Нелинейная нечеткая регрессионная модель для интервальных нечетких множеств второго типа

О. М. Полещук[1], Е. Г. Комаров[2]
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Мытищинский филиал
[1]olga.m.pol@yandex.ru, [2]komarov@mgul.ac.ru

Ashraf Darwish
Helwan University Cairo, Egypt
ashraf darwish.eg@ieee.org

Аннотация. **В статье представлена нелинейная регрессионная модель для нечетких множеств второго типа. Неизвестные интервальных коэффициенты определяются треугольными нечеткими числами. Основная идея статьи состоит в определении взвешенных отрезков для нечетких чисел первого типа, функциями принадлежности которых являются нижняя и верхняя функции принадлежности интервального нечеткого множества второго типа. Нижняя и верхняя функции принадлежности исходных входных и выходных данных в работе предполагаются линейными.**

Ключевые слова: интервальное нечеткое множество второго типа; нечеткая регрессия; взвешенный отрезок

I. Введение

Методы нечеткого регрессионного анализа многие годы были ограничены рассмотрением только нечетких множеств первого типа [1–11]. Предложенные в работах [12–14] методы построения нечетких линейных регрессионных моделей расширили группу функций принадлежности исходных данных, поскольку позволили оперировать не только с нечеткими множествами первого типа, но и с нечеткими множествами второго типа. Интервальное нечеткое множество второго типа [15] определяется нижней функцией принадлежности (НФП) и верхней функцией принадлежности (ВФП), которые обозначаются соответственно через $\underline{\mu_{\tilde{A}}}$ и $\overline{\mu_{\tilde{A}}}$, $\underline{\mu_{\tilde{A}}} = \left(a_1^L, a_2^L, a_l^L, a_r^L\right)$, $\overline{\mu_{\tilde{A}}} = \left(a_1^U, a_2^U, a_l^U, a_r^U\right)$. Первые два параметра в скобках являются абсциссами вершин верхнего основании трапеции, которая является графиком соответствующей функции принадлежности, а два последних параметра являются длинами соответственно левого и правого крыльев трапеции.

Построение регрессионных моделей с нечеткими множествами второго типа представляется актуальной задачей, поскольку методы регрессионного анализа должны давать возможность оперирования со словами (например, лингвистическими описаниями типа: «хорошо», «очень хорошо», «отлично»), которые могут описываться с помощью интервальных нечетких множеств второго типа. Интервальные нечеткие множества второго типа имеют достаточно степени свободы для сохранения индивидуальной информации экспертов относительно подобных описаний. Для того, чтобы построить нелинейную регрессионную модель на основе интервальных нечетких множеств, необходимо разработать новый подход. В настоящей работе такой подход опирается на определении агрегирующих отрезков для интервальных нечетких множеств второго типа.

II. Определение взвешенных интервалов для интервальных нечетких множеств второго типа

Рассмотрим интервальное нечеткое множество второго типа $\tilde{A}$, определенное НФП и ВФП, которые обозначены соответственно через $\underline{\mu_{\tilde{A}}}$ и $\overline{\mu_{\tilde{A}}}$. $\underline{\mu_{\tilde{A}}} = \left(a_1^L, a_2^L, a_l^L, a_r^L\right)$, $\overline{\mu_{\tilde{A}}} = \left(a_1^U, a_2^U, a_l^U, a_r^U\right)$. В [6] дано определение взвешенной точки B для треугольного нечеткого числа $\tilde{B} = \left(b, b_l, b_r\right)$:

$$B = \frac{\int_0^1 \left(\frac{B_\alpha^1 + B_\alpha^2}{2}\right) 2\alpha d\alpha}{\int_0^1 2\alpha d\alpha} = \int_0^1 \left(B_\alpha^1 + B_\alpha^2\right)\alpha d\alpha =$$

$$\int_0^1 \left(b - (1-\alpha)b_l + b + (1-\alpha)b_r\right)\alpha d\alpha = b + \frac{1}{6}\left(b_r - b_l\right).$$

