Динамика работы механизма привода продольной подачи металлорежущего станка

Е. Н. Каширская[1], В. А. Холопов[2], Е. В. Курнасов[3], А. С. Сигов[4]
Московский технологический университет (МИРЭА)
[1]kashi@list.ru, [2]holopov@gmail.com, [3]kurnasov@mirea.ru, [4]sigov@mirea.ru

***Аннотация*. Оптимизация управления промышленными киберфизическими системами может быть проведена на основе моделирования поведения составляющих системы, в том числе рассматриваемой в настоящей работе модели механизма привода подачи металлорежущего станка. Деформация ходового винта привода подачи рассчитывается различными методами с разной степенью абстрагирования. Наиболее точной является предложенная модель стержня с распределенной массой под действием перемещающейся нагрузки. Учет полученной зависимости деформации ходового винта от параметров технологического процесса может обеспечить повышение геометрической точности и производительности изготовления деталей без существенного увеличения износа металлорежущего станка.**

Ключевые слова: математический анализ; динамическая модель; технология машиностроения; привод подачи; процесс резания; управление точностью; обработка материалов резанием; погрешность; колебательный процесс

I. Введение

Обеспечение заданной точности изготовления деталей при механической обработке зависит от множества факторов [1–3], часть из которых переменна, а часть должна оставаться неизменной в процессе резания. Требуемая точность обработки материалов резанием может быть достигнута при соблюдении заданных режимов [4, 5]. При этом большое значение имеет соблюдение постоянства параметров упругой системы металлорежущего станка [6–8] и, в первую очередь, обеспечение неизменной жесткости механизма подачи, реализованного посредством ходового винта.

В приводе подач металлорежущих станков ходовой винт стола можно представить в виде схемы, показанной на рис. 1.

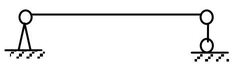

Рис. 1. Схема ходового винта

Будем решать задачу обеспечения постоянства жесткости механизма подачи, используя возможность управления параметрами режимов резания.

Работа выполнена в рамках прикладных научных исследований и экспериментальных разработок (ПНИЭР) по заказу Министерства образования и науки РФ (уникальный идентификатор ПНИЭР RFMEFI58016X0008).

II. Статическое решение

Представим ходовой винт стола стержнем с сосредоточенной массой (рис. 2).

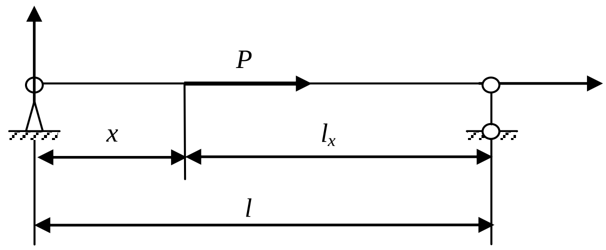

Рис. 2. Схема ходового винта с приложенной нагрузкой

Абсолютное удлинение стержня под действием продольной силы $P = const$:

$$\Delta = Pl_x/EF, \text{ м},$$

где E – модуль упругости материала стержня, Н/м^2; F – площадь поперечного сечения стержня, м^2; $l_x = l\text{-}x$ – сжимаемая длинна стержня, мм; l – полная длина стержня, мм; $x = V_s\tau$ – координата точи приложения силы, мм; τ – время, мин, V_s – скорость подачи.

Относительное удлинение: $\varepsilon = \Delta/l_x$.

Податливость стержня: $\delta = \Delta/P = l_x/EF$, мм/Н.

Жесткость стержня:

$$c = P/\Delta = EF/l_x = EF/l–x = EF/l–V_s\tau, \text{ Н/мм},$$

где $V_s = S\cdot n$ – скорость продольной подачи, мм/мин; n – частота вращения шпинделя, об/мин; S – продольная подача, мм/об.

Положив жесткость $c = const$, приходим к $V_s = const$, то есть обеспечить постоянство жесткости ходового винта за счет изменения скорости подачи невозможно, следовательно, статическими методами задача не решается.

