

Применение различной априорной информации относительно параметров байесовской модели

И. Ю. Панков

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Финуниверситет), Financial University
ipan-kov@mail.ru

Аннотация. Одним из подходов к анализу информации является метод Байеса. Данный подход выгодно отличается от других тем, что при его использовании пользователь (исследователь) может осознавать уровень своего доверия к возможным моделям еще до получения конечных данных. А так же, впоследствии, он может представить данный уровень доверия в виде (определенных) вероятностей.

Ключевые слова: модель; вероятность; подход; оптимизация

При исследовании полученных данных, пользователь может вновь обратиться к теореме Байеса и получить таким образом еще одно множество вероятностей. Эти вероятности будут переучтенными и более точными в рамках степени доверия, так как будут учитывать свежеполученные исследователем данные. Методы Байеса были разработаны учеными в результате многочисленных попыток решить проблемы статистического анализа разных процессов, а так же найти их решение посредством использования теоремы Байеса. К началу использования методологии Байеса существовал ряд предпосылок. Одной из самых значимых предпосылок считается наличие конкретных соотношений между вероятностями явлений, имеющих различный характер, так же спецификации любого явления на необходимом нам уровне.

Поговорим о еще одном несомненном преимуществе Байесовской парадигмы, которое является одним из ключевых – это применение различной начальной (априорной) информации относительно параметров модели. Подобную информацию изображают либо в виде априорной вероятности, либо в виде апостериорного распределения оценок параметров. Следует отметить следующие особенности метода Байеса: все без исключения величины и параметры считаются случайными, причем точное значение параметров пользователю неизвестно. Из этого следует, что именно в разрезе незнания исследователя все параметры считаются случайными. Кроме всего прочего, байесовскую методологию можно использовать и при нулевом объеме выборки. В таком случае значение априорного распределения будет равно значению апостериорного.

Для оценивания неизвестных переменных используется апостериорные распределения. Прийти к решению задачи по оцениванию заданной величины – это значит определить апостериорное распределение имеющейся величины.

Основным инструментом описываемого подхода является теорема Байеса, и правила, описанные ниже:

- Sum-rule (если A_1, \dots, A_k – взаимоисключающие события, то одно из них определенно происходит).
- Product- rule (любую совместную плотность можно разбить на сомножители).

Говоря о достоинствах методологии Байеса нельзя не упомянуть ее недостатки. Еще в 1930 г. байесовский метод начали подвергать достаточно резкой критике и практически не использовали. К примеру, английский статистик Р.А. Фишер в одной из своих статей писал, что теория Байеса «должна быть полностью отвергнута».

Для этого есть ряд причин:

- Методология Байеса предполагает, что исследователю известно априорное распределение до начала наблюдений, а так же отсутствию конструктивных способов его выбора.
- При использовании теоремы Байеса в нетипичных случаях на принятие решения требуется колоссальное количество вычислительных затрат, которые будут связаны с интегрированием чисел в многомерных пространствах.
- Р.А. Фишер доказал оптимальность метода максимального правдоподобия, из-за чего отпадала необходимость в использовании чего-то другого.

Но начиная с 1990 г. началось возрождение байесовской методологии и она используется по сей день. Теория Байеса оказалась крайне полезна в сфере машинного обучения и статистики. В данной сфере она применяется для решения многочисленных задач и поиска ответов на многочисленные и достаточно серьезные вопросы. В экспериментах, проводимых в современное время, стали часто возникать ситуации, когда «классические» и издавна используемые методы анализа погрешностей и доверительных интервалов давали неточный и неправильный результат. Как правило, это связывают с небольшой статистикой или близостью измеренных величин и показателей к физически возможной границе.

- измерение фактической массы нейтрино
- изучение редкого процесса при наличии фона

В приведенных выше случаях теория Байеса об оценке вероятностей может привести к куда более разумным и верным результатам. Томас Байес опубликовал свои основные идеи еще в далеком 1763 г., поэтому мы можем

считать их такими же классическими, как и «классические». Но широкое применение метода Байеса начали применяться только во второй половине двадцатого века. В современности байесовская парадигма используется в обширном спектре задач, которые связаны непосредственно с анализом данных, принятием решений, а так же с построением экспертных систем.

