Применение метода максимального правдоподобия для получения сверхразрешения в задачах обработки сигналов

К. В. Власова
Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота
p_ksenia@mail.ru

Д. М. Клионский
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
klio2003@list.ru

В. А. Пахотин
Балтийский федеральный университет имени И. Канта
VPakhotin@kantiana.ru

***Аннотация*. В настоящей работе анализируется возможность применения метода максимального правдоподобия к решению статистических задач радиотехники, требующих повышения разрешения свыше релеевского предела. Показано, что непосредственная максимизация функции правдоподобия позволяет получить сверхразрешение, в то время как решение на основе уравнений правдоподобия имеет ограничения на разрешающую способность. Представлены основные теоретические положения, а также подтверждающие их результаты модельных исследований. Представлен адаптивный алгоритм спектрального анализа сигналов, который может также применяться в задачах обработки радиосигналов и гидроакустических сигналов.**

Ключевые слова: метод максимального правдоподобия; сверхразрешение; функция правдоподобия; уравнения правдоподобия

I. Введение

Теория оптимального приема хорошо известна [1, 2] и широко используется в различных приложениях для решения задач статистической радиотехники. Байесовское решение является наиболее общим решением. В этом случае вектор параметров сигналов характеризуется априорной плотностью распределения, и для получения решения минимизируется средний риск. Однако во многих задачах вектор параметров сигнала является постоянной величиной на интервале обработки. В этом случае используется метод максимального правдоподобия, основой которого является функция правдоподобия. Она представляет собой условную плотность распределения параметров сигнала, и ее максимум определяет наиболее вероятные оценки. Для их нахождения, как правило, используются уравнения правдоподобия. При этом минимизируется функция риска. В связи с этим, решение статистических задач радиотехники на основе уравнений правдоподобия является оптимальным. Однако при наличии в принятой реализации двух или нескольких сигналов решение становится неоптимальным. Так, например, в области Рэлеевского разрешения возникают интерференционные погрешности, обусловленные взаимодействием главного максимума спектральной (корреляционной) линии одного сигнала с боковыми лепестками спектральной (корреляционной) линии второго сигнала. В области неортогональности, когда критерий Рэлея не выполняется, получить раздельные оценки параметров сигналов оказывается сложно.

Исходя из вышеизложенного, в настоящей работе рассмотрена возможность получения оценок параметров двух или более сигналов, содержащихся в принятой реализации, в области их неортогональности.

II. Основные теоретические положения

Основой теории оптимального приема являются три положения. Первое положение определяет функцию потерь. В радиотехнике, в основном, используется квадратичная функция потерь

$$C = \left|\vec{\lambda}' - \vec{\lambda}\right|^2,$$

где $\vec{\lambda}'$ – оцениваемый вектор параметров сигналов;
$\vec{\lambda}$ – передаваемый (неизвестный) вектор параметров сигналов.

Второе положение определяет статистически усредненное значение функции потерь, которое называется риском. Для метода максимального правдоподобия математическое ожидание от функции потерь определяет функцию риска

$$\tilde{r} = M(C) = M\left(\left|\vec{\lambda}' - \vec{\lambda}\right|^2\right).$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-71-20077)

По своему смыслу функция риска определяет дисперсию вектора параметров $D_{\vec{\lambda}}$. Третье положение связано с процедурой минимизации функции риска, то есть с процедурой отбора возможных решений.

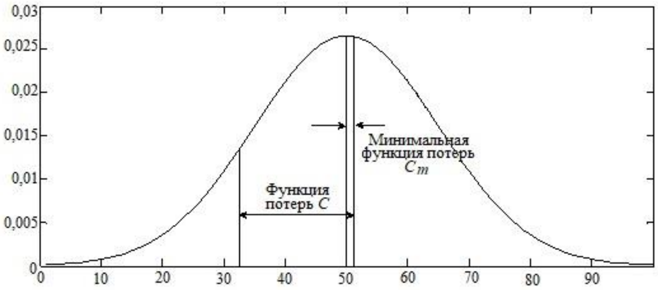

Рис. 1. Условный вид функции правдоподобия

Представим анализ функции правдоподобия относительно указанных трех положений теории оптимального приема. Пусть принятая реализация содержит сигнал и аддитивный шум в виде

$$\hat{y}(t) = \hat{U}\hat{S}\left(\vec{\lambda}, t\right) + \hat{U}_{ш}, \qquad (1)$$

где $\hat{U}$ – комплексная амплитуда сигнала; $\hat{S}\left(\vec{\lambda}, t\right)$ – аналитическая форма сигнала, зависящая от вектора параметров $\vec{\lambda}$ и от времени t; $\hat{U}_{ш}$ – нормальный шум с дисперсией σ^2, средним значением квадратурных составляющих, равным нулю и интервалом корреляции $\tau_{к}$.

