

А.Г.Александров

ОПТИМАЛЬНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Москва 2003 г.

Оглавление

Глава Contents

Предисловие.....	7
Часть первая. Оптимальные системы.....	8
1 Понятия оптимального управления	10
1.1 Оптимальное программное управление	10
1.2 Оптимальное стабилизирующее управление	15
1.2.1 Уравнения возмущенного движения	15
1.2.2 Понятие об оптимальном стабилизирующем управлении	17
1.2.3 Особенности оптимальных систем программного управления и стабилизации	20
1.3 Развитие понятий оптимального управления	22
1.3.1 Стабилизирующее управление при внешних возмущениях	22
1.3.2 Общий вид уравнений стабилизирующего управления	23
2 Методы теории оптимального управления	26
2.1 Принцип максимума	27
2.1.1 Задача об оптимальном программном управлении	27
2.1.2 Принцип максимума	29
2.1.3 Трудности практического применения принципа максимума	30
2.2 Оптимальные по быстродействию системы управления	33
2.2.1 Принцип максимума для оптимальных по быстродействию систем	33
2.2.2 Линейные объекты	35
2.2.3 Теорема об n -интервалах	38
2.3 Метод динамического программирования	39
2.3.1 Принцип оптимальности	39
2.3.2 Функциональное уравнение	41
2.3.3 Численное решение задачи управления	45
2.3.4 Связь с принципом максимума	47
3 Аналитическое конструирование регуляторов	49
3.1 Процедуры аналитического конструирования регуляторов	49
3.1.1 Построение регулятора на основе метода динамического программирования	49
3.1.2 Нестационарные объекты	55
3.1.3 Численное решение матричного алгебраического уравнения Риккати. Метод Репина - Третьякова	58
3.1.4 Численное решение уравнения Риккати методом диагонализации	59
3.1.5 Критерий обобщенной работы	60

3.1.6	Нелинейные объекты	61
3.1.7	Детерминированные внешние возмущения	63
3.1.8	Задача о слежении	64
3.1.9	Дискретные (цифровые) регуляторы	65
3.1.10	Программное обеспечение и практикум	69
3.2	Построение регуляторов при неполной информации о векторе состояния	70
3.2.1	Постановка задачи восстановления (наблюдения)	70
3.2.2	Уравнение наблюдателя	70
3.2.3	Построение наблюдателя на основе уравнения Риккати	72
3.2.4	Построение наблюдателя на основе модального управления	73
3.2.5	Структура системы с наблюдателем	75
3.2.6	Возможная негрубость системы с наблюдателем	77
3.2.7	Построение грубых систем с наблюдателем.	79
3.2.8	Программное обеспечение и практикум	80
3.3	Частотные свойства оптимальных систем	80
3.3.1	Условие оптимальности в частотной форме	80
3.3.2	Коэффициент передачи и частота среза	82
3.3.3	Границы запасов устойчивости оптимальных систем	86
3.4	Точное управление	89
3.4.1	Постановка задачи	89
3.4.2	Управление объектами первого вида	90
3.4.3	Управление объектами второго вида	90
3.4.4	Программное обеспечение и практикум	92
4	Оптимальные стохастические системы	92
4.1	Оптимальное управление при измеряемом векторе состояний	93
4.2	Оптимальное управление при неполной информации о векторе состояния.	96
4.2.1	Структура оптимального регулятора	96
4.2.2	Оптимальный наблюдатель	98
4.2.3	Теорема разделения	100
4.2.4	Восстановление переменных состояния нелинейных объектов	101
4.2.5	Программное обеспечение	102
4.3	Оптимальные стохастические дискретные системы	103
4.3.1	Оптимальное управление при измеряемом векторе состояния	103
4.3.2	Оптимальный дискретный наблюдатель (дискретный фильтр Калмана- Бьюси)	104
4.3.3	Теорема разделения	108
4.3.4	Программное обеспечение	110
5	H_∞ субоптимальное управление	110
5.1	Критерий оптимизации	111
5.1.1	Частотная передаточная матрица системы	111

5.1.2	Понятие H_∞ -нормы частотной передаточной матрицы	113
5.1.3	Вычисление H_∞ -нормы	114
5.1.4	Постановка задачи H_∞ оптимального управления	115
5.2	Оптимальное управление	115
5.2.1	Минимаксное управление	115
5.2.2	Управление, обеспечивающее ограниченную H_∞ -норму	116
5.2.3	Процедура построения оптимального управления	118
5.2.4	Программное обеспечение и практикум	119
5.3	Применение. Точное управление	119
5.3.1	Синтез регулятора	119
5.3.2	Программное обеспечение и практикум	121
Часть вторая. Адаптивные системы		123
6	Введение в адаптивное управление	125
6.1	Понятие об адаптивных системах.	125
6.1.1	Понятие о неопределенных параметрах объекта. Гипотеза квази- стационарности	125
6.1.2	Понятие об идентификации	128
6.1.3	Идентификационный алгоритм адаптивного управления. Пара- метрически адаптивные системы управления	130
6.1.4	Прямой алгоритм адаптивного управления. Функционально- ада- птивные системы	133
6.2	Структура адаптивных систем	135
6.2.1	Цели управления	135
6.2.2	Структура адаптивных систем	138
6.2.3	Постановка задачи синтеза адаптивного регулятора и этапы ее ре- шения	139
7	Системы с эталонной моделью	141
7.1	Адаптация с использованием "чистых" производных	141
7.1.1	Управление известным объектом	141
7.1.2	Постановка задачи	143
7.1.3	Алгоритм адаптации	144
7.2	Реализуемые алгоритмы адаптивного управления	147
7.2.1	Ограничение свойств эталонной модели	147
7.2.2	Адаптивный регулятор для объекта с относительной степенью рав- ной единице	148
7.2.3	Адаптивный регулятор для объекта с относительной степенью рав- ной двум	151
7.2.4	Программное обеспечение и практикум	154

8	Идентификация	154
8.1	Метод наименьших квадратов	154
8.1.1	Некоторые понятия теории временных рядов	154
8.1.2	Метод наименьших квадратов	156
8.1.3	Рекуррентный алгоритм метода наименьших квадратов	159
8.1.4	Оценка параметров СС-модели	161
8.1.5	Оценка параметров АРСС-модели	163
8.1.6	Связь с алгоритмом фильтрации	164
8.1.7	Программное обеспечение и практикум	165
8.2	Конечно-частотная идентификация	166
8.2.1	Постановка задачи и подход к ее решению	167
8.2.2	Частотные параметры и частотные уравнения	168
8.2.3	Экспериментальное определение частотных параметров	169
8.2.4	Алгоритм идентификации	171
8.2.5	Выбор амплитуд и частот испытательного сигнала	172
8.2.6	Программное обеспечение и практикум	173
9	Адаптивные стохастические системы	173
9.1	Постановка задачи	173
9.2	Алгоритм адаптации	177
9.2.1	Построение алгоритма на основе метода наименьших квадратов	177
9.2.2	Программное обеспечение и практикум	180
10	Адаптивное управление при неизвестных, ограниченных возмущениях	180
10.1	Метод рекуррентных целевых неравенств	180
10.1.1	Постановка задачи синтеза адаптивного регулятора	180
10.1.2	Синтез регулятора	182
10.1.3	Алгоритм адаптации без внешних возмущений	183
10.1.4	Алгоритм адаптации при внешних возмущениях	186
10.2	Частотное адаптивное управление	188
10.2.1	Постановка задачи	188
10.2.2	Первый интервал адаптации (идентификация объекта)	190
10.2.3	Второй интервал адаптации(идентификация замкнутой системы)	191
10.2.4	Сходимость адаптации	193
10.2.5	Программное обеспечение и практикум	193
	Практикум	194
	<i>Пр.1 Программное обеспечение разработки систем управления</i>	194
	Пр.1.1 Структура программного обеспечения	195
	Пр.1.2 АММА-2РС	196
	Пр.1.2.1 Среда пользователя(Разработчика систем управления)	196
	Пр.1.2.2 Среда исследователя.(Разработчика директив)	199
	<i>Пр.2 Оптимальные системы</i>	204

Пр.2.1 Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов (Директива 111)	205
Пр.2.2 Оптимальная система с наблюдателем (Директива 113)	206
Пр.2.3 H_∞ –оптимальное управление (Директива 131)	207
Пр.2.4 Синтез точного управления для объектов второго вида (Директива 113)	207
Пр.2.5 Синтез точного управления для объектов общего вида (Директива 144)	208
Пр.3 Идентификация и адаптивное управление	209
Пр.3.1 Конечнo- частотная идентификация (директива 111.3).	210
Пр.3.2 Идентификация на основе метода наименьших квадратов (директива 211)	212
Пр.3.3 Частотное адаптивное управление (директива 311)	212
Пр.3.4 Адаптивное управление с использованием МНК (директива 411)	213
Пр.3.5 Адаптивное управление с эталонной моделью (директива 511)	213
Дополнения	216
<i>Доп.1 Элементы классического вариационного исчисления</i>	216
Доп.1.1 Создание вариационного исчисления	216
Доп.1.2 Понятия вариационного исчисления	216
Доп.1.3 Вариационная задача с закрепленными граничными точками.	
Первое необходимое условие экстремума (уравнение Эйлера)	218
Доп.1.4 Уравнения Эйлера-Пуассона	221
Доп.1.5 Вариационные задачи с подвижными границами	222
Доп.1.6 Второе необходимое условие экстремума (условие Лежандра)	223
Доп.1.7 Вариационные задачи на условный экстремум.	
Уравнения Эйлера - Лагранжа	224
Доп.1.8 Задачи Майера и Больца	227
Доп.1.9 Доказательство теоремы Лагранжа	228
<i>Доп.2 Метод динамического программирования для дискретных систем.</i>	
<i>Численное решение функционального уравнения</i>	230
Доп.2.1 Синтез на основе классических методов математического анализа	231
Доп.2.2 Синтез на основе принципа оптимальности	232
<i>Доп.3 Аналитическое конструирование регуляторов дискретных систем</i>	238
<i>Доп.4 Модальное управление</i>	241
Доказательства	245
<i>Док.1 Вывод основного соотношения принципа максимума</i>	245
<i>Док.2 Вывод алгебраического уравнения Риккати</i>	248
<i>Док.3 Вывод уравнений оптимального наблюдения</i>	
<i>Док.4 Доказательство теоремы разделения</i>	257
<i>Док.5 Свойство H_∞ нормы</i>	261
<i>Док.6 Регулятор, обеспечивающий H_∞ норму</i>	261
<i>Док.7 Вывод алгоритма настройки параметров регулятора</i>	265

<i>Док.8 Вывод алгоритмов настройки регулятора</i>	267
Литература	269

Предисловие

Для разработки сложных и эффективных систем автоматического управления (САУ) необходимо знание: а) теории управления, б) конструктивной ее части, содержащей методы непосредственно применимые для построения алгоритмов управления, в) программного обеспечения этих методов, без которого немислима разработка сложных систем управления, но сжатые сроки разработки САУ не позволяют создавать такое обеспечение.

Книга посвящена двум, наиболее интенсивно развивающимся, направлениям теории управления: теории оптимального и адаптивного управления, их конструктивным разделам и их программному обеспечению.

Она ориентирована на две группы читателей: разработчиков САУ и лиц, самостоятельно изучающих оптимальное и адаптивное управление на основе знаний "классической" теории автоматического управления.

Книга состоит из двух частей, посвященных соответственно оптимальным и адаптивным системам, а также разделов: Практикум, Дополнения и Доказательства.

Части могут читаться почти независимо. Они имеют сходную структуру и содержат по 5 глав. В начале каждой из частей (глава 1-я и первая половина главы 6-й) вводятся понятия, формулируются задачи и приводятся содержательные примеры оптимального и адаптивного управления. Затем, в главе 2-й и во второй половине главы 6-й излагаются основы, на базе которых в последующих главах строятся методы расчета оптимальных и адаптивных систем. Описывается программное обеспечение этих методов, содержащееся в доступных системах ГАММА-2РС и МАТЛАБ.

Изложение каждого метода синтеза оптимальных систем и метода построения алгоритма работы адаптивного регулятора резюмируется в виде некоторого утверждения. Для более глубокого понимания утверждений приводятся в их доказательства. Более сложные из них содержатся в разделе Доказательства.

Вспомогательные сведения либо материал для более углубленного изучения содержатся в разделе Дополнения.

Раздел Практикум направлен на развитие навыков разработки алгоритмов оптимального и адаптивного управления. При этом используется программное обеспечение, входящее в систему ГАММА-2РС.

Разработчики САУ имеют возможность быстро перейти к конструктивным разделам теории, указанным во введениях к каждому из двух разделов книги, и затем к Практикуму.

Направленность первого издания (в 1989г.), как учебного пособия, сохранена и поэтому книга может служить основой одноименного курса лекций.

Список литературы, приведенный в книге, содержит лишь названия работ, в которых впервые были получены излагаемые результаты, либо работ, в которых эти результаты получили дальнейшее развитие, но не включены в книгу, и рекомендуются для изучения.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Введение

В широком значении слово "оптимальный" означает наилучший в смысле некоторого критерия эффективности. При таком толковании любая научно обоснованная система является оптимальной, так как при выборе какой-либо системы подразумевается, что она в каком-либо отношении лучше других систем. Критерии, с помощью которых осуществляется выбор (критерии оптимальности), могут быть различными. Этими критериями могут являться качество динамики процессов управления, надежность системы, энергопотребление, ее вес и габариты, стоимость и т. п., либо совокупность этих критериев с некоторыми весовыми коэффициентами.

Ниже термин "оптимальный" используется в узком смысле, когда система автоматического управления оценивается лишь качеством динамических процессов и при этом критерием (мерой) этого качества выступает определенный интеграл переменных системы (функционал). Такое описание критерия качества позволяет использовать для нахождения оптимального управления хорошо разработанный в математике аппарат вариационного исчисления.

Вариационные задачи, возникающие при построении оптимальных систем программного управления и оптимальных систем стабилизации программного движения, действующих по принципу обратной связи, формулируются в первой главе.

Во второй главе излагается математическая теория оптимального управления (принцип максимума Л. С. Понтрягина и метод динамического программирования Р. Беллмана). Эта теория является фундаментом для построения оптимальных систем. Она доставляет большой объем информации о структуре оптимального управления. Свидетельством последнего являются оптимальные по быстродействию управления, рассматриваемые в этой главе. Вместе с тем практическое применение теории сталкивается с трудностями вычислительного характера. Дело в том, что математическая теория оптимального управления позволяет свести процесс построения оптимального управления к решению краевой задачи для дифференциальных уравнений (обыкновенных либо в частных производных). Известные трудности численного решения краевых задач приводят к тому, что построение оптимальных управлений для каждого класса объектов управления является самостоятельной творческой задачей, решение которой требует учета специфических особенностей объекта, опыта и интуиции разработчика.

Эти обстоятельства побудили к отысканию классов объектов, для которых при построении оптимального управления краевая задача легко решается численно. Такими объектами управления оказались объекты, описываемые линейными дифференциальными уравнениями. Эти результаты, полученные А. М. Летовым и Р. Калманом, явились основой направлений синтеза систем оптимальной стабилизации: аналитического конструированием регуляторов при измеряемом векторе состояния объекта (LQ – оптимизация в зарубежной литературе) и оптимального управления при неполной ин-

формации об этом векторе (LQG -оптимизация). Эти направления изложены в главе 3 (разделы 3.1, 3.2) и главе 4.

Глава 5 (разделы 5.1 и 5.2) посвящена $H\infty$ -оптимальному управлению, которое является развитием LQG -оптимизации.

Практическое применение LQ -, LQG и $H\infty$ -оптимизаций затруднено следующими обстоятельствами.

1. Цели управления весьма редко можно описать квадратичным функционалом, используемым в этих методах. Обычно это значения установившихся ошибок, перерегулирование и время регулирования (называемые далее инженерными показателями точности и качества)

2. Оптимальные системы могут быть негрубыми. Это означает, что малые отклонения параметров системы от расчетных значений могут приводить к неустойчивости системы.

Это привело к дальнейшему развитию теории оптимального управления с целью установления связи коэффициентов квадратичного функционала с инженерными показателями, выделения классов объектов, для которых могут быть построены грубые оптимальные системы и т.д.

Это конструктивное направление излагается в разделах 3.2, 3.3 и 5.2.

Глава 1 Понятия оптимального управления

1.1 Оптимальное программное управление

Рассмотрим объект управления, движение которого описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (1.1.1)$$

где $\mathbf{x}(t)$ – n - мерный вектор переменных состояния объекта, $\mathbf{u}(t)$ – m -мерный вектор управлений.

В развернутой форме уравнение (1.1.1) имеет вид

$$dx_i/dt = \varphi_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \quad (i = \overline{1, n}),$$

где $\varphi_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \quad (i = \overline{1, n})$ – заданные функции. Они предполагаются непрерывными и необходимое число раз дифференцируемыми по $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t$.

В уравнении (1.1.1) управления являются неизвестными функциями времени, которые определяются исходя из следующих условий.

1. Задано начальное

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)} \quad (1.1.2)$$

и конечное

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^{(1)} \quad (1.1.3)$$

состояния объекта (1.1.1), где t_0 – время начала, а t_1 – время окончания функционирования объекта.

2. Эффективность управления оценивается с помощью интеграла

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt, \quad (1.1.4)$$

где $\varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ – заданная непрерывная функция своих аргументов. Для определенности далее будем полагать, что эффективность управления тем выше, чем меньше значение этого интеграла.

3. На управления и переменные состояния накладываются ограничения, выражающие ограниченные ресурсы управления и допустимые пределы изменения переменных состояния. Часто ограничения на управления имеют вид

$$|u_k(t)| \leq u_k^* \quad (k = \overline{1, m}), \quad (1.1.5)$$

где $u_k^* \quad (k = \overline{1, m})$ – заданные числа.

При $m = 2$ точки вектора $u = (u_1, u_2)$, координаты которого удовлетворяют этим неравенствам, заполняют заштрихованный прямоугольник, приведенный на рис. 1.1.1.

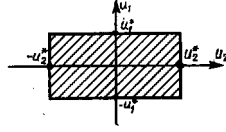


Рис. 1.1.1

В общем случае будем считать, что в соответствии с конструкцией объекта и условиями его эксплуатации задано замкнутое множество U в пространстве переменных u_1, \dots, u_m и управления могут принимать в каждый момент времени лишь значения из этого множества. Замкнутость множества U означает, что управления могут находиться не только внутри, но и на его границе (например, $u_1(t) = u_1^*$).

Далее будем называть *оптимальным программным управлением* функции времени $u_k(t) = u_k^0(t)$ ($k = \overline{1, m}$), принимающие значения из множества U , при которых объект (1.1.1) переводится из состояния (1.1.2) в состояние (1.1.3) и при этом функционал (1.1.4) принимает наименьшее значение.

Равенства (1.1.2), (1.1.3) называются *краевыми условиями*. Часто они имеют более общий вид: а) моменты времени t_0 и t_1 в (1.1.2), (1.1.3) либо один из них не заданы (тогда говорят о задаче с нефиксированным временем; б) вектор $\mathbf{x}^{(1)}$ (или $\mathbf{x}^{(0)}$) не задан (задача со свободным правым (или левым) концом траектории с фиксированным либо нефиксированным временем t_0 или t_1); в) в (1.1.2), (1.1.3) компоненты $x_{i,0}$ $x_{i,1}$ ($i = \overline{1, m}$) векторов $\mathbf{x}^{(0)}$ и $\mathbf{x}^{(1)}$ не заданы, а лежат на гиперповерхностях

$$\nu_{j0}(\mathbf{x}^{(0)}, t_0) = 0; \quad \nu_{j1}(\mathbf{x}^{(1)}, t_1) = 0 \quad (j = \overline{1, s} \leq n; \quad i = \overline{1, p} \leq n)$$

(задача с подвижными концами).

Интеграл (1.1.4) также может иметь более сложную структуру:

$$J = q_1 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt + q_2 \nu_0(\mathbf{x}^{(1)}, t_1),$$

где $\nu_0(\mathbf{x}^{(1)}, t_1)$ – заданная функция, а q_1 и q_2 – известные числа.

Кроме того, на переменные состояния, как и на управления, могут накладываться ограничения

$$\mathbf{x} \in X, \tag{1.1.6}$$

где X – замкнутое множество в пространстве состояний x_1, \dots, x_n .

В ряде случаев на управления и переменные состояния накладываются интегральные ограничения, например, вида

$$\int_{t_0}^{t_1} u_k^2(t) dt \leq J_{uk}^* \quad (k = \overline{1, m}) \quad \int_{t_0}^{t_1} x_i^2(t) dt \leq J_{xi}^* \quad (i = \overline{1, n}) \tag{1.1.7}$$

Нетрудно расширить понятие оптимального программного управления в этих более общих случаях.

Пример 1.1.1. Система "двигатель-генератор". Рассмотрим силовую часть электрического привода типа "двигатель-генератор" (приведённую на рис. 1.1.2).

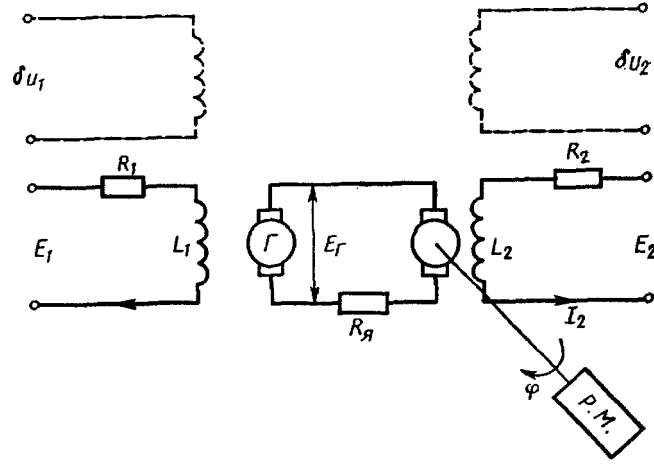


Рис. 1.1.2

Запишем уравнения, описывающие процессы в отдельных элементах привода

1. Уравнение моментов на валу двигателя

$$A \frac{d^2 \psi}{dt^2} = M_d - M_c, \quad (1.1.8)$$

где A – момент инерции якоря двигателя и приводимого в движение рабочего механизма (Р. М.), $\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; ψ – угол поворота вала двигателя, рад; M_d – момент двигателя, определяемый выражением $M_d = K I^2 I_a$; M_c – момент нагрузки, $\text{Н} \cdot \text{м}$.

2 Уравнение якорной цепи

$$E_r - E_d = I_a R_a,$$

где E_r – электродвижущая сила генератора (В), связанная с током возбуждения I_1 (А) кривой намагничивания $E_r = \varphi_r(I_1)$; E_d – электродвижущая сила двигателя, связанная с током возбуждения двигателя: I_2 (А) зависимостью $E_d = C I^2 \dot{\psi}$, в которой C – коэффициент пропорциональности.

Подставляя эти зависимости в уравнение якорной цепи, получим

$$I_a = (\varphi_r(I_1) - C I^2 \dot{\psi}) / R_a \quad (1.1.9)$$

3. Уравнение цепей возбуждения генератора и двигателя имеют соответственно вид

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + I_1 R_1 = E_1; \quad L_2 \frac{dI_2}{dt} + I_2 R_2 = E_2, \quad (1.1.10)$$

где E_i , I_i , R_i [Ом] L_i [Гн] ($i = 1, 2$) – напряжение, ток, сопротивление и индуктивность цепи возбуждения генератора и двигателя соответственно.

В зависимости от назначения рабочего механизма, связанного с валом двигателя, возникают различные режимы управления рабочим механизмом, который должен:

- а) за минимальное время разогнаться до заданной скорости либо
- б) совершить заданную работу за минимальное время, либо
- в) переместиться из одного положения в другое за заданное время при минимальных потерях в цепях управления и якорной цепи.

Осуществление каждого из этих режимов управления затруднено целым рядом ограничений, к числу которых относятся следующие:

1. Перегрев якоря, определяемый потерями в якорной цепи, которые пропорциональны квадрату тока в этой цепи. Температура перегрева пропорциональна числу

$$\int_{t_0}^{t_1} I_{\text{я}}^2(t) R_{\text{я}} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{[\varphi_r(I_1) - C I^2 \dot{\psi}]^2}{R_{\text{я}}} dt$$

и, следовательно, ограничение температуры перегрева описывается соотношением

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{[\varphi_r(I_1) - C I^2 \dot{\psi}]^2}{R_{\text{я}}} dt \leq T, \quad (1.1.11)$$

где T – заданное число, характеризующее допустимую температуру.

2. Напряжение, прикладываемое к обмоткам возбуждения генератора и двигателя, ограничено напряжением источников питания – E_{10} , E_{20} :

$$|E_1(t)| \leq E_{10}, \quad |E_2(t)| \leq E_{20}. \quad (1.1.12)$$

3. Максимальные значения скоростей и ускорений движения ограничены из условий прочности рабочего механизма либо комфорта, если, например, рабочим механизмом является лифт с людьми. Эти ограничения имеют вид

$$|\dot{\psi}| \leq \psi_1^*; \quad |\dot{\psi}| \leq \psi_2^*, \quad (1.1.13)$$

где ψ_1^* и ψ_2^* – заданные числа.

Время осуществления названных выше режимов управления ”а” и ”б” вступает в рассматриваемом случае как мера эффективности управления. Эту меру можно описать с помощью интеграла

$$J = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt. \quad (1.1.14)$$

Действительно, из (1.1.14) следует $J = t - t_0$.

Начальными и конечными состояниями системы ”генератор-двигатель” являются положение, частота вращения вала двигателя, ток в обмотках возбуждения генератора и двигателя в начальный (t_0) и конечный моменты ($t_1 = \min t$) времени.

$$\psi(t_0) = \psi_0, \quad \dot{\psi}(t_0) = \bar{\psi}_0, \quad I_1(t_0) = I_{10}, I_2(t_0) = I_{20}; \quad (1.1.15)$$

$$\psi(t_1) = \psi_1, \quad \dot{\psi}(t_1) = \bar{\psi}_1, \quad I_1(t_1) = I_{11}, I_2(t_1) = I_{21}; \quad (1.1.16)$$

Оптимальным программным управлением являются законы изменения напряжений $E_1(t)$, $E_2(t)$, удовлетворяющих ограничениям (1.1.12), при которых система "генератор-двигатель" переходит из состояния (1.1.15) в состояние (1.1.16) и при этом функционал (1.1.14) принимает наименьшее значение и выполняются ограничения (1.1.13), (1.1.13).

Для режима "в", когда требуется переместить рабочий механизм из одного положения в другое за заданное время $t_1 - t_0$ при минимальных потерях в цепях управления и якорной цепи, минимизируемый функционал имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (I_{\text{я}}^2(t) R_{\text{я}} + I_1^2(t) R_1 + I_2^2(t) R_2) dt$$

и выражает энергию, выделяемую в этих цепях.

Для удобства последующего изложения запишем уравнения системы "генератор - двигатель" и ограничения в стандартной форме. В связи с этим введем обозначения

$$\frac{\psi}{\psi_{\text{н}}} = x_1; \quad \frac{\dot{\psi}}{\bar{\psi}_{\text{н}}} = x_2; \quad \frac{I_1}{I_{1\text{н}}} = x_3; \quad \frac{I_2}{I_{2\text{н}}} = x_4; \quad \frac{E_1}{I_{1\text{н}} R_1} = u_1; \quad \frac{E_2}{I_{2\text{н}} R_2} = u_2, \quad (1.1.17)$$

где $\psi_{\text{н}}$, $\bar{\psi}_{\text{н}}$, $I_{1\text{н}}$, $I_{2\text{н}}$ - номинальные значения угла поворота двигателя (рад), частота его вращения ($\text{рад} \cdot \text{с}^{-1}$), токов в обмотках возбуждения (А) (для простоты полагаем, что числовые значения $\psi_{\text{н}}$, и $\bar{\psi}_{\text{н}}$ равны).

С учетом этих обозначений запишем уравнения (1.1.8), (1.1.9), (1.1.10) в безразмерной форме (полагая далее $M_c = 0$):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_1 \varphi_{1\text{r}}(x_3) x_4 + a_2 x_2 x_4^2; \quad (1.1.18)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{T_1} x_3 + \frac{1}{T_1} u_1; \quad \dot{x}_4 = -\frac{1}{T_2} x_4 + \frac{1}{T_2} u_2, \quad (1.1.19)$$

где

$$a_1 = \frac{K I_{2\text{н}} I_{1\text{н}} R_1}{A R_{\text{я}} \bar{\psi}_{\text{н}}}; \quad \varphi_{1\text{r}}(x_3) = \frac{\varphi_{\text{r}}(I_{1\text{н}} x_3)}{I_{1\text{н}} R_1}; \quad a_2 = -\frac{K C I_{2\text{н}}^2}{A R_{\text{я}}}; \quad T_1 = \frac{L_1}{R_1}; \quad T_2 = \frac{L_2}{R_2}.$$

Ограничения (1.1.11) ... (1.1.13) примут вид:

$$\int_{t_0}^{t_1} [q_1 \varphi_{1\text{r}}(x_3) + q_2 x_4 x_2]^2 dt \leq J_x^*, \quad (1.1.20)$$

$$|u_1| \leq u_1^*, \quad |u_2| \leq u_2^*, \quad (1.1.21)$$

$$|x_2| \leq x_2^*; \quad |a_1 \varphi_{1\Gamma}(x_3)x_4 + a_2 x_2 x_4^2| \leq \bar{x}_2^*, \quad (1.1.22)$$

где

$$x_2^* = \frac{\psi_1^*}{\psi_n}; \quad \bar{x}_2^* = \frac{\psi_2^*}{\psi_n}; \quad q_1 = -\frac{I_{1n}R_1}{E_{10}}; \quad q_2 = -\frac{CI_{2n}\bar{\psi}_n}{E_{10}};$$

$$J_x^* = \frac{TR_{\pi}}{E_{10}}; \quad u_1^* = \frac{E_{10}}{I_{1n}R_1}; \quad u_2^* = \frac{E_{20}}{I_{2n}R_2}.$$

Оптимальным программным управлением в рассматриваемом случае будут (например, для режима "а") функции $u_1^{(0)}(t)$ и $u_2^{(0)}(t)$, такие, что рабочий механизм за минимальное время при выполнении ограничений (1.1.20) ... (1.1.22) переместится из состояния $x_i(t_0) = x_{i0}$ ($i = \overline{1,4}$) в состояние, $x_i(t_1) = x_{i1}$ ($i = \overline{1,4}$), где

$$x_{10} = \frac{\psi_0}{\psi_n}; \quad x_{20} = \frac{\bar{\psi}_0}{\psi_n}; \quad x_{30} = \frac{I_{10}}{I_{1n}};$$

,

$$x_{40} = \frac{I_{20}}{I_{2n}}; \quad x_{21} = \frac{\bar{\psi}_1}{\bar{\psi}_n}; \quad x_{11} = x_{31} = x_{41} = 0$$

1.2 Оптимальное стабилизирующее управление

1.2.1 Уравнения возмущенного движения

Пусть оптимальное программное управление найдено. Это означает, что известны функции $u_k^*(t) = u_k^0(t)$ ($k = \overline{1,m}$). Подставляя эти функции в уравнения (1.1.1) и решая уравнения с начальными условиями (1.1.2) получим функции $x_i^*(t)$ ($i = \overline{1,n}$), которые будем называть *оптимальным программным движением или оптимальной программной траекторией*.

Реальное (истинное) движение системы всегда отличается от программного по следующим причинам: а) неточная реализация начальных условий (1.1.2), б) неполная информация о внешних возмущениях, действующих на систему, в) неточная реализация программного управления и т. д., поэтому реальное движение описывается функциями:

$$x_i(t) = x_i^*(t) + \delta x_i(t); \quad u_k(t) = u_k^*(t) + \delta u_k(t); \quad (i = \overline{1,n}; k = \overline{1,m}), \quad (1.2.1)$$

где $\delta x_i(t)$ ($i = \overline{1,n}$) – отклонения (возмущения) фактического движения от программного; $\delta u_k(t)$ ($k = \overline{1,m}$) – отклонения реального управления от программного. Числа $\delta x_i(t_0)$ ($i = \overline{1,n}$) – достаточно малые, но неизвестные числа, являющиеся случайными погрешностями при реализации заданных начальных условий (1.1.2). Об этих погрешностях обычно известно лишь, что они удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^n \delta x_i^2(t_0) \leq \varepsilon^2, \quad (1.2.2)$$

где ε — известное число.

