Байесовские модели как основа принятия аналитических решений

М. В. Малышко
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Финуниверситет), Financial University
mv-malishko@bk.ru

Аннотация. **Многие статистические задачи независимо от методов их решения обладаю общим свойством: до того как получен конкретный набор данных, в качестве потенциально приемлемых для изучаемой ситуации рассматривается несколько вероятностных моделей. После того как получены данные, возникает выраженное в некотором виде знание об относительной приемлемости этих моделей. Так, байесовский подход выступает в роли одного из способов «пересмотра» относительной приемлемости вероятностных моделей.**

Ключевые слова: байесовский подход; теорема байеса; вероятность; оценка; классификатор

Основой байесовского подхода выступает известная теорема Байеса, опубликованная в 1763 году спустя 2 года после смерти ее автора, Томаса Байеса. Данная теорема дает возможность оценить вероятность событий эмпирическим путём, играет важную роль в современной математической статистике и теории вероятностей. Она является основой для целого раздела прикладной теории вероятностей – теории статистических решений.

Широко байесовские подходы стали применяться только во второй половине XX века. Это объясняется тем, что расчеты требуют определенных вычислительных затрат, и они стали возможны только с развитием информационных технологий.

I. Теоретические основы байесовского подхода

Байесовский подход в современном обществе славится большой популярностью и чрезвычайно стремительно развивается в последнее десятилетие. На его основе создается множество научных трудов, решающих задачи из различных сфер жизни. Хотя стоит отметить, что традиционная частотная школа статистического вывода, представленная работами таких ученых как Фишер, Ньюмен, Пирсон и многими другими доминирует в статистике в настоящее время. Это связано с тем, что байесовский подход имеет ряд существенных достоинств, делающих его достаточно привлекательным и эффективным для широкого применения. Главным и важным отличием и преимуществом байесовского подхода является тот факт, что субъект изначально анализирует степень своего доверия к возможным моделям и представляет их в виде вероятностей еще до получения данных. Далее, уже с получением данных, теорема Байеса позволяет рассчитать новое множество вероятностей, представляющих пересмотренные степени доверия к возможным моделям, учитывающие новую информацию, поступившую благодаря данным. Использование многих традиционных частотных подходов является неправомерным, так как статистические данные зачастую отсутствуют в реальных задачах анализа риска и принятия решений. Информация, которой мы владеем, может содержать лишь субъективные оценки в виде экспертных оценок и суждений. Более того, ситуация, в которой принимается решение, может быть новой и никогда ранее не анализируемой. Эти особенности усложняют процесс принятия решений и могут поставить под сомнение какие-либо выводы и заключения. И именно поэтому байесовский подход в такой ситуации может оказаться весьма полезным и эффективным.

Байесовский подход основан на двух положениях:

- Суть первой состоит в том, что степень нашей убежденности в справедливости некоторого утверждения численно выражается в вероятности.
- Второе гласит, что при принятии решения в качестве исходных данных используется одновременно информация двух типов: априорная и апостериорная.

Как уже говорилось во введении, основой байесовского подхода является теорема Байеса. Чтобы понять её суть, допустим, мы стараемся исследовать некоторое явление, имея уже некоторые знания, приобретенные до (a priori) наблюдений/эксперимента. Далее, в ходе опыта наши знания подвергаются постепенному уточнению, и уже после (a posteriori) наблюдений/эксперимента у нас формируются новые знания о явлении. А теперь будем считать, что мы стараемся дать оценку неизвестному значению величины θ посредством наблюдений некоторых ее косвенных характеристик $x|\theta$. Формула Байеса определяет принципы, согласно которым происходит преобразование знаний в ходе исследований. Априорные знания о величине θ обозначим за $p(\theta)$. В ходе исследований мы получаем серию значений $x = (x1, \ldots, xn)$. При разных θ наблюдение выборки x более или менее вероятно и определяется значением правдоподобия $p(x|\theta)$. За счет наблюдений наши представления о значении θ меняются согласно формуле Байеса:

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)} = \frac{p(x\mid\theta)p(\theta)}{\int p(x\mid\theta)p(\theta)d\theta}.$$

Стоит заметить, что знаменатель не зависит от θ и нужен исключительно для нормировки апостериорной плотности. Итак, оцениваемый параметр θ является случайной величиной и имеет некоторую известную исследователю априорную плотность распределения p0(θ). Априорная информация представлена в виде некоторого априорного распределения вероятностей анализируемого неизвестного параметра, которое описывает степень его уверенности в том, что этот параметр примет то или иное значение, еще до начала сбора исходных статистических данных.

