)$  в (3.47), получим

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + BW(0, t) + B\tilde{\delta}_1(t) - \\
 &\quad - BK\tilde{x}_2(t) - BK \int_0^h e^{A(h-\tau)} L\tilde{Y}(\tau, t) d\tau. \tag{3.65}
 \end{aligned}$$

Из (3.52) имеем, что  $\tilde{x}_2(t)$  и  $\tilde{y}_2(t)$  сходятся к нулю и ограничены экспоненциально затухающей функцией, то же справедливо для

$K \int_0^h e^{A(h-\tau)} L \tilde{Y}(\tau, t) d\tau$ . Введя обозначение

$$\varepsilon_2(t) = \tilde{\delta}_1(t) - K \tilde{x}_2(t) - K \int_0^h e^{A(h-\tau)} L \tilde{Y}(\tau, t) d\tau, \quad (3.66)$$

получим (3.61), лемма 3 доказана.

Следуя [17, 43, 44], рассмотрим функцию Ляпунова:

$$V(t) = x^T(t) P x(t) + \frac{\gamma}{2} \int_0^h (1+z) W(z, t)^2 dz, \quad (3.67)$$

где  $P = P^T > 0$  — решение уравнения Ляпунова

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P = -Q \quad (3.68)$$

для некоторой матрицы  $Q$ , такой что  $Q + Q^T > 0$ , и некоторого положительного числа  $\gamma$ .

Продифференцируем (3.67):

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= x^T(t) (P(A + BK) + (A + BK)^T P) x(t) + 2x^T P B W(0, t) + \\ &+ 2x^T P B \varepsilon_2(t) - \frac{\gamma}{2} W(0, t)^2 - \frac{\gamma}{2} \int_0^h W(z, t)^2 dz \leq \\ &\leq -x^T(t) Q x(t) + \frac{4}{\gamma} x^T(t) P B B^T P x(t) + \frac{\gamma}{2} \varepsilon_2^2(t) - \\ &- \frac{\gamma}{2} \int_0^h W(z, t)^2 dz. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Выбрав  $\gamma = 8\lambda_{\max}(P B B^T P) / \lambda_{\min}(Q)$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2} x^T(t) x(t) + \frac{\gamma}{2} \varepsilon_2^2(t) - \\ &- \frac{\gamma}{2(1+h)} \int_0^h (1+z) W(z, t)^2 dz. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Сравнивая с (3.67) и выбирая  $C_0 = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}, \frac{1}{1+h} \right\}$ , можем записать:

$$\dot{V}(t) \leq -C_0 V(t) + \frac{\gamma}{2} \varepsilon_2^2(t), \quad (3.71)$$

где  $\varepsilon_2^2(t)$  — экспоненциально затухающая составляющая.

Используя принцип сравнения [85], найдем что

$$|V(t)| \leq \rho_6 e^{-\beta_6 t}, \quad (3.72)$$

где  $\rho_6, \beta_6 > 0$ . Таким образом доказано, что замкнутая система (3.61) устойчива, а значит цель управления (3.4) достигнута.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

*Теорема 3 Для системы (3.1)–(3.2) закон управления вида:*

$$u(t) = -\hat{\delta}(t+h) + \psi(t), \quad (3.73)$$

$$\hat{\delta}(t+h) = \hat{\sigma}(t) + \sum_{i=1}^l [\kappa_i(t) \sin(\hat{\omega}_i(t)t) + \zeta_i(t) \cos(\hat{\omega}_i(t)t)], \quad (3.74)$$

$$\kappa_i(t) = \hat{\mu}_i(t) \cos(\hat{\omega}_i(t)h) - \hat{\nu}_i(t) \sin(\hat{\omega}_i(t)h), \quad (3.75)$$

$$\zeta_i(t) = \hat{\mu}_i(t) \sin(\hat{\omega}_i(t)h) + \hat{\nu}_i(t) \cos(\hat{\omega}_i(t)h), \quad (3.76)$$

$$\psi(t) = K e^{Ah} \hat{x}_2(t) + K \int_0^h e^{A(h-\tau)} B \Psi(\tau, t) d\tau, \quad (3.77)$$

обеспечивает выполнение цели управления (3.4), где  $\hat{x}_2(t)$  — оценка  $x(t)$ , получаемая с наблюдателя:

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = A \hat{x}_2(t) + B \psi(t-D) + L \tilde{y}_2(t), \quad (3.78)$$

$$\hat{y}_2(t) = C \hat{x}_2(t) + \alpha \hat{\delta}(t), \quad (3.79)$$

вектор  $L$  выбирается из условия гурвицевости матрицы  $A - LC$ , а для оценивания параметров возмущения используется схема (3.16)–(3.19).

## 3.2 Многоканальная система

### 3.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу компенсации мультисинусоидального возмущения, присутствующего на входе и выходе линейной стационарной многоканальной системы, при наличии запаздывания по управлению. Пусть объект управления представим с виде двух подсистем следующего вида:

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t - h) + E_1 \delta_1(t) + B_{12} y_2(t), \quad (3.80)$$

$$z_1(t) = C_1 x_1(t), \quad (3.81)$$

$$y_1(t) = z_1(t) + b_1 \delta_1(t), \quad (3.82)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 u_2(t - h) + E_2 \delta_2(t) + B_{21} y_1(t), \quad (3.83)$$

$$z_2(t) = C_2 x_2(t), \quad (3.84)$$

$$y_2(t) = z_2(t) + b_2 \delta_2(t), \quad (3.85)$$

где  $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$  и  $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$  — неизвестные векторы состояния;  $z_1(t) \in \mathbb{R}$  и  $z_2(t) \in \mathbb{R}$  — неизмеряемые выходы системы;  $y_1(t) \in \mathbb{R}$  и  $y_2(t) \in \mathbb{R}$  — измеряемые выходные сигналы, подверженные внешним возмущениям;  $u_1(t - h) \in \mathbb{R}$  и  $u_2(t - h) \in \mathbb{R}$  — входные сигналы системы с начальными условиями  $u_1(t - h) = 0$  и  $u_2(t - h) = 0$  для  $t < h$ ;  $h$  — известное постоянное запаздывание;  $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$ ,  $B_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$ ,  $E_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times 1}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n_1}$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$ ,  $B_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$ ,  $E_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n_2}$  — постоянные матрицы соответствующих размерностей с известными компонентами;  $b_1$  и  $b_2$  — известные ненулевые параметры.

В качестве возмущений  $\delta_1(t)$  и  $\delta_2(t)$  рассмотрим сигналы:

$$\delta_1(t) = \sigma_1 + \sum_{i=1}^{l_1} \mu_{1i} \sin(\omega_{1i} t + \phi_{1i}), \quad (3.86)$$

$$\delta_2(t) = \sigma_2 + \sum_{j=1}^{l_2} \mu_{2j} \sin(\omega_{2j} t + \phi_{2j}), \quad (3.87)$$

представимые в виде суммы  $l_1$  и  $l_2$  синусоид соответственно, с неизвестными амплитудами  $\mu_{1i}$  и  $\mu_{2j}$ , частотами  $\omega_{1i}$  и  $\omega_{2j}$ , фазовыми сдвигами  $\phi_{1i}$  и  $\phi_{2j}$  и смещениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , где  $i = \overline{1, l_1}$ ,  $j = \overline{1, l_2}$ .

Систему (3.80)-(3.85) можно записать в следующей матричной форме:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Bu(t - h) + E\delta(t), \quad (3.88)$$

$$z(t) = Cx(t), \quad (3.89)$$

$$y(t) = Cx(t) + D\delta(t), \quad (3.90)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — объединенный вектор состояния;  $u(t) \in \mathbb{R}^2$  — объединенный входной сигнал,  $\delta(t) \in \mathbb{R}^2$  — объединенный вектор возмущающего воздействия;  $z(t) \in \mathbb{R}^2$  — объединенный неизмеряемый выход системы;  $y(t) \in \mathbb{R}^2$  — объединенный измеряемый выходной сигнал, подверженный внешнему возмущению;  $F(n \times n)$ ,  $B(n \times 2)$ ,  $E(n \times 2)$ ,  $C(2 \times n)$ ,  $D(2 \times 2)$  соответствующие матрицы с постоянными компонентами:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t - h) = \begin{bmatrix} u_1(t - h) \\ u_2(t - h) \end{bmatrix}, \quad \delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{bmatrix},$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} A_1 & B_{12}C_2 \\ B_{21}C_1 & A_2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0_{1 \times n_1} \\ 0_{1 \times n_2} & B_2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_1 & B_{12}b_2 \\ B_{21}b_1 & E_2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0_{1 \times n_2} \\ 0_{1 \times n_1} & C_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \quad n = n_1 + n_2.$$

Требуется синтезировать закон управления  $u(t)$ , обеспечивающий стабилизацию объединенного выходного сигнала замкнутой системы:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| = 0, \quad (3.91)$$



с учетом допущений, изложенных ниже.

**Допущение 3.2.1** Все параметры системы известны.

**Допущение 3.2.2** Тройки матриц  $(F, B, C)$ ,  $(A_1, B_1, C_1)$  и  $(A_2, B_2, C_2)$  полностью управляемые и наблюдаемые.

**Допущение 3.2.3** Известна нижняя граница  $\omega_0$  частот возмущающих воздействий, что эквивалентно неравенствам  $\forall \omega_i, \omega_j \geq \omega_0$ .

**Допущение 3.2.4** Передаточные функции управляющих сигналов для каждой подсистемы не имеют нулей на мнимой оси.

### 3.2.2 Синтез закона управления

Рассмотрим закон управления, состоящий из двух слагаемых:

$$u(t) = -\zeta(t + h) + \psi(t), \quad (3.92)$$

где  $\zeta(t + h)$  — слагаемое, отвечающее за компенсацию внешнего возмущения;  $\psi(t)$  — слагаемое, обеспечивающее стабилизацию замкнутой системы.

В силу линейности системы, выходной сигнал (3.89) может быть представлен в виде суммы следующих компонент:

$$z(t) = z^0(t) + z^\zeta(t) + z^\delta(t) + z^\psi(t), \quad (3.93)$$

где  $z^0(t) = [z_1^0(t), z_2^0(t)]^T$  — свободное движение системы,  $z^\zeta(t) = [z_1^\zeta(t), z_2^\zeta(t)]^T$  — реакция системы на компенсирующую часть управления  $\zeta(t + h)$ ,  $z^\delta(t) = [z_1^\delta(t), z_2^\delta(t)]^T$  — реакция на возмущающее воздействие  $\delta(t)$ ,  $z^\psi(t) = [z_1^\psi(t), z_2^\psi(t)]^T$  — реакция системы на стабилизирующую часть управления  $\psi(t)$ .

Целью управления является компенсация свободного движения системы и внешнего возмущения.

Для компенсации внешнего возмущения необходимо синтезировать такое управление  $\zeta(t + h)$ , что реакция системы на него  $z^\zeta(t)$

будет равняться слагаемому  $z^\delta(t)$  из выражения (3.93) после переходного процесса. Для построения такого управления требуется оценить частоты гармоник, входящих в возмущающие воздействия (3.86), (3.87), и воспользоваться упреждающим подходом.

Компенсация возмущения для каждой из подсистем производится по одной схеме, поэтому рассмотрим первую подсистему (3.80)–(3.82) и найдем передаточные функции входных сигналов  $u_1(t)$  и  $\delta_1(t)$ :

$$W_1^u(s) = C_1(sI - A_1)^{-1} B_1 = \frac{b_1(s)}{a_1(s)},$$

$$W_1^\delta(s) = C_1(sI - A_1)^{-1} E_1 = \frac{q_1(s)}{a_1(s)},$$

где  $s$  — комплексная переменная;  $b_1(s)$ ,  $a_1(s)$ ,  $q_1(s)$  — соответствующие полиномы от  $s$ .

Вычислим коэффициенты передачи для  $W_1^u(s)$  и  $W_1^\delta(s)$ :

$$\begin{aligned} L_1^u &= |W_1^u(j_c\omega)|_{\omega=0}, & L_1^\delta &= |W_1^\delta(j_c\omega)|_{\omega=0}, \\ L_i^u &= |W_1^u(j_c\omega)|_{\omega=\omega_i}, & L_i^\delta &= |W_1^\delta(j_c\omega)|_{\omega=\omega_i}, \\ \varphi_i^u &= \arg(W_1^u(j_c\omega))|_{\omega=\omega_i}, & \varphi_i^\delta &= \arg(W_1^\delta(j_c\omega))|_{\omega=\omega_i}, \end{aligned}$$

где  $j_c = \sqrt{-1}$  — комплексная единица,  $L_1^u$  и  $L_1^\delta$  — передаточные коэффициенты для постоянных сигналов управления и возмущения соответственно,  $L_i^u$  и  $L_i^\delta$  — передаточные коэффициенты для синусоидального сигнала с частотой  $\omega_i$  для управления и возмущения соответственно,  $\varphi_i^u$ ,  $\varphi_i^\delta$  — фазовые сдвиги для сигналов  $u_1(t)$  и  $\delta_1(t)$  соответственно.

В качестве компенсирующего слагаемого  $\zeta(t+h)$  управления (3.92) рассмотрим мультисинусоидальную векторную функцию следующего вида:

$$\zeta(t+h) = \begin{bmatrix} \sigma_1^* + \sum_{i=1}^{l_1} \mu_{1i}^* \sin(\omega_{1i}^* t + \phi_{1i}^*) \\ \sigma_2^* + \sum_{j=1}^{l_2} \mu_{2j}^* \sin(\omega_{2j}^* t + \phi_{2j}^*) \end{bmatrix}, \quad (3.94)$$

где  $\mu_{1i}^*$  и  $\mu_{2j}^*$  — амплитуды,  $\omega_{1i}^*$  и  $\omega_{2j}^*$  — частоты,  $\phi_{1i}^*$  и  $\phi_{2j}^*$  — фазовые сдвиги,  $\sigma_1^*$  и  $\sigma_2^*$  — смещения соответствующих компонент сигнала  $\zeta(t+h)$ ,  $i = \overline{1, l_1}$ ,  $j = \overline{1, l_2}$ .