В соответствии с этим определением два разных треугольных числа могут иметь одинаковые взвешенные точки. Например, рассмотрим числа $\tilde{A} = (2,2,2)$ и $\tilde{B} = (2,1,1)$. Найдем соответственно их взвешенные точки $\tilde{A}$, $\tilde{B}$: $A = \int_0^1 \left(4 - 2(1-\alpha) + 2(1-\alpha)\right)\alpha d\alpha = 2,$

$$B = \int_0^1 \left(4 - (1-\alpha) + (1-\alpha)\right)\alpha d\alpha = 2\,.$$

В каких-то практических задачах возможно это не будет являться проблемой, однако, например, в задачах принятия решений возрастает необходимость сохранить различные особенности нечетких чисел и отделить одно от другого, используя какие-то другие агрегирующие показатели.

Поэтому в настоящей работе мы используем определение взвешенной точки для треугольного числа чтобы определить агрегирующий отрезок для трапецеидального нечеткого числа (и, как частный случай, треугольного нечеткого числа). Введение агрегирующего отрезка позволит сохранить индивидуальные особенности нечетких чисел.

Определим взвешенное множество для трапецеидального нечеткого числа $\tilde{A} \equiv (a_1, a_2, a_l, a_r)$, как множество взвешенных точек всех треугольных чисел $\tilde{B} \equiv (b, b_l, b_r)$, принадлежащих $\tilde{A}$.

Утверждение 1 [16]. Взвешенным множеством трапецеидального нечеткого числа $\tilde{A} \equiv (a_1, a_2, a_l, a_r)$ является отрезок $[A_1, A_2]$, такой что $A_1 = a_1 - \frac{1}{6}a_l$, $A_2 = a_2 + \frac{1}{6}a_r$.

Назовем отрезок $[A_1, A_2]$ взвешенным отрезком для трапецеидального нечеткого числа $\tilde{A} \equiv (a_1, a_2, a_l, a_r)$.

Рассмотрим опять два треугольных нечетких числа $\tilde{A} = (2,2,2)$, $\tilde{B} = (2,1,1)$ и определим для них взвешенные отрезки $[A_1, A_2]$, $[B_1, B_2]$.

$$A_1 = \int_0^1 (4 - 2(1-\alpha))\alpha d\alpha = 2 - 2\times\frac{1}{6} = 1\frac{2}{3},$$

$$A_2 = \int_0^1 (4 + 2(1-\alpha))\alpha d\alpha = 2 + 2\times\frac{1}{6} = 2\frac{1}{3},$$

$$B_1 = \int_0^1 (4 - (1-\alpha))\alpha d\alpha = 2 - \frac{1}{6} = 1\frac{5}{6},$$

$$B_2 = \int_0^1 (4 + 2(1-\alpha))\alpha d\alpha = 2 + \frac{1}{6} = 2\frac{1}{6},$$

$$[A_1, A_2] = \left[1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}\right],\ [B_1, B_2] = \left[1\frac{5}{6}, 2\frac{1}{6}\right].$$

Как уже было замечено, взвешенные точки чисел $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ являются равными, а взвешенные отрезки являются разными. Чем больше нечеткость, тем больше взвешенный отрезок.

Взвешенные отрезки для нечетких чисел предлагается использовать в ситуациях, когда необходимо аккумулировать больше информации об этих числах, чем это могут дать взвешенные точки.

Утверждение 2 [16]. Взвешенный отрезок для числа $\tilde{A} + \tilde{B}$ может быть получен как $[A_1 + B_1, A_2 + B_2]$, где $[A_1, A_2], [B_1, B_2]$ – взвешенные отрезки для трапецеидальных нечетких чисел $\tilde{A}$, $\tilde{B}$.

Утверждение 3 [16]. Границы взвешенного отрезка числа $\tilde{D} = \tilde{A} \times \tilde{B}$, которое является произведением чисел $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ определяется линейными комбинациями параметров этих чисел.