III. Кинематическое решение

Пусть $P=var$, например, предположим, что $P=C_pt^xS^y(HB)^z$, как это принято в теории резания, где C_p – коэффициент пропорциональности; HB – твердость обрабатываемого материала; x, y, z – показатели степени.

Абсолютное удлинение стержня: $\Delta = Pl_x/EF = P(l–x)/EF$.

Положив Δ = *const*, так как только при этом условии можно обеспечить жесткость c = const, и обозначив

$$S^y(l - l_x) = S^y(l - Sn\tau) = A = \text{const}, \qquad (1)$$

то есть $A = C_p t^x (HB)^z/EF = S^{y+1}(l/S - n\tau)$,

получим $(y + 1)\ln S + \ln(l/S - n\tau)$.

Для обеспечения постоянства параметра A нужно исследовать выражение (1) на экстремум: $(d/d\tau)\, S^y(l - Sn\tau) = 0$, то есть

$$\dot{S}\left(yl-\left(y-1\right)Sn\tau\right)-S^2\left(\dot{n}\tau+n\right)=0 \qquad (2)$$

При постоянной величине подачи S = *const*, $\dot{S}=0$, уравнение (2) принимает вид: $\dot{n}\tau+n=0$.

Его решение: $n = C/\tau$,

где C – произвольная постоянная интегрирования.

При $\tau = 0$ значение n будет стремиться к бесконечности, что противоречит физическому смыслу задачи. Решить задачу при постоянстве скорости подачи невозможно.

При постоянной частоте вращения n = *const*, $\dot{n}=0$, уравнение (2) принимает вид:

$$\dot{S}\left(yl-\left(y+1\right)Sn\tau\right)-S^2n=0.$$

Это уравнение не имеет аналитического решения, но его можно решить численно.

Начальные условия: $S = S_0$ при $\tau = 0$. Необходимо подобрать закон изменения подачи S так, чтобы коэффициент при $\dot{S}$ оказался равен нулю: $yl = (y+1)S_n\tau$. Достигается это при значении подачи $S = yl/((y+1)n\tau)$.

Это решение требует непрерывного уменьшения подачи в процессе обработки заготовки, что технологически нас не устраивает.

При изменении подачи в виде функции, обратно пропорциональной времени, решение уравнения (2) ищем в виде $S = a/\tau$, где a = *const*. Уравнение (2) принимает вид: $a\dot{n}\tau = yan - yl$. Его решение: $n = (C\tau^y + l)/a$. Значения параметров a и C найдем из начальных условий.

Начальные условия: при $\tau = \tau_0$ $S = S_0$, $n = n_0$, откуда $a = S_0\tau_0$, $C = (S_0 n_0\tau_0 - l)/\tau_0^y$.

$$\begin{cases} n=\dfrac{1}{S_0\tau_0}\left(\left(S_0n_0\tau_0-l\right)\left(\dfrac{\tau}{\tau_0}\right)^y+l\right). \\ \tau\ge\tau_0, \quad S=\dfrac{S_0\tau_0}{\tau} \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $\tau = 0$ подача стремится к бесконечности, следовательно, такой метод решения не годится. Решить задачу кинематически невозможно.

IV. Динамическое решение

В самом простом варианте рассмотрим ходовой винт стола как одномассовую систему:

$$m(d^2x/d\tau) + \lambda(dx/d\tau) + xEF/(l - V_s\tau) = 0, \qquad (3)$$

где m – масса винта, кг; λ – коэффициент демпфирования, кг/с.

Будем искать решение в виде $x = ze^{-k\tau}$.