Из условия линейности подсистемы (3.80)–(3.82), первые компоненты функций  $z^\delta(t)$  и  $z^\zeta(t)$  могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1^\delta(t) &= \sigma_1^\delta + \sum_{i=1}^{l_1} \mu_{1i}^\delta \sin(\omega_{1i}^\delta t + \phi_{1i}^\delta), \\ z_1^\zeta(t) &= \sigma_1^\zeta + \sum_{i=1}^{l_1} \mu_{1i}^\zeta \sin(\omega_{1i}^\zeta t + \phi_{1i}^\zeta), \end{aligned}$$

где все коэффициенты выражаются через частотные характеристики подсистемы:

$$\begin{aligned} \sigma_1^\delta &= L_1^\delta \sigma_1, & \sigma_1^\zeta &= L_1^u \sigma_1^*, \\ \mu_{1i}^\delta &= L_i^\delta \mu_{1i}, & \mu_{1i}^\zeta &= L_i^u \mu_{1i}^*, \\ \phi_{1i}^\delta &= \phi_{1i} + \varphi_i^\delta, & \phi_{1i}^\zeta &= \phi_{1i}^* + \varphi_i^u + \omega_{1i} h, \end{aligned} \quad (3.95)$$

где слагаемое  $\omega_{1i} h$  возникает из-за запаздывания во входном сигнале.

Для компенсации возмущающего воздействия, действующего на систему, положим значения смещения и амплитуд гармоник сигнала  $z_1^\zeta(t)$  равными смещению и амплитудам гармоник сигнала  $z_1^\delta(t)$  соответственно, взятых с обратным знаком. Согласно соотношениям (3.95), выберем параметры компенсирующей части управления следующим образом:

$$\sigma_1^* = -\frac{L_1^\delta}{L_1^u} \sigma_1, \quad (3.96)$$

$$\mu_{1i}^* = -\frac{L_i^\delta}{L_i^u} \mu_{1i}, \quad (3.97)$$

$$\phi_{1i}^* = \phi_{1i} + \varphi_i^\delta - \varphi_i^u - \omega_{1i} h. \quad (3.98)$$

В рассматриваемом случае параметры возмущающего воздействия неизвестны, поэтому необходимо разработать алгоритм их оценивания. Тогда компенсирующая часть управления может быть вычислена согласно (3.96)–(3.98) с использованием найденных оценок параметров возмущения.

В некоторых случаях, исходя для удобства, будем использовать эквивалентное представление возмущающего сигнала:

$$\delta_1(t) = \sigma_1 + \sum_{i=1}^{l_1} \chi_{1i} \sin(\omega_{1i}t) + \nu_{1i} \cos(\omega_{1i}t), \quad (3.99)$$

$$\delta_2(t) = \sigma_2 + \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{2j} \sin(\omega_{2j}t) + \nu_{2j} \cos(\omega_{2j}t), \quad (3.100)$$

где  $\chi_{1i} = \sin(\phi_{1i})$ ,  $\chi_{1j} = \sin(\phi_{1j})$ ,  $\nu_{1i} = \cos(\phi_{1i})$ ,  $\nu_{1j} = \cos(\phi_{1j})$ .

В случае, когда вектор состояния  $x(t)$  измеряется, в качестве стабилизирующей части управления (3.92) можно рассмотреть обратную связь по состоянию с предиктором:

$$\psi(t) = -k\hat{x}(t+h), \quad (3.101)$$

где  $k$  — положительная константа,  $\hat{x}(t+h)$  вычисляется по формуле Коши:

$$\hat{x}(t+h) = e^{Fh}x(t) + \int_{t-h}^t e^{F(t-\tau)} [Bu(\tau) + E\delta(\tau)] d\tau. \quad (3.102)$$

В рассматриваемом случае вектор состояния системы  $x(t)$  не измеряется, по этой причине необходимо построение наблюдателя. Для строгого математического доказательства будем использовать подход, предложенный в [17, 43, 44].

### 3.2.3 Компенсация возмущения

Как уже было сказано выше, наблюдатели для возмущающих сигналов  $\delta_1(t)$  и  $\delta_2(t)$  могут быть синтезированы для каждой из подсистем отдельно и будут иметь одинаковый вид. Поэтому предлагается рассмотреть только первую подсистему (3.80)–(3.82).

Сначала выделим сигнал, содержащий все параметры возмущающего воздействия с выхода системы. Для этого рассмотрим на-

блодатель:

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = A_1 \hat{x}_1(t) + B_1 u_1(t-h) + B_{12} y_2(t) + L_1 (y_1(t) - \hat{y}_1(t)), \quad (3.103)$$

$$\hat{y}_1(t) = C_1 \hat{x}_1(t), \quad (3.104)$$

где матрица  $L_1$  выбирается таким образом, чтобы обеспечить гурвицевость матрицы  $A_1 - L_1 C_1$ .

Рассмотрим ошибку оценивания:

$$\tilde{x}_1(t) = x(t) - \hat{x}_1(t), \quad (3.105)$$

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = (A_1 - L_1 C_1) \tilde{x}_1(t) + (E_1 - L_1 b_1) \delta_1(t), \quad (3.106)$$

$$\tilde{y}_1(t) = C \tilde{x}_1(t) + b_1 \delta_1(t). \quad (3.107)$$

Применяя преобразование Лапласа для (3.106), получим

$$\tilde{x}_1(s) = C_1 (sI - (A_1 - L_1 C_1))^{-1} [(E_1 - L_1 b_1) \delta_1(s) + \tilde{x}_1(0)], \quad (3.108)$$

где  $s$  — комплексная переменная,  $\tilde{x}_1(s) = \mathcal{L} \{ \tilde{x}_1(t) \}$  — изображение Лапласа для функции  $\tilde{x}_1(t)$ .

Используя (3.107) и (3.108), получим образ Лапласа  $\tilde{y}_1(s)$  для функции  $\tilde{y}_1(t)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(s) = & C_1 (sI - (A_1 - L_1 C_1))^{-1} (E_1 - L_1 b_1) \delta_1(s) + \\ & + C_1 (sI - (A_1 - L_1 C_1))^{-1} \tilde{x}_1(0), \end{aligned} \quad (3.109)$$

где  $\delta_1(s) = \mathcal{L} \{ \delta_1(t) \}$  — изображение Лапласа для функции (3.86), которое находится по формуле

$$\delta_1(s) = \sigma_1 \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^{l_1} \frac{\mu_{1i} (\sin(\psi_{1i})s + \cos(\psi_{1i})\omega_{1i})}{s^2 + \omega_{1i}^2}. \quad (3.110)$$

Так как матрица  $A_1 - L_1 C_1$  гурвицева, после применения обратного преобразования Лапласа к (3.109), получим

$$\tilde{y}_1(t) = \bar{\sigma}_1 + \bar{\varepsilon}(t) + \sum_{i=1}^{l_1} \bar{\mu}_{1i} \sin(\omega_{1i}t + \bar{\psi}_{1i}), \quad (3.111)$$

где  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\mu}_{1i}$ ,  $\bar{\psi}_{1i}$  — некоторые постоянные параметры,  $\bar{\varepsilon}(t)$  — экспоненциально затухающая составляющая. Так как  $\bar{\varepsilon}(t)$  связана с переходным процессом в устойчивой системе с гурвицевой матрицей состояния  $A_1 - L_1 C_1$ , эта функция может быть представлена, как сумма убывающих экспонент умноженных на константы, полиномы или синусоиды. По этой причине ее производные так же экспоненциально затухают.

Как можно заметить из (3.111), невязка по выходу  $\tilde{y}_1(t)$  является смещенным мультисинусоидальным сигналом с теми же частотами, что и  $\delta_1(s)$ , с точностью до экспоненциально затухающего члена  $\bar{\varepsilon}(t)$ . Этот сигнал будет использован для оценивания частот  $\omega_{1i}$  и других параметров возмущающего воздействия.

Для получения оценок частот гармоник сигнала  $\tilde{y}_1(t)$  будет применена схема описанная в разделе 2.2.1. Введем в рассмотрение линейный фильтр:

$$\xi(s) = \frac{\lambda_0^{2l_1}}{\gamma(s)} \tilde{y}_1(s) = F_1(s) \tilde{y}_1(s), \quad (3.112)$$

где  $\lambda_0 > 0$ ,  $\gamma(s) = s^{2l_1} + \gamma_{2l_1-1}s^{2l_1-1} + \dots + \gamma_1 s + \gamma_0$  — гурвицев полином степени  $2l_1$  с различными собственными значениями  $\lambda_{j_2}$ ,  $j_2 = \overline{1, 2l_1}$ ,  $F_1(s)$  — передаточная функция фильтра. Обозначим  $\gamma_0 = \lambda_0^{2l_1}$  и  $\lambda = \min_{j_2=1, \dots, 2l_1} \{|\operatorname{Re} \lambda_{j_2}|\}$ .

Фильтр (3.112), такой что доступными для измерения являются как минимум  $2l_1$  производных выходного сигнала фильтра  $\xi(t)$ :

$$\xi^{(j_2)}(s) = \frac{\lambda_0^{2l_1} s^{j_2}}{\gamma(s)} \tilde{y}_1(s), \quad (3.113)$$

где  $\xi^{(j_2)}(s) = \mathcal{L} \{ \xi^{(j_2)}(t) \}$ ,  $\xi^{(j_2)}(t)$  —  $j_2$ -я производная функции  $\xi(t)$ ,  $j_2 = \overline{1, 2l_1}$  — порядок производной.

Согласно рассуждениям, приведенным теореме 1 раздела 2.2.1, схема оценивания частоты примет вид:

$$\hat{\Theta} = \Upsilon(t) + K \Omega(t) \xi^{(2l_1)}(t), \quad (3.114)$$

$$\dot{\Upsilon}(t) = -K \Omega(t) \Omega^T(t) \hat{\Theta}(t) - K \dot{\Omega}(t) \xi^{(2l_1)}(t), \quad (3.115)$$

где  $\Omega^T(t) = [\xi^{(2l_1-1)}(t) \dots \xi^{(3)}(t) \xi^{(1)}(t)]$  — регрессор,  $K = \text{diag}\{k_i > 0, i = \overline{1, l_1}\}$ ,  $\hat{\Theta}^T(t) = [\hat{\theta}_1(t) \dots \hat{\theta}_{l_1-1}(t) \hat{\theta}_{l_1}(t)]$  — вектор оценок неизвестных параметров.

Откуда оценки частот могут быть вычислены как

$$\hat{\omega}_i(t) = \sqrt{|\hat{\theta}_i(t)|}, \quad (3.116)$$

где  $\hat{\theta}_i(t)$  связаны по теореме Виета с элементами  $\hat{\theta}_i(t)$  вектора  $\hat{\Theta}(t)$ :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1(t) = \hat{\theta}_1(t) + \hat{\theta}_2(t) + \dots + \hat{\theta}_{l_1}(t), \\ \hat{\theta}_2(t) = -\hat{\theta}_1(t)\hat{\theta}_2(t) - \hat{\theta}_1(t)\hat{\theta}_3(t) - \dots - \hat{\theta}_{l_1-1}(t)\hat{\theta}_{l_1}(t), \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{l_1}(t) = (-1)^{l_1+1}\hat{\theta}_1(t)\hat{\theta}_2(t)\dots\hat{\theta}_{l_1}(t). \end{cases} \quad (3.117)$$

Схемой оценивания (3.114)-(3.117) гарантируется экспоненциальная сходимость к нулю ошибок оценивания частот  $\tilde{\omega}_i(t) = \omega_i - \hat{\omega}_i(t)$ :

$$|\tilde{\omega}_i(t)| \leq \rho_1 e^{-\beta_1 t}, \quad \rho_1, \beta_1 > 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.118)$$

### Наблюдатель внешнего возмущения

Следующим шагом является синтез наблюдателя возмущающего воздействия  $\delta_1(t)$  и предиктора  $\delta_1(t+h)$  для получения упреждающей оценки с использованием полученных в предыдущем разделе оценок частот возмущающего сигнала. Применяя формулы (3.94), основанные на оценке возмущающего сигнала, вычислим параметры компенсирующей части  $\zeta(t+h)$  управляющего сигнала (3.92).

Оценку внешнего возмущения  $\delta_1(t)$  из (3.99) построим следующим образом:

$$\hat{\delta}_1(t) = \hat{\sigma}_1 + \sum_{i=1}^{l_1} \hat{\chi}_{1i} \sin(\omega_{1i}t) + \hat{\nu}_{1i} \cos(\omega_{1i}t), \quad (3.119)$$

где  $\hat{\sigma}_1$ ,  $\hat{\chi}_{1i}$  и  $\hat{\nu}_{1i}$  — соответствующие оценки параметров возмущения  $\sigma_1$ ,  $\chi_{1i}$  и  $\nu_{1i}$ .

Упреждающую оценку  $\hat{\delta}_1(t+h)$  найдем из (3.119):

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_1(t+h) &= \hat{\sigma}_1 + \sum_{i=1}^{l_1} [\hat{\chi}_{1i} \sin(\omega_{1i}(t+h)) + \hat{\nu}_{1i} \cos(\omega_{1i}(t+h))] = \\ &= \hat{\sigma}_1 + \sum_{i=1}^{l_1} [\kappa_{1i} \sin(\omega_{1i}t) + \iota_{1i} \cos(\omega_{1i}t)],\end{aligned}\quad (3.120)$$

где

$$\kappa_{1i} = \hat{\chi}_{1i} \cos(\omega_{1i}h) - \hat{\nu}_{1i} \sin(\omega_{1i}h), \quad (3.121)$$

$$\iota_{1i} = \hat{\chi}_{1i} \sin(\omega_{1i}h) + \hat{\nu}_{1i} \cos(\omega_{1i}h). \quad (3.122)$$

Таким образом, для получения оценок  $\hat{\delta}_1(t)$  и  $\hat{\delta}_1(t+h)$  требуется предварительно получить оценки параметров  $\sigma_1$ ,  $\chi_{1i}$  и  $\nu_{1i}$ . Для этого модифицируем описанную в разделе 2.2.3 схему оценивания параметров мультисинусоидальных сигналов. В отличие от рассмотренного ранее решения, нам требуется получить оценку параметров функции  $\delta_1(t)$ , а не сигнала  $\tilde{y}_1(t)$ , поступающего на фильтр (3.112).

