

Обеспечение условной корректности задачи диагностики формирователя сигналов по комплексному показателю

В. В. Федоренко
ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский
федеральный университет»
fovin_25@mail.ru

А. М. Винограденко
ФГКОУ ВО «Военная академия связи
имени маршала С.М. Буденного»
vinogradenkoao@rambler.ru

В. В. Самойленко¹, И. В. Самойленко², С. В. Аникуев³
ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет»
¹vvs_stv@mail.ru, ²stvirishka@mail.ru, ³ser-anikuev@yandex.ru

Аннотация. Задача оценки технического состояния системы по результатам измерения некоторого показателю качества называется обратной задачей математической физики. Для формирователя сигналов (ФС) таким показателем выбран коэффициент взаимной корреляции эталонного и искаженного сигналов. Исследовано влияние параметрических отказов ФС на характер взаимной корреляционной функции. Обоснована возможность применения методов решения условно корректных задач для определения параметрической области, которая соответствует классу технического состояния формирователя сигналов. Приведен частный случай расчета параметров данной области, которые обеспечивают статистическую регуляризацию решения обратной задачи диагностики ФС по комплексному показателю.

Ключевые слова: формирователь сигналов; параметрические отказы; корреляция сигналов; обратная задача математической физики

I. ВВЕДЕНИЕ

Одной из задач, решаемых при опознавании состояния формирователей сигналов (ФС), является оценка их параметров, определяющих техническое состояние ФС. При этом перспективным направлением диагностики технических систем является идентификация отказов объектов по комплексному показателю качества их функционирования [1].

Задачу оценки технического состояния объекта по комплексному показателю качества, в которой требуется определить причину – отказы элементов, если известно полученное в результате наблюдений следствие – искажение выходного сигнала ФС, можно отнести к числу задач, известных в математической физике как обратные [2]. Проблема устойчивости решения обратных задач связана с построением таких методов приближенного определения решения θ , которое близко к искомому значению θ_z , на основе имеющейся приближенно заданной

исходной информации. Устранение неустойчивости решения обратной задачи основывается на использовании априорной информации о решении задачи нахождения вектора параметров θ . Такого типа априорная информация позволяет сузить класс элементов параметрического пространства Θ с точным решением θ_z до некоторого множества Θ_{za} , на котором решение обратной задачи будет устойчиво.

II. ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАТЕЛЯ МНОГОЧАСТОТНОГО СИГНАЛА

В настоящее время опубликовано достаточно большое число работ по диагностике радиотехнических систем, в которых в качестве диагностических признаков используются показатели качества их функционального использования. Применительно к формирователю сигналов (ФС) различной структуры в качестве такого показателя может быть использован коэффициент взаимной корреляции искаженного на выходе ФС $S_u(t)$ и эталонного (с номинальными значениями параметров) $S_s(t)$ сигналов [3]:

$$g = \left| \int_0^T S_u(t) S_s^*(t) dt \right|^2 / 4P_u P_s T^2, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $S_s^*(t)$ – функция, комплексно сопряженная с $S_s(t)$; P_u и P_s – мощности соответственно эталонного и искаженного сигналов; T – длительность элемента эталонного сигнала.

Зависимость данного показателя от одного из параметров эталонного сигналов (например, временной задержки $S_s(t)$ по отношению к $S_u(t)$) представляет собой корреляционную функцию (КФ), график зависимости которой $g(\tau)$ определяется характером отказа ФС. Так, к примеру, для формирователя многочастотных сигналов, описываемых выражениями [4]:

$$S_s(t, \tau) = \exp \left[j \left(\omega_n - \frac{k_1 + k_N}{2} \omega_0 \right) t \right] \times \sum_{k=k_1}^{k_N} U_k \exp \{ j [k \omega_0 (t + \tau) + \psi_k] \}, \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

$$S_u(t) = \exp \left[j \left(\omega_n - \frac{l_1 + l_N}{2} \omega_0 \right) t \right] \sum_{l=l_1}^{l_N} U_l \exp [j (l \omega_0 t + \psi_l)] \quad (3)$$

где ω_n – несущая частота, на которой в типовых возбудителях производится формирование всех видов сигналов для передачи информации; $\omega_0 = 2\pi/T$; U_k и ψ_k – соответственно амплитуда и начальная фаза k -й составляющей эталонного сигнала; U_l и ψ_l – амплитуда и фаза l -й составляющей искаженного сигнала $\psi_k = \pi d_k$.

