

Министерство образования и науки Российской Федерации

Костромской государственный университет

Б. А. Староверов, М. А. Смирнов

***ОСНОВЫ ТЕОРИИ  
СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ***

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия

Кострома  
КГУ  
2017

УДК 681.5(075)  
ББК 32.965я7  
С773

Рецензенты:

кафедра автоматики и микропроцессорной техники КГУ;  
кафедра электропривода и автоматизации промышленных установок  
Ивановского государственного энергетического университета;  
А. А. Жук, директор ООО «Сервис Кул».

С773      Староверов, Б. А.  
Основы теории систем оптимального управления : учеб. пособие /  
Б. А. Староверов, М. А. Смирнов. – Кострома : Изд-во Костром.  
гос. ун-та, 2017. – 93 с.  
ISBN 978-5-8285-0869-3

Учебное пособие содержит теоретический материал по основам оптимального управления и перечень контрольных вопросов по основным разделам.

Издание рекомендуется для студентов направлений 15.03.04, 27.03.04, 27.04.04, изучающих дисциплины «Теория автоматического управления», «Адаптивное управление», «Современные проблемы теории управления». Также пособие может быть полезно инженерам, аспирантам и преподавателям, имеющим научные и профессиональные интересы в данной области.

УДК 681.5(075)  
ББК 32.965я7

ISBN 978-5-8285-0869-3

© Костромской государственный  
университет, 2017

# СОДЕРЖАНИЕ

---

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. Виды интегральных критериев и их физический смысл.....	6
2. Виды задач оптимального управления .....	11
3. Развитие классических методов синтеза оптимального управления. Задача Эйлера .....	13
4. Синтез оптимального управления путем решения общей задачи Лагранжа .....	16
5. Каноническое представление уравнения Эйлера .....	26
6. Синтез оптимального управления при ограничениях на управляющее воздействие .....	34
7. Метод динамического программирования Беллмана.....	43
8. Связь между принципом максимума и динамическим программированием .....	54
9. Синтез оптимального по быстродействию программного управления .....	57
10. Синтез замкнутых систем управления, оптимальных по быстродействию .....	65
11. Оптимизация по расходу энергии .....	71
12. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов (АКОР).....	74
13. Системы, оптимальные по расходу ресурсов .....	82
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	92
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	93

# ВВЕДЕНИЕ

---

Теория оптимального управления – один из важнейших разделов курса теории автоматического управления.

Слово «оптимальное» означает наилучшее по какому-то признаку. Для оценки или определения оптимальности требуется показатель, который называется критерием.

Критерий (от греч. «критериус») – оценочная мера, отличительный признак, на основе которого производится оценка, определение или классификация.

Управление называется оптимальным, если оно обеспечивает наилучший в определенном смысле результат. В простейшем случае оценочным показателем является устойчивость (или запас устойчивости), точность в установившемся режиме, степень уменьшения влияния внешних воздействий, качество переходных процессов.

Количественная мера, по которой производится сравнительная оценка качества управления и которая включает в себя максимальное количество отдельных показателей качества управления, называется критерием оптимизации.

Если эту меру (критерий) можно выразить формально в виде математического выражения, то задачу синтеза оптимального управления можно сформулировать следующим образом.

Необходимо найти такой закон управления  $U(t)$  или  $U(X)$ , где  $t$  – время,  $X$  – внутренние и выходные переменные (координаты) объекта управления, который обеспечивает экстремальное значение критерию оптимальности  $J(U)$ . Для одномерных объектов речь идет соответственно о законе управления  $u(t)$  или  $u(X)$ .

Критерием оптимальности могут служить величины, характеризующие технические и экономические показатели. По одним критериям требуется обеспечить максимально возможные показатели (например, производительность технологической установки), по другим – минимально возможные (например, расход энергии в переходных процессах или длительность процесса).

Выбор критерия оптимальности является сложной и творческой задачей.

Критерий должен отвечать следующим требованиям:

- отражать максимально точно эффективность управления по техническим или/и экономическим параметрам;
- быть аналитичным, т. е. позволять решать задачу определения оптимального закона управления формальным, аналитическим путем.

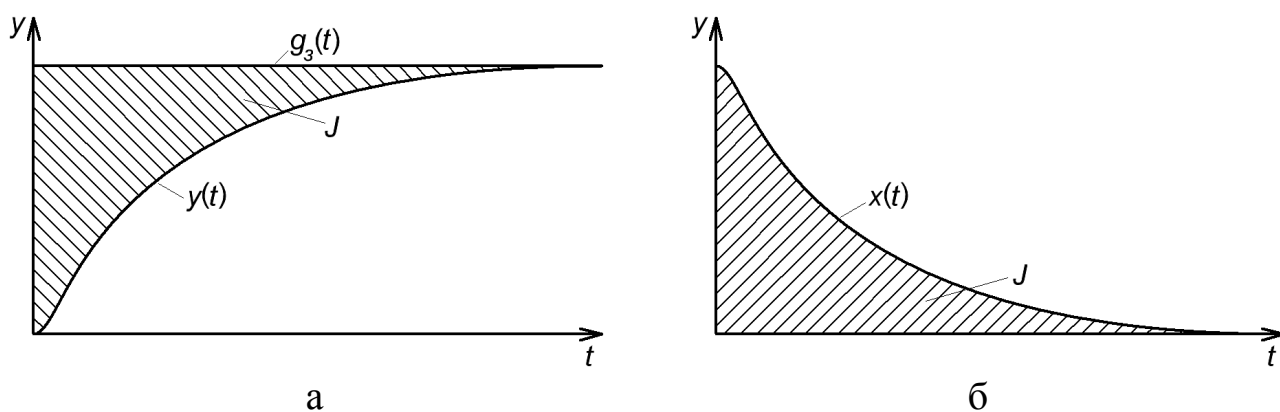
Таким требованиям в максимальной степени отвечают интегральные критерии качества управления.

## ВИДЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИТЕРИЕВ И ИХ ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Простейший интегральный критерий имеет следующий вид:

$$J = \int_0^{\infty} x(t) dt, \quad (1.1)$$

где  $x(t) = x_3(t) - y(t) = g_3(t) - y(t)$  – отклонение выходной величины объекта управления от эталонного (заданного) значения. Интеграл (1.1) равен площади, ограниченной кривыми  $x_3(t)$  или  $g_3(t)$  и  $y(t)$ , как показано на рис. 1.1а.



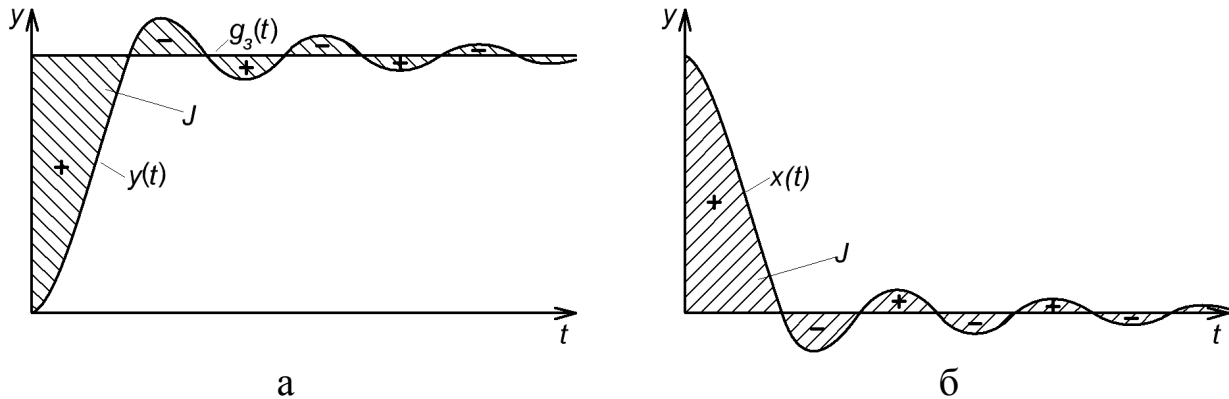
**Рис. 1.1. Физический смысл критерия (1.1):**

а – сигнал задания не равен нулю; б – сигнал задания равен нулю

Примем, что при  $g_3(t) = 0$  свободная составляющая переходного процесса  $y_{св}(t) = x(t)$ . В этом случае выражение (1.1) определяется площадью под кривой  $x(t)$ , как это показано на рис. 1.1б.

Оптимальным по критерию (1.1) будет такое управление, при котором заштрихованная площадь будет минимальна. В идеале  $J = 0$ , т. е. переходный процесс заканчивается мгновенно.

Главным недостатком критерия (1.1) является то, что он применим только для монотонных процессов. При перерегулировании или колебаниях значение интеграла (1.1) может оказаться минимальным при низком качестве переходного процесса, поскольку площади под кривыми  $g_3(t)$  и  $y(t)$  будут иметь разные знаки, т. е. они будут вычитаться (рис. 1.2).



**Рис. 1.2. Вычисление величины критерия (1.1) при колебательном переходном процессе:**

а – сигнал задания не равен нулю; б – сигнал задания равен нулю

Избавиться от знака площади позволяет квадратичный интегральный критерий, имеющий широкое практическое применение:

$$J = \int_0^{\infty} x^2(t) dt. \quad (1.2)$$

Использование интегрального критерия позволяет не только определять законы управления, которые минимизируют отклонение регулируемой величины от заданного значения, но и минимизировать расход энергии. Энергия, затрачиваемая на переходный процесс, пропорциональна квадрату амплитуды управляющего воздействия, поэтому интегральный критерий, требующий, чтобы расход энергии был минимальным, будет иметь следующий вид:

$$J = \int_0^{\infty} u^2(t) dt. \quad (1.3)$$

Объединение (1.2) и (1.3) дает критерий оптимальности, ограничивающий как отклонение регулируемой величины, так и расход энергии:

$$J = \int_0^{\infty} (qx^2(t) + ru^2(t)) dt. \quad (1.4)$$

В (1.4)  $q$  и  $r$  – постоянные коэффициенты, задаваемые в зависимости от того, в какой степени необходимо соответственно ограничить  $x^2(t)$  и  $u^2(t)$ .

С помощью квадратичного интегрального критерия можно ограничить также скорость изменения регулируемой величины, ее ускорение и т. д.:

$$J = \int_0^{\infty} (q_1 x_1^2(t) + q_2 x_2^2(t) + \dots + q_n x_n^2(t) + r u^2(t)) dt, \quad (1.5)$$

где  $x_1 = x$ ;  $x_2 = \dot{x}_1$ ;  $x_3 = \dot{x}_2$  и т. д.

При синтезе оптимального закона управления, минимизирующего расход материального ресурса (например, топлива), применяется критерий вида

$$J = \int_0^{\infty} c |u(t)| dt. \quad (1.6)$$

Следующий интегральный критерий определяет наиболее быстрый переходный процесс (оптимальный по быстродействию), т. е.  $t_k \rightarrow \min$ :

$$J = \int_0^{t_k} 1 dt \rightarrow \min. \quad (1.7)$$

Матричная форма записи критерия оптимальности определяется следующим образом. От описания объекта управления в виде передаточной функции

$$W_o(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

можно перейти к описанию в виде дифференциального уравнения  $n$ -го порядка:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u(t). \end{aligned} \quad (1.8)$$

От описания объекта управления (1.8) можно перейти к описанию в виде системы  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u, \\ &\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$



Переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – координаты, описывающие свободное движение состояния объекта. Тогда выходная величина объекта определяется взвешенной суммой координат  $x_i$ :

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n. \quad (1.10)$$

В матричной форме уравнения (1.9) и (1.10) записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}u, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{X}. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

В системе (1.11)  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ;  $\mathbf{A}$  – коэффициентная квадратная матрица размерностью  $[n \times n]$ ;  $\mathbf{B}$  – матрица-столбец управляющего воздействия (входная матрица) размерностью  $[n \times 1]$ ;  $\mathbf{C}$  – выходная матрица-строка размерностью  $[1 \times n]$ .

Для модели объекта вида (1.11) критерий (1.1) запишется как

$$J = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n q_i x_i(t) dt \quad (1.12)$$

или в матричной форме

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{Q}\mathbf{X}(t) dt, \quad (1.13)$$

где  $\mathbf{Q} = \text{diag} \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  – диагональная матрица.

Квадратичный интегральный критерий (1.4) и (1.5) в общем виде можно записать как

$$J = \int_0^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n q_i x_i^2(t) + \sum_{j=1}^m r_j u_j^2(t) \right) dt \quad (1.14)$$

или в матричной форме

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} + \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U}) dt. \quad (1.15)$$

## Вопросы по разделу

---

1. Какое управление называется оптимальным?
2. Каким требованиям должен отвечать критерий оптимальности?
3. Какой физический смысл имеет простейший критерий оптимальности? Условия его применимости.

4. Какие виды квадратичного критерия оптимальности применяются? Объясните их физический смысл.

5. Каким образом один и тот же критерий определяет ограничение отклонения регулируемой величины и расхода энергии?

6. Какой вид имеет интегральный критерий, который минимизирует расход материального ресурса?

7. Какой вид имеет интегральный критерий, определяющий максимальное быстродействие?

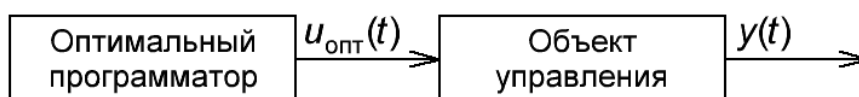
8. Как перейти от модели объекта управления в виде передаточной функции к модели в пространстве состояний в матричной форме?

9. Как представляются интегральные критерии в матричной форме?

## ВИДЫ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

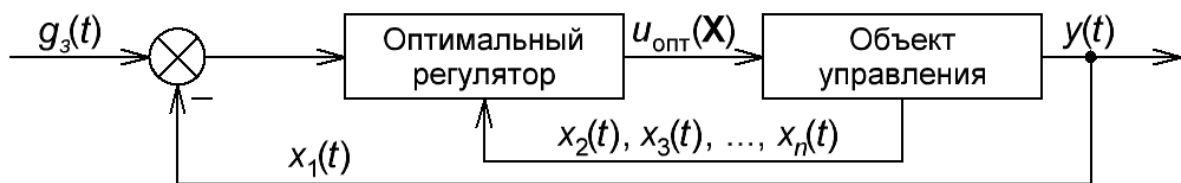
**Первый** тип задач формулируется следующим образом. Дана замкнутая система управления, состоящая из объекта управления и регулятора. Структура регулятора известна (например, П- или ПИ-регулятор). Нужно определить его коэффициенты настройки, при которых будет обеспечиваться экстремальное значение (как правило, минимальное) критерия оптимальности. Такая задача называется параметрической оптимизацией.

**Второй** тип задач формулируется следующим образом. Дана разомкнутая система автоматического управления. Требуется определить оптимальный закон изменения управляющего воздействия  $u_{\text{опт}}(t)$ , при котором обеспечивается экстремальное значение критерия оптимальности. В итоге решения этой задачи получается оптимальная система программного управления (рис. 2.1). Такую задачу можно назвать программной оптимизацией.



**Рис. 2.1. Разомкнутая оптимальная система управления**

**Третий** тип задач формулируется следующим образом. Дана замкнутая система управления, структура и параметры регулятора не известны. Их требуется найти исходя из минимизации заданного критерия оптимальности. В результате определяется закон (алгоритм) работы оптимального изменения управляющего воздействия в функции от состояния объекта управления  $u_{\text{опт}}(\mathbf{X})$ , где  $\mathbf{X}$  – вектор координат, описывающих свободное движение состояния объекта. Общая структура такой оптимальной системы представлена на рис. 2.2. Эта задача является задачей структурного синтеза оптимального регулятора.



**Рис. 2.2. Общий вид оптимальной замкнутой системы управления**

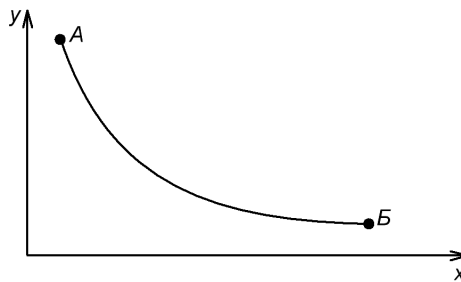
### **Вопросы по разделу**

---

1. Что определяется при параметрической оптимизации регуляторов?
2. Что называется оптимальной системой программного управления?
3. Какие задачи решаются при синтезе замкнутой оптимальной системы регулирования?

## РАЗВИТИЕ КЛАССИЧЕСКИХ МЕТОДОВ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ. ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА

Впервые задачу определения вида функции, которая бы обеспечивала минимум некоторому критерию, который в свою очередь также является функцией, сформулировал Иоганн Бернулли в 1696 г. Задача Бернулли состояла в следующем. Требуется найти форму пути (форму желоба), по которому материальная точка массой  $M$  (шарик массой  $M$ ) переместится (скатится) под действием силы тяжести из точки  $A$  в точку  $B$  за минимальное время (рис. 3.1). Другими словами, необходимо найти траекторию наискорейшего спуска – брахистохрону.



**Рис. 3.1. Траектория перемещения материальной точки  
(форма желоба, по которой скатывается шарик)**

Эта задача была решена в 1744 г. Леонардо Эйлером с помощью разработанного им метода – вариационного исчисления. Суть этого метода заключается в следующем. Имеется некоторая функция  $J(x)$ , где  $x = f(t)$ . Функция  $J(f(t))$  называется функционалом. Необходимо найти такую функцию  $f(t)$ , называемую экстремалью, при которой функционал  $J(f(t))$  достигает экстремального значения (по аналогии с задачей нахождения значения аргумента  $t$ , при котором функция  $f(t)$  экстремальна) из некоторого набора функций, которые заданы на  $[t_n, t_k]$  зависимостью вида

$$J = \int_{t_H}^{t_K} F(x, \dot{x}, t) dt. \quad (3.1)$$

Эйлер доказал, что для одномерных объектов этот функционал (критерий) достигает экстремума при условии, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) называется уравнением Эйлера.

Если функционал  $J$  зависит от функции  $F$ , аргументом которой является  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , то получается система из  $n$  уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad (3.3)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Решением уравнения (3.2) или системы уравнений (3.3) является зависимость  $x(t)$  или система зависимостей  $x_i(t)$ , определяющая экстремаль, графически выражаемую в виде кривой в пространстве координат  $x_i$ .

Если функционал зависит от высших производных в виде

$$J = \int_{t_H}^{t_K} F(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}, t) dt, \quad (3.4)$$

то экстремаль определяется интегрированным уравнением Эйлера – Пуассона:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} = 0. \quad (3.5)$$

### **Пример нахождения экстремали**

Найдем экстремаль функционала, представляющего квадратичный интегральный критерий:

$$J = \int_0^{\infty} (x^2 + \tau^2 \dot{x}^2) dt, \quad (\text{п3.1})$$

т. е.

$$F(x, \dot{x}, t) = x^2 + \tau^2 \dot{x}^2, \quad (\text{п3.2})$$

где  $\tau$  – постоянный коэффициент, определяющий степень ограничения производной  $\dot{x}$ .

Исходя из формулы (п3.2) определим, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\tau^2 \dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\tau^2 \ddot{x}.$$

Подставив эти значения в уравнение Эйлера, получим, что

$$2x - 2\tau^2 \ddot{x} = 0. \quad (\text{п3.3})$$

Решение этого уравнения дает экстремаль, т. е. функцию, которая доставляет критерию (п3.1) экстремум:

$$x(t) = c_1 e^{t/\tau} + c_2 e^{-t/\tau}. \quad (\text{п3.4})$$

Постоянные интегрирования  $c_1$  и  $c_2$  определяются из граничных условий:

$$x(0) = x_n; \quad x(\infty) = 0.$$

Тогда получим

$$x(t) = x_n e^{-t/\tau}. \quad (\text{п3.5})$$

Видно, что экстремаль представляет собой экспоненциальную функцию. Следовательно, оптимальная траектория переходного процесса по критерию (п3.1) будет представлять собой экспоненту, а скорость протекания этого процесса будет определяться коэффициентом  $\tau^2$  или  $q_2$  в критерии (1.5). Этим определяется физический смысл квадратичного интегрального критерия с ограничением на первую производную от  $x$ .

## Вопросы по разделу

---

1. Чем отличается функционал от функции?
2. Что определяет уравнение Эйлера для функции одной и нескольких переменных?
3. В чем отличие уравнения Эйлера – Пуассона от уравнения Эйлера?
4. Что представляет экстремаль, определяемая квадратичным интегральным критерием?

## СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПУТЕМ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЛАГРАНЖА

В 1759 г. Жозеф Луи Лагранж в работе по вариационному исчислению развил идею Эйлера для случая, когда экстремали  $x_i(t)$  функционала

$$J = \int_{t_n}^{t_k} F(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) dt \quad (4.1)$$

должны удовлетворять наряду с граничными условиями  $x_{in}, \dot{x}_{in}, x_{ik}, \dot{x}_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) еще дополнительным связям в виде дифференциальных уравнений:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, t) = 0. \quad (4.2)$$

Эти уравнения получаются из описания динамики объекта управления.

Задача с дополнительными дифференциальными (или голономными) связями называется общей задачей Лагранжа по определению условного экстремума функционала.

Для решения этой задачи составляется вспомогательная функция:

$$\begin{aligned} F^* &= F(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, t) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

В сокращенном виде уравнение (4.3) запишется как

$$F^* = F + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i, \quad (4.4)$$

где  $F$  – подынтегральная функция функционала (4.1);



$f_i$  – дифференциальные уравнения связи (4.2);  
 $\lambda_i(t)$  – некоторые дополнительные функции (множители Лагранжа), подлежащие определению.

