О корректности линейных преобразований экспертных оценок

Е. А. Бурков, П. И. Падерно
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)
eaburkov@gmail.com, pipaderno@list.ru

***Аннотация*. Исследована корректность линейных преобразований оценочных шкал при получении комплексных (усредненных) оценок. Рассмотрены преобразования масштаба, сдвига, а также линейное преобразование общего вида применительно к шести различным способам вычисления комплексной оценки.**

Ключевые слова: оценочные шкалы; линейное преобразование шкал; усреднение; комплексная оценка; экспертные оценки

Рассмотрим процесс подведения итогов экспертизы, в результате которой был получен вектор оценок объекта $X=(x_1, x_2,..., x_n)$ в некоторой количественной (линейной) шкале S. Также введем вектор весовых коэффициентов $Q=(q_1, q_2, ..., q_n)$, элементы которого будут отражать степень уверенности в истинности соответствующих элементов вектора X. Обычно при проведении экспертиз элементы вектора Q представляют собой коэффициенты компетентности экспертов, формировавших вектор *X*, но могут быть определены и исходя из иных соображений.

Нередко методики обработки и анализа экспертных оценок предполагают переход от исходной оценочной шкалы S к другой шкале S', более удобной по некоторым вычислительным свойствам, в то время как исходная шкала этими свойствами не обладает, однако при этом является более удобной для экспертов, проводящих оценку. Здесь возникает вопрос изоморфизма шкал S и S', а также корректности подобного перехода и различных вычислительных операций, производимых в ходе обработки над оценками в этих шкалах [1, 2, 3].

Наиболее частыми преобразованиями, используемыми при переходе от одной шкалы к другой, являются следующие линейные преобразования:

1. Преобразования масштаба:

$$Y=L_1(X)=\alpha X=(\alpha x_1, \alpha x_2,...,\alpha x_n)=(y_1, y_2,..., y_n). \quad (1)$$

2. Преобразования сдвига:

$$\begin{aligned} Y=L_2(X)=X+\beta=(x_1+\beta,\ x_2+\beta,..., x_n+\beta)= \\ =(y_1, y_2,..., y_n). \end{aligned} \quad (2)$$

3. Линейное преобразование общего вида:

$$\begin{aligned} Y=L_3(X)=\alpha X+\beta=(\alpha x_1+\beta,\ \alpha x_2+\beta,..., \alpha x_n+\beta)= \\ =(y_1, y_2,..., y_n). \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, что приведенные преобразования (1–3) (кроме случая, когда α = 0) естественным образом имеют и обратные им преобразования.

Одной из основных задач, решаемых при обработке экспертных оценок, является задача получения так называемой комплексной (усредненной или обобщенной) оценки объекта экспертизы [2, 3, 4]. Можно перечислить следующие основные способы получения или виды комплексных оценок:

1. Среднее арифметическое значение $\bar{z}_1(x_1, x_2,..., x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n$ или средневзвешенное арифметическое $\hat{z}_1(x_1, x_2,..., x_n)=\sum_{i=1}^{n} q_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} q_i$.

2. Среднее геометрическое значение $\bar{z}_2(x_1, x_2,..., x_n)=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$ или средневзвешенное геометрическое $\hat{z}_2(x_1, x_2,..., x_n)=\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{q_i}\right)^{1\Big/\sum_{i=1}^{n} q_i}$.

3. Среднее квадратическое значение $\bar{z}_3(x_1, x_2,..., x_n)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n}$ или средневзвешенное квадратическое $\hat{z}_3(x_1, x_2,..., x_n)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i x_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} q_i}$.

4. Предельно пессимистическая оценка $z_4(x_1, x_2,..., x_n)=\min_i(x_1, x_2,..., x_n)$.

5. Предельно оптимистическая оценка $z_5(x_1, x_2,..., x_n)=\max_i(x_1, x_2,..., x_n)$.

