Прикладная теория синтеза нелинейных систем управления: сравнение методов

А. А. Колесников[1], А. С. Мушенко[2]
Кафедра синергетики и процессов управления
Южный Федеральный Университет
Таганрог, Россия
[1]anatoly.kolesnikov@gmail.com, [2]asmushenko@sfedu.ru

Аннотация. **В работе рассматривается задача нелинейного синтеза (проектирования) общих объективных законов управления широким классом сложных динамических объектов и систем разного применения и назначения. Актуальность темы обусловлена проблемой развития новых методов синтеза законов управления нелинейными объектами, в том числе функционирующими в экстремальных условиях. Решение заключается в разработке и использовании подходов, являющихся математической и физической основой для методов, из которых можно было бы генерировать решения конкретных задач управления нелинейными объектами. В работе рассматриваются различные современные методы, направленные на решение задачи нелинейного системного синтеза.**

Ключевые слова: современная теория управления; генерация обратных связей; синергетика; методы систеза систем управления; нелинейная динамика

I. Введение

В настоящее время в теории управления развит целый ряд методов синтеза нелинейных систем управления, обладающих как своими достоинствами, так и существенными недостатками [1, 2]. В работе сравниваются два из существующих методов современной теории управления – метод бекстеппинга и метод АКАР, позволяющий решить проблемы синтеза нелинейных систем управления.

II. Исследуемые методы

К достаточно популярным методам нелинейного синтеза в настоящее время относится т.н. «бэкстеппинг». Данный метод нашел свое развитие в модифицированных вариациях [3, 4], в совместном использовании с методами адаптивного и робастного управления, в т.ч. с использованием нейронных сетей и нечетких алгоритмов управления [5–8]. Однако определенная эффективность «бэкстеппинга» проявляется в основном в простых скалярных случаях синтеза нелинейных систем. Увеличение размерности и сложности модели объекта управления приводит к существенным трудностям получения аналитического выражения закона управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №19-08-00366 А.

Теоретические основы синергетической теории управления и, в частности, более универсального метода АКАР изложены в [9], [3]. Метод АКАР так же применяется в [3], [4].

III. Процедуры метода АКАР и метода ОИ

Термин «АКАР – аналитическое конструирование агрегированных регуляторов» был впервые предложен в известных работах [10–13], а термин «ОИ – бэкстеппинг, т.е. обход интегратора (integrator backstepping)», – в работах [14–18]. В [19] показано, что оба метода – АКАР и ОИ для объектов вида

$$\begin{aligned}&\dot z_1(t)=z_2,\quad \dot z_2(t)=z_3,\quad \ldots,\quad \dot z_{p-1}=z_p;\\&\dot z_p(t)=a(\mathbf{x})+b(\mathbf{x})u.\end{aligned}\qquad(1)$$

приводят к аналогичным законам управления. Действительно, для простейших нелинейных объектов, сводимых к структуре вида (1) из последовательно включенных интеграторов, охваченных обратными связями, оба метода формально приводят к совпадающим результатам. Однако это относится только лишь к простейшей, скалярной версии метода АКАР [10, 11], который был предложен значительно ранее метода «ОИ». Что же касается векторной версии метода АКАР, впервые предложенной еще в работе [12], то такого аналога в методе «ОИ» практически не существует.

Следуя работе [19], конкретизируем метод синтеза нелинейных законов управления на основе процедуры АКАР-ОИ. Пусть для нелинейного объекта

$$\dot x_1(t)=f(x_1)+g(x_1)u,\quad x_1,u\in\Re\,,\qquad(2)$$

найдено управление $u=\alpha_1(x_1)$, обеспечивающее асимптотическую устойчивость относительно $x_1=0$. Это устанавливается с помощью функции Ляпунова $\mathrm{V}(x_1)$, производная которой по времени в силу (2) удовлетворяет следующему соотношению:

$$\frac{\partial \mathrm{V}(x_1)}{\partial x_1}\left[f(x_1)+g(x_1)\alpha_1(x_1)\right] \le -W(x_1), \qquad (3)$$