Рассмотрим неотрицательное число $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_l, a_r)$ и треугольное число $\tilde{a} \equiv (b, b_l, b_r)$.

Утверждение 4 [16]. Границы взвешенного отрезка $\left[\theta^1_{\tilde{a}\tilde{A}}, \theta^2_{\tilde{a}\tilde{A}}\right]$ произведения чисел $\tilde{a}$ и $\tilde{A}$ выглядят следующим образом:

$$\theta^1_{\tilde{a}\tilde{A}} = b\left(a_q + (-1)^q \frac{1}{6} a_{M_q}\right) - b_l\left(\frac{1}{6}a_q + (-1)^q \frac{1}{12} a_{M_q}\right).$$

$$\theta^2_{\tilde{a}\tilde{A}} = b\left(a_p + (-1)^p \frac{1}{6} a_{M_p}\right) + b_r\left(\frac{1}{6}a_p + (-1)^q \frac{1}{12} a_{M_p}\right).$$

$$q = \begin{cases} 1, b - b_l \ge 0 \\ 2, b + b_r < 0 \end{cases}, M_q = \begin{cases} l, q = 1 \\ r, q = 2 \end{cases},$$

$$p = \begin{cases} 2, b - b_l \ge 0 \\ 1, b + b_r < 0 \end{cases}, M_p = \begin{cases} l, p = 1 \\ r, p = 2 \end{cases}.$$

Утверждение 5 [17]. Границы взвешенного отрезка $\left[\theta^1_{\tilde{a}\tilde{A}^2}, \theta^2_{\tilde{a}\tilde{A}^2}\right]$ произведения чисел $\tilde{a}$ и $\tilde{A}^2$ выглядят следующим образом:

$$\theta^1_{\tilde{a}\tilde{A}^2} = b\left[a_q^2 + \frac{(-1)^q}{3} a_q a_{M_q} + \frac{1}{12} a^2_{M_q}\right] -$$

$$-b_l\left[\frac{1}{6}a_q^2 + \frac{(-1)^q}{6} a_q a_{M_q} + \frac{1}{6} a^2_{M_q}\right];$$

$$\theta_{\tilde{a}\tilde{A}^2} = b\left[a_r^2 + \frac{(-1)^r}{3} a_r a_{M_r} + \frac{1}{12} a^2_{M_r}\right] +$$

$$+b_r\left[\frac{1}{6}a_r^2 + \frac{(-1)^r}{6} a_r a_{M_r} + \frac{1}{20} a^2_{M_r}\right].$$

Определим взвешенные отрезки $[A_1^L, A_2^L], [A_1^U, A_2^U]$ для НФП $\underline{\mu_{\tilde{A}}} = (a_1^L, a_2^L, a_l^L, a_r^L)$ и ВФП $\overline{\mu_{\tilde{A}}} = (a_1^U, a_2^U, a_l^U, a_r^U)$ интервального нечеткого множества второго типа $\tilde{A}$:

$$A_1^L = a_1^L - \frac{1}{6}a_l^L,\ A_2^L = a_2^L + \frac{1}{6}a_r^L,$$

$$A_1^U = a_1^U - \frac{1}{6}a_l^U,\ A_2^U = a_2^U + \frac{1}{6}a_r^U.$$

Определим меру близости для двух интервальных нечетких множеств второго типа $\tilde{A},\tilde{B}$ на основе их взвешенных отрезков $\left[A_1^L,A_2^L\right],\left[A_1^U,A_2^U\right],\left[B_1^L,B_2^L\right],\left[B_1^U,B_2^U\right]$:

$$f^2\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)=\left(A_1^L-B_1^L\right)^2+\left(A_2^L-B_2^L\right)^2+\left(A_1^U-B_1^U\right)^2+\left(A_2^U-B_2^U\right)^2.$$

III. Постановка проблемы и ее решение

Пусть $\tilde{Y}_i\ i=\overline{1,n}$ выходные интервальные нечеткие множества, определенные своими соответственно НФП $\underline{\mu}_{\tilde{Y}_i}=\left(y_1^{iL},y_2^{iL},y_l^{iL},y_r^{iL}\right),\ i=\overline{1,n}$ и ВФП $\overline{\mu}_{\tilde{Y}_i}=\left(y_1^{iU},y_2^{iU},y_l^{iU},y_r^{iU}\right),y_1^{iU}-y_l^{iU}\ge 0\ \ i=\overline{1,n}$.