На основании (1) запишем функцию правдоподобия

$$L\left(\vec{\lambda}', \hat{U}'\right) = const e^{-\frac{2}{2\pi\tau_{к}}\int_0^T \left|\hat{y}(t) - \hat{U}\hat{S}\left(\vec{\lambda}', t\right)\right|^2 dt},$$

где штрихами отмечены оцениваемые параметры сигнала.

Функция правдоподобия является поверхностью в пространстве параметров $\hat{U}', \vec{\lambda}'$. Ее условный вид показан на рисунке 1.

По горизонтали отложены значения $\hat{U}', \vec{\lambda}'$. Каждое значение оцениваемых параметров $\hat{U}', \vec{\lambda}'$ является решением, и определяет функцию потерь для данного решения. Процедура минимизации функции потерь связана с нахождением максимума функции правдоподобия. Максимум функции правдоподобия является критерием отбора решений. В связи с неизвестностью истинного (переданного) вектора параметров, минимальное значение функции потерь определяется вектором параметров $\hat{U}'_m, \vec{\lambda}'_m$ в максимуме функции правдоподобия. Положение максимума функции правдоподобия характеризуется статистикой и лишь в асимптотике совпадает с истинным вектором параметров, определяя несмещенность оценок в методе максимального правдоподобия.

Вышеприведенное справедливо для случая, когда в принятой реализации содержится два и более сигнала. Меняется лишь размерность пространства параметров сигналов. Значение максимума функции правдоподобия в асимптотике также сохраняется. Следовательно, можно сделать важный вывод: при непосредственном нахождении максимума функции правдоподобия для совокупности сигналов, содержащихся в принятой реализации, нет необходимости в терминах «разрешение», «разрешающая способность». Из этого следует, что оценки параметров сигналов можно получить не только в области Рэлеевского разрешения, но и в области их неортогональности.

Проведем анализ технологии решения, основанной на уравнениях правдоподобия. В этом случае каждому сигналу в принятой реализации сопоставляется спектральная (корреляционная) функция. При сближении неэнергетических параметров спектральных (корреляционных) функций появляется необходимость введения критерия их различимости (критерий разрешения Рэлея, функция неопределенности). В этом случае критерием отбора решений является максимум спектральной (корреляционной) функций. Определить функцию потерь, функцию риска и провести процедуру минимизации функции потерь возможно лишь для одного сигнала, содержащегося в принятой реализации. При наличии двух или более сигналов в принятой реализации, основные положения теории оптимального приема использовать оказывается сложно.

Таким образом, технология решения, основанная на непосредственном нахождении максимума поверхности функции правдоподобия, позволяет получать оценки параметров совокупности сигналов как в области Рэлеевского разрешения, так и в области неортогональности сигналов.

III. Результаты модельных исследований

Приведем результаты модельных расчетов, иллюстрирующих возможность получения оценок параметров двух радиоимпульсов в области их неортогональности.

В модельных расчетах приняты следующие параметры: амплитуды радиоимпульсов $U_1 = 2, U_2 = 1{,}5$, частоты радиоимпульсов $f_1 = 450$ кГц, $f_2 = 450.02 \div 454$ кГц. Область Рэлеевского разрешения находится от $f_2 = 453$ кГц и выше.

На рис. 2 показаны результаты модельных расчетов при оценке частот двух радиоимпульсов. Частота первого радиоимпульса постоянна, частота второго радиоимпульса меняется линейно. Отношение сигнал/шум равно 15 дБ.

Как видно из рисунка, удовлетворительная точность оценок частот возможна вплоть до разности частот ≈0.3 кГц. Эквивалентное разрешение сигналов увеличено ≈ в 9÷10 раз по сравнению с Рэлеевским разрешением (3 кГц).