где $W(x_1)$ – положительно определенная функция. Тогда для системы

$$\dot{x}_1(t) = f(x_1) + g(x_1)x_2, \quad \dot{x}_2(t) = u, \qquad (4)$$

где переменная x_2 доступна прямым измерениям, управление вида

$$\begin{aligned} u = &-(x_2 - \alpha_1(x_1)) + \\ &+ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\left[f(x_1)+g(x_1)x_2\right] - \frac{\partial \mathrm{V}(x_1)}{\partial x_1} g(x_1) \end{aligned} \qquad (5)$$

обеспечивает ограниченность $x_1(t)$, $x_2(t)$ и стремление $x_1 \to 0$, $(x_2 - \alpha_1) \to 0$ при $t \to \infty$. Введем теперь в рассмотрение агрегированную макропеременную $\psi_1 \overset{\Delta}{=} x_2 - \alpha_1(x_1)$ и перепишем (4) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f(x_1) + g(x_1)(\alpha_1(x_1) + \psi_1), \\ \dot{\psi}_1(t) &= u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\left[f(x_1)+g(x_1)x_2\right]. \end{aligned} \qquad (6)$$

Тогда производная по времени функции Ляпунова $V_1 = V(x_1) + (1/2)\psi_1^2$ в силу (5), (6) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{V}}_1(t) = &\frac{\partial \mathrm{V}(x_1)}{\partial x_1}\left[f(x_1)+g\alpha_1(x_1)\right] + \\ &+ \frac{\partial \mathrm{V}(x_1)}{\partial x_1} g\psi_1 - \psi_1^2 - \frac{\partial \mathrm{V}(x_1)}{\partial x_1} g\psi_1 \le -W(x_1) - \psi_1^2. \end{aligned} \qquad (7)$$

Неравенство (7) следует из теоремы Ла Салля [15].

IV. Сравнительные примеры синтеза

A. *Пример 1*

Для сравнительной иллюстрации методов АКАР и обхода интегратора рассмотрим задачу синтеза стабилизирующего управления нелинейным объектом вида

$$\dot{x}_1(t) = x_2, \quad \dot{x}_2(t) = \sin x_1 + x_3, \quad \dot{x}_3(t) = u. \qquad (8)$$

В соответствии с методом ОИ на 1-м шаге вводится макропеременная вида $\psi_1 = x_1$ и первая функция стабилизации (внутреннее управление) выбирается в виде $\alpha_1 = -\psi_1 = -x_1$. Назначая первую функцию Ляпунова $V_1 = (1/2)x_1^2$ и вводя вторую макропеременную $\psi_2 = x_2 - \alpha_1$, определяем вторую функцию стабилизации [19]:

$$\alpha_2 = -\psi_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x_1} - \sin x_1 = -2x_1 - 2x_2 - \sin x_1 .$$

Выбирая далее $V_2 = V_1 + (1/2)\psi_2^2$ и вводя третью макропеременную $\psi_3 = x_3 - \alpha_2$, определяем действительный закон управления:

$$\begin{aligned} u &= -\psi_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}(\sin x_1 + x_3) - \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial \psi_2} = \\ &= -4x_1 - (5+\cos x_1)x_2 - 3x_3 - 3\sin x_1. \end{aligned} \qquad (9)$$

А в соответствии с методом АКАР синтез стабилизирующего управления осуществляется в обратном порядке. Сначала вводится макропеременная вида $\psi_1 = x_3 - \alpha_2$ и задается сопровождающий функционал:

$$J_1 = \int_0^\infty \left[m_1^2\psi_1^2 + c_1^2\dot{\psi}_1^2(t)\right]dt, \qquad (10)$$

где $m_1 > 0$, $c_1 > 0$ – постоянные коэффициенты. Управление, доставляющее минимум введенному функционалу, имеет вид [11]

$$u = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(\sin x_1 + x_3) - \frac{1}{T_1}(x_3 - \alpha_2), \qquad (11)$$

