

# Синтез расширенного фильтра Калмана для оценки переменных состояния нелинейных электромеханических объектов

Ч. Х. Фьонг<sup>1</sup>, М. П. Белов<sup>2</sup>, Н. В. Лань<sup>3</sup>

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет  
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

<sup>1</sup>tranhuuphuong83@gmail.com, <sup>2</sup>milesa58@mail.ru,

<sup>3</sup>lanhnavy@gmail.com

Н. Д. Тхань

Вьетнамский государственный технический  
университет им. Лэ Куй Дона  
thanhd37565533@gmail.com

**Аннотация.** Рассматривается подход по восстановлению неизмеряемых координат вектора переменных состояния в системе управления следящими электроприводами наведения крупного радиотелескопа. Описывается метод синтеза дискретного расширенного фильтра Калмана на основе последовательного рекурсивного алгоритма для нелинейных объектов. Результаты математического моделирования выполнены в программной среде MATLAB/Simulink.

**Ключевые слова:** следящий электропривод; крупный радиотелескоп; расширенный фильтр Калмана; оптимальный наблюдатель состояния

## I. ВВЕДЕНИЕ

Одной из особенностей крупных радиотелескопов (РТ), как сложных нелинейных электромеханических объектов управления, является ограниченная жесткость несущей конструкции главного зеркала, в результате чего его механическую часть можно рассматривать как многомассовую систему с упругими связями. Конечная жесткость его конструкции вызывает упругие колебания, которые значительно влияют на динамические характеристики автоматизированных систем управления электроприводами (АСУ ЭП) объекта. Эффективным подходом к минимизации негативного влияния упругих свойств конструкции на точность слежения является применение современных законов управления с обратными связями переменных состояния. Применительно к электроприводам крупного РТ при реализации закона управления с прогнозирующими моделями [1] необходима информация в каждый момент времени от всех координат вектора переменных состояния. Однако, измерение всех переменных состояния, которыми необходимо управлять, не всегда возможно. В этих случаях наиболее целесообразным представляется построение АСУ ЭП крупного РТ с использованием наблюдателя переменных состояния. В данном докладе рассматривается оптимальный наблюдатель, относящийся к дискретному расширенному фильтру Калмана (ДРФК),

так как его можно применить к нелинейным электромеханическим объектам.

## II. НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ АСУ ЭП РАДИОТЕЛЕСКОПА

Несмотря на то, что реальная электромеханическая конструкция крупного РТ представляет сложную многомассовую систему, ее можно аппроксимировать и упростить до четырехмассовой разветвленной упруго-вязкой системы [2]. Следует заметить, что в электроприводах крупных РТ существуют такие нелинейности как зазоры в кинематической цепи между двигателями и вращающимися частями и моменты сухого трения в движущихся частях конструкции. Совокупность нелинейных факторов вызывает возникновение автоколебания в переходном процессе и статической ошибки слежения, которые недопустимы в системах управления прецизионными устройствами. При этом нелинейная модель электропривода РТ с учетом момента сухого трения может быть записана в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = J_{13}^{-1} (M_d - M_{21}); \\ \dot{M}_{21} = c_{213} (\omega_1 - \omega_2); \\ \dot{\omega}_2 = J_2^{-1} (M_{21} - M_{32} - M_{42} - M_{T2}); \\ \dot{M}_{32} = c_{32} (\omega_2 - \omega_3); \\ \dot{\omega}_3 = J_3^{-1} M_{32}; \\ \dot{M}_{42} = c_{42} (\omega_2 - \omega_4); \\ \dot{\omega}_4 = J_4^{-1} M_{42}; \\ M_d = 2k_{dT}^{-1} c_d u_{pc}; \\ M_{T2} = M_{f0} \tanh(\sigma \omega_2), \end{cases} \quad (1)$$

где первая масса – двигатель ( $J_{13}$ ), двухдвигательный привод заменен на эквивалентный однодвигательный;

вторая масса – платформа ( $J_2$ ); третья масса – главное параболическое зеркало ( $J_3$ ); четвертая масса – противовесы ( $J_4$ );  $M_d, M_{21}, M_{32}, M_{42}$  – моменты двигателя и упругих связей между массами соответственно;  $M_{т2}$  – момент сухого трения на второй массе (платформе), являющийся функцией скорости;  $M_{f0}$  – коэффициент момента кулоновского трения,  $M_{f0} = (0.1...0.3)M_d$ ;  $\sigma$  – положительный коэффициент, характеризующий наклон функции, который может быть свободно выбран;  $c_{213}, c_{32}, c_{42}$  – коэффициенты жесткости механической части;  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  – скорости каждой массы;  $c_d$  – конструктивный коэффициент двигателя;  $k_{дт}$  – коэффициент усиления пропорционального регулятора контура тока;  $u_{рс}$  – оптимальный управляющий сигнал на выходе прогнозирующего регулятора скорости.