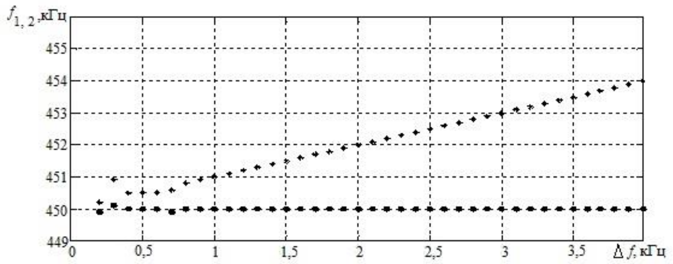

Рис. 2. Результат оценок частот двух радиоимпульсов в области неортогональности

IV. Подход к спектральному анализу сигналов на основе вейвлетов

Адаптивный алгоритм может быть применен для анализа радиосигналов и гидроакустических сигналов. Рассмотрим сигнал $s(n)$ длины N, равной целой степени двойки. Вначале вычисляется Фурье-периодограмма $W_N(k)$ сигнала. Для периодограммной оценки $W_N(k)$ при достаточно больших значениях N справедливо соотношение [5,6]:

$$W_N(k) = S(k)u(k), \qquad k = 0,1,...,N \tag{2}$$

где k - номер спектрального отсчета (дискретная нормированная частота), $W_N(k)$ - вычисленная Фурье-периодограмма, $S(k)$ - искомая СПМ (спектральная плотность мощности), $u(k)$ - случайная составляющая. При $k = 1,...,N-1$ величина $u(k)$ имеет одностороннее экспоненциальное распределение с параметром 1, а при $k = 0$ и $k = N$ величина $u(k)$ имеет распределение χ^2 с одной степенью свободы.

Используя мультипликативное представление, можно записать выражение для логарифма периодограммной оценки. Логарифмирование периодограммы $W_N(k)$ допустимо в силу ее априорной положительности на всей области определения за исключением конечного числа точек, где она может обращаться в ноль. Логарифмирование выражения (2) позволяет перейти к аддитивному представлению:

$$\ln W_N(k) = \ln S(k) + \ln u(k), \quad k = 0,1,...,N \tag{3}$$

Далее выполним преобразование выражения (3), прибавив к правой части и отняв от нее математическое ожидание $E[\ln u(k)]$. Выполним центрирование случайной величины $\ln u(k)$ и обозначим его результат как $\varepsilon(k)$. При этом выражение (3) запишется следующим образом:

$$\ln W_N(k) = \ln S(k) + \varepsilon(k) + E[\ln u(k)],$$
$$k = 0,1,...,N,$$

где

$$\varepsilon(k) = \ln u(k) - E[\ln u(k)], \quad k = 0,1,...,N.$$

Далее полагается, что величины $\varepsilon(0)$ и $\varepsilon(N)$ имеют распределение, совпадающее с распределением величины $\varepsilon(k)$ при $0 < k < N$. Это объясняется тем, что при больших N значениями $\varepsilon(0)$ и $\varepsilon(N)$ можно пренебречь.

Таким образом, окончательно выражение для логарифмической периодограммы $\ln W_N(k)$ можно записать в виде:

$$\ln W_N(k) + \gamma = \ln S(k) + \varepsilon(k), \quad k = 0,1,...,N.$$

где $\varepsilon(k)$ - случайная величина с нулевым средним значением, γ - константа Эйлера.

Функция распределения случайной величины $\varepsilon(k)$ может быть записана следующим образом:

$$F_\varepsilon(k) = \mathrm{P}\{\ln[U(k)] - E[\ln U(k)] < t\} =$$
$$= \mathrm{P}\left\{U(k) < e^{t+E[\ln U(k)]}\right\} = F_U\left(e^{t+E[\ln U(k)]}\right).$$

Плотность вероятности случайной величины $\varepsilon(k)$, определяемая как производная от функции распределения, имеет вид:

$$p_\varepsilon(k) = e^{k+E[\ln U(k)]} p_U\left(e^{k+E[\ln U(k)]}\right) =$$
$$= e^{k-\gamma} p_U\left(e^{k-\gamma}\right) = \frac{1}{2} e^{k-\gamma} e^{e^{k-\gamma}} = \frac{1}{2} e^{k-\gamma+e^{k-\gamma}}.$$

После оценивания логарифмической периодограммы $\ln W_N(k)$ осуществляется вычисление ее вейвлет-коэффициентов с помощью дискретного вейвлет-преобразования.