Получаем характеристическое уравнение $mk^2 - \lambda k + EF/(l - V_s\tau) = 0$. Это квадратное (относительно k) уравнение имеет дискриминант $D = \lambda^2 - 4mEF/(l - V_s\tau)$. Значение $D = 0$ определяет границу между периодическим и непериодическим решениями. Корень уравнения $D = 0$ имеет следующее значение: $V_s = (\lambda^2 l - 4EFm)/\lambda^2\tau$. Фактически это решение совпадает с полученным кинематически и нас не удовлетворяет. Значит, $D\neq 0$.

При $D > 0$ получаем апериодический процесс. Колебания массы быстро затухают и перестают влиять на изменения V_s. Естественно, такая ситуация нас не интересует.

При $D < 0$ корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta,$$

где $\alpha=\dfrac{\lambda}{2m}$, $\beta=\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{4m^2}-\dfrac{EF}{m\left(l-V_s\tau\right)}}$.

Решением уравнения (3) является выражение $x=e^{\alpha\tau}\left(C_1\sin\beta\tau+C_2\cos\beta\tau\right)$. Так как $\alpha > 0$, функция $x(\tau)$ является возрастающей. В этом случае для равенства нулю функции $x(\tau)$ необходимо приравнять нулю выражение $C_1\sin\beta\tau + C_2\cos\beta\tau$: $C_1\sin\beta\tau + C_2\cos\beta\tau = 0$.

Отсюда следует: $\mathrm{tg}\beta\tau = C_2/(C_1 = C_3 = const)$, и, следовательно, $\beta\tau = \mathrm{arctg} C_3 = C_4 = const$,

где $C_4=\tau\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{4m^2}-\dfrac{EF}{m\left(l-V_s\tau\right)}}$

или $V_s=\dfrac{4m\left(EF\tau^2+C_4ml\right)}{\tau\left(4C_4m^2-\lambda^2\tau^2\right)}$.

Значение коэффициента C_4 можно найти из начальных условий. Указанный закон изменения V_s не обеспечивает условие $x(\tau) = 0$.

Рассмотрим систему с распределёнными параметрами. Дифференциальное уравнение продольных колебаний упругого стержня (рис. 1) имеет следующий вид:

$$m_0 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \tau^2} = EF\,\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + P\cdot\delta\left(x - V_s\tau\right), \tag{4}$$

где m_0 – распределенная по длине масса стержня, кг/мм, $\delta(x\text{-}V_s\tau)$ – дельта-функция Дирака, 1/мм.

Будем искать решение в виде ряда:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(\tau)\cdot\varphi_i(x)\cdot$$

В качестве $\varphi_i(x)$ возьмем собственные функции свободных колебаний стержня:

$$\varphi_i(x) = \sin(\pi ix/2l),$$

где i – номер гармоники.

Разложим дельта-функцию $\delta(x\text{–}V_s\tau)$ в ряд по собственным формам:

$$\delta\left(x - V_s\tau\right) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \sin\frac{\pi ix}{2l}\cdot$$

Теперь уравнение (4) принимает вид:

$$m_0 \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \tau^2} = EF\cdot\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2} + P\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{l}\sin\frac{\pi iV_s\tau}{2l}\cdot \tag{5}$$

Ищем решение этого уравнения в виде $\Delta = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(\tau)\cdot\sin\frac{\pi ix}{2l}$, что приводит уравнение (5) к виду (6):

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{\infty} m_0\,\ddot{f}_i(\tau)\cdot\sin\frac{\pi ix}{2l} = \\ = \sum_{i=1}^{\infty}\left(-EF\cdot\left(\frac{\pi i}{2l}\right)^2\cdot f_i(\tau) + P\cdot\frac{2}{l}\cdot\sin\frac{\pi iV_s\tau}{2l}\right)\cdot\sin\frac{\pi ix}{2l}.\end{gathered} \tag{6}$$

Для отдельной гармоники:

$$m_0\cdot\ddot{f}_i(\tau) + EF\cdot\left(\frac{\pi i}{2l}\right)^2\cdot f_i(\tau) = \frac{2}{l}\cdot P\cdot\sin\frac{\pi iV_s\tau}{2l}\cdot \tag{7}$$