6. Среднее гармоническое $\bar{z}_6(x_1, x_2, ..., x_n) = n \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/x_i$ или средневзвешенное гармоническое $\hat{z}_6(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} q_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} q_i / x_i$.

Приведенные виды комплексных оценок обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} z_4(X) \le \bar{z}_6(X) \le \bar{z}_2(X) \le \bar{z}_1(X) \le \bar{z}_3(X) \le z_5(X), \\ \hat{z}_4(X) \le \hat{z}_6(X) \le \hat{z}_2(X) \le \hat{z}_1(X) \le \hat{z}_3(X) \le \hat{z}_5(X). \end{aligned} \tag{4}$$

Понятно, что если в ходе обработки оценок был выполнен переход к шкале S', то и комплексная оценка будет принадлежать той же шкале. Это не всегда удобно, потому что, например, может возникнуть необходимость предъявления комплексной оценки экспертам, сформировавшим исходный вектор оценок X, чтобы обеспечить обратную связь при проведении экспертизы. Такая комплексная оценка, вероятно, будет непонятна экспертам, ведь они использовали шкалу S при выставлении оценок, а не шкалу S'. Таким образом, появляется задача преобразования комплексной оценки, полученной в шкале S' в исходную шкалу S. Наиболее простым решением этой задачи представляется применение преобразования обратного тому, которое использовалось при переходе от шкалы S к шкале S'. Однако применение обратного преобразования не всегда дает корректный результат, что, в частности, зависит от характера преобразования и вида комплексной оценки, которая подвергается обратному преобразованию. В данном случае, говоря о корректности, подразумевается сохранение комплексной оценки при переходе от шкалы S' обратно к шкале S, т. е. должно выполняться равенство

$$L^{-1}\left(\bar{z}_i(L(X))\right) = \bar{z}_i\left(X\right), \tag{5}$$

или иначе

$$L\left(\bar{z}_i(X)\right) = \bar{z}_i\left(L(X)\right). \tag{6}$$

Как было показано в [5], преобразование масштаба и обратное ему преобразование сохраняют значения всех средних, т. е. выполняются равенства $L_1\left(\bar{z}_i(X)\right) = \bar{z}_i\left(L_1(X)\right), i = \overline{1,6}$. Однако для преобразования сдвига, не говоря уже о линейном преобразовании общего вида, это справедливо не всегда.

Достаточно очевидно выполнение равенств:

$$\begin{aligned} L_2\left(\bar{z}_i(X)\right) = \bar{z}_i\left(L_2(X)\right), i = 1,4,5; \\ L_3\left(\bar{z}_i(X)\right) = \bar{z}_i\left(L_3(X)\right), i = 1,4,5; \\ L_2\left(\hat{z}_i(X)\right) = \hat{z}_i\left(L_2(X)\right), i = 1,4,5; \\ L_3\left(\hat{z}_i(X)\right) = \hat{z}_i\left(L_3(X)\right), i = 1,4,5; \end{aligned} \tag{7}$$

т. к. изменение порядка двух линейных (квазилинейных) операций является просто суперпозицией линейных операторов. В иных случаях требуется более глубокое исследование.

Случай 1. Проведем исследование для среднего геометрического в исходной шкале и шкале, подвергнутой преобразованию сдвига (сдвинутой шкале). Комплексная оценка в исходной шкале имеет вид $\bar{z}_2(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$. Применив к ней преобразование сдвига, получим $L_2\left(\bar{z}_2(X)\right) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} + \beta$.

Комплексная оценка в сдвинутой шкале имеет вид $\bar{z}_2\left(Y\right) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(x_i + \beta\right)}$.