Пусть $\tilde{X}_i$, $i=\overline{1,n}$ входные интервальные нечеткие множества второго типа, определенные своими НФР $\underline{\mu}_{\tilde{X}_i}=\left(x_1^{iL},x_2^{iL},x_l^{iL},x_r^{iL}\right)$ и ВФП $\overline{\mu}_{\tilde{X}_i}=\left(x_1^{iU},x_2^{iU},x_l^{iU},x_r^{iU}\right),x_1^{iU}-x_l^{iU}\ge 0$, $i=\overline{1,n}$. НФР и ВФР выходных и входных интервальных нечетких множеств второго типа являются трапецеидальными нечеткими числами.

Квадратичная нечеткая регрессионная модель для $\tilde{Y}$ (со значениями $\tilde{Y}_i\ i=\overline{1,n}$) и $\tilde{X}$ (со значениями $\tilde{X}_i$, $i=\overline{1,n}$) строится в следующем виде:

$$\tilde{Y}=\tilde{a}_0+\tilde{a}_1\tilde{X}+\tilde{a}_2\tilde{X}^2,$$

$\tilde{a}_j\equiv\left(b^j,b_l^j,b_r^j\right),j=\overline{0,2}$ – неизвестные коэффициенты, которые определяются в виде треугольных чисел (не обязательно симметричных).

Метод построения регрессионной модели основан на трансформации НФР и ВФР выходных интервальных нечетких чисел второго типа во взвешенные отрезки.

Определим взвешенные отрезки $\left[\theta_{\hat{Y}_i}^{1L},\theta_{\hat{Y}_i}^{2L}\right]$, $\left[\theta_{\hat{Y}_i}^{1U},\theta_{\hat{Y}_i}^{2U}\right]$ для НФР и ВФР модельных выходных данных $\tilde{Y}=\tilde{a}_0+\tilde{a}_1\tilde{X}+\tilde{a}_2\tilde{X}^2$, используя утверждения 1–5:

$$\theta_{\hat{Y}_i}^{1L}=b^0-\frac{1}{6}b_l^0+\theta_{\tilde{a}_1\tilde{X}_i}^{1L}\left(b^1,b_l^1,b_r^1\right)+\theta_{\tilde{a}_2\tilde{X}_i^2}^{1L}\left(b^2,b_l^2,b_r^2\right),$$

$$\theta_{\hat{Y}_i}^{2L}=b^0-\frac{1}{6}b_l^0+\theta_{\tilde{a}_1\tilde{X}_i}^{2L}\left(b^1,b_l^1,b_r^1\right)+\theta_{\tilde{a}_2\tilde{X}_i^2}^{2L}\left(b^2,b_l^2,b_r^2\right)$$

$$\theta_{\hat{Y}_i}^{1U}=b^0-\frac{1}{6}b_l^0+\theta_{\tilde{a}_1\tilde{X}_i}^{1U}\left(b^1,b_l^1,b_r^1\right)+\theta_{\tilde{a}_2\tilde{X}_i^2}^{1U}\left(b^2,b_l^2,b_r^2\right)$$

$$\theta_{\hat{Y}_i}^{2U}=b^0-\frac{1}{6}b_l^0+\theta_{\tilde{a}_1\tilde{X}_i}^{2U}\left(b^1,b_l^1,b_r^1\right)+\theta_{\tilde{a}_2\tilde{X}_i^2}^{2U}\left(b^2,b_l^2,b_r^2\right).$$

НФР и ВФР модельных выходных данных не будут являться трапецеидальными нечеткими числами. При умножении нечетких чисел не всегда возможно определить аналитический вид функции принадлежности полученного результата. Но мы всегда можем определить модельные выходные данные, используя α-уровневые множества исходных нечетких чисел.