Нетрудно получить уравнения (уравнения возмущенного движения), описывающие отклонения фактического движения от программного движения, которое называется *невозмущенным*.

Действительно, принимая во внимание, что функции (1.2.1) удовлетворяют (1.1.1), и вычитая из уравнений

$$\dot{x}_i^*(t) + \delta \dot{x}_i(t) = \varphi_i[x_1^*(t) + \delta x_1(t), \dots, x_n^*(t) + \delta x_n(t), u_1^*(t) + \delta u_1(t), \dots, u_m^*(t) + \delta u_m(t), t]$$

тождества

$$\dot{x}_i^*(t) = \varphi_i(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), u_1^*(t), \dots, u_m^*(t), t) \quad (i = \overline{1, n})$$

получим *уравнения возмущенного движения*

$$\delta \dot{x}_i^*(t) = \delta \varphi_i(\delta x_1, \dots, \delta x_n, \delta u_1, \dots, \delta u_m, t) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1.2.3)$$

где $\delta \varphi_i(\delta x_1, \dots, \delta x_n, \delta u_1, \dots, \delta u_m, t) = \varphi_i(x_1^* + \delta x_1, \dots, x_n^* + \delta x_n, u_1^* + \delta u_1, \dots, u_m^* + \delta u_m, t) - \varphi_i(x_1^*, \dots, x_n^*, u_1^*, \dots, u_m^*, t)$.

Если функции $\delta \varphi_i$ ($i = \overline{1, n}$) разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_1^*, \dots, x_n^*, u_1^*, \dots, u_m^*$, то уравнения (1.2.3) примут вид

$$\delta \dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \delta x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}(t) \delta u_k + o_j(\delta x_1, \dots, \delta x_n, \delta u_1, \dots, \delta u_m, t), \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1.2.4)$$

где

$$a_{ij}(t) = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|^*; \quad b_{ik}(t) = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \right|^*,$$

символ $\left| ^* \right.$ означает, что частные производные вычисляются в точке $x_i = x_i^*, u_k = u_k^*$ ($i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}$); $o_i(\delta x_1, \dots, \delta x_n, \delta u_1, \dots, \delta u_m, t)$ ($i = \overline{1, n}$) — функции, разложение которых в ряд Тейлора начинается с членов второго порядка малости.

Отбрасывая в (1.2.4) нелинейные члены, получим уравнения первого приближения

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \delta x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}(t) \delta u_k \quad (i = \overline{1, n}) \quad (1.2.5)$$

1.2.2 Понятие об оптимальном стабилизирующем управлении

Решения уравнения (1.2.4) при начальных условиях из множества (1.2.2) описывают отклонения реального движения от программного в каждый момент времени. Для количественной характеристики этих отклонений часто используют значение интеграла

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n q_{ii} \delta x_i^2 \right) dt, \quad (1.2.6)$$

в котором q_{ii} ($i = \overline{1, n}$) – положительные числа. Интеграл (1.2.6) представляет собой взвешенную с помощью коэффициентов q_{ii} ($i = \overline{1, n}$) сумму площадей, ограниченных квадратом отклонений истинного движения от программного по каждой переменной состояния. Он характеризует "расстояние" реального движения и программного и является "мерой" близости этих движений.

Используем $\delta u_k(t)$ ($k = \overline{1, m}$) для сближения этих движений, тогда δu_k ($k = \overline{1, m}$) называются *стабилизирующими управлениями*. Таким образом, результирующие управления $u_k(t) = u_k^*(t) + \delta u_k(t)$ ($k = \overline{1, m}$) состоят из программных и стабилизирующих управлений. Подставляя это выражение в (1.1.5), получим ограничения на стабилизирующее управление:

$$-u_k^* - u_k^*(t) \leq \delta u_k(t) \leq u_k^* - u_k^*(t) \quad (1.2.7)$$

Обычно $|u_k^*(t)| \geq |\delta u_k(t)|$ ($k = \overline{1, m}$). Это объясняется тем, что программное управление обеспечивает основное (программное) движение системы, а стабилизирующее управление лишь "парирует" малые отклонения от программного движения, обеспечивая, если $t_1 \rightarrow \infty$, устойчивость (отсюда термин "стабилизирующее управление") и требуемую точность осуществления программного движения. В связи с этим часто вместо ограничений (1.2.7), определяющих допустимый "расход" стабилизирующего управления в каждый момент времени, накладывают на стабилизирующие управления интегральные ограничения (ограничения на "энергию")

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta u_k^2(t) dt \leq J_{uk}^* \quad (k = \overline{1, m}) \quad (1.2.8)$$

Для учета ограничений (1.2.8) будем вместо (1.2.6) рассматривать критерии качества стабилизации

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^n q_{ii} \delta x_i^2 + \sum_{k=1}^m \gamma_{kk} \delta u_k^2 \right] dt, \quad (1.2.9)$$

где числа γ_{kk} ($k = \overline{1, m}$) определяются значениями J_{uk}^* ($k = \overline{1, m}$).

Стабилизирующее управление предназначено для минимизации интеграла (1.2.9). Кроме того, если $t_1 \rightarrow \infty$, то для существования этого интеграла стабилизирующее

управление должно обеспечивать асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1.2.4).

Если отыскивать стабилизирующее управление как явную функцию времени (по аналогии с программным управлением), то для каждого начального условия из множества (1.2.2) получим управления $\delta u_k[t, \delta x_1(t_0), \dots, \delta x_n(t_0)]$ ($k = \overline{1, m}$), для реализации которых необходимо измерять переменные состояния в момент времени $t = t_0$, так как числа $\delta x_i(t_0)$ ($i = \overline{1, n}$) неизвестны. Кроме того, функции $\delta u_k(t, \delta x_1(t_0), \dots, \delta x_n(t_0))$ будут различными для каждого набора $\delta x_i(t_0)$ ($i = \overline{1, n}$) из множества (1.2.2).

В связи с этим естественно отыскивать стабилизирующее управление не как явную функцию времени, а как функцию переменных состояния

$$\delta u_k(t) = r_k[\delta x_1(t), \dots, \delta x_n(t), t] \quad (k = \overline{1, m}) \quad (1.2.10)$$

Заметим, что вид этих функций не зависит от начальных условий из множества (1.2.2). Поясним это обстоятельство подробнее.

Допустим, что найдено управление $\delta u_k^0 = r_k^0[\delta x_1, \dots, \delta x_n, t]$ ($k = \overline{1, m}$), при котором (1.2.9) принимает наименьшее значение на движениях системы (1.2.4), и пусть в начале движения оптимальной системы реализовались начальные условия $\delta x_i^*(t_0)$ ($i = \overline{1, n}$). Подставляя в (1.2.4) $\delta u_k^0 = r_k^0$ ($k = \overline{1, m}$), решим это уравнение и, подставляя его решения в (1.2.9), вычислим значение интеграла. Получим число $J(t_0, t_1, \delta x_1^*(t_0), \dots, \delta x_n^*(t_0))$. Оно является наименьшим из всех значений интеграла (1.2.9) при $\delta u_k^0 \neq r_k^0$ ($k = \overline{1, m}$). Допустим теперь, что в начале движения системы (1.2.4) реализовались начальные условия $\delta x_i^{**}(t_0) \neq \delta x_i^*(t_0)$ ($k = \overline{1, n}$), тогда при $\delta u_k^0 = r_k^0$ ($k = \overline{1, m}$) получим другое значение (1.2.4), определяемое как $J(t_0, t_1, \delta x_1^{**}(t_0), \dots, \delta x_n^{**}(t_0))$. Это число опять должно быть наименьшим по сравнению со значениями интеграла на траекториях системы (1.2.4) при $u_k \neq r_k^0$ ($k = \overline{1, m}$) и начальных условиях $\delta x_i^{**}(t_0)$ ($i = \overline{1, n}$).

Теперь можно определить понятие оптимального стабилизирующего управления как функции переменных состояния и времени, при которых на движениях системы (1.2.4), возбужденных произвольными начальными отклонениями из множества (1.2.2), показатель качества, например (1.2.9), принимает наименьшее значение. Если в (1.2.9) верхний предел t_1 не ограничен, то стабилизирующее управление должно также обеспечивать асимптотическую устойчивость системы.

ПРИМЕЧАНИЕ 1.2.1. Стабилизирующее управление реализуется регулятором, который является сложным динамическим устройством, состоящим обычно из трех компонент: измерительных органов, устройства реализации алгоритма управления (корректирующих контуров), исполнительных органов.

Здесь и далее известные дифференциальные уравнения, описывающие измерительные и исполнительные органы, включаются в уравнения (1.2.4). Другими словами, уравнения (1.2.4) – это уравнения физического объекта вместе с измерительными и исполнительными устройствами регулятора. Тогда $\delta x_i(t)$ ($k = \overline{1, n}$) – выходы, измерительных устройств, а $\delta u_k(t)$ ($k = \overline{1, m}$) – входы исполнительных органов.

Уравнения (1.2.10) описывают устройство реализации алгоритмов управления.

Для упрощения терминологии будем по-прежнему называть *уравнениями объекта* уравнения (1.2.4) известной (неизменяемой) части системы, состоящей из объекта и элементов регулятора, а уравнениями регулятора - (1.2.10) – называть неизвестную (подлежащую определению) часть системы, состоящую лишь из устройства реализации алгоритма управления.

Пример 1.2.1. Оптимальное стабилизирующее управление в системе "генератор - двигатель". Пусть в системе "генератор - двигатель" найдено оптимальное программное управление $u_1^*(t)$ и $u_2^*(t)$. Эти функции порождают программное движение $x_i^*(t)$ ($i = \overline{1,4}$), которое находится путем численного интегрирования уравнений (1.1.18), (1.1.19) на ЭВМ, используя какой-либо из методов численного интегрирования (например, метод Рунге - Кутты). При этом в (1.1.18), (1.1.19) $u_1 = u_1^*(t)$, $u_2 = u_2^*(t)$.

Реальные значения начальных значений положения вала двигателя, его скорости, токов в обмотках возбуждения отличаются от расчетных из-за погрешностей при "выставке" угла или скорости двигателя в начальный момент времени. Поэтому реальное движение будет отличаться от расчетного (программного). Переходя к уравнениям возмущенного движения, отметим, что по построению невозмущенное движение удовлетворяет уравнениям:

$$\dot{x}_1^* = x_2^*; \quad \dot{x}_2^* = a_1 \varphi_{1r}(x_3^*) x_4^* + a_2 x_2^* x_4^{*2};$$

$$\dot{x}_3^* = -\frac{1}{T_1} x_3^* + \frac{1}{T_1} u_1^*; \quad \dot{x}_4^* = -\frac{1}{T_2} x_4^* + \frac{1}{T_2} u_2^*.$$

Так как возмущенное движение удовлетворяет уравнениям (1.1.18), (1.1.19), то

$$\dot{x}_1^* + \delta \dot{x}_1 = x_2^* + \delta x_2;$$

$$\dot{x}_2^* + \delta \dot{x}_2 = a_1 \varphi_{1r}(x_3^* + \delta x_3)(x_4^* + \delta x_4) + a_2(x_2^* + \delta x_2)(x_4^* + \delta x_4);$$

$$\dot{x}_3^* + \delta \dot{x}_3 = -\frac{1}{T_1}(x_3^* + \delta x_3) + \frac{1}{T_1}(u_1^* + \delta u_1);$$

$$\dot{x}_4^* + \delta \dot{x}_4 = -\frac{1}{T_2}(x_4^* + \delta x_4) + \frac{1}{T_2}(u_2^* + \delta u_2).$$

Учитывая уравнения невозмущенного движения, получим

$$\delta \dot{x}_1^* = \delta x_2;$$

$$\delta \dot{x}_2 = a_1 [\varphi_{1r}(x_3^* + \delta x_3)(x_4^* + \delta x_4) - \varphi_{1r}(x_3^*) x_4^*] + a_2 [(x_2^* + \delta x_2)(x_4^* + \delta x_4)^2 - x_2^* x_4^{*2}];$$

$$\delta \dot{x}_3 = -\frac{1}{T_1} \delta x_3 + \frac{1}{T_1} \delta u_1; \quad \delta \dot{x}_4 = -\frac{1}{T_2} \delta x_4 + \frac{1}{T_2} \delta u_2; \quad (1.2.11)$$

В качестве показателя отклонения реального движения от расчетного примем интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(q_{11} \delta x_1^2 + q_{22} \delta x_2^2 + \gamma_{11} \delta u_1^2 + \gamma_{22} \delta u_2^2 \right) dt, \quad (1.2.12)$$

в котором q_{11} , q_{22} , γ_{11} , γ_{22} – заданные положительные числа.

Оптимальное стабилизирующее управление δu_k (δx_1 , δx_2 , δx_4 , t) ($k = \overline{1, 2}$) должно минимизировать этот функционал на движениях системы (1.2.11) при начальных условиях

$$\sum_{i=1}^4 \delta x_i(t_0) \leq \epsilon^2 \quad (1.2.13)$$

где ϵ определяется погрешностями реализации начальных состояний $\delta x_i(t_0)$ ($i = \overline{1, 4}$).

Физическая реализация стабилизирующих управлений осуществляется с помощью дополнительных обмоток возбуждения, показанных на рис. 1.1.2 пунктиром.

Во многих случаях контроль отклонений истинного движения от программного осуществляется не по переменным состояния, а по переменным, называемым *регулируемыми (управляемыми) переменными*. Они связаны с отклонениями по каждой переменной состояния соотношением

$$\theta_i = \sum_{j=1}^n n_{ij} x_j \quad (i = \overline{1, m}) \quad (1.2.14)$$

где θ_i ($i = \overline{1, m}$) – регулируемые переменные. Критерий, с помощью которого оцениваются эти отклонения, имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^m q_{ii}^{(0)} \delta \theta_i^2 + \sum_{k=1}^m \gamma_{kk} \delta u_k^2 \right) dt. \quad (1.2.15)$$

1.2.3 Особенности оптимальных систем программного управления и стабилизации

Рассмотрим более подробно связь и различие программного и стабилизирующего управлений. В связи с этим рассмотрим общую структурную схему реализации этих управлений (рис. 1.2.1), на которой объект управления описывается уравнениями (1.1.1), а регулятор реализует стабилизирующие управления (1.2.10). Объект вместе с датчиками программного управления и движения образует систему программного управления, а объект вместе с регулятором – систему стабилизации программного движения. На рис. 1.3.1 не показаны исполнительные и измерительные устройства, которые в соответствии с примечанием 1.2.1 включены в модель объекта.

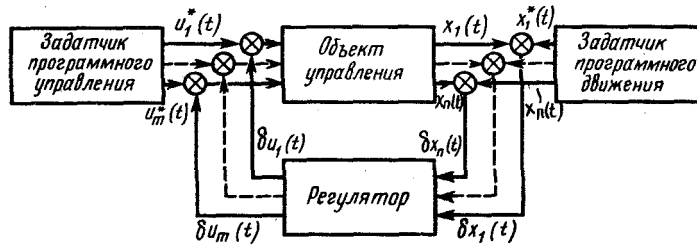


Рис. 1.2.1

Различие способа функционирования системы программного управления и системы стабилизации состоит в следующем.

1. Для первой из этих систем начальные условия (1.1.2) известны до начала проектирования, а для второй начальные условия неизвестны, известно лишь, что они находятся в пределах, устанавливаемых неравенством (1.2.2).

2. В первом случае управления являются явными функциями времени, а во втором – функциями измеряемых переменных состояния (а в общем случае и времени). Таким образом, в первом случае управление осуществляется по разомкнутому циклу, а во втором – по принципу обратной связи.

3. Эффективность работы системы программного управления оценивается определенным интегралом (1.1.4), в котором функция $\varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ определяется физической природой объекта управления.

В системе стабилизации критерий (показатель) качества (1.2.9) ее функционирования часто не связан с физической природой объекта управления, а его коэффициенты q_{ii} ($i = \overline{1, n}$) определяются исходя из инженерных требований (времени переходного процесса от истинного движения к программному, перерегулирования при этом движения, установившейся ошибки в осуществлении программного движения и т. п.). Однако в теории оптимального управления полагают критерий (1.2.9), аналогично (1.1.2), заданным, оставляя вопросы выбора его коэффициентов (а в общем случае и структуры) за пределами этой теории.

4. При построении стабилизирующего управления (1.2.10) обычно используют уравнения первого приближения (1.2.5). Это объясняется тем, что стабилизирующее управление предназначено для уменьшения отклонения δx_i ($i = \overline{1, n}$), а при малых значениях этих отклонений уравнения (1.2.4) и (1.2.5) имеют близкие решения, так как функции o_i ($i = \overline{1, n}$) зависят от квадратов, кубов и т. д. этих отклонений, и поэтому эти функции можно опустить.

Линейный характер уравнений первого приближения существенно упрощает процедуры построения стабилизирующих управлений (1.2.10). Использование же уравнений первого приближения при построении программного управления, как правило, недопустимо.

1.3 Развитие понятий оптимального управления

1.3.1 Стабилизирующее управление при внешних возмущениях

Причиной возмущенного движения часто является неполнота знаний о внешних воздействиях на объект управления в его программном движении.

Уравнения (1.1.1) при учете внешних возмущений имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}, t) \quad (1.3.1)$$

где $\mathbf{f}(t)$ – μ -мерный вектор внешних воздействий.

Будем полагать, что эти функции имеют две составляющие: известную – $f_i^*(t)$ ($i = \overline{1, \mu}$) и неизвестную – $\delta f_i(t)$ ($i = \overline{1, \mu}$).

Повторяя изложенное в 1.2, получим уравнения возмущенного движения с учетом внешних воздействий.

В первом приближении эти уравнения имеют вид

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \delta x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}(t) \delta u_k + \sum_{\rho=1}^{\mu} \psi_{i\rho}(t) \delta f_{\rho} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1.3.2)$$

где

$$\psi_{i\rho}(t) = \left. \frac{\partial \psi_i}{\partial f_{\rho}} \right|^{*} \quad (i = \overline{1, n}, \rho = \overline{1, \mu})$$

В зависимости от объема информации о функциях $\delta f_i^*(t)$ можно различить три случая:

а) полная информация (это означает, что функции известны заранее; тогда, в частности, они могут быть включены в состав $f_i(t)$ ($i = \overline{1, \mu}$) либо они точно измеряются в процессе движения объекта);

б) $\delta f_i(t)$ ($i = \overline{1, \mu}$) – случайный процесс с известными статистическими характеристиками;

в) отсутствует какая-либо информация о функциях $\delta f_i(t)$ ($i = \overline{1, \mu}$), однако известно, что они ограничены некоторыми известными числами $\delta \bar{f}(|\delta f_i(t)| \leq \delta \bar{f}_i, i = \overline{1, \mu})$.

В зависимости от объема информации о внешних воздействиях можно различить следующие типы оптимальных систем: а) равномерно-оптимальные; б) статистически оптимальные; в) минимаксно-оптимальные [1.4].

Стабилизирующее управление для систем первого типа находится из условия минимума функционала (1.2.9) на решениях системы (1.3.2). В системах второго типа каждой реализации внешнего воздействия соответствует при известных управлениях (1.2.10) свое значение интеграла (1.2.9), и поэтому в качестве меры эффективности стабилизирующих управлений используется математическое ожидание этого интеграла

$$J_1 = M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n q_{ii} \delta x_i^2 + \sum_{k=1}^m \gamma_{kk} \delta u_k^2 \right) dt \right\}. \quad (1.3.3)$$

Физический смысл величины J_1 состоит в том, что случайные воздействия возбуждают случайное движение по ординатам $\delta x_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$). Если вычислить значение интеграла (1.2.9) для каждой реализации случайного движения и затем определить "среднеарифметическое", то получим значение J_1 . Управление, при котором J_1 достигает минимума, является оптимальным в среднем, и поэтому система стабилизации называется *статистически оптимальной*.

При отсутствии информации о внешних воздействиях используется игровой подход к определению оптимального управления. В соответствии с этим подходам функции $\delta f_i(t)$ ($i = \overline{1, \mu}$) считаются "управлениями" и определяются из условия максимизации интеграла (1.2.9), а управления $\delta u_k(t)$ ($k = \overline{1, m}$) – из условия его минимизации. Эти управления обеспечивают наилучший результат при наихудшем внешнем воздействии [минимум максимального значения функционала (1.2.9)], и поэтому системы с таким управлением называются *минимаксно-оптимальными*.

1.3.2 Общий вид уравнений стабилизирующего управления

В общем случае стабилизирующие управления описываются не алгебраическими уравнениями (1.2.10), а дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \varphi_p(\mathbf{x}_p, \delta \mathbf{x}, t), \quad (1.3.4)$$

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{r}_p(\mathbf{x}_p, \delta \mathbf{x}, t), \quad (1.3.5)$$

где $\mathbf{x}_p(t)$ – n_p -мерный вектор переменных состояния устройства управления (регулятора), $\varphi_p(\mathbf{x}_p, \delta \mathbf{x}, t)$, $\mathbf{r}_p(\mathbf{x}_p, \delta \mathbf{x}, t)$ – n_p - и m -мерные векторы соответственно.

В ряде случаев не все переменные состояния объекта управления доступны непосредственному измерению.

Пусть измеряются некоторые переменные $y_1(t), \dots, y_r(t)$, связанные с переменными объекта соотношениями

$$\mathbf{y} = \mathbf{w}(\delta \mathbf{x}, t), \quad (1.3.6)$$

где $\mathbf{y}(t)$ – r -мерный вектор измеряемых переменных; $\mathbf{w}(\delta \mathbf{x}, t)$ – заданный r -мерный вектор. В этом случае уравнения регуляторов имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \varphi_p(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}, t), \quad (1.3.7)$$

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{r}_p(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}, t), \quad (1.3.8)$$

Далее будем опускать символ δ в соотношениях (1.2.2) ... (1.2.5)), (1.2.9), (1.2.10), относящихся к системам стабилизации. Если теперь для общности изложения заменить функцию под интегралом (1.2.9) функцией φ_0 , то модели объекта управления и модели целей управления (критерии качества управления) в системах программного

управления и стабилизации будут совпадать. Это естественно, так как с математической точки зрения несущественно происхождение этих моделей.

Используя матричную форму, запишем также, отбрасывая символ δ , уравнения (1.3.2) первого приближения и уравнение (1.2.14) для регулируемых переменных:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)(\mathbf{x}_p) + B(t)\mathbf{u} + \Psi(t)\mathbf{f}, \quad \boldsymbol{\theta} = N(t)\mathbf{x}, \quad (1.3.9)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $\Psi(t)$, $N(t)$ – матрицы, элементами которых являются известные функции времени. Эти матрицы имеют размеры $n \times n$, $n \times m$, $n \times \mu$, $m \times n$ соответственно.

Связь (1.3.6) переменных состояния объекта с измеряемыми переменными часто может быть линеаризована и тогда она с учетом помех измерения принимает вид

$$\mathbf{y} = D(t)\mathbf{x} + \boldsymbol{\chi}(t), \quad (1.3.10)$$

где $\boldsymbol{\chi}(t)$ – r -мерный вектор помех измерения; $D(t)$ – заданная матрица размеров $n \times r$.

Устройство управления (регулятор) часто описывается не уравнениями (1.3.7) ... (1.3.8), а линейными уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{x}} = A_p(t)\mathbf{x}_p + B_p(t)\mathbf{y}, \quad (1.3.11)$$

$$\mathbf{u} = D_p(t)\mathbf{x} + F_p(t)\mathbf{y}, \quad (1.3.12)$$

где $A_p(t)$, $B_p(t)$, $D_p(t)$, $F_p(t)$ – матрицы размеров $n_p \times n_p$, $n_p \times r$, $m \times n_p$, $m \times r$ соответственно.

Часто регулятор содержит управляющую ЭВМ. В этом случае он описывается разностными уравнениями:

$$\mathbf{x}_p[(k+1)T] = \Phi_p(kT)\mathbf{x}_p(kT) + R_p(kT)\mathbf{y}(kT) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.3.13)$$

$$\mathbf{u}(kT) = D_p(kT)\mathbf{x}_p(kT) + F_p(kT)\mathbf{y}(kT) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.3.14)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT) \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.3.15)$$

где T – интервал дискретности регулятора; $\Phi_p(kT)$, $R_p(kT)$, $D_p(kT)$, $F_p(kT)$, $(k = 0, 1, 2, \dots)$ – матрицы чисел соответствующих размеров. Поскольку для работы регулятора (1.3.13) ... (1.3.15) достаточно измерения вектора \mathbf{y} лишь в дискретные моменты времени 0 , T , $2T$, $3T$ и т. д., то естественно при определении параметров дискретного регулятора использовать дискретную модель объекта (1.3.9), (1.3.10). Такая модель при $\mathbf{f}(t) = \boldsymbol{\chi}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \Phi(kT)\mathbf{x}(kT) + R(kT)\mathbf{u}(kT); \quad \boldsymbol{\theta}(kT) = N(kT)\mathbf{x}(kT); \quad (1.3.16)$$

$$\mathbf{y}(kT) = D(kT)\mathbf{x}(kT) \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad (1.3.17)$$

Матрицы $\Phi(kT)$ и $R(kT)$, нетрудно построить на основе матриц $A(t)$, и $B(t)$, если воспользоваться формулой Коши

$$\mathbf{x}(t) = H(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t H(t, \tau)B(\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (1.3.18)$$

где $H(t, t_0)$ – нормированная фундаментальная матрица. Эта матрица (размеров $n \times n$) составлена из n – мерных векторов (первый вектор – это решение однородного уравнения $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$ при начальных условиях $x_1(t_0) = 1, x_2(t_0) = \dots = x_n(t_0) = 0$; второй вектор является решением однородного уравнения при начальных условиях $x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 1, x_3(t_0) = \dots = x_n(t_0) = 0$, и т.д.).

Произведение $H(t, \tau)B(\tau)$ – это импульсная переходная матрица объекта. Ее можно получить экспериментально, прикладывая (в момент τ) к входам объекта δ -импульсы.

Полагая в (1.3.18) $t = (k+1)T, t_0 = kT$ и принимая во внимание (1.3.15), получим

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = H[(k+1)T, kT]\mathbf{x}(kT) + \left[\int_{kT}^{(k+1)T} H[(k+1)T, \tau]B(\tau)d\tau \right] \mathbf{u}(kT), \quad (1.3.19)$$

и следовательно

$$\Phi(kT) = H[(k+1)T, kT]; \quad R(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} H[(k+1)T, \tau]B(\tau)d\tau \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.3.20)$$

В дискретном случае критерий качества имеет вид

$$J = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}'(kT)Q(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{u}'[(k-1)T]\mathbf{u}[(k-1)T], \quad (1.3.21)$$

где $Q(kT)$ ($k = \overline{1, N}$) – заданные положительно-определенные матрицы чисел.

В стационарном случае, когда параметры объекта не изменяются во времени, его уравнения (1.3.9) записываются как

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \Psi\mathbf{f}, \quad \boldsymbol{\theta} = N\mathbf{x}, \quad (1.3.22)$$

где A, B, Ψ, N – заданные матрицы чисел.

Дискретная модель объекта, описываемого уравнениями (1.3.22), имеет (при $f = 0$) вид

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \Phi\mathbf{x}(kT) + R\mathbf{u}(kT); \quad \boldsymbol{\theta}(k) = N\mathbf{x}(k), \quad (1.3.23)$$

где

$$\Phi = \mathbf{e}^{AT} = E + AT + \frac{1}{2!}(AT)^2 + \dots + \frac{1}{\mu!}(AT)^\mu + \dots; \quad (1.3.24)$$

$$R = \left[ET + \frac{1}{2!}AT^2 + \dots + \frac{A^{\mu-1}T^\mu}{\mu!} + \dots \right] B. \quad (1.3.25)$$

Соотношения (1.3.23) ... (1.3.25) нетрудно доказать, если принять во внимание, что в стационарном случае можно указать явный вид нормированной фундаментальной матрицы $H(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$

Если измеряемые переменные и управления являются скалярными функциями времени ($r = m = 1$), то объект (1.3.9), (1.3.10) называется *одномерным объектом*. Исключая вектор состояния \mathbf{x} из уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + b\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = d\mathbf{x}, \quad (1.3.26)$$

получим уравнение одномерного объекта в форме "вход-выход"

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0y = k_mu^{(m)} + \dots + k_1\dot{u} + k_0u. \quad (1.3.27)$$

Нетрудно найти связь коэффициентов уравнений с (1.3.26) и (1.3.27)

Действительно, преобразуя систему (1.3.26) по Лапласу, получим при нулевых начальных условиях $\mathbf{x}(s) = (Es - A)^{-1}b\mathbf{u}(s)$. Отсюда имеем выражение

$$\mathbf{y}(s) = d(Es - A)^{-1}b\mathbf{u}(s) = \frac{d(\widetilde{Es - A})b}{\det(Es - A)}\mathbf{u}(s), \quad (1.3.28)$$

где $(\widetilde{Es - A})$ – присоединенная матрица: $(\widetilde{Es - A})(Es - A) = E \det(Es - A)$.

С другой стороны, передаточная функция объекта в форме "вход-выход"

$$\mathbf{w}(s) = \frac{k_ms^{(m)} + \dots + k_1s + k_0}{s^{(n)} + d_{n-1}s^{(n-1)} + \dots + d_1s + d_0} = \frac{k(s)}{d(s)} \quad (1.3.29)$$

и таким образом

$$d(s) = \det(Es - A), \quad k(s) = d(\widetilde{Es - A})b. \quad (1.3.30)$$

Глава 2 Методы теории оптимального управления

Задачи построения оптимального программного и стабилизирующего управлений, рассмотренные в предыдущей главе, по математическому содержанию являются задачами вариационного исчисления. Методы вариационного исчисления условно можно разделить на классические и современные. К классическим методам относятся методы, основанные на уравнениях Эйлера, Лагранжа, Якоби, Вейерштрасса, а к современным – принцип максимума Понтрягина и метод динамического программирования Беллмана. Современные методы, разработанные в последние десятилетия, своим возникновением

обязаны задачам оптимального управления. Их достоинствами (по сравнению с классическими) являются возможность учета ограничений на управление и переменные состояния, более широкий класс функций управления, приспособленность для использования вычислительной техники и т. п. Для удобства в Дополнении 1 приведены элементы классического вариационного исчисления.

В §2.1 приводится решение задачи об оптимальном программном управлении на основе принципа максимума. Показано, что принцип максимума сводит эту задачу к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. Обсуждаются трудности ее численного решения. В §2.2 излагается решение задачи об оптимальном стабилизирующем управлении на основе метода динамического программирования. Метод сводит задачу об оптимальном стабилизирующем управлении к краевой задаче для уравнения в частных производных. Указываются трудности численного решения краевой задачи. Устанавливается связь принципа максимума и метода динамического программирования.

2.1 Принцип максимума

Развитие систем управления, ужесточение требований к их точности при ограниченных габаритах и ресурсах привело в 40-50-х годах к использованию вариационного исчисления для построения оптимальных систем управления. Вначале использовались методы классического вариационного исчисления, однако вскоре стало ясно, что для построения систем новой техники (в частности, систем запуска ракет [2.19]), систем, оптимальных по быстродействию, и т. п., необходимо дальнейшее развитие вариационного исчисления и создания математической теории оптимального управления. Дело в том, что из-за ограничений на управления (например, ограниченным количеством топлива ракеты, наличием «упоров» рулей управления и т. п.) оптимальные управления оказались кусочно-непрерывными функциями с точками разрыва первого рода, число которых неизвестно. Это противоречило предположению классического вариационного исчисления о непрерывности экстремалей.