Корреляционная функция описывается выражением, полученным при подстановке (2) и (3) в формулу (1):

$$g(\tau) = \frac{1}{4P_s P_u} \left| \sum_{k=k_1}^{k_N} \sum_{l=l_1}^{l_N} U_k U_l \text{sinc}[(\Omega_{kl} - \Omega)T/2] \times \exp \{ j [\pi(k-l-2\tau/T) + \Delta\psi_{kl}] \} \right|^2, \quad \tau \in [0, T], \quad (4)$$

где $\Omega = [(k_1 + k_N)/2 - (l_1 + l_N)/2] \omega_0$ – частотная расстройка между средними частотами спектров искаженного и эталонного сигналов; $\Delta\psi_{kl} = \psi_k - \psi_l$ – фазовый сдвиг l -той составляющей искаженного сигнала относительно k -той составляющей эталонного сигнала; $\Omega_{kl} = (k-l)\omega_0$.

При формировании параллельного сложного сигнала, как следует из выражения (2) необходимо синтезировать колебания с частотами $k\omega_0$, на которых формируются элементарные сигналы $s_k(t)$ с заданными амплитудами U_k и начальными фазами ψ_k и суммировать элементарные сигналы в общей нагрузке. На рис. 1 приведена схема одного из вариантов построения устройства формирования многочастотного сигнала с использованием полосовых разделительных фильтров [4]. Возникновение неисправности в любой из элементов данного устройства вызовет изменение соответствующего параметра (частоты, амплитуды или фазы составляющей сигнала), а, следовательно, исказит и форму выходного сигнала $s_u(t)$.

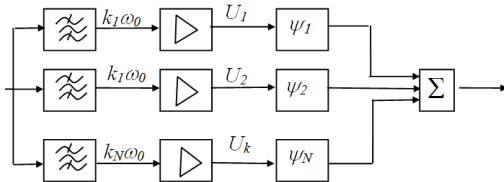


Рис. 1. Структурная схема формирователя многочастотных сигналов

На рис. 2 представлены графики функций $g(\tau/T)$ параллельных сложных сигналов с кодовой последовательностью Лежандра [4]: $\{\psi_k\} = 0, 0, \pi, 0, \pi, \pi, \pi$, соответствующие следующим искажениям параметров

сигнала $s_u(t)$ при различных дефектах в формирователе сигналов: кривые 1 – неискаженные начальные фазы; кривые 2 – искаженные фазы сигналов в первом фазовращателе $\Delta\psi_{11} = \pi/2$; кривая 3 – искаженные фазы во втором фазовращателе $\Delta\psi_{22} = \pi$; сплошные линии – все усилители работают исправно ($\{U_l\} = U_s$); штриховые линии – завышен вдвое коэффициент передачи второго усилителя ($U_2 = 2U_s$); штрих-пунктирная – отсутствует составляющая сигнала на выходе второго усилителя $U_2 = 0$. Анализ данных графиков свидетельствует о том, что вид зависимости $g(\tau)$ определяется значениями параметров радиосредства, а, следовательно, его техническим состоянием.

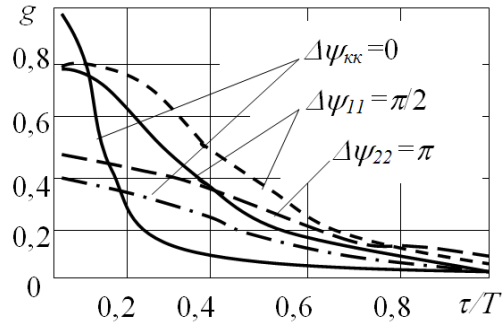


Рис. 2. Графики корреляционных функций $g(\tau)$ для различных искажений многочастотных сигналов

III. АСПЕКТЫ КОРРЕКТНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИКИ ФОРМИРОВАТЕЛЯ СИГНАЛОВ

Решение обратной задачи проводится в рамках математической модели объекта диагностирования и состоит в определении параметров θ модели

$$\left| \int_0^T S_s^*(\tau, t) S_u(t|\theta) dt \right|^2 = g(\tau)/K \quad (5)$$

по имеющейся измерительной информации о КФ $g(\tau)$.