Из (3.109) имеем

$$\tilde{y}_1(s) = \frac{b_1(s)}{a_1(s)} \delta_1(s) + \bar{\varepsilon}_1(s), \quad (3.123)$$

где  $\tilde{y}_1(s) = \mathcal{L}\{\tilde{y}_1(t)\}$ ,  $\delta_1(s) = \mathcal{L}\{\delta_1(t)\}$ ,  $\bar{\varepsilon}_1(s) = \mathcal{L}\{\bar{\varepsilon}_1(t)\}$  — изображения по Лапласу соответствующих функций,  $\bar{\varepsilon}_1(t)$  — экспоненциально затухающая функция с экспоненциально затухающими производными,

$$\frac{b_1(s)}{a_1(s)} = C_1(sI - (A_1 - L_1C_1))^{-1}(E_1 - L_1b_1) \quad (3.124)$$

передаточная функция от возмущения  $\delta_1(s)$  к невязке  $\tilde{y}_1(s)$ .



Рассмотрим прохождение сигнала  $\tilde{y}_1(t)$  через фильтр (3.112). Для выходного сигнала  $\xi_1(t)$  запишем:

$$\xi_1(s) = F_1(s) \left( \left[ \frac{b_1(s)}{a_1(s)} \right] \delta_1(s) + \bar{\varepsilon}_1(s) \right), \quad (3.125)$$

где  $F_1(s)$  — передаточная функция фильтра (3.112).

Мультисинусоидальный сигнал  $\delta_1(t)$  проходит через линейную устойчивую систему (3.125), поэтому с учетом экспоненциально затухающей составляющей  $\bar{\varepsilon}_1(t)$  перепишем  $\xi_1(t)$  в следующем виде:

$$\xi_1(t) = \xi_{10} + \sum_{i=1}^{l_1} \xi_{1i}(t) + \varepsilon_{1\xi}(t), \quad (3.126)$$

где  $\xi_{10}$  — некоторая константа,  $\xi_{1i}(t)$  — синусоидальная функции от времени с частотой  $\omega_{1i}$ ,  $\varepsilon_{1\xi}$  — экспоненциально затухающая составляющая.

Введем в рассмотрение передаточную функцию от  $\delta_1(t)$  к  $\xi_1(t)$ , пренебрегая экспоненциально затухающей составляющей  $\varepsilon_{1\xi}(t)$ :

$$W_2(s) = F_1(s) \frac{b_1(s)}{a_1(s)}. \quad (3.127)$$

Связь между компонентами функций  $\delta_1(t)$  и  $\xi_1(t)$  можно найти, рассмотрев комплексную передаточную функцию соответствующую (3.127):

$$W_2(j_c\omega) = F_1(j_c\omega) \frac{b_1(j_c\omega)}{a_1(j_c\omega)}, \quad (3.128)$$

где  $j_c$  — комплексная единица.

Тогда функции из соотношения (3.126) могут быть найдены с использованием следующих выражений:

$$\xi_{10}(t) = M_{10}\sigma_1, \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} \xi_{1i}(t) &= M_{1i}\chi_{1i} \sin(\omega_{1i}t + \varphi_{1i}) + M_{1i}\nu_{1i} \cos(\omega_{1i}t + \varphi_{1i}) = \\ &= \begin{bmatrix} \chi_{1i} & \nu_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1i} \sin(\omega_{1i}t + \varphi_{1i}) \\ M_{1i} \cos(\omega_{1i}t + \varphi_{1i}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.130)$$

где  $M_{10}$  — передаточный коэффициент для постоянного сигнала,  $M_{1i}$  и  $\varphi_{1i}$  — передаточный коэффициент и сдвиг фазы для гармонического сигнала с частотой  $\omega_{1i}$ :

$$M_{10} = |W_2(j_c\omega)|_{\omega=0} = \frac{b_{10}}{a_{10}}, \quad (3.131)$$

$$M_{1i} = |W_2(j_c\omega)|_{\omega=\omega_{1i}}, \quad (3.132)$$

$$\varphi_{1i} = \arg W_2(j_c\omega)|_{\omega=\omega_{1i}}, \quad (3.133)$$

где  $a_{10}$ ,  $b_{10}$  — свободные коэффициенты полиномов  $a_1(s)$  и  $b_1(s)$  соответственно.

Пренебрегая экспоненциально затухающей составляющей  $\varepsilon_{1\xi}(t)$  из (3.126), представим функцию  $\xi_1(t)$  в следующем виде:

$$\xi_1(t) = \xi_{10} + \xi_{11}(t) + \xi_{12}(t) + \dots + \xi_{1l_1}(t). \quad (3.134)$$

После дифференцирования (3.134)  $2l_1$  раз получим оценки для компонент  $\xi_{1i}(t)$ ,  $i = \overline{1, l_1}$  и свободного члена  $\xi_{10}$ :

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}_{11}(t) \\ \hat{\xi}_{12}(t) \\ \vdots \\ \hat{\xi}_{1l_1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{11} & \dots & \hat{\theta}_{1l_1} \\ \hat{\theta}_{11}^2 & \dots & \hat{\theta}_{1l_1}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_{11}^{l_1} & \dots & \hat{\theta}_{1l_1}^{l_1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_1^{(2)}(t) \\ \xi_1^{(4)}(t) \\ \vdots \\ \xi_1^{(2l_1)}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.135)$$

$$\hat{\xi}_{10} = \xi_1(t) - \sum_{i=1}^{l_1} \hat{\xi}_{1i}(t). \quad (3.136)$$

### Идентификация амплитуд гармоник и смещения возмущающего сигнала

Найдем оценку смещения  $\sigma_1$  из соотношений (3.129) и (3.136):

$$\hat{\sigma}_1(t) = \frac{a_{10}}{b_{10}} \hat{\xi}_{10}(t). \quad (3.137)$$

Для оценивания амплитуд  $\chi_{1i}$  и  $\nu_{1i}$ , используем градиентный подход, описанный ранее в разделе 2.2.4:

$$\dot{\hat{\chi}}_{1i}(t) = k_\chi \hat{\vartheta}_{1i}(t) \left( \hat{\xi}_{1i}(t) - \hat{\chi}_{1i}(t) \hat{\vartheta}_{1i}(t) - \hat{\nu}_{1i}(t) \frac{\hat{\vartheta}_{1i}(t)}{\eta_{1i}(t)} \right), \quad (3.138)$$

$$\dot{\hat{\nu}}_{1i}(t) = k_\nu \frac{\hat{\vartheta}_{1i}(t)}{\eta_{1i}(t)} \left( \hat{\xi}_{1i}(t) - \hat{\chi}_{1i}(t) \hat{\vartheta}_{1i}(t) - \hat{\nu}_{1i}(t) \frac{\hat{\vartheta}_{1i}(t)}{\eta_{1i}(t)} \right), \quad (3.139)$$

где  $k_\chi, k_\nu > 0$  — параметра закона идентификации,

$$\eta_{1i}(t) = \begin{cases} \hat{\omega}_{1i}(t), & \text{если } \hat{\omega}_{1i} \geq \omega_0, \\ \omega_0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.140)$$

$\hat{\vartheta}_{1i}(t)$  и  $\hat{\dot{\vartheta}}_{1i}(t)$  — оценки гармоники с частотой  $\hat{\omega}_{1i}(t)$  и ее производной на выходе дополнительного фильтра:

$$\vartheta_1(s) = W_2(s) \Delta_1(s), \quad (3.141)$$

на вход которого подается сигнал

$$\Delta_1(t) = \sum_{i=0}^{l_1} \sin(\hat{\omega}_{1i}(t)t). \quad (3.142)$$

Оценки  $\hat{\vartheta}_{1i}(t)$  и  $\hat{\dot{\vartheta}}_{1i}(t)$  вычисляются на основе измеряемых производных выходного сигнала  $\vartheta_1(t)$  фильтра (3.141) по следующим соотношениям:

$$\begin{bmatrix} \hat{\vartheta}_{11}(t) \\ \hat{\vartheta}_{12}(t) \\ \vdots \\ \hat{\vartheta}_{1l_1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \hat{\theta}_{11} & \cdots & \hat{\theta}_{1l_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_{11}^{l_1-1} & \cdots & \hat{\theta}_{1l_1}^{l_1-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vartheta_1^{(1)}(t) \\ \vartheta_1^{(3)}(t) \\ \vdots \\ \vartheta_1^{(2l_1-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.143)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\vartheta}_{11}(t) \\ \hat{\vartheta}_{12}(t) \\ \vdots \\ \hat{\vartheta}_{1l_1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{11} & \cdots & \hat{\theta}_{1l_1} \\ \hat{\theta}_{11}^2 & \cdots & \hat{\theta}_{1l_1}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_{11}^{l_1} & \cdots & \hat{\theta}_{1l_1}^{l_1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vartheta_1^{(2)}(t) \\ \vartheta_1^{(4)}(t) \\ \vdots \\ \vartheta_1^{(2l_1)}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.144)$$

*Замечание 9* Передаточная функция  $W_2(s)$  имеет относительную степень не менее чем  $2l_1$ , поэтому с помощью фильтра (3.141) можно получить производные  $\vartheta_1(t)$  вплоть до  $\vartheta_1^{(2l_1)}(t)$ .

*Замечание 10* Обратные матрицы в выражениях (3.135), (3.144) и (3.143) существуют, если в мультисинусоидальном сигнале  $\delta_1(t)$  не менее чем  $l_1$  гармоник имеют различные друг от друга частоты. Функции  $\hat{\theta}_{1i}(t)$  сходятся экспоненциально к частотам  $\theta_{1i}$  возмущающего сигнала  $\delta_1(t)$ , а функции  $\xi_{10}(t) = \xi_{10} - \hat{\xi}_{10}(t)$ ,  $\tilde{\xi}_{1i}(t) = \xi_{1i}(t) - \hat{\xi}_{1i}(t)$ , и  $\tilde{\xi}_{1i}(t) = \dot{\xi}_{1i}(t) - \hat{\xi}_{1i}(t)$ ,  $i = \overline{1, l_1}$  экспоненциально сходятся к нулю.

На данном этапе мы получили оценки  $\hat{\sigma}_1(t)$ ,  $\hat{\chi}_{1i}(t)$ , и  $\hat{\nu}_{1i}(t)$  из (3.99), необходимые для оценивания  $\delta_1(t)$  и  $\delta_1(t+h)$ . Заметим, что  $\tilde{\chi}_{1i}(t) = \chi_{1i} - \hat{\chi}_{1i}(t)$  и  $\tilde{\nu}_{1i}(t) = \nu_{1i} - \hat{\nu}_{1i}(t)$  экспоненциально сходятся к нулю [87], что также распространяется на  $\tilde{\delta}_1(t) = \delta_1(t) - \hat{\delta}_1(t)$ ,  $\tilde{\delta}_1(t+h) = \delta_1(t+h) - \hat{\delta}_1(t+h)$  и, применяя аналогичные рассуждения, на  $\tilde{\delta}_2(t) = \delta_2(t) - \hat{\delta}_2(t)$ ,  $\tilde{\delta}_2(t+h) = \delta_2(t+h) - \hat{\delta}_2(t+h)$ .

### 3.2.4 Синтез компенсирующей составляющей управления

Используя выражения (3.96)–(3.97) для параметров компенсирующей составляющей управления, синтезируем  $\zeta(t+h)$  из (3.94):

$$\zeta(t+h) = \begin{bmatrix} -\frac{L_1^\delta}{L_1^u} \hat{\sigma}_1 - \sum_{i=1}^{l_1} \frac{L_i^\delta}{L_i^u} [\kappa_{1i} \sin(\hat{\omega}_{1i}t) + \iota_{1i} \cos(\hat{\omega}_{1i}t)] \\ -\frac{L_2^\delta}{L_2^u} \hat{\sigma}_2 - \sum_{j=1}^{l_2} \frac{L_j^\delta}{L_j^u} [\kappa_{2j} \sin(\hat{\omega}_{2j}t) + \iota_{2j} \cos(\hat{\omega}_{2j}t)] \end{bmatrix}.$$

Оценки параметров сходятся к истинному значению с той же скоростью, что и выходной вектор системы  $y(t)$  сходится к нулю.

### 3.2.5 Стабилизация системы

В этом разделе синтезируем управляющий сигнал, стабилизирующий замкнутую систему.

Подставим в систему (3.88) управляющий сигнал: (3.94)

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + B\psi(t - h) - B\zeta(t) + E\delta(t). \quad (3.145)$$

На основе (3.145) введем наблюдатель переменных состояния:

$$\dot{\hat{x}}(t) = F\hat{x}(t) + B\psi(t - h) - B\zeta(t) + E\hat{\delta}(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)), \quad (3.146)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + D\hat{\delta}(t), \quad (3.147)$$

где

$$L = \begin{bmatrix} L_{21} & 0_{n_1 \times 1} \\ 0_{n_2 \times 1} & L_{22} \end{bmatrix},$$

где  $L_{21}$ ,  $L_{22}$  — постоянные матрицы размерности  $n_1 \times 1$  и  $n_2 \times 1$  соответственно.