где $T_1 = c_1 / m_1$. Движение вдоль многообразия $\psi_1 = 0$ описывается уравнениями: $\dot{x}_{1\psi}(t) = x_{2\psi}$, $\dot{x}_{2\psi}(t) = \sin x_{1\psi} + \alpha_2$. Используя вторую макропеременную: $\psi_2 = \beta_{21}x_1 + x_2 + \alpha_1(x_1)$, находим внутреннее управление α_2:

$$\alpha_2 = -\frac{\beta_{21}}{T_2}x_1 - \left(\beta_{21} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{1}{T_2}\right)x_2 - \sin x_1 - \frac{1}{T_2}\alpha_1(x_1), \qquad (12)$$

минимизируя функционал вида (10) с заменой ψ_1 на ψ_2 и $T_2 = c_2 / m_2$. Движение вдоль многообразия $\psi_2 = 0$ описывается уравнением $\dot{x}_{1\psi}(t) = -\beta_{21}x_{1\psi} - \alpha_1(x_1)$, и, следовательно, $\alpha_1(x_1)$ может быть положено тождественно равным нулю. Тогда, найдя α_2 (12) и подставив его в (11), определяем внешний закон управления:

$$\begin{aligned} u = &-\frac{\beta_{21}}{T_1T_2}x_1 - \left(\frac{\beta_{21}}{T_1} + \frac{\beta_{21}}{T_2} + \frac{1}{T_1T_2} + \cos x_1\right)x_2 - \\ &-\left(\beta_{21} + \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)x_3 - \left(\beta_{21} + \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)\sin x_1. \end{aligned} \qquad (13)$$

Коэффициенты T_1, T_2 и β_{21} могут быть выбраны для обеспечения желаемого характера и времени переходных процессов. Сравнивая (9) и (13), убеждаемся, что закон (13) при соответствующем выборе коэффициентов β_{21} и $T_i, i=1{,}2$ совпадает с (9), т.е. методы АКАР и ОИ приводят для объекта (8) к законам управления одинаковой структуры [19]. Следует подчеркнуть, что закон управления (13) имеет обобщенный характер, что позволяет сформировать разные свойства замкнутой системы.

B. Пример 2

Следующим примером, приведенным в [17] и вызвавшим затруднения с непосредственным применением бэкстеппинга, является задача синтеза стабилизирующего закона управления нелинейным объектом

$$\dot{x}_1(t) = x_1 + x_2 + x_3^3; \quad \dot{x}_2(t) = x_3; \quad \dot{x}_3(t) = u. \tag{14}$$

В работе [17] на основе теоремы пассивности, линейного матричного неравенства и пакета программ предложена процедура численного определения коэффициентов нелинейного закона управления

$$u_{\text{Б}} = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + \beta x_3^3. \tag{15}$$

Покажем здесь, что задача синтеза закона управления объектом (14) решается методом АКАР аналитически и весьма элегантно в результате простых и ясных процедур. Согласно методу АКАР, введем следующую макропеременную:

$$\psi_1 = x_3 + \gamma_1 x_1 + \sin\gamma_2 x_2. \tag{16}$$

Тогда на основе функционального уравнения

$$T_1\dot{\psi}_1(t) + \psi_1 = 0, \; T_1 > 0 \tag{17}$$

и в силу уравнений объекта (14) найдем закон управления

$$u_1 = -\gamma_1\left(x_1 + x_2 + x_3^3\right) - \gamma_2 x_3 \cos\gamma_2 x_2 - \frac{1}{T_1}\psi_1. \tag{18}$$

Этот закон, согласно (17), через время $t = (3 \div 4)T_1$ переводит ИТ замкнутой системы (14), (18) из произвольных начальных условий x_{i0} в малую окрестность инвариантного многообразия $\psi_1 = 0$ (16). Движение системы вдоль $\psi_1 = 0$ описывается относительно координаты x_2 дифференциальным уравнением

$$\begin{gathered}\ddot{x}_{2\psi}(t) + \left(\gamma_2\cos\gamma_2 x_{2\psi} - 1 + \gamma_1\dot{x}_{2\psi}^2(t)\right)\dot{x}_{2\psi}(t) + \\ + \gamma_1 x_{2\psi} - \sin\gamma_2 x_{2\psi} = 0\end{gathered}. \tag{19}$$