Этапом в развитии теории оптимального управления в нашей стране явилась общая постановка проблемы об оптимальном управлении, предложенная в 1954 г. сотрудником Института автоматики и телемеханики АН СССР проф. А. А. Фельдбаумом на совместном семинаре инженеров и математиков, руководимом акад. Л. С. Понтрягиным. В 1956-1960 гг. Л. С. Понтрягиным и его учениками была разработана математическая теория оптимальных процессов, подытоженная в их всемирно известной монографии [2.7]. Основным результатом этой теории является «принцип максимума», указывающий необходимые условия оптимальности для широкого круга задач оптимального программного управления.

2.1.1 Задача об оптимальном программном управлении

Пусть объект управления описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (2.1.1)$$

Управления $u_1(t), \dots, u_m(t)$ при каждом t принимают значения из некоторого замкнутого множества U . В качестве такого множества, часто далее будем иметь в виду множество, описываемое неравенствами

$$|u_k(t)| \leq u_k^* \quad (k = \overline{1, m}). \quad (2.1.2)$$

Назовем *допустимыми управлениями* те $u_k(t)$ ($k = \overline{1, m}$), которые являются кусочно-непрерывными функциями и принимают значения из множества U .

Среди допустимых управлений, переводящих объект (2.1.1) из заданного состояния

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)} \quad (2.1.3)$$

в другое заданное состояние

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^{(1)}, \quad (2.1.4)$$

требуется найти такое, для которого функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \quad (2.1.5)$$

принимает наименьшее значение.

Здесь, в отличие от §1.1 функции φ_0 и φ_i ($i = \overline{1, n}$) не явно зависят от t . Последнее (стационарность объекта) не снижает общности рассмотрения, так как в противном случае, вводя новую переменную $x_{n+1} = t$ и дополняя систему (2.1.1) уравнением $\dot{x}_{n+1} = 1$, получим систему, правая часть которой не зависит явно от t .

Введем вспомогательные переменные $\psi_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$), которые являются решением следующей системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_i = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}; \quad \psi_0 = -1 \quad (i = \overline{1, n}); \quad (2.1.6)$$

Переменные $\psi_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$) часто называют *вспомогательными переменными*, а уравнения (2.1.6) для их определения называют *сопряженной системой*.

Запишем теперь уравнения (2.1.1), (2.1.6), в более компактной форме. Для этого введем в рассмотрение функцию H переменных $x_1(t), \dots, x_n(t)$, $\psi_0(t), \dots, \psi_n(t)$ и $u_1(t), \dots, u_m(t)$.

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0, \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^n \psi_i \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (2.1.7)$$

используя которую представим (2.1.1), (2.1.6), как

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \quad (i = \overline{0, n}); \quad (2.1.8)$$

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = \overline{0, n}); \quad (2.1.9)$$

Если ограничения (2.1.2) на управление отсутствуют, то на основе классического вариационного исчисления можно записать необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0 \quad (i = \overline{0, m}). \quad (2.1.10)$$

2.1.2 Принцип максимума

Учтем теперь ограничения (2.1.2) на управление. Если в процессе оптимального управления функции $u_k(t)$ ($k = \overline{0, m}$) не достигают границ множества (2.1.2) (что означает $|u_k(t)| < u_k^*$ ($k = \overline{0, m}$), то для них выполняются соотношения (2.1.10). Однако часто оптимальное управление принимает граничные значения u_k^* либо $-u_k^*$ ($k = \overline{0, m}$), более того, оптимальное управление может скачком переходить с одной границы на другую. Такие управления уже являются кусочно-непрерывными функциями времени.

При попадании оптимального управления на границу множества U соотношения (2.1.10), нарушаются. Оптимальные управления удовлетворяют в этом случае принципу максимума Л. С. Понтрягина, установленного и доказанного в форме приведенной ниже теоремы.

Переходя к этой теореме, сделаем некоторые пояснения. Возьмем произвольное допустимое управление $\mathbf{u}(t)$ и при начальных условиях $\mathbf{x}^{(0)}$, $x_0(t_0) = 0$ найдем решение системы (2.1.1): $x_1(t_1), \dots, x_n(t)$.

Подставляя это решение и управление $\mathbf{u}(t)$ в (2.1.6), определим, пока при некоторых произвольных начальных условиях $\boldsymbol{\psi}(t_0,)$ решение (2.1.6): $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$. При фиксированных (постоянных) значениях векторов \mathbf{x} и $\boldsymbol{\psi}$ функция H становится функцией вектора $\mathbf{u} \in U$. Максимум этой функции по \mathbf{u} и обозначим через $M(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0)$:

$$M(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0) = \max_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0, \mathbf{u}). \quad (2.1.11)$$

Максимум (наибольшее значение) непрерывной функции $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0, \mathbf{u})$ может достигаться как в точках локального максимума этой функции, в которых

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0 \quad (k = \overline{1, m}) \quad \text{и} \quad \sum_{l,k=1}^m \frac{\partial^2 H}{\partial u_k \partial u_l} \delta u_k \delta u_l < 0, \quad (2.1.12)$$

так и на границах u_k^* и $-u_k^*$ ($k = \overline{1, m}$), множества U .

Теорема (принцип максимума Л. С. Понтрягина [?]). Пусть $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ – такое допустимое управление, что соответствующие ему решения $x_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$) уравнения (2.1.8), исходящие в момент t_0 из состояния (2.1.3), проходят в момент времени t_1 через точку $x^{(1)}$, $x_0(t_1)$. Для оптимальности управления (при котором $x_0(t_1)$ принимает наименьшее значение) необходимо существование таких ненулевых непрерывных функций $\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$, удовлетворяющих уравнениям (2.1.9), что при любом t ($t_0 \leq t \leq t_1$) функция $H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \psi_0(t), \mathbf{u})$ переменного $\mathbf{u} \in U$ достигает при $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ максимума

$$H(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \psi_0(t), \mathbf{u}(t)) = M(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \psi_0(t)) \quad (2.1.13)$$

при этом в конечный момент времени t_1 выполняются соотношения

$$\psi_0(t_1) < 0; \quad M(\mathbf{x}(t_1), \boldsymbol{\psi}(t_1), \psi_0(t_1)) = 0 \quad (2.1.14)$$

Если $\mathbf{x}(t)$, $\boldsymbol{\psi}(t)$, и $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяют (2.1.8), (2.1.9) и (2.1.13), то функции $\psi_0(t)$ и $M(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\psi}(t), \psi_0(t))$ переменного t являются постоянными и поэтому проверку соотношений (2.1.14) можно проводить не обязательно в момент времени t_1 , а в любой момент t ($t_0 \leq t \leq t_1$).

Доказательство теоремы является достаточно сложным, и поэтому в разделе Доказательство 1 приведен лишь вывод основного соотношения (2.1.13) теоремы для случая свободного правого конца ($x^{(1)}$ не задан) и фиксированного t_1 .

Соотношения (2.1.13) и (2.1.14) можно записать в более простой форме:

$$\max_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0, \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1.15)$$

Таким образом, центральным в теореме является условие максимума (2.1.15). Оно означает, что если $u_1(t), \dots, u_m(t)$ – оптимальные управления, а $x_1(t), \dots, x_n(t)$ – оптимальные траектории, то непременно найдутся такая постоянная $\psi_0 < 0$ и такие решения $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ системы (2.1.9), что функция $H(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1, \dots, u_m, \psi_0, \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$ переменных u_1, \dots, u_m , при всех $t \in [t_0, t_1]$ будет достигать максимума на U именно при оптимальных управлениях $u_1(t), \dots, u_m(t)$. Поэтому эту теорему, дающую необходимое условие оптимальности в задачах оптимального управления, принято называть *принципом максимума*. Отметим, что во внутренних точках множества U для оптимального управления выполняются условия (2.1.10), которые являются необходимыми для (2.1.15).

2.1.3 Трудности практического применения принципа максимума

Как же практически воспользоваться условием (2.1.15), ведь функции $x_1(t), \dots, x_n(t)$, $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ и постоянная ψ_0 , входящие в это условие, неизвестны? Здесь поступают следующим образом: рассматривая функцию $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0)$ как функцию t

переменных $u_1, \dots, u_m \in U$ и считая переменные \mathbf{x}, ψ, ψ_0 параметрами, решают задачу максимизации функции H и находят функцию

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \psi, \psi_0) \in U, \quad (2.1.16)$$

на которой достигается наибольшее значение функции H .

В ряде случаев функция (2.1.16) может быть записана в явном виде. Например, если правые части (2.1.1) имеют структуру

$$\varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \varphi_i^{(1)}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^n \varphi_{ik}^{(2)}(\mathbf{x}) u_k \quad (i = \overline{1, n}),$$

а подынтегральное выражение функционала (2.1.5)

$$\varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \varphi_0 \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \varphi_{0i}(\mathbf{x}) u_i$$

множество описывается U неравенствами (2.1.2), то

$$H(\mathbf{x}, \psi, \psi_0, \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^n \psi_i(t) \varphi_i^{(1)} + \sum_{k=0}^m \left(\sum_{i=0}^n \psi_i(t) \varphi_{ik}^{(2)}(\mathbf{x}) \right) u_k \quad (2.1.17)$$

и эта функция достигает [2.8] наибольшего значения на U в точке с координатами

$$u_k = \begin{cases} u_k^*, & \text{если } \sum_{i=0}^n \psi_i(t) \varphi_{ik}^{(2)}(\mathbf{x}) > 0; \\ -u_k^*, & \text{если } \sum_{i=0}^n \psi_i(t) \varphi_{ik}^{(2)}(\mathbf{x}) < 0, \end{cases}$$

или

$$u_k(t) = u_k^* \operatorname{sign} \left(\sum_{i=0}^n \psi_i(t) \varphi_{ik}^{(2)}(\mathbf{x}(t)) \right) \quad (k = \overline{1, m}). \quad (2.1.18)$$

Формула (2.1.18) дает большой объем информации о структуре оптимального управления: k -я ($k = \overline{1, m}$) координата оптимального управления является ступенчатой (кусочно-постоянной) функцией со значениями u_k^* и $-u_k^*$, при этом моменты переключения определяются условием

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(t) \varphi_{ik}^{(2)}(\mathbf{x}(t)) = 0. \quad (2.1.19)$$

Итак, допустим, что функция (2.1.16) известна. Рассмотрим систему $2n$ дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, (\mathbf{x}, \psi, \psi_0)) \quad (i = \overline{1, n}); \quad (2.1.20)$$

$$\dot{\psi}_i = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}, u, (\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \psi_0))}{\partial x_i} \psi_j \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2.1.21)$$

Общее решение системы (2.1.20), (2.1.21) зависит от произвольных постоянных, которые определяются из краевых условий (2.1.3), (2.1.4). Задача интегрирования уравнений (2.1.20), (2.1.21) при краевых условиях (2.1.3), (2.1.4) называется *краевой задачей* (двухточечной краевой задачей).

Таким образом, принцип максимума позволяет свести решение задачи об оптимальном программном управлении к решению краевой задачи.

Трудность ее решения состоит в том, что интегрирование уравнений (2.1.20), (2.1.21) в "прямом времени" не представляется возможным, так как неизвестны начальные условия $\psi_i(t_0)$ ($i = \overline{1, n}$). Один из возможных подходов к решению краевой задачи заключается в следующем. Задаваясь произвольным вектором $\psi(t_0) = \psi^{(0)}$ и интегрируя (2.1.20), (2.1.21) при известных начальных условиях $\mathbf{x}(t_0)$, $\psi^{(0)}$ найдем функции $\mathbf{x}(t)$, $\boldsymbol{\psi}(t)$ и при $t = t_1$ проверим выполнение равенства (2.1.4). Если оно нарушается, задаемся другим вектором $\psi(t_0) = \psi^{(1)}$ и, интегрируя (2.1.20), (2.1.21) при начальных условиях $\mathbf{x}(t_0)$, $\psi^{(1)}$ получим при $t = t_1$ вектор $\mathbf{x}(t_1)$.

Если он не совпадает с заданным, продолжаем процесс до тех пор, пока не найдется такой вектор $\psi(t_0)$, что условия (2.1.4) будут выполняться с приемлемой точностью. При этом подходе используются градиентные методы, когда $\psi(t_0)$ определяется из условия минимума "расстояния" $\mathbf{x}(t_1)$ от заданного вектора $\mathbf{x}^{(1)}$.

В вычислительной математике разработан ряд методов приближенного численного решения краевых задач: метод стрельбы, метод прогонки, ряд итерационных методов [2.10], [2.11]. Во многих случаях не представляется возможным найти из условия (2.1.15) явный вид (2.1.18) оптимального управления. Тогда уравнения (2.1.1), сопряженная система (??) и условия максимума (2.1.15) образуют *краевую задачу принципа максимума*. Эта задача имеет ряд специфических особенностей, затрудняющих применение стандартных численных методов решения краевых задач. К числу таких особенностей относятся разрывы функций $u_k(t)$ ($k = \overline{1, m}$), удовлетворяющих условию максимума (2.1.15), их неединственность, нелинейный характер зависимости (2.1.16) даже в линейных системах. Кроме того, особенностью краевых задач, связанных с принципом максимума даже в случаях, когда удастся найти явный вид управлений (2.1.16), является их плохая сходимость, вызванная неустойчивостью системы (2.1.20), (2.1.21). Ряд приемов решения краевых задач принципа максимума изложен, например, в [2.12], [2.13]. Отметим в заключение, что, несмотря на различные методы численного решения краевой задачи принципа максимума, процесс решения каждой оптимизации на основе этого принципа является самостоятельной творческой задачей, решаемой в рамках той частной отрасли динамики, к которой относится объект управления, с учетом его специфических особенностей, используемых для улучшения сходимости численного решения краевой задачи.

2.2 Оптимальные по быстродействию системы управления

Повышение быстродействия при заданных ресурсах-это повышение производительности процессов и машин, и поэтому оптимальные по быстродействию и близкие к ним системы стали первоочередным объектом исследования специалистами по автоматике. В 1935 г. в СССР был получен патент [2.27] на систему перемещения валков прокатного стана, в которой применялась квадратичная обратная связь, обеспечивающая максимальное быстродействие. Аналогичный принцип был применен несколько позже в автоматическом потенциометре, выпускаемом одной из фирм США. Затем появились теоретические работы. В 1953 г. было введено [2.28] общее понятие оптимального процесса в n -мерном пространстве состояний (n -мерном фазовом пространстве) и доказана теорема об n -интервалах переключения оптимального по быстродействию процесса. Первая публикация по принципу максимума [2.29] также содержала (высказанный в форме гипотезы) принцип, ведущий к решению общей задачи об оптимальном по быстродействию программном управлении. В последующие годы появилось большое число работ, основанных на принципе максимума, в которых приводятся различные способы построения оптимального по быстродействию систем программного управления, а также синтезу таких систем.

2.2.1 Принцип максимума для оптимальных по быстродействию систем

Задача определения оптимального по быстродействию программного управления состоит в нахождении управлений $u \in U$, при которых объект

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.2.1)$$

переводится из состояния

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)} \quad (2.2.2)$$

в состояние

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^{(1)} \quad (2.2.3)$$

($\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{x}^{(1)}$ и t_0 – заданы, а t_1 – неизвестно), при этом функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \quad (2.2.4)$$

принимает наименьшее значение.

Опираясь на теорему 2.1.2 принципа максимума, выведем необходимые условия оптимальности по быстродействию.

Из (2.2.4) следует, что $\varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 1$, и поэтому

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \phi_0, \mathbf{u}) = \varphi + \sum_{i=1}^n \phi_i \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Вводя функцию

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \phi_i \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (2.2.5)$$

запишем (2.2.1) и сопряженную систему в виде

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H_1}{\partial \phi_i} \quad (i = \overline{1, n}); \quad (2.2.6)$$

$$\dot{\phi}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1, n}) \quad (2.2.7)$$

При фиксированных \mathbf{x} и $\boldsymbol{\psi}$ H_1 становится функцией \mathbf{u} . Обозначим

$$M_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) = \max_{\mathbf{u} \in U} H_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}).$$

Очевидно, что

$$M(\mathbf{x}, \phi) = M_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) - \phi_0.$$

Таким образом, необходимое условие (2.1.15) для оптимальности по быстродействию принимает вид

$$\max_{\mathbf{u} \in U} H_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}) = \phi_0 \quad (\phi_0 \leq 0). \quad (2.2.8)$$

Пример. Оптимальное управление в системе "генератор-двигатель". Рассмотрим задачу об оптимальном по быстродействию программном управлении в системе "генератор - двигатель".

Пренебрегая динамическими процессами в обмотках возбуждения двигателя и генератора, запишем уравнения (1.1.18), (1.1.19) при $T_1 = T_2 = 0$ в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_1 \varphi_1(u_1) u_2 + a_2 x_2 u_2^2. \quad (2.2.9)$$

Требуется записать краевую задачу принципа максимума для определения функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ (удовлетворяющих неравенствам $|u_1(t)| \leq u_1^*$, $|u_2(t)| \leq u_2^*$, при которых вал двигателя поворачивается из заданного положения x_{10} , x_{20} , в другое заданное положение x_{11} , x_{21} за наименьшее время.

Функция H_1 имеет в рассматриваемом случае вид

$$H_1 = \phi_1(t) x_2 + \phi_2(t) (a_1 \varphi_1(u_1) u_2 + a_2 \varphi_2 u_2^2), \quad (2.2.10)$$

в ней вспомогательные переменные $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\phi}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial x_i} = 0; \quad \dot{\phi}_2 = -\frac{\partial H_1}{\partial x_2} = -\phi_1 + a_2 \phi_2 u_2^2. \quad (2.2.11)$$

Уравнения (2.2.9) ... (2.2.11) образуют краевую задачу принципа максимума для оптимального по быстродействию управления.

2.2.2 Линейные объекты

Рассмотрим важный для практики частный случай задачи об оптимальном быстродействии, когда уравнения (2.2.1) объекта линейны и имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}. \quad (2.2.12)$$

В этом случае функция

$$H_1 = \sum_{i=1}^n \phi_i(t) \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik}u_k \right]. \quad (2.2.13)$$

Сопряженная система (2.2.7) записывается так:

$$\dot{\phi}_i(t) = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \left[\sum_{\mu=1}^n a_{i\mu}x_\mu + \sum_{k=1}^m b_{jk}u_k \right]}{\partial x_i} \phi_i = - \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_j \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2.2.14)$$

Для линейных объектов принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности по быстродействию. В соответствии с (2.2.8) для оптимальности управления необходимо и достаточно, чтобы функция (2.2.13) принимала наибольшее значение при ограниченном u . Эта функция достигает максимума, если

$$\sum_{k=1}^m \left[\sum_{i=1}^n b_{ik} \phi_i(t) \right] u_k(t) = \max_{|u_k(t)| \leq u_k^*} \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i=1}^n b_{ik} \phi_i(t) \right] u_k. \quad (2.2.15)$$

При $m = 1$ и ограничении $|u(t)| \leq u^*$ это условие примет вид

$$\sigma_1(t)u(t) = \max_{|u_k(t)| \leq u^*} \sigma_1(t)u, \quad (2.2.16)$$

где $\sigma_1(t) = \sum_{i=1}^n b_{i1} \phi_i(t)$.

Необходимым условием экстремума всякой гладкой функции, заданной в открытой области изменения ее аргумента, является равенство нулю ее производной. Если функция задана в замкнутой области, то ее экстремум может достигаться как внутри, так и на границе этой области. В рассматриваемом случае функция $H_{11} = \sigma_1 u$ — линейная относительно u , ее производная не зависит от u , и поэтому если на u не наложено ограничение, то не существует точки u , в которой функция H_{11} достигает экстремума. Если функция H_1 рассматривается в замкнутом интервале $[-u^*, u^*]$ изменения переменной u , то в этом интервале она достигает максимума и минимума на границах интервала (рис. 3.1.1).

Спрашивается, каково же должно быть u , чтобы функция H_1 достигала максимума? Как следует из рис. 2.2.1, u определяется выражением

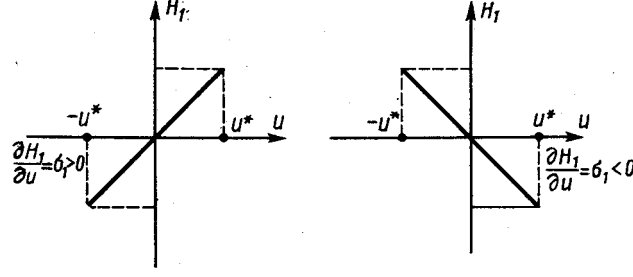


Рис. 2.2.1

$$u = u^* \operatorname{sign} \frac{\partial H_1}{\partial u} = u^* \operatorname{sign} \sigma_1.$$

Это выражение справедливо для каждого момента времени, и поэтому оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = u^* \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n b_{i1} \phi_i(t). \quad (2.2.17)$$

Возвращаясь к общему случаю ($m > 1$), замечаем, что каждая составляющая $u_1(t), \dots, u_m(t)$ вектора u изменяется независимо от остальных составляющих, поэтому (2.2.15) выполняется, если

$$u_k(t) = u_k^* \operatorname{sign} \left[\sum_{i=1}^n b_{ik} \phi_i(t) \right] \quad (k = \overline{1, m}). \quad (2.2.18)$$

Таким образом, для линейных объектов принцип максимума дает явный вид (2.2.18) оптимального управления, а краевая задача состоит в определении вектора $\psi(t_0)$, при котором решения системы

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad (2.2.19)$$

$$u_k = u_k^* \operatorname{sign} B'_{[k]} \psi \quad (k = \overline{1, m}) \quad (2.2.20)$$

($B'_{[k]}$ — k -тый столбец матрицы B);

$$\dot{\psi} = -A' \psi \quad (2.2.21)$$

удовлетворяют краевым условиям (2.2.2), (2.2.3).

Заметим, что корни характеристического уравнения объекта (2.2.12) и сопряженной системы (2.2.14) равны по модулю, однако противоположны по знаку. Действительно, характеристический полином объекта имеет вид $\det(Es - A)$, а сопряженной системы имеет вид $\det(Es + A')$, и если, например, объект асимптотически устойчив, то сопряженная система неустойчива. Это приводит к трудностям при численном решении

краевой задачи. В связи с этим были разработаны специальные методы (изложенные, например, в [2.30]) решения краевых задач для системы (2.2.12) ... (2.2.15).

Трудности решения краевой задачи для системы (2.2.12) ... (2.2.15), к которой сводится задача об оптимальном программном управлении при использовании принципа максимума, привели к разработке нового метода [2.6], предложенного Н.Н.Красовским. Этот метод сводит задачу об оптимальном программном управлении в линейных системах к так называемой *проблеме моментов*, изучаемой в функциональном анализе.

Пример. Пусть объект управления описывается уравнением

$$\ddot{y} + d_2 \ddot{y} + d_1 \dot{y} + d_0 y = bu. \quad (2.2.22)$$

Требуется определить функцию управления $u(t)$, удовлетворяющую неравенству $|u(t)| \leq 1$, которое переводит этот объект из состояния

$$y(0) = y_{10}; \quad \dot{y}(0) = y_{20}; \quad \ddot{y}(0) = y_{30} \quad (2.2.23)$$

в нулевое положение

$$y(t_1) = \dot{y}(t_1) = \ddot{y}(t_1) = 0 \quad (2.2.24)$$

за минимальное время.

Вводя обозначения $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$, $b = b_{31}$, запишем уравнение объекта в форме

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = x_3; \quad \dot{x}_3 = -d_2 x_3 - d_1 x_2 - d_0 x_1 + b_{31} u. \quad (2.2.25)$$

Функция

$$H_1 = \phi_1 x_2 + \phi_2 x_3 + \phi_3 (-d_2 x_3 - d_1 x_2 - d_0 x_1 + b_{31} u), \quad (2.2.26)$$

а сопряженная система (2.2.14) имеет вид

$$\dot{\phi}_1 = d_0 \phi_3; \quad \dot{\phi}_2 = -\phi_1 + d_1 \phi_3; \quad \dot{\phi}_3 = -\phi_2 + d_2 \phi_3. \quad (2.2.27)$$

Из (2.2.26) заключаем, что искомое оптимальное управление имеет вид

$$u = 1 \cdot \text{sign } b_{31} \phi_3(t). \quad (2.2.28)$$

Разрешая последнюю систему трех уравнений относительно ψ_3 , получим дифференциальное уравнение

$$-\ddot{\phi}_3 + d_2 \ddot{\phi}_3 - d_1 \dot{\phi}_3 + d_0 \phi_3 = 0 \quad (2.2.29)$$

для определения функции $\psi_3(t)$.

2.2.3 Теорема об n -интервалах

Из (2.2.18) следует, что каждая из компонент оптимального управления представляет собой кусочно-постоянную функцию, точками разрыва которой являются точки обращения в нуль функции

$$\sigma_k(t) = \sum_{i=1}^n b_{ik} \phi_i(t) \quad (k = \overline{1, m}).$$

На рис. 2.2.2 приведен график, изменения во времени одной из этих функций.

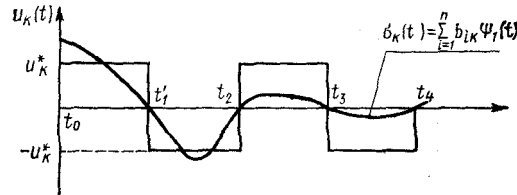


Рис. 2.2.2

Каждую точку разрыва оптимального управления будем называть точкой переключения. Число переключений каждого из управлений $u_k(t)$ ($k = \overline{1, m}$) определяется числом нулей функции $\sigma_k(t)$ ($k = \overline{1, m}$) и может быть очень большим. Существует, однако, один важный случай, когда число переключений этих управлений допускает точную оценку. Этот случай составляет содержание теоремы об n -интервалах.

Теорема. (об n -интервалах) Если корни характеристического уравнения объекта (2.2.12) действительны, то число переключений каждого из управлений $u_1(t), \dots, u_m(t)$ не превышает $n - 1$.

При доказательстве теоремы ограничимся для простоты случаем $n = 3$, $m = 1$. Кроме того, будем полагать, что объект управления описывается системой (2.2.25), при этом корни уравнения $s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 = 0$ объекта (2.2.25) попарно различны. Однако приводимое ниже доказательство полностью повторяется для общего случая, описанного теоремой.

Обозначим через $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$ корни характеристического уравнения объекта. Тогда очевидно, что корни характеристического полинома уравнения (2.2.29) равны $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, и, следовательно, функция $\psi_3(t)$, являющаяся решением этого уравнения, имеет вид

$$\phi_3(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + k_3 e^{\lambda_3 t}, \quad (2.2.30)$$

где k_1, k_2, k_3 – постоянные интегрирования.

Поскольку число корней (нулей) функции $\psi_3(t)$ определяет число переключений оптимального управления, то теорема будет доказана, если справедливо следующее утверждение.

Утверждение Если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – попарно различные действительные числа, то функция (2.2.30) не может иметь более двух действительных корней.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение справедливо (уравнение $e^{\lambda_1 t} = 0$ не имеет действительных корней). Предположим, что утверждение доказано для случая, когда в (2.2.30) имеется лишь два слагаемых, и докажем ее для трех слагаемых.

Допустим противное, что функция (2.2.30) имеет не менее трех действительных корней. Умножив ее на $e^{-\lambda_3 t}$, получим функцию

$$k_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_3)t} + k_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_3)t} + k_3, \quad (2.2.31)$$

которая также имеет не менее трех действительных корней. Из математического анализа (теорема Ролля) следует, что между двумя действительными корнями функции лежит по крайней мере один корень ее производной. Следовательно, производная функции (2.2.31) имеет не менее двух действительных корней. С другой стороны, эта производная определяется выражением

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_3)e^{(\lambda_1 - \lambda_3)t} + k_2(\lambda_2 - \lambda_3)e^{(\lambda_2 - \lambda_3)t}, \quad (2.2.32)$$

в которой числа $\lambda_1 - \lambda_3$ и $\lambda_2 - \lambda_3$ попарно различны, и, следовательно, она имеет не более одного действительного корня (выше полагалось, что утверждение доказано для случая, когда (2.2.30) содержит менее трех слагаемых). Полученное противоречие доказывает утверждение и теорему.

2.3 Метод динамического программирования

В пятидесятых годах наряду с задачами оптимального управления в технике возникли задачи об оптимальном управлении в экономике, управлении войсками и т.д. (задачи об управлении запасами, ресурсами, составление расписаний, организация тыла). Они не допускали эффективного численного решения на основе существующих методов. Это привлекло внимание математиков к этим задачам. При этом обнаружилось, что процесс решения многих из них может быть представлен как некоторый многоплановый процесс принятия решений. Эта концепция получила название *метода динамического программирования*, что означает принятие решений во времени.

Основу метода динамического программирования, разработанного американским математиком Р. Беллманом [2.20], составляет *принцип оптимальности*, используя который выводят функциональное уравнение метода. Решение этого уравнения приводит к синтезу оптимального управления.

2.3.1 Принцип оптимальности

Рассмотрим задачу об оптимальном стабилизирующем управлении. Пусть дан объект управления, описываемый уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (2.3.1)$$

Требуется найти закон управления

$$\mathbf{u} = r(\mathbf{x}, t), \quad (2.3.2)$$

чтобы на движениях системы (2.3.1), (2.3.2), возбужденных произвольными начальными отклонениями, минимизировался функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt. \quad (2.3.3)$$

При этом на управления (2.3.2) наложены ограничения $u \in U$. Для определенности часто будем полагать, что

$$-u_k^* \leq u_k(t) \leq u_k^*, \quad (2.3.4)$$

где u_k^* ($k = \overline{1, m}$) – заданные числа.

Отметим, что эта задача является вариационной задачей со свободным правым концом и фиксированным t_1 .

Для простоты изложения принципа оптимальности ограничимся частным случаем этой задачи, когда $n = 2$, а $m = 1$. В этом случае уравнения (2.3.1) и (2.3.2) примут вид:

$$\dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2, u, t); \quad \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2, u, t); \quad (2.3.5)$$

$$u = r(x_1, x_2, t), \quad (2.3.6)$$

а функционал (2.3.3) запишется, если опустить для простоты t в φ_0 , как

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1, x_2, u) dt. \quad (2.3.7)$$

Переходя к принципу оптимальности, допустим, что оптимальное управление (2.3.2) найдено. Этому управлению соответствует оптимальная траектория $x_1(t)$, $x_2(t)$, которую можно вычислить, подставляя в уравнения (2.3.1) функцию (2.3.2) и интегрируя (2.3.1) при некотором начальном условии $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$. Эта траектория приведена на рис. 2.3.1.

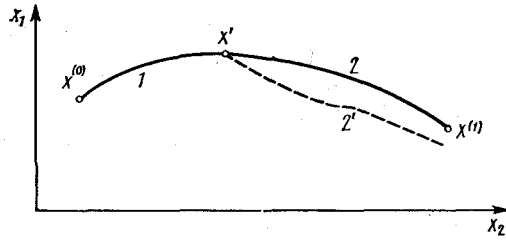


Рис. 2.3.1.

Отметим какую-либо точку x' на оптимальной траектории и назовем участок между точкой $x^{(0)} = \{x_1(t_0), x_2(t_0)\}$ и точкой $x' = \{x_1(t'), x_2(t')\}$ первым (траектория 1), а участок между точками $x' = \{x_1(t'), x_2(t')\}$ и $x^{(1)} = \{x_1(t_1), x_2(t_1)\}$ назовем вторым участком траектории (траектория 2).

ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ: независимо от того, каким путем система (2.3.5) достигла в момент времени t' точки $\{x_1(t'), x_2(t')\}$, ее оптимальным последующим движением будет траектория 2.

Другими словами, второй участок оптимальной траектории является оптимальной траекторией. Это означает, что если система, начав движение из точки $x^{(0)}$, оказалась в момент времени t' в точке x' , то оптимальное движение из этой точки будет совпадать с траекторией 2.

Обоснование принципа почти очевидно. Действительно, пусть движение из точки x' продолжается не по траектории 2, а по траектории $2'$ и при этом движении функционал

$$J = \int_{t'}^{t_1} \varphi_0(x_1, x_2, u) dt.$$

принимает меньшее значение, чем на траектории 2. Тогда значение функционала (2.3.7) на траектории $1 - 2'$ будет меньшим, чем на траектории $1 - 2$. Это противоречит предположению об оптимальности u .