Рассмотрим ошибку наблюдения  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  с учетом (3.88), (3.90), (3.146) и (3.147):

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (F - LC)\tilde{x}(t) + (E - LD)\tilde{\delta}(t), \quad (3.148)$$

$$\tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) + D\tilde{\delta}(t). \quad (3.149)$$

Система (3.148)–(3.149) линейная, матрица  $F - LC$  гурвицева, компоненты функции от времени  $\tilde{\delta}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_1(t) & \tilde{\delta}_2(t) \end{bmatrix}^T$  экспоненциально убывают до нуля, значит можно записать, что ошибки наблюдения  $\tilde{x}(t)$  и  $\tilde{y}(t)$  сходятся к нулю:

$$\|\tilde{x}\| \leq \rho_4 e^{-\beta_4 t}, \quad \|\tilde{y}\| \leq \rho_5 e^{-\beta_5 t}, \quad (3.150)$$

где  $\rho_4, \beta_4, \rho_5, \beta_5 > 0$ .

Рассмотрим невязку вектора состояния:

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = (A - LC)\tilde{x}_2(t) + B\tilde{\delta}_1(t) - L\alpha\tilde{\delta}_2(t), \quad (3.151)$$

$$\tilde{y}_2(t) = C\tilde{x}_2(t) + \alpha\tilde{\delta}_2(t). \quad (3.152)$$

На этом этапе мы получили наблюдатель вектора состояния для объекта управления (3.88), (3.90), такой что оценки переменных состояния экспоненциально сходятся к истинным значениям. На этом основании вектор  $\hat{x}(t)$  может быть использован при синтезе стабилизирующей компоненты управления  $\psi(t)$ .

Следуя подходу описанному в [17, 44, 94], представим блок запаздывания в виде уравнения в частных производных:

$$\Psi_t(r, t) = \Psi_r(r, t), \quad 0 < z < h \quad (3.153)$$

$$\Psi(h, t) = \psi(t) \quad (3.154)$$

с начальными условием  $\Psi(r, 0) = \psi(r - h)$ . Решение такого уравнения имеет вид  $\Psi(r, t) = \psi(t + r - h)$ , следовательно,  $\Psi(0, t) = \psi(t - h)$  описывает запаздывающий сигнал управления. Тогда выражение (3.145) примет вид:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + B\Psi(0, t) - B\zeta(t) + E\delta(t). \quad (3.155)$$

Следуя методу «backstepping» («обратный обход интегратора») [17], рассмотрим следующее преобразование:

$$W(r, t) = \Psi(r, t) - Ke^{Fr}\hat{x}(t) - \\ - K \int_0^r e^{F(r-\tau)} B\Psi(\tau, t) d\tau + K \int_r^h e^{F(r+h-\tau)} L\tilde{Y}(\tau, t) d\tau, \quad (3.156)$$

$$\tilde{Y}(r, t) = \tilde{y}(t + r - h), \quad (3.157)$$

$$\tilde{Y}_t(r, t) = \tilde{Y}_r(r, t), \quad (3.158)$$

$$\tilde{Y}(h, t) = \tilde{y}(t), \quad (3.159)$$

и закон управления

$$\psi(t) = Ke^{Fh}\hat{x}(t) + K \int_0^h e^{F(h-\tau)} B \Psi(\tau, t) d\tau. \quad (3.160)$$

Согласно лемме 3 преобразование (3.156) и закон управления (3.166) приводит объект (3.155) к устойчивой системе:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (F + BK)x(t) + BW(0, t) - \\ & - B\zeta(t) + E\delta(t), \end{aligned} \quad (3.161)$$

$$W_t(r, t) = W_r(r, t), \quad (3.162)$$

$$W(h, t) = 0, \quad (3.163)$$

где  $W(0, t)$  сходится к нулю за конечное время, матрица  $K$  выбирается из условия гурвицевости матрицы  $F + BK$ .

Таким образом, замкнутая выбранным управление система является устойчивой. Откуда следует, что  $z(t)$  стремится к нулю и достигается поставленная цель управления (3.91).

Полученный результат формулируется в виде утверждения.

*Утверждение 4 Закон управления вида:*

$$u(t) = \zeta(t) + \psi(t), \quad (3.164)$$

$$\zeta(t+h) = \begin{bmatrix} -\frac{L_1^\delta}{L_1^u} \hat{\sigma}_1 - \sum_{i=1}^{l_1} \frac{L_i^\delta}{L_i^u} [\kappa_{1i} \sin(\hat{\omega}_{1i}t) + \iota_{1i} \cos(\hat{\omega}_{1i}t)] \\ -\frac{L_2^\delta}{L_2^u} \hat{\sigma}_2 - \sum_{j=1}^{l_2} \frac{L_j^\delta}{L_j^u} [\kappa_{2j} \sin(\hat{\omega}_{2j}t) + \iota_{2j} \cos(\hat{\omega}_{2j}t)] \end{bmatrix}, \quad (3.165)$$

$$\psi(t) = Ke^{Fh}\hat{x}(t) + K \int_0^h e^{F(h-\tau)} B \Psi(\tau, t) d\tau, \quad (3.166)$$

где  $L_1^u$ ,  $L_2^u$  и  $L_1^\delta$ ,  $L_2^\delta$  — передаточные коэффициенты для постоянных сигналов управления и возмущения соответственно для каждой из подсистем,  $L_i^u$ ,  $L_j^u$  и  $L_i^\delta$ ,  $L_j^\delta$  — передаточные коэффициенты

для синусоидального сигнала с частотами  $\omega_i$  и  $\omega_j$  соответственно для управления и возмущения,

$$\kappa_i(t) = \hat{\mu}_i(t) \cos(\hat{\omega}_i(t)h) - \hat{\nu}_i(t) \sin(\hat{\omega}_i(t)h), \quad (3.167)$$

$$\iota_i(t) = \hat{\mu}_i(t) \sin(\hat{\omega}_i(t)h) + \hat{\nu}_i(t) \cos(\hat{\omega}_i(t)h), \quad (3.168)$$

$$\kappa_j(t) = \hat{\mu}_j(t) \cos(\hat{\omega}_j(t)h) - \hat{\nu}_j(t) \sin(\hat{\omega}_j(t)h), \quad (3.169)$$

$$\iota_j(t) = \hat{\mu}_j(t) \sin(\hat{\omega}_j(t)h) + \hat{\nu}_j(t) \cos(\hat{\omega}_j(t)h), \quad (3.170)$$

обеспечивает выполнение цели управления (3.91).

### 3.3 Нелинейная система специального вида

#### 3.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу компенсации гармонического возмущения, действующего на нелинейную систему, в условиях запаздывания по управлению [52]. В качестве объекта управления рассмотрим систему с математической моделью вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + \psi_1(y(t - \tau_1)) + a_1 y(t), \\ &\dots \\ \dot{x}_n(t) &= u(t - h) + \psi_n(y(t - \tau_n)) + a_n y(t) + \delta(t), \\ y(t) &= x_1(t), \end{aligned} \quad (3.171)$$

где  $x(t) = \text{col}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$  — известный вектор состояния,  $u(t) \in \mathbb{R}$  — скалярный сигнал управления,  $y(t) \in \mathbb{R}$  — измеряемый скалярный выход,  $h \geq 0$  — известное постоянное запаздывания,  $a_i$  — известные параметры,  $\psi_i(y(t - \tau_i))$  — известные нелинейные функции,  $\tau_i$  — известные положительные параметры,  $\delta(t)$  — неизвестное возмущение.

Для сигнала управления справедливо  $u(t - h) = 0$  для  $t < h$ .

В качестве возмущающего воздействия рассматривается сигнал с неизвестными параметрами:

$$\delta(t) = \sigma_0 + \sigma \sin(\omega t + \phi), \quad (3.172)$$



где  $\sigma_0$  — смещение,  $\sigma$  — амплитуда,  $\phi$  — фаза,  $\omega$  — частота гармоники.

Требуется синтезировать закон управления  $u(t)$ , обеспечивающий стабилизацию выходного сигнала системы:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \quad (3.173)$$

с учетом приведенного ниже допущения.

**Допущение 3.3.1** Параметры  $\tau_i \geq h$  для  $i = \overline{1, n}$ .

### 3.3.2 Стабилизация системы

Сначала в системе (3.171) положим  $\Psi(y) = \text{col}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\delta(t) = 0$  и  $h = 0$ . Для упрощенной системы рассмотрим тривиальное управление вида:

$$u(t) = Kx(t). \quad (3.174)$$

Для случая  $h > 0$  перепишем закон управления (3.195):

$$u(t) = Kx(t+h). \quad (3.175)$$

Очевидно, что закон управления в виде (3.175) не реализуем, по причине того, что вектор  $x(t+h)$  недоступен для непосредственного измерения. Однако, исходя из работы [17], вектор состояния  $x(t+h)$  может быть вычислен следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t+h) &= e^{A(t+h)}x(0) + \int_0^{t+h} e^{A(t+h-\tau)}Bu(\tau-h)d\tau = \\ &= e^{Ah}x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Тогда закон управления, стабилизирующий систему с запаздыванием, примет вид:

$$u(t) = Ke^{Ah}x(t) + K \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (3.176)$$

Однако, при постановке задачи рассматривается нелинейный объект управления под влиянием внешнего возмущения:

$$\delta(t) = \sigma_0 + \sigma \sin(\omega t + \phi).$$

### 3.3.3 Построение оценки внешнего возмущения

Найдем оценку внешнего возмущения:

$$\delta(t) = \sigma_0 + \sigma \sin(\omega t + \phi) = \sigma_0 + \sigma_1 \sin \omega t + \sigma_2 \cos \omega t, \quad (3.177)$$

где  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ .

Построим асимптотический наблюдатель для последней компоненты  $x_n(t)$  вектора состояния системы (3.171):

$$\dot{\hat{x}}_n(t) = u(t-h) + \psi_n(y) + a_n y(t) + k_n \tilde{x}_n(t), \quad (3.178)$$

где  $\hat{x}_n(t)$  — оценка  $x_n(t)$ ,  $\tilde{x}_n(t) = x_n(t) - \hat{x}_n(t)$  — ошибка оценивания,  $k_n$  — положительный параметр.

Рассмотрим невязку:

$$\tilde{x}_n(t) = x_n(t) - \hat{x}_n(t). \quad (3.179)$$

После дифференцирования (3.179) в силу систем (3.171) и (3.178) получим

$$\dot{\tilde{x}}_n(t) = -k_n \tilde{x}_n(t) + \delta(t). \quad (3.180)$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение первого порядка от функции невязки  $\tilde{x}_n(t)$ . Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (3.180)  $\tilde{x}_n(t)$  может быть представлено в виде:

$$\tilde{x}_n(t) = \mu_0 + \mu \sin(\omega t + \vartheta) + \varepsilon_1(t), \quad (3.181)$$

$$\tilde{x}_n(s) = \frac{1}{s + k_n} \delta(s),$$

где  $\varepsilon_1(t)$  — экспоненциально убывающая функция,  $\tilde{x}_n(s) = \mathcal{L}^{-1} \{ \tilde{x}_n(t) \}$ ,  $\delta(s) = \mathcal{L}^{-1} \{ \delta(t) \}$ .

Для оценки частоты внешнего возмущения используется сигнал  $\tilde{x}_n(t)$ , как предложено в работах [44, 75]. Введем в рассмотрение линейный фильтр второго порядка:

$$\xi(s) = \frac{\lambda_0^2}{\gamma(s)} \tilde{x}_n(s), \quad (3.182)$$

где  $\lambda_0$  — положительная константа,  $\gamma(s) = s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0$  — Гурвицев полином с двумя различными корнями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Примем  $\gamma_0 = \lambda_0^2$  и  $\lambda = \min_{i=1,2} \{|\operatorname{Re} \lambda_i|\}$ .

Согласно лемме 1, первая и третья производные выходной переменной линейного фильтра (3.182) могут быть записаны в виде:

$$\dot{\xi}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\lambda_0^2 s}{\gamma(s)} \tilde{x}_n(s) \right\}, \quad \ddot{\xi}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\lambda_0^2 s^3}{\gamma(s)} \tilde{x}_n(s) \right\}, \quad (3.183)$$

где  $\theta = -\omega^2$ ,  $\mathcal{L}^{-1} \{ \cdot \}$  — обратное преобразование Лапласа.

Для линейного фильтра (3.182) и входного сигнала  $\tilde{x}_n(t)$  справедливо соотношение:

$$\ddot{\xi}(t) = \theta \dot{\xi}(t) + \varepsilon(t), \quad (3.184)$$

где функция  $|\varepsilon(t)| \leq \rho_0 e^{-\lambda t}$  и ее производные ограничены экспоненциально убывающей функцией.