Например, если $\tilde{a}\equiv\left(b\ ,b_l,b_r\right)$ является отрицательным числом $\left(b\ +b_r<0\right)$, а $\tilde{A}=\left(a_1,a_2,a_l,a_r\right)$ является неотрицательным числом $\left(a_1-a_l\ge 0\right)$, тогда при их умножении границы α-уровневого множества $\left[C_\alpha^1,C_\alpha^2\right]$ для $\tilde{a}\tilde{A}$ выглядят следующим образом:

$$C_\alpha^1=ba_2+(1-\alpha)ba_r-(1-\alpha)b_la_2-(1-\alpha)^2b_la_r,$$

$$C_\alpha^2=ba_1+(1-\alpha)ba_l+(1-\alpha)b_ra_1-(1-\alpha)^2b_ra_l.$$

Если $\tilde{a}\equiv\left(b\ ,b_l,b_r\right)$ является неотрицательным числом $\left(b\ -b_l\ \ge 0\right)$ и $\tilde{A}=\left(a_1,a_2,a_l,a_r\right)$ является неотрицательным числом $\left(a_1-a_l\ge 0\right)$, тогда при их умножении границы α-уровневого множества $\left[C_\alpha^1,C_\alpha^2\right]$ для $\tilde{a}\tilde{A}$ выглядят следующим образом:

$$C_\alpha^1=ba_1-(1-\alpha)ba_l-(1-\alpha)b_ra_1+(1-\alpha)^2b_ra_l,$$

$$C_\alpha^2=ba_2+(1-\alpha)ba_r+(1-\alpha)b_la_2+(1-\alpha)^2b_la_r.$$

Определим взвешенные отрезки $\left[\theta_{\tilde{Y}_i}^{1L},\theta_{\tilde{Y}_i}^{2L}\right]$, $\left[\theta_{\tilde{Y}_i}^{1U},\theta_{\tilde{Y}_i}^{2U}\right]$ для НФР и ВФР исходных выходных данных $\tilde{Y}_i\ i=\overline{1,n}$:

$$\theta_{\tilde{Y}_i}^{1L}=y_1^{iL}-\frac{1}{6}y_l^{iL},\ \theta_{\tilde{Y}_i}^{2L}=y_2^{iL}+\frac{1}{6}y_r^{iL},$$

$$\theta_{\tilde{Y}_i}^{1U}=y_1^{iU}-\frac{1}{6}y_l^{iU},\ \theta_{\tilde{Y}_i}^{2U}=y_2^{iU}+\frac{1}{6}y_r^{iU}.$$

Рассмотрим функционал

$$F\left(b^j,b_l^j,b_r^j\right)=\sum_{i=1}^n f^2\left(\hat{Y}_i,\tilde{Y}_i\right)=$$
$$\sum_{i=1}^n\left[\left(\theta_{\hat{Y}_i}^{1L}-\theta_{\tilde{Y}_i}^{1L}\right)^2+\left(\theta_{\hat{Y}_i}^{2L}-\theta_{\tilde{Y}_i}^{2L}\right)^2\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^n\left[\left(\theta_{\hat{Y}_i}^{1U}-\theta_{\tilde{Y}_i}^{1U}\right)^2+\left(\theta_{\hat{Y}_i}^{2U}-\theta_{\tilde{Y}_i}^{2U}\right)^2\right],$$

который характеризует меру близости между исходными и модельными выходными данными.