2.3.2 Функциональное уравнение

Несмотря на почти очевидный, эвристический характер принципа оптимальности, он имеет своим следствием далеко не очевидное функциональное уравнение. Переходя к его выводу, введем обозначения для значений функционала на оптимальных траекториях:

$$v[x_1(t_0), x_2(t_0), t] = \min_{|u(t)| \leq u^*} \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u(t)] dt;$$

$$v[x_1(t'), x_2(t'), t'] = \min_{|u(t)| \leq u^*} \int_{t'}^{t_1} \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u(t)] dt;$$

Представим (полагая $t' = t_0 + \tau$; τ – достаточно малое число) функционал (2.3.7) в форме

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u(t)] dt + \int_{t_0+\tau}^{t_1} \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u(t)] dt.$$

Допустим, что оптимальное управление на втором участке известно. Значение, которое принимает функционал оптимизации при движении по этому участку, определяется выражением $v[x_1(t'), x_2(t')]$. На основе принципа оптимальности можно записать функциональное уравнение

$$v[x_1(t_0), x_2(t_0), t_0] = \min_{|u(t_0)| \leq u^*} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\tau} \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u(t)] dt + v[x_1(t_0 + \tau), x_2(t_0 + \tau), t_0 + \tau] \right\}.$$

Учитывая малость τ , получим

$$v[x_1(t_0), x_2(t_0), t_0] = \min_{|u(t_0)| \leq u^*} \{ \varphi_0[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0)]\tau + v[x_1(t_0 + \tau), x_2(t_0 + \tau), t_0 + \tau] \}. \quad (2.3.8)$$

Минимизируя выражение в фигурных скобках по $u(t_0)$, получим оптимальное управление на первом участке. Однако в этом выражении функция v неизвестна. В связи с этим преобразуем (2.3.8).

Используя разложение в ряд Тейлора, получим

$$x_i(t_0 + \tau) = x_i(t_0) + \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{t=t_0} \tau + o_{1i}(\tau) = x_i(t_0) + \varphi_i[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), t_0]\tau + o_{1i}(\tau) \quad (i = \overline{1, 2}).$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o_{1i}(\tau)}{\tau} \rightarrow 0;$$

$$v[x_1(t_0 + \tau), x_2(t_0 + \tau), t_0 + \tau] = v\{x_1(t_0) + \varphi_1[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), t_0]\tau + o_{11}(\tau), x_2(t_0) + \varphi_2[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), t_0]\tau + o_{12}(\tau), t_0 + \tau\} = v[x_1(t_0), x_2(t_0), t_0] +$$

$$+ \frac{\partial v}{\partial x_1} \Big|_{\substack{t=t_0 \\ x_1=x_1(t_0) \\ x_2=x_2(t_0)}} \varphi_1[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), t_0]\tau +$$

$$+ \frac{\partial v}{\partial x_2} \Big|_{\substack{t=t_0 \\ x_1=x_1(t_0) \\ x_2=x_2(t_0)}} \varphi_2[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), t_0]\tau + \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{\substack{t=t_0 \\ x_1=x_1(t_0) \\ x_2=x_2(t_0)}} \tau + o_3(\tau),$$

$$\text{где } \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{o_3(\tau)}{\tau} \rightarrow 0.$$

Подставляя эти выражения в (2.3.8), получим

$$v[x_1(t_0), x_2(t_0), t_0] = \min_{|u(t_0)| \leq u^*} \{ \varphi_0[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0)]\tau + v[x_1(t_0), x_2(t_0), t_0] + \\ + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big|_{\substack{x_i=x_i(t_0) \\ t=t_0}} \varphi_i[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), t_0]\tau + \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{\substack{t=t_0 \\ x_1=x_1(t_0) \\ x_2=x_2(t_0)}} \tau + o_3(\tau) \}.$$

Сокращая $v[x_1(t_0), x_2(t_0), t_0]$ в обеих частях равенства и поделив результат на τ , получим при $\tau \rightarrow \infty$

$$-\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{\substack{t=t_0 \\ x_1=x_1(t_0) \\ x_2=x_2(t_0)}} = \min_{|u(t_0)| \leq u^*} \left\{ \varphi_0[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0)] + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big|_{\substack{t=t_0 \\ x_1=x_1(t_0) \\ x_2=x_2(t_0)}} \varphi_i[x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0), t_0] \right\}.$$

Учитывая, что полученный результат справедлив для любых $x_1(t_0), x_2(t_0), t_0$, опустим индекс "0" и запишем

$$-\frac{\partial v[x_1(t), x_2(t), t]}{\partial t} = \\ = \min_{|u(t_0)| \leq u^*} \left\{ \varphi_0[x_1(t), x_2(t), u] + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v[x_1(t), x_2(t), t]}{\partial x_i} \varphi_i[x_1(t), x_2(t), u, t] \right\}. \quad (2.3.9)$$

В общем случае, когда $n > 2$, $m > 1$, это уравнение имеет вид

$$-\frac{\partial v[x_1, \dots, x_n, t]}{\partial t} = \min_{u_1, u_2, \dots, u_n \in U} \{ \varphi_0[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] + \\ + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v[x_1, \dots, x_n, t]}{\partial x_i} \varphi_i[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] \}. \quad (2.3.10)$$

Если известно, что оптимальные управления находятся внутри множества U , либо если ограничения подобного рода вообще отсутствуют, то уравнение (2.3.10) можно представить как совокупность уравнений в частных производных:

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \varphi_0[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi_i[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t]; \quad (2.3.11)$$

$$\frac{\partial \varphi_0[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m]}{\partial \dot{u}_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t]}{\partial u_k} = 0 \quad (k = \overline{1, m}). \quad (2.3.12)$$

Таким образом, для решения задачи об оптимальной стабилизации необходимо решить, при краевых условиях

$$v[x_1(t_1), \dots, x_n(t_1), t_1] = 0, \quad (2.3.13)$$

специфическое уравнение в частных производных (2.3.10) либо систему из $m + 1$ уравнений в частных производных (2.3.11), (2.3.12). В результате решения этих уравнений получим искомые оптимальные управления $u_k = u_k(x_1, \dots, x_n, t)$, где $(k = \overline{1, m})$, и функцию $v(x_1, \dots, x_n, t)$, которая при $x_i = x_{i0}$, $t = t_0$ является наименьшим значением функционала оптимизации

$$v(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt, \quad (2.3.14)$$

если выполняются краевые условия (2.3.13). Действительно, пусть оптимальные управления определены. Тогда, вдоль оптимальных траекторий и управлений, уравнение (2.3.10) примет вид

$$-\frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} = \varphi_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial x_i} \varphi_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)$$

или

$$\frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial x_i} \varphi_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) = -\varphi_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m). \quad (2.3.15)$$

Очевидно, что это уравнение можно записать в более компактной форме

$$\frac{dv(x_1, \dots, x_n, t)}{dt} = -\varphi_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m). \quad (2.3.16)$$

Интегрируя его в пределах от t_0 до t_1 , заключаем, что

$$v[x_1(t_1), \dots, x_n(t_1), t_1] = - \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt. \quad (2.3.17)$$

Учитывая краевые условия (2.3.13), получим (2.3.14).

При $t \rightarrow \infty$ на оптимальные управления накладывается дополнительное требование асимптотической устойчивости. Если функции $\varphi_0 > 0$ и $v[x_1, \dots, x_n]$ для всех x_1, \dots, x_n , то система (2.3.1), (2.3.2) асимптотически устойчива.

Действительно, уравнение (2.3.15) является уравнением второго метода А. М. Ляпунова и поэтому для асимптотической устойчивости оптимальной системы достаточно положительно - определенной функции $v(x_1, \dots, x_n)$, полная производная которой в силу дифференциальных уравнений (2.3.1) отрицательно-определенна.

Таким образом, если $\varphi_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) > 0$ и $t_1 \rightarrow \infty$, то функция $v(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)$ в уравнениях метода динамического программирования оказывается функцией Ляпунова, поэтому этот метод иногда называют *методом Ляпунова - Беллмана*. Заметим также, что для асимптотически устойчивой оптимальной системы краевое условие (2.3.13) выполняется автоматически.

Отметим в заключение, что если функционал оптимизации (2.3.3) имеет более общий вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) dt + \nu_0[x_1(t_1), \dots, x_n(t_1), t_1], \quad (2.3.18)$$

то краевое условие (2.3.13) записывается как

$$v[x_1(t_1), \dots, x_n(t_1), t_1] = \nu_0[x_1(t_1), \dots, x_n(t_1), t_1]. \quad (2.3.19)$$

2.3.3 Численное решение задачи управления

Допустим, что удалось найти в явной форме управление, при котором выражение в фигурных скобках, входящее в (2.3.10), достигает минимума:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}_x), \quad (2.3.20)$$

где \mathbf{v}_x – вектор с компонентами $\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}$.

Подставляя это выражение в (2.3.10), получим нелинейное уравнение в частных производных первого порядка

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}_x)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}_x), t). \quad (2.3.21)$$

Численное решение этого уравнения при краевых условиях (2.3.19) представляет собой более трудную задачу, чем решение краевой задачи принципа максимума, так как там речь шла о краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений, а здесь о краевой задаче для уравнений в частных производных. Это увеличение трудностей численного решения естественно, так как на основе метода динамического программирования решается более сложная задача синтеза управлений, тогда как принцип максимума доставляет управления как функции времени. Кстати, эти функции получаются и применением метода динамического программирования к задаче об оптимальном программном управлении, если в управления $u_k = r_k(x_1(t), \dots, x_n(t), t)$ ($k = \overline{1, m}$) подставить вместо $x_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) оптимальные траектории.

Для решения уравнения (2.3.21) применяют известные методы [2.10], [2.11] решения уравнений в частных производных (разностные методы, метод характеристик, метод прямых и т.п.), однако имеется специальный метод приближенного численного решения этого уравнения. Этот метод состоит в замене дифференциальных уравнений

(2.3.1) системой дифференциально-разностных уравнений, а интеграла (2.3.3) - суммой и в использовании для нахождения оптимального дискретного управления в такой системе на основе функционального уравнения для дискретных систем. Собственно, исторически такое функциональное уравнение и было впервые получено при синтезе оптимального управления именно дискретных систем.

Подробное изложение метода динамического программирования для дискретных систем приведено в Дополнении 2.

Пример Рассмотрим объект управления, возмущенное движение которого описывается в первом приближении уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u. \quad (2.3.22)$$

Требуется найти управление $u = r(x_1, x_2, t)$, такое, чтобы функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (q_{11}x_1^2 + u^2) dt + \alpha_1 x_1^2(t_1) + \alpha_2 x_2^2(t_1), \quad (2.3.23)$$

(где $q_{11}, \alpha_1, \alpha_2$ - заданные числа) принимал наименьшее значение при движениях объекта, возбужденных произвольными начальными отклонениями. На искомое управление наложено ограничение

$$|u(t)| \leq 1. \quad (2.3.24)$$

Переходя к исследованию этой задачи, запишем функциональное уравнение метода динамического программирования:

$$-\frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \min_{|u| \leq 1} \left\{ \frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} (-x_1 + u) + q_{11}x_1^2 + u^2 \right\} \quad (2.3.25)$$

и краевые условия

$$v[x_1(t_1), x_2(t_1), t_1] = \alpha_1 x_1^2(t_1) + \alpha_2 x_2^2(t_1). \quad (2.3.26)$$

Выражение в фигурных скобках достигает минимума, когда

$$u = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_2}, & \text{если } \left| \frac{1}{2} \frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \right| < 1; \\ 1, & \text{если } -\frac{1}{2} \frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} > 1; \\ -1, & \text{если } -\frac{1}{2} \frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} < -1. \end{cases} \quad (2.3.27)$$

Это соотношение вместе с уравнением

$$-\frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} (-x_1 + u) + q_{11}x_1^2 + u^2$$

и краевым условием (2.3.26) образует краевую задачу метода динамического программирования.

2.3.4 Связь с принципом максимума

Для установления связи [2.21] метода динамического программирования с принципом максимума запишем функциональное уравнение (2.3.10) в несколько иной форме. В связи с этим введем новую переменную $x_{n+1} = t$. Очевидно, что

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = \varphi_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}, u_1, \dots, u_m) = 1. \quad (2.3.28)$$

С учетом этого соотношения, а также очевидного равенства $\min_t \{\alpha(t)\} = \max_t \{-\alpha(t)\}$ запишем (2.3.10) в виде

$$\max_{u \in U} \left\{ - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi_i - \varphi_0 \right\} = 0. \quad (2.3.29)$$

Принцип максимума для задачи о минимуме функционала (2.3.3) на связях (2.3.1) доставляет (при $\psi_0 = -1$) условие

$$\max_{u \in U} \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \psi_i \varphi_i - \varphi_0 \right\} = 0, \quad (2.3.30)$$

в котором $\psi_{n+1}(t)$ является решением уравнения

$$\dot{\psi}_{n+1} = - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{n+1}} \psi_i. \quad (2.3.31)$$

Сравнивая (2.3.29) и (2.3.30), нетрудно заметить их идентичность, если доказать, что вдоль оптимальных траекторий выполняется равенство

$$\psi_i(t) = - \frac{\partial v[x_1(t), \dots, x_{n+1}(t)]}{\partial x_i(t)} \quad (i = \overline{1, n+1}). \quad (2.3.32)$$

Переходя к доказательству этого равенства, вычислим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \varphi_j = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \varphi_j \quad (i = \overline{1, n+1}). \quad (2.3.33)$$

С другой стороны, дифференцируя (2.3.29) по x_j ($i = \overline{1, n+1}$), получим вдоль оптимальных траекторий

$$- \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i} \varphi_i - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j} = 0. \quad (2.3.34)$$

Используя (2.3.33), запишем это равенство в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right) = - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}. \quad (2.3.35)$$

Сравнивая это выражение с сопряженными уравнениями (2.1.6), заключаем, что функции времени $-\frac{\partial v}{\partial x_j}$ и $\psi_i(t)$ ($i = \overline{1, n} + 1$) удовлетворяют одинаковым дифференциальным уравнениям и, следовательно, эти функции совпадают при одинаковых начальных (краевых) условиях в этих уравнениях.

Заметим, что при выводе (2.3.35) использовалось соотношение (2.3.34), которое нуждается в обосновании. Дело в том, что равенство выражения в фигурных скобках (2.3.29) нулю не означает равенства нулю ее производной, а это молчаливо предполагалось при выводе (2.3.34).

В связи с этим рассмотрим фиксированный момент времени $t = t^*$. Для этого момента оптимальное управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t^*)$ является вектором чисел. Для точек фазового пространства, не лежащих на оптимальной траектории, $\mathbf{u}(t^*)$ уже не будет оптимальным и, следовательно, для этих точек функция в фигурных скобках выражения (2.3.29) не будет достигать максимума. Отсюда следует, что эта функция достигает максимума, равного нулю, лишь в точках, лежащих на оптимальной траектории, и, следовательно, частные производные рассматриваемой функции по x_j ($j = \overline{1, n} + 1$) в силу необходимых условий экстремума [по x_j ($i = \overline{1, n} + 1$)] обращаются в нуль. Таким образом, связь между методом динамического программирования и принципом максимума установлена.

Укажем в заключение на различие этих методов. Оно вызвано тем, что функциональное уравнение (2.3.29) содержит частные производные $-\frac{\partial v}{\partial x_i}$ ($i = \overline{1, n}$), которые могут не существовать. Это обстоятельство можно было бы считать не особенно существенным, если бы после решения функционального уравнения оказалось, что функция $v(x_1, \dots, x_n, t)$ дифференцируема по x_i ($i = \overline{1, n}$). В действительности же для многих практически важных задач функция $v(x_1, \dots, x_n, t)$ не является дифференцируемой по x_i ($i = \overline{1, n}$), и поэтому возникла необходимость дальнейших исследований, связанных с этим методом.

В 1962 г. В.Ф.Кротов предложил [2.22] простые достаточные условия оптимальности, которые охватили как частный случай функциональные уравнения метода динамического программирования. Эти условия нашли широкое применение для решения практических задач [2.23], [2.24]. С использованием этих условий были начаты исследования функционального уравнения метода динамического программирования. Были указаны дополнительные условия, накладываемые на это уравнение, при которых оно приводит к синтезу оптимального управления [2.25], [2.26].

Сразу же после появления метода динамического программирования началось его широкое практическое применение для построения управления запуском ракет и спутников, химическими процессами, реактором и другими объектами.

Глава 3 Аналитическое конструирование регуляторов

В 1960 г. появилась работа сотрудника института автоматики и телемеханики АН СССР, профессора А. М. Летова [3.1], в которой было получено аналитическое решение задачи об оптимальной стабилизации линейных стационарных объектов при квадратичном функционале качества. Эта работа благодаря ясной постановке задачи и конструктивным результатам явилась источником большого числа публикаций по синтезу регуляторов для различных классов объектов (линейных непрерывных, дискретных, с запаздыванием, нелинейных), в которых при решении задачи об оптимальной стабилизации были преодолены трудности решения краевой задачи принципа максимума и метода динамического программирования. Это направление получило название *аналитического конструирования регуляторов*. В зарубежных источниках оно часто называется линейно- квадратической оптимизацией, а первой зарубежной публикацией была вышедшая в том же 1960 г. работа американского математика Р. Калмана [3.27], в которой решалась задача оптимизации для линейных, нестационарных объектов.

В первом параграфе этой главы приведены процедуры аналитического конструирования (синтеза) регуляторов. На основе метода динамического программирования Показано, что синтез регуляторов для систем стабилизации оптимальных в смысле квадратичного функционала сводится на основе метода динамического программирования к решению системы обыкновенных дифференциальных либо разностных уравнений (уравнений Риккати) с известными начальными условиями.

В §3.2 излагается метод синтеза регуляторов в случае, когда не все переменные состояния доступны непосредственному измерению. Вводится понятие о наблюдателе, который представляет собой динамическую систему, выходные переменные которой со временем приближаются к переменным состояния объекта, которые необходимо восстановить.

§3.3 посвящен применению процедур АКОР и наблюдателей для синтеза грубых и точных систем.

3.1 Процедуры аналитического конструирования регуляторов

3.1.1 Построение регулятора на основе метода динамического программирования

Рассмотрим объект управления, возмущенное движение которого описывается в первом приближении уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad t_0 = 0, \quad (3.1.1)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} – заданные, матрицы чисел размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно.

Требуется найти матрицу чисел \mathbf{C}' (размеров $m \times n$) уравнения регуляторов

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}'\mathbf{x}, \quad (3.1.2)$$

такую, чтобы на асимптотически устойчивых движениях системы (3.1.1), (3.1.2), возбужденных произвольными начальными отклонениями $x^{(0)}$, минимизировался функционал

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{u}) dt, \quad (3.1.3)$$

где Q – заданная положительно-определенная матрица размеров $n \times n$ ($\mathbf{x}' Q \mathbf{x} > 0$ для всех \mathbf{x} , это обозначается далее $Q > 0$).

Матрицу C' закона управления (3.1.2) иногда называют *матрицей коэффициентов усиления регулятора*.

Переходя к решению этой задачи об оптимальной стабилизации на основе метода динамического программирования, ограничимся вначале случаем $n = m = 1$. В этом случае уравнения системы и функционал примут вид

$$\dot{x} = ax + bu; \quad (3.1.4)$$

$$u = cx, \quad (3.1.5)$$

$$J = \int_0^{\infty} (qx^2 + u^2) dt. \quad (3.1.6)$$

Тогда уравнения (2.3.11), (2.3.12) метода динамического программирования запишутся как

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = qx^2 + u^2 + \frac{\partial v}{\partial x}(ax + bu); \quad (3.1.7)$$

$$2u + \frac{\partial v}{\partial x}b = 0 \quad \text{или} \quad u = -\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x}b. \quad (3.1.8)$$

Предпоследнее равенство выражает необходимое условие экстремума правой части (3.1.7). Нетрудно проверить, что при этом управлении достигается ее минимум. Действительно,

$$\frac{d^2 \left[qx^2 + u^2 + \frac{\partial v}{\partial x}(ax + bu) \right]}{du^2} = 2 > 0.$$

Этот минимум – единственный и поэтому единственно управление вида (3.1.8). Правда, как будет показано ниже, уравнению (3.1.7) удовлетворяет не единственная функция v . Эта функция доопределяется из условия устойчивости системы (3.1.1), (3.1.2).

Исключая u из (3.1.7) с помощью (3.1.8), получим нелинейное уравнение в частных производных:

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}ax - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial x}b\right)^2 + qx^2. \quad (3.1.9)$$

Решение этого уравнения при краевом условии

$$v[x(t_1)] = 0 \quad (t_1 \rightarrow \infty)$$

будем искать в виде

$$v = px^2; \quad p = \text{const}. \quad (3.1.10)$$

Подставляя это выражение в (3.1.9), получим

$$0 = 2pax^2 - (pb)^2x^2 + qx^2. \quad (3.1.11)$$

Отсюда следует алгебраическое уравнение для определения неизвестного коэффициента p в (3.1.10):

$$2pa - p^2b^2 + q = 0 \quad (3.1.12)$$

Из двух решений

$$p^{(1)} = \frac{a}{b^2} + \sqrt{\frac{a^2}{b^4} + \frac{q}{b^2}}; \quad p^{(2)} = \frac{a}{b^2} - \sqrt{\frac{a^2}{b^4} + \frac{q}{b^2}}$$

этого уравнения выбираем первое исходя из условия положительности функции v , обеспечивающего асимптотическую устойчивость синтезируемой системы, а следовательно, и выполнение краевого условия $v[x(\infty)] = 0$.

На основе (3.1.8) получаем

$$u = (-p^{(1)}b)x, \quad (3.1.13)$$

и, таким образом, искомое число

$$c = -p^{(1)}b. \quad (3.1.14)$$

В общем случае ($n > 1$, $m \geq 1$) уравнения (3.1.12), (3.1.14) аналитического конструирования регуляторов имеют вид

$$PA + A'P - PBB'P + Q = 0; \quad (3.1.15)$$

$$C = -PB, \quad (3.1.16)$$

где P – симметричная матрица чисел размеров $n \times n$.

Вывод этих уравнений приведен в Доказательстве 2. Уравнение (3.1.15) называется *матричным уравнением Риккати* (смысл такого названия станет ясен несколько позже).

Процедура аналитического конструирования регуляторов (процедура АКОР) состоит из трех операций: 1) решение уравнения Риккати, 2) выделение из всего множества этих решений матрицы $P^0 > 0$ (численный метод нахождения P^0 приведен ниже), 3) вычисление искомой матрицы коэффициентов усиления регулятора по формуле

$$C = -P^0 B. \quad (3.1.17)$$

Убедимся непосредственно, что матрица C , определяемая соотношением (3.1.17), обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (3.1.1), (3.1.2). Для исследования устойчивости системы $\dot{x} = (A + BC')x$ воспользуемся прямым методом Ляпунова. Примем в качестве функции Ляпунова $v = x'P^0x > 0$ и вычислим полную производную этой функции:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \dot{x}'P^0x + x'P^0\dot{x} = x'(A + BC')P^0 + x'P^0(A + BC')x = \\ &= x'[P^0A + A'P^0 + P^0BC' + CB'P^0]x. \end{aligned}$$

Учитывая, что матрица C определяется выражением (3.1.17), получим, с учетом того, что P^0 удовлетворяет (3.1.15),

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= x'[P^0A + A'P^0 - P^0BB'P^0 - P^0BB'P^0]x = \\ &= -x'Qx - x'P^0BB'P^0x = -x'Qx - u'u < 0. \end{aligned}$$

Если объект (3.1.1) полностью управляем и $Q > 0$, то среди решений системы (3.1.15) всегда найдется и при том единственная положительно-определенная матрица P^0 . Напомним, что *условием полной управляемости объекта* (3.1.1) является равенство

$$\text{ранг } [B, AB, \dots, A^{(n-1)}B] = n, \quad (3.1.18)$$

которое будем называть *условием управляемости пары* (A, B) . Если матрица Q – неотрицательно-определенная матрица ($Q \geq 0$), то ее всегда можно представить в виде

$$Q = H'H,$$

где H – матрица размеров $\chi \times n$ (χ – ранг матрицы Q). Среди решений (3.1.15) по-прежнему существует [3.6] единственная матрица P^0 , если Q в функционале (3.1.3) неотрицательно - определенная матрица, удовлетворяющая условию полной управляемости пары (A', H') :

$$\text{ранг } [H', A'H', \dots, A^{(n-1)'}H'] = n.$$

Требование полной управляемости пар (A, B) , (A', H') для существования и единственности $P^0 > 0$ можно ослабить, заменив его условием стабилизируемости этих пар [3.6].

Пример. Аналитическое конструирование регулятора гирорамы. Осуществим первый этап (составление уравнений (3.1.15), (3.1.16)) аналитического конструирования регулятора гирорамы.

Опишем вначале физическое содержание задачи стабилизации гирорамы [3.3], поскольку на примере решения этой задачи будут иллюстрироваться результаты, приведенные в этой и следующих главах.

Рассмотрим трехстепенной гироскоп в кардановом подвесе (рис. 3.1.1). Его уравнения имеют вид [?]:

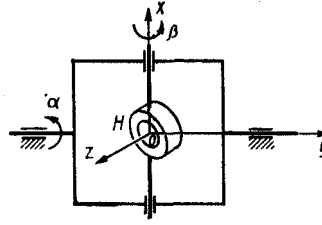


Рис. 3.1.1

$$(J_{\text{э}} + J_{\text{вэ}})\ddot{\beta} + (J_{\text{э}} + J_{\text{вэ}} - J_{\text{в}})\dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + n_{\beta}\dot{\beta} + H\dot{\alpha} \cos \beta = M_x; \quad (3.1.19)$$

$$[(J_{\text{э}} + J_{\text{вэ}}) \cos^2 \beta + J_{\text{в}} \sin^2 \beta + J_{\text{н}}]\ddot{\alpha} + 2(J_{\text{в}} - J_{\text{э}} - J_{\text{вэ}})\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + n_{\alpha}\dot{\alpha} - H\dot{\beta} \cos \beta = -M_y; \quad (3.1.20)$$

α – угол поворота наружной рамы относительно оси OY ; β – угол поворота внутреннего кольца карданова подвеса относительно оси OX (угол прецессии); $J_{\text{н}}$ – момент инерции наружной рамы (кольца) относительно оси OY ; $J_{\text{э}}$ – экваториальный момент инерции гироскопа; $J_{\text{в}}$, $J_{\text{вх}}$, $J_{\text{ву}}$ – моменты инерции внутреннего кольца карданова подвеса относительно осей OZ , OX , OY соответственно, при этом $J_{\text{вх}} = J_{\text{ву}} = J_{\text{вэ}}$; H – кинетический момент гироскопа; M_x и M_y – моменты относительно осей OX и OY соответственно; n_{α} , n_{β} – коэффициенты демпфирования.

Гироскоп в кардановом подвесе используется (если установить на оси OY датчик угла) для измерения углов поворота движущегося объекта (например, ракеты) относительно оси OY . Однако из-за вредных моментов по этой оси (трения, дисбаланса и т. п.) гироскоп начинает "прецессировать" относительно оси OX , т. е. ось OZ начинает поворачиваться в направлении оси OY , и гироскоп теряет свойство быть индикатором поворота летательного аппарата. Явление прецессии следует непосредственно из уравнения (3.1.20), если в нем пренебречь всеми слагаемыми в левой части, кроме последнего слагаемого (так как $H \gg J_{\text{э}}$, $J_{\text{вэ}}$, $J_{\text{в}}$, n_{α}). Прецессию можно измерить, установив на оси OX датчик угла. Усилим этот сигнал и подадим его на

двигатель, который развивает полезный момент, равный и противоположный по знаку вредному. Тогда прецессия прекратится и гироскоп будет сохранять свои функции. Гироскоп в кардановом подвесе с системой стабилизации угла прецессии называется *гирорамой*. Ее схема приведена на рис. 3.1.2, где ДУП – датчик угла прецессии, ДМ – датчик момента (двигатель).

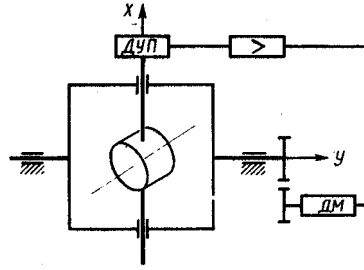


Рис. 3.1.2

Запишем уравнения (3.1.19), (3.1.20) в форме Коши.

Пренебрегая значениями J_{ϑ} , $J_{\vartheta\varphi}$, J_{φ} по сравнению с J_H , полагая $M_x = 0$ и вводя обозначения

$$x_1 = \frac{\beta}{\beta_H}; \quad x_2 = \frac{\dot{\beta}}{\beta'_H}; \quad x_3 = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha'_H}; \quad (\beta_H = 1 \text{ рад}; \quad \beta'_H = 1 \text{ рад/сек}; \quad \alpha'_H = 1 \text{ рад/сек});$$

$$-\frac{J_{\vartheta} + J_{\vartheta\varphi} - J_{\varphi}}{J_{\vartheta} + J_{\vartheta\varphi}} = R_2; \quad -\frac{H}{J_{\vartheta} + J_{\vartheta\varphi}} = a_{23}; \quad -\frac{n_{\beta}}{J_{\vartheta} + J_{\vartheta\varphi}} = a_{22}; \quad -\frac{2(J_{\vartheta} - J_{\vartheta\varphi} - J_{\varphi})}{J_H} = R_3;$$

$$\frac{H}{J_H} = a_{32}; \quad -\frac{n_{\alpha}}{J_H} = a_{33}; \quad -\frac{M_y}{J_H} = b_{31}u + m_{31}f,$$

запишем уравнения (3.1.19), (3.1.20) в виде

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \cos x_1 + R_2x_3^2 \sin x_1 \cos x_1; \quad (3.1.21)$$

$$\dot{x}_3 = a_{32}x_2 \cos x_1 + a_{33}x_3 + R_3x_3x_2 \sin x_1 + b_{31}u + m_{31}f. \quad (3.1.22)$$

Разлагая правые части этих уравнений в ряд Тейлора в окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, получим уравнения первого приближения

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \quad \dot{x}_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u + \psi_{31}f, \quad (3.1.23)$$

где u пропорционально моменту, развиваемому датчиком моментов, а f пропорционально вредному моменту по оси OY .

Полагая пока $f = 0$, будем искать управление

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \quad (3.1.24)$$

при котором на движениях гирорамы (возбужденных начальными отклонениями) минимизируется функционал

$$J = \int_0^{\infty} (q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + q_{33}x_3^2 + u^2) dt, \quad (q_{ii} > 0; i = 1, 2, 3). \quad (3.1.25)$$

Переходя к решению этой задачи, запишем уравнения (3.1.15), (3.1.16) процедуры АКОР. Первое из этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{22} & p_{23} \\ 0 & a_{32} & p_{33} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{22} & p_{23} \\ 0 & a_{23} & p_{33} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{matrix} \right\| - \\ & - \left\| \begin{matrix} p_{13} & b_{31} \\ p_{23} & b_{31} \\ p_{33} & b_{31} \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} p_{13}b_{31} & p_{23}b_{31} & p_{33}b_{31} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Это матричное уравнение можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} & -(p_{12}b_{31})^2 + q_{11} = 0; \\ & p_{11} + p_{12}a_{22} + p_{13}a_{32} - (p_{13}b_{31})(p_{23}b_{31}) = 0; \\ & p_{12}a_{23} + p_{13}a_{33} - (p_{13}b_{31})(p_{33}b_{31}) = 0; \\ & 2p_{12} + 2p_{22}a_{22} + 2p_{23}a_{23} - (p_{23}b_{31})^2 + p_{22} = 0; \\ & p_{22}a_{23} + p_{23}a_{33} + p_{13} + a_{22}p_{23} + a_{23}p_{33} - (p_{23}b_{31})(p_{33}b_{31}) = 0; \\ & 2p_{23}a_{23} + 2p_{23}a_{33} - (p_{33}b_{31})^2 + q_{33} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

(Из-за симметричности матрицы A число этих уравнений не $n^2 = 9$, а $\frac{n(n+1)}{2} = 6$).