После наблюдения выборки x с помощью формулы Байеса получаем апостериорную плотность распределения p(θ|x):

$$p(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)}{g(x)} h_0(\theta),$$

где f (x|θ)-плотность условного распределения выборки x при данном θ, т.е. функция правдоподобия; $g(x) = \int f(x \mid \theta) h_0(\theta) d\theta$ – нормирующая константа, не зависящая от θ.

Используя плотность p(θ|x) можно построить, например, байесовский доверительный интервал для параметра θ. Точечной байесовской оценкой для θ служит среднее значение, вычисленное по апостериорному распределению:

$$\widehat{\theta_{B_1}} = \widehat{E_\theta[\theta|x] = \int} \theta h(\theta|x) d\theta.$$

Стоит сказать про одно важное свойство оценки θ_{B_1}. Пусть t(x) – некоторая оценка, зависящая от выборки x. Апостериорным байесовским риском называется величина

$$M_t(x) = E_\theta\left[(\theta\ t(x))^2 \mid x\right] = \int (\theta - t(x))^2 h(\theta|x) d\theta.$$

Оценка θ_{B_1} как математическое ожидание условного распределения θ при заданном x минимизирует $M_t(x)$, и значение $M_t(x)$ есть просто дисперсия апостериорного распределения. Из свойств условного математического ожидания следует, что $\widehat{\theta_{B_1}}$ минимизирует и полный средний квадрат ошибки, т.е. $\widehat{\theta_{B_1}} = \arg\min_t M_t$.

Другая байесовская оценка $\widehat{\theta_{B_2}}$ получается, если выбирать значение θ, дающее максимум условной апостериорной плотности p(θ|x): $\widehat{\theta_{B_2}} = \arg\max_\theta h(\theta|x)$, т.е. это «подправленная» наличием априорной плотности $h_0(\theta)$ оценка максимального правдоподобия. При достаточно слабых ограничениях наf(x| θ) и $h_0(\theta)$ обе оценки сходятся при $n \to \infty$ к оценке максимального правдоподобия независимо от выбора априорной плотности $h_0(\theta)$.

Таким образом, теорема Байеса задает правило, согласно которому уровень убежденности меняется при возникновении новых данных и при этом решает обратную, «инферсную» задачу. Она позволяет определить вероятность P(θ|x) появления события x при условии, что произошло событие θ через известную условную вероятность P(θ |x). Эта формула гораздо удобнее для систем, основанных на знаниях. Формула Байеса существенно расширяет возможность вероятностного описания риска. Рассмотрим пример применения формулы Байеса.

Пусть ситуация для принятия решения характеризуется наличием двух агрегатов: $К_i$ – неблагоприятное состояние первого агрегата с вероятностью 1/2 и $К_2$ – неблагоприятное состояние второго агрегата с вероятностью 1/3. Производиться испытание одного из агрегатов. Установлено, что в результате испытания агрегат находится в неблагоприятном состоянии, тогда требуется найти вероятность того, что выбран первый агрегат. Для решения задачи построим вероятностную модель. В качестве пространства элементарных событий естественно взять множество Ω = {$К_1$Н, $К_1$Б, $К_2$Н, $К_2$Б}, описывающее все исходы выбора агрегата проверки. Вероятности P (ω) исходов

$$P(К_1) = P(К_2) = \frac{1}{2},\ P(Н|К_1) = \frac{1}{2}, \qquad P(Н|К_1) = \frac{1}{3}.$$