На основе функции  $F^*$  составляется вспомогательный функционал:

$$J^* = \int_{t_n}^{t_k} F^* dt = \int_{t_n}^{t_k} (F + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i) dt. \quad (4.5)$$

Этот функционал, зависящий от  $n$  функций  $x_i(t)$  и от  $n$  функций  $\lambda_i(t)$ , исследуется на безусловный экстремум. Благодаря введению  $\lambda_i(t)$  все переменные  $x_i$  могут варьироваться независимо. В результате получаем задачу Эйлера.

Для функционала (4.5) записываем  $n$  уравнений Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{\partial F^*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_i} = 0. \quad (4.6)$$

Подставляя из (4.4) выражение для  $F^*$ , получим, что

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0. \quad (4.7)$$

Эти уравнения совместно с уравнениями (4.2) образуют систему из  $2n$  уравнений с  $2n$  неизвестными, т. е. задача имеет решение. При этом постоянные интегрирования определяются из граничных условий.

### ***Пример решения общей задачи Лагранжа для объекта первого порядка***

Задана передаточная функция объекта первого порядка:

$$W_o(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K_o}{T_o p + 1}. \quad (\text{п4.1})$$

Запишем (п4.1) в виде дифференциального уравнения:

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bu, \quad (\text{п4.2})$$

где  $a = -\frac{1}{T_o}$ ;  $b = \frac{K_o}{T_o}$ ;  $x_1 = y_{св}$ .

Граничные условия:  $x_1(t_n) = x_{1n}$ ;  $x_1(t_k) = x_{1k} = 0$ .

Задан квадратичный интегральный критерий оптимальности:

$$J = \int_{t_n}^{t_k} (q_1 x_1^2 + ru^2) dt \rightarrow \min. \quad (\text{п4.3})$$

В соответствии с критерием (п4.3) требуется определить для разомкнутой САУ оптимальный закон изменения управляющего воздействия  $u_{\text{опт}}(t)$ , при котором объект из начального состояния  $x_{1н}$  переводится в конечное состояние  $x_{1к}$  (оптимальное программное управление), и оптимальный регулятор  $u_{\text{опт}}(x_1)$  для замкнутой САУ.

Учитывая (4.1) и (п4.2), запишем выражение для вспомогательного функционала:

$$J^* = \int_{t_n}^{t_k} (q_1 x_1^2 + ru^2 + \lambda_1 (\dot{x}_1 - ax_1 - bu)) dt. \quad (\text{п4.4})$$

Составим уравнение Эйлера – Лагранжа для объекта первого порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left( \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_1} \right) = 0. \quad (\text{п4.5})$$

Определим, что

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial (q_1 x_1^2 + ru^2)}{\partial x_1} = 2q_1 x_1; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial (q_1 x_1^2 + ru^2)}{\partial \dot{x}_1} = 0.$$

Аналогично

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial (\dot{x}_1 - ax_1 - bu)}{\partial x_1} = -a; \quad \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial (\dot{x}_1 - ax_1 - bu)}{\partial \dot{x}_1} = 1.$$

Подставим значения частных производных в уравнение (п4.5):

$$2q_1 x_1 - a\lambda_1 - \dot{\lambda}_1 = 0. \quad (\text{п4.6})$$

Оптимальное значение управляющего воздействия должно доставлять минимальное значение функционалам  $J$  и  $J^*$ . Поэтому должно выполняться условие:

$$\frac{\partial J}{\partial u} = \frac{\partial J^*}{\partial u} = 0. \quad (\text{п4.7})$$

Подставляя в (п4.7) выражение (п4.4), получим, что

$$\frac{\partial J^*}{\partial u} = 2ru_{\text{опт}} - \lambda_1 b = 0. \quad (\text{п4.8})$$

Следовательно,

$$u_{\text{опт}}(t) = \frac{b}{2r} \lambda_1(t). \quad (\text{п4.9})$$

Таким образом, чтобы определить оптимальный закон управления  $u_{\text{опт}}(t)$ , необходимо решить систему дифференциальных уравнений, составленную из уравнений (п4.6) и (п4.2) с учетом зависимости (п4.9):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + \frac{b^2}{2r} \lambda_1, \\ \dot{\lambda}_1 &= 2q_1 x_1 - a\lambda_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п4.10})$$

Характеристическое уравнение системы (п4.10):

$$p^2 - B = 0, \quad (\text{п4.11})$$

где  $B = a^2 + \frac{q_1}{r} b^2$ .

Корни уравнения (п4.11):

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 + \frac{q_1}{r} b^2}. \quad (\text{п4.12})$$

Положительный корень  $p_1$  в решении системы уравнений (п4.10) опускаем (управление должно быть устойчивым):

$$x_1(t) = x_{1н} e^{p_2 t}. \quad (\text{п4.13})$$

Тогда

$$\dot{x}_1(t) = x_{1н} p_2 e^{p_2 t}. \quad (\text{п4.14})$$

Из уравнения (п4.2) выразим оптимальный закон программного управления:

$$u_{\text{опт}}(t) = \frac{\dot{x}_1 - ax_1}{b}. \quad (\text{п4.15})$$

Подставим в (п4.15) значения из (п4.13) и (п4.14) и получим оптимальный закон изменения управляющего воздействия:

$$u_{\text{опт}}(t) = c_2 e^{p_2 t}, \quad (\text{п4.16})$$

где  $c_2 = x_{1н} \frac{p_2 - a}{b}$ .

Зависимость  $u_{\text{опт}}(x_1)$  для замкнутой САУ с учетом (п4.13) и (п4.16) даст уравнение оптимального регулятора, а именно:

$$u_{\text{опт}}(x_1) = -K_{\text{опт}} x_1, \quad (\text{п4.17})$$

где  $K_{\text{опт}} = \frac{a - p_2}{b}$  – оптимальный коэффициент в обратной связи.

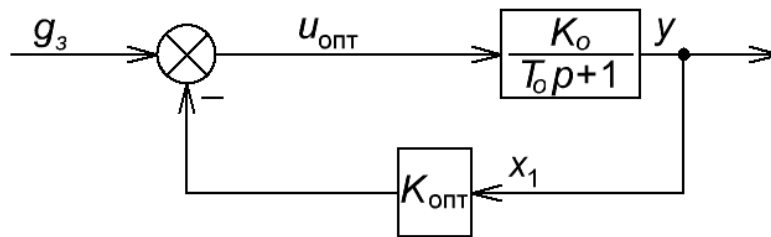
Выражение (п4.17) – уравнение пропорционального регулятора. Коэффициент в обратной связи будет вычисляться по формуле

$$K_{\text{опт}} = \frac{a - p_2}{b} = \frac{a}{b} + \frac{1}{b} \sqrt{a^2 + \frac{q_1}{r} b^2} = \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{q_1}{r}}. \quad (\text{п4.18})$$

Подставляя в (п4.18) значения параметров  $a$  и  $b$  из (п4.2), получим, что

$$K_{\text{опт}} = -\frac{1}{K_o} + \sqrt{\frac{1}{K_o^2} + \frac{q_1}{r}}. \quad (\text{п4.19})$$

Соответствующая структурная схема САУ представлена на рис. 4.1.



**Рис. 4.1. Оптимальная по критерию (п4.3) замкнутая система управления с П-регулятором**

Используя элементарные структурные преобразования, можно получить П-регулятор в прямой связи, коэффициент настройки которого будет вычисляться по той же формуле (п4.19).

### ***Пример решения общей задачи Лагранжа для объекта второго порядка***

Задана передаточная функция объекта второго порядка:

$$W_o(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K_o}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} = \frac{K_o}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1}. \quad (\text{п4.20})$$

Запишем уравнения динамики объекта в фазовых переменных (координатах):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 u. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п4.21})$$

В системе (п4.21)

$$a_{21} = -\frac{1}{T_1 T_2}; \quad a_{22} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}; \quad b_2 = \frac{K_o}{T_1 T_2}; \quad x_1 = y_{св}.$$

Граничные условия:  $x_1(t_n) = x_{1н}$ ;  $x_2(t_n) = x_{2н} = 0$ ;  $x_1(t_k) = x_{1к} = 0$ ;  $x_2(t_k) = x_{2к} = 0$ .

Задан квадратичный интегральный критерий оптимальности (п4.3).

В соответствии с критерием (п4.3) требуется определить оптимальный закон изменения управляющего воздействия  $u_{\text{опт}}(t)$ , при котором объект из начального состояния  $x_{1н}$ ,  $x_{2н}$  переводится в конечное состояние  $x_{1к}$ ,  $x_{2к}$  (оптимальное программное управление), и оптимальный регулятор  $u_{\text{опт}}(x_1, x_2)$  для замкнутой САУ.

Принимая во внимание (4.1) и (п4.21), запишем выражение для вспомогательного функционала

$$J^* = \int_{t_n}^{t_k} (q_1 x_1^2 + r u^2 + \lambda_1 (\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2 (\dot{x}_2 - a_{21} x_1 - a_{22} x_2 - b_2 u)) dt. \quad (\text{п4.22})$$

Далее составляют систему уравнений Эйлера – Лагранжа (4.7).

Для объекта второго порядка ( $i = 1, 2$ ) она будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_1} \right) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п4.23})$$

Определим, что

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial (q_1 x_1^2 + r u^2)}{\partial x_1} = 2q_1 x_1; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial (q_1 x_1^2 + r u^2)}{\partial \dot{x}_1} = 0.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} = 0.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial (\dot{x}_1 - x_2)}{\partial x_1} = 0; & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_1} &= \frac{\partial (\dot{x}_1 - x_2)}{\partial \dot{x}_1} = 1; \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial (\dot{x}_1 - x_2)}{\partial x_2} = -1; & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_2} &= 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial(\dot{x}_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - b_2u)}{\partial x_1} = -a_{21}; \quad \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_1} = 0;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial(\dot{x}_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - b_2u)}{\partial x_2} = -a_{22}; \quad \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_2} = 1.$$

Подставляя значения частных производных в уравнения (п4.23), получим систему:

$$\left. \begin{aligned} 2q_1x_1 - a_{21}\lambda_2 - \dot{\lambda}_1 &= 0, \\ -\lambda_1 - a_{22}\lambda_2 - \dot{\lambda}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п4.24})$$

Оптимальное значение управляющего воздействия должно доставлять минимальное значение функционалам  $J$  и  $J^*$ . Поэтому должно выполняться условие (п4.7):

$$\frac{\partial J}{\partial u} = \frac{\partial J^*}{\partial u} = 0.$$

Подставляя в (п4.7) выражение (п4.22), получим, что

$$\frac{\partial J^*}{\partial u} = 2ru_{\text{опт}} - b_2\lambda_2 = 0. \quad (\text{п4.25})$$

Следовательно,

$$u_{\text{опт}} = \frac{b_2}{2r}\lambda_2. \quad (\text{п4.26})$$

Таким образом, чтобы определить оптимальный закон управления  $u_{\text{опт}}(t)$ , необходимо решить систему дифференциальных уравнений, составленную из уравнений (п4.24) и (п4.21) с учетом зависимости (п4.26):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \frac{b_2^2}{2r}\lambda_2, \\ \dot{\lambda}_1 &= 2q_1x_1 - a_{21}\lambda_2, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 - a_{22}\lambda_2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п4.27})$$

Характеристическое уравнение системы (п4.27):

$$p^4 - 2Bp^2 + c = 0, \quad (\text{п4.28})$$

$$\text{где } B = a_{21} + \frac{a_{22}^2}{2} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2T_1^2T_2^2}; \quad c = \frac{q_1}{r}b_2^2 + a_{21}^2 = \frac{q_1}{r}b_2^2 + \frac{1}{T_1^2T_2^2}.$$

Корни уравнения (п4.28):

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{B + \sqrt{B^2 - c}}; \quad p_{3,4} = \pm \sqrt{B - \sqrt{B^2 - c}}. \quad (\text{п4.29})$$

Общее решение системы уравнений (п4.27) запишется как

$$x_1(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + c_3 e^{p_3 t} + c_4 e^{p_4 t}. \quad (\text{п4.30})$$

Из начальных условий следует, что слагаемые в (п4.30) с положительными корнями  $p_1$  и  $p_3$  равны нулю, т. е.  $c_1 = 0$  и  $c_3 = 0$ . Тогда

$$x_1(t) = c_2 e^{p_2 t} + c_4 e^{p_4 t}. \quad (\text{п4.31})$$

Взяв первую и вторую производные по времени от (п4.31), получим:

$$x_2(t) = c_2 p_2 e^{p_2 t} + c_4 p_4 e^{p_4 t}, \quad (\text{п4.32})$$

$$\dot{x}_2(t) = c_2 p_2^2 e^{p_2 t} + c_4 p_4^2 e^{p_4 t}. \quad (\text{п4.33})$$

Подставив (п4.31)–(п4.33) во второе уравнение (п4.21), найдем выражение для оптимального программного управления:

$$u_{\text{опт}}(t) = A_1 e^{p_2 t} + A_2 e^{p_4 t}, \quad (\text{п4.34})$$

где  $A_1 = \frac{p_2^2 - a_{22}p_2 - a_{21}}{b_2} c_2$ ;  $A_2 = \frac{p_4^2 - a_{22}p_4 - a_{21}}{b_2} c_4$ .

Значения постоянных интегрирования  $c_2$  и  $c_4$  следует найти из граничных условий.

Для определения уравнения оптимального регулятора для замкнутой САУ необходимо найти зависимость управляющего воздействия от переменных состояния объекта –  $u_{\text{опт}}(x_1, x_2)$ . Для этого выразим через эти переменные состояния производную  $\dot{x}_2$ . В результате получим, что

$$\dot{x}_2(t) = -p_2 p_4 x_1 + (p_2 + p_4) x_2. \quad (\text{п4.35})$$

Подставив выражение (п4.35) во второе уравнение системы (п4.21), найдем

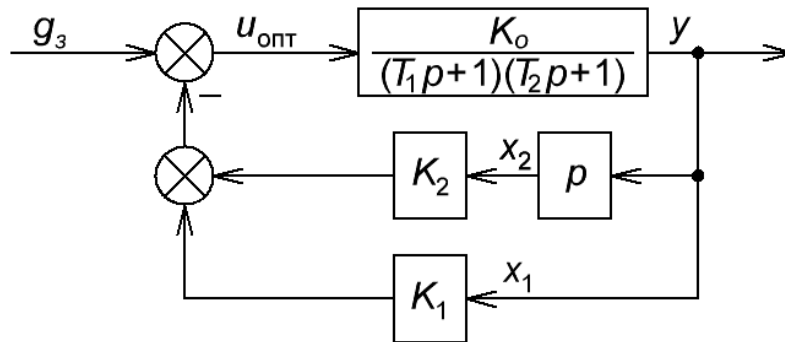
$$u_{\text{опт}} = -K_1 x_1 - K_2 x_2, \quad (\text{п4.36})$$

где

$$K_1 = \frac{p_2 p_4 + a_{21}}{b_2}; \quad K_2 = \frac{-(p_2 + p_4) + a_{22}}{b_2}. \quad (\text{п4.37})$$

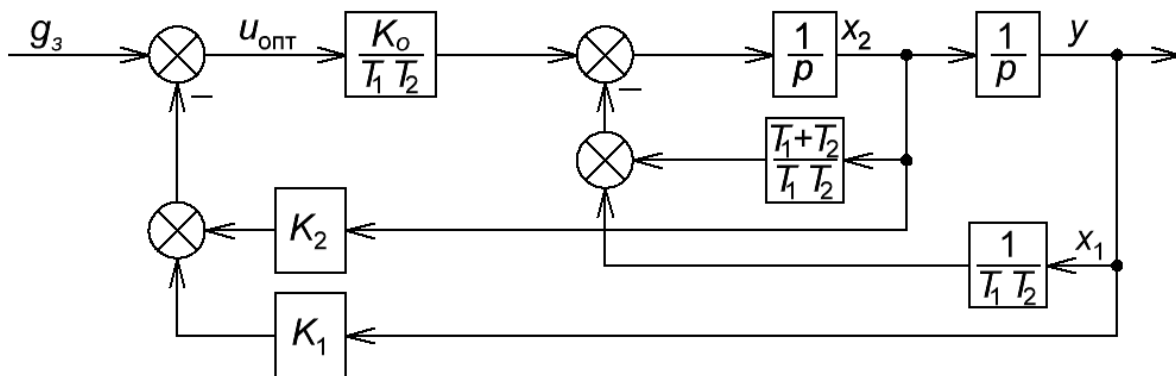
Значения  $p_2$  и  $p_4$  определяются выражениями (п4.29).

Таким образом, в соответствии с (п4.36) получаем замкнутую систему с ПД-регулятором в обратной связи, коэффициенты которого определяются соотношениями (п4.37). Структурная схема такой системы представлена на рис. 4.2. Используя структурные преобразования, можно получить ПД-регулятор в прямой связи.



**Рис. 4.2. Оптимальная по критерию (п4.3) замкнутая система управления с ПД-регулятором**

Если представить модель объекта управления в переменных состояния (п4.21), то структурная схема САУ будет иметь вид, показанный на рис. 4.3. В этом случае ПД-регулятор превращается в регулятор состояния объекта.



**Рис. 4.3. Оптимальная по критерию (п4.3) замкнутая система управления с регулятором состояния**

Оба регулятора дают один и тот же результат. Схема с регулятором состояния имеет то преимущество, что не надо производить операцию дифференцирования. В то же время ее применение возможно, если  $x_2$  – измеряемая величина, иначе надо использовать наблюдатель состояния объекта.

Требования, заложенные в критерии (п4.3), являются противоречивыми между достижением минимума квадрата свободной составляющей или ошибки регулирования (что требует увеличения расхода энергии) и



получением минимума расхода энергии. Поэтому на практике в зависимости от конкретных условий ищется компромисс путем задания различных значений коэффициентов веса  $q_1$  и  $r$  в критерии (п4.3). Например, при необходимости большего быстродействия берут  $q_1 = 0,8$  и  $r = 0,2$ . При повышенных требованиях к экономии энергии значения весовых коэффициентов меняют местами:  $q_1 = 0,2$  и  $r = 0,8$ .

### **Вопросы по разделу**

---

- 4.1. Как формулируется и решается общая задача Лагранжа?
- 4.2. Как получаются уравнения Эйлера – Лагранжа?
- 4.3. Что определяется из уравнений Эйлера – Лагранжа?
- 4.4. Из каких этапов состоит решение общей задачи Лагранжа для объектов первого и второго порядка?
- 4.5. В чем сходство и различие структур оптимальных по квадратичному интегральному критерию замкнутых систем управления с типовым регулятором и с регулятором состояния?

## КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Каноническое представление уравнения Эйлера является дальнейшим развитием вариационного исчисления. Оно в определенной степени улучшает методику решения задач по определению экстремалей.

Как уже было сказано выше, для экстремали  $x(t)$  функционала (3.1)

$$J = \int_{t_H}^{t_K} F(x, \dot{x}, t) dt$$

справедливо уравнение Эйлера (3.2):

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Для канонического представления уравнения (3.2) вводятся новые переменные  $H$  и  $q$ , которые определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \\ H &= -F + \dot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Второе уравнение в (5.1) можно записать как

$$H = -F + \dot{x}q. \quad (5.2)$$

Используя выражение (5.2), найдем частную производную  $\frac{\partial H}{\partial q}$ :

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \dot{x} \text{ или } \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{dx}{dt}. \quad (5.3)$$

Из (5.2) также следует, что  $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}$ .

С учетом этого уравнение Эйлера (3.2) можно представить как

$$-\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt}q = 0. \quad (5.4)$$

Уравнения (5.4) и (5.3) дают систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -\frac{dq}{dt}, \\ \frac{\partial H}{\partial q} &= \frac{dx}{dt} \end{aligned} \right\} \text{или} \left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Система (5.5) эквивалентна одному уравнению Эйлера.

Функция  $H = H(x, q, t)$  называется функцией Гамильтона. Она обладает тем свойством, что достигает экстремума по  $x$  при тех же условиях, что и функционал (3.1). Чтобы доказать это, найдем производную от  $H$  по  $x$ . Учитывая соотношения (5.5), получим, что

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{dq}{dt} = 0, \quad (5.6)$$

так как  $\frac{\partial H}{\partial x} \frac{dq}{dx} = \frac{dx}{dt} \frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dt}$ .

Выражение (5.6) свидетельствует, что  $H$  экстремальна по  $x$ , и при этом удовлетворяется уравнение Эйлера. Значит, при этом  $x$  будет иметь экстремальное значение и функционал  $J$ . Решение задачи определения законов оптимального управления упрощается.

Для функционала, зависящего от многих переменных

$$J = \int_{t_n}^{t_k} F(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) dt, \quad (5.7)$$

где  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ ,  
функция  $H$  будет иметь вид:

$$H = -F + \sum_{i=1}^n x_i q_i, \quad (5.8)$$

где  $q_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ .

Система уравнений, эквивалентная уравнению Эйлера (3.3), будет по аналогии с (5.5) иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \\ \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

При наличии связей в виде дифференциальных уравнений, описывающих динамику объекта управления  $f_i(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = 0$ , решается общая задача Лагранжа на условный экстремум.

Функция  $F$  заменяется функцией (см. 4.4)

$$F^* = F + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i. \quad (5.10)$$

Функция  $H$  в этом случае имеет вид:

$$H = -F^* + \sum_{j=1}^m \dot{x}_j q_j, \quad (5.11)$$

где  $q_j = \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_j}$ , а система (5.9) остается справедливой и для этого случая.

В задачах синтеза оптимального управления часто встречается функционал вида

$$J = \int_0^{t_k} f_0(x_1, x_2, \dots, x_m, u_1, u_2, \dots, u_r) dt, \quad (5.12)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_m$  — переменные (координаты), описывающие свободное движение состояния объекта управления  $n$ -го порядка ( $m < n$ );  $u_1, u_2, \dots, u_r$  — управляющие воздействия.