Здесь $K = (4P_u P_s T^2)^{-1}$. Таким образом, обратная задача, состоящая в определении параметров искаженного сигнала $S_u(t|\theta)$ по регистрируемой функции $g(\tau)$, представляет собой задачу решения интегрального уравнения (5), в котором коэффициент K и функции $S_s^*(\tau, t)$ и $g(\tau)$ заданы, а $S_u(t|\theta)$ неизвестна.

При решении обратных задач естественно возникают три следующих вопроса:

1. о существовании решения задачи;
2. о единственности решения, если оно существует;
3. об устойчивости решения, т.е. о непрерывной зависимости решения задачи от исходных данных.

Вопрос о существовании решения уравнения (5) тесно связан с условиями, налагаемыми на функцию $S_s^*(\tau, t)$ и правую часть уравнения $g(\tau)/K$. Относительно функции

$S_g^*(\tau, t)$ предполагаем, что она измерима и принадлежит классу L_2 на квадрате $0 \leq \tau, t \leq T$:

$$\int_0^T \int_0^T |S_g^*(\tau, t)|^2 d\tau dt < \infty, \quad (6)$$

т.е. является ядром (оператором) Гильберта-Шмидта [5].

Интеграл $\int_0^T |S_g^*(\tau, t)|^2 dt$ существует в силу теоремы Фубини [6] и условия (6) почти для всех τ . Иначе говоря, $S_g^*(\tau, t)$ как функция от t при почти всех τ принадлежит $L_2[0, T]$.

Так как произведение функций с суммируемым квадратом суммируемо, то интеграл, стоящий справа в (5) существует для почти всех τ , т.е. функция $g(\tau)$ определена почти всюду.

В силу неравенства Коши-Буняковского [7] для почти всех τ имеем

$$\left| \int_0^T S_g^*(\tau, t) S_u(t|\theta) dt \right|^2 = g(\tau)/K \leq \int_0^T |S_g^*(\tau, t)|^2 dt \cdot \int_0^T |S_u(t|\theta)|^2 dt = \|S_u\|^2 \cdot \int_0^T |S_g^*(\tau, t)|^2 dt.$$

Интегрируя по τ , и заменяя повторный интеграл от $|S_g^*(\tau, t)|^2$ двойным, получим неравенство $\int_0^T g(\tau) d\tau \leq K \|S_u\|^2 \int_0^T \int_0^T |S_g^*(\tau, t)|^2 d\tau dt$, которое и дает интегрируемость $g(\tau)$.

Если ядро имеет непрерывную производную по τ , то и правая часть уравнения (5) должна иметь непрерывную производную по τ . Если же правая часть содержит точки, в которых функция $g(\tau)$ не имеет производной (когда график $g(\tau)$ оказывается ломаной линией), то при наличии ядра с непрерывной производной уравнение (5) не имеет решения в классическом смысле. Таким образом, существование решения зависит от того, к каким классам (пространствам) функций $S(s_u(t) \in S)$ и $G(g(\tau) \in G)$ относятся сигнал $s_u(t)$ и отклик $g(\tau)$.

Как следует из [8], оператор Фредгольма $AS_u = \int_0^T S_g^*(t, \tau) S_u(t) dt$ компактен и самосопряжен. Следовательно, для него справедлива теорема Гильберта-Шмидта. В силу данной теоремы, известной также как «теорема разложимости» [9], для существования решения уравнения (5) необходимо, чтобы функция $g(\tau)$ разлагалась по собственным функциям $\varphi_i(\tau)$ ядра $S_g^*(\tau, t)$:

$$g(\tau) = \left| \sum_i q_i \varphi_i(\tau) \right|^2 \quad (7)$$

где q_i – коэффициенты разложения функции $g(\tau)$ относительно собственных функций ядра

$|q_i|^2 = \int_0^T g(\tau) \varphi_i(\tau) d\tau \equiv (g, \varphi_i)$, а собственные функции удовлетворяют интегральным уравнениям вида:

$$\int_0^T S_g^*(\tau, t) \varphi_i(t) dt = \lambda_i^{-1} \varphi_i(\tau), \quad (8)$$

где λ_i – собственное значение ядра $S_g^*(\tau, t)$.