Этими условиями вероятности исходов определяются однозначно

$$P(K_1H) = \frac{1}{4}, \qquad P(K_1Б) = \frac{1}{4}, \qquad P(K_2H) = \frac{1}{4},$$
$$P(K_2Б) = \frac{1}{4}.$$

Тогда:

$$P(K_1H) = \frac{P(К_1)P(Н|К_1)}{P(К_1)P(Н|К_1) + P(К_2)P(Н|К_2)} = \frac{3}{5}.$$

Рассмотренные модели вычисления вероятностей неблагоприятных событий в условиях, когда известны оценки ущерба от неблагоприятных событий A_i, позволяют вычислить риск:

$$R = \sum_{i=1}^{n} A_i P(K_i|H),$$

где вероятности неблагоприятных событий определяют соответствующими вероятностными схемами. Для определения величин P_i (K_i |B) из условия минимизации риска необходимо решить экстремальную задачу: вычислить

$$R(K_i) =$$
$$\arg\min\{\textstyle\sum_{i=1}^{n} A_i P(K_i)\ |P^-(K_i) \le P(K_i) \le P^+(K_i), i = 1, \dots, n\}$$

Приведенные результаты иллюстрируют методы принятия решений в рамках концепции риска на основе моделей теории вероятностей событий и их обобщений. Эти методы позволяют сформулировать комплекс необходимых моделей для анализа полного набора совокупности ситуаций, адекватных рассматриваемым моделям процессов.

Итак, выделим основные особенности байесовского подхода: во-первых, все величины и параметры считаются случайными, во-вторых, байесовские методы работают даже при объеме выборки 0! Тогда «апостериорное распределение» = «априорному», в-третьих, апостериорные распределения выступают в качестве оценок неизвестных параметров. Кроме того стоит отметить, что байесовский подход подвергался жесткой критике, но сейчас он активно используются в самых различных областях знаний, применяются в широком классе задач, связанных с анализом, принятием решения, построением экспертных систем.

II. Примеры применения байесовского подхода в современном анализе

В настоящее время наблюдается возрождение байесовских методов, которые оказались в состоянии решить многие серьезные проблемы статистики, машинного обучения, распределения капитальных вложений, управления запасами, организации выборочного контроля качества и много другого. Существует множество научных работ посвященных анализу явлений в различных сферах жизни на основе байесовского подхода. Так, например, Шмойлов Д.О. рассматривает математические методы прогнозирования банкротства на основе байесовского подхода, а О.В. Красоткина и В.А. Попов используют данный подход к оцениванию факторов риска в анализе продолжительности жизни. Также байесовский подход применяют к анализу данных о составе вещества, для оценки финансовых рисков или рисков информационной безопасности телекоммуникационных систем. Я же рассмотрю, на мой взгляд, одни из самых интересных способов применения байесовского подхода. Так, например, в научной статье А.И. Томилиной и А.С. Савельева рассмотрено использование формулы Байеса для матирования изображений. Разберем его подробнее.

Матирование подразумевает под собой разложение начального изображения на фон (background), объект (foreground) и альфа-канал. При смешивании полученного фона с изображением объекта по альфа-каналу должно получиться исходное изображение. Смешивание происходит по следующей формуле:

$$C = \alpha \cdot F + (1 - \alpha) \cdot B,$$

где C – цвет пикселя исходного изображения; F – цвет пикселя объекта; B – цвет пикселя фона; α – коэффициент смешивания ($0 \leq \alpha \leq 1$). Для изображений в градациях серого C, F, B – интенсивности, для цветных – векторы из компонент R, G, B. Задача заключается в нахождении параметров F, B, α для данного изображения C. Затем выделенный объект можно наложить на новый фон, используя формулу смешивания. Цвета в формате RGB можно представить как точки в трехмерном пространстве. Тогда смешивание по формуле дает точку на отрезке FB, делящую этот отрезок в отношении 1 – α: α, считая от точки F. Векторное уравнение соответствует системе из трех уравнений с семью неизвестными (α, Fr, Fg, Fb, Br, Bg, Bb). Задача является недоопределенной, поэтому требуются дополнительные ограничения, например: цвет фона должен быть известен или пользователь должен пометить некоторые области, относящиеся к фону или к объекту. Уравнение и вышеприведенные ограничения задают условия для каждого пикселя независимо. Эти ограничения не делают задачу определенной, поэтому требуется регуляризация, учитывающая значения искомых величин в соседних пикселях. Если известны два значения из набора F, B, α, то третье значение находится однозначно, кроме вырожденных случаев. «Байесовский вывод» является одним из основных методов регуляризации. Пиксели обрабатываются, начиная с границ регионов объекта / фона, сужая неизвестную область шаг за шагом. Пиксели, обработанные на предыдущих шагах, также учитываются в выборках объекта и фона в дополнение к пикселям из известных областей. В качестве цветовой модели используется множество ориентированных гауссиан. Алгоритм использует схему Байеса для максимизации правдоподобия значений. Распределения, оцениваемые с помощью плотности гауссиан объекта и фона, вычисляются на основе как размеченных пикселов объекта / фона, так и ранее обработанных. Образцы цветов для вычисления этих распределений берутся из окрестности обрабатываемого пиксела. Радиус окрестности может быть адаптивным и увеличиваться в случае, если образцов цвета не найдено либо найдено недостаточно для надежной оценки параметров распределения. Цветовые выборки собираются по окрестности обрабатываемого пикселя и кластеризуются. Далее для каждой пары цветовых гауссианов объекта и фона вычисляются оптимальные значения F, B, α. В качестве F и B выбираются не центры гауссианов, а точки, максимизирующие условную вероятность P(F, B, α|C). Таким образом, здесь используется метод максимального правдоподобия. Для оценки этой вероятности используется формула Байеса:

$$P(F, B, \alpha|C) = \frac{P(C|F, B, \alpha) * P(F) * P(B) * P(\alpha)}{P(C)},$$

где вероятность P (C|F,B, α) оценивается через расстояние между цветом C и смесью F; B с коэффициентом α по формуле; P(F), P(B) оцениваются через плотность вероятности для гауссианов цветов объекта и фона; P(α) игнорируется; P(C) – константа относительно параметров максимизации.

В результате данной работы было разработано приложение для матирования изображений, в основе которого лежит байесовский метод. Также в приложении реализованы функции сегментирования исходного изображения и замены фона у вырезаемого объекта.

Другой интересной работой в сфере управления предприятием является труд Е.С. Дедова и С.И. Воронина «Байесовский подход к определению статуса контроллера».

Все виды деятельности контроллера в рамках системы развития контроллинга возможно позиционировать на сетке двумерной матрицы. При этом координаты позиции каждого вида деятельности задаются конкретными значениями интегральных оценочных показателей, шкалы измерений которых представлены на осях матрицы. В матрице по горизонтали (ось X) задается интегральная многофакторная оценка как статуса контроллинга на предприятии, а по вертикали (ось Y) — интегральная оценка уровня развития системы контроллинга. Особенности статуса контроллера определяются достигнутым уровнем развития системы контроллинга: отсутствие, низкий, средний, высокий, значимый. Уровни системы развития контроллинга: актуализация функций контроллинга или внедрение системы контроллинга; создание системы развития контроллинга; занятие прочных позиций; рост значимости; глобальное научение. Для решения задачи выбора предлагается использование теоремы Байеса для выбора стратегического маршрута, так как данный подход обеспечивает корректировку суждений и принятие решений по мере накопления опыта, установление достоверной связи между фактическим уровнем системы развития контроллинга и статусом контроллера в начале планируемого периода и возможностями достижения желаемых позиций в модели развития контроллинга. Схема алгоритма применения указанного подхода для определения вероятности достижения определенного статуса контроллером, порядок и результаты расчетов приведена ниже. В процессе анализа состояния системы развития контроллинга на предприятии установлен уровень ее совершенства для группы исследуемых организаций. Для определения априорной (полученной ранее) вероятности (P) по отобранным факторам экспертами были даны оценки их влияния на вероятность изменения статуса контроллера.