Оптимизационная задача ставится следующим образом:

$$F\left(b^j,b_l^j,b_r^j\right)=\sum_{i=1}^n f^2\left(\hat{Y}_i,\tilde{Y}_i\right)\to min,b_l^j\ge 0,b_r^j\ge 0,j=\overline{0,2}.$$

Так как $\theta_{\tilde{a}_1\tilde{X}_i}^{1L}\left(b^1,b_l^1,b_r^1\right)$, $\theta_{\tilde{a}_1\tilde{X}_i}^{2L}\left(b^1,b_l^1,b_r^1\right)$, $\theta_{\tilde{a}_1\tilde{X}_i}^{1U}\left(b^1,b_l^1,b_r^1\right)$, $\theta_{\tilde{a}_1\tilde{X}_i}^{2U}\left(b^1,b_l^1,b_r^1\right)$ и $\theta_{\tilde{a}_2\tilde{X}_i^2}^{1L}\left(b^2,b_l^2,b_r^2\right)$, $\theta_{\tilde{a}_2\tilde{X}_i^2}^{2L}\left(b^2,b_l^2,b_r^2\right)$,

$\theta^{1U}_{\tilde{a}_2\tilde{X}_i^2}\left(b^2,b_l^2,b_r^2\right)$ $\theta^{2U}_{\tilde{a}_2\tilde{X}_i^2}\left(b^2,b_l^2,b_r^2\right)$ являются кусочно-линейными функциями на множестве $b_l^j \geq 0, b_r^j \geq 0, j=\overline{1,2}$, то F является кусочно-дифференцируемой функцией и решения оптимизационной задачи находятся известными методами [18].

После нахождения коэффициентов регрессионной модели представляется интересной задача оценки качества этой модели. Для оценки надежности модели авторами определены стандартное отклонение ($S_{\tilde{y}}$), коэффициент корреляции (HR) и стандартная ошибка оценки регрессии (HS_e):

$$S_{\tilde{y}}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} f^2\left(\tilde{Y}_i,\overline{\tilde{Y}}\right)},\ \overline{\tilde{Y}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\tilde{Y}_i}{n},$$

$$HR^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} f^2\left(\hat{Y}_i,\overline{\tilde{Y}}\right)}{\sum_{i=1}^{n} f^2\left(\tilde{Y}_i,\overline{\tilde{Y}}\right)},\ HS=\sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} f^2\left(\hat{Y}_i,\tilde{Y}_i\right)}.$$

После получения модельных данных $\hat{Y}_i$ $i=\overline{1,n}$ возникает задача их идентификации с лингвистическими значениями $Y_k, k=\overline{1,p}$, формализованными с помощью интервальных нечетких множеств второго типа $\tilde{\tilde{Y}}_k, k=\overline{1,p}$.

Взвешенные отрезки $\hat{Y}_i$, $i=\overline{1,n}$, $\tilde{\tilde{Y}}_k, k=\overline{1,p}$ обозначены соответственно через $\left[C_1^{iL},C_2^{iL}\right]$, $\left[C_1^{iL},C_2^{iL}\right], i=\overline{1,n}$, $\left[D_1^{iL},D_2^{iL}\right]$, $\left[D_1^{iL},D_2^{iL}\right], k=\overline{1,p}$. Определим

$$f^2\left(\hat{Y}_i,\tilde{\tilde{Y}}_k\right)=\left(C_1^{iL}-D_1^{kL}\right)^2+\left(C_2^{iL}-D_2^{kL}\right)^2+ \\ +\left(C_1^{iU}-D_1^{iU}\right)^2+\left(C_2^{iU}-D_2^{iU}\right)^2, i=\overline{1,n}, k=\overline{1,p}.$$

Тогда $\hat{Y}_i$ идентифицируется с Y_s, если

$$f^2\left(\hat{Y}_i,\tilde{\tilde{Y}}_s\right)=\min_k f^2\left(\hat{Y}_i,\tilde{\tilde{Y}}_k\right), k=\overline{1,p}.$$

IV. Выводы

В статье разработана нелинейная нечеткая регрессионная модель. Исходная информация представлена интервальными нечеткими множествами второго типа. Основная идея статьи состоит в определении взвешенных отрезков для нижних и верхних функций принадлежности этих множеств и определении на их основе меры близости исходных и модельных данных. Предложенный подход расширяет группу функций принадлежности исходных данных и позволяет оперировать не только с нечеткими множествами первого типа, но и со второго типа. Для оценки надежности модели определены стандартное отклонение, коэффициент корреляции и стандартная ошибка оценки регрессии.