Введем обозначения:

$$\frac{EF}{m_0}\cdot\left(\frac{\pi i}{2l}\right)^2 = k_i^2, \qquad \frac{2P}{m_0 l} = A, \qquad \frac{\pi iV_s}{2l} = \omega_i\cdot$$

Уравнение (7) – дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение имеет вид:

$$f_i(\tau) = C_1\cos k_i\,\tau + C_2\sin k_i\tau + \frac{A}{k_i^2 - \omega_i^2}\sin\omega_i\tau\cdot \tag{8}$$

С учетом начальных условий $\tau = 0$ $f(\tau) = 0$, $\dot{f}(\tau) = 0$ получено решение уравнения (8):

$$f_i(\tau) = \frac{A}{k_i^2 - \omega_i^2}\left(\sin\omega_i\tau - \omega_i\sin k_i\tau\right)\cdot$$

Решение уравнения (6) выглядит следующим образом:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{8Pl}{(\pi i)^2\left(EF - m_0V_s^2\right)}\left(\sin\frac{\pi iV_s\tau}{2l} - \frac{\pi iV_s}{2l}\sin\frac{\pi i\,\tau}{2l}\sqrt{\frac{EF}{m_0}}\right).$$

и тогда решение уравнения (4) будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\Delta = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{8Pl}{(\pi i)^2\left(EF - m_0V_s^2\right)}\left(\sin\frac{\pi iV_s\tau}{2l} - \right. \\ \left. -\frac{\pi iV_s}{2l}\sin\frac{\pi i\,\tau}{2l}\sqrt{\frac{EF}{m_0}}\right)\sin\frac{\pi ix}{2l}.\end{gathered} \tag{9}$$

Теперь, когда решение получено, надо найти условия, при которых, независимо от времени, будет соблюдаться равенство

$$\Delta = P(l - x)/EF. \tag{10}$$

Попытаемся решить уравнение (10) взяв только первую гармоническую составляющую:

$$\Delta_1 = \frac{8Pl}{\pi^2\left(EF - m_0V_s^2\right)}\left(\sin\frac{\pi V_s\tau}{2l} - \frac{\pi V_s}{2l}\sin\frac{\pi\tau}{2l}\sqrt{\frac{EF}{m_0}}\right)\sin\frac{\pi x}{2l}.$$

Получим следующее уравнение:

$$\begin{gathered}\frac{8l}{\pi^2\left(EF - m_0V_s^2\right)}\left(\sin\frac{\pi V_s\tau}{2l} - \frac{\pi V_s}{2l}\sin\frac{\pi\tau}{2l}\sqrt{\frac{EF}{m_0}}\right)\sin\frac{\pi x}{2l} = \\ = \frac{l - V_s\tau}{EF}.\end{gathered}$$

Это трансцендентное уравнение аналитически не решается, но его вид свидетельствует о том, что, так как функция (9) зависит от времени, добиться постоянства жесткости ходового винта стола невозможно.

Теперь рассмотрим винт как стержень с бегущей вдоль него нагрузкой, которая вызывает вынужденные продольные колебания.

Время действия нагрузки на стержень (рис. 3) равно времени прохождения суппорта вдоль длины винта: $\tau_0 = l/V_s$.

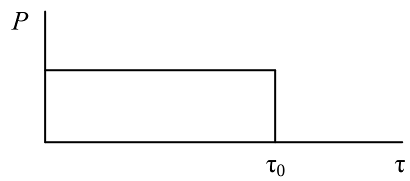

Рис. 3. Нагрузка на винт

Действующую на винт нагрузку можно представить как сумму двух сил: $P = P_1 + P_2$ (рис. 4).