В схеме реализации байесовского подхода предусматривается использование шкалы оценок, связывающих допустимые значения априорных и апостериорных вероятностей достижения планового статуса контроллера. Если априорная вероятность некоторых позиций, определяющих статус контроллера, не является достаточной для гарантированного выполнения плана, то следует провести мероприятия по ее повышению до уровня допустимого значения. Основой для этого служит система количественных показателей. При расчете априорной вероятности предусматривается возможность корректировки величины вклада по отдельным факторам, тем самым обеспечивается адаптация системы развития контроллинга к реальной управленческой ситуации. Согласно теореме Байеса можно определить вероятность достижения запланированного статуса контроллера при определенном уровне системы развития контроллинга, при условии, что один из уровней статуса контроллера уже достигнут.

На заключительном этапе определяется апостериорная вероятность достижения определенного статуса контроллера на конец планового периода и производится сравнительная оценка априорной и апостериорной вероятностей. Если априорная вероятность (уровень) достижения статуса существенно приближается к уровню апостериорной, то вероятность выполнения цели в данной ситуации близка к единице. В соответствии с оценочными показателями осей матрицы проводится целевой анализ каждого конкретного вида деятельности системы развития контроллинга организации; по результатам такого анализа все действия заносятся в конкретные клетки и точки матрицы.

По видам развития контроллинга, которые попали в определенные клетки матрицы, из возможных вариантов делается выбор стратегического маршрута на основе критерия Байеса, т.е. выбирается линия, для которой средневзвешенная апостериорная вероятность максимальна. Далее в соответствии с состоянием системы развития контроллинга выбирают приоритетные для реализации задачи и функции контроллера, ответственного за развитие. Таким образом, мы видим, что байесовский подход играет важную роль в современных условиях развития информационных технологий и находит применение в различных сферах как медицина, экономика, управление предприятием, фотография, статистика и т.д. Он активно развивается, изучается и используется для решения задач, встающих перед человечеством.

III. Заключение

В принятии решений байесовские модели дают возможность осуществлять вспомогательные эксперименты по уточнению состояний природы. На практике подобное конкретизирование исполняется в основном при помощи сбора вспомогательных данных, а так же с помощью проведения этих экспериментов. Подводя итоги, стоит сказать, что байесовский подход имеет целый ряд преимуществ. Главным преимуществом является тот факт, что байесовские модели могут в принципе дать некоторые результаты даже если совсем нет выборочных данных. Связано это с использованием априорного распределения вероятностей, не изменяющегося при отсутствии статистических данных не изменяется, и пересчитанное по теореме Байеса апостериорное распределение совпадает с априорным. Между тем, при планировании эксперимента следует установить, считается ли он целесообразным с точки зрения затрат на его осуществление. С этой целью стоит сопоставить ожидаемые дополнительные доходы или выгоды, которые можно получить при использовании дополнительной информации, приобретаемой в результате проведения эксперимента, и ожидаемые затраты на этот эксперимент.

В настоящее время наблюдается возрождение байесовских методов, которые оказались в состоянии решить многие серьезные проблемы статистики, машинного обучения, распределения капитальных вложений, управления запасами, организации выборочного контроля качества и так далее. Он активно используются в самых различных областях знаний, применяются в широком классе задач, связанных с анализом, принятием решения, построением экспертных систем.

Список литературы

[1] Айвазян, С.А. Байесовский подход в эконометрическом анализе / С.А.Айвазян // Прикладная эконометрика. 2008. №1(9). с. 93-130.

[2] Звягин Л.С. Итерационные и неитеративные методы Монте-Карло как актуальные вычислительные методы байесовского анализа// Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям. 2017. Т. 1. С. 39-44.

[3] Звягин Л.С. Применение байесовских интеллектуальных технологий при моделировании управлением операционными рисками// Экономика. Управление. Право. 2011. № 11-1. С. 33-42.

[4] Байесовский подход к теории вероятностей. Примеры байесовских рассуждений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.machinelearning.ru дата обращения 05.04.2018

Информационно-измерительная техника и технологии: учебник / В.И. Калашников, С.Ф. Нефедов, А.Б. Путилин и др.; под ред. Г.Г. Раннева. М.: Высш. шк., 2002. 264 с.