Расходимость алгоритмов динамической фильтрации

Е. В. Постников

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

evpost@nicetu.spb.ru

Аннотация. **Приводятся результаты аналитического исследования поведения смещений оценок и их ковариационных матриц дискретного обобщенного фильтра Калмана в условиях неопределенности моделей объекта и измерителя. Получено рекуррентное соотношение для оптимального коэффициента усиления фильтра, минимизирующего полную среднеквадратическую ошибку.**

Ключевые слова: динамическая фильтрация; дискретный адаптивный фильтр Калмана; априорная неопределенность модели; расходимость фильтра Калмана

I. Введение

За последние десятилетия метод динамической фильтрации Р. Калмана (фильтр Калмана–Бьюси) стал безусловным лидером среди алгоритмов цифровой обработки измерительной информации в информационно-измерительных системах различного назначения: инерциальной и радионавигации, автоматизации производственных технологических процессов, и, в особенности, обработки траекторных измерений [1]. Объясняется это тем, что метод имеет удобную вычислительную форму, хорошо приспособленную для реализации на ЭВМ, а вырабатываемые с его помощью оценки обладают рядом оптимальных свойств, например, минимальной дисперсией в классе линейных по измерениям несмещенных оценок.

Вместе с тем, метод динамической фильтрации унаследовал и ряд недостатков классического МНК: высокую чувствительность к неадекватности математической модели системы реальным условиям, неустойчивость к смещениям в средних измерительных шумов и другие. Все эти мешающие факторы приводят к тому, что вырабатываемые оценки не только могут терять свои оптимальные свойства, но и вообще расходится [2]. В этом случае фактические ошибки оценок начинают неконтролируемо расти, а расчетные ковариационные матрицы (КМ) перестают соответствовать фактическим.

В результате, каждый проектировщик системы обработки измерений вынужден адаптировать алгоритм фильтрации к тому набору мешающих параметров, который характерен конкретной прикладной задаче. Такая ситуация привела к появлению большого числа разнообразных адаптивных модификаций метода динамической фильтрации [3], направленных на поддержание его устойчивости при различных наборах мешающих параметров.

Все адаптивные модификации фильтра Калмана можно условно разделить на три направления. Первое направление адаптации реализует идентификационный подход, при котором все неопределенные параметры уравнений объекта и измерений тем или иным способом оцениваются в процессе обработки измерений.

Второе направление, называемое эвристическим, сводится, в конечном итоге, к повышению уровня шума в системе. Повышение уровня шума в уравнении объекта повышает степень доверия к текущим измерениям; повышение уровня шума в уравнении измерений повышает степень доверия к текущей экстраполированной оценке.

Третье направление – смешанное. В нем объединяются приемы как первого направления, так и второго. Все приемы адаптации фильтра успешно работают на практике, о чем свидетельствуют многочисленные публикации по конкретным реализациям адаптивных фильтров. Основной недостаток заключается в отсутствии универсальности предлагаемых реализаций.

В настоящей работе исследуется поведение смещений оценок и их КМ дискретного фильтра Калмана в условиях неопределенности моделей объекта и измерителя (проблема расходимости), а также выводится оптимальный коэффициент усиления (КУ) фильтра при возникновении расходимости.

II. Основная часть

Пусть объект описывается следующим уравнением состояния в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, q, t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где x – n-вектор состояния, который может включать, кроме фазовых переменных, еще и некоторые оцениваемые параметры модели объекта; $q = q(t)$ – r-вектор мешающих (неоцениваемых) параметров модели объекта; f – заданная n-вектор-функция; t – время.

Относительно начального состояния x_0 предполагается, что оно распределено по нормальному закону с параметрами

$$E\{x_0\} = \bar{x}_0, \quad \operatorname{cov}(x_0) = E\left\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\right\} = P_0.$$

Здесь символами $E\{\bullet\}$ и $\operatorname{cov}(\bullet)$ обозначены оператор математического ожидания и КМ соответственно.