Уравнения динамики объекта

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m, u_1, u_2, \dots, u_r), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.13)$$

являются дифференциальными связями.

Вспомогательный функционал в этом случае будет иметь вид:

$$J^* = \int_0^{t_k} \left( f_0(x_1, x_2, \dots, x_m, u_1, u_2, \dots, u_r) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i(\mathbf{X}, \mathbf{U})) \right) dt, \quad (5.14)$$

где  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ,  $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ .

Для экстремали в многомерном пространстве состояний объекта должна удовлетворяться система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f^*}{\partial \dot{x}_i} &= 0, \\ \frac{\partial f^*}{\partial u_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f^*}{\partial \dot{u}_j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

где

$$f^* = f_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i). \quad (5.16)$$

Если ввести коэффициент Лагранжа  $\lambda_0 = -1$ , то после преобразования получим, что

$$\frac{d\lambda_j(t)}{dt} = - \sum_{i=0}^n \lambda_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (5.17)$$

$$0 = - \sum_{i=0}^n \lambda_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial u_k}, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (5.18)$$

Выведем канонические переменные:

$$q_i = \frac{\partial f^*}{\partial x_i} = \lambda_i, \quad (5.19)$$

$$H = \sum_{i=0}^n q_i f_i(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = H(\mathbf{q}, \mathbf{X}, \mathbf{U}),$$

где  $\mathbf{q} = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$  – вектор-строка.

Уравнение динамики объекта (5.13) и уравнения Эйлера (5.15) можно записать в гамильтоновой форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x_i}. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Эти уравнения совместно с уравнениями (5.18)

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0$$

составляют замкнутую систему и дают возможность полностью определить экстремаль.

В этом случае методика определения оптимального закона управления состоит в следующем.

1. Формируется или определяется функция Гамильтона, используя выражение (5.19).

2. Находится частная производная функции Гамильтона  $H$  по управляющему воздействию и приравнивается к нулю.

3. Из полученного уравнения определяется выражение оптимального управляющего воздействия, так как при этом воздействии функция Гамильтона должна быть максимальной.

4. Из решения системы уравнений (5.20) определяются вспомогательные переменные  $q_i$  или коэффициенты Лагранжа  $\lambda_i$ .

5. Окончательное выражение для закона оптимального управления получается путем подстановки в выражение для оптимального управляющего воздействия найденных значений вспомогательных переменных.

### ***Пример решения задачи по определению оптимального управления, обеспечивающего минимум расхода энергии***

Эта задача имеет широкое практическое применение. Например, требуется определить закон изменения якорного тока и скорости вращения двигателя постоянного тока, который поворачивает платформу экскаватора. Сформулируем данную задачу как общую задачу Лагранжа.

Динамика двигателя описывается уравнением равновесия моментов, т. е. момент, развиваемый двигателем, уравнивается динамическим моментом и моментом сопротивления:

$$M_{\partial\partial} = J \frac{d\omega}{dt} + M_c, \quad (\text{п5.1})$$

где  $M_{\partial\partial} = C_m i$  – момент, развиваемый двигателем;

$C_m$  – постоянная двигателя;

$i$  – якорный ток;

$J$  – момент инерции, приведенный к валу двигателя;

$\omega$  – скорость вращения вала двигателя;

$M_c$  – статический момент (момент сопротивления).

Величина потерь, равная мощности  $Q$  и затрачиваемая на нагрев двигателя за один цикл движения  $t = T$ , определяется как

$$Q = R \int_0^T i^2(t) dt,$$

где  $R$  – активное сопротивление якоря двигателя.

Поскольку  $Q$  необходимо минимизировать, то критерий оптимальности уравнения очевиден:

$$J = R \int_0^T i^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (\text{п5.2})$$

Система уравнений, описывающая динамику объекта согласно (п5.1), будет следующей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} &= a_1 i - a_2 M_c, \end{aligned} \right\} \quad (\text{п5.3})$$

где  $\alpha$  – угол поворота вала двигателя;  $a_1 = \frac{C_m}{J}$ ;  $a_2 = \frac{1}{J}$ .

На основании этих выражений сформулируем функцию Гамильтона вида (5.19):

$$H = q_1 R i^2 + q_2 \omega + q_3 (a_1 i - a_2 M_c). \quad (\text{п5.4})$$

Для нахождения экстремума  $H$  по току  $i$  на основании (п5.4) запишем условие

$$\frac{\partial H}{\partial i} = 2q_1 R i + q_3 a_1 = 0.$$

Следовательно,

$$i = -\frac{a_1 q_3}{2Rq_1}. \quad (\text{п5.5})$$

Для нахождения  $q_1$  и  $q_3$  запишем уравнения Гамильтона (5.20):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial i} = 0, \\ \frac{dq_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{dq_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \omega} = -q_2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п5.6})$$

Из решения системы уравнений (п5.6) находим, что

$$q_1 = c_1; \quad q_2 = c_2; \quad q_3 = -q_2 t + c_3 = -c_2 t + c_3.$$

Подставляя эти значения в (п5.5), получим

$$i(t) = c_4 + c_5 t,$$

где  $c_4 = -\frac{a_1 c_3}{2Rc_1}$ ;  $c_5 = \frac{a_1 c_2}{2Rc_1}$ , т. е. ток якоря двигателя должен меняться по линейному закону.

Найдем оптимальную диаграмму изменения скорости вращения двигателя  $\omega(t)$ :

$$\omega(t) = \int_0^t (a_1 i - a_2 M_c) dt = a_1 c_5 \frac{t^2}{2} + (a_1 c_4 - a_2 M_c) t + c_6. \quad (\text{п5.7})$$

Постоянные интегрирования находим из граничных условий:

$$\omega(0) = 0; \quad \omega(T) = 0; \quad \int_0^T \omega(t) dt = \alpha_{II}.$$

Следовательно,  $c_6 = 0$ , а

$$c_5 = -\frac{2(a_1 c_4 - a_2 M_c)}{a_1 T}.$$

Тогда

$$\omega(t) = -\frac{a_1 c_4 - a_2 M_c}{T} t^2 + (a_1 c_4 - a_2 M_c) t. \quad (\text{п5.8})$$

Взяв определенный интеграл от (п5.8), получим:

$$-\frac{(a_1 c_4 - a_2 M_c)}{3T} t^3 + \frac{(a_1 c_4 - a_2 M_c)}{2} t^2 \Big|_0^T = \alpha_{II}.$$

Откуда находим, что

$$c_4 = \frac{6}{a_1 T^2} \alpha_{II} + \frac{a_2}{a_1} M_c; \quad c_5 = -\frac{12}{a_1 T^3} \alpha_{II}.$$

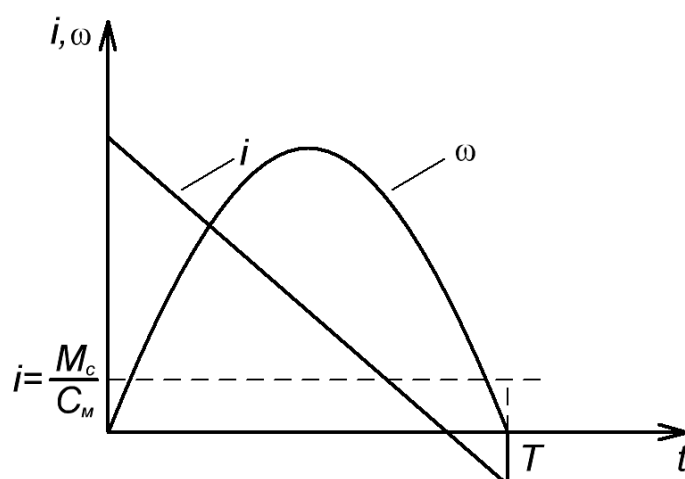
Окончательно выражения для графиков оптимального изменения тока  $i(t)$  и скорости вращения  $\omega(t)$  двигателя будут следующими:

$$i(t) = \frac{6J}{C_m T^2} \alpha_{II} \left(1 - \frac{2t}{T}\right) + \frac{M_c}{C_m},$$

$$\omega(t) = \frac{6}{T^2} \alpha_{II} \left(t - \frac{t^2}{T}\right).$$



Диаграммы этих зависимостей представлены на рис. 5.1.



**Рис. 5.1. Графики оптимального изменения  $i(t)$  и  $\omega(t)$  по критерию минимального расхода энергии на нагрев двигателя**

Расчеты показывают, что при прямоугольной диаграмме изменения тока потери увеличиваются на 33 %.

### **Вопросы по разделу**

---

1. Каким образом формируется каноническое представление уравнения Эйлера?
2. Какой вид имеет каноническое представление уравнения Эйлера для функционала, зависящего от многих переменных?
3. Какой вид имеет каноническое представление уравнения Эйлера при наличии связей в виде дифференциальных уравнений (в задаче Эйлера – Лагранжа в канонической форме)?
4. Как формируется функция Гамильтона? Каким свойством она обладает?
5. Какие преимущества дает каноническое представление уравнения Эйлера – Лагранжа?
6. Как определяются коэффициенты Лагранжа?
7. Из каких этапов состоит процесс определения оптимального закона управления?
8. Как решается задача по определению закона изменения тока якорной цепи двигателя, при котором обеспечивается минимум расхода электроэнергии в переходных процессах?

## СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЯЮЩЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

При реализации оптимального управления часто приходится накладывать ограничения на управляющие воздействия, обусловленные ограниченностью источника энергии или «прочностью» объекта управления. Например, при синтезе оптимального по быстродействию управления необходимо, чтобы

$$J = \int_0^{t_K} 1 dt \rightarrow \min. \quad (6.1)$$

Очевидно, что на управляющее воздействие должно быть наложено ограничение вида

$$|u| \leq u_{\max}. \quad (6.2)$$

В противном случае получим очевидное, но не реализуемое на практике решение:  $t_K = 0$  при  $u \rightarrow \infty$ .

Данная задача может быть решена методом классического вариационного исчисления. Идея заключается в том, что в критерий (6.1) вводится дополнительная функция от  $u$ , называемая штрафной функцией. Эта функция должна вызывать резкое увеличение критерия при превышении допустимого значения  $u_{\max}$ . Такая функция задается следующим образом (коэффициент  $k$  определяет скорость увеличения критерия):

$$L(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u + u_{\max} > 0; \\ k(u + u_{\max})^2 & \text{при } u + u_{\max} \leq 0; \\ 0 & \text{при } u_{\max} - u > 0; \\ k(u_{\max} - u)^2 & \text{при } u_{\max} - u \leq 0. \end{cases}$$

### Пример применения штрафной функции

Определить алгоритм  $u_{\text{опт}}(t)$  программного управления, обеспечивающий оптимальное по быстродействию изменение состояния объекта, описываемого передаточной функцией вида

$$W_o(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K_o}{p(T_o p + 1)}.$$

В переменных состояния динамика объекта описывается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{22}x_2 + b_2u, \end{aligned} \right\}$$

где  $a_{22} = -\frac{1}{T_o}$ ;  $b_2 = \frac{K_o}{T_o}$ ;  $x_1 = y_{\text{св}}$ ;  $|u| \leq u_{\text{max}}$ .

Граничные условия:  $x_1(0) = x_{1н}$ ;  $x_2(0) = 0$ ;  $x_1(t_k) = 0$ ;  $x_2(t_k) = 0$ .

В соответствии с общей задачей Лагранжа записываем функционал:

$$J^* = \int_0^T (1 + L(u) + \lambda_1(\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2(\dot{x}_2 - a_{22}x_2 - b_2u)) dt.$$

Находим экстремаль из уравнений Эйлера – Лагранжа:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= 0, \\ -T_o \dot{\lambda}_2 + \lambda_2 - T_o \lambda_1 &= 0, \\ \frac{K_o}{T_o} \lambda_2 &= \frac{\partial L(u)}{\partial u}, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T_o} x_2 + \frac{K_o}{T_o} u. \end{aligned} \right\} \quad (\text{пб.1})$$

Из первых двух уравнений системы (пб.1) получим:

$$\lambda_2 = A_1 + A_2 e^{-t/T_o}.$$

Графики  $L(u)$  и  $\varphi(u) = \frac{\partial L(u)}{\partial u}$  представлены на рис. 6.1.

Решение третьего уравнения системы (пб.1) при  $\alpha \rightarrow \infty$  будет следующим:

$$u_{\text{опт}}(t) = u_{\text{max}} \text{sign}(A_1 + A_2 e^{-t/T_o}). \quad (\text{пб.2})$$

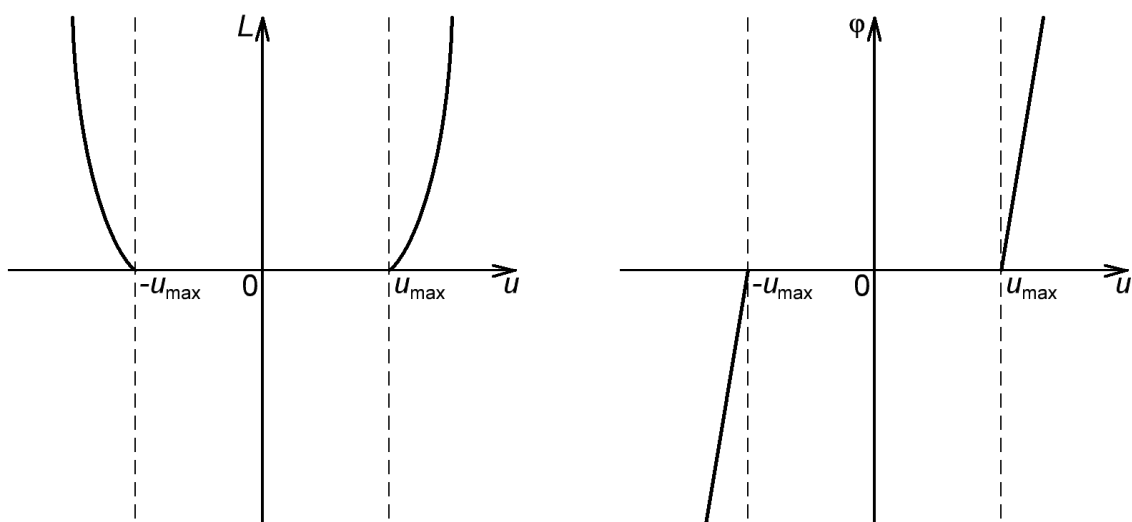


Рис. 6.1. Графики штрафных функций  $L(u)$  и  $\phi(u)$

Из (пб.2) следует, что оптимальное по быстродействию управление  $u_{\text{опт}}(t)$  представляет собой кусочно-постоянную функцию ( $u = \pm u_{\text{max}}$ ), имеющую два интервала и одно переключение управляющего воздействия.

Аналитически постоянные  $A_1$  и  $A_2$  определить крайне сложно. Поэтому решение краевой задачи решается методом припасовывания, т. е. стыковкой конечных и начальных значений решений дифференциальных уравнений.

Более эффективно решение задачи синтеза оптимального управления при ограничениях управляющих воздействий осуществляется путем использования *принципа максимума*, предложенного в 1956 г. академиком Л. С. Понтрягиным и его учениками. Данный принцип является дальнейшим развитием вариационного исчисления, в его основе лежит идея игольчатой вариации.

При бесконечно малом приращении  $dt$  получается бесконечно узкий интервал конечной амплитуды  $u_{\text{max}}$ . Действие такого управляющего сигнала на объект будет, очевидно, бесконечно малым. Приращение функционала также будет бесконечно малым. Оно обращается в ноль, когда рассматривается относительно  $u_{\text{опт}}(t)$ . Это условие положено в основу принципа максимума.

Рассмотрим применение принципа максимума Понтрягина для решения задач оптимизации.

Дана система дифференциальных уравнений, описывающих динамику объекта управления:

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{X}, \mathbf{U}), \quad (6.3)$$

где  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ;  $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ .

Управляющие воздействия ограничены по величине, т. е. принадлежат замкнутому пространству:

$$\mathbf{U} \in \Omega_U. \quad (6.4)$$

Требуется найти такой закон управления  $\mathbf{U}(t) \in \Omega_U$ , при котором объект из состояния  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_n$  переходит в конечное состояние  $\mathbf{X}(t_k) = \mathbf{X}_k$  так, чтобы функционал  $J = \int_0^{t_k} f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) dt$  достигал экстремума.

Получаем формулировку задачи такую же, как и при применении классического вариационного исчисления, за исключением ограничения (6.4).

Рассмотрим частный случай определения закона, оптимального по быстродействию:  $f_0 = 1$  и  $J = t_k$ .

Введем дополнительную переменную (координату)

$$x_0(t) = \int_0^{t_k} f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) dt, \quad (6.5)$$

тогда

$$\dot{x}_0 = f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}). \quad (6.6)$$

В итоге получим расширенную систему уравнений:

$$\dot{x}_i = f_i(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r), \quad (6.7)$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

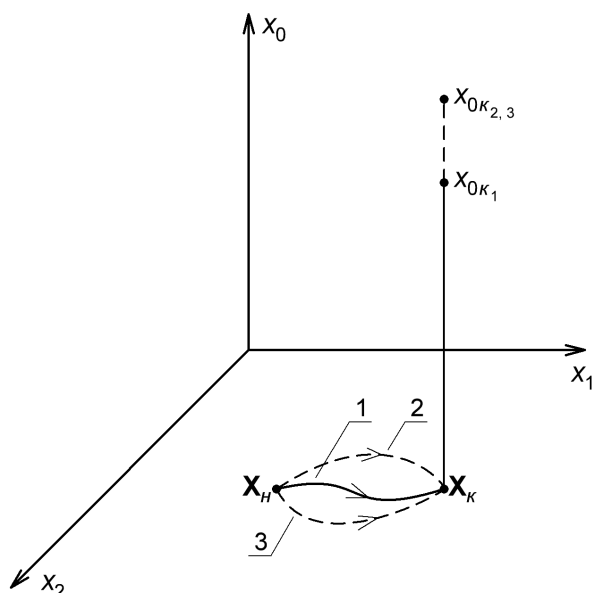
В векторной форме (6.7) запишется как

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}), \quad (6.8)$$

где расширенный вектор  $\mathbf{X} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

Критерий  $J = x_0(t_k)$  представляет в этом случае конечное значение переменной (координаты)  $x_0$ . Значит, задача формулируется как достижение экстремумом конечного значения координаты  $x_0$ .

В  $(n + 1)$ -м пространстве геометрически это можно представить как нахождение траектории изменения состояния объекта (нахождение экстремали) от  $\mathbf{X}_n$  до  $\mathbf{X}_k$ , при которой изменение координаты  $x_0$  будет минимальным (или максимальным), как показано на рис. 6.2. Здесь оптимальной является траектория 1, траектории 2 и 3 дают большую величину координаты  $x_{0k} (x_{0k1} < x_{0k2,3})$ .



**Рис. 6.2. Траектории изменения состояния объекта**

Суть принципа максимума состоит в том, что вводятся вспомогательные функции:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=0}^n \psi_j(t) \frac{\partial f_j(\mathbf{X}, \mathbf{U})}{\partial x_i}, \quad (6.9)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Эти функции аналогичны функциям  $q_i$  в каноническом представлении уравнений Эйлера – Лагранжа (см. 5.19).

Введение функции Гамильтона

$$H = \psi_0 \dot{x}_0 + \psi_1 \dot{x}_1 + \dots + \psi_n \dot{x}_n = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \quad (6.10)$$

позволяет объединить основную (6.8) и сопряженную (6.9) системы уравнений следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial x_i}. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Если управление  $\mathbf{U}(t)$  и соответствующая ему траектория  $\mathbf{X}(t)$  оптимальны, то найдется такая ненулевая вектор-функция  $\boldsymbol{\psi}(t)$ , составляющие которой удовлетворяют системе (6.11), что функция  $H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{X}, \mathbf{U})$  будет иметь максимальное значение на заданном интервале  $[t_n, t_k]$ , т. е.

$$H_{\max}(t) = \max(H(\boldsymbol{\psi}_{\text{опт}}(t), \mathbf{X}_{\text{опт}}(t), \mathbf{U}_{\text{опт}}(t))). \quad (6.12)$$

Система (6.11) служит для определения  $U_{\text{опт}}(t)$ : управление будет оптимальным, если оно обеспечивает максимум функции (6.12).

Если выполняются эти условия, то функции  $H_{\text{max}}(t)$  и  $\psi_0(t)$  являются постоянными. При этом  $H_{\text{max}}(t) = 0$ , а  $\psi_0(t) < 0$ .

Следовательно, выражение принципа максимума (6.12) в векторной форме запишется как

$$\max(H(\psi^T, f(X, U))) = 0. \quad (6.13)$$

### ***Пример применения принципа максимума***

Для объекта с передаточной функцией

$$W_o(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K_o}{T_o p + 1} \quad (\text{пб.3})$$

рассмотрим ранее решенную методом Эйлера – Лагранжа задачу оптимального управления по критерию

$$J = \int_0^{\infty} (q_1 x_1^2 + ru^2) dt. \quad (\text{пб.4})$$

Запишем модель объекта (пб.3) в виде дифференциального уравнения:

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bu, \quad (\text{пб.5})$$

где  $a = -\frac{1}{T_o}$ ;  $b = \frac{K_o}{T_o}$ ;  $x_1 = y_{\text{св}}$ .

Кроме граничных условий ( $x_1(0) = x_{1н}$ ;  $x_1(\infty) = 0$ ), накладывается ограничение по управляющему воздействию (6.2):

$$|u| \leq u_{\text{max}}.$$

Поэтому данную задачу будем решать методом принципа максимума.