Уравнение (5) имеет решение, принадлежащее $L_2[0, T]$, и притом единственное тогда и только тогда, когда система собственных функций симметричного ядра $S_g^*(\tau, t)$ является полной, а ряд (7) сходится, причем $g(\tau) \in L_2[0, T]$.

Рассмотрим, как данные условия выполняются в практике диагностирования ФС по показателю вида (1). Что касается практических задач определения искаженных сигналов на выходе радиотехнического тракта, то всегда есть уверенность в существовании функции $S_u(t|\theta)$, стоящей под интегралом в левой части уравнения (5). Отсутствие решения в таких задачах может объясняться лишь неадекватностью математической модели реальному функционированию объекта.

Единственность решения уравнения (5), т.е. выполнение второго условия корректности решения этой задачи, зависит от конкретного вида ядра $S_g^*(\tau, t)$. Согласно [10], ядро $S_g^*(\tau, t)$ будет симметричным, если для всех $0 \leq \tau, t \leq T$ выполняется тождество $S_g^*(\tau, t) \equiv S_g^*(t, \tau)$.

При практической реализации процедуры диагностирования ФС по значениям показателя качества g , измерение данного показателя осуществляется при фиксированном значении аргумента $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ ядра $S_g^*(\tau, t)$. Для каждого значения $\tau_i, i = \overline{1, n}$, правая часть выражения (5) будет представлена фиксированными значениями интегралов $g(\tau_i)/K, i = \overline{1, n}$. В этом случае решение обратной задачи вида (5) можно свести к определению функции одной переменной по значениям ее интегралов:

$$\left| \int_0^T S_u(t) S_{gi}^*(t) dt \right|^2 = |q_i|^2, \quad (9)$$

где $\{S_{gi}^*(t)\} = S_g^*(\tau_i, t)$ – заданная система функций, комплексно сопряженных с функциями эталонных сигналов; $|q_i|^2 = g(\tau_i)/K, i = \overline{1, n}$. Учитывая (8), можно $S_{gi}^*(t)$ выразить через собственные функции: $S_{gi}^*(t) = \varphi_i(t)/\lambda_i$.

Если поставленную задачу сформировать как задачу решения операторного уравнения, то $AS_u = \{q_i\}$, где оператор A , определяемый равенствами (9), действует из пространства $L_2[0, T]$, в котором предполагаем систему функций $\{S_{gi}^*\}$ полной ортонормированной, в

пространство l_2 существования значений $\{q_i\}$, то задача решения этого уравнения является корректной [11]. Действительно, решение уравнения существует и единственно для любой правой части $\{q_i\} \in l_2$, а непрерывная зависимость $S_u(t)$ от $\{q_i\}$ следует из равенства Парсеваля [8]. Однако главная проблема состоит в том, чтобы выяснить, каким образом получить из функции эталонного сигнала $S_s(t)$ полную систему функций $\{S_{zi}^*(t)\}$.

К исследованию полноты системы функций $\{S_{zi}^*(t)\}$ может быть сведена задача исследования единственности решения линейного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. Действительно, если ядро $S_s^*(\tau, t)$ уравнения

$$\int_0^T S_s^*(\tau, t) S_u(t) dt = q(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq t_k, \quad (10)$$

таково, что на отрезке $[0, t_k]$ существует последовательность точек τ_i , такая, что система функций $S_{zi}^*(t) = S_s^*(\tau_i, t)$ полна в пространстве $L_2[0, T]$, то решение уравнения (10) единственно в $L_2[0, T]$. На практике данная задача решается путем выбора такого параметра и его значений $\{\tau_i\}$, при котором обеспечивается ортогональность функций $S_{zi}^*(t) = S_s^*(\tau_i, t)$, т.е.

$$\int_0^T S_{zi}^*(t) S_{zk}^*(t) dt = 0, \quad i \neq k.$$

Рассмотрим возможность применения методов решения некорректных задач для определения параметрической области, соответствующей множеству Θ_{za} и представляющую в физической интерпретации определенный класс технического состояния Z_a диагностируемого ФС. Идея понятия корректности по Тихонову была высказана с целью обоснования широко используемого при решении обратных задач метода подбора [10]. Сущность метода подбора при решении диагностических задач предусматривает этапы классификации и идентификации отказов и состоит в следующем.