Положим, что в описании закона распределения изучаемой случайной величины, функции регрессии, временного ряда и т.п. участвует s -мерный параметр $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)T$. Тогда, задача состоит в том, чтобы построить наилучшим образом, в определенном смысле, статистическую оценку $\hat{\theta}$ параметра θ по полученным ранее наблюдениям $X[n] = (X_1, \dots, X_n)$.

Два положения, на которых основан метод Байеса:

1) Степень уверенности аналитика в достоверности некоторого утверждения численно выражается в вероятности данного утверждения.

2) В ходе принятия решения за исходную информацию используют данные сразу двух типов: априорную информацию и ту, что содержится в имеющихся статистических данных.

Априорная информация обычно представляется как некоторое априорное распределение вероятностей исследуемого неизвестного параметра, описывающее степень его уверенности, что этот параметр примет то, или иное значение, еще до начала сбора начальных статистических данных. В процессе поступления начальных статистических данных происходит уточнение распределения и аналитик отходя от априорного распределения, переходит к апостериорному.

По формуле Байеса:

$$P\{A_i|B\} = P\{A_i\}P\{B|A_i\} / \sum_{K=1}^K P\{A_i\}P\{B|A_i\}$$

A_1, \dots, A_k образуют полную группу событий, $P\{B\} > 0$

В общую схему метода Байеса входит пять составляющих:

1. Априорные сведения о параметре θ
2. Начальные статистические данные
3. Функция правдоподобия $L(X_1, \dots, X_n|\theta)$
4. Нахождение апостериорного распределения $p(\theta|X_1, \dots, X_n)$
5. Построение байесовских точечных и интервальных оценок.

Априорные данные о параметре θ могут базироваться на предыстории функционирования исследуемого процесса, а так же на профессиональных теоретических соображениях о его особенностях, специфике и сущности.

Априорные сведения представляются функцией $p(\theta)$, которая задает априорное распределение параметра. При исследовании многомерных параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)T$, а также при построении априорного распределения в большинстве ситуаций предполагают статистическую независимость компонент $\theta_1, \dots, \theta_s$

$$p(\theta) = p(\theta_1) * \dots * p(\theta_s).$$

Вторым составляющим компонентом методологии Байеса являются начальные статистические данные.

Совокупность X_1, \dots, X_n выявлена из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x|\theta)$. Пусть $f(x|\theta)$ – плотность распределения изучаемой случайной величины ξ , если ξ – непрерывная величина, или вероятность $P\{\xi = X|\theta\}$, если ξ дискретная величина, при условии, что значение исследуемого параметра равно θ .

Третьим компонентом считается функция правдоподобия $L(X_1, \dots, X_n|\theta)$ имеющихся данных. Ее определяют соотношением:

$$L(X_1, \dots, X_n|\theta) = f(X_1|\theta) * f(X_2|\theta) * \dots * f(X_n|\theta)$$

Апостериорное распределение $\tilde{p}(\theta|X_1, \dots, X_n)$ вычисляется по формуле Байеса.

A_i – событие, которое заключается в том, что оцениваемый параметр равен θ

B – событие, которое заключается в фиксации n наблюдений на уровнях X_1, \dots, X_n .

$$\tilde{p}(\theta|X_1, \dots, X_n) = \frac{p(\theta) * L(X_1, \dots, X_n|\theta)}{\int L(X_1, \dots, X_n|\theta) * p(\theta) d\theta}$$

Знаменатель $\int L(X_1, \dots, X_n|\theta) * p(\theta) d\theta$, играющий роль нормирующего коэффициента никак не зависит от неизвестного нам параметра θ .

$$\tilde{p}(\theta|X_1, \dots, X_n) \propto p(\theta) * L(X_1, \dots, X_n|\theta)$$

Конечным составляющим в логической схеме метода Байеса является построение байесовских точечных и интервальных оценок. Оно опирается на использование знания об апостериорном распределении $\tilde{p}(\theta|X_1, \dots, X_n)$.