Запишем исходные уравнения, введем дополнительную переменную (координату)  $x_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 &= q_1 x_1^2 + ru^2, \\ \dot{x}_1 &= ax_1 + bu. \end{aligned} \right\}$$

Сформулируем функцию Гамильтона (6.10) для применения принципа максимума:

$$H = \psi_0 \dot{x}_0 + \psi_1 \dot{x}_1 = \psi_0 (q_1 x_1^2 + ru^2) + \psi_1 (ax_1 + bu). \quad (\text{пб.6})$$

Вспомогательные переменные  $\psi_i$  определяются системой уравнений (6.11):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_0}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0, \\ \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -2q_1x_1\psi_0 - a\psi_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п6.7})$$

Тогда

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2ru\psi_0 + \psi_1b = 0. \quad (\text{п6.8})$$

Принимая  $\psi_0 = -1$ , из (п6.8) получим выражение для определения оптимального закона изменения управляющего воздействия:

$$u_{\text{опт}} = \frac{b}{2r}\psi_1. \quad (\text{п6.9})$$

Данное выражение совпадает с выражением для  $u_{\text{опт}}(t)$  в примере разд. 4 (см. п4.9) при замене  $\psi_1$  на  $\lambda_1$ .

Значение  $\psi_1$  с учетом  $\psi_0 = -1$  и соотношений (п6.7) можно определить из системы уравнений (также см. 6.11):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 + \frac{b^2}{2r}\psi_1, \\ \dot{\psi}_1 &= 2q_1x_1 - a\psi_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п6.10})$$

Решение этой системы будет

$$\psi_1 = \left( -\sqrt{a^2 + \frac{b^2q_1}{r}} - a \right) \frac{2r}{b^2} x_1. \quad (\text{п6.11})$$

Подставив (п6.11) в (п6.9), получим, что

$$u_{\text{опт}}(x_1) = -K_{\text{опт}}x_1. \quad (\text{п6.12})$$

В выражении (п6.12) значение  $K_{\text{опт}}$  определяется как

$$K_{\text{опт}} = -\frac{1}{K_o} + \sqrt{\frac{1}{K_o^2} + \frac{q_1}{r}}. \quad (\text{п6.13})$$

Также необходимо учесть ограничение (6.2).



Выпишем слагаемые функции  $H$ , которые зависят от управляющего воздействия  $u$ :

$$H^* = ru^2\psi_0 + bu\psi_1. \quad (\text{пб.14})$$

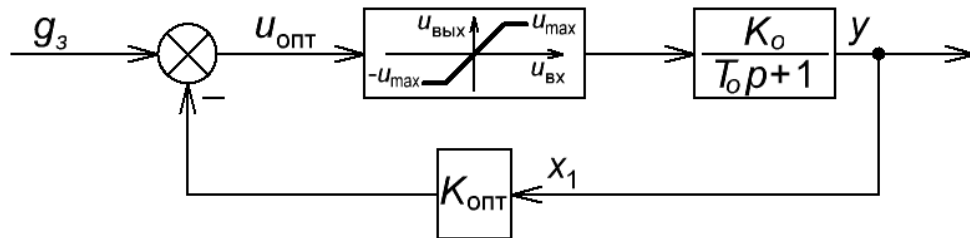
Функция  $H$  достигает максимума по  $u$  одновременно с функцией  $H^*$ . Учитывая, что  $\psi_0 = -1$ , представим  $H^*$  в следующем виде:

$$H^* = -ru^2 + bu\psi_1 = -r\left(u - \frac{b}{2r}\psi_1\right)^2 + \frac{b^2}{4r}\psi_1^2. \quad (\text{пб.15})$$

Из (пб.15) видно, что оптимальное управляющее воздействие  $u_{\text{опт}}$  не будет превосходить значения  $\pm u_{\text{max}}$  в случае, если

$$u = \begin{cases} \frac{b}{2r}\psi_1 & \text{при } \left|\frac{b}{2r}\psi_1\right| < u_{\text{max}}, \\ u_{\text{max}} & \text{при } \frac{b}{2r}\psi_1 \geq u_{\text{max}}, \\ -u_{\text{max}} & \text{при } \frac{b}{2r}\psi_1 \leq -u_{\text{max}}. \end{cases} \quad (\text{пб.16})$$

Из (пб.16) следует, что оптимальный П-регулятор с коэффициентом, определяемым выражением (пб.13), должен иметь ограничение по выходному управляющему сигналу (рис. 6.3).



**Рис. 6.3. Структура замкнутой САУ, оптимальной по квадратичному интегральному критерию (с ограничением по управляющему воздействию)**

Из рассмотренного примера следует, что канонические формы общей задачи Лагранжа и уравнения при применении принципа максимума совпадают. Благодаря этому получается один и тот же закон оптимального управления, если  $|u| \leq u_{\text{max}}$ . В то же время уравнения Эйлера – Лагранжа не позволяют учесть ограничения по  $u$ . Применение принципа максимума приводит к вполне понятному результату: к появлению звена насыщения.

Таким образом, задача синтеза оптимального закона управления на основе применения принципа максимума состоит из следующих этапов.

1. Формируется или определяется функция Гамильтона, используя выражение (6.10).
2. Находится частная производная функции Гамильтона  $H$  по управляющему воздействию и приравнивается к нулю.
3. Из полученного уравнения определяется выражение оптимального управляющего воздействия, так как при этом воздействии функция Гамильтона должна быть максимальной.
4. Из решения системы уравнений (6.11) определяются вспомогательные функции  $\psi_i$ .
5. Выражение для оптимального управляющего воздействия получается путем подстановки в выражение для этого воздействия найденных значений вспомогательных функций.
6. Формируется усеченная функция Гамильтона  $H$  из слагаемых функции  $H$ , которые зависят от управляющего воздействия.
7. Усеченная функция представляется в удобном для определения оптимального закона виде как сумма квадратов двух слагаемых, одно из которых – квадрат разности.
8. Окончательное выражение для закона оптимального управления получается путем определения условий, при которых управляющее воздействие  $u_{\text{опт}}$  не будет превосходить  $\pm u_{\text{max}}$ .

## Вопросы по разделу

---

1. Как с помощью штрафных функций учитывается ограничение по управляющему воздействию в решении задачи оптимального по быстродействию управления?
2. Какое условие положено в основу принципа максимума?
3. Как формулируется задача оптимального управления с учетом ограничений по управляющим воздействиям?
4. Как при решении задачи оптимального управления учитывается ограничение по управляющему воздействию?
5. Из каких этапов состоит определение оптимального закона управления на основе применения принципа максимума?
6. Как решается задача нахождения оптимального по квадратичному интегральному критерию управления для объекта первого порядка с учетом ограничения управляющего воздействия?
7. В чем сходство и различие методов определения законов оптимального управления с помощью канонического представления уравнений Эйлера – Лагранжа и с помощью принципа максимума?

## МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БЕЛЛМАНА

В основу динамического программирования положен принцип оптимальности. Согласно этому принципу оптимальное управление определяется конечной целью управления и состоянием системы в рассматриваемый момент времени независимо от предыстории системы (как она попала в рассматриваемую точку). Это означает, что для оптимальных траекторий каждый участок, связывающий любую промежуточную точку этой траектории с конечной точкой, также является оптимальной траекторией.

Задача оптимизации состоит в том, чтобы определить оптимальное управление  $U_{\text{опт}}(t)$  и оптимальную траекторию (экстремаль)  $X_{\text{опт}}(t)$  из условия выполнения минимума (или максимума) функции (критерия)

$$J = \int_0^{t_k} f_0(X, U) dt \quad (7.1)$$

при заданных динамикой объекта управления уравнениях

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r),$$

которые в векторной форме можно записать как

$$\dot{x}_i = f_i(X, U) \quad (7.2)$$

или

$$\dot{X} = f(X, U), \quad (7.3)$$

и заданных краевых условиях  $X(0) = X_n$ ,  $X(t_k) = X_k$  на интервале  $0 \leq t \leq t_k$  при наличии ограничений  $U \in \Omega_U$  и  $X \in \Omega_X$ , где  $\Omega_U$ ,  $\Omega_X$  – области допустимых значений управляющих воздействий и переменных состояния объекта.

В данном методе вводится вспомогательная функция  $S$ , называемая функцией Беллмана:

$$S(t_1, \mathbf{X}) = \min_{\mathbf{U}} \left[ \int_{t_1}^{t_k} f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) dt \right]. \quad (7.4)$$

Разобьем временной отрезок  $[t_1, t_k]$  на два отрезка:  $[t_1, t_1 + \Delta t]$  и  $[t_1 + \Delta t, t_k]$ .

Дадим приращение по времени  $\Delta t$ . Тогда выражение (7.4) можно представить как сумму двух интегралов:

$$S(t_1, \mathbf{X}) = \min_{\mathbf{U}} \left[ \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) dt + \int_{t_1 + \Delta t}^{t_k} f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) dt \right]. \quad (7.5)$$

Второй интеграл в (7.5) определяет оптимальную траекторию на втором отрезке. Тогда согласно определению функции Беллмана

$$S(t_1 + \Delta t, \mathbf{X}_{\Delta t}) = \min_{\mathbf{U}} \left[ \int_{t_1 + \Delta t}^{t_k} f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) dt \right], \quad (7.6)$$

где  $\mathbf{X}_{\Delta t} = \mathbf{X}(t_1) + \Delta \mathbf{X}$  – вектор переменных (координат), описывающих свободное движение состояния объекта в момент времени  $t_1 + \Delta t$ .

Следовательно, выражение (7.5) можно представить в следующем виде:

$$S(t_1, \mathbf{X}) = \min_{\mathbf{U}} \left[ \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) dt + S(t_1 + \Delta t, \mathbf{X}_{\Delta t}) \right]. \quad (7.7)$$

Пусть  $\Delta t \rightarrow 0$ , тогда выражение (7.6) после разложения в степенной ряд с точностью до малых величин  $\Delta t$  представим как

$$S(t_1 + \Delta t, \mathbf{X}_{\Delta t}) \approx S(t_1, \mathbf{X}) + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \Delta \mathbf{X}. \quad (7.8)$$

На основании уравнения (7.3) можно записать, что

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \Delta t. \quad (7.9)$$

Подставим (7.8) и (7.9) в (7.7):

$$S(t_1, \mathbf{X}) = \min_{\mathbf{U}} \left[ f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \Delta t + S(t_1, \mathbf{X}) + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \Delta t \right]. \quad (7.10)$$

В выражении (7.10) принято, что

$$\int_{t_1}^{t_1+\Delta t} f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) dt \approx f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \Delta t.$$

Уравнение (7.10) позволяет найти оптимальное значение управляющего воздействия  $\mathbf{U}_{\text{опт}}$ . В нем слагаемые  $S(t_1, \mathbf{X})$  и  $\frac{\partial S}{\partial t}$  не зависят от управляющего воздействия, поэтому их можно вынести за знак минимума, т. е.

$$S(t_1, \mathbf{X}) = \min_{\mathbf{U}} \left[ f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \Delta t + \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \Delta t \right] + S(t_1, \mathbf{X}) + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t.$$

После приведения подобных членов и деления левой и правой части (7.10) на  $\Delta t \rightarrow 0$  получим функциональное уравнение Беллмана, а именно:

$$\frac{\partial S(t_1, \mathbf{X})}{\partial t} = - \min_{\mathbf{U}} \left[ f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) + \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \right]. \quad (7.11)$$

Учитывая, что

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \langle \text{grad } S(\mathbf{X}, \mathbf{U}), \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \rangle,$$

где через  $\langle \dots \rangle$  обозначено скалярное произведение векторов, выражение (7.11) можно представить в следующем виде:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\mathbf{U}} [f_0 + \langle \text{grad } S(\mathbf{X}, \mathbf{U}), \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \rangle]. \quad (7.12)$$

Уравнение Беллмана (7.11) или (7.12) позволяет определить значение  $\mathbf{U}_{\text{опт}}$  и в соответствии с уравнениями (7.2) или (7.3) оптимальную траекторию  $\mathbf{X}_{\text{опт}}$ .

В тех случаях, когда объект стационарен и не задано конечное время переходного процесса  $t_k$ , функция Беллмана не зависит от времени, следовательно,  $-\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ . Тогда уравнение (7.11) примет вид однородного дифференциального уравнения в частных производных:

$$f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) + \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = 0. \quad (7.13)$$

Уравнение (7.13) представляет собой уравнение Беллмана для стационарных объектов управления с заданными начальными и конечными условиями и свободным временем перехода.

Для внутренней области  $\Omega_U$  (когда не учитываются ограничения на управляющие воздействия) оптимальное значение  $U_{\text{опт}}$  находится из приравнивания к нулю частной производной по управлению уравнения (7.13). В этом случае получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) + \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left( f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) + \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

В развернутом виде система (7.14) для случая, когда управляющее воздействие является скалярной величиной (объект имеет один управляющий вход), будет иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} f_0(x_1, x_2, \dots, x_n, u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) &= 0, \\ \frac{\partial f_0(x_1, x_2, \dots, x_n, u)}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)}{\partial u} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

### ***Пример применения динамического программирования для объекта первого порядка***

Найдем оптимальный закон управления для ранее рассмотренного примера (см. разд. 6) методом динамического программирования:

$$W_o(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K_o}{T_o p + 1},$$

$$J = \int_0^{\infty} (q_1 x_1^2 + r u^2) dt$$

или

$$\dot{x}_1 = a x_1 + b u,$$

где  $a = -\frac{1}{T_o}$ ;  $b = -\frac{K_o}{T_o}$ ;  $x_1 = y_{cv}$ .

Граничные условия:  $x_1(0) = x_{1н}$ ;  $x_1(\infty) = 0$ .

В соответствии с первым уравнением системы (7.15) получим, что

$$q_1 x_1^2 + ru^2 + (ax_1 + bu) \frac{\partial S}{\partial x_1} = 0. \quad (\text{п7.1})$$

Условие минимума по управляющему воздействию (второе уравнение системы (7.15)) дает следующее уравнение:

$$2ru + b \frac{\partial S}{\partial x_1} = 0. \quad (\text{п7.2})$$

Из (п7.2) следует, что

$$u = -\frac{b}{2r} \frac{\partial S}{\partial x_1}. \quad (\text{п7.3})$$

После подстановки (п7.3) в (п7.1) получим:

$$q_1 x_1^2 + ax_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} - \frac{b^2}{4r} \left( \frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \left( a + \sqrt{a^2 + \frac{b^2 q_1}{r}} \right) \frac{2r}{b^2} x_1.$$

Подставляя значение  $\frac{\partial S}{\partial x_1}$  в (п7.3), найдем оптимальный закон управления:

$$u_{\text{опт}}(x_1) = -K_{\text{опт}} x_1,$$

где  $K_{\text{опт}}$  определяется как

$$K_{\text{опт}} = \left( a + \sqrt{a^2 + \frac{b^2 q_1}{r}} \right) \frac{1}{b} = -\frac{1}{K_o} + \sqrt{\frac{1}{K_o^2} + \frac{q_1}{r}}.$$

Это совпадает с результатами, полученными в примерах разд. 4. и разд. 6.

Наиболее эффективное применение динамического программирования получается при численном решении уравнения Беллмана. Для этого заменяют дифференциальные уравнения объекта управления (7.2) или (7.3) уравнениями в конечных разностях:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r) \rightarrow \frac{\Delta x_i}{\Delta t} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r).$$

Метод динамического программирования наиболее просто реализуется в виде алгоритма *численного поиска оптимального управления*.

Рассмотрим случай, когда управляющее воздействие является скалярной величиной. Составим алгоритм для пошагового вычисления изменения состояния объекта управления (вычисление фазовой траектории) от конечного заданного состояния к начальному (попятное движение).

На первом шаге вычисляем приращение координат за время  $\Delta t$ , считая управляющее воздействие постоянным и придавая ему произвольное значение:

$$\Delta x_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\Delta t.$$

Далее вычисляем новое значение координат:  $x_i^* = x_i + \Delta x_i$ .

Рассчитываем величину критерия оптимальности:

$$J = \sum_{l=1}^L f_{0_l}(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\Delta t.$$

Меняем значение величины управляющего воздействия и снова рассчитываем изменения координат и величину критерия оптимальности. Такая операция проводится несколько раз в окрестностях точки желаемого конечного состояния объекта. За оптимальное значение управляющего воздействия принимается такое, которое дает минимум критерию  $J$ . Далее за начало отсчета принимается новое состояние объекта, и процесс пошагового поиска оптимального значения управляющего воздействия в следующий интервал времени повторяется.

Благодаря такому простому алгоритму численного поиска оптимального управления метод динамического программирования нашел широкое применение во многих прикладных областях, включая экономические задачи определения оптимальных решений.

### ***Пример решения задачи об оптимальном выборе высоты и скорости летательным аппаратом [2]***

Известно, что в начальный момент времени летательный аппарат находится на высоте  $H_n$  и имеет скорость  $V_n$ . Надо перевести его на высоту  $H_k > H_n$ , получив при этом скорость  $V_k > V_n$ . Известен расход горючего для подъема аппарата с одной высоты на другую при заданной постоянной скорости и расход горючего для увеличения скорости при постоянной высоте полета. Требуется найти оптимальный режим набора высоты и увеличения скорости, при котором расход горючего  $J$  будет наименьшим.

Предполагаем, что процесс набора высоты и скорости состоит из нескольких шагов, на каждом летательный аппарат увеличивает или только высоту, или только скорость. Таким образом, состояние летательного ап-



парата определяется высотой  $H$  и скоростью  $V$ . Фазовая траектория, переводящая точку  $S$ , изображающую летательный аппарат на фазовой плоскости  $(V, H)$ , из положения  $S_n = (V_n, H_n)$  в положение  $S_k = (V_k, H_k)$  в данном случае является некоторой ломаной.

Разобьем приращение высоты  $(H_k - H_n)$  на  $n_1$  равных частей с шагом  $\Delta H = (H_k - H_n)/n_1$ , приращение скорости  $(V_k - V_n)$  на  $n_2$  равных частей с шагом  $\Delta V = (V_k - V_n)/n_2$ . В этом случае весь процесс набора высоты и скорости будет состоять из  $n = n_1 + n_2$  шагов. Точка  $S$  из  $S_n$  в  $S_k$  может перемещаться по горизонтальным и вертикальным отрезкам. Запишем на каждом из этих отрезков соответствующий расход горючего. Каждой траектории, переводящей точку  $S$  из  $S_n$  в  $S_k$ , соответствует свой расход горючего  $J$ .

Возьмем для простоты  $n_1 = n_2 = 4$ , чтобы проследить процесс оптимизации целиком. Займемся оптимизацией последнего (восьмого) шага. Рассмотрим правый верхний угол прямоугольной сетки на плоскости  $(V, H)$  (рис. 7.1) с указанными значениями расхода горючего, необходимого для достижения соответствующего состояния (рис. 7.2). В конце седьмого шага точка  $S$  может оказаться или в точке  $S_7^1$  (нижний индекс – номер шага, верхний – номер возможного состояния, при этом нумерация ведется по диагонали снизу вверх), или в точке  $S_7^2$ , из которых за один последний шаг можно перейти в  $S_k$  единственным образом. На восьмом шаге выбора условного управления нет (оно единственно для  $S_7^1$  и  $S_7^2$ ). В каждой точке на рис. 7.1 обозначены минимальные (неизбежные для данного случая) расходы горючего, которое необходимо затратить, чтобы попасть из  $S_7^1$  или  $S_7^2$  в положение  $S_k$ . Стрелкой показано направление движения точки  $S$  из одного состояния в другое.

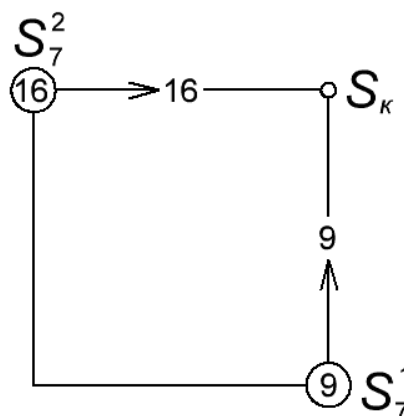


Рис. 7.1. Правый верхний угол прямоугольной сетки на плоскости  $(V, H)$

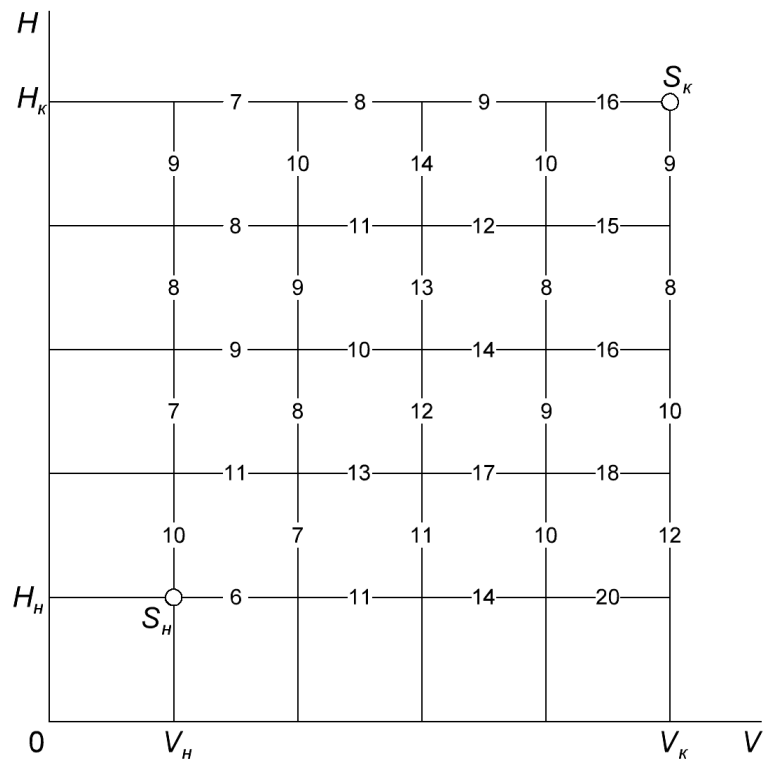


Рис. 7.2. Стоимости переходов в новое состояние на плоскости  $(V, H)$

Перейдем к выбору оптимального управления на предпоследнем (седьмом) шаге, для чего рассмотрим все исходы шестого шага, из которого за два шага можно попасть в состояние  $S_K$ . Таких исходов три:  $S_6^1, S_6^2, S_6^3$  (рис. 7.3).