Исследователь на основании моделей ФС, как объекта диагностики, и преднамеренно внесенных отказов в аппаратуру строит физическую модель для различных отказов. Далее решается прямая задача классификации, соответствующая диагностической модели: рассчитывается значения $g_a(\tau)$ правой части уравнения (5) для различных отказов $a = \overline{1, \Lambda}$.

Оператор в процессе поиска неисправности сопоставляет диагностические модели с данными измерений правой части. На основании этого сопоставления подбирается новая модель с тем, чтобы данные решения прямой задачи у новой модели были ближе к экспериментальным. В основе метода подбора лежит предположение о том, что исследуемая параметрическая область, соответствующая определенным отказам аппаратуры, не слишком сложна, число этих отказов ограничено, статистические характеристики параметров

описываются известными законами и находятся в определенных пределах. Отмеченные предположения являются гипотезами о принадлежности искомым решениям определенным компактными множествам корректности.

IV. ВЫВОДЫ

Комплексным показателем формирователя сигнала является коэффициент корреляции эталонного сигнала и сигнала на выходе данного ФС, как объекта контроля. Зависимость рассматриваемого показателя от одного из варьируемых параметров эталонного сигнала является диагностическим признаком, по которому возможно идентифицировать отказ элемента в ФС. Однако такой метод диагностики должен рассматриваться как обратная задача математической физики. Для обеспечения корректности реализации метода диагностики по комплексному показателю необходимо выполнить условия практического существования, единственности и устойчивости решения данной задачи.

Существование решения задачи подтверждается экспериментально полученными графиками зависимостей коэффициентов корреляции сигналов от варьируемых параметров ФС (по аналогии с рисунком 2). Единственность решения обратной задачи обеспечивается за счет подбора таких значений управляемого параметра, при которых функции описания эталонного сигнала будут взаимно ортогональными, а система данных функций – полной в функциональном пространстве L_2 . Для обеспечения условной устойчивости задачи решение должно приниматься из некоторого множества классов технических состояний ФС при наличии априорной информации о точности измерительных приборов и требуемой достоверности оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kyaw Zaw Ye, Alexander M. Bain. Methods to Improve the Detection of Failures and Troubleshooting for Technical Diagnostics in Instrument. *Manufacturing Science and Technology* 1(2): 31-35, 2013. DOI: 10.13189/mst.2013.010202.
- [2] Larisa Beilina, Yury V. Shestopalov Editors. Inverse Problems and Large-Scale Computations. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol.52. Springer International Publishing Switzerland, 2013. 223 p.
- [3] Fedorenko V., Samovlenko I., Kononov Yu., Samovlenko V. Modeling of Discrete Communication Channel // *Proc. Int. Conf. "Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus)"*. St. Petersburg, 2017, pp. 132-134. DOI:10.1109/EIConRus.2017.7910511.
- [4] Hermann Rohling. OFDM Concepts for Future Communication Systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. 268 p.
- [5] Simon Ruijsenaars. On positive Hilbert–Schmidt operators. *Integral Equations Operator Theory*, Volume 75, Issue 3, (2013), pp. 393–407.
- [6] Akram. H. Begmatov, M.E. Muminov, Z.H. Ochilov. The Problem of Integral Geometry of Volterra Type with a Weight Function of a Special Type. *Mathematics and Statistics*. 2015, vol. 3(5), pp. 113-120. DOI: 10.13189/ms.2015.030501.
- [7] Ronald L. Allen, Duncan W. Mills. Signal Analysis: Time, Frequency, Scale, and Structure. IEEE Press.; John Wiley & Sons, Inc., 2004. 929 p.
- [8] Kolmogorov A.N and Fomin S.V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Dover Publications, 1999. 416 p.
- [9] Lavrentiev M.M., Romanov V.G. and Shishatskii S.P. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. American Mathematical Society, Providence, 1986. 290 p.
- [10] Arsenin V. Y. Methods of mathematical physics and special functions. – Moscow: Nauka, 1987. 430 p.
- [11] Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Springer, 2011. 538 p.