Структурная схема следящей АСУ ЭП радиотелескопа по азимутальной оси представлена на рис. 1.

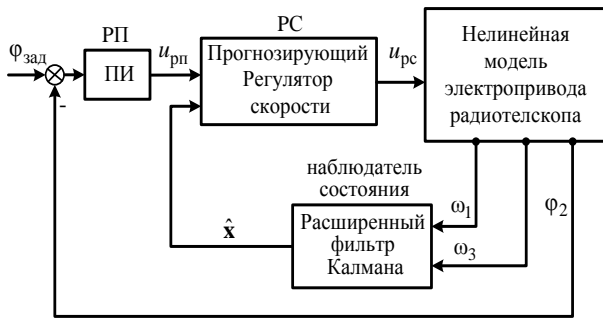


Рис. 1. Структурная схема следящей АСУ ЭП крупного РТ по азимутальной оси

На рис. 1 отрицательное влияние упругих свойств и моментов сухого трения на работу следящей АСУ ЭП радиотелескопа устраняется в контуре регулирования скорости (РС) подсистемы, синтезированной по закону управления с прогнозирующими моделями [1], замкнутой по вектору состояния с помощью наблюдателя на основе ДРФК. Внешним по отношению к контуру скорости является контур регулирования положения (РП), замкнутый по угловому положению платформы ( $\Phi_2$ ). В контуре положения используется пропорционально-интегральный (ПИ) регулятор, настроенный на оптимум по модулю. Выходной сигнал РП представляет собой сигнал задания скорости ( $u_{рс} = \omega_{зад}$ ). На входе РП сравниваются задающий сигнал ( $\Phi_{зад}$ ) и истинное значение углового положения ( $\Phi_2$ ), определяемого с использованием датчика положения на платформе.

### III. ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА НА ОСНОВЕ ДРФК

Рассмотрим решение задачи синтеза, используя алгоритм ДРФК с периодом дискретизации  $T_s$ . Предположим, что нелинейный объект (1) описывается дискретными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) + \mathbf{w}(k); \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{v}(k), \end{cases} \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}(k)$  – вектор переменных состояния объекта;  $\mathbf{u}(k)$  – вектор управляющих воздействий;  $\mathbf{y}(k)$  – вектор выходов;  $\mathbf{f}(\cdot)$ ,  $\mathbf{h}(\cdot)$  – нелинейные функции, являющиеся непрерывно дифференцируемыми;  $\mathbf{w}(k)$  – шумы типа «белого шума» состояния системы, представляющие собой Гауссовские случайные процессы с нулевым средним значением с диагональной матрицей ковариации  $\mathbf{Q}_H(k)$ ;  $\mathbf{v}(k)$  – шумы типа «белого шума» измерений, являющиеся Гауссовскими случайными процессами с нулевым средним значением с диагональной матрицей ковариации  $\mathbf{R}_H(k)$ .

Предполагается, что весовые ковариационные матрицы  $\mathbf{Q}_H(k)$ ,  $\mathbf{R}_H(k)$  известны и считаются взаимно независимыми, т. е.

$$\begin{cases} \mathbf{w}(k) \sim N(0, \mathbf{Q}_H(k)), \mathbf{Q}_H(k) \geq 0; \\ \mathbf{v}(k) \sim N(0, \mathbf{R}_H(k)), \mathbf{R}_H(k) > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Используя метод линеаризации, основанный на расширенных рядах Тейлора, нелинейный объект (2) может быть записан в форме приближенной линеаризованной модели состояния:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k); \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \end{cases} \quad (4)$$

где  $\mathbf{A}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*}$ ,  $\mathbf{B}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*}$ ,  $\mathbf{C}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*}$  – параметризованные матрицы с параметрами зависящими от состояния;  $\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*$  – векторы положения равновесия объекта.

Задача ДРФК заключается в нахождении оценки вектора переменных состояния  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ , которая минимизирует среднеквадратичную ошибку (СКО) функционала качества математического ожидания:

$$J = E \left\{ [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]^T \right\} \rightarrow \min. \quad (5)$$

ДРФК строится с использованием последовательного рекурсивного метода для оптимальной обработки случайных цифровых данных, минимизируя функционал качества (4). Задача синтеза алгоритма ДРФК состоит из двух отдельных шагов: *предсказание* и *коррекция* [3, 4]. На первом шаге (предсказание) используется оценка вектора состояния предыдущего момента времени для вычисления