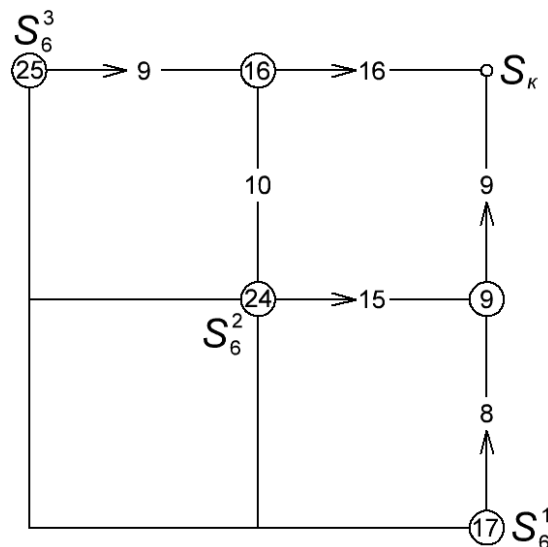


Рис. 7.3. Варианты управлений после шестого шага

Переход из  $S_6^1$  и  $S_6^3$  в точку  $S_K$  за два шага можно выполнить единственным образом со стоимостью в 17 и 25 единиц горючего соответственно. Оптимальное движение для каждого случая показано стрелками.

Из  $S_6^2$  в  $S_K$  за два шага можно попасть двумя способами: вверх направо или направо вверх. В первом случае потребуется 26 единиц горючего, во втором – 24. Таким образом, наименьший расход горючего будет при движении направо и вверх (это движение отмечаем стрелкой). Также обозначим на схеме в точке  $S_6^2$  оптимальный расход горючего для перехода из данного состояния в конечное.

Если оптимальных управлений получается несколько, то выбирается произвольное из них. Далее по аналогии оптимизируется пятый шаг, когда рассматриваются все точки, из которых за три шага можно перейти в точку  $S_K$ .

Если продолжать описанный процесс, то можно дойти до начальной точки  $S_H$ . При этом получится схема (рис. 7.4), на которой в каждом кружке обозначен наименьший расход горючего при перемещении из данного состояния в  $S_K$ . Стрелка показывает направление, в котором надо перемещаться из текущей точки, чтобы расход горючего был минимальным.

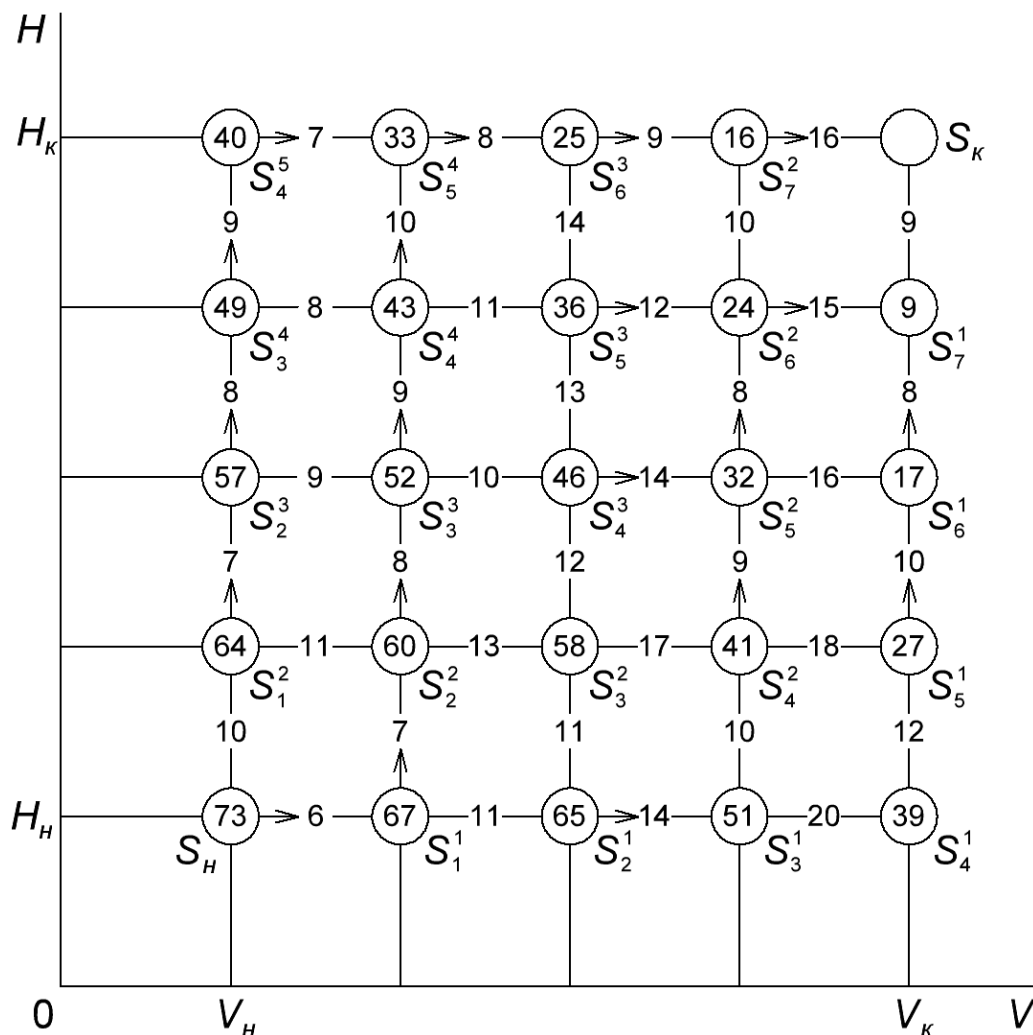


Рис. 7.4. Схема перемещений с минимальным расходом горючего

Анализируя приведенную на рис. 7.4 схему, можно сделать вывод, что оптимальное управление состоит из следующих шагов: на первом шаге увеличиваем скорость на  $\Delta V$  при постоянной высоте  $H_n$ ; на втором, третьем, четвертом и пятом шагах увеличиваем набор высоты до  $H_k$  при постоянной скорости  $V_n + \Delta V$ ; на шестом, седьмом и восьмом шагах увеличиваем скорость до  $V_k$  при постоянной высоте  $H_k$ . При таком управлении расход горючего будет минимальным и составлять 73 единицы. Соответствующая фазовая траектория показана на рис. 7.5.

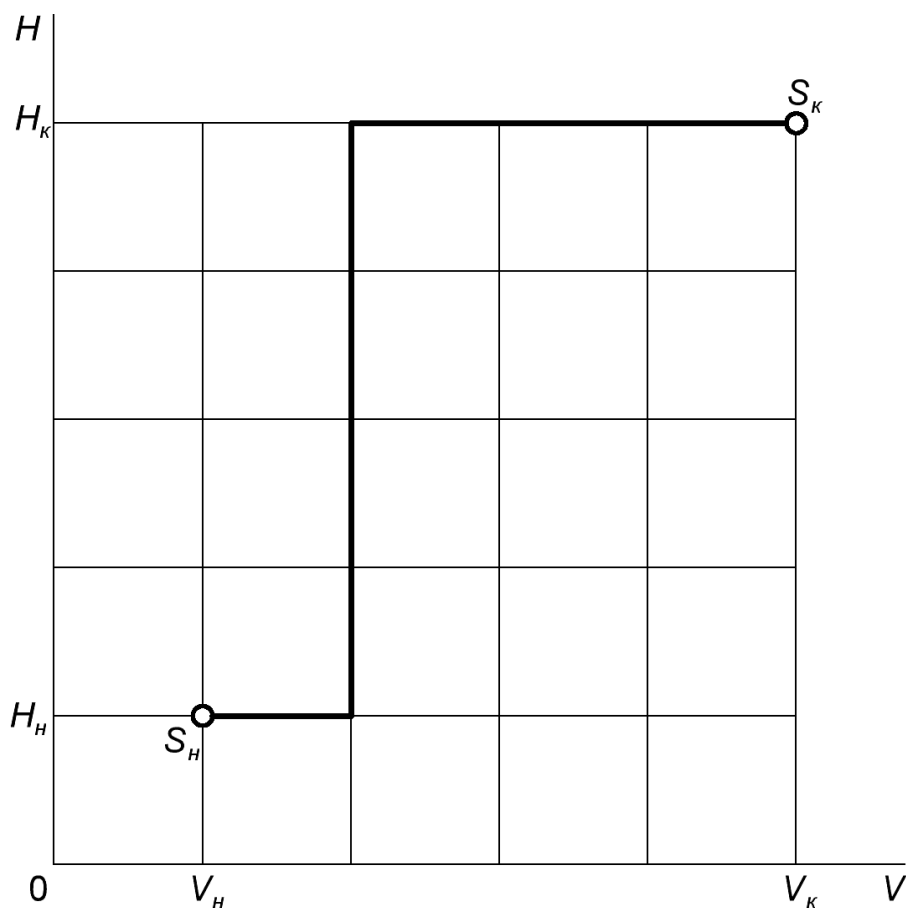


Рис. 7.5. Схема перемещений с минимальным расходом горючего

## Вопросы по разделу

1. Какой принцип положен в основу динамического программирования?
2. Как формулируется задача оптимального управления с учетом ограничений по управляющим воздействиям?
3. В чем состоит идея «попятного движения»?
4. Как определяется вспомогательная функция Беллмана?

5. Как записывается уравнение Беллмана для стационарных систем с заданными начальными и конечными условиями и свободным временем перехода?

6. Из какой системы уравнений определяется закон оптимального управления, когда не учитываются ограничения на управляющие воздействия?

7. Из каких этапов состоит алгоритм пошагового поиска оптимального значения управляющего воздействия методом динамического программирования?

8. В чем сходство и различие методов определения законов оптимального управления с помощью канонического представления уравнений Эйлера – Лагранжа и с помощью принципа максимума?

9. Как решается задача нахождения оптимального по квадратичному интегральному критерию управления для объекта первого порядка с учетом ограничения управляющего воздействия методом динамического программирования?

10. Как методом динамического программирования решается задача об оптимальном выборе высоты и скорости при движении летательного аппарата?

## СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРИНЦИПОМ МАКСИМУМА И ДИНАМИЧЕСКИМ ПРОГРАММИРОВАНИЕМ

Принцип максимума Л. С. Понтрягина геометрически можно представить следующим образом. Пусть необходимо перевести объект управления второго порядка из начального состояния  $\mathbf{X}_n = \{x_{1n}, x_{2n}\}$  в конечное  $\mathbf{X}_k = \{x_{1k}, x_{2k}\}$  таким способом, чтобы значение критерия  $J = x_0(t_k)$  было минимальным (см. рис. 6.2). В фазовом пространстве этот оптимальный процесс управления будет изображаться фазовой траекторией  $\mathbf{X}_{\text{опт}}(t)$ . В каждой точке этой траектории можно построить линию равного уровня, соответствующую значению критерия оптимальности в этой точке. Очевидно, что величина критерия оптимальности будет уменьшаться максимально быстро, что соответствует оптимальному процессу, если фазовая траектория будет нормальна к линиям равного уровня критерия оптимальности, как это показано на рис. 8.1. Математически это условие означает, что на протяжении всей траектории скалярное произведение вектора скорости  $\dot{\mathbf{X}}$  на вектор, обратный градиенту изменения критерия оптимальности, должно быть максимальным, т. е. должен соблюдаться принцип максимума.

Вектор, обратный градиенту критерия  $J(x_1, x_2)$ , – вектор  $\boldsymbol{\psi}$  (см. 6.11):

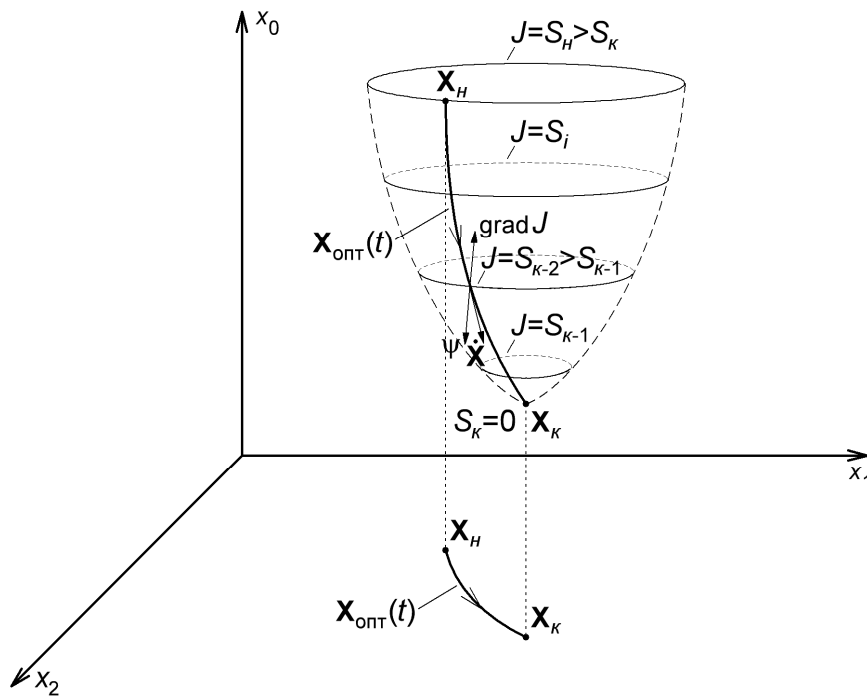
$$\boldsymbol{\psi} = -\text{grad}J(x_1, x_2). \quad (8.1)$$

Произведение векторов  $\boldsymbol{\psi}$  и  $\dot{\mathbf{X}}$  есть функция Гамильтона:

$$H = \langle \boldsymbol{\psi}, \dot{\mathbf{X}} \rangle = \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i = \max. \quad (8.2)$$

Из (8.2) следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{\partial H}{\partial \psi_i} = \frac{dx_i}{dt}. \quad (8.3)$$



**Рис. 8.1. Геометрическая интерпретация определения оптимальной траектории изменения состояния объекта управления**

Из (8.2) следует также, что

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{j=0}^{n+1} \psi_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i}. \quad (8.4)$$

На основании (8.3) и (8.4) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Выражение (8.5) совпадает с выражением (6.11).

Функция Беллмана (7.4) представляет определенное значение критерия оптимальности для определенного момента времени  $t_1$ . Следовательно, в пространстве состояний объекта управления или, как это показано на рис. 8.1, линии равного уровня  $J$  являются конкретными значениями функции Беллмана  $S$ .

Учитывая (7.4), можно написать, что

$$\psi_i = -\frac{\partial S}{\partial x_i}. \quad (8.6)$$

Таким образом, выражение (8.6) определяет связь между принципом максимума и динамическим программированием.

## Вопросы по разделу

---

1. Почему принцип Л. С. Понтрягина называется принципом максимума?
2. В чем сходство и различие метода динамического программирования и принципа максимума?
3. Как математически выражается связь между принципом максимума и динамическим программированием?



## СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Как уже отмечалось, на практике наиболее часто стоит задача синтеза регуляторов, оптимальных по быстродействию. Критерием оптимальности является функционал (6.1), а именно:

$$J = \int_0^{t_k} 1 dt \rightarrow \min.$$

Эта задача имеет смысл только при учете ограничения управляющего воздействия (6.2).

Решение данной задачи методом классического вариационного исчисления связано с большими трудностями. Поэтому наиболее подходящим вариантом является использование принципа максимума или динамического программирования. Применим принцип максимума для решения задачи о предельном быстродействии.

Из (6.1) следует, что

$$f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = 1. \quad (9.1)$$

Тогда расширенная функция Гамильтона согласно (6.10):

$$H = \psi_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(\mathbf{X}, \mathbf{U}), \quad (9.2)$$

где  $f_i(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \dot{x}_i$  – уравнения динамики объекта управления.

Принимая во внимание (9.1), функцию Гамильтона (9.2) целесообразно представить в следующем виде:

$$H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(\mathbf{X}, \mathbf{U}). \quad (9.3)$$

Дополнительные переменные  $\psi_i$  определяются из решения системы уравнений (6.11):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \end{aligned} \right\}$$

При решении данной системы надо учитывать, что  $\psi_0 = \text{const}$ , следовательно,  $\frac{d\psi_0}{dt} = 0$ .

Зная  $\psi_i$ , необходимо найти такой закон оптимального управления  $U \in \Omega_U$ , при котором на отрезке времени  $0 \leq t \leq t_k$  функция Гамильтона

$$H(\psi^T, f(X, U)) \rightarrow \max,$$

т. е. объект при этом управлении переходит из состояния  $X(0) = X_n$  в конечное состояние  $X(t_k) = X_k$  за минимальное время.

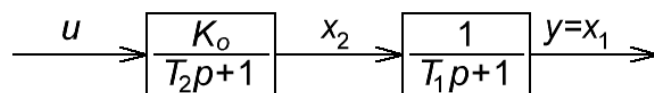
### ***Пример решения задачи определения***

### ***оптимального по быстродействию программного управления***

Рассмотрим объект второго порядка:

$$W_o(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K_o}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} = \frac{K_o}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1}. \quad (\text{п9.1})$$

Структурная схема объекта представлена на рис. 9.1.



**Рис. 9.1. Структурная схема объекта управления второго порядка**

В соответствии со структурной схемой на рис. 9.1 запишем уравнение динамики объекта (п9.1) относительно переменных (координат)  $x_1, x_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u, \end{aligned} \right\} \quad (\text{п9.2})$$

где  $a_{11} = -\frac{1}{T_1}$ ;  $a_{12} = \frac{1}{T_1}$ ;  $a_{21} = 0$ ;  $a_{22} = -\frac{1}{T_2}$ ;  $b_2 = \frac{K_o}{T_2}$ .

Сформируем функцию Гамильтона (9.2):

$$H = \psi_0 1 + \psi_1 (\dot{x}_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) + \psi_2 (\dot{x}_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - b_2u). \quad (\text{п9.3})$$

Определяем дополнительные функции (см. 6.11):

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \psi_2 = a_{11} \psi_1 = -\frac{1}{T_1} \psi_1, \quad (\text{п9.4})$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \psi_2 = a_{12} \psi_1 + a_{22} \psi_2 = \frac{1}{T_1} \psi_1 - \frac{1}{T_2} \psi_2. \quad (\text{п9.5})$$

Примем  $\psi_0 = -1$ . Из решения уравнения (п9.4) определяем

$$\psi_1(t) = c_0 e^{-t/T_1}. \quad (\text{п9.6})$$

Из уравнения (п9.5) с учетом (п9.6) получим:

$$\psi_2(t) = e^{-t/T_2} \left( \int \frac{1}{T_1} c_0 e^{-t/T_1} e^{t/T_2} dt + c_2 \right) = c_1 e^{-t/T_1} + c_2 e^{-t/T_2}. \quad (\text{п9.7})$$

Для определения  $u_{\text{опт}}(t)$ , при котором функция  $H$  будет максимальна, составим функцию из слагаемых выражения (п9.3), зависящих от  $u$ :

$$H^*(u) = -b_2 u (c_1 e^{-t/T_1} + c_2 e^{-t/T_2}). \quad (\text{п9.8})$$

Оптимальный закон управления определяется из максимального значения  $H^*$ , т. е.  $H_{\text{мах}}^* = H(u_{\text{опт}})$ .

С учетом ограничения  $|u| \leq u_{\text{мах}}$  на основе (п9.8) получим:

$$u_{\text{опт}}(t) = u_{\text{мах}} \text{sign}(c_1 e^{-t/T_1} + c_2 e^{-t/T_2}) \quad (\text{п9.9})$$

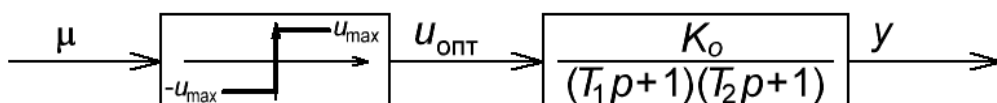
или

$$u_{\text{опт}}(t) = \mu u_{\text{мах}}, \quad (\text{п9.10})$$

где

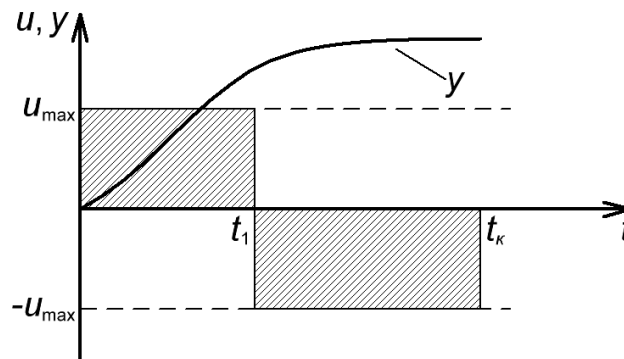
$$\mu = \text{sign}(c_1 e^{-t/T_1} + c_2 e^{-t/T_2}). \quad (\text{п9.11})$$

Структурная схема разомкнутой системы, состоящей из оптимального регулятора и объекта управления, представлена на рис. 9.2.