Схема оценивания частоты гармоники возмущающего воздействия (2.25)-(2.27) примет вид:

$$\hat{\omega}(t) = \sqrt{|\hat{\theta}(t)|}, \quad (3.185)$$

$$\hat{\theta}(t) = \chi(t) + k \dot{\xi}(t) \ddot{\xi}(t), \quad (3.186)$$

$$\dot{\chi}(t) = -k \dot{\xi}^2(t) \hat{\theta}(t) - k \ddot{\xi}^2(t), \quad (3.187)$$

где  $k > 0$  гарантирует, что ошибка оценивания частоты  $\tilde{\omega}(t) = \omega - \hat{\omega}(t)$  экспоненциально стремится к нулю:

$$|\tilde{\omega}(t)| \leq \rho_1 e^{-\beta_1 t}, \quad \rho_1, \beta_1 > 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.188)$$

Теперь построим оценку внешнего возмущения:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_n(t) &= -k_n \tilde{x}_n(t) + \sigma_1 \sin \omega t + \sigma_2 \cos \omega t = \\ &= -k_n \tilde{x}_n(t) + \bar{\sigma}^T v(t),\end{aligned}\quad (3.189)$$

где

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{bmatrix}.$$

Идентификацию внешнего возмущения  $\delta(t)$  согласно (2.115)-(2.116) будем осуществлять по следующему алгоритму:

$$\hat{\delta}(t) = \hat{\sigma}^T \hat{v}, \quad (3.190)$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\chi}_1 + \gamma_\sigma \hat{v} \tilde{x}_n, \quad (3.191)$$

$$\dot{\hat{\chi}}_1 = -\gamma_\sigma \hat{v} \hat{v}^T \hat{\sigma} + \gamma_\sigma k_n \hat{v} \tilde{x}_n - \gamma_\sigma \hat{v} \tilde{x}_n, \quad (3.192)$$

где  $\hat{\sigma}$  — оценка вектора  $\bar{\sigma}$ ,  $\hat{v}$  — оценка вектора  $v$ ,  $\gamma_\sigma > 0$  — некоторая положительная константа,  $\hat{\chi}_1(t)$  — оценка функции  $\chi_1(t) = \hat{\sigma} - \gamma_\sigma v \tilde{x}_n$ ,  $\hat{v}(t)$  и оценка производной вектора  $\hat{v}(t)$  вычисляются по формулам:

$$\hat{v}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{v}_1(t) \\ \hat{v}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sin \hat{\omega} t \\ \cos \hat{\omega} t \end{bmatrix}, \quad \dot{\hat{v}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\dot{v}}_1(t) \\ \hat{\dot{v}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\omega} \cos \hat{\omega} t \\ -\hat{\omega} \sin \hat{\omega} t \end{bmatrix}.$$

Как было показано выше, оценка  $\hat{\delta}(t)$  из (3.190) асимптотически сходится к возмущающему сигналу  $\delta(t)$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\delta}(t) = 0,$$

где  $\tilde{\delta}(t) = \delta(t) - \hat{\delta}(t)$  — функция невязки.

### 3.3.4 Предиктор внешнего возмущения

После того как была получена оценка  $\hat{\delta}(t)$ , спроектируем предиктор на основе наблюдателя за внешним возмущением  $\hat{\delta}(t+h)$ ,

который используется при решении задачи компенсации. Рассмотрим предиктор в следующем виде:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(t+h) &= \hat{\sigma}_0 + \hat{\sigma}_1 \sin(\hat{\omega}t + \hat{\omega}h) + \hat{\sigma}_2 \cos(\hat{\omega}t + \hat{\omega}h) = \\ &= \hat{\sigma}_0 + \hat{\sigma}_1 \sin(\hat{\omega}t) \cos(\hat{\omega}h) + \hat{\sigma}_1 \cos(\hat{\omega}t) \sin(\hat{\omega}h) + \\ &\quad + \hat{\sigma}_2 \cos(\hat{\omega}t) \cos(\hat{\omega}h) - \hat{\sigma}_2 \sin(\hat{\omega}t) \sin(\hat{\omega}h) = \\ &= \hat{\sigma}_0 + \hat{\sigma}_3 \sin(\hat{\omega}t) + \hat{\sigma}_4 \cos(\hat{\omega}t),\end{aligned}\tag{3.193}$$

где

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_3 &= \hat{\sigma}_1 \cos(\hat{\omega}h) - \hat{\sigma}_2 \sin(\hat{\omega}h), \\ \hat{\sigma}_4 &= \hat{\sigma}_1 \sin(\hat{\omega}h) + \hat{\sigma}_2 \cos(\hat{\omega}h).\end{aligned}\tag{3.194}$$

Из условия  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\omega - \hat{\omega}(t)) = 0$  получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \delta(t+h) - \hat{\delta}(t+h) \right) = 0.$$

### 3.3.5 Синтез регулятора

Рассмотрим управление в следующем виде:

$$u(t) = u_0(t) - \hat{\delta}(t+h),\tag{3.195}$$

где  $u_0$  — стабилизирующее слагаемое.

Построим  $u_0$ , для этого найдем производные функции  $y(t) = x_1(t)$  в силу системы (3.171):

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \dot{x}_1(t) = x_2(t) + a_1 y(t) + \psi_1(y(t - \tau_1)) = \varsigma_2(t), \\ \ddot{y}(t) &= \dot{x}_2(t) = x_3(t) + a_1 \dot{y}(t) + \frac{\partial \psi_1(y(t - \tau_1))}{\partial y(t - \tau_1)} \dot{y}(t - \tau_1) + \\ &\quad + a_2 y(t) + \psi_2(y(t - \tau_2)) = \\ &= \varsigma_3(t), \\ &\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^{(n)}(t) &= \dot{\varsigma}_n(t) = u_0(t-h) + \frac{\partial^{n-1}\psi_1(y(t-\tau_1))}{\partial y(t-\tau_1)^{n-1}} \dot{y}^{n-1}(t-\tau_1) + \\
&+ \dots + \frac{\partial\psi_1(y(t-\tau_1))}{\partial y(t-\tau_1)} y^{(n-1)}(t-\tau_1) + \dots + \psi_n(y(t-\tau_n)) + \\
&+ a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) + \tilde{\delta}(t) = \\
&= u_0(t-h) + \frac{\partial^{n-1}\psi_1(y(t-\tau_1))}{\partial y(t-\tau_1)^{n-1}} \varsigma_2^{n-1}(t-\tau_1) + \\
&+ \dots + \frac{\partial\psi_1(y(t-\tau_1))}{\partial y(t-\tau_1)} \varsigma_n(t-\tau_1) + \dots + \psi_n(y(t-\tau_n)) + \\
&+ a_1 \varsigma_{n-1}(t) + \dots + a_n y(t) + \tilde{\delta}(t). \tag{3.196}
\end{aligned}$$

Если все компоненты вектора состояния  $x(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  системы (3.171) известны, то функции  $\varsigma_1(t), \varsigma_2(t), \dots, \varsigma_n(t)$  модели (3.196) также будут являться известными. В таком случае получим закон управления в следующем виде:

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= u_1(t) - \left( \frac{\partial^{n-1}\psi_1(y(t+h-\tau_1))}{\partial y(t+h-\tau_1)^{n-1}} \varsigma_2^{n-1}(t+h-\tau_1) + \right. \\
&+ \dots + \frac{\partial\psi_1(y(t+h-\tau_1))}{\partial y(t+h-\tau_1)} \varsigma_n(t+h-\tau_1) + \dots + \\
&\left. + \psi_n(y(t-\tau_n)) \right). \tag{3.197}
\end{aligned}$$

При подстановке (3.204) в (3.196) получим систему линейных стационарных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{\varsigma}_1(t) &= \varsigma_2(t), \\
\dot{\varsigma}_2(t) &= \varsigma_3(t), \\
&\dots \\
\dot{\varsigma}_n(t) &= a_1 \varsigma_{n-1}(t) + \dots + a_n \varsigma_1(t) + \tilde{\delta}(t) + u_1(t-h). \tag{3.198}
\end{aligned}$$

Перепишем (3.198) в следующем виде:

$$\dot{\varsigma}(t) = G\varsigma(t) + qu_1(t-h) + \tilde{\delta}(t), \tag{3.199}$$

$$y(t) = e_1^T \varsigma(t), \tag{3.200}$$

где векторы  $\varsigma(t)$ ,  $q$ ,  $e_1^T$  и матрица  $G$  обозначают:

$$\varsigma(t) = \begin{bmatrix} \varsigma_1(t) \\ \varsigma_2(t) \\ \vdots \\ \varsigma_n(t) \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$e_1 = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

Запишем слагаемое  $u_1(t)$ , входящее в закон управления (3.204), с учетом выражения (3.176):

$$u_1(t) = Le^{Gh}\varsigma(t) + L \int_{t-h}^t e^{G(t-\tau)}qu_1(\tau)d\tau, \quad (3.201)$$

где вектор  $L$  выбирается из условия Гурвицевости матрицы  $F = G + qL$ .

Сформулируем полученный результат в виде утверждения.

*Утверждение 5 Для системы (3.171) и возмущения (3.172) закон управления вида:*

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t), \quad (3.202)$$

$$u_1(t) = \hat{\sigma}_0 + \hat{\sigma}_3 \sin(\hat{\omega}t) + \hat{\sigma}_4 \cos(\hat{\omega}t), \quad (3.203)$$

$$\begin{aligned} u_2(t) = & -\frac{\partial^{n-1}\psi_1(y(t+h-\tau_1))}{\partial y(t+h-\tau_1)^{n-1}}\varsigma_2^{n-1}(t+h-\tau_1)- \\ & -\dots - \frac{\partial\psi_1(y(t+h-\tau_1))}{\partial y(t+h-\tau_1)}\varsigma_n(t+h-\tau_1)- \\ & -\dots - \psi_n(y(t-\tau_n)), \end{aligned} \quad (3.204)$$

$$u_3(t) = Le^{Gh}\varsigma(t) + L \int_{t-h}^t e^{G(t-\tau)}qu_1(\tau)d\tau, \quad (3.205)$$

обеспечивает выполнение цели управления (3.173), где  $\varsigma_j = y^{(j)}(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,

$$\hat{\sigma}_3 = \hat{\mu}_1(t) \cos(\hat{\omega}(t)h) - \hat{\nu}_2(t) \sin(\hat{\omega}(t)h), \quad (3.206)$$

$$\hat{\sigma}_4 = \hat{\mu}_1(t) \sin(\hat{\omega}(t)h) + \hat{\nu}_2(t) \cos(\hat{\omega}(t)h), \quad (3.207)$$

$u_2(t)$  приводит систему (3.171) к виду (3.199)–(3.200).

### 3.4 Выводы по главе

В третьей главе были рассмотрены различные постановки задачи компенсации внешних возмущающих воздействий. Был рассмотрен случай, когда возмущающее воздействие прикладывается напрямую к выходу системы, что позволяет использовать описанные алгоритмы управления для решения задачи слежения за неизвестным мультисинусоидальным сигналом, в том числе при наличии внешнего возмущающего воздействия. Результаты, представленные в настоящей главе, опубликованы в статьях [52, 53, 90].



# Глава 4

## Адаптивная следящая система

Глава посвящена вопросу применимости описанного ранее подхода для задач удаленного управления. Сначала рассматриваются различные постановки задачи слежения в отсутствии и при наличии внешнего возмущающего воздействия.

### 4.1 Задача слежения

#### 4.1.1 Обобщенная постановка задачи

Рассмотрим задачу слежения за неизвестным мультисинусоидальным сигналом для линейной системы в условиях запаздывания по управлению и наличии внешнего возмущающего воздействия:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h) + E\delta(t), \quad (4.1)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (4.2)$$

$$e(t) = g(t) - y(t), \quad (4.3)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}$  — сигнал управления,  $h$  — известное постоянное запаздывание,  $y \in \mathbb{R}$  — выход системы,  $g \in \mathbb{R}$  — задающий сигнал в виде желаемого выхода системы, определяемого целью функционирования,  $e \in \mathbb{R}$  — ошибка слежения за задающим сигналом,  $A_{n \times n}$  — матрица состояния,  $B_{n \times 1}$  — матрица входов управления,  $E_{n \times 1}$  — матрица входов внешнего возмущения,  $C_{1 \times n}$  — матрица выхода.

Для сигнала управления справедливо  $u(t - h) = 0$  для  $t < h$ .

В качестве возмущающего воздействия  $\delta(t)$  рассмотрим мультисинусоидальный сигнал:

$$\delta(t) = \sigma^\delta + \sum_{i=1}^{l_1} \mu_i^\delta \sin(\omega_i^\delta t) + \nu_i^\delta \cos(\omega_i^\delta t), \quad (4.4)$$

со смещением  $\sigma^\delta$ , состоящий из  $l_1$  гармоник с неизвестными амплитудами  $\mu_i^\delta$  и  $\nu_i^\delta$ , и частотами  $\omega_i^\delta$ ,  $i = \overline{1, l_1}$  — номер гармоники.

В роли задающего сигнала выступает мультисинусоидальный сигнал со смещением  $\sigma^g$ :

$$g(t) = \sigma^g + \sum_{j=1}^{l_2} \mu_j^g \sin(\omega_j^g t) + \nu_j^g \cos(\omega_j^g t), \quad (4.5)$$

состоящий из  $l_2$  гармоник с неизвестными амплитудами  $\mu_j^g$  и  $\nu_j^g$ , и частотами  $\omega_j^g$ ,  $j = \overline{1, l_2}$  — номер гармоники.

Ставится задача слежения за задающим сигналом  $g(t)$ , которая состоит в синтезе закона управления  $u$ , обеспечивающего асимптотическую сходимость к нулю ошибки слежения (4.3):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0, \quad (4.6)$$

с учетом изложенных ниже допущений.

**Допущение 4.1.1** Все параметры системы (4.1)-(4.2) известны.

**Допущение 4.1.2** Тройка матриц  $(A, B, C)$  полностью управляемая и наблюдаемая.

**Допущение 4.1.3** Известная нижняя граница частот  $\omega_0$  для задающего сигнала  $g(t)$  и возмущающего воздействия  $\delta(t)$ :

$$\begin{aligned} \omega_i^\delta &\geq \omega_0, & i &= \overline{1, l_1}, \\ \omega_j^g &\geq \omega_0, & j &= \overline{1, l_2}. \end{aligned}$$

**Допущение 4.1.4** Все частоты  $\omega_i^\delta$ ,  $i = \overline{1, l_1}$  и  $\omega_j^g$ ,  $j = \overline{1, l_2}$  различны.

Ниже будут рассмотрены несколько частных задач в предположении измерения только ошибки слежения  $e(t)$ . В других случаях исходная задача может быть разбита на две независимые подзадачи: компенсации возмущения  $\delta(t)$ , используя методы изложенные в разделе 3.1, и ошибки слежения  $e(t)$ , представленную ниже при рассмотрении случая отсутствия внешнего возмущения.