оценки переменных состояния в текущий момент времени. Предусмотрена оценка состояния, называемая априорной оценкой состояния, поскольку не включает информацию о наблюдении в текущий момент времени. На втором шаге (коррекция) текущее априорное предсказание объединяется с текущей информацией наблюдения для уточнения и обновления оценки переменных состояния. Данная улучшенная оценка называется апостериорной оценкой состояния. Оптимальная оценка переменных состояния может быть получена с использованием многошаговой итерации следующих формул:

*Шаг 1 – предсказание:*

- априорная оценка вектора переменных состояния:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k); \quad (6)$$

- априорная оценка матрицы ковариации ошибок:

$$\mathbf{P}^-(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}^+(k-1)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{Q}_H(k). \quad (7)$$

*Шаг 2 – коррекция:*

- вектор коэффициентов усиления ДРФК:

$$\mathbf{L}(k) = \mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T(k) \left[ \mathbf{C}(k)\mathbf{P}^-(k)\mathbf{C}^T(k) + \mathbf{R}_H(k) \right]^{-1}; \quad (8)$$

- апостериорная оценка вектора переменных состояния:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{L}(k) [\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)]; \quad (9)$$

- апостериорная оценка матрицы ковариации ошибок:

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{L}(k)\mathbf{C}(k)]\mathbf{P}^-(k); \quad (10)$$

где  $\mathbf{I}$  – диагональная единичная матрица.

Вышеприведенные формулы обновленной оценки и ковариации справедливы для получения вектора оптимального коэффициента ДРФК (8). Применительно к исследуемому объекту (крупному радиотелескопу РТ-70), предполагается использование датчиков для измерения только угловых скоростей двигателя (первой массы) и главного зеркала (третьей массы), так как для восстановления не измеряемых переменных вектора состояния используется оптимальный наблюдатель пониженной размерности [2]. Управляющим воздействием является сигнал угловой скорости вращения двигателя, с введением обратной связи по ошибке оценивания угловой скорости третьей массы (главного зеркала) радиотелескопа. При этом вектор оцениваемых переменных состояния, соответствующий формуле (6), имеет вид:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = [\hat{M}_{21} \quad \hat{\omega}_2 \quad \hat{M}_{32} \quad \hat{\omega}_3 \quad \hat{M}_{42} \quad \hat{\omega}_4]^T.$$

Из уравнений (6)–(10) могут быть записаны дискретные векторы и матрицы для ДРФК:

$$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} 1 & -T_s c_{213} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_s J_2^{-1} & a_{22} & -T_s J_2^{-1} & 0 & -T_s J_2^{-1} & 0 \\ 0 & T_s c_{32} & 1 & -T_s c_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_s J_3^{-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & T_s c_{42} & 0 & 0 & 1 & T_s c_{42} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -T_s J_4^{-1} & 1 \end{bmatrix};$$

$$a_{22} = 1 - T_s J_2^{-1} M_{f0} \sigma (1 - \tanh^2(\sigma \omega_2));$$

$$\mathbf{B}(k) = [T_s c_{213} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T;$$

$$\mathbf{C}(k) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]; \quad \mathbf{u}(k) = \omega_1; \quad \mathbf{y}(k) = \omega_3;$$

$$\mathbf{Q}_H = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6); \quad \mathbf{R}_H = [\eta];$$

$$\mathbf{L}(k) = [l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4 \quad l_5 \quad l_6]^T.$$

Отсюда получим оценку вектора переменных состояния, вычисленную следующим образом:

$$\begin{cases} \hat{M}_{21}(k|k) = \hat{M}_{21}(k|k-1) + l_1(\omega_3(k|k) - \hat{\omega}_3(k|k-1)); \\ \hat{\omega}_2(k|k) = \hat{\omega}_2(k|k-1) + l_2(\omega_3(k|k) - \hat{\omega}_3(k|k-1)); \\ \hat{M}_{32}(k|k) = \hat{M}_{32}(k|k-1) + l_3(\omega_3(k|k) - \hat{\omega}_3(k|k-1)); \\ \hat{\omega}_3(k|k) = \hat{\omega}_3(k|k-1) + l_4(\omega_3(k|k) - \hat{\omega}_3(k|k-1)); \\ \hat{M}_{42}(k|k) = \hat{M}_{42}(k|k-1) + l_5(\omega_3(k|k) - \hat{\omega}_3(k|k-1)); \\ \hat{\omega}_4(k|k) = \hat{\omega}_4(k|k-1) + l_6(\omega_3(k|k) - \hat{\omega}_3(k|k-1)). \end{cases} \quad (11)$$

#### IV. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование работы наблюдателя состояния ДРФК выполнено в среде MATLAB/Simulink с параметрами, представленными в таблице. Параметры АСУ ЭП наведения радиотелескопа РТ-70 подробно описаны в [1].