**Рис. 9.2. Структурная схема оптимальной по быстродействию разомкнутой системы с релейным регулятором**

Из анализа выражения (п9.11) следует, что функция  $u$  будет переключать реле один раз с максимального положительного значения управляющего воздействия  $u_{\max}$  на максимальное отрицательное значение управляющего воздействия  $-u_{\max}$ , т. е.  $u_{\text{опт}}(t)$  будет иметь два знакопостоянных интервала (рис. 9.3). Тот же результат был получен при решении задачи с помощью вариационного исчисления с применением штрафной функции (см. пб.2).



**Рис. 9.3. Кривая оптимального по быстродействию переходного процесса для объекта второго порядка**

Моменты времени  $t_1$  и  $t_k$  определяются из решения системы уравнений (п9.2) с учетом граничных условий по интервалам  $u = u_{\max}$  и  $u = -u_{\max}$ . Затем эти интервалы стыкуются (метод решения уравнений припасовыванием).

Задача определения оптимального программного управления по максимальному быстродействию в общем случае на основе принципа максимума решается по следующей методике.

Дано описание динамики объекта управления в координатах состояния:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad (9.4)$$

где  $\mathbf{A}$  — матрица коэффициентов размерностью  $[n \times n]$ ;

$\mathbf{B}$  — входная матрица размерностью  $[n \times m]$ ;

$\mathbf{X}$  —  $n$ -мерный вектор переменных состояния объекта;

$\mathbf{U}$  —  $m$ -мерный вектор управляющих воздействий.

Заданы начальные условия:  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_n$ ;  $\mathbf{X}(t_k) = \mathbf{X}_k$ . Заданы ограничения на управляющие воздействия:

$$\mathbf{U} \in \Omega_{\mathbf{U}} \text{ или } |u_j| \leq u_{j\max}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (9.5)$$

Критерий качества управления:

$$J = \int_0^{t_k} 1 dt = t_k. \quad (9.6)$$

Необходимо найти вектор  $\mathbf{U}_{\text{опт}}(t)$ , при котором время перехода  $t_k$  объекта из начального состояния в конечное будет минимальным.

Запишем функцию Гамильтона с учетом, что  $\psi_0 = -1$ :

$$\mathbf{H} = -1 + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A}\mathbf{X} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{B}\mathbf{U}. \quad (9.7)$$

На основании (9.7) упростим вид функции:

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} + 1 = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A}\mathbf{X} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{B}\mathbf{U}. \quad (9.8)$$

Максимальное значение этой функции при  $t \in [0, t_k]$  на оптимальной траектории изменения состояния объекта ( $\mathbf{H}_{\text{max}} = 0$ ):

$$\mathbf{H}_{\text{max}}^* = 1. \quad (9.9)$$

Соотношения (9.8) и (9.9) вместе с начальными и конечными условиями образуют набор условий, достаточный для решения задачи.

Запишем в векторной форме сопряженные с уравнением динамики объекта (9.4) уравнения Гамильтона (6.11) для вспомогательных переменных:

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}. \quad (9.10)$$

Решая (9.10), получим, что

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\psi} e^{-\mathbf{A}^T t}, \quad (9.11)$$

где  $e^{-\mathbf{A}^T t} = \mathbf{A}^T t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots$

Представим входную матрицу в виде совокупности вектор-столбцов:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m]. \quad (9.12)$$

С учетом (9.12) уравнение (9.4) примет вид:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}_1 u_1 + \mathbf{b}_2 u_2 + \dots + \mathbf{b}_m u_m. \quad (9.13)$$

Для объекта с одним управляющим воздействием

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}_1 u_1. \quad (9.14)$$

Функция (9.8) с учетом (9.13) запишется как

$$\mathbf{H}^* = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A}\mathbf{X} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b}_1 u_1 + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b}_2 u_2 + \dots + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b}_m u_m. \quad (9.15)$$

Для объекта (9.14)

$$\mathbf{H}^* = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{b}_1 u_1. \quad (9.16)$$

Введем функцию

$$\mu_i = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i^T \boldsymbol{\Psi}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9.17)$$

Из (9.15) выпишем слагаемые, зависящие от управляющих воздействий:

$$\mathbf{H}^{**} = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_m u_m. \quad (9.18)$$

Для объекта (9.14)

$$\mathbf{H}^{**} = \mu_1 u_1. \quad (9.19)$$

При этом функции  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}^*$ ,  $\mathbf{H}^{**}$  достигают максимума по  $\mathbf{U}$  одновременно.

Следовательно, задача нахождения  $\mathbf{U}_{\text{опт}}(t)$  сводится к определению

$$\mathbf{H}^{**}(\mu_i u_i) \rightarrow \max \text{ при } |u_i| \leq u_{i \max}. \quad (9.20)$$

Эта функция линейно зависит от  $u_i$  и поэтому достигает максимума на границе допустимой области  $\Omega_U$ . Следовательно, условие оптимальности зависит только от знака  $\mu_i(t)$ :

$$u_i = u_{i \max} \text{sign} \mu_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9.21)$$

Это справедливо при условии, что  $\mu_i(t) = 0$  в отдельные моменты  $t$ , называемые моментами переключения  $u_{\text{опт}}(t)$  с  $u_{\max}$  на  $-u_{\max}$  и обратно. Следовательно, оптимальный закон изменения  $u(t)$  имеет разрывный характер.

### ***Теорема об $n$ интервалах***

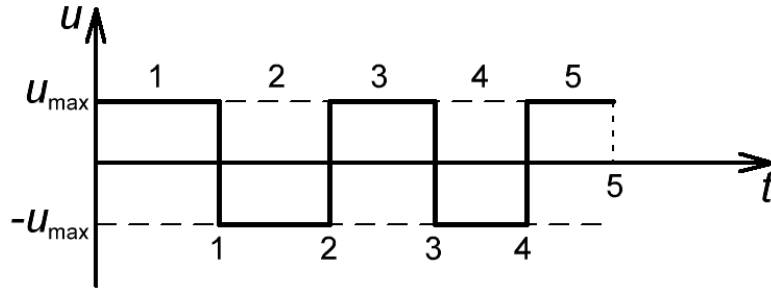
Уравнение (9.21) определяет качественный характер алгоритма управления, оптимального по быстродействию.

Более точное представление об особенностях этого алгоритма дает теорема об  $n$  интервалах. Она формулируется следующим образом.

Если объект управления описывается дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка, все корни которого – действительные и отрицательные (другими словами, матрица  $\mathbf{A}$  имеет действительные и отрицательные собственные числа), то максимальное число знакопостоянных интервалов управляющего воздействия не превосходит  $n$ , а число переключений не

может превышать  $(n - 1)$ . На каждом интервале управляющее воздействие имеет максимальную по амплитуде величину.

На рис. 9.4 представлен график  $u_{\text{опт}}(t)$  для объекта 5-го порядка.



**Рис. 9.4. Изменение  $u_{\text{опт}}$  для объекта 5-го порядка**

Из условия (9.17) следует, что нули  $\mu_i(t)$  зависят от решений  $\psi(t)$ , которые в некоординатной форме записываются следующим образом:

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^n c_{ij} e^{-\alpha_j t}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.22)$$

Отсюда

$$\mu_i(t) = \mathbf{b}_i^T \psi(t) = \mathbf{b}_i^T \sum_{j=1}^n c_{ij} e^{-\alpha_j t}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (9.23)$$

где  $c_{ij}$  — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий  $\psi(0)$ , которые не известны.

Поэтому теорема об  $n$  интервалах устанавливает только верхнюю границу числа интервалов. Анализ показывает, что функция  $\mu_i(t)$  (9.23) как сумма  $n$  экстремумов, имеет число нулей, т. е. число переключений  $u_i(t)$ , не более  $(n - 1)$ .

Следующей проблемой является определение моментов переключений  $u_i(t)$ .

Динамика объекта с одним управляющим воздействием ( $n = 1$ ) описывается уравнением (9.14). Его решение при  $|u| = u_{\text{max}}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t_k) = & \mathbf{X}_0 e^{\mathbf{A}t_k} + u_{\text{max}} \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_k - \tau)} \mathbf{b} d\tau - u_{\text{max}} \int_{t_1}^{t_2} e^{\mathbf{A}(t_k - \tau)} \mathbf{b} d\tau + \dots + \\ & + (-1)^{n-1} u_{\text{max}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\mathbf{A}(t_k - \tau)} \mathbf{b} d\tau = \mathbf{X}_k, \end{aligned} \quad (9.24)$$

где  $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}$  — моменты переключений.

Уравнение (9.24) решается методом припасовывания (как правило, численно с помощью ЭВМ).

## Вопросы по разделу

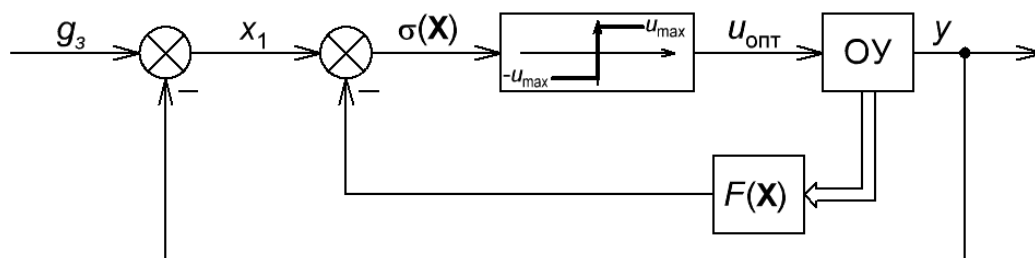
---

1. Как формулируется задача оптимального управления по быстродействию с учетом ограничений по управляющим воздействиям?
2. Как формируется расширенная функция Гамильтона?
3. Как определяются дополнительные переменные функции Гамильтона?
4. Как определяется закон оптимального управления для объекта второго порядка?
5. По какой методике в общем случае решается задача определения оптимального программного управления по максимальному быстродействию?
6. Как формулируется теорема об  $n$  интервалах?



## СИНТЕЗ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ, ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ

Для реализации оптимального по быстродействию управления используется функция  $\sigma = \sigma(\mathbf{X})$ , где  $\mathbf{X}$  – вектор координат состояния объекта. Структура такой замкнутой САУ представлена на рис. 10.1.



**Рис. 10.1. Структура замкнутой САУ, оптимальной по быстродействию**

Вектор  $\mathbf{X}(t)$  является функцией времени, следовательно,  $\sigma(\mathbf{X}(t))$  – неявная функция времени.  $F(\mathbf{X})$  – нелинейная функция, которая обеспечивает оптимальное по быстродействию управление (подлежит определению).

Вид функции  $F(\mathbf{X})$  должен быть определен так, чтобы нули функции  $\sigma(\mathbf{X}(t))$  совпадали с нулями функции, которая была определена для программного переключения  $u$ :

$$\mu(t) = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\psi}.$$

При этом не требуется точного совпадения функций  $\sigma(\mathbf{X}(t))$  и  $\mu(t)$  на интервалах между нулями.

Определение  $\sigma(\mathbf{X}(t))$  аналитическим способом для объектов высокого порядка ( $n > 2$ ) связано с большими трудностями, так как сложно путем интегрирования уравнений динамики объекта найти уравнения траекторий в  $n$ -мерном пространстве.

Когда все собственные числа матрицы  $\mathbf{A}$  уравнения (9.4) различны, ее можно представить в диагональной форме:

$$\Delta = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Уравнение динамики объекта (9.4) тогда можно представить как

$$\dot{z}_i = \alpha_i z_i + d_i u,$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Тогда уравнения проекций фазовых траекторий на координатные плоскости  $(z_i, z_n)$  при  $u = \text{const}$  будут иметь вид:

$$\frac{d}{dz_n} z_i = \frac{\alpha_i z_i + d_i u}{\alpha_n z_n + d_n u}. \quad (10.1)$$

Интегрируя выражение (10.1), получим, что

$$z_i = (z_{i0} + c_i u) \frac{z_n + c_n u}{z_{n0} + c_n u} - c_i u, \quad (10.2)$$

где  $z_{i0}, z_{n0}$  – координаты точек, через которые проходит проекция (10.2).

С помощью уравнений проекций фазовых траекторий определяются координаты точек переключений  $u$ . Для этого широко применяют также численные методы.

Аналитически задача максимального быстродействия решается для объектов второго порядка.

### ***Пример решения задачи максимального быстродействия***

Объект описывается передаточной функцией

$$W_o(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K_o}{p(T_o p + 1)} \quad (\text{п10.1})$$

или дифференциальным уравнением

$$T_o \ddot{x} + \dot{x} + K_o u = 0, \quad (\text{п10.2})$$

где  $x = x_1 = g_z - y$  (ошибка воспроизведения [8]).

В фазовых координатах объект (п10.1) относительно ошибки воспроизведения описывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{-1}{T_o} x_2 - \frac{K_o}{T_o} u. \end{cases} \quad (\text{п10.3})$$

Начальные условия состояния объекта:  $x_1(0) = x_{1н}$ ;  $x_2(0) = 0$ . Требуется перевести объект в конечное состояние ( $x_1(t_k) = x_{1к}$ ;  $x_2(t_k) = 0$ ) за минимальное время  $t$  при ограничении  $|u| \leq u_{\max}$ .

Найдем уравнение фазовой траектории, разделив первое уравнение системы (п10.3) на второе:

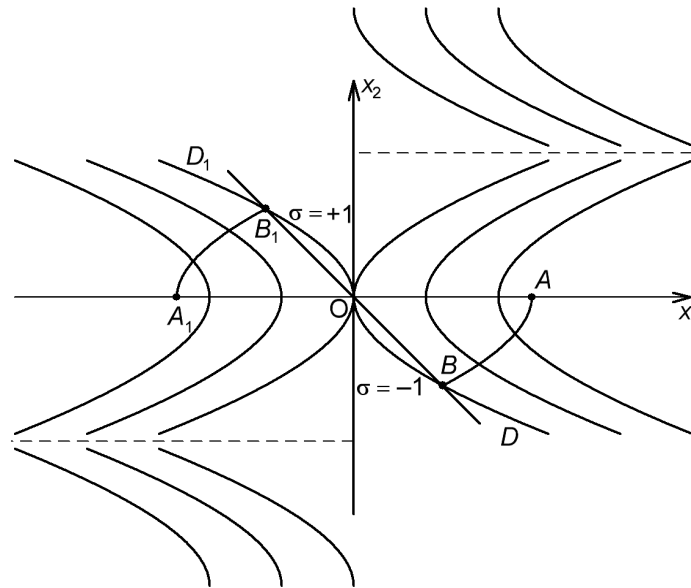
$$\frac{dx_1}{dx_2} = -T_o \frac{x_2}{x_2 + \sigma K_o u_{\max}}, \quad (\text{п10.4})$$

где  $\sigma = \pm 1$ .

Произведя интегрирование (п10.4), получим выражение для семейств фазовых траекторий:

$$x_1 = -T_o x_2 + T_o \sigma K_o u_{\max} \ln(|x_2 + \sigma K_o u_{\max}|) + C. \quad (\text{п10.5})$$

Вид этих траекторий представлен на рис. 10.2.



**Рис. 10.2. Фазовый портрет, состоящий из фазовых траекторий (п10.5)**

Для траекторий, проходящих через начало координат,  $x_1 = x_2 = 0$  (установившийся режим). Из (п10.5) видно, что при  $x_1 = x_2 = 0$  постоянная интегрирования определяется выражением:

$$C = -T_o \sigma K_o u_{\max} \ln(|\sigma K_o u_{\max}|). \quad (\text{п10.6})$$

Следовательно, уравнение фазовых траекторий, проходящих через начало координат, будет следующим:

$$x_1 = -T_o x_2 + T_o \sigma K_o u_{\max} \ln \left( \left| \frac{x_2 + \sigma K_o u_{\max}}{\sigma K_o u_{\max}} \right| \right). \quad (\text{п10.7})$$

Уравнение (п10.7) – уравнение границы перехода из  $\sigma = -1$  ( $u = -u_{\max}$ ) в область  $\sigma = 1$  ( $u = u_{\max}$ ). Ей соответствует траектория  $DO$  на фазовой плоскости (см. рис. 10.2). Аналогично находится граница перехода из области  $\sigma = 1$  ( $u = u_{\max}$ ) в область  $\sigma = -1$  ( $u = -u_{\max}$ ). Ей соответствует траектория  $D_1O$ .

Система управления должна автоматически определять знак  $u$  на первом интервале. Правильный выбор можно сделать, если принять

$$\sigma = \text{sign } x_2. \quad (\text{п10.8})$$

После подстановки (п10.8) в (п10.7) получим, что

$$x_1 = -T_o x_2 + T_o K_o u_{\max} \text{sign } x_2 \ln \left( \frac{x_2 + K_o u_{\max} \text{sign } x_2}{K_o u_{\max} \text{sign } x_2} \right). \quad (\text{п10.9})$$

При движении точки, изображающей состояние объекта, при ее падении на линию  $DOD_1$  происходит изменение знака  $u_{\max}$  (см. рис. 10.2).

На основании уравнения (п10.9) получим функцию переключения  $u$ :

$$\mu = x_1 + T_o x_2 - T_o K_o u_{\max} \text{sign } x_2 \ln \left( \frac{x_2 + K_o u_{\max} \text{sign } x_2}{K_o u_{\max} \text{sign } x_2} \right). \quad (\text{п10.10})$$

Учитывая, что  $|x_2| \text{sign } x_2 = x_2$ , выражение (п10.10) можно записать в следующем виде:

$$\mu = x_1 + T_o x_2 - T_o K_o u_{\max} \ln \left( 1 + \frac{|x_2|}{K_o u_{\max}} \right) \text{sign } x_2. \quad (\text{п10.11})$$

Следовательно, условие  $\mu = 0$  определяет требуемый алгоритм оптимального управления. Структурная схема замкнутой САУ, оптимальной по быстродействию, представлена на рис. 10.3. На этой структурной схеме нелинейный блок  $F(x_2)$  осуществляет следующее преобразование:

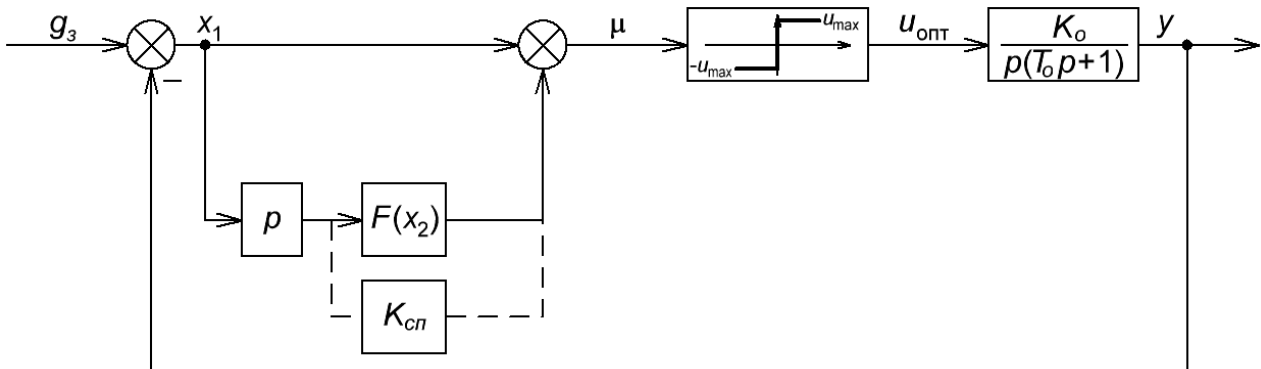
$$F(x_2) = \left( T_o x_2 - T_o K_o u_{\max} \ln \left( 1 + \frac{|x_2|}{K_o u_{\max}} \right) \text{sign } x_2 \right). \quad (\text{п10.12})$$

Упростим реализацию  $F(x_2)$ . Для этого функцию логарифма разложим в ряд Тейлора:

$$\ln(|1 + \chi|) = \chi - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{3} - \dots \quad (\text{п10.13})$$

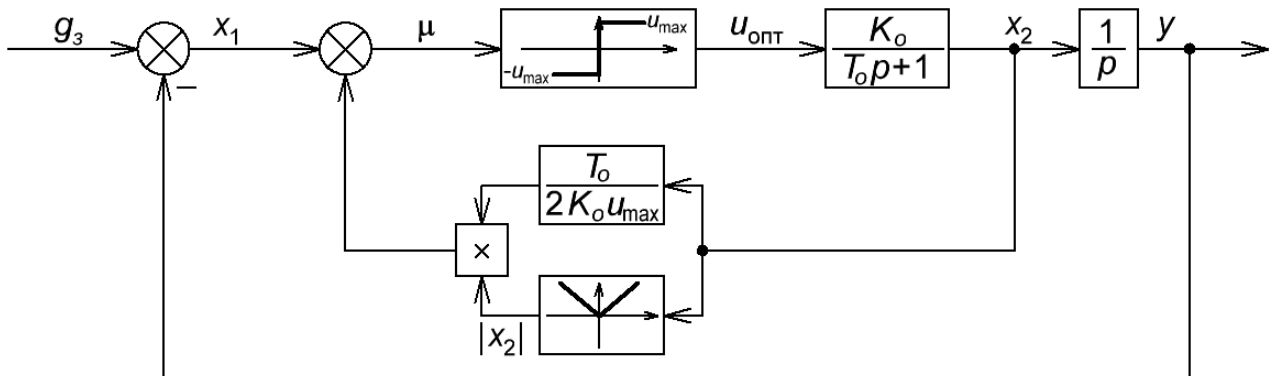
Ограничившись двумя первыми слагаемыми ряда (п10.13), получим из (п10.11), что

$$\mu = x_1 + T_o \frac{x_2 |x_2|}{2K_o u_{\max}}. \quad (\text{п10.14})$$



**Рис. 10.3. Структура оптимальной по быстродействию замкнутой САУ**

Также заменим операцию дифференцирования измерением координаты  $x_2$ . В результате получим упрощенную структуру замкнутой САУ, оптимальной по быстродействию (рис. 10.4).



