Системный анализ на основе концепции байесовского подхода

П. К. Вышковская
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Финуниверситет), Financial University
vyshe-i-vyshe@mail.ru

***Аннотация*. Байесовский подход – распространенный метод, который базируется на принципе расчета условной вероятности. Он позволяет считать вероятность того или иного события при условии, что генеральная совокупность распределена определенным образом. С точки зрения практики использование байесовского подхода позволяет снизить для ряда метрик требования на количество элементов выборки (участников AB-теста). Это работает, потому что в определенный момент при оптимизации параметров распределения построенная плотность уже не приближается к фактическим результатам в тесте.**

Ключевые слова: системный анализ; данные; метрика; теорема Байеса; байесовский подход; вероятность; оценка; классификатор

Системный анализ представляет собой совокупности различных математических, статистических и общенаучных методов по изучению элементов и переменных исследуемой системы с обнаружением и установлением структурных связей между ними. Первое появление системного анализа связывают с развитием компьютерной техники и информационных технологий. Системный анализ подразделяет все задачи на слабоструктурированные, структурированные и неструктурированные. И в каждом отдельном случае структурированности задачи выделяется свой набор методов и процедур решений. Благодаря своему последовательному подходу к решению задач и логической основе для принятия решений, данный метод и по сей день продолжает быть незаменимым в отраслях, где возникают проблемы управления и принятия решений (в частности, в IT-сфере). Системный анализ будет ориентирован на решение проблем, находящихся в верхней части шкалы, на разрешение слабоструктурированных и слабо-формализуемых проблем с высокой начальной неопределенностью. Верят ли люди в прогноз погоды, эффективность лекарств и достоверность анализов, в надежность пешеходных мостов?

Чаще всего они не задумываются, насколько вероятно наступление какого-нибудь события; насколько точен может быть прогноз и как сильно ошибаться анализ. В лучшем случае большинство из нас обращается к априорной информации: если указано, что вероятность ошибки 1%, то так оно и есть. Но, к сожалению, интуитивные рассуждения часто идут вразрез с теорией вероятности. Байесов подход активно применяется, например, в оценке кредитных или инвестиционных рисков, в спам-фильтрах – вообще, в расчете вероятностей из самых разных областей. При этом его часто считают противоречащим интуиции, т.к. вычисления часто противоречат с самым простым для человека ответом, и надо включать мозг.

Главное удобство формулы Байеса заключается в ее универсальности.

Конечно, у этого метода есть и свои недостатки. Метод Байеса скорее характеризует тенденциозность определенных событий. Да, формула высчитывает определенную вероятность, но основания для расчета – это тенденции. А ним, как известно, свойственно меняться

I. Понятие байесовского подхода и его сущность

Подход базируется на принципе расчета условной вероятности. Если на момент анализа результатов мы знаем, какой вид распределения имеет генеральная совокупность, мы можем восстановить плотность вероятности за счет оптимизации параметров этого распределения. Если случайная величина не соответствует одному виду типовых распределений, то искомое распределение можно получить с помощью комбинирования нескольких типовых распределений, используя принцип совместной вероятности событий. Например, мы комбинируем распределение дохода от пользователя с распределением платящих пользователей (оптимизируя параметры произведения). Мы описываем модель итогового распределения для случайной величины и в рамках построенной модели сравниваем две выборки. Далее с помощью статистического критерия проверяем, что обе выборки соответствуют описанному в модели распределению и имеют разные параметры

Плюсы: в случае удачного выбора модели и удачной оптимизации параметров можно улучшить точность и достоверность оценок и в некоторых случаях можно принимать решения, набирая для теста небольшие группы пользователей.

Минусы: удачной модели может не быть, либо она может быть достаточно сложна для прикладного использования.

При анализе любой модели может возникнуть вопрос: а как же все-таки найти компромисс между сложностью модели и точностью на обучающей выборке? Как определить, что такое сложность? Как измерить точность? Более того, учитывая, что эти две величины измеряются в разных единицах, то и сам компромисс как искать? Ответы на эти вопросы дает знаменитая формула Байеса.