В качестве способа сглаживания вейвлет-коэффициентов предложено применение жесткой пороговой обработки вейвлет-коэффициентов $b_j(m)$. Модификацию вейвлет-коэффициентов в соответствии с жесткой пороговой обработкой можно в общем виде записать следующим образом:

$$\tilde{b}_j(m) = \begin{cases} b_j(m), & |b_j(m)| > \rho_j \\ 0, & |b_j(m)| \le \rho_j, \end{cases}$$

где $\tilde{b}_j(m)$ - модифицированные вейвлет-коэффициенты после проведения жесткой пороговой обработки, ρ_j - пороговые значения.

В случае отсутствия локальных особенностей в виде резонансных пиков целесообразным является применение мягкой пороговой обработки в соответствии с формулой:

$$\tilde{b}_j(m) = \begin{cases} b_j(m) - \rho_j, & b_j(m) > \rho_j \\ 0, & -\rho_j < b_j(m) \le \rho_j \\ b_j(m) + \rho_j, & b_j(m) \le -\rho_j. \end{cases}$$

Пороги ρ_j, используемые при жесткой пороговой обработке, зависят от номера уровня вейвлет-разложения и определяются как:

$$\rho_j = \alpha_j \ln\frac{N}{2}.$$

Коэффициенты α_j являются табулированными для широко используемых вейвлет-базисов (койфлеты, вейвлеты Добеши, симлеты). Данное выражение для порогов справедливо для тонких уровней вейвлет-разложения с номерами $j \le 10$. На этих уровнях влияние случайной величины $\varepsilon(k)$ является более существенным, чем на остальных уровнях.

Для грубых уровней, номера которых удовлетворяют условию $j > 10$, порог является одинаковым и определяется по формуле:

$$\rho = \sqrt{2\ln\left(\frac{N}{2}\right)\sigma_e^2} = \sqrt{2\ln\left(\frac{N}{2}\right)\frac{\pi^2}{6}} \approx \sqrt{3.29\ln\frac{N}{2}}.$$

Жесткая пороговая обработка вейвлет-коэффициентов, предложенная к использованию при наличии в СПМ резонансных пиков, имеет преимущества при оценивании параметров гидроакустического сигнала в частотной области в сравнении с широко применяемой мягкой пороговой обработкой и встречающейся в отдельных приложениях асимметричной пороговой обработкой. Преимущества жесткой пороговой обработки заключаются в следующем:

- жесткая пороговая обработка позволяет сохранить структуру узких пиков СПМ в частотной области;
- жесткая пороговая обработка позволяет сохранить амплитудные соотношения для СПМ.

После выполнения жесткой пороговой обработки применяется обратное дискретное преобразование Фурье к модифицированным вейвлет-коэффициентам. В результате формируется оценка модифицированной логарифмической периодограммы $\ln W_N(k)$.

После проведения сглаживания оценка $S(k)$ искомой СПМ гидроакустического сигнала $s(n)$ определяется по формуле:

$$S(k) = e^{\ln W_N(k) + \gamma}.$$

V. Заключение

В настоящей работе представлена технология оптимальной обработки сигналов на основе непосредственного нахождения поверхности максимума функционала правдоподобия в пространстве параметров сигналов. Представленная технология позволяет получать оценки параметров сигналов, как в области Рэлеевского разрешения, так и в области неортогональности сигналов. Представлен адаптивный алгоритм спектрального анализа сигналов с использованием вейвлет-технологии.

Список литературы

[1] Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Советское радио, 1968.

[2] Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и. связь, 1983.

[3] Перов А.И. Статистическая теория радиотехнических систем. М.: Радиотехника, 2003. 400 с.

[4] Власова К.В., Пахотин В.А., Брух Я.Р. Разработка метода повышения разрешающей способности по дальности в радиолокации. // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта, 2008 г., № 5, с.61-64.

[5] Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А.И. Кобзарь. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2006. 816 с.

[6] Pensky, M. Bayesian decision theoretic scale adaptive estimation of log spectral density / M. Pensky, B. Vidakovic, D. de Canditiis // Statistica sinica. 2007. Vol. 17. P. 635-666.