На основе уравнений (3.1.16) получим

$$c_1 = -p_{13}b_{31}, \quad c_2 = -p_{23}b_{31}, \quad c_3 = -p_{33}b_{31}. \quad (3.1.28)$$

Таким образом, аналитическое конструирование регулятора гирорамы (системы стабилизации гирорамы) сводится к решению алгебраических уравнений (3.1.26) и нахождению искоемых параметров регулятора (3.1.24) по формулам (3.1.28).

3.1.2 Нестационарные объекты

Рассмотрим полностью управляемый нестационарный объект, описываемый уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad (3.1.29)$$

в котором $A(t)$ и $B(t)$ известные на интервале $[t_0, t_1]$ матрицы функций.

Пусть критерий качества имеет вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{x}'\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{u}) dt + \mathbf{x}'(t_1)P^{(1)}\mathbf{x}(t_1), \quad (3.1.30)$$

где $Q(t)$ и $P^{(1)}$ – заданные положительно-определенные матрицы функций и чисел соответственно.

Требуется найти матрицу $C'(t)$ регулятора

$$\mathbf{u} = C'(t)\mathbf{x}, \quad (3.1.31)$$

при которой на движениях системы (3.1.29), (3.1.31), возбужденных произвольными начальными отклонениями, минимизируется функционал (3.1.30).

Переходя к решению этой задачи, рассмотрим вначале случай $n = m = 1$. Тогда уравнения системы и функционал оптимизации примут вид:

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)u; \quad (3.1.32)$$

$$u = c(t)x; \quad (3.1.33)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (q(t)x^2 + u^2) dt + p^{(1)}x^2(t_1). \quad (3.1.34)$$

Функцию v , разрешающую задачу АКОР для нестационарного объекта (3.1.29), будем искать в виде $v = p(t)x^2$. Подставляя ее в (3.1.9), получим вместо алгебраического уравнения (3.1.11) дифференциальное уравнение

$$-\dot{p}(t) = 2p(t)a(t) - p^2(t)b^2(t) + q(t) = 0 \quad (3.1.35)$$

и краевое условие

$$p(t_1) = p^{(1)}. \quad (3.1.36)$$

Уравнение (3.1.35) является специальным видом дифференциального уравнения, решение которого изучалось еще в XVIII в. итальянским математиком Я. Риккати, именем которого оно и названо.

В общем случае ($n > 1, m \geq 1$) уравнение (3.1.35) и краевое условие (3.1.38) имеют вид:

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A'(t)P(t) - P(t)B(t)B'(t) + Q(t). \quad (3.1.37)$$

$$P(t_1) = P^{(1)}. \quad (3.1.38)$$

Уравнение (3.1.37) называется *матричным дифференциальным уравнением Риккати*. Его нетрудно получить, повторяя изложенное в Доказательстве 2.

Переходя к решению уравнения (3.1.37), введем "новое время" $\tau = t_1 - t$ и обозначим $P(t) = P(t_1 - \tau) = \bar{P}(\tau)$. Тогда (3.1.37) и (3.1.38) примут вид

$$\frac{d\bar{P}(\tau)}{d\tau} = \bar{P}(\tau)A(t_1 - \tau) + A'(t_1 - \tau)\bar{P}(\tau) - \bar{P}(\tau)B(t_1 - \tau)B'(t_1 - \tau)\bar{P}(\tau) + Q(t_1 - \tau); \quad (3.1.39)$$

$$\bar{P}(0) = P^{(1)}. \quad (3.1.40)$$

Таким образом, краевая задача для уравнения (3.1.37) свелась путем введения нового (обратного) времени к задаче решения уравнения (3.1.39) с известным начальным условием (3.1.40). Для его численного решения можно использовать любой из известных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге-Кутты, Эйлера и т. п.).

Решив уравнение (3.1.40), найдем искомую матрицу

$$C(t) = \bar{P}(t_1 - t)B(t). \quad (3.1.41)$$

Иногда функционал (3.1.30) имеет более общий вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{x}'Q(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}'Q^{(1)}(t)\mathbf{u}) dt + \mathbf{x}'(t_1)P^{(1)}\mathbf{x}(t), \quad (3.1.42)$$

где $Q^{(1)}(t)$ – положительно-определенная матрица размеров $m \times m$. Вводя новое управление

$$\check{\mathbf{u}} = H^{(1)}\mathbf{u} \quad (H^{(1)'}H^{(1)} = Q^{(1)}), \quad (3.1.43)$$

запишем уравнение (3.1.29) и функционал (3.1.42) в виде (3.1.29), (3.1.30):

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{x}'Q(t)\mathbf{x} + \check{\mathbf{u}}'\check{\mathbf{u}})dt + \mathbf{x}'(t_1)P^{(1)}\mathbf{x}(t_1); \quad (3.1.44)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \check{B}(t)\check{\mathbf{u}}, \quad (3.1.45)$$

где $\check{B}(t) = B(t)H^{(1)-1}$.

Таким образом, оптимальное в смысле функционала (3.1.42) управление объектом (3.1.29) записывается как $\check{\mathbf{u}} = \check{C}'(t)\mathbf{x}$, где $\check{C} = -P(t)\check{B}(t)$ или $\mathbf{u} = H^{(1)-1}\check{C}'\mathbf{x} = C'(t)\mathbf{x}$, в котором

$$C(t) = -P(t)B(t)Q^{(1)-1}, \quad (3.1.46)$$

где $P(t)$ – решение уравнения Риккати:

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A'(t)P(t) - P(t)B(t)Q^{(1)-1}(t)B'(t)P(t) + Q(t); \quad (3.1.47)$$

$$P(t_0) = P^{(1)}. \quad (3.1.48)$$

3.1.3 Численное решение матричного алгебраического уравнения Риккати. Метод Репина - Третьякова

Возвращаясь к матричному алгебраическому уравнению Риккати, разрешающему задачу АКОР для стационарных объектов, отметим, что численное решение нелинейных алгебраических уравнений является не менее трудной проблемой, чем решение краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений а частных производных. Однако специфический характер уравнения (3.1.15) и его природа позволили разработать ряд эффективных численных методов его решения: Репина-Третьякова [3.5], Ньютона-Рафсона [3.6], диагонализации [3.7].

Опишем первый из этих методов. В связи с этим положим, что верхний предел в функционале (3.1.3) конечен, и тогда функционал оптимизации имеет вид

$$J = \int_0^{t_1} (\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{u}) dt \quad (t_1 \neq \infty). \quad (3.1.49)$$

Конечный верхний предел приводит к тому, что при $n = m = 1$ функцию (3.1.10) следует искать в виде $v = p(t)x^2$. При этом должно выполняться краевое условие $v(x(t_1)) = 0$ (или $p(t_1) = 0$). Тогда, повторяя изложенное в начале § 4.1, получим дифференциальное уравнение и краевое условие

$$-\dot{P}(t) = P(t)A + A'P(t) - P(t)BB'P(t) + Q; \quad P(t_1) = 0 \quad (3.1.50)$$

Вводя, как и в нестационарном случае, $\tau = t_1 - t$ и обозначая $P(t) = P(t_1 - \tau) = \bar{P}(\tau)$, запишем (3.1.50) как

$$\frac{d\bar{P}(\tau)}{d\tau} = \bar{P}(\tau)A + A'\bar{P}(\tau) - \bar{P}(\tau)BB'\bar{P}(\tau) + Q; \quad 0 \leq \tau \leq t_1; \quad (3.1.51)$$

$$\bar{P}(0) = 0. \quad (3.1.52)$$

Переходя к методу Репина-Третьякова, отметим, что он опирается на доказанное в работах [3.27], [3.5] соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{P}(\tau) = P^0 \quad (3.1.53)$$

[так как τ изменяется в пределах от 0 до t_1 , то (3.1.53) имеет смысл, если t_1 может принимать различные фиксированные значения, в частности $t_1 = \infty$].

Из предельного соотношения (3.1.53) следует, что для нахождения положительно - определенной матрицы P^0 , удовлетворяющей алгебраическому уравнению Риккати (3.1.15), достаточно решать систему дифференциальных уравнений (3.1.46) до тех пор,

пока его решение не установится ($\bar{P}(\tau)$), не перестанут изменяться во времени τ), и это установившееся решение и есть искомая матрица P^0 .

Пример. Численное решение задачи об аналитическом конструировании оптимального регулятора гироскопа. Пусть заданы значения параметров гироскопа (3.1.23) и функционала оптимизации (3.1.25):

$$a_{22} = -300; a_{23} = 10^3; a_{32} = -3; a_{33} = -1; b_{31} = 10^{-3}; \quad (3.1.54)$$

$$q_{11} = 1, 6 \cdot 10^{12}; q_{22} = 3 \cdot 10^8; q_{33} = 5 \cdot 10^9. \quad (3.1.55)$$

Подставляя в правые части уравнений (3.1.26) вместо нулей соответствующие производные (так, в первом уравнении нужно подставить \dot{p}_{11} , во втором – \dot{p}_{12} , в третьем – \dot{p}_{13} и т. д.) и решая полученную систему из шести дифференциальных уравнений с помощью метода Рунге-Кутты, получим:

$$p_{11}^0 = 53, 4 \cdot 10^9; p_{12}^0 = 147 \cdot 10^6; p_{13}^0 = 12, 6 \cdot 10^8; p_{22}^0 = 29 \cdot 10^4; \quad (3.1.56)$$

$$p_{23}^0 = 44 \cdot 10^5; p_{33}^0 = 116 \cdot 10^6. \quad (3.1.57)$$

Искомые параметры регулятора вычисляются на основе чисел (3.1.57):

$$c_1 = -0, 126 \cdot 10^7; c_2 = 0, 44 \cdot 10^4; c_3 = -116 \cdot 10^3. \quad (3.1.58)$$

3.1.4 Численное решение уравнения Риккати методом диагонализации

Этот метод основан на вычислении корней характеристического полинома следующей матрицы, которая формируется из матриц, входящих в уравнение Риккати

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A & -BB^T \\ -Q & A^T \end{bmatrix} \quad (3.1.59)$$

Эта матрица размеров $2n \times 2n$ называется *гамильтонианом*.

Ее характеристический полином $g(s) = \det(Es - \Gamma)$ является полиномом четных степеней s . Это означает, что если λ – корень этого полинома (собственное число матрицы Γ), то $-\lambda$ также является его корнем. Таким образом, матрица Γ имеет $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ собственных чисел с отрицательными вещественными частями и $-\lambda_1, \dots, -\lambda_n$ собственных чисел с положительными вещественными частями.

Искомая матрица P^0 вычисляется по формуле

$$P^{(0)} = P_2 \cdot P_1^{-1}, \quad (3.1.60)$$

где P_1 и P_2 – квадратные матрицы, формируемые следующим образом:

- а). Вычислить собственные числа матрицы Γ .
- б). Решить уравнения

$$(E\lambda_i - \Gamma)\mathbf{c}_i = 0 \quad (i = \overline{1, n})$$

и сформулировать из собственных векторов \mathbf{c}_i ($i = \overline{1, n}$) $2n \times 2n$ матрицу \overline{C} .

в). Обозначить первые n строк матрицы \overline{C} как P_1 , а последующие n -строк – P_2 .

3.1.5 Критерий обобщенной работы

В 1967 г. А.А. Красовский предложил [3.8] упрощение процедуры АКОР с вычислительной стороны. Для этого в функционал (3.1.3) вводится дополнительное слагаемое, с учетом которого функционал оптимизации принимает (в развернутой форме) вид

$$J = \int_0^\infty \left\{ \sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^m u_k^2 + \frac{1}{4} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} b_{ik} \right]^2 \right\} dt, \quad (3.1.61)$$

где квадратичная форма $v = x'Px$ содержит положительно-определенную матрицу P , являющуюся решением матричного алгебраического уравнения

$$PA + A'P + Q = 0. \quad (3.1.62)$$

Оптимальное управление определяется по-прежнему на основе формулы (3.1.16). Для того чтобы убедиться в этом, положим вначале $n = m = 1$. Функционал (3.1.61) примет вид

$$J = \int_0^\infty \left\{ qx^2 + u^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} b \right)^2 \right\} dt. \quad (3.1.63)$$

Подставляя в уравнение (3.1.9) вместо qx^2 выражение

$$qx^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} b \right)^2,$$

получим вместо нелинейного алгебраического уравнения (3.1.12) линейное уравнение

$$2pa + q = 0 \quad (3.1.64)$$

для определения коэффициента p квадратичной формы $v = px^2$.

Таким образом, аналитическое конструирование по критерию обобщенной работы состоит в решении линейного алгебраического уравнения (3.1.62) и вычисления искомой матрицы C по формуле (3.1.16). Уравнение (3.1.62) называется *уравнением Ляпунова*. Оно имеет единственное решение $P > 0$, когда собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. При этом условии нетрудно показать, что синтезированная система асимптотически устойчива. Действительно, в соответствии с прямым методом Ляпунова примем в качестве функции Ляпунова функцию $v = x'Px > 0$, вычисляя ее полную производную по времени, получим, что

$$\frac{dv}{dt} = -x'[Q + 2CC']x < 0$$

Функционал (3.1.61) называется [3.9] *критерием обобщенной работы*. Это название связано с тем, что последнее слагаемое в (3.1.61) можно записать как $\int_0^\infty u'_{\text{опт}} u_{\text{опт}} dt$, который выражает собой "энергию" (обобщенную работу) оптимального управления $u_{\text{опт}}$.

3.1.6 Нелинейные объекты

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями

$$\dot{x}_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3.1.65)$$

Пусть правые части этих уравнений разложимы в ряд Тейлора в окрестности точки $x_1 = \dots = x_n = u_1 = \dots = u_m = 0$. Тогда (3.1.65) имеет вид

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{j,k=1}^n a_{ijk} x_j x_k + \sum_{j,k,\mu=1}^n a_{ijk\mu} x_j x_k x_\mu + \dots + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3.1.66)$$

Требуется найти управления

$$u_k = r_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k = \overline{1, m}), \quad (3.1.67)$$

при которых на движениях системы (3.1.66), (3.1.67), возбужденных произвольными начальными отклонениями, минимизируется функционал (3.1.3). Решение этой задачи получено в [3.10].

Приведем это решение, ограничиваясь для простоты случаем $n = m = 1$. В этом случае уравнения (3.1.66) запишем (обозначая $a_{111} = a^{(2)}$, $a_{1111} = a^{(3)}$ и т.д.) так:

$$\dot{x} = ax + a^{(2)}x^2 + a^{(3)}x^3 + \dots + bu.$$

Уравнение (2.3.11), (2.3.12) метода динамического программирования имеют в рассматриваемом случае вид

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = qx^2 + u^2 + \frac{\partial v}{\partial x}(ax + a^{(2)}x^2 + a^{(3)}x^3 + \dots + bu); \quad (3.1.68)$$

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} b. \quad (3.1.69)$$

Исключая u из (3.1.68) с помощью (3.1.69), получим

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}(ax + a^{(2)}x^2 + a^{(3)}x^3 + \dots) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} b \right)^2 + qx^2. \quad (3.1.70)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$v = px^2 + p^{(3)}x^3 + p^{(4)}x^4 + \dots \quad (3.1.71)$$

Подставляя (3.1.71) в (3.1.70), получим

$$(2px + 3p^{(3)}x^2 + 4p^{(4)}x^3 + \dots)(ax + a^{(2)}x^2 + a^{(3)}x^3 + \dots) - \frac{1}{4}b^2(2px + 3p^{(3)}x^2 + 4p^{(4)}x^3 + \dots)^2 + qx^2 = 0. \quad (3.1.72)$$

Приравнявая нулю совокупность коэффициентов при одинаковых степенях x , получим уравнения для определения неизвестных параметров p , $p^{(3)}$, $p^{(4)}$, ... формы (3.1.71). Так, для совокупности коэффициентов при x^2 имеем

$$2pa - (pb)^2 + q = 0 \quad (3.1.73)$$

для совокупности коэффициентов при x^3 получим

$$2pa^{(2)} + 2p^{(3)}a - \frac{1}{2}b^2(2p)(3p^{(3)}) = 0 \quad (3.1.74)$$

и т. д.

Уравнение (3.1.73) совпадает с уравнением (3.1.12) и его решение имеет вид

$$p^{(1)} = \frac{a}{b^2} + \sqrt{\frac{a^2}{b^4} + \frac{q}{b^2}}.$$

Уравнения (3.1.74) запишем в более удобной форме с учетом (3.1.14)

Это уравнение в отличие от (3.1.73) является линейным уравнением для определения коэффициента $p^{(3)}$ формы (3.1.71). Решение этого уравнения существует, если $a + bc \neq 0$. Последнее выполняется в силу асимптотической устойчивости уравнения $\dot{x} = (a + bc)x$, описывающего замкнутую оптимальную в смысле функционала (3.1.3) систему с линейным объектом (3.1.1).

Приравнявая нулю совокупность коэффициентов при x^4 , получим

$$4p^{(4)}(a + bc) = -2p^{(1)}a^{(3)} - 3p^{(3)}a^{(2)} + \frac{1}{4}b^2(3p^{(3)})^2. \quad (3.1.75)$$

Это уравнение, как и предыдущее, является линейным относительно неизвестного параметра $p^{(4)}$ и т. д.

В соответствии с (3.1.69) искомое управление имеет вид

$$u = cx + c^{(2)}x^2 + c^{(3)}x^3 + \dots, \quad (3.1.76)$$

где

$$c = -p^{(1)}b; \quad c^{(2)} = -\frac{3}{2}p^{(3)}b; \quad c^{(3)} = -\frac{4}{2}p^{(4)}b, \dots \quad (3.1.77)$$

В общем случае ($n > 1$, $m \geq 1$) функция

$$v = \sum_{(i,j=1)}^n p_{ij}x_i x_j + \sum_{(i,j,k=1)}^n p_{ijk}x_i x_j x_k + \sum_{(i,j,k,\mu=1)}^n p_{i,j,k,\mu}x_i x_j x_k x_\mu + \dots \quad (3.1.78)$$

Ее коэффициенты p_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) находятся в результате решения алгебраического уравнения Риккати (3.1.15), а коэффициенты p_{ijk} ($i, j, k = \overline{1, n}$ кубичной и последующих форм являются решениями линейных алгебраических уравнений Ляпунова вида (3.1.62), в которых вместо матрицы A нужно подставить матрицу $A + BC'$ (C' -матрица оптимального управления (3.1.2) для линейного объекта), а Q -это известная матрица, составленная из матриц, полученных для предшествующих форм.

3.1.7 Детерминированные внешние возмущения

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \Psi\mathbf{f}; \quad x(t_0) = x^{(0)} \quad (3.1.79)$$

где $\mathbf{f}(t)$ – μ -мерный вектор внешних возмущений; Ψ – заданная матрица чисел размеров $n \times \mu$. Относительно вектора $\mathbf{f}(t)$ известно, что:

1) его компоненты ограничены по модулю

$$|f_i(t)| \leq f_i^* \quad (i = \overline{1, \mu}), \quad (3.1.80)$$

где f_i^* ($i = \overline{1, \mu}$)-заданные числа;

2) функции $f_i(t)$ ($i = \overline{1, \mu}$) - исчезающие. Это означает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t) = 0; \quad (3.1.81)$$

3) вектор $\mathbf{f}(t)$ измеряется.

Требуется найти управление

$$\mathbf{u} = C'\mathbf{x} + \frac{1}{2}B'L(t), \quad (3.1.82)$$

[$L(t)$ -некоторая матрица размеров $n \times n$], такое, чтобы на движениях системы (3.1.79), (3.1.82), возбужденных произвольными начальными условиями и внешними возмущениями, минимизировался функционал (3.1.3):

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}'Q\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{u}) \, dt. \quad (3.1.83)$$

Отметим, что требование (3.1.81) необходимо для сходимости интеграла (3.1.83).

Аналитическое конструирование регулятора при внешних возмущениях состоит [3.12] из операций: 1) вычисления матрицы C' в соответствии с процедурой 3.1.1 аналитического конструирования при $\mathbf{f} = 0$; 2) решения дифференциального уравнения

$$\dot{L} = -(A + BC')'L - (P + P')\Psi f(t) \quad (3.1.84)$$

и определения матрицы $L(t)$, входящей в закон оптимального управления (3.1.82).

Для доказательства рассмотрим случай $n = m = \mu = 1$. В этом случае уравнение (3.1.79) примет вид

$$\dot{x} = ax + bu + \psi f, \quad (3.1.85)$$

а функционал (3.1.83) запишется как

$$J = \int_0^{\infty} (ax^2 + u^2) dt. \quad (3.1.86)$$

Уравнение метода динамического программирования примет вид

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} (ax + \psi f) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial x} b \right)^2 + qx^2. \quad (3.1.87)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$v = px^2 + l_1(t)x + l_0(t), \quad (3.1.88)$$

где p – неизвестное число, а $l_1(t)$ и $l_0(t)$ – неизвестные функции.

Для определения этих неизвестных подставим (3.1.88) в (3.1.87):

$$-(\dot{l}_1 x + \dot{l}_0) = (2px + l_1)(ax + \psi f) - \frac{1}{4}(2px + l_1)^2 b^2 + qx^2.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при x^2 , x , x^0 , получим уравнения:

$$2pa - p^2 b^2 + q = 0; \quad -\dot{l}_1 = (a - pb^2)l_1 + 2p\psi f; \quad -\dot{l}_0 = l_1\psi f - \frac{1}{4}l_1^2 b^2.$$

Принимая во внимание, что в соответствии с (3.1.8)

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} b = -pbx' - \frac{1}{2} l_1(t)b,$$

убеждаемся в справедливости (3.1.82) и (3.1.84).

3.1.8 Задача о слежении

Пусть требуется, чтобы движение объекта (3.1.79) по переменным состояниям было близко к некоторому желаемому движению, описываемому с помощью m -мерной вектор-функции $\mathbf{x}_ж(t)$, задаваемой на интервале $[t_0, t]$. Другими словами, $\mathbf{x}(t)$ должно следовать (или "следить") за $\mathbf{x}_ж(t)$.

Мера близости вектор-функций $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{x}_ж(t)$ определяется как значение функционала

$$J = \int_0^{\infty} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ж}})' Q_0 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ж}}) + \mathbf{u}' \mathbf{u}] dt. \quad (3.1.89)$$

Таким образом, возникает задача о построении управления, при котором этот функционал принимает наименьшее значение.

Покажем, что эта задача сводится к предыдущей [3.13]. Действительно, вводя новый вектор $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{ж}}$, получим, используя (3.1.79), уравнение

$$\dot{\mathbf{e}} = A\mathbf{e} + B\mathbf{u} + \mathbf{f}^{(1)} \quad (3.1.90)$$

где $\mathbf{f}^{(1)}(t)$ – это n -мерный вектор,

$$\mathbf{f}^{(1)}(t) = A\mathbf{x}_{\text{ж}} - \dot{\mathbf{x}}_{\text{ж}} + \Psi f(t) \quad (3.1.91)$$

Функционал (3.1.89) принимает вид

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{e}' Q_0 \mathbf{e} + \mathbf{u}' \mathbf{u}) dt. \quad (3.1.92)$$

Если $f^{(1)}(t)$ обладает свойством (3.1.81), то оптимальное управление определяется соотношением (3.1.82).

3.1.9 Дискретные (цифровые) регуляторы

Пусть задан объект управления, описываемый разностными уравнениями

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + R\mathbf{u}(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad x(0) = x^{(0)}, \quad (3.1.93)$$

где Φ и R – заданные матрицы чисел размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно.

Качество переходных процессов для этого объекта оценивается суммой

$$J = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}'(k) Q \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}'(k-1) \mathbf{u}(k-1), \quad (3.1.94)$$

где Q – заданная положительно-определенная матрица. Требуется найти матрицы $C(k)$ управления

$$\mathbf{u}(k) = C'(k) \mathbf{x}(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.1.95)$$

при котором функционал (3.1.94) принимает наименьшее значение при любых $x^{(0)}$.

Аналитическое конструирование регуляторов для дискретных объектов состоит [?] из операций:

1) вычисления матриц $P(N-j)$ $j = \overline{1, N}$ на основе рекуррентного соотношения

$$P(N-j) = \Phi'[Q + P(N-j+1)]\Phi - \Phi'[Q + P(N-j+1)]R \times \\ \times [R'(Q + P(N-j+1))R + E]^{-1} R'[Q + P(N-j+1)]\Phi \quad (j = \overline{1, N}); \quad (3.1.96)$$

$$P(N) = 0; \quad (3.1.97)$$

2) нахождения

$$C'(N-j) = -\{R'[Q + P(N-j+1)]R + E\}^{-1} \times R'[Q + P(N-j+1)]\Phi \quad (j = \overline{1, N}); \quad (3.1.98)$$

3) определения матрицы коэффициентов усиления регулятора

$$C'(k) = C'(N-j) \quad (j = \overline{1, N}). \quad (3.1.99)$$

Вывод соотношений (3.1.96) ... (3.1.99) для общего случая нестационарного дискретного объекта приведен в Дополнении 3.

Докажем эти соотношения при $n = m = 1$. В этом случае объект (3.1.93) и функционал (3.1.94) принимают вид

$$x(k+1) = fx(k) + ru(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad (3.1.100)$$

$$J = \sum_{k=1}^N qx^2(k) + u^2(k). \quad (3.1.101)$$

Для нахождения оптимального управления

$$u(k) = c(k)x(k) \quad (3.1.102)$$

применим принцип оптимальности, рассмотренный в §2.3.

В соответствии с этим принципом независимо от того, как двигалась система до последнего шага (интервала $[(N-1), N]$), управление $(u(N-1))$ на последнем шаге должно быть оптимальным (относительно состояния, возникшего в результате первых $N-1$ шагов).

Частичная сумма, которую необходимо минимизировать на последнем шаге, имеет вид

$$J^{(N-1)} = qx^2(N) + u^2(N-1) = q[fx(N-1) + ru(N-1)]^2 + u^2(N-1). \quad (3.1.103)$$

Используя необходимое условие экстремума этой суммы

$$\frac{\partial J^{(N-1)}}{\partial u(N-1)} = 2q[fx(N-1) + ru(N-1)]r + 2u(N-1) = 0, \quad (3.1.104)$$

получим оптимальное управление на последнем участке

$$u(N-1) = -\frac{qfr}{1+qr^2}x(N-1). \quad (3.1.105)$$

При оптимальном управлении

$$\min J^{(N-1)} = v^{(N-1)} = \left[qf^2 - \frac{q^2 f^2 r^2}{1 + qr^2} \right] x^2(N-1) = p(N-1)x^2(N-1), \quad (3.1.106)$$

где

$$p(N-1) = qf^2 - \frac{q^2 f^2 r^2}{1 + r^2 q}. \quad (3.1.107)$$

Переходя к нахождению управления на предпоследнем шаге (интервале $[N-2, N-1]$), запишем частичную сумму, которую должно минимизировать это управление:

$$\begin{aligned} J^{(N-2)} &= qx^2(N-2) + u^2(N-2) + v^{(N-1)} = \\ &= [q + p(N-1)]x^2(N-2) + u^2(N-2) = \\ &= [q + p(N-1)][fx(N-2) + ru(N-2)]^2 + u^2(N-2). \end{aligned} \quad (3.1.108)$$

Используя необходимое условие минимума $\frac{\partial J^{(N-2)}}{\partial u(N-2)} = 0$, получим оптимальное управление на предпоследнем участке

$$u(N-2) = -\frac{[q + p(N-1)]fr}{1 + [q + p(N-1)]r^2}x(N-2). \quad (3.1.109)$$

При этом управлении частичная сумма (3.1.108) примет значение

$$\begin{aligned} \min J^{(N-2)} = v^{(N-2)} &= \left\{ [q + p(N-1)]f^2 - \frac{[q + p(N-1)]^2 f^2 r^2}{1 + [q + p(N-1)]r^2} \right\} \times \\ &\times x^2(N-2) = p(N-2)x^2(N-2), \end{aligned} \quad (3.1.110)$$

где

$$p(N-2) = [q + p(N-1)]f^2 - \frac{[q + p(N-1)]^2 f^2 r^2}{1 + [q + p(N-1)]r^2} \quad (3.1.111)$$

Продолжая этот процесс, дойдем до j -го (от конца) участка (интервала $[N-j, N-j+1]$). Частичная сумма, которую нужно минимизировать управлением $u(N-j)$, имеет вид

$$\begin{aligned} J^{(N-j)} &= qx^2(N-j+1) + u^2(N-j) + v^{(N-j+1)} = \\ &= [q + p(N-j+1)]x^2(N-j+1) + u^2(N-j) = \\ &= [q + p(N-j+1)][fx(N-j) + ru(N-j)]^2 + u^2(N-j). \end{aligned} \quad (3.1.112)$$

Оптимальное управление

$$\begin{aligned} u(N-j) &= -\frac{[q + p(N-j+1)]fr}{1 + [q + p(N-j+1)]r^2}x(N-j) = \\ &= c(N-j)x(N-j), \end{aligned} \quad (3.1.113)$$

где

$$c(N-j) = -\frac{[q+p(N-j+1)]fr}{1+[q+p(N-j+1)]r^2}. \quad (3.1.114)$$

Значение частичной суммы (3.1.112) при этом управлении

$$\min J^{(N-1)} = v^{(N-2)} = p(N-j)x^2(N-j), \quad (3.1.115)$$

где

$$p(N-j) = [q+p(N-j+1)]f^2 - \frac{[q+p(N-j+1)]^2 f^2 r^2}{1+[q+p(N-j+1)]r^2}. \quad (3.1.116)$$

Полагая в (3.1.98), (3.1.96) $n = m = 1$, убеждаемся, что они совпадают с (3.1.114), (3.1.116) соответственно.

Если в функционале (3.1.94) верхний предел $N \rightarrow \infty$, то оптимальное управление (3.1.95) принимает вид

$$u(k) = C'x(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.1.117)$$

где C' – матрица чисел, определяемая из уравнений

$$\bar{P} - \Phi' \bar{P} \Phi - \Phi' \bar{P} R [R' \bar{P} R + E]^{-1} R' \bar{P} \Phi + Q = 0 \quad (3.1.118)$$

и

$$C' = -[R' \bar{P} R + E]^{-1} R' \bar{P} \Phi \quad (3.1.119)$$

Эти уравнения следуют из (3.1.96), (3.1.98), если положить $P(N-j) = P(N-j+1) = P$ и обозначить $Q + P = \bar{P}$.

Пример. Аналитическое конструирование дискретного (цифрового) регулятора гирорамы. Пусть требуется найти цифровой регулятор

$$u(kT) = c_1 x_1(kT) + c_2 x_2(kT) + c_3 x_3(kT) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.1.120)$$

при котором на движениях гирорамы, описываемой уравнениями (3.1.23) (при $f = 0$), минимизируется функционал

$$J = \sum_{k=1}^{N \rightarrow \infty} q_{11} x_1^2(kT) + q_{22} x_2^2(kT) + q_{33} x_3^2(kT) + u^2(kT). \quad (3.1.121)$$

Переходя к численному решению этой задачи, сформируем вначале дискретную модель гирорамы. Для этого воспользуемся формулами (3.1.26), (3.1.28), с помощью которых вычислим матрицу Φ и вектор R . При значениях параметров гирорамы $a_{22} = -400$, $a_{23} = 10^3$, $a_{32} = -10$, $b_{31} = 10^{-2}$ получим при $T = 0,015$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0,192 \cdot 10^{-2} & 0,279 \cdot 10^{-1} \\ 0 & -0,477 \cdot 10^{-1} & 0,192 \cdot 10 \\ 0 & -0,192 \cdot 10^{-1} & 0,72 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 0,19 \cdot 10^{-15} \\ 0,279 \cdot 10^{-3} \\ 0,131 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}. \quad (3.1.122)$$

Используя эти матрицы, а также значения параметров функционала (3.1.121), $q_{11} = 10^{10}$, $q_{22} = q_{33} = 0$, получим на основе (3.1.96), (3.1.98), (??) искомые числа:

$$c_1 = -0,686 \cdot 10^5; \quad c_2 = -0,728 \cdot 10^2; \quad c_3 = -0,414 \cdot 10^4. \quad (3.1.123)$$

3.1.10 Программное обеспечение и практикум

ГАММА-директива: 111 (Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов).