ТАБЛИЦА I

Параметр	Обозначение	Величина
Период дискретизации, с	$T_s$	0.001
Весовая ковариационная матрица состояния	$\mathbf{Q}_H(k)$	$\text{diag}[0.05]_{6 \times 6}$
Весовая ковариационная матрица измерения	$\mathbf{R}_H(k)$	2.5

В данном докладе проведено исследование оценивания переменных состояния объекта в режиме низких скоростей (порядка угловых секунд в секунду), соответствующих диапазону движения «медленно» АСУ ЭП радиотелескопа РТ-70. Результаты моделирования оценивания переменных состояния при использовании ДРФК иллюстрируются на рис. 2-4, здесь: 1 –  $M_{21}$ ; 1' –  $\hat{M}_{21}$ ; 2 –  $\omega_2$ ; 2' –  $\hat{\omega}_2$ ;

$3-M_{32}$ ;  $3'-\hat{M}_{32}$ ;  $4-\omega_3$ ;  $5-M_{42}$ ;  $5'-\hat{M}_{42}$ ;  $6-\omega_4$ ;  $6'-\hat{\omega}_4$ ;  $7-\omega_{\text{зад}}$ .

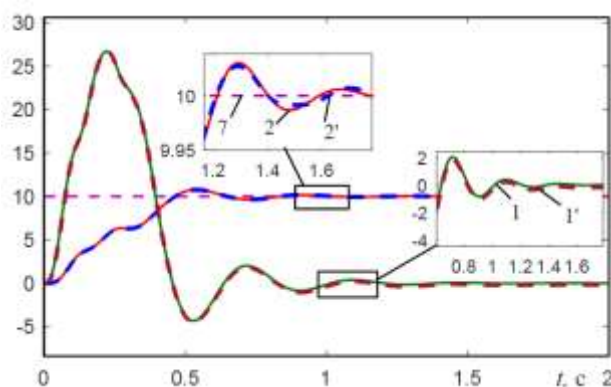


Рис. 2. Результаты моделирования оценивания переменных состояния на второй массе

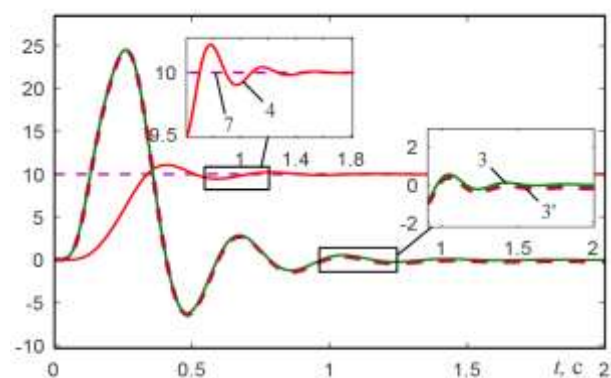


Рис. 3. Результаты моделирования оценивания переменных состояния на третьей массе

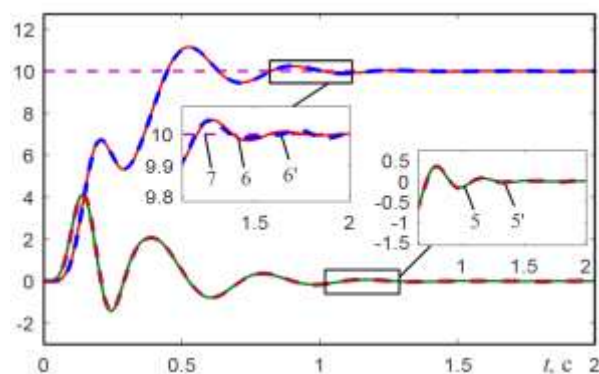


Рис. 4. Результаты моделирования оценивания переменных состояния на четвертой массе

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, предложен метод синтеза оптимального наблюдателя состояния нелинейного объекта на основе дискретного расширенного фильтра Калмана. Результаты моделирования данной работы показали, что использование данного наблюдателя является хорошим подходом к восстановлению не измеряемых переменных состояния АСУ ЭП сложных объектов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Phuong T.H, Belov M.P., Thuy D.V. Adaptive Model Predictive Control for Nonlinear Elastic Electrical Transmission Servo Drives //In 2019 IEEE Conference NW Russia Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering. 2019. P. 704-708.
- [2] Соколовский Г.Г. Электроприводы переменного тока с частотным регулированием. СПб.: Академия, 2006. 272 с.
- [3] Haykin S. Kalman filtering and neural networks. Vol. 47. John Wiley & Sons, 2004. 284 p.
- [4] Szabat K., Orłowska-Kowalska T., Dyrz K. Extended Kalman filters in the control structure of two-mass drive system // Bull. Pol. Acad. Sci. Tech. Sci. Vol. 54. No. 3. 2006. P. 315–325.