Теорема Байеса, названная так в честь пресвитерианского священника XVIII века Томаса Байеса – это метод подсчёта обоснованности верований (гипотез, заявлений, предложений) на основе имеющихся доказательств (наблюдений, данных, информации). Наипростейшая версия звучит так: изначальная вера + новые свидетельства = новая, улучшенная вера. Если подробнее: вероятность того, что убеждение истинно с учётом новых свидетельств равна вероятности того, что убеждение было истинно без этих свидетельств, помноженной на вероятность того, что свидетельства истинны в случае истинности убеждений, и делённой на вероятность того, что свидетельства истинны вне зависимости от истинности убеждений.

Простая математическая формула выглядит так: P(B|E) = P(B) * P(E|B) / P(E)

где

P – вероятность,

B – убеждение,

E – свидетельства.

P(B) – вероятность того, что B – истинно,

P(E) – вероятность того, что E истинно.

P(B|E) – вероятность B в случае истинности E, а P(E|B) – вероятность E в случае истинности B.

Для демонстрации работы формулы часто используют пример с медицинскими анализами. Допустим, вас проверяют на наличие рака, который появляется у 1% людей вашего возраста. Если тест на 100% надёжен, то вам не нужна теорема Байеса, чтобы понять, что означает положительный результат – но давайте просто посмотрим на такую ситуацию для примера. Чтобы подсчитать значение P(B|E), нужно разместить данные в правой части уравнения. P(B), вероятность того, что у вас рак до тестирования, равна 1%, или 0,01. Такова же и P(E), вероятность того, что результат теста будет положительным. Так как они стоят в числителе и знаменателе, они сокращаются, и остаётся P(B|E) = P(E|B) = 1. Если результат анализов будет положительный, у вас рак, и наоборот.

Для начала попробуем изобразить все на картинке. Круги здесь обозначают людей: 100 человек. По статистике один из них болен – его мы отметили красным цветом. И один человек из сотни получает ложное срабатывание анализа – его мы отметили желтым цветом. Круги здесь обозначают людей: 100 человек. По статистике один из них болен – его мы отметили красным цветом. И один человек из сотни получает ложное срабатывание анализа – его мы отметили желтым цветом. Получается, что анализ выдает положительный результат двум людям из ста. И если пациент получает положительный результат, то он обозначен либо желтым (ложное срабатывание), либо красным (болезнь) кругом. И так, каковы шансы оказаться красным?:) 1/2 – или 50%.

В реальном мире надёжность анализов редко достигает 100%. Допустим, ваш тест надёжен на 99%. То есть, 99 из 100 человек, больных раком, получат положительный результат, и 99 здоровых людей из 100 получат отрицательный результат. И это всё равно будет удивительно надёжный тест. Вопрос: если ваш тест положительный, какова вероятность того, что у вас рак?

Проверим рисунок математикой. Для этого воспользуемся теоремой Байеса и подставим числа в формулу.