#### 4.1.2 Задача слежения за неизвестным мульти-синусоидальным сигналом для устойчивой системы

Рассмотрим задачу слежения в условиях отсутствия внешнего возмущения, т.е. при  $\delta(t) = 0$ , и с устойчивой матрицей состояния системы  $A$ .

Введем в рассмотрение наблюдатель:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t - h), \quad (4.7)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \quad (4.8)$$

$$z(t) = \hat{y}(t) + e(t), \quad (4.9)$$

где  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния наблюдателя,  $\hat{y} \in \mathbb{R}$  — выходной сигнал наблюдателя,  $z \in \mathbb{R}$  — оценка сигнала задания.

Заметим, что модель наблюдателя не позволяет изменять скорость сходимости, что не всегда приемлемо. В подразделе 4.1.4 рассмотрен подход лишенный этого недостатка.

Невязка  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  сходится к нулю, в силу гурвицевости матрицы  $A$ :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) - A\hat{x}(t) = A\tilde{x}(t). \quad (4.10)$$

С учетом (4.10) и выражений (4.3), (4.9), легко показать, что  $z(t)$  сходится к сигналу задания  $g(t)$ :

$$\begin{aligned} g(t) - z(t) &= g(t) - \hat{y}(t) - e(t) = g(t) - \hat{y}(t) - g(t) + y(t) = \\ &= \tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) = \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $\varepsilon(t)$  — экспоненциально затухающая функция с экспоненциально затухающими производными.

Для решения поставленной задачи требуется синтезировать такое управляющее воздействие  $u(t)$ , чтобы реакция на него  $y_u(t)$  системы (4.1)–(4.3) равнялась  $z(t)$ , без учета экспоненциальной составляющей  $\varepsilon(t)$ . Выберем управление в виде:

$$u(t-h) = \hat{\sigma}^u(t) + \sum_{j=1}^{l_2} \hat{\mu}_j^u(t) \sin(\hat{\omega}_j^g(t)t) + \hat{\nu}_j^u(t) \cos(\hat{\omega}_j^g(t)t), \quad (4.12)$$

где  $\hat{\omega}_j^g(t)$ ,  $\hat{\sigma}^u(t)$ ,  $\hat{\mu}_j^u(t)$ ,  $\hat{\nu}_j^u(t)$  оценки для  $\omega_j^g$ ,  $\sigma^u$ ,  $\mu_j^u$ ,  $\nu_j^u$  соответственно. При известном сигнале задания  $g(t)$ , пользуясь рассуждениями изложенными в разделе 3.2.2, значения параметров  $\sigma^u$ ,  $\mu_j^u$ ,  $\nu_j^u$ , обеспечивающие равенство  $y(t) = g(t)$ , могут быть рассчитаны следующим образом:

$$\sigma^u = \frac{1}{L_0} \sigma^g, \quad (4.13)$$

$$\mu_j^u = \frac{1}{L_j} \mu_j^g, \quad (4.14)$$

$$\nu_j^u = \frac{1}{L_j} \nu_j^g, \quad (4.15)$$

где  $L_0$  и  $L_j$  — передаточные коэффициенты для постоянного и гармонического с частотой  $\omega_j^g$  сигналов соответственно:

$$L_0 = \left| W(j_c \omega) \right|_{\omega=0}, \quad (4.16)$$

$$L_j = \left| W(j_c \omega) \right|_{\omega=\omega_j^g}, \quad (4.17)$$

вычисляемые на основе комплексной передаточной функции от  $u(t)$  к  $y(t)$  системы (4.1)–(4.2):

$$W(j_c \omega) = C(j_c \omega I - A)^{-1} B. \quad (4.18)$$

Для получения оценки  $\hat{\omega}_j^g(t)$  воспользуемся схемой, описанной в разделе 2.2.1. Введем линейный фильтр с передаточной функцией  $F(s)$  и относительной степенью не менее  $2l_2$ . На его вход подадим

сигнал  $z(t)$ . Далее выходы линейного фильтра используем в схеме оценивания аналогичной (2.132)–(2.134).

Получим оценки  $\hat{\sigma}^u(t)$ ,  $\hat{\mu}_j^u(t)$ ,  $\hat{\nu}_j^u(t)$ , модифицировав схему, изложенную в 3.1.4. Для этого передаточная функция фильтра  $W_1(s)$  в выражении (3.42) должна быть взята в виде:

$$W_1(s) = W(s)F(s), \quad (4.19)$$

где  $W(s)$  — передаточная функция системы (4.1)–(4.2).

Тогда согласно (3.38)–(3.40)

$$\hat{\sigma}^u(t) = \hat{\xi}_0(t), \quad (4.20)$$

$$\dot{\hat{\mu}}_j^u(t) = k_\mu \hat{\nu}_j(t) \left( \hat{\xi}_j(t) - \hat{\mu}_j^u(t) \hat{\nu}_j(t) - \hat{\nu}_j^u(t) \frac{\hat{\nu}_j(t)}{\eta_j(t)} \right), \quad (4.21)$$

$$\dot{\hat{\nu}}_j^u(t) = k_\nu \frac{\hat{\nu}_j(t)}{\eta_j(t)} \left( \hat{\xi}_j(t) - \hat{\mu}_j^u(t) \hat{\nu}_j(t) - \hat{\nu}_j^u(t) \frac{\hat{\nu}_j(t)}{\eta_j(t)} \right), \quad (4.22)$$

где  $\hat{\xi}_0(t)$  определяется согласно (2.226),  $\hat{\nu}_i(t)$  и  $\hat{\nu}_i^u(t)$  на основе (2.222)–(2.223) с учетом замены передаточной функции фильтра  $W_1(s)$  в выражении (2.218) на (4.19),  $\eta_i(t)$  определена в (2.225), а  $\hat{\xi}_i(t)$  вычисляется аналогично (2.193).

Окончательно управление  $u(t)$  с учетом (4.12) найдем согласно (3.22)–(3.170):

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{\sigma}^u + \sum_{j=1}^{l_2} \hat{\mu}_j^u \sin(\hat{\omega}_j^g(t+h)) + \hat{\nu}_j^u \cos(\hat{\omega}_j^g(t+h)) = \\ &= \hat{\sigma}^u + \sum_{j=1}^{l_2} \kappa_j^u \sin(\hat{\omega}_j^g t) + \zeta_j^u \cos(\hat{\omega}_j^g t), \end{aligned} \quad (4.23)$$

где коэффициенты

$$\kappa_j^u = \hat{\mu}_j^u \cos(\hat{\omega}_j^g h) - \hat{\nu}_j^u \sin(\hat{\omega}_j^g h), \quad (4.24)$$

$$\zeta_j^u = \hat{\mu}_j^u \sin(\hat{\omega}_j^g h) + \hat{\nu}_j^u \cos(\hat{\omega}_j^g h). \quad (4.25)$$

### 4.1.3 Задача слежения за неизвестным мульти-синусоидальным сигналом для устойчивой системы при наличии внешнего возмущения

Рассмотрим более общую задачу слежения при наличии внешнего возмущения  $\delta(t)$ .

Как и в предыдущем разделе введем наблюдатель (4.7)-(4.9) и рассмотрим сигнал  $z(t)$ :

$$\begin{aligned} z(t) &= \hat{y}(t) + e(t) = \hat{y}(t) + g(t) - y(t) = \\ &= -\tilde{y}(t) + g(t) = -C\tilde{x}(t) + g(t). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Найдем выражение для невязки вектора состояния  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  системы (4.1)-(4.3) и наблюдателя (4.7)-(4.9):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = \\ &= Ax(t) + Bu(t-h) + E\delta(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t-h) = \\ &= A\tilde{x}(t) + E\delta(t). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Как видно из (4.27), в сигнале  $z(t)$  кроме сигнала задания  $g(t)$  присутствует компонента  $y^\delta(t) = C\tilde{x}(t)$ , соответствующая реакции системы на возмущающее воздействие  $\delta(t)$ . В результате  $z(t)$  может быть преобразован к виду:

$$\begin{aligned} z(t) &= \varepsilon(t) - y^\delta(t) + g(t) = \\ &= \varepsilon(t) - \sigma^\delta - \sum_{i=1}^{l_1} \mu_i^\delta \sin(\omega_i^\delta t) + \nu_i^\delta \cos(\omega_i^\delta t) + \\ &\quad + \sigma^g + \sum_{j=1}^{l_2} \mu_j^g \sin(\omega_j^g t) + \nu_j^g \cos(\omega_j^g t) = \\ &= \varepsilon(t) + \sigma^z + \sum_{a=1}^{l_3} \mu_a^z \sin(\omega_a^z t) + \nu_a^z \cos(\omega_a^z t), \end{aligned} \quad (4.28)$$

где  $\varepsilon(t)$  — экспоненциально затухающая составляющая;  $y^\delta(t)$  — компонента, соответствующая реакции системы на возмущающее воз-

действие  $\delta(t)$  (4.4), представляющая собой смещенный мультисинусоидальный сигнал с частотами гармоник  $\omega_a^z$ ,  $a = \bar{1}, \bar{l}_3$ ,  $l_3 = l_1 + l_2$ , причем,  $\omega_a^z = \omega_a^\delta$  при  $a = \bar{1}, \bar{l}_1$  и  $\omega_a^z = \omega_a^g$  для  $a = \bar{l}_1 + 1, \bar{l}_3$ .

Для решения поставленной задачи требуется синтезировать такое управляющее воздействие  $u(t)$ , чтобы реакция на него  $y^u(t)$  системы (4.1)–(4.3) равнялась  $z(t)$  без учета экспоненциальной составляющей  $\varepsilon(t)$ . В этом случае, будет скомпенсирован эффект возмущающего воздействия  $y^\delta(t)$  на выходе системы и решена задача слежения за задающим сигналом  $g(t)$ .

Синтезируя закон управления  $u(t)$  аналогично (4.12), с учетом вида сигнала  $z(t)$  (4.28), и применяя все последующие шаги, получим реализуемый закон регулирования, обеспечивающий достижения цели управления (4.6).

#### 4.1.4 Задача слежения за неизвестным мультисинусоидальным сигналом для неустойчивой системы

В отличие от предыдущих разделов 4.1.2 и 4.1.3 рассмотрим систему (4.1)–(4.3) с неустойчивой матрицей состояния  $A$ .

В первую очередь требуется выделить с выхода системы некоторый сигнал, который будет использоваться для оценивания. Рассмотрим наблюдатель следующего вида:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t - h) + Lz(t), \quad (4.29)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \quad (4.30)$$

$$z(t) = \hat{y}(t) + e(t), \quad (4.31)$$

где вектор  $L$  выбирается из условия гурвицевости матрицы  $A + LC$ .

Исследуем поведение невязки по состоянию  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) - Lz(t) = A\tilde{x}(t) - L(\hat{y}(t) + e(t)) = \\ &= A\tilde{x}(t) - L(\hat{y}(t) + g(t) - y(t)) = A\tilde{x}(t) + L\tilde{y}(t) - Lg(t) = \\ &= A\tilde{x}(t) + LC\tilde{x}(t) - Lg(t) = (A + LC)\tilde{x}(t) - Lg(t). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Несмотря на то что невязка  $\tilde{x}(t)$  не сходится к нулю, она несет в себе информацию о задающем сигнале  $g(t)$ . Так как сигнал  $\tilde{x}(t)$

не измеряется, рассмотрим измеряемый выход наблюдателя  $z(t)$ :

$$\begin{aligned} z(t) &= \hat{y}(t) + e(t) = \hat{y}(t) + g(t) - y(t) = \\ &= C\hat{x}(t) - Cx(t) + g(t) = C\tilde{x}(t) - g(t). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Найдем изображения Лапласа для выхода наблюдателя  $z(s) = \mathcal{L}\{z(t)\}$ :

$$z(s) = C\tilde{x}(s) - g(s), \quad (4.34)$$

где  $g(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ ,

$$\tilde{x}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = (sI - (A + LC))^{-1}(\tilde{x}(0) - Lg(s)), \quad (4.35)$$

тогда, подставляя (4.35) в (4.34), получим:

$$\begin{aligned} z(s) &= C(sI - (A + LC))^{-1}\tilde{x}(0) + (C(sI - (A + LC))^{-1}L - 1)g(s) = \\ &= C(sI - (A + LC))^{-1}\tilde{x}(0) + W_2(s)g(s), \end{aligned} \quad (4.36)$$

где  $W_2(s) = C(sI - (A + LC))^{-1}L - 1$ .

При условии гурвицевости матрицы  $A + LC$ , собственное движение системы (4.32) экспоненциально сходится к нулю. В таком случае, с точностью до экспоненциально затухающей составляющей, выход системы будет являться мультисинусоидальным сигналом с тем же числом гармоник и теми же частотами, что и задающий сигнал  $g(t)$ :

$$z(t) = \bar{\sigma}^z + \varepsilon(t) + \sum_{j=1}^{l_2} \bar{\mu}_j^z \sin(\omega_j^g t) + \bar{\nu}_j^z \cos(\omega_j^g t), \quad (4.37)$$

где  $\varepsilon(t)$  — экспоненциально затухающая функция.

Целью данного раздела является синтез управляющего сигнала  $\zeta(t)$ , такого что реакция системы на него  $y^\zeta(t)$  совпадала бы с желаемым выходом  $g(t)$  системы:

$$\zeta(t) = \sigma^\zeta + \sum_{p=1}^{l_2} \mu_p^\zeta \sin(\omega_p^g t) + \nu_p^\zeta \cos(\omega_p^g t). \quad (4.38)$$



Сначала построим оценку задающего сигнала  $g(t)$ :

$$\hat{g}(t) = \hat{\sigma}^g + \sum_{j=1}^{l_2} \hat{\mu}_j^g \sin(\hat{\omega}_j^g + \hat{\varphi}_j^g). \quad (4.39)$$

Управление выбирается в следующей форме:

$$u(t) = \psi(t) + \zeta(t), \quad (4.40)$$

где  $\psi(t)$  — стабилизирующая часть управления,  $\zeta(t)$  — часть управления, решающая задачу слежения.