**Рис. 10.4. Упрощенная структура замкнутой САУ, оптимальной по быстродействию**

Следующим шагом упрощения является замена функции  $F(x_2)$  постоянным коэффициентом  $K_{сп}$ , который определяется прямой  $BOB_1$  (см. рис. 10.2). Эта упрощенная связь показана штриховой линией на рис. 10.3.

## Вопросы по разделу

---

1. Структура замкнутой САУ, оптимальной по быстродействию.
2. При каком условии можно аналитически определить закон оптимального по быстродействию управления для объекта высокого порядка?
3. Как определяются координаты точек переключений управляющих воздействий для объекта высокого порядка, имеющего действительные и различные корни характеристического уравнения?
4. Как определяются уравнения фазовых траекторий объекта второго порядка при значениях управляющего воздействия, равного  $\pm u_{\max}$ ?
5. Как определяется функция переключения управляющего воздействия?
6. Как определяется нелинейная функция регулятора оптимальной по быстродействию замкнутой САУ?
7. Структура упрощенной замкнутой САУ, оптимальной по быстродействию.
8. Какие достоинства и недостатки имеет упрощенная замкнутая САУ, оптимальная по быстродействию?

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПО РАСХОДУ ЭНЕРГИИ

Сформируем критерий оптимальности по расходу энергии для объекта управления, описываемого системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$

или

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}u_k, \quad (11.1)$$

где  $\mathbf{A} = [n \times n]$  – коэффициентная матрица динамики объекта;

$\mathbf{B} = [n \times m]$  – матрица коэффициентов управляющих воздействий;

$\mathbf{X}$  –  $n$ -мерный вектор переменных состояния объекта;

$\mathbf{U}$  –  $m$ -мерный вектор управляющих воздействий;

$x_{in} = x_i(0)$ ,  $x_{ik} = x_i(t_k)$  – граничные условия;

$|u_j| \leq u_{j \max}$  – ограничения управляющих воздействий.

Такой критерий имеет следующий вид:

$$J = \int_0^{t_k} (\mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U}) dt \rightarrow \min, \quad (11.2)$$

где  $\mathbf{R} = [n \times m]$  – матрица коэффициентов, определяющая величины ограничений отклонений переменных состояния (координат) объекта управления.

С учетом (11.1) критерий (11.2) можно представить в следующем виде:

$$J = \int_0^{t_k} \left( \sum_{j=1}^m r_j u_j^2 \right) dt \rightarrow \min. \quad (11.3)$$

Необходимо для замкнутой САУ найти оптимальный закон управления или уравнение регулятора.

Для решения задачи используем принцип максимума. Составим функцию Гамильтона:

$$H = \psi_0(\mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U}) + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{B} \mathbf{U}. \quad (11.4)$$

Принимаем  $\psi_0 = -1$ , следовательно,

$$H = -\mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{B} \mathbf{U}. \quad (11.5)$$

Поскольку  $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ , выражение (11.5) можно записать в виде

$$H = -r_1 u_1^2 - r_2 u_2^2 - \dots - r_m u_m^2 + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \boldsymbol{\psi}^T b_1 u_1 + \boldsymbol{\psi}^T b_2 u_2 + \dots + \boldsymbol{\psi}^T b_m u_m.$$

Выделим часть функции  $H$ , явно зависящую от  $u_i, i = 1, 2, \dots, m$ :

$$H_1 = -(r_1 u_1^2 - \boldsymbol{\psi}^T b_1 u_1) - \dots - (r_m u_m^2 - \boldsymbol{\psi}^T b_m u_m).$$

Эта функция достигает максимума, когда достигает максимума каждое ее слагаемое. Вынесем за скобки сомножители  $r_i$ :

$$-(r_i u_i^2 - \boldsymbol{\psi}^T b_i u_i) = -r_i (u_i^2 - \boldsymbol{\psi}^T b_i u_i / r_i).$$

Введем функции

$$\sigma_i = \frac{\boldsymbol{\psi}^T b_i}{2r_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (11.6)$$

Тогда

$$-(u_i^2 - \boldsymbol{\psi}^T b_i u_i / r_i) = -(u_i - \sigma_i)^2 + \sigma_i^2.$$

Максимум этих слагаемых, из которых состоит функция  $H_1$ , достигается при условии, что

$$\begin{cases} u_{i\text{опт}}(t) = \sigma_i(t) \text{ при } |\sigma_i(t)| < u_{i\text{max}}, \\ u_{i\text{опт}}(t) = u_{i\text{max}} \text{ sign } \sigma_i(t) \text{ при } |\sigma_i(t)| \geq u_{i\text{max}}. \end{cases} \quad (11.7)$$

Таким образом, выражение (11.7) определяет, что оптимальным будет линейный закон управления с насыщением.

Вспомогательные функции определяются из уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

или в векторной форме

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}^T}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}.$$



На основании (11.5) определяется оптимальное значение управляющих воздействий путем приравнивания к нулю частных производных по этим воздействиям функции Гамильтона, т. е. из условия достижения максимума функции Гамильтона. В результате получается уравнение для определения оптимальных значений управляющих воздействий в открытой области ( $|u_j| \leq u_{j \max}$ ):

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}} = -2\mathbf{R}\mathbf{U}_{\text{опт}} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi} = 0.$$

Откуда получим оптимальное программное управление:

$$\mathbf{U}_{\text{опт}}(t) = 0,5\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi}(t).$$

Для нахождения  $\mathbf{U}_{\text{опт}}(t)$  запишем сопряженную систему:

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}.$$

Ее решение:  $\boldsymbol{\psi}(t) = e^{-\mathbf{A}^T t} \boldsymbol{\psi}_n$ .

Для определения закона оптимального управления замкнутой САУ необходимо найти зависимость  $\mathbf{U}_{\text{опт}}(\mathbf{X})$ . Для этого решение ищется в виде

$$\mathbf{U}_{\text{опт}} = -\mathbf{K}\mathbf{X}.$$

На практике синтез такого линейного оптимального регулятора осуществляется на основе использования квадратичного интегрального критерия, который накладывает ограничения как на мощность, так и на величины отклонений координат объекта управления. Такой подход получил название метода аналитического конструирования оптимальных регуляторов.

## Вопросы по разделу

---

1. Как формируется критерий оптимальности по минимуму расхода энергии для объекта с несколькими управляющими воздействиями?
2. Как с помощью функции Гамильтона доказывается, что выражение оптимального управления по минимуму расхода энергии представляет собой линейный закон с насыщением?
3. Как определяются вспомогательные функции?
4. Как определяется оптимальный закон управления в открытой области?
5. Как формируется оптимальный по квадратичному интегральному критерию закон управления для замкнутой САУ?

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ (АКОР)

Как было определено ранее, синтез замкнутой САУ по квадратичному интегральному критерию дает регулятор в виде линейных обратных связей по координатам состояния объекта управления.

Ввиду простоты реализации такого регулятора и универсальности квадратичного критерия оптимальности (так как он ограничивает и отклонение переменных состояния объекта управления, и управляющее воздействие), данная задача определения оптимального регулятора получила широкое распространение. Оптимальный регулятор получается аналитическим решением задачи оптимизации, поэтому данная методика синтеза получила название аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР).

Рассмотрим задачу АКОР в общем виде.

Задана динамика объекта управления в виде (9.4):

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$

или как (11.1):

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}u_k.$$

Критерий оптимальности:

$$J = \int_0^{t_k} (\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} + \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U}) dt \rightarrow \min, \quad (12.1)$$

где  $\mathbf{Q} = [n \times n]$ ,  $\mathbf{R} = [m \times m]$  – матрицы коэффициентов, определяющие величины ограничений отклонений переменных состояния (координат) объекта управления и расход энергии в переходных процессах.

С учетом (11.1) критерий (12.1) можно представить в следующем виде:

$$J = \int_0^{t_k} (\sum_{i=1}^n q_i x_i^2 + \sum_{j=1}^m r_j u_j^2) dt \rightarrow \min. \quad (12.2)$$

Необходимо для замкнутой САУ найти оптимальный закон управления (уравнение регулятора).

Для решения задачи используем принцип максимума. Составим функцию Гамильтона:

$$H = \psi_0 (\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} + \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U}) + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{B} \mathbf{U}. \quad (12.3)$$

Принимаем, что  $\psi_0 = -1$ . Следовательно,

$$H = -(\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} + \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U}) + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{B} \mathbf{U}. \quad (12.4)$$

Вспомогательные функции определяются из уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

или в векторной форме

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}. \quad (12.5)$$

Выражение (12.5) на основании (12.4) дает следующую зависимость:

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = 2\mathbf{Q}\mathbf{X} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}. \quad (12.6)$$

Для определения экстремального значения функции  $H$  по управляющим воздействиям  $\mathbf{U}$  найдем первую производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}} = -2\mathbf{U}^T \mathbf{R} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{B} = 0. \quad (12.7)$$

Из (12.7) следует, что

$$\mathbf{U}_{\text{опт}}^T \mathbf{R} = 0,5 \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{B}$$

или

$$\mathbf{U}_{\text{опт}} = 0,5 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\psi}. \quad (12.8)$$

Вспомогательные функции  $\boldsymbol{\psi}$  будем искать в виде линейной зависимости:

$$\boldsymbol{\psi} = -2\mathbf{S}\mathbf{X}. \quad (12.9)$$

В выражении (12.9)  $\mathbf{S}$  – положительно определенная симметричная матрица размерностью  $[n \times n]$ , а множитель 2 введен, чтобы избежать последующих дробей в уравнениях.

Из (12.9) следует, что

$$\frac{d\psi}{dt} = -2 \frac{d\mathbf{S}}{dt} \mathbf{X} - 2\mathbf{S} \frac{d\mathbf{X}}{dt}. \quad (12.10)$$

Кроме того, с учетом (12.8) уравнение динамики объекта (9.4) можно представить в виде:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + 0,5\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\psi. \quad (12.11)$$

Добавив к этому уравнению сопряженное уравнение (12.6), получим систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + 0,5\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\psi, \\ \frac{d\psi}{dt} &= 2\mathbf{Q}\mathbf{X} - \mathbf{A}^T\psi. \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

Подставив в уравнение (12.10) значения производных из системы (12.12), заменив  $\psi$  на (12.9) и сделав очевидные преобразования, получим:

$$\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{A}^T\mathbf{S}\mathbf{X} = -\frac{d\mathbf{S}}{dt}\mathbf{X} - \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{X},$$

откуда

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\mathbf{S}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S} - \mathbf{Q}. \quad (12.13)$$

Для стационарной системы  $\frac{d\mathbf{S}}{dt} = 0$ . Следовательно,

$$\mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S} + \mathbf{Q} = 0. \quad (12.14)$$

Выражения (12.13) и (12.14) получили название нелинейных матричных уравнений Риккати.

Для определения выражения оптимального вектора управляющих воздействий подставим значение  $\psi$  из (12.9) в (12.8). Тогда

$$\mathbf{U}_{\text{опт}} = -\mathbf{K}\mathbf{X} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{X}, \quad (12.15)$$

где матрица  $\mathbf{R}$  берется из интегрального критерия, а матрица  $\mathbf{S}$  определяется из решения уравнения Риккати (12.14).

Подставив выражение (12.15) в уравнение динамики объекта (9.4), получим уравнение, описывающее оптимальное изменение состояния объекта под действием  $U_{\text{опт}}$ :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S})\mathbf{X}. \quad (12.16)$$

Структурная схема оптимальной замкнутой САУ в матричном виде представлена на рис. 12.1.

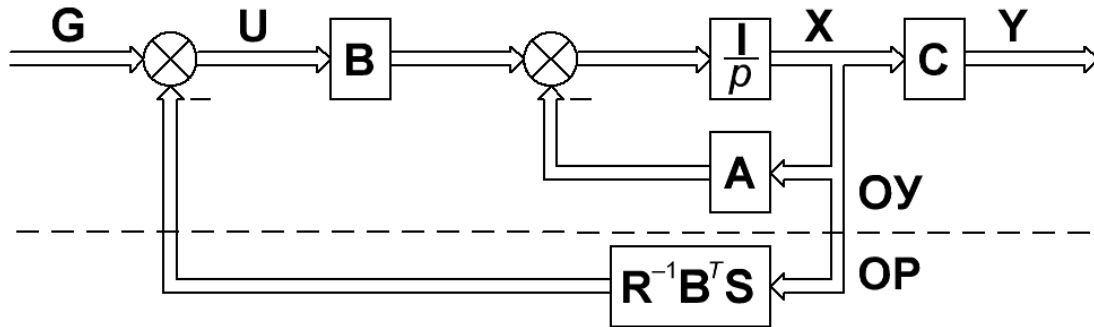


Рис. 12.1. Оптимальная по квадратичному интегральному критерию замкнутая САУ: ОУ – объект управления; ОР – оптимальный регулятор

Таким образом, в результате синтеза получим оптимальный регулятор, который представляет сумму пропорциональных обратных связей по всем переменным состояния (координатам) объекта управления. Величины коэффициентов обратных связей определяются из решения уравнения Риккати (12.14).

**Пример решения задачи АКОР для объекта первого порядка**  
Динамика объекта управления описывается как

$$W_o(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K_o}{T_o p + 1}$$

или

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bu,$$

где  $a = -\frac{1}{T_o}$ ;  $b = \frac{K_o}{T_o}$ ;  $x_1 = y_{\text{св}}$ .

Критерий оптимальности:

$$J = \int_0^{t_K} (q_1 x_1^2 + ru^2) dt.$$

В этом случае уравнение Риккати (12.14) примет вид:

$$sa + as - sb\frac{1}{r}bs + q_1 = 0$$

или

$$l_2 s^2 + l_1 s + q_1 = 0,$$

где  $l_2 = -\frac{b^2}{r}$ ;  $l_1 = 2a$ .

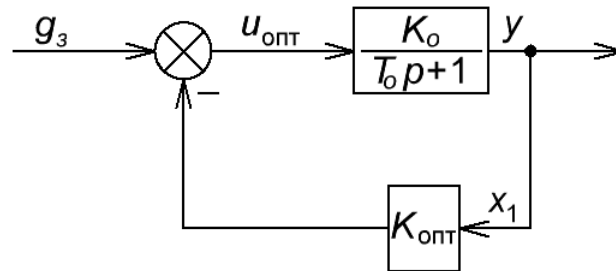
Решение этого уравнения дает следующую зависимость:

$$s = \frac{ar + \sqrt{a^2 r^2 + b^2 q_1 r}}{b^2} = \frac{ar}{b^2} + \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a^2 r^2}{b^2} + q_1 r}.$$

Следовательно,

$$K_{OC} = K_{\text{опт}} = r^{-1}bs = \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{q_1}{r}} = -\frac{1}{K_o} + \sqrt{\frac{1}{K_o^2} + \frac{q_1}{r}}.$$

Структурная схема оптимальной САУ представлена на рис. 12.2.



**Рис. 12.2. Структурная схема САУ объектом первого порядка, оптимальной по квадратичному интегральному критерию**

**Пример решения задачи АКОР для объекта второго порядка**

Динамика объекта управления описывается как

$$W_o(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K_o}{p(T_o p + 1)}$$

или

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + b_2 u, \end{cases}$$

где  $a_{22} = -\frac{1}{T_o}$ ;  $b_2 = \frac{K_o}{T_o}$ ;  $x_1 = y_{\text{св}}$ .

Запишем критерий оптимальности:

$$J = \int_0^{t_k} (\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} + ru^2) dt \rightarrow \min,$$

где  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Тогда

$$J = \int_0^{t_k} (q_1 x_1^2 + ru^2) dt.$$

Запишем уравнение Риккати:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Данное матричное уравнение дает систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} q_1 r - b_2^2 s_{12}^2 &= 0, \\ -b_2^2 s_{12} s_{22} + r s_{11} + a_{22} r s_{12} &= 0, \\ -b_2^2 s_{22}^2 + 2 r s_{12} + 2 a_{22} r s_{22} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п12.1})$$

Решение алгебраических уравнений (п12.1) с учетом положительной определенности матрицы  $\mathbf{S}$  ( $s_{11} > 0$ ;  $s_{11} s_{22} - s_{12}^2 > 0$ ) и того, что  $s_{12} = s_{21}$ , дает следующий результат:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{\sqrt{q_1}}{b_2} \sqrt{a_{22}^2 r + 2 b_2 \sqrt{q_1 r}}; \\ s_{12} = s_{21} &= \frac{\sqrt{q_1 r}}{b_2}; \\ s_{22} &= \frac{r \left( a_{22} + \sqrt{a_{22}^2 + 2 b_2 \sqrt{\frac{q_1}{r}}} \right)}{b_2^2}. \end{aligned} \quad (\text{п12.2})$$

В соответствии с выражением (12.15) матрица коэффициентов обратных связей будет иметь следующий вид:

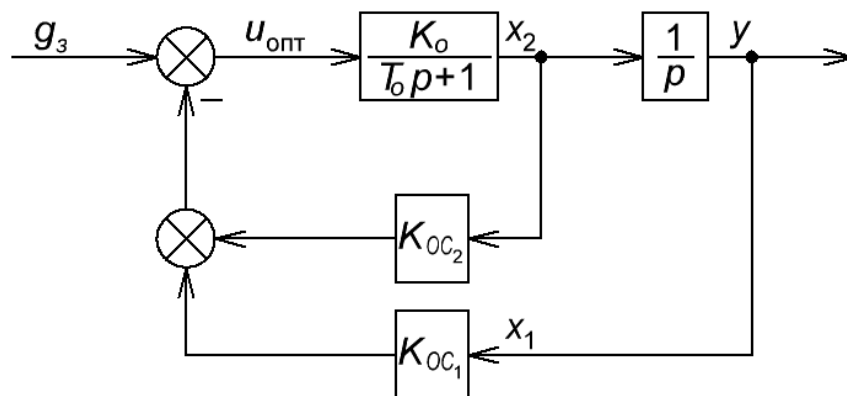
$$\mathbf{K} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} b_2 s_{12} & b_2 s_{22} \end{bmatrix}.$$

Подставляя в это выражение зависимости (п12.2), получим значения коэффициентов для обратных связей по  $x_1$  и по  $x_2$ :

$$K_{OC_1} = \frac{b_2 s_{12}}{r} = \sqrt{\frac{q_1}{r}},$$

$$K_{OC_2} = \frac{b_2 s_{22}}{r} = \frac{a_{22} + \sqrt{a_{22}^2 + 2b_2 \sqrt{\frac{q_1}{r}}}}{b_2} = -\frac{1}{K_o} + \sqrt{\frac{1}{K_o^2} + \frac{2T_o}{K_o} \sqrt{\frac{q_1}{r}}}.$$

Структурная схема оптимальной замкнутой САУ объектом второго порядка показана на рис. 12.3.



**Рис. 12.3. Структурная схема САУ объектом второго порядка, оптимальной по квадратичному интегральному критерию**

## Вопросы по разделу

1. Почему рассматриваемая методика называется аналитическим конструированием оптимального регулятора?
2. Как формулируется задача по аналитическому конструированию оптимального регулятора в общем виде?
3. Как для решения задачи оптимального управления с использованием принципа максимума составляется функция Гамильтона?



4. Из каких этапов состоит процесс вывода уравнений Риккати в матричной форме?

5. Для чего нужно уравнение Риккати и как оно получается для стационарных объектов управления?

6. Как определяется выражение для оптимального вектора управляющих воздействий?

7. Из каких блоков формируется оптимальная по квадратичному интегральному критерию замкнутая САУ?

8. Каким образом с помощью уравнения Риккати синтезируется оптимальная по квадратичному интегральному критерию САУ объектом первого порядка?

9. Каким образом с помощью уравнения Риккати синтезируется оптимальная по квадратичному интегральному критерию САУ объектом второго порядка?