Пусть известна номинальная траектория движения объекта $x_{ном} = x_{ном}(t)$ и номинальное значение вектора мешающих параметров $q_{ном}$ с отклонением от фактического значения $\delta q = q - q_{ном}$, распределенным по нормальному закону с математическим ожиданием $E\{\delta q(t_k)\} = \delta\bar{q}_k$ и КМ $\operatorname{cov}(\delta q(t_k)) = \Xi_k$.

Уравнение дискретных наблюдений имеет вид:

$$Z_k = h(x(t_k), u) + B_k \xi + v_k, \tag{2}$$

где Z_k – m-вектор измерений; u – s-вектор постоянных мешающих (неоцениваемых) параметров уравнения наблюдения; ξ – l-вектор постоянных оцениваемых систематических погрешностей измерений; B_k – известная $(m \times l)$ матрица; v_k – нормальный регулярный шум измерений с $E\{v_k\} = 0$ и ковариацией $\operatorname{cov}(v_k, v_j) = R_k \delta_{kj}$, где R_k – заданная положительно определенная матрица, а δ_{kj} – символ Кронекера. Будем считать, что известно номинальное значение $u_{ном}$ вектора мешающих параметров, а распределение отклонения $\delta u = u - u_{ном}$ фактического значения от номинального нормально с параметрами $E\{\delta u\} = \bar{u}$ и $\operatorname{cov}(\delta u) = P_u$.

Пусть процедура обработки измерительной информации построена по алгоритму фильтра Калмана [2]. При этом векторы x и ξ оцениваются; мешающие параметры q и u не оцениваются, а в уравнениях (1) и (2) используются лишь их номинальные значения. Требуется определить фактическую точность оценки $\hat{x}$ вектора состояния, обеспечиваемую алгоритмом обработки измерений с учетом влияния мешающих параметров. Отметим, что под точностью вектора оценки мы будем понимать фактические среднеквадратические (СК) отклонения координат вектора оценки, получаемые из фактической КМ оценки и математические ожидания (средние, смещения) отклонений оценки. В свою очередь, расчетная точность оценки характеризуется СК отклонениями координат вектора оценки, получаемыми в алгоритме обработки как корни квадратные из диагональных элементов расчетной КМ.

Проведем линеаризацию в приращениях уравнений состояния (1) и наблюдения (2) в окрестности номинальной траектории, после чего в уравнении состояния перейдем к дискретному времени. Кроме того, объединим оцениваемые параметры в один вектор состояния. Тогда получим новую дискретную модель системы в виде:

$$X_k = \Phi_{k,k-1} X_{k-1} + G_{k,k-1} \delta q_{k-1} + \omega_{k-1}, \tag{3}$$

$$z_k = H_k X_k + A_k \delta u + v_k. \tag{4}$$

Обработка поступающих измерений производится в соответствии с уравнениями традиционного фильтра Калмана [2] для модели без мешающих параметров с теми же начальными условиями:

Матрица $\hat{P}(k/k)$ представляет собой расчетную КМ оценки $\hat{X}_{k/k}$, которую вырабатывает стандартный фильтр Калмана при обработке поступающих измерений. Расчетные оценки точности определения оцениваемых параметров теперь могут быть вычислены с использованием ковариационного канала фильтра (7), не зависящего от реальных измерений при наличии номинальной траектории. Однако фактические оценки будут отличаться от расчетных вследствие влияния мешающих параметров модели системы (3)–(4), которые не учитываются в стандартной модели и, соответственно, не входят в уравнения стандартного фильтра.