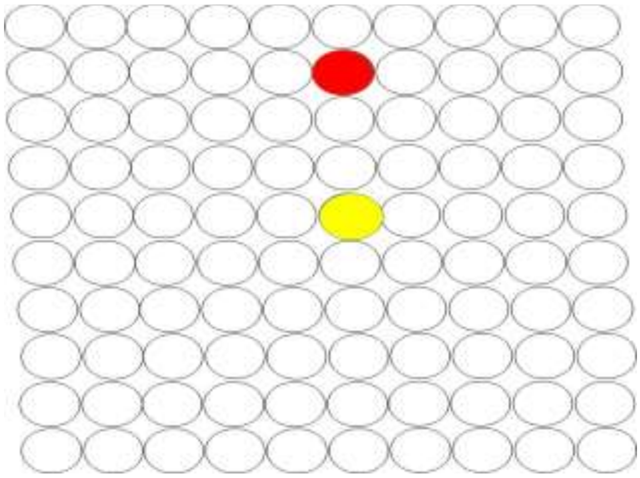

Рис. 1. Для примера применения байевского подхода

Вот теперь теорема Байеса показывает всю мощь. Большинство людей посчитают, что ответ — 99%, или где-то так. Ведь тест настолько надёжен, верно? Но правильный ответ будет – всего лишь 50%. Чтобы узнать, почему, необходимо вставить данные в правую часть уравнения. P(B) всё ещё равна 0,01. P(E|B), вероятность получить положительный тест в случае рака, равна 0,99. P(B) * P(E|B) = 0,01 * 0,99 = 0,0099. Такова вероятность того, что вы получите положительный тест, показывающий, что вы больны. Что насчёт знаменателя, P(E)? Тут есть небольшая хитрость. P(E) – вероятность получить положительный тест вне зависимости от того, больны ли вы. Иначе говоря, в неё входят ложные положительные срабатывания и истинные положительные срабатывания. Чтобы подсчитать вероятность ложного положительного срабатывания, нужно умножить количество ложных срабатываний, 1% или 0,01, на процент людей, не больных раком – 0,99. Получается 0,0099. Да, отличный тест с 99%-й точностью выдаёт столько же ложных срабатываний, сколько и истинных. Чтобы получить P(E), сложим истинные и ложные срабатывания, получим 0,0198, поделим на это 0,0099, и получим 0,5. Итак, P(B|E), вероятность того, что у вас есть рак в случае положительного теста, равна 50%. Если вы ещё раз пройдёте тест, то можете кардинально уменьшить неопределённость, поскольку вероятность наличия у вас рака P(B) будет уже 50% вместо 1. Если второй тест тоже будет положительным, по теореме Байеса вероятность наличия у вас рака будет равна 99%, или 0,99. Как показывает этот пример, повторение теоремы может дать очень точный ответ. Но если надёжность теста 90%, что совсем неплохо, шансы на наличие у вас рака даже в случае дважды полученных положительных результатов всё ещё меньше 50%. Большинство людей, включая врачей, с трудом понимают это распределение шансов, что объясняет излишнее количество диагнозов и лечений рака и других болезней. Этот пример говорит о том, что байсианцы правы: мир был бы лучше, если бы больше людей – хотя бы больше пациентов и врачей – приняли бы байесовскую логику.

II. Байесовский подход в современном анализе

Сначала рассмотрим житейский пример применения формулы Байеса. Допустим, люди собрались на пикник, однако с утра облачно. Известно, что облака появляются примерно в 40 % случаев утром. С другой стороны, примерно в 50 % случаев, если утром было облачно, потом идет дождь. При этом в среднем дождь идет три дня в месяц. Возникает вопрос: какова же вероятность того, что если люди пошли на пикник, и их застигнет дождь? Формула Байеса позволяет ответить на этот вопрос. Достаточно просто пересчитываем априорные вероятности событий, что сегодня будет дождь или с утра было облачно, в апостериорную вероятность события, что во время пикника будет дождь при условии, что утром было облачно. К слову сказать, в данном примере эта вероятность небольшая – всего 12,5 %.

Вероятность можно трактовать как степень нашего незнания. Например, процессы, происходящие в атмосфере Земли, неслучайны, однако из-за большого числа факторов, которые сложно учесть, прогнозирование погоды носит вероятностный характер. Поэтому можно говорить о том, что вероятность – это выражение степени нашего незнания о том или ином феномене. Далее оказывается, что между случайностью объекта и сложностью описания есть соответствие, которое было описано в рамках теории колмогоровской сложности, разработанной одним из величайших математиков XX столетия Андреем Николаевичем Колмогоровым. В основе теории лежит очень естественная идея: сложность объекта измеряется длиной его описания. Неудивительно, что какие-то действительно случайные события практически невозможно предсказать, и поэтому их описание будет очень сложным. Более того, точность алгоритма прогнозирования на обучающей выборке также можно выразить вероятностным образом, а именно с помощью так называемой функции правдоподобия. Она выражает степень нашей уверенности, что обучающая выборка была порождена каким-то определенным алгоритмом прогнозирования, какой-то определенной гипотезой.

Таким образом, задав априорное распределение на пространстве гипотез и подсчитав правдоподобие обучающей выборки для каждой из гипотез, мы можем подсчитать степень нашей уверенности в том, что каждая из гипотез может с хорошей точностью описать выборку, используя формулу Байеса. Используя оценку этой степени уверенности, мы фактически можем произвести выбор наиболее эффективной гипотезы для описания данных. При этом будет соблюдаться компромисс между сложностью этой гипотезы и точностью представления обучающей выборки. Этот подход оказался весьма плодотворен и лег в основу байесовских методов машинного обучения.