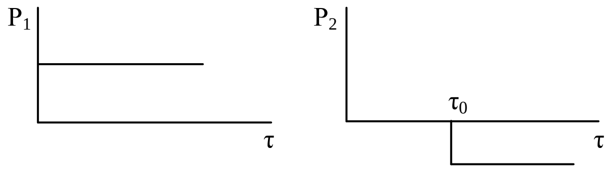

Рис. 4. Составляющие нагрузки на ходовой винт

При $\tau \le \tau_0$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8Pl}{(\pi i)^2 \left(EF - m_0 V_s^2\right)} \times \left(\sin\frac{\pi i V_s \tau}{2l} - \frac{\pi i V_s}{2l} \sin\frac{\pi i \tau}{2l} \sqrt{\frac{EF}{m_0}} \right) \times \sin\frac{\pi i V_s \tau}{2l} .$$

При $\tau > \tau_0$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8Pl}{(\pi i)^2 \left(EF - m_0 V_s^2\right)} \left(\left(\sin\frac{\pi i V_s \tau}{2l} - \frac{\pi i V_s}{2l} \sin\frac{\pi i \tau}{2l} \sqrt{\frac{EF}{m_0}} \right) \times \sin\frac{\pi i V_s \tau}{2l} - \left(\sin\frac{\pi i V_s (\tau - \tau_0)}{2l} - \frac{\pi i V_s}{2l} \sin\frac{\pi i \tau}{2l} \sqrt{\frac{EF}{m_0}} \right) \times \sin\frac{\pi i V_s (\tau - \tau_0)}{2l} \right),$$

где $\tau_0 = l/V_s$.

В качестве примера, для иллюстрации полученной зависимости деформации ходового винта от параметров процесса, на рис. 5 приведен график частной зависимости первой гармонической составляющей деформации винта от скорости подачи при l=1 м, d=30 мм, n=1500 об/мин.

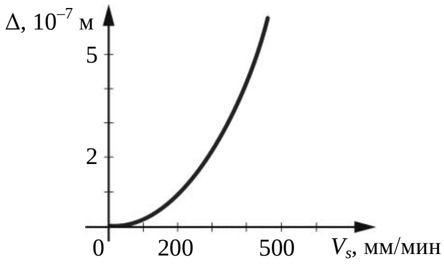

Рис. 5. Зависимость удлинения ходового винта от подачи

V. Заключение

Проведенное исследование показывает, что деформация винта при прецизионной обработке сказывается на геометрической точности, особенно в условиях высокоскоростного фрезерования с увеличенной подачей, следовательно, нужно учитывать динамические модели составляющих узлов киберфизической системы в управлении процессом резания для обеспечения требуемой точности.

Список литературы

[1] Комаров В.А., Плешаков В.В. Инновационные технологии на базе импульсной теории резания // Вестник МГТУ МИРЭА. 2015. Т. 2. № 3 (8). С. 123-130.

[2] Додонов В.В. Повышение точности обработки на станках с числовым программным управлением // Инженерный журнал: наука и инновации. 2016. № 6 (54). С. 5.

[3] Kushnir A.P. Passage of pollutants through contactless seals with a motionless spindle // Russian Engineering Research. 2011. V. 31. No. 1. P. 53-55.

[4] Lizogub V.A. Influence of the design parameters of the lathe assemblies and the cutting regime on machining accuracy // Russian Engineering Research. 2007. V. 27. No. 6. P. 371-373.

[5] Kurnasov E.V. Creation of plastic zones and their cross sections in NC CAD equipment // Russian Engineering Research. 2009. V. 29. No. 2. P. 191-193.

[6] Lizogub V.A., Kashirskaya E.N. Assessing the pliability of a machine tool's faceplate and spindle flange // Russian Engineering Research. 2011. V. 31. No. 10. P. 1010-1012.

[7] Максаров В.В., Леонидов П.В. Моделирование и управление динамическими свойствами технологических систем // Записки Горного института. 2014. Т. 209. С. 71-77.

[8] Зуев В.В., Шмелева А.Г. Моделирование поведения материалов с переменными упругими свойствами при динамических нагрузках // Приборы. 2007. № 2. С. 49-51.