В качестве байесовских точечных оценок $\hat{\theta}^B$ принято использовать среднее или модальное значение распределения \tilde{p} :

$$\hat{\theta}_{mean}^B = E(\theta|X_1, \dots, X_n) = \int \theta * \tilde{p}(\theta|X_1, \dots, X_n) d\theta$$

$$\hat{\theta}_{mod}^B = \arg \max_{\theta} \tilde{p}(\theta|X_1, \dots, X_n)$$

В случае установления минимума апостериорному байесовскому риску оценка Байеса будет наилучшей:

$$\begin{aligned} R_B(X_1, \dots, X_n) &= E\{(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta)^2 | X[n]\} \\ &= \int (\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta)^2 \\ &\quad * \tilde{p}(\theta|X[n]) d\theta \end{aligned}$$

Для того чтобы построить байесовский доверительный интервал для параметра θ , производится вычисление апостериорного закона распределения параметра по формуле

$$\theta(\tilde{p}(\theta|X_1, \dots, X_n)),$$

после чего по имеющейся доверительной вероятности γ определяются критические значения p_1, p_2 , дающие в итоге концы доверительного интервала.

Байесовская методология оценки выводов все чаще применяется в науке, в экономике, в промышленности. При более детальном изучении стратегии Байеса нужно

рассматривать пример оценки достоверности гипотезы на ее основе и обосновать использование данной теоремы для экспертных систем. Далее перейдем к рассмотрению более расширенной формулы формулы Байеса с учетом некоторого события E , которое связано с событиями H_1, H_2, \dots, H_n . Вероятности события E становятся известными в том случае, если какое-то из событий H_1, H_2, \dots, H_n наступило: $P((E|H_1), P((E|H_2)), \dots, P((E|H_n)))$. Предположим, что нам доподлинно известно, что событие E произошло. В таком случае вероятность наступления какого-либо из событий H_i ($i = 1, \dots, n$) определяется по формуле $P(H_i|E)$

$$= \frac{P(E|H_i) * P(H_i)}{P(E|H_1) * P(H_1) + P(E|H_2) * P(H_2) + \dots + P(E|H_n) * P(H_n)}$$

$$= \frac{P(H_i)}{P(E)}$$

События H_1, H_2, \dots, H_n являются гипотезами, а событие E принято называть свидетельством.

Вероятности гипотез $P(H_i)$ без учета свидетельства (т.е. не учитывающих, произошло событие E или нет) называют априорными (до проведения опытов), а вероятности $P(H_i|E)$ – апостериорными (после проведения опытов).

Величина $P(EH_i)$ – это совместная вероятность событий E и H_i (т. е. вероятность того, что произойдут оба события вместе).

$P(E)$ – это полная вероятность события E .

Теорема Байеса может быть использована в экспертных системах. Это такие компьютерные системы, которые могут частично заменять специалиста в определенных проблемных ситуациях. В них при помощи метода Байеса оценивают вероятность заключения продукционных правил с помощью данных о достоверности их посылок. В таком случае выводы будут соответствовать предположениям в теореме Байеса, а посылки – доказательствам. Обычно в посылке правил в экспертных системах содержится несколько условий. Вероятности $P(H_i)$ и $P(E|H_i)$ определяют на основе статистических данных, используя основные формулы, которые применяются в теории вероятностей (например, формулы умножения вероятностей и формулы сложения вероятностей).

I. БАЙЕСОВСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (МЕТОД БАЙЕСОВСКИХ СЕТЕЙ)

«Байесовские сети» – это понятие, которым обозначают графические структуры, служащие для визуализации вероятностных отношений между большим числом переменных, а еще структуры, которые необходимы для формирования вероятностного вывода на основе имеющийся переменных. Другое название метода байесовских сетей – «байесовская классификация». Изначально байесовская классификация применялась для представления экспертных знаний в экспертных системах в виде формальной системы или исчисления. Сейчас байесовские сети используют в качестве одного из методов Data Mining. Термин «Data Mining» означает получение

данных, их полноценный и глубокий анализ. Помимо вышеописанного, этот термин используют для обозначения системы методов нахождения в статистических данных неизвестных до этого, практически полезных знаний, необходимых для нахождения решений в разных сферах деятельности людей.

Самым простым вариантом метода, который использует байесовскую классификацию, является «наивная» классификация, иначе говоря, наивно-байесовский подход. При помощи данного подхода решаются задачи классификации. «Наивная» классификация – это довольно легкий для понимания метод классификации.

Можно выделить основные свойства наивной классификации:

1. Использование абсолютно всех переменных и нахождение всех возможных связей между ними.
2. Относительно переменных существует 2 предположения:

- все переменные обладают одинаковой значимостью;
- все переменные независимы статистически.

У байесовских сетей есть ряд преимуществ:

1. В модели связи устанавливаются между всеми возможными переменными, а так же позволяют легко обрабатывать те случаи, где значения некоторых параметров отсутствуют;
2. Байесовские сети могут быть довольно легко интерпретированы, и позволяют проводить анализ прогностического моделирования по сценарию «что, если»
3. Метод Байеса позволяет совмещать закономерности, выведенные из статистических данных, а также знания экспертов, полученные фактически;
4. С помощью байесовских сетей можно избежать чрезмерного усложнения модели.

Но, наивно-байесовский имеет следующие недостатки:

1. Перемножение условных вероятностей правильно лишь в том случае тогда, когда все входные переменные являются статистически независимы, несмотря на то, что часто этот метод показывает достаточно удовлетворительные результаты при несоблюдении условия статистической независимости, в теории подобная ситуация должна быть обработана с помощью более сложных методов, основанных на обучении байесовских сетей.
2. Обработка непрерывных переменных невозможна – необходимо преобразование переменных к интервальной шкале для того, чтобы атрибуты являлись дискретными. Но подобные преобразования нередко могут привести к потере важных закономерностей.
3. На результат классификации при использовании наивно-байесовского подхода могут повлиять только индивидуальные значения входных переменных, а вот комбинированное влияние пар или троек значений разных атрибутов здесь учитываться не будет. Это могло бы усовершенствовать уровень качества классификационной модели с позиции ее прогнозирующей точности, но тогда

неотвратно увеличило количество вариантов, которые проверяются.

Байесовская классификация находит широкое применение на практике. К примеру, совсем недавно, ее предложили использовать для фильтрации спама в персональной и корпоративной почте. Первый подобный фильтр создал американский программист Пол Грэм. Чтобы его алгоритм работал корректно, нужно обеспечить выполнение двух критериев:

Первое требование – классифицируемый объект должен обладать необходимым и достаточным количеством признаков. К этому подходят все слова из писем пользователя, исключая совсем короткие и редко встречающиеся. Второе требование – постоянное увеличение набора «спам – не спам». Эти условия правильно работают в локальных почтовых клиентах, ведь поток писем из разряда «не спам» клиента-получателя достаточно постоянен. А при наличии изменений их характер все равно не является стремительным. Но для большого количества клиентов сервера точное распознавание потока писем, входящих в категорию «не спам» представляет значительную сложность, ведь одно и то же письмо, которое выступает для одного клиента спамом, для иного клиента спамом является не будет. В связи с тем, что словарь получается колоссальных размеров и из-за отсутствия четкого разделения на спам и «не спам», качество классификации, а в данном конкретном случае решение задачи фильтрации писем, заметно снижается. Выбор байесовских сетей доверия в качестве экспертной системы в сравнении с другими направлениями их построения объясняется такими причинами:

1. Так как теория, которая лежит в основе вывода, отработана за период многих десятилетий и имеет точное обоснование, то логический вывод в байесовских сетях доверия трактуется с точки зрения вычислений. Байесовские сети контрастируют с системами, основанными на теории нечётких множеств, на теории функций доверия, и еще на теории Демпстера–Шефера. У всех этих перечисленных систем нет четкого основания с математической точки зрения. В многочисленных ситуациях они используют эвристические процедуры (такие экспертные системы, как MYCIN, EMYCIN и т.п.)