Отмечается, что описанный выше подход к решению задачи переобучения – это не единственное преимущество использования байесовских методов. Одной из основных задач машинного обучения является построение прогноза, однако в приложениях очень важно зачастую не только получить прогноз, но и построить доверительный интервал для него. Например, если прогнозируется спрос на какой-либо товар, важно иметь еще и некоторые оценки нижней и верхней границ спроса. А это, в свою очередь, позволит проработать какие-то экономические сценарии и действия в случае их наступления. Байесовские методы позволяют эффективно измерять уровень неопределенности в данных и изменять этот уровень неопределенности в зависимости от того, какая информация содержится во вновь поступивших данных. Соответственно, они предоставляют инструменты для того, чтобы строить доверительные интервалы при подсчете прогнозов. Рассмотрим другой, более продвинутый пример использования байесовских методов машинного обучения. Речь идет о так называемом децентрализованном обучении. В настоящее время мобильные устройства, такие как смартфоны, планшеты, активно используются людьми для коммуникации. Эти устройства за счет встроенных датчиков, таких как камера, GPS, акселерометр и другие, собирают очень большое количество информации, она конфиденциальна. При этом она очень полезна, и если бы на ее основе можно было бы построить различные предсказательные модели, то их потом можно было бы использовать в различных онлайн-сервисах – например, для таргетированной рекламы, для отслеживания аномальных действий. То есть если произошла кража телефона, то это можно автоматически отследить. Качество предсказательных моделей может быть существенно улучшено, если для их обучения использовать данные с нескольких мобильных устройств. Однако возникает проблема, что данные в силу их конфиденциальности нельзя пересылать с мобильного устройства на центральный сервер. Здесь возникает задача децентрализованного машинного обучения. Мы должны обучать модель таким образом, чтобы само обучение происходило на мобильных устройствах, а части финальной модели собирались уже на сервере. То есть пересылка данных с мобильного устройства на сервер запрещена, но при этом с мобильного устройства мы можем пересылать какую-то часть модели на сервер.

Формула Байеса выдает распределение вероятности тех или иных закономерностей, которые потенциально объясняют обучающую выборку. Соответственно, построив на каждом локальном мобильном устройстве свою вероятностную модель и используя формулу Байеса, на сервере мы эти вероятностные модели можем комбинировать, чтобы построить финальную предсказательную модель, и при этом информацию мы не потеряем.

III. Развитие применения байесовского подхода и его роль в современном анализе

Теорема Байеса стала такой популярной, что её даже показали в телешоу «Теория Большого взрыва». Но, как и любой инструмент, её можно использовать во благо или во вред. «Байесовская лихорадка» стала слишком назойливой, чтобы её игнорировать. Как пишет The New York Times, байесовская статистика «проникает везде, от физики до исследований рака, от экологии до психологии». Физики предложили байесовские трактовки квантовой механики и байесовские защиты теории струн и теории мультивселенных. Философы рассуждают о том, что всю науку в целом можно рассматривать, как байесовский процесс, и что Байес помогает отличить науку от псевдонауки лучше, чем метод фальсифицируемости, популяризованный Карлом Поппером. Исследователи искусственного интеллекта, включая разработчиков робомобилей в Google, применяют ПО Байеса, чтобы помогать машинам распознавать закономерности и принимать решения. Байесовские программы, согласно Шэрон Бёрщ Макгрейн, автору популярной истории теоремы Байеса, «сортируют емейл и спам, оценивают медицинские риски и государственную безопасность, расшифровывают ДНК, прочее». На сайте Edge.org физик Джон Мэтер беспокоится, что байесовые машины могут стать настолько умными, что вытеснят людей. Когнитивисты предполагают, что в нашем мозге работают алгоритмы Байеса, когда он ощущает, размышляет и принимает решения. Недавно учёные и философы изучали эту возможность на конференции в Нью-Йоркском университете под названием «Работает ли мозг по Байесу?»