Список литературы

[1] A. Celmins, “Multidimensional least-squares model fitting of fuzzy models”, Math. Modeling, 1987, vol. 9, pp. 669-690.

[2] H. Tanaka, “Fuzzy data analysis by possibilistic linear models”, Fuzzy Sets and Systems, vol. 21, 1991, pp. 363-375.

[3] D.A. Sabic, W. Pedrycr, “Evaluation on fuzzy linear regression models,” Fuzzy Sets and Systems, 1991, vol. 39, pp. 51-63.

[4] H. Ishibuchi, “Fuzzy regression analysis”, J. Fuzzy Theory and Systems, 1992, 4, pp. 137-148.

[5] Y.-H.O. Chang, “Synthesize fuzzy-random data by hybrid fuzzy least-squares regression analysis”, J. National Kaohsiung Inst. Technol., 1997, vol. 28, pp. 1-14.

[6] Y.-H.O. Chang, “Hybrid fuzzy least-squares regression analysis and its reliability measures”, Fuzzy Sets and Systems, 2001, vol. 119, pp. 225-246.

[7] C.C. Yao, P.T. Yu, “Fuzzy regression based on asymmetric support vector machines”, Applied Mathematics and Computation, 2006, 182, pp. 175-193

[8] A. Celikyilmaz, I.B. Turksen, “Fuzzy functions with support vector machines”, Information Sciences, 2007, vol. 177, pp. 5163-5177.

[9] O.M. Poleshuk, E.G. Komarov, “Multiple hybrid regression for fuzzy observed data”, Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS'2008, 2008, p.14531224. DOI: 10.1109/NAFIPS.2008.4531224.

[10] O. Poleshchuk, E. Komarov, “Hybrid fuzzy least-squares regression model for qualitative characteristics”, Advances in Intelligent and Soft Computing., 2010, vol. 68, pp. 187-196.

[11] O.M. Poleshuk, E.G. Komarov, “A nonlinear hybrid fuzzy least-squares regression model”, Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS'2011, 2011, p. 5751909. DOI: 10.1109/NAFIPS.2011.5751909.

[12] O. Poleshchuk, E. Komarov, “A fuzzy linear regression model for interval type-2 fuzzy sets”, Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS'2012, 2012, p. 6290970. DOI: 10.1109/NAFIPS.2012.6290970.

[13] N. Shafaei Bajestani., A. Vahidian Kamyad., A.J. Zare, “A piecewise type-2 fuzzy regression model”, International Journal of Computational Intelligence Systems, 2017, vol. 10, no. 1, pp. 734-744.

[14] N. Shafaei Bajestani., A. Vahidian Kamyad., E. Nasli Esfahani, A.J. Zare, “Prediction of retinopathy in diabetic patients using Type-II fuzzy regression model“, European Journal of Operational Research, 2018, vol. 264, no. 3, pp. 859-869.

[15] F. Liu and J. M. Mendel, “Encoding words into interval Type-2 fuzzy sets using an interval approach”, IEEE Tranns. Fuzzy Systems, 2008, vol. 16, no. 6.

[16] O.M. Poleshuk, E.G. Komarov, New defuzzification method based on weighted intervals, Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS'2008, 2008, p. 4531223. DOI: 10.1109/NAFIPS.2008.4531223.

[17] O. Poleshchuk., E. Komarov Expert Fuzzy Information Processing, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 2011, vol. 268, pp. 1-239.

[18] T.F. Coleman, Y.Li, “A reflective newton method for minimizing a quadratic function subject to bounds on some of the variables”, SIAM J. Optim, 1996, vol. 6, pp. 1040-1058.