Для учета влияния мешающих параметров на фактическую точность оценивания, введем характеристики отклонений оценок состояния стандартного фильтра [3]. Обозначим сами отклонения оценок как

$$\delta(k/k-1) = X_k - \hat{X}_{k/k-1}, \qquad \delta(k/k) = X_k - \hat{X}_{k/k};$$

соответственно их средние, то есть смещения, как

$$\mu(k/k-1) = E\left\{X_k - \hat{X}_{k/k-1}\right\};\ \mu(k/k) = E\left\{X_k - \hat{X}_{k/k}\right\}.$$

Тогда фактические КМ оценок $\hat{X}_{k/k-1}$ и $\hat{X}_{k/k}$ есть

$$P(k/k) = E\left\{\left[\delta(k/k) - \mu(k/k)\right]\left[\delta(k/k) - \mu(k/k)\right]^T\right\},$$

$$P(k/k-1) = E\Big\{ \left[\delta(k/k-1) - \mu(k/k-1)\right] \times \\ \times \left[\delta(k/k-1) - \mu(k/k-1)\right]^T \Big\}.$$

В [3] были получены основные соотношения, описывающие эволюцию смещений оценок состояния стандартного фильтра и фактических КМ этих оценок:

$$\mu(k/k-1)=\Phi_{k,k-1}\mu(k-1/k-1)+G_{k,k-1}\delta\bar{q}_k, \quad (5)$$

$$\mu(k/k)=(I-K_kH_k)\mu(k/k-1)-K_kA_k\bar{u}, \quad (6)$$

$$\begin{gathered}P(k/k-1)=\Phi_{k,k-1}P(k-1/k-1)\Phi_{k,k-1}^T+\\+G_{k,k-1}\Xi_{k-1}G_{k,k-1}^T+Q_{k-1}\end{gathered}, \quad (7)$$

$$\begin{gathered}P(k/k)=(I-K_kH_k)P(k/k-1)(I-K_kH_k)^T+\\+K_k\left[R_k+A_k(P_u-\delta\bar{u}\delta\bar{u}^T)A_k^T\right]K_k^T-\\-(I-K_kH_k)\Psi(k/k-1)A_k^TK_k^T-\\-K_kA_k\Psi^T(k/k-1)(I-K_kH_k)^T,\end{gathered} \quad (8)$$

$$\begin{gathered}\Psi(k/k-1)=E\left\{\left[\delta(k/k-1)-\mu(k/k-1)\right]\left(u-\bar{u}\right)^T\right\}=\\=\Phi_{k,k-1}\Psi(k-1/k-1),\end{gathered} \quad (9)$$

$$\begin{gathered}\Psi(k/k)=E\left\{\left[\delta(k/k)-\mu(k/k)\right]\left(u-\bar{u}\right)^T\right\}=\\=(I-K_kH_k)\Psi(k/k-1)-K_kA_kP_u,\end{gathered} \quad (10)$$

с начальными условиями $\mu(0/0)=\mu_0$, $\Psi(0/0)=0, \quad P(0/0)=P_0$.

Анализ полученных соотношений (5) – (10) показывает, что при нулевых значениях средних μ_0, $\delta\bar{q}_k$ и $\bar{u}$ оценки фильтрации остаются несмещенными, так как из (6) и (7) следует, что $\mu(k/k-1)=\mu(k/k)=0$. Смещение $\mu(k/k)\neq 0$ в оценках появляется в данном случае только при ненулевом начальном смещении $\mu(0/0)\neq 0$.

Иначе обстоит дело в случае наличия мешающих параметров. При ненулевых значениях средних $\delta\bar{q}_k$ и $\bar{u}$ появляются ненулевые смещения $\mu(k/k)$ даже при отсутствии начального смещения $\left(\mu(0/0)=0\right)$.

Помимо появления смещений в оценках состояния фильтра, наличие мешающих параметров приводит к появлению расхождения между расчетными и фактическими КМ оценок в соответствии с уравнениями (7)-(10). В свою очередь, отличия между расчетной и фактической КМ приводит к тому, что КУ K_k стандартного фильтра перестает соответствовать оптимальному значению, обеспечивающему минимум дисперсии ошибки оценки.