## СИСТЕМЫ, ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО РАСХОДУ РЕСУРСОВ

Пусть дана модель объекта управления в виде (9.4):

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$

или в виде (11.1):

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}u_k,$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Начальные и конечные условия (граничные условия):

$$x_i(0) = x_{in}; \quad x_i(t_k) = x_{ik}.$$

Управляющие воздействия (ресурсы) ограничены по модулю:

$$|u_j| \leq u_{j \max}.$$

Критерий оптимальности, который соответствует минимальному расходу ресурсов, имеет следующий вид:

$$J = \int_0^{t_k} \sum_{j=1}^m c_j |u_j(t)| dt. \quad (13.1)$$

Требуется определить оптимальный закон управления объектом (9.4). Для решения этой задачи воспользуемся принципом максимума. На основании (13.1) введем дополнительную переменную

$$\dot{x}_0 = \sum_{j=1}^m c_j |u_j(t)|. \quad (13.2)$$

Функция Гамильтона примет следующий вид:

$$H = \psi_0 \sum_{j=1}^m c_j |u_j| + \sum_{i=1}^n \psi_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k \right). \quad (13.3)$$

Вспомогательные переменные  $\psi_i$  определяются из сопряженных уравнений:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n a_{ji} \psi_j, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (13.4)$$

На основе (13.3), приняв  $\psi_0 = -1$ , запишем функцию, состоящую из слагаемых, зависящих от  $u$ :

$$H^* = - \sum_{j=1}^m c_j |u_j| + \sum_{i=1}^n \psi_i \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j. \quad (13.5)$$

Поменяем порядок суммирования во втором слагаемом выражения (13.5):

$$H^* = - \sum_{j=1}^m c_j |u_j| + \sum_{j=1}^m u_j \sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i. \quad (13.6)$$

Введем обозначение:

$$q_i(t) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i(t). \quad (13.7)$$

Функция  $H^*$  будет максимальной, если каждое ее слагаемое максимально:

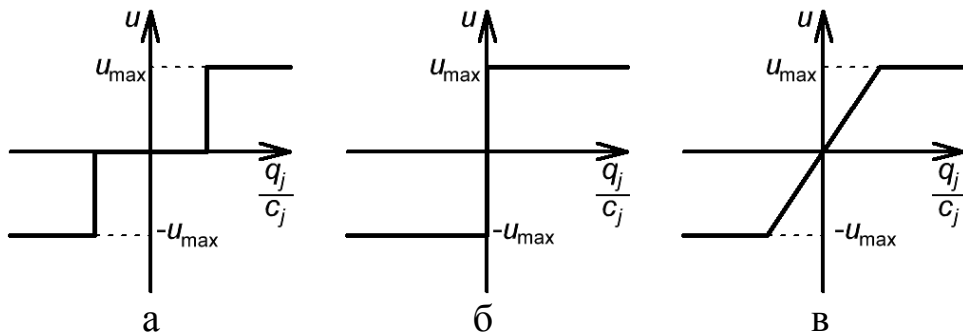
$$c_j \left( \frac{q_j(t)}{c_j} u_j - |u_j| \right) \rightarrow \max, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Учитывая ограничения управляющих воздействий, определим закон оптимального управления:

$$u_{\text{опт}}(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{если } \frac{q_j}{c_j} \geq 1, \\ 0, & \text{если } \left| \frac{q_j}{c_j} \right| < 1, \\ -u_{\max}, & \text{если } \frac{q_j}{c_j} \leq -1. \end{cases} \quad (13.8)$$

Выражение (13.8) может быть практически реализовано с помощью реле с зоной нечувствительности.

Обобщая результаты, определенные по разным критериям, можно увидеть сходство и различие в характеристиках устройств, формирующих управляющее воздействие на объект (рис. 13.1). Все они имеют ограничения по величине управляющего воздействия, что вполне очевидно. Минимизация расхода ресурсов требует применения реле с зоной нечувствительности (см. рис. 13.1а), максимальное быстродействие – идеального реле (см. рис. 13.1б), минимизация расхода энергии – линейного звена с насыщением (см. рис. 13.1в).



**Рис. 13.1. Характеристики исполнительных устройств в оптимальных системах: а – по минимуму расхода ресурса; б – по быстродействию; в – по минимуму расхода энергии**

Рассмотрим решение задачи синтеза оптимального управления по расходу ресурсов для объекта управления, не имеющего нулей в ПФ. В этом случае уравнение (11.1) в развернутом виде будет:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n u. \end{aligned} \right\} \quad (13.9)$$

Граничные условия и ограничения по ресурсу определяются как в (11.1), критерий оптимальности задан выражением (13.1).

Введем дополнительную переменную, соответствующую критерию оптимальности:

$$\dot{x}_0 = c|u(t)|.$$

Составим функцию Гамильтона:

$$\begin{aligned} H &= \psi_0 c|u(t)| + \psi_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + \\ &+ \psi_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n u(t)). \end{aligned} \quad (13.10)$$

Для определения вспомогательных переменных  $\psi_i$  запишем систему сопряженных уравнений (принимая, что  $\psi_0 = -1$ ):

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\psi_2 - \dots - \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\psi_n, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\psi_2 - \dots - \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\psi_n, \\ &\dots \\ \frac{d\psi_n}{dt} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\psi_2 - \dots - \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\psi_n\end{aligned}$$

или с учетом системы (13.9):

$$\left. \begin{aligned}\frac{d\psi_1}{dt} &= -a_{11}\psi_1 - a_{21}\psi_2 - \dots - a_{n1}\psi_n, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -a_{12}\psi_1 - a_{22}\psi_2 - \dots - a_{n2}\psi_n, \\ &\dots \\ \frac{d\psi_n}{dt} &= -a_{1n}\psi_1 - a_{2n}\psi_2 - \dots - a_{nn}\psi_n.\end{aligned}\right\} \quad (13.11)$$

В общем виде систему (13.11) можно представить как (13.4).

Сформируем по (13.10) функцию из слагаемых, зависящих от управляющего воздействия:

$$H^* = -c|u| + \psi_n b_n u.$$

Введем обозначение:

$$q(t) = b_n \psi_n(t).$$

Следовательно,

$$H^* = \left( \frac{q(t)}{c} u - |u| \right) c.$$

Необходимо обеспечить, чтобы

$$\left( \frac{q(t)}{c} u - |u| \right) \rightarrow \max.$$

Это достигается при следующем алгоритме:

$$u_{\text{опт}}(t) = \begin{cases} u_{\text{max}}, & \text{если } \frac{q(t)}{c} \geq 1, \\ 0, & \text{если } \left| \frac{q(t)}{c} \right| < 1, \\ -u_{\text{max}}, & \text{если } \frac{q(t)}{c} \leq -1. \end{cases} \quad (13.12)$$

Выражение (13.12), как и выражение (13.8), определяет, что для реализации оптимального управления необходимо исполнительное устройство в виде реле с зоной нечувствительности.

**Пример синтеза замкнутой САУ, оптимальной по быстрдействию и минимуму расхода управляющего ресурса**  
Объект управления имеет передаточную функцию:

$$W_o(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K_o}{p(T_o p + 1)}. \quad (\text{п}13.1)$$

Запишем (п13.1) в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{22}x_2 + b_2u, \end{aligned} \right\} \quad (\text{п}13.2)$$

где  $a_{22} = -\frac{1}{T_o}$ ;  $b_2 = \frac{K_o}{T_o}$ ;  $x_1 = y_{\text{св}}$ .

Граничные условия:

$$x_1(0) = x_{1н}; \quad x_2(0) = x_{2н}; \quad x_1(t_{\kappa}) = 0; \quad x_2(t_{\kappa}) = 0. \quad (\text{п}13.3)$$

Управляющий ресурс ограничен по амплитуде:

$$|u| \leq u_{\text{max}}. \quad (\text{п}13.4)$$

В качестве критерия выберем интегральный критерий, обеспечивающий одновременно ограничение переходного процесса по времени и по расходу управляющего воздействия:

$$J = \int_0^{t_{\kappa}} (1 + c|u(t)|) dt \rightarrow \min. \quad (\text{п}13.5)$$

Введем дополнительную переменную

$$\dot{x}_0 = 1 + c|u(t)|. \quad (\text{п13.6})$$

Сформируем функцию Гамильтона:

$$H = \psi_0(1 + c|u|) + \psi_1 x_2 + \psi_2(a_{22}x_2 + b_2u). \quad (\text{п13.7})$$

Примем, что  $\psi_0 = -1$ . Тогда

$$H^* = -c|u| + \psi_2 b_2 u. \quad (\text{п13.8})$$

Максимум функции (п13.8) при ограничении ресурса (п13.4), а значит, оптимальный закон управления, очевидно, будет определяться следующей зависимостью:

$$u_{\text{опт}}(t) = \begin{cases} u_{\text{max}}, & \text{если } \frac{b_2}{c} \psi_2 \geq 1, \\ 0, & \text{если } \left| \frac{b_2}{c} \psi_2 \right| < 1, \\ -u_{\text{max}}, & \text{если } \frac{b_2}{c} \psi_2 \leq -1. \end{cases} \quad (\text{п13.9})$$

Найдем вспомогательные переменные из сопряженной системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \psi_2 = 0, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \psi_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \psi_2 = -\psi_1 - a_{22}\psi_2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п13.10})$$

Из решения системы дифференциальных уравнений (п13.10), учитывая, что  $\psi_1(0) = \psi_{1н}$ ,  $\psi_2(0) = \psi_{2н}$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(t) &= \psi_{1н}, \\ \psi_2(t) &= \left( \psi_{2н} + \frac{\psi_{1н}}{a_{22}} \right) e^{-a_{22}t} - \frac{\psi_{1н}}{a_{22}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п13.11})$$

Найдем решение уравнений (п13.2):

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_{1н} + \frac{x_{2н}}{a_{22}} (e^{a_{22}t} - 1), \\ x_2(t) &= x_{2н} e^{a_{22}t}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п13.12})$$

При  $u = 0$  получим, что

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_{1н} + \frac{x_{2н}}{a_{22}}(e^{a_{22}t} - 1), \\ x_2(t) &= x_{2н} e^{a_{22}t}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п13.13})$$

При  $u = u_{\max}$  получим:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_{1н} + \frac{1}{a_{22}}(x_{2н} + \frac{b_2 u_{\max}}{a_{22}}) e^{a_{22}t} - \frac{b_2 u_{\max}}{a_{22}} t - \frac{1}{a_{22}}(x_{2н} + \frac{b_2 u_{\max}}{a_{22}}), \\ x_2(t) &= (x_{2н} + \frac{b_2 u_{\max}}{a_{22}}) e^{a_{22}t} - \frac{b_2 u_{\max}}{a_{22}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п13.14})$$

Исключив из (п13.13) и (п13.14) время  $t$ , найдем уравнение фазовых траекторий для  $u = 0$ :

$$x_1 = x_{1н} + \frac{1}{a_{22}}(x_2 - x_{2н}). \quad (\text{п13.15})$$

Для  $u = u_{\max}$  выражение для фазовых траекторий будет иметь следующий вид:

$$x_1 = x_{1н} + \frac{1}{a_{22}}(x_2 - x_{2н}) - \frac{b_2 u_{\max}}{a_{22}^2} \ln \left| \frac{x_2 + \frac{b_2 u_{\max}}{a_{22}}}{x_{2н} + \frac{b_2 u_{\max}}{a_{22}}} \right|. \quad (\text{п13.16})$$

Переход системы из исходного состояния  $(x_{1н}, x_{2н})$  в начало координат  $(x_{1к} = 0, x_{2к} = 0)$  должен осуществляться путем изменения управляющего воздействия:

$$u_{\text{опт}} = \begin{cases} -u_{\max}, & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & \text{при } t_1 < t < t_2, \\ u_{\max}, & \text{при } t_2 \leq t \leq t_k. \end{cases} \quad (\text{п13.17})$$

Следовательно, необходимо найти линии переключения управляющего воздействия с  $u = \pm u_{\max}$  на  $u = 0$  и с  $u = 0$  на  $u = \pm u_{\max}$ .

Используя выражения для фазовых траекторий (п13.15) и (п13.16), которые проходят через начало координат, получим, что линия переключения  $u$  с  $\pm u_{\max}$  на 0 определяется следующим выражением ( $|u_{\max}| = 1$ ):

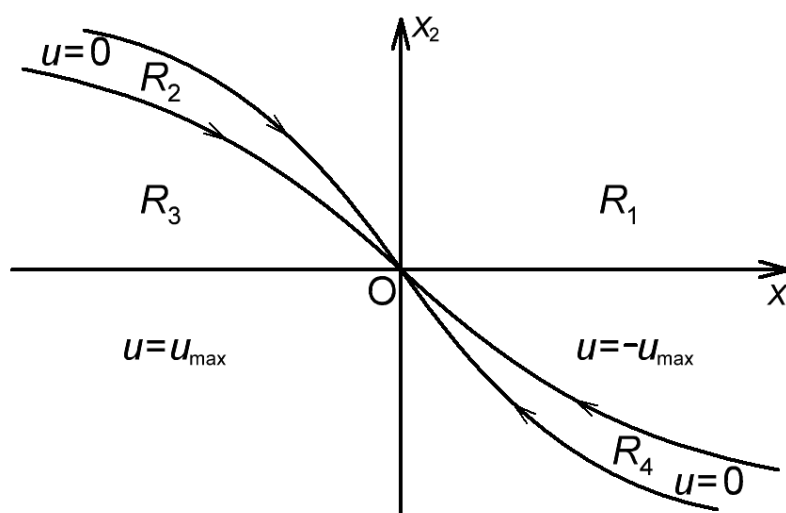
$$x_1 = \frac{x_2}{a_{22}} + \frac{b_2}{a_{22}^2} \ln \left( 1 - \frac{a_{22}|x_2|}{b_2 - 2a_{22}|x_2|} \right) \text{sign}(x_2). \quad (\text{п13.18})$$



Линия переключения  $u$  с 0 на  $\pm u_{\max}$  ( $|u_{\max}| = 1$ ) определяется как

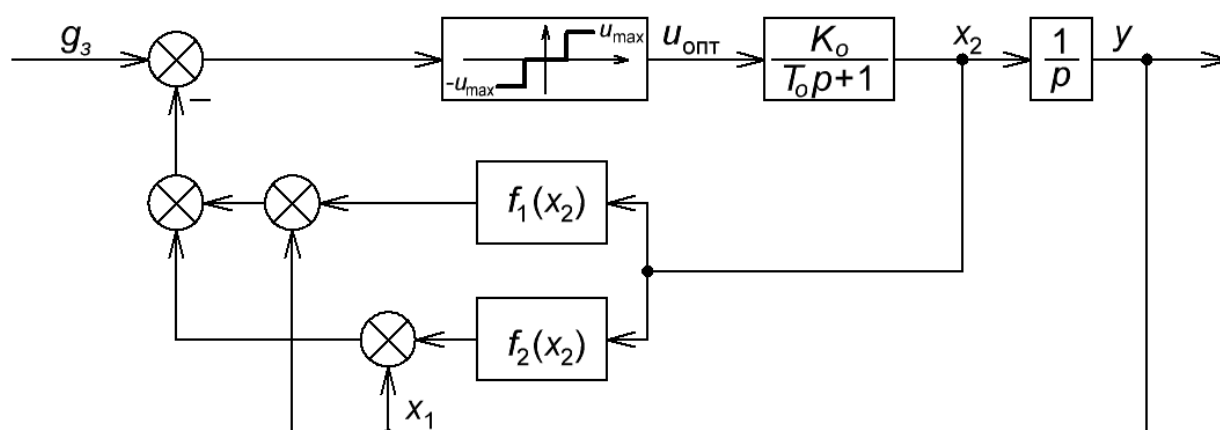
$$x_1 = \frac{x_2}{a_{22}} + \frac{b_2}{a_{22}^2} \ln \left( 1 - \frac{a_{22}|x_2|}{b_2} \right) \text{sign}(x_2). \quad (\text{п}13.19)$$

Построенные на фазовой плоскости на основе этих выражений линии переключения представлены на рис. 13.2.



**Рис. 13.2.** Фазовая плоскость с линиями переключения управляющего воздействия:  $R_1$  – область, где  $u = -u_{\max}$ ;  $R_3$  – область, где  $u = u_{\max}$ ;  $R_2$  и  $R_4$  – области, где  $u = 0$

Структурная схема замкнутой САУ, оптимальной по быстродействию и минимуму расхода управляющего ресурса, представлена на рис. 13.3.



**Рис. 13.3.** Структурная схема замкнутой САУ, оптимальной по быстродействию и минимуму расхода управляющего ресурса

В соответствии с выражениями (п13.18) и (п13.19) нелинейные обратные связи по  $x_2$  имеют вид:

$$f_1(x_2) = T_o x_2 - T_o K_o \ln \left( 1 + \frac{|x_2|}{K_o} \right) \text{sign}(x_2),$$

$$f_2(x_2) = T_o x_2 - T_o K_o \ln \left( 1 + \frac{|x_2|}{K_o + 2|x_2|} \right) \text{sign}(x_2).$$

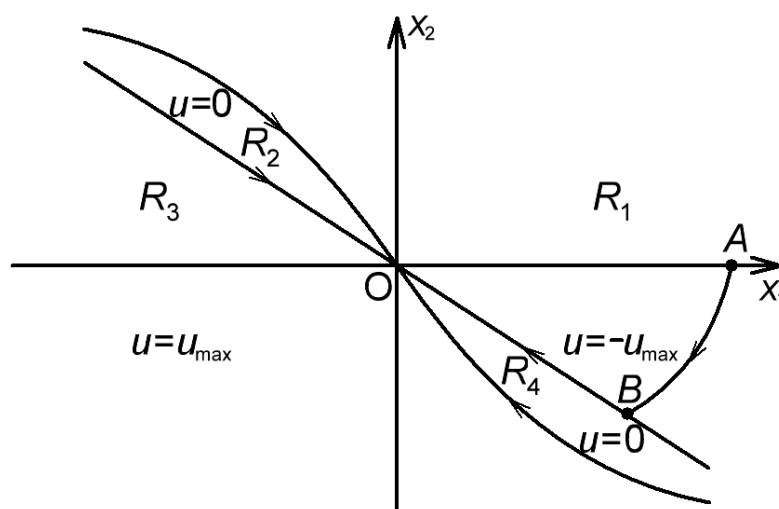
Для системы, оптимальной только по расходу ресурса, критерий оптимальности имеет вид:

$$J = \int_0^{t_K} |u(t)| dt.$$

Аналогично можно доказать, что в этом случае кривая переключения управляющего воздействия при переходе изображающей точки состояния объекта из области  $R_2$  в область  $R_1$  и из области  $R_4$  в область  $R_3$  остается, а другая граница переключений будет определяться линейной зависимостью вида

$$x_1 = \frac{1}{a_{22}} x_2.$$

На рис. 13.4 показан случай перехода состояния системы из области  $R_1$  ( $u = -u_{\max}$ ) в начало состояния. На линии переключения  $BO$  переходный процесс будет протекать в скользящем режиме.



**Рис. 13.4. Линии переключения управляющего воздействия в САУ, оптимальной по расходу управляющего ресурса**

## Вопросы по разделу

---

1. Как формулируется задача синтеза оптимального закона управления по минимальному расходу ресурсов?
2. Как для решения задачи с использованием принципа максимума составляется функция Гамильтона?
3. Из каких этапов состоит процесс определения оптимального закона управления?
4. Какой вид имеет закон оптимального управления по минимальному расходу ресурсов?
5. В чем состоит сходство и различие характеристик исполнительных устройств в оптимальных системах: по минимуму расхода ресурсов; по быстродействию; по минимуму расхода энергии?
6. Какие исходные выражения используются в задаче по определению оптимального закона управления, обеспечивающего ограничение переходного процесса по времени и по расходу управляющего ресурса (воздействия)?
7. Каким образом в примере с объектом второго порядка формируется функция Гамильтона?
8. Какой вид имеет закон оптимального управления и каким образом он определяется на основе использования функции Гамильтона?
9. Как определяются законы оптимального переключения управляющего воздействия: со значения  $u = \pm u_{\max}$  до  $u = 0$  и со значения  $u = 0$  до  $u = \pm u_{\max}$ ?
10. Из каких блоков состоит структурная схема замкнутой САУ, оптимальной по быстродействию и минимуму расхода управляющего ресурса?
11. Как изменится закон оптимального управления, если будет использоваться критерий оптимальности только по расходу ресурса?

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

Использование микропроцессорных контроллеров для непосредственного управления техническими объектами делает возможным реализацию законов управления практически любой сложности. Это определяет актуальность знания и умения определять алгоритмы оптимального управления. В то же время синтезированные законы обеспечивают оптимальное управление, если модель объекта достаточно точная. Поэтому важное значение приобретает процесс идентификации объекта как до этапа синтеза регулятора, так и во время работы системы управления. Это связано с тем, что параметры объекта, как правило, меняются в процессе работы. По этой причине следующим шагом по пути построения максимально эффективных систем управления является применение контуров самонастройки и адаптации оптимальных регуляторов. Следовательно, за изучением систем оптимального управления должно следовать изучение систем адаптивного управления.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

---

1. Александров А. Г. Оптимальные и адаптивные системы : учеб. пособие для вузов / А. Г. Александров. – М. : Высшая школа, 1989. – 263 с.
2. Болнокин В. Е. Анализ и синтез систем автоматического управления на ЭВМ. Алгоритмы и программы / В. Е. Болнокин, П. И. Чинаев. – М. : Радио и связь, 1986. – 248 с.
3. Воронов А. А. Теория автоматического управления. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / А. А. Воронов. – М. : Высшая школа, 1986. – 504 с.
4. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.
5. Иванов В. А. Теория оптимальных систем автоматического управления / В. А. Иванов, Н. В. Фалдин. – М. : Наука, 1981. – 336 с.
6. Куропаткин П. В. Оптимальные и адаптивные системы : учеб. пособие для вузов / П. В. Куропаткин. – М. : Высшая школа, 1980. – 287 с.
7. Пантелеев А. В. Теория управления в примерах и задачах : учеб. пособие / А. В. Пантелеев. – М. : НИЦ ИНФРА-М, 2016. – 584 с.
8. Теория автоматического управления: учебник для вузов / С. Е. Душин, Н. С. Зотов, Д. Х. Имаев [и др.] ; под ред. В. Б. Яковлева. – М. : Высшая школа, 2005. – 567 с.
9. Трахтенберг Р. М. Теория автоматического управления. Нелинейные, импульсные, оптимальные, инвариантные, адаптивные и многомерные САУ : учеб. пособие / Р. М. Трахтенберг. – Иваново : Иван. энерг. ин-т, 1990. – 160 с.
10. Чураков Е. П. Оптимальные и адаптивные системы : учеб. пособие для вузов / Е. П. Чураков. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 256 с.

Учебное издание

Староверов Борис Александрович  
Смирнов Максим Александрович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ  
СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Учебное пособие*

Подписано в печать 18.12.17. Формат бумаги 60×84 1/16.  
Печать трафаретная. Печ. л. 5,875. Заказ 401. Тираж 50.

Издательско-полиграфический отдел КГУ

156005, г. Кострома, ул. Дзержинского, 17.  
Т. 49-80-84 Е-mail: [rio@kstu.edu.ru](mailto:rio@kstu.edu.ru)

ISBN 5-8285-0869-5