Исходные данные:

а) Уравнение объекта (3.1.1). (При анализе переходных процессов в оптимальной системе к правой части этого уравнения добавляется слагаемое $\Psi \mathbf{f}$, где \mathbf{f} -вектор ступенчатых внешних возмущений).

б) Матрица N уравнения регулируемых переменных $\theta = N\mathbf{x}$. (Регулируемые переменные используются для анализа переходных процессов).

в) Весовая матрица для регулируемых переменных Q_0 . Используя эту матрицу и матрицу N , найдем матрицу $Q = N^T Q_0 N$ функционала оптимизации (3.1.3)

г) Время моделирования переходных процессов.

Результаты:

а) Матрица C' регулятора (3.1.2).

б) Графики переходных процессов по регулируемым переменным.

Используя директиву 111 выполняется практикум Пр.2.1. Одна из его целей состоит в исследовании инженерных показателей (установившихся ошибок, времени регулирования, перерегулирования) оптимальных систем. Результаты этого исследования отражают известный факт, состоящий в том, что любой асимптотически устойчивой системы (3.1.1), (3.1.1), (имеющей, в частности, "плохие" инженерные показатели) всегда можно построить неотрицательный функционал более общего, чем (3.1.3), вида

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + \mathbf{u}' \bar{L} \mathbf{u} + 2 \mathbf{x}' L \mathbf{u}) dt, \quad (3.1.124)$$

(где матрица L удовлетворяет неравенству $Q - L(\bar{L})^{-1} L^T \geq 0$ а $\bar{L} > 0$), для которого эта система является оптимальной.

МАТЛАБ-функции:

1) $[C', P, \lambda] = lqr(A, B, Q, \bar{L}, L)$ - синтез оптимального регулятора непрерывной системы (LQ-оптимизация). Исходные данные: матрицы объекта (3.1.1) и функционала (3.1.124). Результат: матрицы регулятора и уравнения Риккати, а также вектор (λ) собственных чисел матрицы $A + BC'$ замкнутой системы.

Заметим, что, если функционал оптимизации имеет вид (3.1.124), то уравнение Риккати и матрица регулятора описываются выражениями

$$PA + A'P - (PB + L)(\bar{L})^{-1}(B'P + L') + Q = 0; \quad (3.1.125)$$

$$C = -(PB + L)(\bar{L}')^{-1}, \quad (3.1.126)$$

2) $[C', \bar{P}, \lambda] = dlqr(Phi, R, Q, \bar{L}, L)$ -синтез оптимального регулятора дискретной системы (3.1.93)- (3.1.95) при $N \rightarrow \infty$.

3) $[P, \lambda, C', rr] = care(A, B, Q)$ -решение уравнения Риккати (3.1.18), где rr – погрешность решения (определения матрицы P^0).

4) $[\bar{P}, \lambda, C', rr] = care(A, B, Q)$ -решение уравнения Риккати (3.1.118) для дискретных систем, где rr – погрешность решения.

5) $[P] = lyap(A, Q)$ -решение уравнения Ляпунова (3.1.62).

3.2 Построение регуляторов при неполной информации о векторе состояния

3.2.1 Постановка задачи восстановления (наблюдения)

Рассмотрим объект управления, возмущенное движение которого описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad (3.2.1)$$

и пусть в результате синтеза получено оптимальное управление

$$\mathbf{u} = C'(t)\mathbf{x}. \quad (3.2.2)$$

Реализация этого управления часто затруднена тем обстоятельством, что не все переменные состояния объекта доступны непосредственному измерению, а можно измерить лишь компоненты некоторого r -мерного вектора \mathbf{y} , связанные с переменными состояния соотношением

$$\mathbf{y} = D(t)\mathbf{x}. \quad (3.2.3)$$

В связи с этим возникает задача восстановления (наблюдения, оценки) вектора $\mathbf{x}(t)$ по результатам измерения $\mathbf{y}(t)$ на интервале $[t_0, t]$. После того как вектор состояния восстановлен, можно реализовать управление (3.2.2), заменяя в нем действительное состояние восстановленным вектором состояния.

3.2.2 Уравнение наблюдателя

Будем называть *наблюдателем* физическое устройство, на вход которого подается реальный вектор управления $\mathbf{u}(t)$, действующий на объект, а его выходами служит оценка вектора состояния объекта.

Простейшим наблюдателем является физическое устройство, описываемое уравнением

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A(t)\hat{\mathbf{x}} + B(t)\mathbf{u}, \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}^{(0)}, \quad (3.2.4)$$

где $\hat{\mathbf{x}}(t)$ – n -мерный вектор состояния (выхода) наблюдателя, $\hat{\mathbf{x}}^{(0)}$ – начальное состояние наблюдателя.

Уравнение (3.2.4) описывает физическую модель объекта, функционирующую в реальном времени.

Если начальное состояние объекта известно, то принимая $\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)}$, получим одинаковые решения уравнений (3.2.4) и (3.2.1), и следовательно, наблюдатель точно восстанавливает вектор состояния объекта.

Начальное состояние объекта обычно неизвестно, и поэтому $\hat{\mathbf{x}}^{(0)} \neq \mathbf{x}^{(0)}$. Тогда возникает ошибка восстановления $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$. Она удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathbf{e}} = A(t)\mathbf{e}; \quad \mathbf{e}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)} - \hat{\mathbf{x}}^{(0)}, \quad (3.2.5)$$

которое получается, если из уравнения (3.2.1) вычесть уравнение (3.2.4).

Если объект управления асимптотически устойчив, то ошибка восстановления обладает свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$ и следовательно, выход наблюдателя будет с течением времени приближаться к вектору состояния объекта.

Если объект управления неустойчив, то применяется наблюдатель, описываемый уравнением

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A(t)\hat{\mathbf{x}} + K(t)[\mathbf{y} - D(t)\hat{\mathbf{x}}] + B(t)\mathbf{u}, \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}^{(0)}, \quad (3.2.6)$$

где $K(t)$ – некоторая матрица размеров $n \times r$, называемая далее *матрицей коэффициентов усиления наблюдателя*.

В этом наблюдателе сравнивается измеренное значение вектора \mathbf{y} с восстановленным значением $D(t)\hat{\mathbf{x}}$. Эта коррекция по ошибке восстановления усиливается матрицей $K(t)$. При $K(t) = 0$ наблюдатель (3.2.6) совпадает с простейшим.

Запишем уравнение наблюдателя в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = [A(t) - K(t)D(t)]\hat{\mathbf{x}} + K(t)\mathbf{y} + B(t)\mathbf{u}, \quad (3.2.7)$$

из которого следует, что входом наблюдателя является вектор управления и вектор измеряемых переменных, а переходные процессы определяются матрицей $[A(t) - K(t)D(t)]$ и поэтому матрица $K(t)$ должна выбираться из условия асимптотической устойчивости наблюдателя.

Вычитая уравнение (3.2.1) и (3.2.6), получим следующее уравнение для ошибки восстановления

$$\dot{\mathbf{e}} = [A(t) - K(t)D(t)]\mathbf{e}; \quad \mathbf{e}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)} - \hat{\mathbf{x}}^{(0)}. \quad (3.2.8)$$

Если существует матрица $K(t)$ наблюдателя, такая, что наблюдатель асимптотически устойчив, то ошибка восстановления обладает свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$.

Существует несколько методов построения матрицы $K(t)$, при которой наблюдатель асимптотически устойчив.

Рассмотрим два таких метода, ограничиваясь, для простоты, стационарным объектом.

В этом случае объект описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x}, \quad (3.2.9)$$

и наблюдатель (3.2.6) имеет вид

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + K[\mathbf{y} - D\hat{\mathbf{x}}] + B\mathbf{u}, \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}^{(0)}, \quad (3.2.10)$$

где K – матрица чисел.

Будем здесь и далее полагать, что объект (3.2.9) *полностью наблюдаем*. Это означает, что

$$\text{ранг} \left\| D', A'D', \dots, (A'^{n-1}D') \right\| = n. \quad (3.2.11)$$

3.2.3 Построение наблюдателя на основе уравнения Риккати

Характеристический полином наблюдателя (3.2.10) имеет вид

$$D_n(s) = \det \|Es - A + KD\|. \quad (3.2.12)$$

Задача состоит в том, чтобы построить матрицу K так, чтобы корни этого полинома имели отрицательные вещественные части.

В разделе 3.1.1 было показано, что решение задачи АКОР обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (3.1.1), (3.1.2). Поэтому задачу о построении матрицы K сведем к специальным образом построенной задаче АКОР.

В связи с этим запишем полином (3.2.12) как

$$D_n(s) = \det \|Es - A' + D'K\| \quad (3.2.13)$$

и сформируем вспомогательную ”систему” управления с этим характеристическим полиномом

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = A'\boldsymbol{\mu} + D'\mathbf{u}, \quad (3.2.14)$$

$$\mathbf{u} = -K'\boldsymbol{\mu}, \quad (3.2.15)$$

где $\boldsymbol{\mu}(t)$ – n -мерный вектор состояния ”системы”. Эта ”система” выражает двойственность задач управления и наблюдения. Она совпадает с системой (3.1.1), (3.1.2), если положить $A = A', B = D', C = -K$.

Уравнение Риккати (3.1.15) для этой системы имеет вид

$$P_c A' + A P_c - P_c D' D P_c + Q_c = 0 \quad (3.2.16)$$

где Q_c – заданная положительно-определенная матрица, P_c – искомая матрица размеров $n \times n$.

Решая это уравнение, найдем положительно определенную матрицу $P_c^{(0)}$ и в соответствии с (3.1.16) сформируем искомую матрицу

$$K = P_c^{(0)} D'. \quad (3.2.17)$$

3.2.4 Построение наблюдателя на основе модального управления

Если при построении матрицы K требуется нечто большее, чем асимптотическая устойчивость, а именно, требуется найти такую матрицу K , чтобы корнями характеристического полинома наблюдателя $D_n(s)$ являлись заданные числа $\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n$ ($\text{Re } \lambda_i^n < 0$, $i = \overline{1, n}$). Последнее означает, что матрица K должна удовлетворять следующему тождеству по s

$$D_n(s) = \det \|Es - A + KD\| = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i^n). \quad (3.2.18)$$

Для построения такой матрицы K воспользуемся двойственностью задач управления и наблюдения, выраженной системой (3.2.14), (3.2.15), и применим модальное управление [3.25], [3.26].

Задача модального управления заключается в следующем.

Для заданного полностью управляемого объекта

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (3.2.19)$$

найти матрицу C закона управления

$$\mathbf{u} = C'\mathbf{x}, \quad (3.2.20)$$

такое, что корни (моды) характеристического полинома замкнутой системы

$$D(s) = \det \|Es - A - BC'\| \quad (3.2.21)$$

имеют наперед заданные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Процедура построения матрицы C разрешающей эту задачу, приводится в Дополнении 4. Для построения матрицы K , заменим в уравнении (3.2.19) матрицы A и B матрицами A' и D' , полагая $\lambda_i = \lambda_i^n$ ($i = \overline{1, n}$) найдем матрицу C' , тогда искомая матрица наблюдателя

$$K = -C \quad (3.2.22)$$

Пример. Определение матрицы наблюдателя гирорамы. Уравнения наблюдателя полного порядка для переменных состояния гирорамы, описываемой уравнениями (??), (??), имеют в соответствии с (3.2.10) вид:

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_1 + k_{11}(y - \hat{x}_1); \quad (3.2.23)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = a_{22}\hat{x}_2 + a_{23}\hat{x}_3 + k_{21}(y - \hat{x}_1); \quad (3.2.24)$$

$$\dot{\hat{x}}_3 = a_{32}\hat{x}_2 + a_{33}\hat{x}_3 + k_{31}(y - \hat{x}_1) + b_{31}u. \quad (3.2.25)$$

Неизвестные параметры k_{11} , k_{21} , k_{31} определим так, чтобы корни характеристического уравнения наблюдателя имели наперед заданные значения λ_1^H , λ_2^H , λ_3^H .

В связи с этим сформулируем задачу модального управления: для "объекта"

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (3.2.26)$$

найти "управление"

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \quad (3.2.27)$$

при котором характеристический полином системы (3.2.26), (3.2.27) имеет вид

$$D^*(s) = s^3 + d_2^*s^2 + d_1^*s + d_0^*, \quad (3.2.28)$$

где

$$d_2^* = -\lambda_1^H - \lambda_2^H - \lambda_3^H; \quad d_1^* = \lambda_1^H\lambda_2^H + \lambda_1^H\lambda_3^H + \lambda_2^H\lambda_3^H; \quad d_0^* = -\lambda_1^H\lambda_2^H\lambda_3^H. \quad (3.2.29)$$

В соответствии с первой операцией процедуры построения модального управления формируем матрицу

$$\Psi_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -d_2 \\ 1 & -d_2 & -d_1 + d_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{23} \end{pmatrix}^{-1}, \quad (3.2.30)$$

где d_0 , d_1 , d_2 – коэффициенты характеристического уравнения объекта

$$D(s) = \det \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ -1 & s - a_{22} & -a_{32} \\ 0 & -a_{23} & s - a_{33} \end{pmatrix} = s[(s - a_{22})(s - a_{33}) - a_{32}a_{23}] = s^3 + d_2s^2 + d_1s, \quad (3.2.31)$$

где

$$d_2 = -a_{22} - a_{33}; \quad d_1 = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{33}.$$

Вторая операция приводит к значениям

$$-\check{c}_1 = d_0^*; \quad -\check{c}_2 = d_1^* - d_1; \quad -\check{c}_3 = d_2^* - d_2. \quad (3.2.32)$$

Используя затем преобразования (Дп.4.14) с матрицей (3.2.30), получим значения c_i ($i = 1, 2, 3$), тогда искомые

$$k_{1i} = -c_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.2.33)$$

3.2.5 Структура системы с наблюдателем

Возвращаясь к рассмотрению системы (3.2.1), (3.2.2), реализация закона управления (3.2.2) которой затруднена тем, что не все переменные состояния доступны непосредственному измерению, отметим, что в этом случае естественно использовать наблюдатель (3.2.6), а затем воспользоваться законом управления (3.2.2) применительно к восстановленному состоянию.

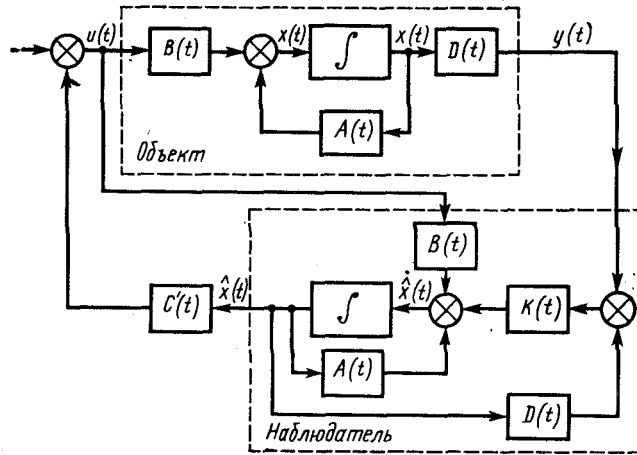
Полученная таким образом система описывается уравнениями:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = D(t)\mathbf{x}; \quad (3.2.34)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = [A(t) + K(t)D(t)]\hat{\mathbf{x}} + K(t)\mathbf{y} + B(t)\mathbf{u}; \quad (3.2.35)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = C'(t)\hat{\mathbf{x}}. \quad (3.2.36)$$

На рис. 3.2.1 приведена структурная схема системы с наблюдателем, построенная на основе уравнений (3.2.34) ... (3.2.36).



Исследуем устойчивость системы (3.2.34) ... (3.2.36). Осуществим эквивалентные преобразования этой системы. Вычитая из первого уравнения системы (3.2.34) уравнение (3.2.35) и заменяя в (3.2.36) $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{e}$, получим после подстановки (3.2.36) в (3.2.34) уравнения:

$$\dot{\mathbf{e}} = [A(t) + K(t)D(t)]\mathbf{e}; \quad \mathbf{e}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) - \hat{\mathbf{x}}(t_0); \quad (3.2.37)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = [A(t) + B(t)C'(t)]\mathbf{x} - B(t)C'(t)\mathbf{e}; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}. \quad (3.2.38)$$

Если матрица коэффициентов усиления наблюдателя $K(t)$ выбрана так, что наблюдатель (3.2.35) асимптотически устойчив при $\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t) = 0$, то решение уравнения (3.2.37) $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$ при $t_1 \rightarrow \infty$ независимо от начального состояния $\mathbf{e}(t_0)$.

Пусть матрицы $B(t)$ и $C'(t)$, входящие в уравнение (3.2.38), ограничены и $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, тогда $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$, если асимптотически устойчива система

$$\dot{\mathbf{x}} = [A(t) + B(t)C'(t)]\mathbf{x}. \quad (3.2.39)$$

В стационарном случае система (3.2.34) ... (3.2.36) имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x}; \quad (3.2.40)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = [A - KD]\hat{\mathbf{x}} + K\mathbf{y} + B\mathbf{u}; \quad (3.2.41)$$

$$\mathbf{u} = C'(t)\hat{\mathbf{x}}. \quad (3.2.42)$$

Эквивалентная ей система, аналогично (3.2.37), (3.2.38), записывается как

$$\dot{\mathbf{e}} = [A - KD]\mathbf{e}; \quad \dot{\mathbf{x}} = [A + BC']\mathbf{x} - BC'\mathbf{e}. \quad (3.2.43)$$

Характеристический полином системы (3.2.43)

$$\begin{aligned} D(s) &= \det \begin{vmatrix} E(s) - A + KD & 0 \\ BC' & Es - A - BC' \end{vmatrix} = \\ &= \det(Es - A + KD) \det(Es - A - BC'). \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

Из этого выражения следует, что корни характеристического полинома оптимальной системы с наблюдателем состоят из корней характеристического полинома $D_u(s) = \det(Es - A - BC')$ оптимальной системы (у которой все переменные состояния доступны непосредственному измерению) и корней характеристического полинома $D_o(s) = \det(Es - A + KD)$ наблюдателя. Таким образом, можно производить раздельное построение закона управления и наблюдателя.

Пример. Гирорама с наблюдателем. Рассмотрим при $f_1 = 0$ гирораму (3.1.23) с оптимальным в смысле функционала (3.1.25) управлением (3.1.24). В связи с тем что непосредственному измерению доступна лишь одна переменная состояния x_1 , воспользуемся для восстановления остальных неизмеряемых переменных состояния наблюдателем (3.2.1) ... (3.2.3). Тогда гирорама с наблюдателем будет описываться уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3; \quad \dot{x}_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u, \quad (3.2.45)$$

$$u = c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 + c_3\hat{x}_3; \quad (3.2.46)$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_1 + k_{11}(y - \hat{x}_1); \quad \dot{\hat{x}}_2 = a_{22}\hat{x}_2 + a_{23}\hat{x}_3 + k_{21}(y - \hat{x}_1); \quad (3.2.47)$$

$$\dot{\hat{x}}_3 = a_{32}\hat{x}_2 + a_{33}\hat{x}_3 + k_{31}(y - \hat{x}_1)b_{31}u; \quad (3.2.48)$$

в которых (3.2.46) ... (3.2.48) – уравнения регулятора, параметры которого c_1, c_2, c_3 определяются решением задачи об оптимальном управлении, описанным в примере 4.1.2, а параметры k_{11}, k_{21}, k_{31} находятся в результате построения наблюдателя, рассмотренного в примере 4.2.3.

Характеристический полином системы (3.2.45), (3.2.46), если положить в (3.1.24) $\check{x}_i = x_i$ ($i = 1, 2, 3$) имеет вид

$$D_u(s) = \det \left\| \begin{array}{ccc} s & -1 & 0 \\ 0 & s - a_{22} & -a_{23} \\ -b_{31}c_1 & -a_{32} - b_{31}c_2 & s - a_{33} - b_{31}c_3 \end{array} \right\| = \quad (3.2.49)$$

$$= s[(s - a_{22})(s - a_{33} - b_{31}c_3) - a_{23}(a_{32} + b_{31}c_2)] - b_{31}c_1a_{23}.$$

В соответствии с (3.2.28) характеристический полином наблюдателя

$$D_n(s) = s^3 + d_2^*s^2 + d_1^*s + d_0^*, \quad (3.2.50)$$

а характеристический полином системы (3.2.45) ... (3.2.48)

$$D(s) = D_u(s)D_n(s). \quad (3.2.51)$$

3.2.6 Возможная негрубость системы с наблюдателем

Будем называть асимптотически устойчивую систему *грубой*, если она сохраняет асимптотическую устойчивость при малых изменениях коэффициентов, описывающих ее дифференциальных уравнений. Одним из показателей грубости системы являются [3.24] запасы устойчивости по фазе и модулю.

Исследуем запасы устойчивости системы (3.2.40) – (3.2.42) и покажем, что они могут быть недопустимо малыми [3.14],[3.15],[3.16].

Исключая вектор состояния регулятора $\hat{\mathbf{x}}$, запишем его уравнения как

$$\mathbf{u} = C' (Es - A + KD)^{-1} [K\mathbf{y} + B\mathbf{u}]$$

или

$$\left[E - C' (Es - A + KD)^{-1} B \right] \mathbf{u} = C' (Es - A + KD)^{-1} K\mathbf{y}. \quad (3.2.52)$$

Сформируем передаточную матрицу $-W_{\text{раз}}^{\text{н}}(s)$ системы (3.2.40), (3.2.52) в разомкнутом (на входе объекта) состоянии. Для этого заменим вектор входа объекта на некоторый вектор $-\mathbf{r}$ ($u = -\mathbf{r}$, что означает размыкание системы на входе объекта, и запишем матрицу, связывающую выход регулятора u с вектором \mathbf{r} . Тогда получим

$$W_{\text{раз}}^{\text{н}}(s) = - \left[E - C' (Es - A + KD)^{-1} B \right]^{-1} C' (Es - A + KD)^{-1} KD (Es - A)^{-1} B. \quad (3.2.53)$$

Ограничиваясь далее, для простоты, случаем скалярного управления ($m = 1$), запишем передаточную функцию

$$W_{\text{раз}}^{\text{н}}(s) = - \frac{\mathbf{c}' (Es - A + KD)^{-1} KD (Es - A)^{-1} \mathbf{b}}{1 - \mathbf{c}' (Es - A + KD)^{-1} \mathbf{b}} \quad (3.2.54)$$

Её можно представить как

$$W_{\text{раз}}^{\text{н}}(s) = \frac{\mathbf{c}' \left(\widetilde{Es - A} \right) \mathbf{b} D_{\text{н}}(s) + \mathbf{c}' \left(\widetilde{Es - A + KD} \right) \mathbf{b} d(s)}{d(s) D_{\text{н}}(s) - \mathbf{c}' \left(\widetilde{Es - A + KD} \right) \mathbf{b} d(s)}, \quad (3.2.55)$$

где символ $\widetilde{}$ означает присоединенную матрицу, $d(s)$ и $D_{\text{н}}(s)$ – характеристические полиномы объекта и наблюдателя.

Действительно, представляя матрицу в числителе передаточной функции (3.2.54) как

$$(Es - A + KD)^{-1} KD (Es - A)^{-1} = (Es - A + KD)^{-1} (-A + KD) (Es - A)^{-1} + (Es - A + KD)^{-1} A (Es - A)^{-1}$$

и учитывая, что для любой квадратной матрицы M очевидны тождества

$$(Es - M)^{-1} M = s (Es - M)^{-1} - E, \quad M (Es - M)^{-1} = (Es - M)^{-1} s - E,$$

получим выражение

$$(Es - A + KD)^{-1} KD (Es - A)^{-1} = (Es - A)^{-1} - (Es - A + KD)^{-1},$$

из которого следует передаточная функция (3.2.55).

Нетрудно видеть, что её числитель и знаменатель содержат одинаковые полиномы $\rho(s) = \mathbf{c}'(Es - \widetilde{A} + KD)\mathbf{b}d(s)$, которые взаимно сокращаются в характеристическом полиноме системы $D(s) = [d(s) - \mathbf{c}'(Es - A)\mathbf{b}]D_n(s) + \rho(s) - \rho(s)$.

Если коэффициенты объекта отличаются от расчетных, полиномы $\rho(s)$ в числителе и знаменателе различаются. Так, в частности, вектор \mathbf{b} , входящий в полином числителя относится к объекту, а вектор \mathbf{b} в знаменателе формируется в устройстве наблюдения.

В [3.24] показано, что взаимное уничтожение полиномов при построении характеристического полинома является (при больших значениях коэффициентов полинома $\rho(s)$) признаком малых запасов устойчивости по фазе и модулю. Там же приведены примеры малых запасов устойчивости систем с наблюдателями.

3.2.7 Построение грубых систем с наблюдателем.

Если вектор состояния объекта измеряется, то регулятор (3.2.1), оптимальный в смысле функционала (3.1.3) обеспечивает грубость системы. Как показано в следующем разделе запасы устойчивости по фазе и модулю оптимальной системы достаточно велики.

Передаточная матрица разомкнутой (по входу объекта) такой оптимальной системы имеет вид

$$W_{\text{раз}}(s) = -C'(Es - A)^{-1}B. \quad (3.2.56)$$

В связи с возможной негрубостью такой системы с наблюдателем возникает вопрос: нельзя ли выбрать матрицу K наблюдателя так, чтобы передаточная функция системы с наблюдателем была близка к её передаточной матрице без наблюдателя

$$W_{\text{раз}}^n(s) \cong W_{\text{раз}}(s). \quad (3.2.57)$$

Оказывается, что для минимально-фазовых объектов это возможно.

Объект (3.2.40) при $r = m$ называется минимально-фазовым, если корни полинома $\det D(Es - A)B$ имеют отрицательные вещественные части.

Будем определять матрицу K наблюдателя на основе уравнений(??), (??), в последнем из которых матрица Q_c имеет определенную структуру, и таким образом

$$K = P_e^{(0)}D', \quad (3.2.58)$$

где неотрицательно-определенная матрица $P_e^{(0)}$ является решением следующего уравнения Риккати

$$P_e A' + A P_e - P_e D' D P_e + R + \rho B V B^T = 0, \quad (3.2.59)$$

где R и V – произвольные неотрицательно-определенные матрицы, β – достаточно большое положительное число, которое назовем коэффициентом сближения.

Утверждение. [3.15] . При $\rho \rightarrow \infty$ передаточная матрица $W_{\text{раз}}^n(s)$ системы с наблюдателем приближается к передаточной матрице $W_{\text{раз}}(s)$ системы без наблюдателя.

3.2.8 Программное обеспечение и практикум

ГАММА-директива: 113 (Оптимальная система с наблюдателем).

Исходные данные:

а) Уравнение объекта (3.1.1). (При анализе переходных процессов в оптимальной системе к правой части этого уравнения добавляется слагаемое $\Psi \mathbf{f}$, где \mathbf{f} -вектор ступенчатых внешних возмущений).

б) Матрица D уравнения измеряемых переменных, которые совпадают с регулируемыми: $\theta = \mathbf{y}$. (Регулируемые переменные используются для анализа переходных процессов).

в) Весовая матрица для регулируемых переменных Q_0 . Используя эту матрицу и матрицу N , найдем матрицу $Q = N^T Q_0 N$ функционала оптимизации (3.1.3)

г) Неотрицательная матрица V в уравнении Риккати (3.2.59) для наблюдателя. (Эта матрица названа матрицей Доула)

д) Положительный параметр ρ , на которое умножается эта матрица.

е) Время моделирования переходных процессов.

Результаты:

а) Матрицы C' и K регулятора (3.2.41), (3.2.42)

б) Графики переходных процессов по регулируемым переменным.

Используя директиву 113 выполняется практикум Пр.2.2. Одна из его целей состоит в исследовании инженерных показателей (установившихся ошибок, времени регулирования, перерегулирования) системы в зависимости от параметра ρ .

МАТЛАБ-функции:

1) $est = estim(A, B, D, \bar{D}, K)$ -формирование наблюдателя (3.2.10), где \bar{D} -матрица при управлении в измеряемом сигнале: $\mathbf{y} = D\mathbf{x} + \bar{D}\mathbf{u}$.

2) $rsys = reg(A, B, D, \bar{D}, C', K)$ -формирование регулятора (3.2.41), (3.2.42)

3) $K = place(A', D', \lambda)$ -расчет коэффициентов наблюдателя на основе модального управления.

4) $[P_c, \lambda, K, rr] = care(A', D', Q_c)$ -расчет коэффициентов наблюдателя на основе уравнения Риккати (3.2.16).

3.3 Частотные свойства оптимальных систем

3.3.1 Условие оптимальности в частотной форме

Процедуры аналитического конструирования регуляторов и построения наблюдателей образуют эффективный метод синтеза регуляторов систем, качество которых оценивается с помощью интегрального показателя. Однако часто оказывается, что

технические требования к системе трудно непосредственно выразить с помощью такого показателя, поэтому возникает задача выбора коэффициентов функционала оптимизации по заданным требованиям к точности и качеству системы. Для ее решения нужно установить связь между структурой и параметрами функционала оптимизации, с одной стороны, и показателями качества (временем регулирования, перерегулированием, запасами устойчивости по фазе и модулю) и точностью (установившимися ошибками при внешних возмущениях) – с другой.

Установление такой связи опирается на *условие оптимальности в частотной форме* [3.17].

Переходя к этому условию, рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}; \quad (3.3.1)$$

$$\mathbf{u} = C'\mathbf{x}, \quad (3.3.2)$$

оптимальную в смысле функционала

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}'Q\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{u}) dt, \quad (3.3.3)$$

в котором Q – положительно-определенная матрица. Оптимальность системы (3.3.1), (3.3.2) означает, что матрица

$$C = -PB, \quad (3.3.4)$$

где определено-положительная матрица P является решением алгебраического уравнения Риккати:

$$PA + A'P - PBB'P + Q = 0, \quad (3.3.5)$$

в котором A и B – заданные матрицы, удовлетворяющие условию управляемости.

Преобразуя (3.3.1), (3.3.2) по Лапласу при нулевых начальных условиях, запишем передаточную матрицу этой системы в разомкнутом состоянии

$$W_{\text{раз}}(s) = -C'(Es - A)^{-1}B, \quad (3.3.6)$$

где s – комплексное число.

Прибавим и вычтем из левой части (3.3.5) произведение sP и умножим полученное равенство слева на $B'(Es - A)^{-1}$, а справа на $(Es - A)^{-1}$, тогда

$$\begin{aligned} & B'(-Es - A)^{-1'}[-PA + Ps - A'P - sP + PBB'P - Q](Es - A)^{-1}B = \\ & = B'(-Es - A)^{-1'}PB + B'P(Es - A)^{-1}B + B'(-Es - A)^{-1'}PBB'P(Es - A)^{-1}B - \\ & - B'(-Es - A)^{-1'}Q(Es - A)^{-1}B = 0. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Вводя обозначение $H(s) = H(Es - A)^{-1}B$, где $H'H = Q$, и учитывая (3.3.4), запишем (3.3.7) в виде

$$-B'(Es - A)^{-1'}C - C'(Es - A)^{-1}B + B'(-Es - A)^{-1'}CC'(Es - A)^{-1}B = H'(-s)H(s).$$

Прибавляя к обеим частям единичную матрицу и учитывая выражение (3.3.6) для передаточной матрицы разомкнутой системы, получим окончательно

$$[E_m + W_{\text{раз}}(-s)'] [E_m + W_{\text{раз}}(s)] = E_m + H'(-s)H(s). \quad (3.3.8)$$

Полагая $s = j\omega$, получим *условие оптимальности в частотной форме*

$$[E_m + W_{\text{раз}}(-j\omega)]' [E_m + W_{\text{раз}}(j\omega)] = E_m + H'(-j\omega)H(j\omega). \quad (3.3.9)$$

Это условие выполняется для всех вещественных ω и связывает частотную передаточную матрицу $W_{\text{раз}}(j\omega)$ оптимальной системы с параметрами функционала оптимизации.