Докажем, что выполняется следующее неравенство

$$L_2\left(\bar{z}_2(X)\right) \le \bar{z}_2\left(Y\right), \tag{8}$$

т. е. выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} + \beta \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(x_i + \beta\right)}. \tag{9}$$

Для этого возведем обе части неравенства (9) в степень n и сравним коэффициенты при одинаковых степенях β. Очевидно, что свободный член в левой и правой части (9) равен $\prod_{i=1}^{n} x_i$, а коэффициент при β^n – равен единице. Обобщая, коэффициенты при β^{n-k} в левой части (9) равны $C_n^k \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right)^k$, а коэффициенты при β^{n-k} в правой части – $\sum x_{j_1} x_{j_2} ... x_{j_k}$, причем суммирование производится по всем возможным различным наборам (сочетаниям) $j_1, j_2, ..., j_k$. Как известно, число таких наборов равно C_n^k, и ровно C_{n-1}^{k-1} из них содержит каждый из элементов вектора X.

Так как среднее арифметическое больше либо равно среднему геометрическому, то получаем, что:

$$\begin{aligned} \frac{\sum x_{j_1} x_{j_2} ... x_{j_k}}{C_n^k} \ge \left(\prod x_{j_1} x_{j_2} ... x_{j_k}\right)^{1/C_n^k} = \\ = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\left(\frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k}\right)} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i^k} = \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right)^k. \end{aligned} \tag{10}$$

Из выполнения неравенства (10) следует, что каждый коэффициент при β^{n-k} в левой части неравенства (9) не превосходит аналогичного коэффициента при β^{n-k} в правой части (9). Это свидетельствует о справедливости неравенства (9) и, следовательно, неравенства (8).

Таким образом, в сдвинутой шкале значение среднего геометрического оказывается сдвинутым больше чем на параметр сдвига β, следовательно, при обратном преобразовании комплексная оценка оказывается завышенной.

Замечание 1.1. Все рассуждения проводились при предположении о положительности сдвига, т. е. при сдвиге влево среднее геометрическое также сдвинется влево, но на большее значение, чем параметр сдвига.

Замечание 1.2. При значительном увеличении параметра сдвига среднее геометрическое будет стремиться к среднему арифметическому, т. е. теряется смысл выбранного способа определения комплексной оценки.

Случай 2. Проведем исследование для среднего квадратического в исходной и сдвинутой шкалах.

Комплексная оценка в исходной шкале имеет вид $\bar{z}_3(x_1, x_2,..., x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n}$.

При сдвиге, т. е. при выполнении операции $L_2\left(\bar{z}_3(X)\right)$, получаем, что $L_2\left(\bar{z}_3(X)\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n} + \beta$.

В сдвинутой шкале комплексная оценка имеет вид $\bar{z}_3(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + \beta)^2 \Big/ n}$.

Докажем, что выполняется неравенство

$$L_2\left(\bar{z}_3(X)\right) \geq \bar{z}_3(Y), \tag{11}$$

т. е. выполняется неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n} + \beta \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + \beta)^2 \Big/ n}. \tag{12}$$

Квадрат левой части неравенства (12) равен $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n + 2\beta \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n} + \beta^2$, а квадрат правой части – $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n + 2\beta \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n + \beta^2$.

Из известного неравенства $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big/ n} \geq \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ n$ следует, что квадрат правой части неравенства (12) не превышает квадрат левой части того же неравенства, что доказывает справедливость неравенств (11) и (12).

Таким образом, в сдвинутой шкале значение среднего квадратического оказывается сдвинутым меньше, чем на постоянную сдвига β, следовательно, при обратном преобразовании оно оказывается заниженным.

Замечание 2.1. Все рассуждения проводились при предположении о положительности сдвига, т. е. при сдвиге влево среднее квадратическое также сдвинется влево, но на меньшее значение, чем параметр сдвига.

Замечание 2.2. При значительном увеличении параметра сдвига среднее квадратическое будет стремиться к среднему арифметическому, т. е. теряется смысл выбранного способа определения комплексной оценки.

Случай 3. Проведем исследование для среднего гармонического в исходной и сдвинутой шкалах.