Стабилизирующее управление выберем в виде:

$$\psi(t) = -k\hat{x}(t + h). \quad (4.41)$$

Для получения оценки  $x(t)$  построим наблюдатель:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t - h) + L\bar{y}(t), \quad (4.42)$$

$$\hat{\bar{y}}(t) = C\hat{x}(t), \quad (4.43)$$

$$\bar{y}(t) = e(t) + \hat{\bar{y}}(t) - \hat{g}(t). \quad (4.44)$$

С учетом выражений (4.1)–(4.3) и (4.42)–(4.44) запишем:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= e(t) + \hat{\bar{y}}(t) - \hat{g}(t) = g(t) - y(t) + \hat{\bar{y}}(t) - \hat{g}(t) = \\ &= C\hat{x}(t) - Cx(t) + g(t) - \hat{g}(t) = \tilde{g}(t) - C\tilde{x}(t). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Найдем соотношение для невязки вектора состояния  $\tilde{\hat{x}}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  с учетом (4.45) и (4.42):

$$\dot{\tilde{\hat{x}}}(t) = A\tilde{\hat{x}}(t) - L\bar{y}(t) = (A + LC)\tilde{\hat{x}}(t) - \tilde{g}(t). \quad (4.46)$$

При  $\tilde{g}(t) \rightarrow 0$  и при условии гурвицевости матрицы  $A + LC$ , оценки состояния  $\hat{x}(t)$  сходятся к  $x(t)$ .

На основании полученных оценок  $\hat{x}(t)$ , находим составляющую закона управления  $\zeta(t)$  с учетом вида сигнала  $\hat{g}(t)$  (4.28) и, применяя все последующие шаги, получим реализуемый закон регулирования, обеспечивающий достижения цели управления (4.6).

## 4.2 Выводы по главе

В рамках главы была рассмотрена постановка задачи слежения, описана методика применения результатов главы 3 для её решения.

Особое внимание следует уделить тому, что увеличение запаздывания в канале связи не влияет на величину ошибки слежения.

Результаты, касающиеся системы удаленного управления с техническим зрением и её использования при экспериментальной апробации алгоритмов управления, опубликованы в статьях [95–98].

# Заключение

В пособии изложены современные методы управления динамическими системами с запаздыванием по управлению. Рассмотрены задачи слежения и компенсации мультисинусоидальных воздействий.

В первой главе изложены результаты аналитического обзора. Сформулирована обобщенная постановка задачи и подзадачи, решения которых приведены в настоящем пособии.

Во второй главе рассматривается задача синтеза предиктора и наблюдателя гармоник для мультисинусоидального сигнала, схемы оценивания его параметров. Сначала описан случай одной гармоники в сигнале. Приведено доказательство экспоненциальной сходимости в некоторую область ошибки оценивания в случае наличия аддитивной составляющей в сигнале измерения. Далее описан подход, обеспечивающий существенное увеличение быстродействия схемы оценивания при сохранении той же точности. Рассмотрена задача получения оценок параметров смещенного мультисинусоидального сигнала. Продемонстрировано использование метода каскадной редукции в задаче оценивания частот такого сигнала. Далее представлен градиентный алгоритм идентификации амплитуд гармоник мультисинусоидального сигнала. На основе оценок параметров сигнала строится наблюдатель и предиктор для синусоидальных и мультисинусоидальных сигналов.

Третья глава посвящена рассмотрению трех различных постановок задач компенсации внешнего возмущающего воздействия при наличии запаздывания по управлению. Возмущение во всех случаях дополнительно присутствует в сигнале измерения. Сначала рассмотрена линейная система в задаче компенсации внешнего возмущающего воздействия на состояниях объекта управления. Далее описан синтез системы управления для нелинейной системы специального вида. Последняя постановка задачи предполагает случай двухканальной системы с перекрестными связями по выходу. Здесь

же предлагаемый подход обобщается на случай несогласованности входов управления и возмущения.

В четвертой главе для различных постановок задач, включая наличие возмущающего воздействия, разобраны способы их решения с использованием описанных в главе 3 алгоритмов управления.

К недостаткам описанного в пособии подхода можно отнести требование известности всех параметров объекта управления. Известное постоянное запаздывание тоже является зачастую идеализацией, а значит может быть причислено к недостаткам.

К достоинствам можно отнести решение более широкого класса задач по сравнению с известными аналогами, а также отсутствие ограничений на величину входного запаздывания. В практических задачах такие ограничения могут появляться для контура стабилизации, так как неустойчивый объект до момента получения сигнала управления должен сохранять свою работоспособность. Например, в случае перевернутого маятника такой проблемы не существует, в то же время для реальной ракеты, модель движения которой может описываться аналогичной системой уравнений, это недопустимо.

# Список литературы

- [1] Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием // М.: Машиностроение. — 1974. — Т. 328. — С. 5.
- [2] Еремин Е. Л., Теличенко Д. А. Алгоритмы адаптивной системы с запаздыванием по управлению в схеме с расширенной ошибкой и эталонным упредителем // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2006. — № 6. — С. 9–16.
- [3] Кирьянен А. И. Устойчивость систем с последствием и их приложения. — СПб. : СПбГУ, 1994. — С. 235.
- [4] Резван В. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. — М. : Наука, 1997. — С. 216.
- [5] Фуртат И. Б., Цыкунов А. М. Адаптивное управление объектами с запаздыванием по выходу // Известия высших учебных заведений. — 2005. — Т. 48, № 7.
- [6] Цыкунов А. М. Адаптивное и робастное управление динамическими объектами по выходу // М.: Физматлит. — 2009. — С. 268.
- [7] Цыкунов А. М., Цыпкин Я. З. Адаптивное управление объектами с последствием. — М. : Наука, 1984. — С. 241.
- [8] Цыкунов А. М. Алгоритмы скоростного градиента для систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 3. — С. 97–106.
- [9] Цыпкин Я. З. Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью // Автоматика и телемеханика. — 1946. — Т. 7, № 2-3. — С. 107–129.
- [10] Янушевский Р. Т. Управление объектами с запаздыванием. — М. : Наука, 1978. — С. 410.

- [11] Gu K., Niculescu S.-I. Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. — 2003. — Vol. 125, no. 2. — P. 158–165.
- [12] Mazenc F., Mondié S., Niculescu S.-I. Global asymptotic stabilization for chains of integrators with a delay in the input // Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control / IEEE. — Vol. 2. — IEEE, 2001. — P. 1843–1848.
- [13] Olbrot A. Stabilizability, detectability, and spectrum assignment for linear autonomous systems with general time delays // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 1978. — Vol. 23, no. 5. — P. 887–890.
- [14] Richard J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems // Automatica. — 2003. — Vol. 39, no. 10. — P. 1667–1694.
- [15] Smith O. J. A controller to overcome dead time // ISA Journal. — 1959. — Vol. 6, no. 2. — P. 28–33.
- [16] Krstic M., Smyshlyaev A. Backstepping boundary control for first-order hyperbolic pdes and application to systems with actuator and sensor delays // Systems & Control Letters. — 2008. — Vol. 57, no. 9. — P. 750–758.
- [17] Krstic M. Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems. — Birkhauser : Springer, 2010. — P. 466.
- [18] Kwon W., Pearson A. Feedback stabilization of linear systems with delayed control // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 1980. — Vol. 25, no. 2. — P. 266–269.
- [19] Manitius A., Olbrot A. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 1979. — Vol. 24, no. 4. — P. 541–552.
- [20] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov–krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. — 2003. — Vol. 39, no. 1. — P. 15–20.

- [21] Андриевский Б. Р., Матвеев А. С., Фрадков А. Л. Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 4. — С. 34–99.
- [22] Niculescu S.-I., Annaswamy A. M. An adaptive smith-controller for time-delay systems with relative degree  $n \leq 2$  // Systems & control letters. — 2003. — Vol. 49, no. 5. — P. 347–358.
- [23] Цыпкин Я. З. Оптимальные адаптивные системы управления объектами с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. — 1986. — № 8. — С. 5–24.
- [24] Mirkin L. On the approximation of distributed-delay control laws // Systems & Control Letters. — 2004. — Vol. 51, no. 5. — P. 331–342.
- [25] Furtat I. B., Tsykunov A. M. Output adaptive control for plants using time delay // Adaptation and Learning in Control and Signal Processing. — Vol. 9. — SPb. : Elsevier, 2007. — P. 281–286.
- [26] Bodson M., Douglas S. C. Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency // Automatica. — 1997. — Vol. 33, no. 12. — P. 2213–2221.
- [27] Гайдук А. Р. Синтез нелинейных селективно инвариантных систем на основе управляемой формы Жордана // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 7. — С. 3–16.
- [28] Гайдук А. Р., Плаксиенко Е. А. Управление нелинейными объектами с компенсацией неопределенного возмущения // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2013. — № 1. — С. 2–8.
- [29] Никифоров В. О. Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 4. — С. 69–73.
- [30] Никифоров В. О. Робастное управление линейным объектом по выходу // Автоматика и телемеханика. — 1998. — № 9. — С. 87–99.

- [31] Никифоров В. О. Наблюдатели внешних детерминированных возмущений. Объекты с известными параметрами // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 10. — С. 13–24.
- [32] Цыкунов А. М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 7. — С. 103–115.
- [33] Marino R., Santosuosso G. L., Tomei P. Adaptive stabilization of linear systems with outputs affected by unknown sinusoidal disturbances // European Control Conference. — Kos : IEEE, 2007. — P. 129–134.
- [34] Marino R., Santosuosso G., Tomei P. Regulation of linear systems with unknown additive sinusoidal sensor disturbances // IFAC Proceedings Volumes. — Vol. 17. — Seoul : Elsevier, 2008. — P. 4102–4107.
- [35] Marino R., Tomei P. Adaptive regulator for uncertain linear minimum phase systems with unknown undermodeled exosystems // Proc 17th World Congress of IFAC. — Seoul : Elsevier, 2008. — P. 11293–11298.
- [36] Hu J., Tomizuka M. Adaptive asymptotic tracking of repetitive signals – a frequency domain approach // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1993. — Vol. 38, no. 1. — P. 1572–1579.
- [37] Fedele G., Ferrise A., Picardi C. Periodic signal frequency tracking via a shifted second-order generalized integrator // 2013 Africon. — IEEE, 2013. — P. 1–5.
- [38] Moon J. H., Lee M. N., Chung M. J. Repetitive control for the track-following servo system of an optical disk drive // IEEE Trans. Control Syst. Technol. — 1998. — Vol. 6, no. 5. — P. 663–670.
- [39] Graham M., Callafon R. D., Shrinkle L. An iterative learning controller for reduction of repeatable runout in hard disk drives // 2006 Am. Control Conf. — Vol. 14. — IEEE, 2006. — P. 467–473.



- [40] Benchmark on adaptive regulation—rejection of unknown/time-varying multiple narrow band disturbances / I. D. Landau, A. C. Silva, T.-B. Airimtoae et al. // *European Journal of control*. — 2013. — Vol. 19, no. 4. — P. 237–252.
- [41] Aranovskiy S. Adaptive attenuation of disturbance formed as a sum of sinusoidal signals applied to a benchmark problem // *Control Conference (ECC) / IEEE*. — Zurich : IEEE, 2013. — P. 2879–2884.
- [42] Aranovskiy S. V., Freidovich L. B. Adaptive compensation of disturbances formed as sums of sinusoidal signals with application to an active vibration control benchmark // *European Journal of Control*. — 2013. — Vol. 19, no. 4. — P. 253–265.
- [43] Rejection of sinusoidal disturbance of unknown frequency for linear system with input delay / A. Pyrkin, A. Smyshlyaev, N. Bekiaris-Liberis, M. Krstic // *American Control Conference (ACC) / IEEE*. — Baltimore : IEEE, 2010. — P. 5688–5693.
- [44] Output control algorithm for unstable plant with input delay and cancellation of unknown biased harmonic disturbance / A. Pyrkin, A. Smyshlyaev, N. Bekiaris-Liberis, M. Krstic // *Time Delay Systems*. — Vol. 9. — Czech Republic : Elsevier, 2010. — P. 39–44.
- [45] Precise frequency estimator for noised periodical signals / A. A. Vedyakov, A. A. Pyrkin, A. A. Bobtsov, S. A. Kolyubin // *2012 IEEE International Conference on Control Applications*. — Dubrovnik : IEEE, 2012. — P. 92–97.
- [46] Алгоритм улучшения параметрической сходимости неизвестной частоты синусоидального сигнала с использованием каскадной редукции / А. А. Ведяков, С. В. Арановский, А. А. Бобцов и др. // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. — 2012. — № 4(80). — С. 149–151.
- [47] Гибридный алгоритм управления по выходу с компенсацией неизвестного мультисинусоидального возмущения / А. А. Ведяков, А. А. Бобцов, С. А. Колюбин, А. А. Пыркин // *Известия*

- высших учебных заведений. Приборостроение. — 2013. — Т. 56, № 4. — С. 7–10.
- [48] Гибридный алгоритм идентификации частот мультисинусоидального сигнала / А. А. Ведяков, А. А. Бобцов, С. А. Колубин, А. А. Пыркин // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2013. — Т. 1, № 83. — С. 28–30.
- [49] Output adaptive controller for a class of MIMO systems with input delay and multisinusoidal disturbance / Jian Wang, Alexey A. Vedyakov, Anastasiia O. Vediakova et al. // IFAC Proc. Vol. — Vol. 48. — 2015. — P. 892–899.
- [50] Оценивание параметров полигармонического сигнала / А.А. Пыркин, А.А. Бобцов, А.А. Ведяков, С.А. Колубин // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 8. — С. 94–114.
- [51] Компенсация полигармонического возмущения, действующего на состояние и выход линейного объекта с запаздыванием в канале управления / А.А. Пыркин, А.А. Бобцов, В.О. Никифоров и др. // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 12. — С. 43–64.
- [52] Stabilization of Nonlinear System with Input Delay and Biased Sinusoidal Disturbance / A. Vedyakov, A. Pyrkina, A. Bobtsov et al. // 19th World Congress The International Federation of Automatic Control. — Cape Town : IFAC, 2014. — P. 12104–12109.
- [53] Output Control Approach for Delayed Linear Systems with Adaptive Rejection of Multiharmonic Disturbance / A. Vedyakov, A. Pyrkina, A. Bobtsov et al. // 19th World Congress The International Federation of Automatic Control / Ed. by Boje Edward. — Cape Town : IFAC, 2014. — P. 12110–12115.
- [54] Pyrkina A. A., Bobtsov A. A., Kolyubin S. A. Output controller for nonlinear and mimo systems with delay // 21st Mediterranean Conference on Control Automation. — Crete : IEEE, 2013. — June. — P. 1063–1068.