Декомпозированное уравнение (19) относится к классу уравнений маятникового типа, обладающих в зависимости от выбора коэффициентов γ_1 и γ_2 разнообразными движениями – от регулярных колебаний до апериодических переходных процессов. Дивергенция поля этого уравнения равна

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{x}}_{2\psi}(t) = 1 - \gamma_2\cos\gamma_2 x_{2\psi} - 3\gamma_1\dot{x}_{2\psi}^2(t). \tag{20}$$

Из выражения (20) следует, что при $\gamma_2 > 0$ дивергенция всегда отрицательна, т.е. синтезированная система (14), (18) будет обладать некоторым притягивающим множеством. В случае же, когда $\gamma_2 < 1$ и тем более $\gamma_2 < 0$, дивергенция может изменить свой знак при некоторых значениях переменных $x_{2\psi}$ и $\dot{x}_{2\psi}(t)$. Согласно критерию Бендиксона, это означает, что в системе имеет место предельный цикл. Действительно, произведем линеаризацию функций $\sin\gamma_2 x_2 \cong \gamma_2 x_2$ и $\cos\gamma_2 x_2 \cong 1$. Тогда макропеременная ψ_1 (16) и уравнение (19) примут соответственно вид

$$\psi_1 = x_3 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 \tag{21}$$

$$\ddot{x}_{2\psi}(t) + \left(\gamma_2 - 1 + \gamma_1\dot{x}_{2\psi}^2(t)\right)\dot{x}_{2\psi}(t) + (\gamma_1 - \gamma_2)x_{2\psi} = 0. \tag{22}$$

Уравнение (22) – это известное в теории нелинейных колебаний уравнение Релея, которое при $\gamma_1 > \gamma_2$ и $\gamma_2 < 1$ или $\gamma_2 < 0$ обладает одним устойчивым предельным циклом, а при $\gamma_2 \ge 1$ будет асимптотически устойчивым относительно $x_{2\psi} = \dot{x}_{2\psi}(t) = 0$. В этом случае, согласно (21), закон управления (18) принимает частный вид

$$u_1 = -\gamma_1\left(1 + \frac{1}{T_1}\right)x_1 - \gamma_2\left(1 + \frac{1}{T_1}\right)x_2 - \left(\gamma_2 + \frac{1}{T_1}\right)x_3 - \gamma_1 x_3^3, \tag{23}$$

который по своей структуре совпадает с законом (15), полученным в [17] на основе процедуры бэкстеппинга. Отметим, что закон (23) получен в результате простых аналитических процедур, а выбор его коэффициентов непосредственно связан со свойствами нелинейного декомпозированного уравнения (22), которое при $\gamma_1 > \gamma_2 > 1$ будет асимптотически устойчивым. В режиме малых отклонений уравнение (22) имеет декремент затухания

$$\xi = \frac{0{,}5(\gamma_2 - 1)}{\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2}}, \; \gamma_1 > \gamma_2 > 1. \tag{24}$$

Если в (24) положить $\xi = 1$, то между коэффициентами γ_1 и γ_2 можно установить следующую связь:

$$\gamma_1 = \gamma_2 + 0{,}25(\gamma_2 - 1)^2 . \qquad (25)$$

Выражения (24) и (25) позволяют выбрать коэффициенты закона управления u_1 (23), при этом член $\gamma_1 \dot{x}_{2\psi}^2$ усиливает демпферные свойства системы (22).

На рис. 1, 2 представлены результаты моделирования при $\gamma_2 = 2, \gamma_2 = 2{,}25, T_1 = 1$, которые подтверждают теоретические положения и прикладную эффективность метода АКАР.