Подводя итог проведенному анализу фактической точности получаемых оценок, отметим, что для правильной оценки точности следует перейти от КМ к матрице полной СК ошибки

$$P_{ср.кв.}(k)=P(k/k)+\mu(k/k)\mu^T(k/k). \quad (11)$$

Корни квадратные из диагональных элементов матрицы (11) в большей степени будут характеризовать фактическую СК ошибку получаемых оценок.

Варьирование значений характеристик мешающих параметров $\delta\bar{q}_k$, Ξ_k, $\bar{u}$, P_u позволяет моделировать различные отклонения мешающих параметров от своих номинальных значений. Это дает возможность в полной мере исследовать их влияние на точность оценивания параметров состояния наблюдаемого объекта. После определения фактического набора мешающих параметров в уравнениях (3)-(4) и задания их статистических характеристик, расчет оценок точности сводится к вычислениям по рекуррентным соотношениям (5)-(10) и нахождению либо смещений оценок $\mu(k/k)$ и фактических КМ $P(k/k)$, либо матрицы полной СК ошибки (11).

При условии отсутствия мешающих параметров оценка, вырабатываемая фильтром Калмана, удовлетворяет условию минимума СК ошибки. Учитывая факт несмещенности оценки $\hat{X}(k/k)$, в этом случае можно записать, что такая оценка обеспечивает минимизацию критерия

$$J=E\left\{(X_k-\hat{X}_{k/k})^T(X_k-\hat{X}_{k/k})\right\}=trace\left(\hat{P}(k/k)\right), \quad (12)$$

то есть минимизирует дисперсию ошибки оценки.

При наличии мешающих параметров расчетная $\hat{P}$ и фактическая P КМ оценки перестают соответствовать друг другу. В [4] (теорема 2) было показано, что для оптимальной, в смысле критерия (12), коррекции поступающего измерения при вычислении КУ фильтра расчетная КМ должна равняться фактической. Можно доказать, что чем ближе (в смысле положительной полуопределенности) мы приблизим расчетную КМ к фактической, тем ближе к оптимальной будет коррекция очередного измерения.

Для того чтобы правильно характеризовать точность оценок фильтрации при наличии мешающих параметров, следует рассматривать матрицу $P_{ср.кв.}(k/k)$ полной СК ошибки (11).

Получим представление оптимального КУ фильтра Калмана, минимизирующего след матрицы $P_{ср.кв.}(k/k)$ (СК ошибку) при наличии смещения оценки.

Пусть $\hat{X}_{k/j}^0$ обозначает несмещенную оценку состояния X_k, полученную по измерениям до момента j включительно. Таким образом $E\left\{\hat{X}_{k/j}^0\right\}=E\left\{X_k\right\}$. Тогда

$$\hat{X}_{k/k} = \hat{X}^0_{k/k} - \mu(k/k),\ \hat{X}_{k/k-1} = \hat{X}^0_{k/k-1} - \mu(k/k-1),$$

$$\nu_k = \nu^0_k + \bar{\nu}_k,$$

где ν^0_k - случайный вектор с нулевым средним, а $\bar{\nu}_k = E\{\nu_k\}$.

Уравнение коррекции оценки традиционного фильтра $\hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k \nu_k$ разбивается на два уравнения:

$\hat{X}^0_{k/k} = \hat{X}^0_{k/k-1} + K_k \nu^0_k$, и $\mu(k/k) = \mu(k/k-1) - K_k \bar{\nu}_k$.