Фанатики настаивают, что если бы больше людей приняло метод мышления Байеса (вместо бессознательной работы по Байесу, которая, якобы, идёт в мозге), мир был бы гораздо лучше. В статье «Интуитивное объяснение теоремы Байеса» теоретик ИИ Элизер Юдковский говорит об обожании Байеса: «Почему математическая концепция вызывает такой странный энтузиазм среди её изучающих? Что есть т.н. «байесовская революция», которая прокатывается по различным областям науки, заявляющая о поглощении даже экспериментальных методов как особых случаев? Что за секрет известен приверженцам Байеса? Какой свет они увидели? Скоро вы узнаете. Скоро вы будете одним из нас». С другой стороны, теорема Байеса – это лишь сведение в кодекс здравого смысла. Как пишет Юдковский к концу своего обучающего материала: «К этому моменту теорема Байеса может казаться совершенно очевидной и напоминать тавтологию, вместо того чтобы быть удивительной и новой. В таком случае это введение достигло своей цели».

Возвращаясь, к примеру с раком: теорема Байеса говорит, что вероятность наличия у вас рака в случае положительных результатов теста равна вероятности получения истинного положительного результата, делённой на вероятность всех положительных результатов, истинных и ложных. В общем, остерегайтесь ложных положительных результатов.

Достоверность вашего убеждения зависит от того, насколько сильно ваше убеждение объясняет существующие факты. Чем больше вариантов объяснения фактов, тем менее достоверно ваше личное убеждение. С моей точки зрения, в этом состоит суть теоремы. «Альтернативные объяснения» могут включать в себя много всего. Факты могут быть ложными, полученными при помощи неправильно сработавшего инструмента, неверного анализа, склонности к получению нужного результата и даже подделанными. факты могут быть точными, но их могут объяснять множество других убеждений или гипотез. Иначе говоря, в теореме Байеса нет никакого волшебства. Всё сводится к тому, что убеждения достоверны настолько, насколько верны свидетельства в их пользу. Если есть хорошие доказательства, теорема выдаёт годные результаты. Если доказательства так себе, теорема не поможет. Мусор на входе, мусор на выходе.

Проблемы с теоремой могут начинаться с величины P(B), изначального предположения по поводу вероятности ваших убеждений, часто называемой априорной вероятностью. В примере выше была красивая и точная априорная вероятность 0,01. В реальном мире эксперты спорят по поводу того, как диагностировать и учитывать рак. Априорная вероятность, скорее всего, будет состоять из диапазона, а не из одного числа. Во многих случаях оценка априорной вероятности основывается лишь на догадках, и позволяет субъективным факторам вкрадываться в подсчёты. В теореме содержится назидание: если вы недостаточно скрупулёзно ищете альтернативные объяснения имеющихся свидетельств, то свидетельство лишь подтвердит то, во что вы уже верите. Учёные часто упускают это из вида, что объясняет, почему такое большое количество научных заявлений оказываются неверны. Байесианцы утверждают, что их методы могут помочь учёным преодолеть склонность к поискам подтверждающих их веру фактов и выдавать больше надёжных результатов.

Список литературы

[1] Звягин Л.С. Итерационные и неитеративные методы Монте-Карло как актуальные вычислительные методы байесовского анализа// Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям. 2017. Т. 1. С. 39-44.

[2] Звягин Л.С. Байесовские интеллектуальные технологии – инновационный метод анализа в условиях неопределённости// Отраслевые аспекты технических наук. 2011. № 11. С. 13-19.

[3] Красоткина О.В., Попов В.А., Нгуен Т.Ч., Моттль В.В. Байесовский подход к оцениванию факторов риска в анализе продолжительности жизни // Известия ТулГУ. Технические науки. 2013. №2.

[4] Байесовский подход к теории вероятностей. Примеры байесовских рассуждений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.machinelearning.ru дата обращения 05.04.2018

[5] Муромцев Д. Ю., Орлова Л. П., Козлов А. И. Принятие решений с использованием байесовского подхода и экспертных оценок // Вестник ТГТУ. 2003. №1. URL: http://cyberleninka.ru/article/n/prinyatie-resheniy-s-ispolzovaniem-bayesovskogo-podhoda-i-ekspertnyh-otsenok (дата обращения: 08.04.2018).