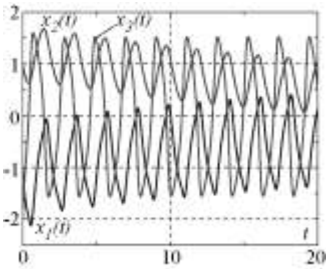

Рис. 1. Результаты моделирования замкнутой системы (14), (15)

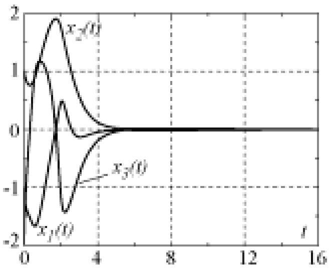

Рис. 2. Результаты моделирования замкнутой системы (14), (18)

Таким образом, эффективно решена задача аналитического синтеза стабилизирующих законов управления объектом (14). Эти законы гарантируют асимптотическую устойчивость в целом замкнутой системы и обеспечивают желаемый характер переходных процессов.

V. Заключение

Проведено сравнение метода АКАР с бэкстеппингом на конкретных примерах синтеза нелинейных систем. Данные примеры наглядно демонстрируют явные преимущества метода АКАР перед бэкстеппингом как в отношении процедур аналитического конструирования нелинейных регуляторов и их физической обоснованности, обоснованности и однозначности выбора настроечных параметров регуляторов, так и обеспечения свойств асимптотической устойчивости замкнутых систем.

Список литературы

[1] Ioannou P.A., Sun J. Robust Adaptive Control. New York: Dover, 2012. 848 p.

[2] Isidori A. Nonlinear control systems an introduction. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 545 p.

[3] Фуртат И.Б. Модифицированный алгоритм обратного обхода интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 10. С. 2-7.

[4] Krstić M., Kanellakopoulos M., Kokotović P.V. Adaptive nonlinear control without overparametrization // Systems & Control Letters. 1992. Vol. 19. Iss. 3. Pp. 177-185.

[5] Polycarpou M.M., Ioannou P.A. A robust adaptive nonlinear control design // Automatica. 1996. Vol. 32. Iss. 3. Pp. 423-427.

[6] Li Y., Qiang S., Zhuang X., Kaynak O. Robust and adaptive backstepping control for nonlinear systems using RBF neural networks // IEEE Transactions on Neural Networks. 2004. Vol. 15. Iss. 3. Pp. 693-701.

[7] Bouabdallah S., Siegwart R. Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro Quadrotor // Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 18-22 April 2005, Spain. Vol. 2005. Pp. 2247-2252.

[8] Tong S., Liu C., Li Y. Fuzzy-adaptive decentralized output-feedback control for large-scale nonlinear systems with dynamical uncertainties // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2010. Vol. 18. Iss. 5. Pp. 845-861.

[9] Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.

[10] Колесников А.А. Аналитический синтез нелинейных систем, оптимальных относительно линейных агрегированных переменных // Известия вузов. Электромеханика. 1985. №11. С. 9-18.

[11] Колесников А.А. Аналитическое конструирование нелинейных агрегированных регуляторов по заданной совокупности инвариантных многообразий. I. Скалярное уравнение//Известия вузов. Электромеханика. 1987. №3. С. 100-108.

[12] Колесников А.А. Аналитическое конструирование нелинейных агрегированных регуляторов по заданной совокупности инвариантных многообразий. II. Векторное уравнение // Известия вузов. Электромеханика. 1987. №5. С. 5-17.

[13] Колесников А.А. Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.

[14] Byrnes C.I., Isidori A. New results and examples in nonlinear feedback stabilization // Systems & Control Letters. 1989. Iss. 12. Pp. 437–442.

[15] Tsinias J. Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization // Mat. Contr. Signals Syst. 1989. Vol. 2. Iss. 12. Pp. 343–357.

[16] Kokotovic P.V., Sussman H.J. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems // Systems & Control Letters. 1989. – Iss. 13. Pp. 125–133.

[17] Kokotovic P.V., Arcak M. Constructive Nonlinear Control: progress in the 90'S // Prepr. 14th IFAC World Congress. Beijing, China, 1999.

[18] Teel A.R. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls // Systems & Control Letters. 1992. – Iss.18. Pp. 165–171.

[19] Дружинина М.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Методы адаптивного управления нелинейными объектами по выходу // Автоматика и телемеханика. 1996. №2. С. 3–33.