Комплексная оценка в исходной шкале имеет вид $\bar{z}_6(x_1, x_2,..., x_n) = n \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/x_i$.

При сдвиге получаем, что $L_2\left(\bar{z}_6(X)\right) = n \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/x_i + \beta$.

В сдвинутой шкале комплексная оценка имеет вид $\bar{z}_6(Y) = n \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/(x_i + \beta)$.

Докажем, что выполняется неравенство

$$\bar{z}_6(Y) \geq L_2\left(\bar{z}_6(X)\right), \tag{13}$$

т. е. выполняется неравенство

$$n \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/(x_i + \beta) \geq n \Big/ \sum_{i=1}^{n} 1/x_i + \beta. \tag{14}$$

При $\beta = 0$ неравенство (14) обращается в равенство. Докажем, что при увеличении β правая часть неравенства (14) возрастает не быстрее левой.

Производная левой части по β равна $n \sum_{i=1}^{n} 1/(x_i + \beta)^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} 1/(x_i + \beta)\right)^2$, а производная правой части равна единице. Следовательно, доказательство неравенства (14) сводится к доказательству неравенства

$$n \sum_{i=1}^{n} 1/(x_i + \beta)^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} 1/(x_i + \beta)\right)^2 \geq 1. \tag{15}$$

Умножив оба части на знаменатель стоящего слева выражения, разделив их на n^2, выполнив извлечение квадратного корня, а также введя обозначение $t_i = 1/(x_i + \beta)$, получим неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} t_i^2} \Big/ \sqrt{n} \ \geq \ \sum_{i=1}^{n} t_i \Big/ n. \qquad (16)$$

Справедливость неравенства (16) следует из (4), т. к. выражение в левой части этого неравенства представляет собой среднее квадратическое, которое всегда не меньше, чем среднее арифметическое, которое представляет собой правая часть неравенства. Это свидетельствует о справедливости неравенств (14) и (13).

Таким образом, в сдвинутой шкале значение среднего гармонического оказывается сдвинутым больше, чем на постоянную сдвига β, следовательно, при обратном преобразовании оно оказывается завышенным.

Замечание 3.1. Все рассуждения проводились при предположении о положительности сдвига, т. е. при сдвиге влево среднее гармоническое также сдвинется влево, но на большее значение, чем параметр сдвига.

Замечание 3.2. При значительном увеличении параметра сдвига среднее гармоническое будет стремиться к среднему арифметическому, т. е. теряется смысл выбранного способа определения комплексной оценки.

Результаты, полученные при анализе преобразования сдвига можно распространить на общее линейное преобразование (3), т. к. оно представляет собой суперпозицию линейных преобразований (1) и (2), и при этом преобразование масштаба, как уже отмечалось выше, сохраняет значение всех средних.

Вывод: на основе результатов проведенного анализа можно заключить, что использовать обратное линейное преобразование общего вида или сдвига, чтобы вернуть комплексную оценку в исходную шкалу оценивания, некорректно, если данная оценка была получена в виде среднего геометрического, среднего квадратического или среднего гармонического.

Список литературы

[1] Барский Б.В., Соколов М.В. Средние величины, инвариантные относительно допустимых преобразований шкалы измерения // Заводская лаборатория. 2006. Т. 72. № 1. С. 59-66.

[2] Бурков Е.А., Назаренко Н.А., Падерно П.И. Основы квалиметрии. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013. 64 с.

[3] Варжапетян А.Г. Квалиметрия. СПб.: ГУАП, 2005. 176 с.

[4] Орлов А.И. Математические методы исследования и теория измерений // Заводская лаборатория. 2006. Т. 72. № 1. С.67-70.

[5] Дутова Е.Д., Назаренко Н.А., Падерно П.И. Анализ влияния технологии преобразования и комплексирования экспертных оценок на результат // Сборник докладов XIX-й Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям. Санкт-Петербург, 25–27 мая 2016 г. Том 1. С. 58-61.