2. С психологической точки зрения гораздо проще проводить вероятностное оценивание причинно-следственных связей субъективно.

3. Теорию вероятности часто подвергают критике с позиции её использования в «знаниях», но, несмотря на это, теория вероятности не нарушает общих, фундаментальных представлений о «замкнутом мире» исследуемых объектов.

Наиболее распространёнными программными системами, которые реализуют теорию байесовских сетей доверия, являются «MSBN», фирмы Microsoft и «Hugin». Hugin – это программа, в которой реализуется система принятия решений на основе байесовских сетей доверия. У нее есть две версии – Pro и Explorer. Она функционирует в среде OS Windows, а также имеет версию под UNIX. Неплохо развитый интерфейс этой системы позволяет достаточно просто создавать базы знаний и фактов.

В ней используются два базовых режима работы: 1) режим редактирования и построения причинно-следственной сети, а также заполнения таблиц, в которых отражается условная вероятность; 2) режим расчёта вероятностных оценок для принятия на основании этого решения по всем событиям, которые входят в причинно-следственную сеть.

Расчеты можно проводить не только на основе классической теории Байеса, но и на основе методов теории возможностей. «Hugin» имеет каналы связи с самыми наиболее распространёнными программными средствами фирмы Microsoft. Данная экспертная система включает в себя основные функции любой информационной системы. Например, она способна хранить данные, выводить на принтер все элементы ЭС, а так же проводить диагностику ошибок в работе. Благодаря использованию метода Байеса при формировании статистических выводов появляется возможность совсем по-другому воспринимать оцениваемые модели, а так же исследовать их. С помощью него можно работать не только с полученными оценками, но и с соответствующими вероятностными распределениями. Так же, метод Байеса позволяет применять имеющиеся в разных формах априорные знания аналитика касаясь оценок параметров модели. Благодаря этому у нас есть возможность получения большего объема исходной информации, и мы можем более корректно показать структуру и другие характеристики анализируемой модели. Применение байесовской парадигмы к формированию статистического и верного вывода дает возможность совсем по иному воспринимать, а так же непосредственно исследовать оцениваемые модели. Он дает возможность оперировать не только полученными, найденными оценками, но и соответствующими вероятностными распределениями, использовать имеющиеся в различных формах априорные знания аналитика относительно оценок параметров модели. С помощью этого аналитик получает возможность иметь большие объемы исходной информации, а так же более точно и правдоподобно описывать структуру и другие элементы, характеризующие исследуемую модель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии / Пер. с англ. Г.Г. Пирогова и Ю.П. Федоровского; с предисл. переводчиков. М.: Статистика, 1980. 438 с.
- [2] Хей Дж. Введение в методы байесовского статистического вывода. М.: Финансы и статистика, 1987. 336с.
- [3] Виноградов, С.Ю. Применение байесовской сети в задаче классификации структурированной информации [Текст] / С.Ю. Виноградов // Программные продукты и системы. 2013. №2. С. 155-158.
- [4] Zvyagin, L.S. Iterative and non-iterative methods of Monte Carlo as actual computing methods Bayesian analysis. Proceedings of 2017 IEEE 2nd International Conference on Control in Technical Systems, CTS 2017. St. Petersburg; Russian Federation; 2017, pp. 18-21. DOI: 10.1109/SCM.2017.7970482
- [5] Zvyagin, L.S. The use of probabilistic methods and a Bayesian approach to the construction of the training and systems diagnostics. Proceedings of the 19th International Conference on Soft Computing and Measurements, SCM 2016. St. Petersburg; Russian Federation; 2016, pp. 267-272. DOI: 10.1109/SCM.2016.7519690