При этом $\nu^0_k = H_k(X_k - \hat{X}^0_{k/k-1}) + \nu_k$, а

$$\begin{aligned}&\mu(k/k)\mu^T(k/k) = \mu(k/k-1)\mu^T(k/k-1) - \\ &-\mu(k/k-1)\bar{\nu}^T_k K^T_k - K_k \bar{\nu}_k \mu^T(k/k-1) + K_k \bar{\nu}_k \bar{\nu}^T_k K^T_k.\end{aligned} \tag{13}$$

Теперь будем искать такую величину КУ K^*_k, которая минимизирует $trP_{ср.кв.}(k/k)$. С учетом (12) и (13) можно записать:

$$\begin{aligned}&\left.\frac{d\, trP_{ср.кв.}(k/k)}{d\ K_k}\right|_{K_k = K^*_k} = -2P(k/k-1)H^T_k + \\ &+2K^*_k\left(H_k P(k/k-1)H^T_k + R_k\right) - \\ &-2\mu(k/k-1)\mu^T(k/k-1)H^T_k - 2\mu(k/k-1)\delta u^T A^T_k + \\ &+2K^*_k\left(H_k\mu(k/k-1) + A_k\delta u\right)\times\left(H_k\mu(k/k-1) + A_k\delta u\right)^T = 0.\end{aligned}$$

Отсюда оптимальная величина КУ есть

$$\begin{aligned}K^*_k = &\Big\{\Big(P(k/k-1) + \mu(k/k-1)\mu^T(k/k-1)\Big)H^T_k + \\ &+\mu(k/k-1)\delta u^T A^T_k\Big\}\times \\ &\times\Big\{H_k\Big(P(k/k-1) + \mu(k/k-1)\mu^T(k/k-1)\Big)H^T_k + \\ &+R_k + H_k\mu(k/k-1)\delta u^T A^T_k + \\ &+A_k\delta u\mu^T(k/k-1)H^T_k + A_k\delta u\delta u^T A^T_k\Big\}^{-1}.\end{aligned} \tag{14}$$

Выражение (14) для оптимального КУ фильтра и объясняет положительный эффект от увеличения КМ экстраполированной оценки для предотвращения расходимости процесса фильтрации. Если считать, что мешающий параметр уравнения наблюдения отсутствует ($\delta u = 0$), то оптимальный КУ примет вид:

$$\begin{aligned}&K^*_k = \Big(P(k/k-1) + \mu(k/k-1)\mu^T(k/k-1)\Big)H^T_k \times \\ &\times\Big\{H_k\Big(P(k/k-1) + \mu(k/k-1)\mu^T(k/k-1)\Big)H^T_k + R_k\Big\}^{-1},\end{aligned} \tag{15}$$

который совпадает с выражением для КУ фильтра Калмана, в котором осуществлен переход от КМ экстраполированной оценки к матрице полной СК ошибки. Таким образом, оптимальный фиктивный шум состояния для предотвращения расходимости должен иметь интенсивность, соответствующую величине смещения экстраполированной оценки, а ковариация фиктивного шума должна соответствовать квадрату смещения. Если же мешающий параметр $\delta u \neq 0$, то добавление фиктивного шума может оказаться не эффективным в силу неоптимальности КУ фильтра.

III. Заключение

Таким образом, если уравнения состояния и наблюдения содержат неизвестные мешающие параметры, нарушающие адекватность математической модели системы, то фактическая КМ оценки перестает соответствовать расчетной. На основании проведенного анализа получено выражение для оптимального КУ фильтра, минимизирующего полную СК ошибку. Структура оптимального КУ объяснят положительный эффект от введения в уравнение состояния дополнительного шума, как средства борьбы с расходимостью процесса фильтрации.

Список литературы

[1] Коновалов А.А. Основы траекторной обработки радиолокационной информации: в 2 ч. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014. Ч.2. 180 с.

[2] Jazvinsky A.H. Stochastic processis and filtering theory. N.Y.: Acad. Press, 1970.

[3] Постников Е.В. Рекуррентная фильтрация при наличии смещений в оценках. Изв. ЭТУ, вып. 472, 1994. С. 54-59.

[4] Постников Е.В. Априорные оценки точности определения параметров движения. Труды IV международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO’05, Москва, 2005, с. 1865-1874.