В дальнейшем изложении большую роль будет играть случай скалярного управления ($m = 1$). В этом случае уравнения (3.3.1), (3.3.2) имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u; \quad (3.3.10)$$

$$u = \mathbf{c}'\mathbf{x}, \quad (3.3.11)$$

где u – скаляр; \mathbf{b} и \mathbf{c} – n -мерные векторы-столбцы.

Передаточная функция этой системы

$$w_{\text{раз}}(s) = -\mathbf{c}'(Es - A)^{-1}\mathbf{b}. \quad (3.3.12)$$

Условие оптимальности (3.3.9) принимает при скалярном управлении вид

$$[1 + w_{\text{раз}}(-j\omega)][1 + w_{\text{раз}}(j\omega)] = 1 + \sum_{i=1}^n h_i(-j\omega)h_i(j\omega), \quad (3.3.13)$$

где $h_i(j\omega)$ ($i = \overline{1, n}$) – дробно-рациональные функции, являющиеся компонентами вектора $H(Ej\omega - A)^{-1}\mathbf{b}$.

3.3.2 Коэффициент передачи и частота среза

Найдем связь между коэффициентами функционала

$$J = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n q_{ii}x_i^2 + u^2 \right) dt, \quad (3.3.14)$$

(где для простоты $Q = \text{diag}[q_{11}, \dots, q_{nn}]$, $q_{ii} > 0$, $i = \overline{1, n}$) в смысле которого оптимальна система (3.3.10), (3.3.11), с одной стороны, и коэффициентом передачи k_p и частотой среза ω_{cp} этой системы - с другой.

Напомним, что для систем без астатизма

$$k_p = w_{\text{раз}}(0), \quad (3.3.15)$$

для астатических

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} s' w(s), \quad (3.3.16)$$

где r – порядок астатизма, а частота среза определяется равенством

$$|w_{\text{раз}}(j\omega_{cp})| = 1. \quad (3.3.17)$$

Положим в (3.3.13) $\omega = 0$, и учитывая, что обычно $k_p \gg 1$ получим для систем без астатизма

$$k_p^2 \approx \sum_{i=1}^n h_i^2(0). \quad (3.3.18)$$

Преобразуем это выражение. Поскольку в рассматриваемом случае

$$H = \text{diag} [\sqrt{q_{11}}, \dots, \sqrt{q_{nn}}],$$

учитывая, что компоненты вектора $(Es - A)^{-1}\mathbf{b}$ имеют вид $\frac{\rho_i(s)}{D(s)}$, где $\rho_i(s)$ – составляющие вектора $\rho(s) = \overline{(Es - A)}\mathbf{b}$ а

$$D(s) = \det(Es - A) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0$$

$\overline{(Es - A)}$ – присоединенная матрица, получим

$$\sum_{i=1}^n h_i(s)h_i(-s) = \left[\sum_{i=1}^n q_{ii}\rho_i(s)\rho_i(-s) \right] \frac{1}{D(s)D(-s)}. \quad (3.3.19)$$

Таким образом, (3.3.18) принимает вид

$$k_p^2 \approx \sum_{i=1}^n q_{ii} \frac{\rho_i^2(0)}{d_0^2}. \quad (3.3.20)$$

Для астатических систем аналогичное, но уже точное соотношение следует из (3.3.19) после его умножения на s^{2r} при $s \rightarrow 0$:

$$k_p^2 \approx \sum_{i=1}^n q_{ii} \frac{\rho_i^2(0)}{d_r^2}. \quad (3.3.21)$$

Часто по соображениям точности работы системы число k_p задано. Тогда для обеспечения заданного коэффициента передачи разомкнутой системы необходимо определять коэффициенты функционала (3.3.14) из равенств (3.3.20), (3.3.21), в которых $\rho_i(0)$ ($i = \overline{1, n}$) и $d_0(d_r)$ – известные числа, определяемые параметрами объекта управления.

Для установления зависимости частоты среза системы (3.3.10), (3.3.11) от параметров функционала (3.3.14) введем в рассмотрение некоторую частоту ω_{cp}^* , определяемую равенством

$$\frac{\sum_{i=1}^n q_{ii} \rho_i(-j\omega_{cp}^*) \rho_i(j\omega_{cp}^*)}{D(-j\omega_{cp}^*) D(j\omega_{cp}^*)} = 1, \quad (3.3.22)$$

которое эквивалентно

$$\sum_{i=1}^n h_i(-j\omega_{cp}^*) h_i(j\omega_{cp}^*) = 1. \quad (3.3.23)$$

Кроме того, запишем тождество (3.3.13) как

$$2\operatorname{Re} w_{\text{раз}}(j\omega) + w_{\text{раз}}(-j\omega) w_{\text{раз}}(j\omega) = \sum_{i=1}^n h_i(-j\omega) h_i(j\omega), \quad (3.3.24)$$

либо

$$2a(\omega) \cos \varphi(\omega) + a^2(\omega) = \sum_{i=1}^n h_i(-j\omega) h_i(j\omega), \quad (3.3.25)$$

где

$$a(\omega) = |w_{\text{раз}}(j\omega)|; \quad \varphi(\omega) = \arg w_{\text{раз}}(j\omega).$$

При $\omega = \omega_{cp}^*$ тождество (3.3.25) принимает с учетом (3.3.23) вид $2a(\omega_{cp}^*) \cos \varphi(\omega_{cp}^*) + a^2(\omega_{cp}^*) = 1$, откуда следует

$$a(\omega_{cp}^*) = -\cos \varphi(\omega_{cp}^*) + \sqrt{\cos^2 \varphi(\omega_{cp}^*) + 1}. \quad (3.3.26)$$

Учитывая, что $-1 \leq \cos \varphi(\omega) \leq 1$, получим границы для значений амплитудно-частотной характеристики $a(\omega)$ оптимальной системы в точке ω_{cp}^* :

$$0,4 \leq a(\omega_{cp}^*) \leq 2,4 \quad \text{или} \quad \left| 20 \lg(\omega_{cp}^*) \right| \leq 8 \text{ дБ}. \quad (3.3.27)$$

Если полагать наклон логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) в окрестности ω_{cp}^* не менее 20 дБ/дек, то нетрудно заключить, что истинная частота среза ω_{cp} отличается от ω_{cp}^* не более чем на 0,4 декады (в 2,5 раза).

Таким образом, если коэффициенты q_{ii} ($i = \overline{1, n}$) функционала (3.3.14) выбрать так, чтобы при заданном ω_{cp}^* выполнялось равенство (3.3.22), то частота среза оптимальной в смысле такого функционала системы (3.3.10), (3.3.11) будет отличаться от заданной не более чем в 2,5 раза.

Пример. Рассмотрим гирораму, описываемую уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3; \quad \dot{x}_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u, \quad (3.3.28)$$

и пусть требуется найти закон управления

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3, \quad (3.3.29)$$

при котором система (3.3.28), (3.3.29) имеет коэффициент передачи разомкнутой гирорамы и частоту среза, близкие к заданным $-k_p^*$, ω_{cp}^* .

Для решения этой задачи будем определять параметры c_i ($i = \overline{1,3}$) из условия минимума функционала

$$J = \int_0^\infty (q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + q_{33}x_3^2 + u^2) dt, \quad (3.3.30)$$

коэффициенты которого определяются из соотношений (3.3.21), (3.3.22).

Для нахождения функций $\rho_i(s)$ ($i = \overline{1,3}$) вычислим

$$(Es - A)^{-1}\mathbf{b} = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & s - a_{33} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{31} \end{vmatrix} = \frac{1}{D(s)} \begin{vmatrix} a_{23} \\ a_{23}s \\ s(s - a_{22}) \end{vmatrix} b_{31}, \quad (3.3.31)$$

где $D(s) = s^3 - (a_{22} + a_{33})s^2 + (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})s$.

Таким образом,

$$\rho_1(s) = a_{23}b_{31}; \quad \rho_2(s) = a_{23}b_{31}s; \quad \rho_3(s) = s(s - a_{22})b_{31}.$$

Подставляя эти выражения в (3.3.21), (3.3.22), получим

$$\frac{q_{11}a_{23}^2b_{31}^2}{(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})^2} = k_p^*; \quad (3.3.32)$$

$$\frac{q_{11}a_{23}^2b_{31}^2 + q_{22}\omega_{cp}^{*2}a_{23}^2b_{31}^2 + q_{33}\omega_{cp}^{*2}(\omega_{cp}^{*2} + a_{22}^2)b_{31}^2}{D(-j\omega_{cp}^*)D(j\omega_{cp}^*)} = 1. \quad (3.3.33)$$

Пусть параметры гирорамы имеют значения (3.1.55), а $k_p^* = 4 \cdot 10^2$, $\omega_{cp}^* = 100 \text{ c}^{-1}$. Задаваясь значением $q_{33} = 5 \cdot 10^9$, вычислим по формулам (3.3.32), (3.3.33) $q_{11} = 1,6 \cdot 10^{12}$, $q_{22} = 3 \cdot 10^8$.

Решая задачу АКОР гирорамы при этих значениях коэффициентов функционала оптимизации (3.3.30), найдем

$$c_1 = -0,126 \cdot 10^7; \quad c_2 = -0,44 \cdot 10^4; \quad c_3 = -166 \cdot 10^3.$$

Передаточная функция разомкнутой гирорамы

$$w_{\text{раз}}(s) = -\frac{\sum_{i=1}^3 c_i \rho_i(s)}{D(s)} = -\frac{a_{23} b_{31} \left[c_1 + \left(c_2 - c_3 \frac{a_{22}}{a_{23}} \right) s + \frac{c_3}{a_{23}} s^2 \right]}{s^3 - (a_{22} + a_{33})s^2 + (a_{22}a_{23} - a_{32}a_{23})s} =$$

$$= \frac{0,126 \cdot 10^7 (0,92 \cdot 10^{-4} s^2 + 3,1 \cdot 10^{-2} s + 1)}{s(s^2 + 301s + 3,3 \cdot 10^3)}.$$
(3.3.34)

На рис. 3.3.1 приведена амплитудно-частотная характеристика разомкнутой гироскопа, из которой следует, что требования к k_p и $\omega_{\text{ср}}$ выполняются.

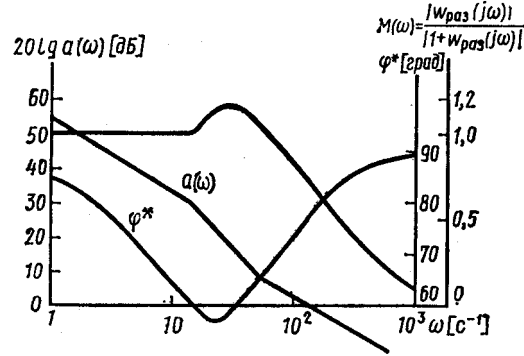


Рис. 3.3.1

3.3.3 Границы запасов устойчивости оптимальных систем

Исследуем частотные свойства системы (3.3.10), (3.3.11) со скалярным управлением оптимальной в смысле функционала (3.3.14). Для общности будем полагать, что в этом функционале часть коэффициентов q_{ii} равна нулю, однако, требование полной управляемости пары (A', H') выполняется.

Оказывается, для частотных показателей качества (запаса устойчивости по фазе φ_z , запаса устойчивости по модулю L и показателя колебательности M) оптимальных систем можно указать [3.18], [3.19] их границы, не зависящие от выбора коэффициентов функционала (3.3.14).

Утверждение Запасы устойчивости и показатель колебательности системы (3.3.10), (3.3.11) удовлетворяют неравенствам

$$\varphi_z \geq 60^\circ; \quad L \geq 2; \quad M \leq 2. \quad (3.3.35)$$

Доказательство утверждения опирается на тождество (3.3.13). Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^n h_i(-j\omega)h_i(j\omega) \geq 0, \quad (3.3.36)$$

запишем на основе (3.3.13)

$$[1 + \operatorname{Re} w_{\text{раз}}(j\omega)]^2 + \operatorname{Im}^2 w_{\text{раз}}(j\omega) \geq 1. \quad (3.3.37)$$

Равенству $[1 + \operatorname{Re} w_{\text{раз}}(j\omega)]^2 + \operatorname{Im}^2 w_{\text{раз}}(j\omega) = 1$ соответствует в плоскости годографа амплитудно-фазовой характеристики (АФЧХ) окружность единичного радиуса с центром в точке $\operatorname{Re} w_{\text{раз}}(j\omega) = -1$, $\operatorname{Im} w_{\text{раз}}(j\omega) = 0$. Эта окружность показана на рис. 3.3.2. Неравенство (3.3.37) означает, что годограф АФЧХ оптимальной системы не пересекает зоны (это запретная зона на рис. 3.3.2 заштрихована), ограниченной окружностью единичного радиуса с центром в точке $(-1, j0)$.

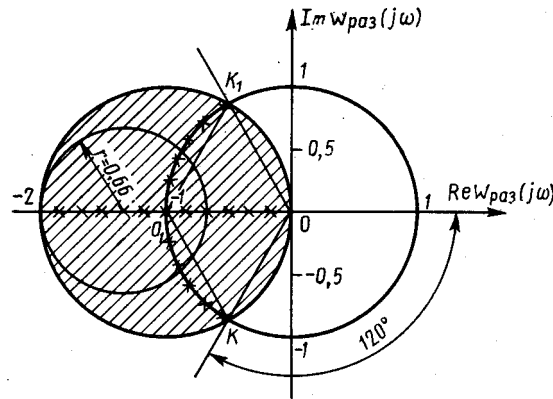


Рис. 3.3.2

Опираясь на такую геометрическую интерпретацию условия оптимальности в частотной форме (3.3.13) и неравенства (3.3.36), нетрудно доказать соотношения (3.3.35) для границ частотных показателей качества.

Действительно, пересечение запретной зоны с кругом единичного радиуса с центром в начале координат образует сегмент, в который вписываются два равнобедренных треугольника O_1OK_1 , O_1OK (сторонами этих треугольников являются радиусы пересекающихся окружностей), которые опираются на дугу, отмеченную на рисунке крестиками, а поэтому угол OKK_1 равен 120° . Это означает, что запас по фазе $\varphi_z \geq 60^\circ$.

Переходя ко второму из неравенств (3.3.35), отметим, что отрезок вещественной оси $[-2, 0]$, отмеченный на рисунке крестиками, находится внутри запретной зоны. Это означает, что запас устойчивости по модулю для оптимальных систем с АФЧХ второго рода не менее двух, а с АФЧХ первого рода - бесконечно велик. Последнее следует из того, что участок $[-1, 0]$ вещественной оси не может пересекаться АФЧХ оптимальной системы.

Граница показателя колебательности оптимальных систем находится следующим образом. На рис. 4.3.2 штрихпунктирной линией нанесена окружность радиуса $r = \frac{M}{(M^2 - 1)} = 0,66$ с центром в точке $(-a, j0)$, где $a = \frac{M^2}{(M^2 - 1)} = 1,3$. Эта окружность составляет геометрическое место точек, запрещенных для АФЧХ с показателем колебательности $M = 2$. Так как эта окружность находится внутри запретной зоны, касаясь

границы этой зоны изнутри, то $M \leq 2$ и, таким образом, утверждение доказано.

Отметим, что доказательство опиралось на неравенство (3.3.37), которое не содержит коэффициентов функционала оптимизации. Правда, при этом требуется, чтобы $q_{ii} \geq 0$ ($i = \overline{1, n}$), так как в этом случае выполняется (3.3.36), поэтому границы (3.3.35) не зависят от выбора этих коэффициентов, и таким образом, утверждение доказано.

Отметим, что аналогичное утверждение получено и для оптимальных систем с векторным управлением [3.20],[3.21]

Пример . Определим запасы устойчивости и показатель колебательности гироскопа с законом управления, полученным в примере 4.3.1. Передаточная функция гироскопа в разомкнутом состоянии определяется выражением (3.3.34). На рис. 4.3.1 приведены логарифмическая амплитудно-частотная характеристика $-20 \lg a(\omega)$ и функция $\varphi^*(\omega) = 180 + \varphi(\omega)$ (где $\varphi(\omega)$ – фазочастотная характеристика), соответствующие передаточной функции (3.3.34). Нетрудно видеть, что $\varphi_3 = 80^\circ$, $L \rightarrow \infty$. На этом же рисунке приведен график

$$M(\omega) = \frac{|W_{\text{раз}}(j\omega)|}{|1 + W_{\text{раз}}(j\omega)|},$$

из которого следует, что показатель колебательности

$$M = \max_{0 \leq \omega \leq \infty} M(\omega) = 1, 1.$$

Отметим, что в более общем случае функционал (3.3.14) содержит произведения x_i и u :

$$J = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n q_{ii} x_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n l_i x_i \right) u + u^2 \right) dt,$$

в матричной форме он принимает вид

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + 2(l' \mathbf{x}) u + u^2) dt, \quad (3.3.38)$$

где l – n -мерный вектор.

Условие неотрицательности подынтегральной квадратичной формы $n+1$ переменного $Q - ll' \geq 0$. Вводя новые переменные $\bar{u} = u + l'x$, $\bar{Q} = Q + ll'$ нетрудно привести функционал (3.3.38) к форме (3.3.14) и использовать процедуру АКОР. Однако для частотных показателей качества систем, оптимальных в смысле функционала (3.3.38), уже нельзя указать границ (3.3.35). Более того, можно показать, что для любой (в том числе и сколь угодно "плохой" по частотным показателям) системы (3.3.10), (3.3.11) можно построить неотрицательный функционал вида (3.3.38), в смысле которого эта система является оптимальной.

3.4 Точное управление

3.4.1 Постановка задачи

Рассмотрим асимптотически устойчивую систему управления, описываемую уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \Psi\mathbf{f}, \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x}, \quad \theta = N\mathbf{x} \quad (3.4.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p\mathbf{x}_p + B_p\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = D_p\mathbf{x}_p + F_p\mathbf{y} \quad (3.4.2)$$

Эти уравнения являются стационарным случаем уравнений (1.3.9) – (1.3.12).

Пусть компоненты μ -мерного вектора возмущений $\mathbf{f}(t)$ являются следующими полигармоническими функциями

$$f_i(t) = \sum_{k=1}^p f_{ik} \sin(\omega_k t + \psi_{ik}) \quad (i = \overline{1, \mu}) \quad (3.4.3)$$

Здесь амплитуда f_{ik} фазы ψ_{ik} ($i = \overline{1, \mu}$, $k = \overline{1, \rho}$), а также частоты ω_k ($k = \overline{1, \rho}$) гармоник неизвестны. Однако известно, что амплитуды гармоник подчинены условию

$$\sum_{k=1}^p f_{ik}^2 \leq f_i^{*2} \quad (i = \overline{1, \mu}), \quad (3.4.4)$$

где p – известное число гармоник, f_i^* ($i = \overline{1, \mu}$) – заданные числа.

Установившимися ошибками по регулируемым переменным являются числа

$$\theta_{i,\text{уст}} = \limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta_i(t)| \quad (3.4.5)$$

Задача точного управления [3.23] состоит в следующем.

Для заданного объекта (3.4.1) найти числовые матрицы A_p , B_p , D_p и F_p регулятора (3.4.2) такие, чтобы система (3.4.1), (3.4.2) удовлетворяла требованиям к точности

$$\theta_{i,\text{уст}} \leq \theta_i^*, \quad (3.4.6)$$

где θ_i^* ($i = \overline{1, m}$) – заданные числа.

Частные случаи этой задачи исследовались в [3.20], [3.22]

Решение этой задачи может не существовать для любых чисел θ_i^* ($i = \overline{1, m}$). Введем два вида объектов, для которых она разрешима.

Первый вид объектов описывается (3.4.1), в которых $\Psi = B$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, (переменные состояния измеряются), $\mu = m$.

Второй вид объектов характеризуется тем, что вектора регулируемых и измеряемых переменных совпадают ($\theta = \mathbf{y}$, $N = D$, $r = m$) и кроме того, объект управления является минимально - фазовым.

Последнее означает, что корни полинома $\det \|D \text{adj}(Es - A)B\|$, где adj – символ присоединенной матрицы, имеют отрицательные вещественные части.

3.4.2 Управление объектами первого вида

Объект первого вида описывается уравнением, которое называется уравнением с возмущением, приложенным к входу объекта

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B(\mathbf{u} + \mathbf{f}), \quad \theta = N\mathbf{x} \quad (3.4.7)$$

и искомый регулятор, обеспечивающий выполнение требований (3.4.6) имеет вид

$$\mathbf{u} = C'\mathbf{x}. \quad (3.4.8)$$

Для решения задачи применим процедуру АКОР, в которой в качестве функционала оптимизации примем следующий

$$J = \int_0^{\infty} (\theta' Q_0 \theta + \mathbf{u}' \mathbf{u}) dt, \quad (3.4.9)$$

где $Q_0 = \text{diag}\|q_{11}^0, \dots, q_{mm}^0\|$ – диагональная матрица с положительными коэффициентами ($q_{ii}^0 > 0$, $(i = \overline{1, m})$).

В этом случае матрица Q в уравнениях Риккати (3.1.15) имеет вид $Q = N'Q_0N$.

Утверждение. Для построения регулятора (3.4.8), обеспечивающее выполнение требований к точности (3.4.6) при полигармоническом возмущении (3.4.3) достаточно использовать процедуру АКОР для объекта (3.3.1) и функционала (3.4.9), с коэффициентами, удовлетворяющими неравенствам

$$q_{ii}^0 \geq \frac{p \sum_{k=1}^m f_k^{*2}}{\theta_i^{*2}} \quad (i = \overline{1, m}) \quad (3.4.10)$$

Доказательство утверждения приведено в [3.24].

3.4.3 Управление объектами второго вида

Так как в этих объектах вектор состояния не измеряется, то необходим наблюдатель, и поэтому регулятор описывается уравнениями вида (3.2.40) – (3.2.42):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = [A - KD]\hat{\mathbf{x}} + K\mathbf{y} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = C'\hat{\mathbf{x}}. \quad (3.4.11)$$

Нетрудно видеть, что матрицы уравнения (3.4.2) имеют в рассматриваемом случае вид

$$A_p + A - KD + BC', \quad B_p = K, \quad D_p = C', \quad F_p = 0. \quad (3.4.12)$$

Для решения задачи точного управления преобразуем уравнения объекта (3.4.1) к виду (3.3.35). В связи с этим запишем на основе уравнения (3.4.1)

$$\mathbf{y}(s) = D(Es - A)^{-1}B\mathbf{u}(s) + D(Es - A)^{-1}\Psi\mathbf{f}(s) \quad (3.4.13)$$

и определим вектор $\bar{\mathbf{f}}(t)$ эквивалентных внешних возмущений, приведенных ко входу объекта, соотношением

$$\bar{\mathbf{f}}(s) = [D(Es - A)^{-1}]^{-1} D(Es - A)^{-1}\Psi\mathbf{f}(s) = T_{\bar{\mathbf{f}}f}(s)\mathbf{f}(s) \quad (3.4.14)$$

и тогда выражение (3.4.13) принимает вид

$$\mathbf{y}(s) = D(Es - A)^{-1}B(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{f}}) \quad (3.4.15)$$

Минимально - фазовость объекта гарантирует отрицательность вещественных частей полюсов передаточной матрицы $T_{\bar{\mathbf{f}}f}(s)$ и поэтому существует ограниченная вектор - функция $\bar{\mathbf{f}}(t)$, удовлетворяющая соотношению (3.4.14).

Уравнение (3.4.15) можно теперь записать в виде (3.4.7)

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B(\mathbf{u} + \bar{\mathbf{f}}), \quad (3.4.16)$$

и использовать для построения матрицы C в (3.4.11) утверждение 4.3.2. Однако перед этим необходимо найти сумму границ $\sum_{k=1}^m \bar{\mathbf{f}}_k^{*2}$ ($k = \overline{1, m}$) "возмущения" $\bar{\mathbf{f}}(t)$.

В связи с этим отметим, что всегда найдется число η такое, что выполняется неравенство

$$\bar{f}_k^T \bar{f}_k = \mathbf{f}_k^T T_{\bar{\mathbf{f}}\mathbf{f}}^T(-j\omega_k) T_{\bar{\mathbf{f}}\mathbf{f}}(j\omega_k) \mathbf{f}_k \leq \eta^2 \mathbf{f}_k^T \mathbf{f}_k \quad 0 \leq \omega_k \leq \infty, \quad k = \overline{1, \rho}. \quad (3.4.17)$$

где $\bar{\mathbf{f}}_k$ и \mathbf{f}_k m - мерные вектора амплитуд исходного и эквивалентного возмущений.

Суммируя эти неравенства, получим

$$\sum_{k=1}^{\rho} \bar{\mathbf{f}}_k^{-T} \bar{\mathbf{f}}_k \leq \eta^2 \sum_{k=1}^{\rho} \mathbf{f}_k^T \mathbf{f}_k = \eta^2 \sum_{k=1}^{\rho} \sum_{i=1}^m \mathbf{f}_{ik}^2 = \eta^2 \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{\rho} \mathbf{f}_{ik}^2 \leq \eta^2 \sum_{i=1}^m \mathbf{f}_i^{*2} \quad (3.4.18)$$

Матрицу K коэффициентов усиления наблюдателя будем определять по формуле

$$K = P_0^{(0)} D', \quad (3.4.19)$$

где $P_0^{(0)}$ – положительно-определенная матрица, являющаяся решением следующего уравнения Риккати

$$P_e A' + A P_e - P_e D' D P_e + Q_e + \beta B V B^T = 0, \quad (3.4.20)$$

Утверждение. Матрицы C и K регулятора (3.4.11), обеспечивающего выполнение требований (3.4.6) к точности, находятся с помощью уравнений Риккати (3.1.15), (3.4.20), в первом из которых

$$Q = N'Q_oN, \quad q_{ii}^{(0)} \geq \frac{p\eta^2 \sum_{k=1}^m f_k^{*2}}{\theta_i^{*2}} \quad (i = \overline{1, m}) \quad (3.4.21)$$

а во втором Q_o и V – произвольные неотрицательно-определенные матрицы, а положительный коэффициент ρ – достаточно велик.

3.4.4 Программное обеспечение и практикум

ГАММА-директива: 113.1 (Точное управление объектом второго вида).

Исходные данные:

- а) Уравнение объекта с учетом внешних возмущений.
- б) Матрица D уравнения измеряемых переменных, которые совпадают с регулируемы: $\theta = y$.
- в) Вектор границ внешних возмущений.
- г) Вектор границ допустимых значений установившихся ошибок.
- д) Неотрицательная матрица V в уравнении Риккати (3.2.59) для наблюдателя. (Эта матрица названа матрицей Доула)
- е) Положительный параметр ρ , на которое умножается эта матрица.

Результаты:

- а) Матрицы C' и K регулятора (3.4.11).
- б) Графики переходных процессов по регулируемым переменным.

Используя директиву 113.1 выполняется практикум Пр.2.4. Одна из его целей состоит в исследовании инженерных показателей.

Глава 4 Оптимальные стохастические системы

Рассмотрим теперь построение систем стабилизации для объектов, подверженных внешним возмущениям, а также помехам, сопровождающим процесс измерения его выходных переменных.

Внешние возмущения и помехи предполагаются гауссовскими случайными процессами.

В §5.1 получено оптимальное управление при внешних возмущениях типа "белый шум", приложенных к объекту, переменные состояния которого измеряются точно (без помех). Оказывается, что это управление совпадает с законом управления, полученным в предыдущей главе, при отсутствии внешних возмущений.

В §5.2 строится оптимальное стохастическое управление при не полностью измеряемом векторе переменных состояния и аддитивных помехах в процессе измерения.

Получены соотношения для определения матрицы коэффициентов усиления наблюдателя полного порядка, при которой осуществляется оптимальное восстановление и фильтрация переменных состояния объекта. Доказана теорема разделения, в которой в отличие от детерминированного случая утверждается статистическая оптимальность системы, содержащей оптимальный регулятор, в котором неизмеряемые переменные состояния заменяются оценками этих переменных, получаемыми на выходе оптимального наблюдателя (оптимального фильтра).

В §5.3 получены алгоритмы оптимального стохастического дискретного (цифрового) управления. Результаты этого параграфа являются развитием результатов §5.1 и §5.2 на случай дискретных систем.

4.1 Оптимальное управление при измеряемом векторе состояний

Рассмотрим нестационарный объект управления

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} + \Psi(t)\mathbf{f}; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad (4.1.1)$$

где $\mathbf{f}(t)$ – μ -мерный вектор внешних возмущений, являющийся гауссовским случайным процессом типа "белый шум". Здесь и далее будем полагать, что математическое ожидание

$$M\{\mathbf{f}(t)\} = 0. \quad (4.1.2)$$

Ковариационная матрица этого процесса

$$R_f(t', t'') = M\{\mathbf{f}(t')\mathbf{f}'(t'')\} = R^{(1)}(t)\delta(t' - t''), \quad (4.1.3)$$

где $R^{(1)}(t)$ – положительно-определенная матрица размеров $\mu \times \mu$, характеризующая интенсивность "белого шума" в момент времени t' .

Пусть начальное состояние $\mathbf{x}^{(0)}$ также является гауссовским случайным вектором, не зависящим от внешних возмущений и имеющим при $M\{x^{(0)}\} = 0$ ковариационную матрицу

$$M\{\mathbf{x}^{(0)}\mathbf{x}^{(0)'}\} = R^{(0)}. \quad (4.1.4)$$

Рассмотрим критерий

$$J = M\left\{\int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}'Q(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}'\mathbf{u}] + \mathbf{x}'(t_1)P^{(1)}\mathbf{x}(t_1)\right\}, \quad (4.1.5)$$

где $Q(t)$ – положительно-определенная матрица.

Требуется найти управление $\mathbf{u}(t)$ как функцию текущей и прошлой информации об $\mathbf{x}(t)$, при котором (4.1.5) принимает наименьшее значение.

Так как текущая информация об $\mathbf{x}(t)$ носит случайный характер, то и формируемое на ее основе оптимальное управление будет *случайным (стохастическим) управлением*.

Неожиданным оказывается тот факт, что наличие "белого шума" в уравнении (4.1.1) не изменяет оптимального управления, которое было получено ранее (в § 3.1) при отсутствии внешних возмущений. Изменяется лишь значение минимума критерия. Сформулируем этот результат [1.4], [3.7].

Утверждение Оптимальное стохастическое управление для объекта (4.1.1), при котором функционал (4.1.5) принимает наименьшее значение, имеет вид

$$\mathbf{u} = C'(t)\mathbf{x}, \quad (4.1.6)$$

где

$$C(t) = -P(t)B(t); \quad (4.1.7)$$

$P(t)$ – решение матричного уравнения Риккати

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A'(t)P(t) - P(t)B(t)B'(t)P(t) + Q(t) \quad (4.1.8)$$

при краевом условии

$$P(t_1) = P^{(1)}. \quad (4.1.9)$$

Значение функционала (4.1.5) при управлении (4.1.6) определяется выражением

$$\text{tr} \left\{ P(t_0)R^{(0)} + \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t)R^{(1)}(t)\Psi'(t)P(t) dt \right\}. \quad (4.1.10)$$

(В этом выражении запись $\text{tr}A$ означает след квадратной матрицы A . По определению,

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii},$$

где a_{ii} ($i = \overline{1, n}$) – диагональные элементы матрицы A .)

Рассмотрим теперь стационарный случай, когда матрицы, входящие в уравнение объекта (4.1.1), и функционал (4.1.5) постоянны, а интенсивность стационарного "белого шума" характеризуется матрицей чисел $R^{(1)}$. Наименьшее значение функционала оптимизации имеет вид

$$\min J = \text{tr} \left\{ P(t_0)R^{(0)} + \int_{t_0}^{t_1} \Psi R^{(1)}\Psi' P(t) dt \right\}. \quad (4.1.11)$$

Во многих практических случаях время функционирования системы велико. Тогда полагают в функционале оптимизации $t_1 \rightarrow \infty$ и значение функционала

$$\min J = \text{tr} P^0 R^{(0)} + (t_1 - t_0) \Psi R^{(1)} \Psi' P^0, \quad (4.1.12)$$

где P^0 – установившееся решение матричного уравнения Риккати (3.1.15).

Очевидно, что при $t_1 \rightarrow \infty$ число $\min J \rightarrow \infty$.