- [55] Фуртат И. Б. Адаптивное управление объектом с запаздыванием по управлению без использования прогнозирующих устройств // Управление большими системами: сборник трудов. — 2012. — Т. 40.
- [56] Tsykunov A. M. A modified high-order adaptive output feedback control algorithm for linear plants // Automation and Remote Control. — 2006. — Vol. 67, no. 8. — P. 1311–1321.
- [57] Artstein Z. Linear systems with delayed controls: a reduction // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 1982. — Vol. 27, no. 4. — P. 869–879.
- [58] Fiagbedzi Y., Pearson A. Feedback stabilization of linear autonomous time lag systems // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 1986. — Vol. 31, no. 9. — P. 847–855.
- [59] Mizumoto I., Takagi T., Yamanaka K. Parallel feedforward compensator design and aspr based adaptive output feedback control for a time-delay system // American Control Conference (ACC), 2013. — Washington : IEEE, 2013. — P. 4909–4914.
- [60] Цыкунов А. М. Адаптивное управление с компенсацией влияния запаздывания в управляющем воздействии // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2000. — № 4. — С. 78–81.
- [61] Bresch-Pietri D., Krstic M. Adaptive trajectory tracking despite unknown input delay and plant parameters // Automatica. — 2009. — Vol. 45, no. 9. — P. 2074–2081.
- [62] Composite adaptive posicast control for a class of lti plants with known delay / Z. T. Dydek, A. M. Annaswamy, J. E. Slotine, E. Lavretsky // Automatica. — 2013. — Vol. 49, no. 6. — P. 1914–1924.
- [63] Toodeshki M. H., Hosseinnia S., Askari J. Adaptive robust control of uncertain systems with state and input delay // International Journal of Control, Automation and Systems. — 2010. — Vol. 8, no. 6. — P. 1212–1220.

- [64] Francis B. A., Wonham W. M. The internal model principle for linear multivariable regulators // *Applied Mathematics and Optimization*. — 1975. — Vol. 2, no. 2. — P. 170–194.
- [65] Никифоров В. О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. — СПб : Наука, 2003.
- [66] Bodson M., Douglas S. C. Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency // *Automatica*. — 1997. — Vol. 33, no. 12. — P. 2213–2221.
- [67] Marino R., Tomei P. Adaptive regulation of uncertain linear minimum phase systems with unknown exosystems // *45th IEEE Conference on Decision and Control*. — San Diego : IEEE, 2006. — P. 1099–1104.
- [68] Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. — СПб : Наука, 2000.
- [69] Bobtsov A., Pyrkin A. A new approach to mrac problem with disturbance rejection // *Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*. — Vol. 9. — SPb : IFAC, 2007. — P. 92–97.
- [70] Еремин Е. Л., Теличенко Д. А. Адаптивная система управления с эталонным упредителем и стационарным наблюдателем для *siso*-объектов с запаздыванием по управлению // *Информатика и системы управления*. — 2007. — № 13. — С. 140–149.
- [71] Бобцов А. А., Пыркин А. А. Компенсация неизвестного синусоидального возмущения для линейного объекта любой относительной степени // *Автоматика и телемеханика*. — 2009. — № 3. — С. 114–122.
- [72] Bobtsov A. A., Pyrkin A. A. The compensation of a harmonic perturbation under conditions of a delay in control // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2008. — Vol. 47, no. 4. — P. 513–517.
- [73] Stoica P., Li H., Li J. Amplitude estimation of sinusoidal signals: survey, new results, and an application // *Signal Processing, IEEE Transactions on*. — 2000. — Vol. 48, no. 2. — P. 338–352.

- [74] Бобцов А. А., Колобин С. А., Пыркин А. А. Компенсация неизвестного мультигармонического возмущения для нелинейного объекта с запаздыванием по управлению // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 11. — С. 136–148.
- [75] Bobtsov A. A., Pyrkin A. A. Cancellation of unknown multiharmonic disturbance for nonlinear plant with input delay // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. — 2012. — Vol. 26, no. 4. — P. 302–315.
- [76] Fedele G., Ferrise A. Periodic disturbance rejection with unknown frequency and unknown plant structure // Journal of the Franklin Institute. — 2014. — Vol. 351, no. 2. — P. 1074–1092.
- [77] Marino R., Tomei P. Output regulation for linear minimum phase systems with unknown order exosystem // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 2007. — Vol. 52, no. 10. — P. 2000–2005.
- [78] Hou M. Amplitude and frequency estimator of a sinusoid // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2005. — Vol. 50, no. 6. — P. 855–858.
- [79] Xia X. Global frequency estimation using adaptive identifiers // Automatic Control, IEEE Transactions on. — 2002. — Vol. 47, no. 7. — P. 1188–1193.
- [80] Bobtsov A., Lyamin A., Romasheva D. Algorithm of parameter's identification of polyharmonic function // 15th IFAC World Congress on Automatic Control. — Barcelona : IFAC, 2002.
- [81] Identification of frequency of biased harmonic signal / S. Aronovskiy, A. Bobtsov, A. Kremlev et al. // European Journal of Control. — 2010. — Vol. 16, no. 2. — P. 129–139.
- [82] Пыркин А. А. Методы адаптивного и робастного управления в условиях запаздывания и возмущающих воздействий : дис. ... канд. тех. наук : 05.13.01 / А. А. Пыркин ; СПбГУ ИТМО. — СПб., 2010. — С. 151.

- [83] Пыркин А. А. Адаптивный алгоритм компенсации параметрически не определенного смещенного гармонического возмущения для линейного объекта с запаздыванием в канале управления // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 8. — С. 62–78.
- [84] Output adaptive control for active suspension rejecting road disturbance / A. A. Vedyakov, A. V. Titov, A. A. Pyrkin et al. // 2011 IEEE International Conference on Control Applications CCA. — Denver : IEEE, 2011. — P. 527–531.
- [85] Khalil H. K., Grizzle J. W. Nonlinear systems. — Prentice Hall : Prentice hall Upper Saddle River, 2002. — Vol. 3.
- [86] Frequency estimation for periodical signal with noise in finite time / A. Pyrkin, D. Efimov, A. Bobtsov, A. Zolghadri // ECC-CDC. — Orlando : IEEE, 2011.
- [87] Ioannou P. A., Sun J. Robust adaptive control. — California : PTR Prentice-Hall, 1996.
- [88] Арановский С. В., Бобцов А. А., Пыркин А. А. Каскадная редукция в задачах идентификации // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2010. — № 2. — С. 129–139.
- [89] Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing / Stanislav Aranovskiy, Alexey Bobtsov, Romeo Ortega, Anton Pyrkin // IEEE Trans. Automat. Contr. — 2016. — P. 1–6.
- [90] Output adaptive controller for linear system with input delay and multisinusoidal disturbance / A. A. Vedyakov, A. A. Pyrkin, A. A. Bobtsov et al. // 2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA). — Antibes : IEEE, 2014. — P. 1777–1782.
- [91] Improved frequency identification via an adaptive filters cascade / Stanislav Aranovskiy, Alexey A Bobtsov, Anton A Pyrkin, Polina Gritchenko // 2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA) / IEEE. — Antibes : IEEE, 2014. — P. 140–145.

- [92] Adaptive cancellation of unknown multiharmonic disturbance for nonlinear plant with input delay / A. A. Vedyakov, A. A. Pyrkin, A. A. Bobtsov et al. // 19th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED). — Corfu : IEEE, 2011. — P. 874–879.
- [93] Никифоров В. О., Ушаков А. В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. — СПб. : СПб ГИТМО (ТУ), 2003. — С. 232.
- [94] Pyrkin A. A., Bobtsov A. A. Output control for nonlinear system with time-varying delay and stability analysis // 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. — Orlando : IEEE, 2011. — P. 7392–7397.
- [95] Ведяков А. А., Шаветов С. В., Бобцов А. А. Система технического зрения в архитектуре системы удаленного управления // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2014. — Т. 2, № 90. — С. 164–166.
- [96] Ведяков А. А., Шаветов С. В., Пыркин А. А. Архитектура системы удаленного управления робототехническими объектами // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2014. — Т. 2, № 90. — С. 161–163.
- [97] Dynamic Positioning System for Nonlinear Plants and Surface Robotic Vessel / A. A. Vedyakov, A. A. Pyrkin, A. A. Bobtsov et al. // IFAC Proceedings Volumes. — Caen : Elsevier, 2013. — P. 1867–1872.
- [98] Робастное управление мобильными роботами с использованием технического зрения / А. А. Ведяков, М. В. Фаронов, А. А. Пыркин и др. // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. — 2012. — Т. 55, № 12. — С. 63–65.

**Миссия университета** — генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

---

## КАФЕДРА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра Систем Управления и Информатики (до 2001 г. кафедра Автоматики и Телемеханики) факультета Компьютерных Технологий и Управления была основана в 1945 г. на базе факультета Электроприборостроения ЛИТМО. На кафедру Автоматики и телемеханики ЛИТМО была возложена задача подготовки специалистов по автоматизации приборостроительной промышленности, автоматических систем управления, систем телемеханики и телеизмерений. Первый выпуск молодых инженеров состоялся в 1948 г. и составил 17 человек. Первым заведующим кафедры был крупный специалист в области систем телеизмерений, профессор Марк Львович Цуккерман.

В 1955 г. при кафедре образована научно-исследовательская лаборатории (НИЛ). В этот период основные направления научно-исследовательских работ представляли задачи автоматизации измерения и регистрации параметров кораблей во время их мореходных испытаний, а также стабилизации скорости и фазирования двигателей. Под научным руководством проф. М.Л. Цуккермана была налажена подготовка научных кадров высшей квалификации через систему аспирантуры.

С 1959 г. по 1970 кафедру возглавлял ученик М.Л. Цуккермана доцент Ефимий Аполлонович Танский. За время его руководства в научно-исследовательской работе на кафедре произошел заметный поворот к проблемам автоматизации оптико-механического приборостроения, что привело к длительному научно-техническому сотрудничеству кафедры с ЛОМО им. В.И. Ленина, в рамках которого для нужд оборонной техники была разработана целая гамма прецизионных фотоэлектрических следящих систем. В рамках научно-технического сотрудничества с НИИЭТУ кафедра приняла участие в разработке автоматической фототелеграфной аппаратуры, реализованной в виде комплекса “Газета-2”.

С 1970 по 1990 г., за время руководства кафедрой известного в стране специалиста в области автоматизированного электропривода и фотоэлектрических следящих систем доктора технических наук, профессора Юрия Алексеевича Сабина, заметно изменилась структура дисци-



плин и курсов, читаемых студентам кафедры. К традиционным курсам “Теория автоматического регулирования и следящие системы”, “Теория автоматического управления, экстремальные и адаптивные системы”, “Элементы автоматики” и “Телемеханика” были добавлены дисциплины: “Теоретические основы кибернетики”, “Локальные системы управления”, “САПР систем управления” и другие. Прикладные разработки кафедры были связаны с задачами адаптивной оптики для многоэлементных зеркал оптических телескопов и коррекции волнового фронта технологических лазеров; с задачами адаптивной радиооптики применительно к проблеме управления большими полноповоротными радиотелескопами; гребного электропривода и робототехнических систем, автоматического управления процессом мягкой посадки летательных аппаратов.

С 1990 г. научно-исследовательская работа кафедры велась по федеральным целевым программам и конкурсным проектам РФФИ, Минобразования и Администрации Санкт-Петербурга. С целью расширения исследований, проводимых по теории нелинейных и адаптивных систем, роботов и микропроцессорной техники, а также активизации подготовки кадров в 1994 г. образована научная Лаборатория Кибернетики и Систем управления (руководитель проф. И.В. Мирошник). С 1994 г. существенно расширились международные контакты кафедры, участие в самых престижных международных научных мероприятиях, организации конференций и симпозиумов. С 1998 г. на базе кафедры в университете ежегодно проводится Международная студенческая олимпиада по автоматическому управлению, а с 2009 года проводится Всероссийский Фестиваль Мехатроники и Робототехники.

В 2001 г. кафедра была переименована и получила название “Кафедра Систем управления и информатики”. В 2010 г. кафедру возглавил доктор технических наук, профессор Бобцов Алексей Алексеевич, работающий в то время уже в должности декана факультета Компьютерных технологий и управления.

В настоящее время кафедра является одним из ведущих российских научных и образовательных центров, ориентированным на фундаментальные и прикладные исследования в области систем автоматического управления, робототехники и прикладной информатики, подготовку высококвалифицированных специалистов XXI столетия.

Ведяков Алексей Алексеевич  
Пыркин Антон Александрович  
Бобцов Алексей Алексеевич

## **Адаптивные системы стабилизации и слежения для объектов управления с запаздыванием**

**Учебное пособие**

В авторской редакции  
Компьютерная верстка  
Дизайн обложки

А.А. Ведяков  
А.А. Пыркин

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати

Заказ №

Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**

**Университета ИТМО**

197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49