Причиной этой ситуации является неограниченная энергия случайного процесса типа "белый шум", поэтому при $t_1 \rightarrow \infty$ вместо функционала (4.1.11) принимают функционал

$$J = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_1 - t_0} M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{x}' Q(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{u}) dt + \mathbf{x}'(t_1) P^{(1)} \mathbf{x}(t_1) \right\}. \quad (4.1.13)$$

Для стационарных систем этот функционал можно записать как

$$J = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_1 - t_0} M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{u}) dt \right\}. \quad (4.1.14)$$

Пример. Оптимальное стохастическое управление гирорамой. Рассмотрим гирораму, описываемую уравнениями (3.1.23), в которых $f(t)$ – стационарный случайный процесс типа "белый шум" с интенсивностью $r_{11}^{(1)} = 10^3$. Причиной такого внешнего возмущения являются высокочастотные вибрации, которые приводят к случайным изменениям сухого трения относительно оси OY .

Требуется найти закон управления, при котором функционал

$$J = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_1 - t_0} M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (q_{11} x_1^2 + q_{22} x_2^2 + q_{33} x_3^2 + u^2) dt \right\} \quad (4.1.15)$$

принимает наименьшее значение.

Пусть параметры гирорамы и функционал оптимизации определяются равенствами (3.1.55), а значение

$$\psi_{31} = 10^{-3}, \quad (4.1.16)$$

тогда оптимальное управление имеет вид (3.1.24), а его параметры c_1, c_2, c_3 определяются соотношениями (3.1.58).

Вычислим значение функционала (4.1.15) при оптимальном управлении.

Поделим (4.1.12) на $t_1 - t_0$ и положим $t_1 \rightarrow \infty$, тогда

$$\min J = \text{tr} \Psi R^{(1)} \Psi' P^0 = \text{tr} \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \psi_{31} \end{array} \right\| \left\| r_{11}^{(1)} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & \psi_{31} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} p_{11}^0 & p_{12}^0 & p_{13}^0 \\ p_{12}^0 & p_{22}^0 & p_{23}^0 \\ p_{13}^0 & p_{23}^0 & p_{33}^0 \end{array} \right\| =$$

$$= \text{tr} \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{11}^{(1)} \psi_{31}^2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} p_{11}^0 & p_{12}^0 & p_{13}^0 \\ p_{12}^0 & p_{22}^0 & p_{23}^0 \\ p_{13}^0 & p_{23}^0 & p_{33}^0 \end{array} \right\| = r_{11}^{(1)} \psi_{31}^2 p_{33}^0.$$

Так как в соответствии с (3.1.57) $p_{33}^0 = 116 \cdot 10^6$, то искомое значение

$$\min J = 116 \cdot 10. \quad (4.1.18)$$

Это значение равно сумме дисперсий

$$q_{11} \sigma_{x_1}^2 + q_{22} \sigma_{x_2}^2 + q_{33} \sigma_{x_3}^2 + \sigma_u^2 = 116 \cdot 10^3, \quad (4.1.19)$$

где $\sigma_{x_i}^2$ ($i = 1, 2, 3$) – дисперсия x_i , σ_u – дисперсия u . Используя это равенство, можно получить оценку дисперсии по каждой из переменных состояния.

4.2 Оптимальное управление при неполной информации о векторе состояния.

4.2.1 Структура оптимального регулятора

Пусть не все переменные состояния объекта (4.1.1) доступны непосредственному измерению и пусть, кроме того, измерения осуществляются с помехами. Тогда объект управления описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} + \Psi(t)\mathbf{f}; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}; \quad (4.2.1)$$

$$\mathbf{y} = D(t)\mathbf{x} + \chi(t), \quad (4.2.2)$$

где, как и ранее, $\mathbf{f}(t)$ – μ -мерный вектор внешних возмущений, являющийся гауссовским случайным процессом типа ”белый шум” с нулевым математическим ожиданием и заданной ковариационной матрицей $R^{(1)}(t)$; $A(t)$, $B(t)$, $\Psi(t)$ – заданные матрицы; $\mathbf{y}(t)$ – r -мерный вектор измеряемых переменных; $\chi(t)$ – это r -мерный вектор помех (шумов), также являющийся случайным процессом типа ”белый шум” с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$R^{(2)}(t', t'') = M \{ \chi(t') \chi'(t'') \} = R^{(2)}(t) \delta(t' - t''), \quad (4.2.3)$$

где $R^{(2)}(t)$ – заданная положительно-определенная матрица размеров $r \times r$.

Далее предполагается, что внешние возмущения и помехи измерений независимы (не коррелированы).

Наконец, обозначим

$$M \{ \mathbf{x}(t_0) \} = \bar{\mathbf{x}}^{(0)}; \quad M \left\{ \left[\mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}^{(0)} \right] \left[\mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}^{(0)} \right]' \right\} = R^{(0)} \quad (4.2.4)$$

и будем полагать, что начальные условия не зависят от возмущений и помех, а вектор $\bar{\mathbf{x}}^{(0)}$ и матрица $R^{(0)}$ размеров $n \times n$ известны.

Требуется найти управление \mathbf{u} , зависящее от измеряемого вектора \mathbf{y} , такое, чтобы критерий

$$J = M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}' Q(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{u}] dt + \mathbf{x}'(t_1) P^{(1)} \mathbf{x}(t_1) \right\}, \quad (4.2.5)$$

где $Q(t)$, $P^{(1)}$ – заданные положительно-определенные матрицы, принимал наименьшее значение.

Регулятор, формирующий искомое управление, состоит (как и в детерминированном случае, рассмотренном в предыдущей главе) из двух частей: устройства, реализующего оптимальный закон (4.1.6), в котором вместо неизвестного вектора переменных состояния \mathbf{x} подставляется его оценка $\hat{\mathbf{x}}$, вырабатываемая во втором устройстве – наблюдателе. Как и в детерминированном случае, наблюдатель описывается уравнением

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A(t)\hat{\mathbf{x}} + K(t) [\mathbf{y} - D(t)\hat{\mathbf{x}}] + B(t)\mathbf{u}, \quad (4.2.6)$$

в котором матрица $K(t)$ определяется из условия минимума функционала

$$J = M \{ \mathbf{e}' \Lambda(t) \mathbf{e} \}, \quad (4.2.7)$$

(где $\Lambda(t)$ – заданная положительно-определенная матрица) ошибки $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ восстановления (наблюдения, фильтрации).

При таком определении матрицы $K(t)$ уравнение (4.2.6) описывает *оптимальный наблюдатель (оптимальный фильтр)*.

Таким образом, цель последующего состоит в нахождении матрицы $K(t)$ из условия минимума (4.2.7) и в доказательстве *принципа разделения*, который является основанием для представления регулятора из двух частей.

Отметим, что уравнение устройства восстановления (4.2.6) было построено в предыдущей главе исходя из эвристических соображений. В действительности же оно впервые было получено в работе [4.6] Р.Калмана и Бьюси, которая явилась дальнейшим развитием результатов А.Н.Колмогорова и Н.Винера [4.4], [4.5] по оптимальной фильтрации.

4.2.2 Оптимальный наблюдатель

Утверждение. Матрица $K(t)$ уравнения наблюдателя (4.2.6), при которой (4.2.7) достигает минимального значения, определяется выражением

$$K(t) = P_e(t)D'(t)R^{(2)-1}(t), \quad (4.2.8)$$

где $P_e(t)$ – матрица размеров $n \times n$, являющаяся решением уравнения Риккати

$$P_e(t) = A(t)P_e(t) + P_e(t)A'(t) - P_e(t)D'(t)R^{(2)-1}(t)P_e(t) + \Psi(t)R^{(1)}\Psi'(t), \quad t \geq t_0 \quad (4.2.9)$$

с начальным условием

$$P_e(t_0) = R^{(0)}. \quad (4.2.10)$$

Начальное условие для наблюдателя (4.2.6) должно быть выбрано в виде

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}^{(0)}. \quad (4.2.11)$$

Доказательство этого утверждения приведено в Доказательстве 3.

Наблюдатель (4.2.6), у которого матрица $K(t)$ и начальные условия определяются соотношениями (4.2.8) ... (4.2.11), часто называют *фильтром Калмана - Бьюси* по имени авторов этих соотношений [4.6].

Нетрудно заметить сходство в решении задач оптимального управления (АКОР) и оптимальной фильтрации. Действительно, сравнивая выражения (3.1.47), (3.1.48), (3.1.46), (4.2.8), (4.2.9), заключаем, что если положить $K(t) = -C(t)$, $D'(t) = B(t)$, $P_e(t) = P(t)$, $R^{(2)} = Q^{(1)}$, $A'(t) = A(t)$,

$$\Psi(t) = R^{(1)}(t)\Psi'(t) = Q(t), \quad (4.2.12)$$

то эти выражения совпадают с точностью до знака производной и краевых условий. (В первом случае эти условия заданы в конечный момент времени t_1 , а в случае оптимального наблюдения – в начальный момент времени t_0). Это сходство является выражением двойственности (дуальности) задач оптимального управления и наблюдения.

Еще раз отметим, что матрица коэффициентов усиления оптимального наблюдателя строится на основе решения уравнения Риккати (4.2.9) в "прямом" времени, тогда как в задаче оптимального управления это уравнение решается в "обратном" времени.

В стационарном случае уравнения (4.2.1), (4.2.2) принимают вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \Psi\mathbf{f}; \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x} + \chi, \quad (4.2.13)$$

где случайные процессы $\mathbf{f}(t)$, $\chi(t)$ типа "белый шум" характеризуются постоянными ковариационными матрицами $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$.

Матрица K оптимального наблюдателя

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + K[\mathbf{y} - D\hat{\mathbf{x}}] + B\mathbf{u} \quad (4.2.14)$$

определяется как

$$K = P_e D' R^{(2)^{-1}}, \quad (4.2.15)$$

где P_e – матрица чисел (размеров $n \times n$) есть решение алгебраического уравнения

$$AP_e + P_e A' - P_e D' R^{(2)^{-1}} D P_e + \Psi R^{(1)} \Psi' = 0, \quad (4.2.16)$$

которое находится как установившееся решение дифференциального уравнения (4.2.9) (в котором $A(t) = A$, $D(t) = D$, $R^{(1)}(t) = R^{(1)}$, $R^{(2)}(t) = R^{(2)}$ при $t \rightarrow \infty$). Такой наблюдатель является оптимальным в смысле функционала

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} M \{ \mathbf{e}' \Lambda \mathbf{e}(t) \}. \quad (4.2.17)$$

Отметим, что, как и в нестационарном случае, матрица K не зависит от выбора матрицы Λ функционала оптимизации.

Пример. Построим оптимальный наблюдатель для объекта (??), (??), возбужденного случайными внешними возмущениями, при неточных измерениях. Уравнения (??), (??) примут в этом случае вид

$$\dot{x}_1 = x_2 + b_{11}u + \psi_{11}f; \quad \dot{x}_2 = b_{21}u + \psi_{21}f; \quad (4.2.18)$$

$$y = x_1 + \chi, \quad (4.2.19)$$

где $f(t)$, $\chi(t)$ – случайные процессы типа "белый шум" с интенсивностями $r_{11}^{(1)} > 0$, $r_{11}^{(2)} > 0$ соответственно.

Наблюдатель, оптимальный в смысле функционала

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} M \{ e_1^2(t) + e_2^2(t) \} \quad (4.2.20)$$

($e_1 = x_1 - \hat{x}_1$, $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$ описывается в соответствии с (4.2.14) уравнениями

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + k_{11}(y - \hat{x}_1) + b_{11}u, \quad \dot{\hat{x}}_2 = +k_{21}(y - \hat{x}_1) + b_{21}u, \quad (4.2.21)$$

в которых неизвестные коэффициенты k_{11} , k_{21} находятся из соотношений

$$\begin{vmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{e11} & p_{e12} \\ p_{e12} & p_{e22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (4.2.22)$$

где p_{e11} , p_{e12} , p_{e22} являются решением матричного уравнения вида (4.2.16)

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} p_{e11} & p_{e12} \\ p_{e12} & p_{e22} \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} p_{e11} & p_{e12} \\ p_{e12} & p_{e22} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\| - \\
& - \left\| \begin{pmatrix} p_{e11} & p_{e12} \\ p_{e12} & p_{e22} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} p_{e11} & p_{e12} \\ p_{e12} & p_{e22} \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{21} \end{pmatrix} \right\| \left\| r_{11}^{(1)} \right\| \left\| \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{21} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|.
\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

В развернутой форме это уравнение запишется как

$$2p_{e12} - p_{e11}^2 + \psi_{11}^2 r_{11}^{(1)} = 0;$$

$$p_{e22} - p_{e11}p_{e12} + \psi_{11}\psi_{21}r_{11}^{(1)} = 0; \quad -p_{e12}^2 + \psi_{21}^2 r_{11}^{(1)} = 0.$$

Из последнего уравнения получаем

$$p_{e12} = \sqrt{\psi_{21}^2 r_{11}^{(1)}}. \tag{4.2.24}$$

Подставляя это выражение в первое из уравнений, получим

$$p_{e11} = \sqrt{2\sqrt{\psi_{21}^2 r_{11}^{(1)}} + \psi_{11}^2 r_{11}^{(1)}}; \tag{4.2.25}$$

подставляя во второе уравнение, заключаем, что

$$p_{e12} = \sqrt{2\sqrt{\psi_{21}^2 r_{11}^{(1)}} + \psi_{11}^2 r_{11}^{(1)}} \sqrt{\psi_{21}^2 r_{11}^{(1)}} - \psi_{11}\psi_{21}r_{11}^{(1)}. \tag{4.2.26}$$

Искомые параметры

$$k_{11} = p_{e11}; \quad k_{21} = p_{e12}. \tag{4.2.27}$$

4.2.3 Теорема разделения

Возвращаясь к задаче оптимального стохастического управления при неполной информации о векторе переменных состояния, отметим, что ее решение является комбинацией решения задачи оптимального стохастического управления при полной информации о векторе переменных состояния и решения задачи оптимального наблюдения. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема (теорема разделения). Оптимальное в смысле функционала (4.2.5) стохастическое управление объектом (4.2.1), (4.2.2) имеет вид

$$\mathbf{u} = C'(t)\hat{x}(t)', \quad (4.2.28)$$

где $C'(t)$ – матрица коэффициентов усиления, определяемая соотношениями (4.1.7) ... (4.1.9), которые получены для оптимального в смысле функционала (4.2.5) стохастического управления при полностью измеряемом векторе состояния объекта (4.2.1); вектор $\hat{x}(t)$ – это n -мерный вектор переменных состояния оптимального в смысле функционала (4.2.7) наблюдателя (4.2.6), матрица $K(t)$ коэффициентов усиления которого определяется выражениями (4.2.8), (4.2.9).

Доказательство теоремы приведено в Доказательстве 4.

4.2.4 Восстановление переменных состояния нелинейных объектов

Рассмотрим объект управления, описываемый нелинейными уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{f}; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}; \quad (4.2.29)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\chi}, \quad (4.2.30)$$

где $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$, $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ – заданные n - и r -мерные вектор-функции своих аргументов; $\mathbf{f}(t)$ и $\boldsymbol{\chi}(t)$ – случайные процессы типа ”белый шум” с известными ковариационными матрицами (4.1.3), (4.2.3); $\mathbf{x}^{(0)}$ – случайный вектор, характеризуемый (4.2.4).

Пусть требуется по результатам измерения вектора \mathbf{y} восстановить неизмеряемый вектор состояния объекта \mathbf{x} .

Для решения этой задачи используются линеаризованный фильтр и расширенный фильтр, которые являются эвристическим обобщением алгоритма восстановления (оптимальной фильтрации) линейных объектов.

Рассмотрим вначале *линеаризованный фильтр*. Предположим, что известна программная траектория $\mathbf{x}^*(t)$, и $\mathbf{u}^*(t)$, являющаяся решением уравнения (4.2.29) при некотором $\mathbf{x}^*(t)$ и $\mathbf{f}(t) = 0$. Если отклонения $\delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$ от заданного значения измеряемого вектора $\mathbf{y}^* = \mathbf{w}(\mathbf{x}^*, t)$ и отклонение $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ малы, то искомая оценка $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}^* + \delta\hat{\mathbf{x}}$, где $\delta\hat{\mathbf{x}}$ определяется соотношениями вида (4.2.6), (4.2.9) ... (4.2.11), которые принимают вид:

$$\delta\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A^*(t)\delta\hat{\mathbf{x}} + K(t)[\delta\mathbf{y} - D^*(t)\delta\hat{\mathbf{x}}]; \quad (4.2.31)$$

$$K(t) = P_e(t)D^{*'}(t)R^{(2)-1}(t); \quad (4.2.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_e(t) &= A^*(t)P_e(t) + P_e(t)A^{*'}(t) - P_e(t)D^{*'}(t)R^{(2)-1}D^*(t)P_e(t) + R^{(1)}; \\ P_e(t_0) &= R^{(0)}, \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

в которых элементы $a_{ij}^*(t)$, и $d_{kj}^*(t)$ ($i, j = \overline{1, n}$ $k = \overline{1, r}$) матриц $A^*(t)$ и $D^*(t)$ определяются как

$$a_{ij}^*(t) = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|_{x=x^*, u=u^*}; \quad d_{kj}^*(t) = \left. \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \right|_{x=x^*} \quad (i, j = \overline{1, n} \quad k = \overline{1, r}). \quad (4.2.34)$$

Приведем теперь уравнения *расширенного фильтра*. Будем полагать для простоты, что в уравнениях объекта $u = 0$.

Пусть в некоторый момент времени t получена оценка $\hat{\mathbf{x}}$ вектора состояний объекта (4.2.29), (4.2.30). Разложим вектор-функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ и $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ в ряд Тейлора в окрестностях этой оценки и ограничимся первыми двумя членами этого ряда:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \approx (\hat{\mathbf{x}}, t) + \hat{A}(t)(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}); \quad (4.2.35)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{w}(\hat{\mathbf{x}}, t) + \hat{D}(t)(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}), \quad (4.2.36)$$

где элементы $a_{ij}(t)$, $d_{kj}(t)$ матриц $\hat{A}(t)$ и $\hat{D}(t)$ определяются выражениями

$$\hat{a}_{ij}^*(t) = \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|_{x=\hat{x}}; \quad \hat{d}_{kj} = \left. \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \right|_{x=\hat{x}} \quad (i, j = \overline{1, n} \quad k = \overline{1, r}). \quad (4.2.37)$$

С учетом этих выражений соотношения (4.2.29), (4.2.30) примут вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{A}(t)\mathbf{x} + \hat{\boldsymbol{\rho}}^{(1)} + \mathbf{f}; \quad \mathbf{y} = \hat{D}(t)\mathbf{x} + \hat{\boldsymbol{\rho}}^{(2)} + \boldsymbol{\chi}, \quad (4.2.38)$$

где

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}^{(1)} = \varphi(\hat{\mathbf{x}}, t) - \hat{A}(t)\hat{\mathbf{x}}, \quad \hat{\boldsymbol{\rho}}^{(2)} = \mathbf{w}(\hat{\mathbf{x}}, t) - \hat{D}(t)\hat{\mathbf{x}}. \quad (4.2.39)$$

Устройство восстановления для "объекта" (4.2.38) описывается в соответствии с (4.2.6) уравнением

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{A}(t)\hat{\mathbf{x}} + K(t) [\mathbf{y} - \hat{D}(t)\hat{\mathbf{x}} - \hat{\boldsymbol{\rho}}^{(2)}] + \hat{\boldsymbol{\rho}}^{(1)}, \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}^{(0)}, \quad (4.2.40)$$

где матрица $K(t)$ определяется соотношениями (4.2.32) и (4.2.33), в которых следует заменить $D^*(t)$ на $\hat{D}(t)$, а $A^*(t)$ – на $\hat{A}(t)$. Отметим, что, учитывая (4.2.39), можно записать (4.2.40) в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \varphi(\hat{\mathbf{x}}, t) + K(t) [\mathbf{y} - \mathbf{w}(\hat{\mathbf{x}}, t)]. \quad (4.2.41)$$

4.2.5 Программное обеспечение

МАТЛАБ-функции:

1) $[kest, K, P_e] = kalman(A, B, D, E, \Psi, R^1, R^2)$ -синтез и формирование оптимального фильтра Калмана (4.2.14).

2) $[rlqg] = lqgreg(kest, C')$ -формирование LQG -регулятора (линейно-квадратического гауссова регулятора) путем соединения фильтра Калмана $kest$ и матрицы C' , вычисленной с помощью функции lqr

4.3 Оптимальные стохастические дискретные системы

4.3.1 Оптимальное управление при измеряемом векторе состояния

Рассмотрим дискретный объект управления

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + R(k)\mathbf{u}(k) + \Psi(k)\mathbf{f}(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.3.1)$$

где $\mathbf{f}(k)$ — μ -мерный вектор внешних возмущений, являющийся последовательностью $\mathbf{f}(0), \mathbf{f}(1), \mathbf{f}(2) \dots$ некоррелированных стохастических величин с нулевым средним и матрицами дисперсии $R^{(1)}(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$); $\Phi(k), \Psi(k), R(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) — заданные матрицы.

Пусть задан критерий

$$J = M \left\{ \sum_{k=1}^N \mathbf{x}'(k)Q(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}'(k-1)\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{x}'(N)P^{(1)}\mathbf{x}(N) \right\}, \quad (4.3.2)$$

где $Q(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $P^{(1)}$ — заданные положительно-определенные матрицы.

Требуется найти управление $\mathbf{u}(k)$ как функцию переменных состояния, при котором функционал (4.3.2) принимает наименьшее значение.

Искомое управление, как и в непрерывном случае, совпадает с управлением, полученным в §3.1 при отсутствии внешних воздействий. Сформулируем этот результат [3.11].

Утверждение. Оптимальное стохастическое управление дискретным объектом (4.3.1), при котором критерий (4.3.2) принимает наименьшее значение, имеет вид

$$\mathbf{u}(k) = C'(k)\mathbf{x}(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.3.3)$$

где

$$C'(k) = -\{R'(k)[Q(k+1) + P(k+1)]R(k) + E_m\}^{-1} R'(k)[Q(k+1) + P(k+1)]\Phi(k). \quad (4.3.4)$$

Последовательность матриц $P(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) является решением матричного разностного уравнения

$$P(k) = \Phi'(k)[Q(k+1) + P(k+1)][\Phi(k) + R(k)C'(k)] \quad (k = N-1, N-2, \dots, 1) \quad (4.3.5)$$

с конечным условием

$$A(N) = P^{(1)}. \quad (4.3.6)$$

Нетрудно видеть, что если подставить (4.3.4) в (4.3.5) и положить $P^{(1)} = 0$, $\Phi(k) = \Phi$, $R(k) = R$, $k = N-j$, то (4.3.3) ... (4.3.6) совпадает с (3.1.96) ... (3.1.99).

В стационарном случае, когда матрицы, входящие в уравнения объекта (4.3.1), и функционал (4.3.2) постоянны, получим при $N \rightarrow \infty$ и функционале

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} M \left\{ \sum_{k=1}^N \mathbf{x}'(k)Q(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}'(k-1)\mathbf{u}(k-1) \right\} \quad (4.3.7)$$

оптимальную систему

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + R\mathbf{u}(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad (4.3.8)$$

$$\mathbf{u}(k) = C'\mathbf{x}(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.3.9)$$

в которой матрица C определяется, как в детерминированном случае, соотношениями (3.1.98) ... (3.1.96).

4.3.2 Оптимальный дискретный наблюдатель (дискретный фильтр Калмана-Бьюси)

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + R(k)\mathbf{u}(k) + \Psi(k)\mathbf{f}(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}; \quad (4.3.10)$$

$$\mathbf{y}(k) = D(k)\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\chi}(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.3.11)$$

где $\mathbf{f}(k)$ и $\boldsymbol{\chi}(k)$, $(k = 0, 1, 2, \dots)$ – последовательности некоррелированных векторных стохастических величин с нулевым средним и заданными матрицами дисперсий $R^{(1)}(k)$ и $R^{(2)}(k)$. Здесь

$$R^{(1)}(k) = M \{ \mathbf{f}(k) \mathbf{f}'(k) \}; \quad R^{(2)}(k) = M \{ \boldsymbol{\chi}(k) \boldsymbol{\chi}'(k) \}.$$

Пусть $\mathbf{x}^{(0)}$ – случайный вектор, некоррелированный с векторами $\mathbf{f}(k)$ и $\boldsymbol{\chi}(k)$, при этом

$$M \{ \mathbf{x}^{(0)} \} = \bar{\mathbf{x}}^{(0)}, \quad M \{ [\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}^{(0)}][\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}^{(0)}]' \} = R^{(0)},$$

где $\bar{\mathbf{x}}^{(0)}$ и $R^{(0)}$ известны.

Требуется найти уравнение устройства восстановления (наблюдения, фильтрации), выходами которого является оценка $\hat{\mathbf{x}}(k)$ неизмеряемого вектора состояний $\mathbf{x}(k)$.

При этом критерий

$$J = M \{ \mathbf{e}'(k) \Lambda(k) \mathbf{e}(k) \}, \quad (4.3.12)$$

[где $\Lambda(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) – заданные положительно - определенные матрицы, $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$] должен принимать наименьшее значение.

Утверждение. Оптимальный в смысле критерия (4.3.12) наблюдатель (устройство восстановления, фильтрации) для объекта (4.3.10), (4.3.11) описывается уравнением

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \Phi(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + K(k)[\mathbf{y}(k) - D(k)\hat{\mathbf{x}}(k)] + R(k)\mathbf{u}(k); \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}^{(0)} \quad (4.3.13)$$

в котором матрицы $K(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) определяются рекуррентными соотношениями:

$$K(k) = \Phi(k)P_e(k)D'(k) \left[R^{(2)}(k) + D(k)P_e(k)D'(k) \right]^{-1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad (4.3.14)$$

$$P_e(k+1) = [\Phi(k) - K(k)D(k)] P_e \Phi'(k) + \Psi(k)R^{(1)}(k)\Psi'(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.3.15)$$

при начальном условии

$$P_e(0) = R^{(0)}. \quad (4.3.16)$$

Начальное условие для наблюдателя (4.3.13)

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}^{(0)} \quad (4.3.17)$$

Матрицы $P_e(k)$ размеров $n \times n$ являются матрицами дисперсий ошибки восстановления $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$. Для оптимального наблюдения среднее значение

$$M \{ \mathbf{e}'(k)\Lambda(k)\mathbf{e}(k) \} = \text{tr} [P_e(k)\Lambda(k)] \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.3.18)$$

Доказательство этого утверждения аналогично непрерывному случаю [3.7].

Часто применяют оптимальные наблюдатели вида (4.3.13), в которых вместо $\mathbf{y}(k)$ используется $\mathbf{y}(k+1)$. Такой наблюдатель описывается уравнениями

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \Phi(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + K(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - D(k+1)\Phi(k)\hat{\mathbf{x}}(k) - D(k+1)R(k)\mathbf{u}(k)] + R(k)\mathbf{u}(k), \quad (4.3.19)$$

где

$$K(k+1) = \Phi(k+1)P_a(k+1)D'(k+1) \left[D(k+1)P_a(k+1)D'(k+1) + R^{(2)}(k+1) \right]^{-1}; \quad (4.3.20)$$

$$P_a(k+1) = \Phi(k)[E - K(k)D(k)] P_a(k)\Phi'(k) + \Psi(k)R^{(1)}\Psi'(k). \quad (4.3.21)$$

В стационарном случае уравнения объекта (4.3.10), (4.3.11) принимают вид

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + R \mathbf{u}(k) + \Psi \mathbf{f}(k); \quad \mathbf{y}(k) = D \mathbf{x}(k) + \chi(k) \quad (4.3.22)$$

и оптимальный наблюдатель описывается уравнениями

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \Phi \hat{\mathbf{x}}(k) + K [\mathbf{y}(k) - D \hat{\mathbf{x}}(k)] + R \mathbf{u}(k), \quad (4.3.23)$$

где

$$K = \Phi P_e D' [R^{(2)} - D P_e^0 D']^{-1}, \quad (4.3.24)$$

а P_e^0 – матрица чисел (размеров $n \times m$), являющаяся решением уравнения

$$P_e^0 = [\Phi - K D] P_e^* \Phi' + \Psi R^{(1)} \Psi'. \quad (4.3.25)$$

Матрица P_e^0 находится как установившееся решение уравнения

$$\begin{aligned} P_e(k+1) &= \Phi P_e(k) \Phi' - \Phi P_e(k) D' [R^{(2)} + D P_e(k) D']^{-1} D P_e(k) \Phi' + \Psi R^{(1)}(k) \Psi' \\ P_e(0) &= R^0 \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

при $k \rightarrow \infty$. Иными словами.

$$P_e^0 = \lim_{k \rightarrow \infty} P_e(k).$$

Пример . Рассмотрим гирораму, описываемую уравнениями (3.1.23):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \quad \dot{x}_3 = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u + \phi_{31}f, \quad (4.3.27)$$

с параметрами из примера 4.1.2 и $\psi_{31} = b_{31} = 10^{-3}$, где $f(t)$ – случайный гауссовский процесс типа ”белый шум” с нулевым математическим ожиданием и параметром ковариационной функции $r^{(1)} = 10^6$.

Пусть процесс измерения x_1 датчиком угла прецессии сопровождается случайной гауссовской помехой χ типа ”белый шум” с нулевым математическим ожиданием и параметром ковариационной функции $r^{(2)} = 10^4$.

Таким образом,

$$y = x_1 + \chi. \quad (4.3.28)$$

Пусть начальное состояние гирорамы

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0. \quad (4.3.29)$$

Требуется построить наблюдатель (фильтр) переменных x_1, x_2, x_3 , восстанавливающий значения этих переменных в моменты времени $T, 2T, 3T, \dots, kT$, при $T = 0,01$. При этом сумма дисперсий ошибок восстановления

$$J = M \left\{ [x_1(kT) - \hat{x}_1(kT)]^2 + [x_2(kT) - \hat{x}_2(kT)]^2 + [x_3(kT) - \hat{x}_3(kT)]^2 \right\} \quad (4.3.30)$$

должна быть наименьшей для каждого момента времени kT .

Переходя к решению этой задачи, запишем дискретную модель гироскопа

$$\left. \begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + \varphi_{12}x_2(k) + \varphi_{13}x_3(k) + r_1(u(k) + f(k)); \\ x_2(k+1) &= \varphi_{22}x_2(k) + \varphi_{23}x_3(k) + r_2(u(k) + f(k)); \\ x_3(k+1) &= \varphi_{32}x_2(k) + \varphi_{33}x_3(k) + r_3(u(k) + f(k)); \end{aligned} \right\} \quad (4.3.31)$$

$$y(k) = x_1(k) + \chi(k), \quad (4.3.32)$$

значения параметров $(\varphi_{ij}, r_i, (i, j = 1, 3))$ которой определены (3.1.122).

В соответствии с (4.3.23). уравнения оптимального наблюдения имеют вид:

$$\hat{x}_1(k+1) = \hat{x}_1(k) + \varphi_{12}\hat{x}_2(k) + \varphi_{13}\hat{x}_3(k) + r_1u(k) + k_{11}[y(k) - \hat{x}_1(k)]; \quad (4.3.33)$$

$$\hat{x}_2(k+1) = \varphi_{22}\hat{x}_2(k) + \varphi_{23}\hat{x}_3(k) + r_2u(k) + k_{21}[y(k) - \hat{x}_1(k)]; \quad (4.3.34)$$

$$\hat{x}_3(k+1) = \varphi_{32}\hat{x}_2(k) + \varphi_{33}\hat{x}_3(k) + r_3u(k) + k_{31}[y(k) - \hat{x}_1(k)]. \quad (4.3.35)$$

Неизвестные параметры k_{11}, k_{21}, k_{31} в этих уравнениях определяются на основе (4.3.24):

$$\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ 0 & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ 0 & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{e11}^0 \\ p_{e12}^0 \\ p_{e13}^0 \end{bmatrix} \cdot [r^{(2)} - p_{e11}^0]^{-1}. \quad (4.3.36)$$

Для нахождения чисел $p_{e11}^0, p_{e12}^0, p_{e13}^0$ будем на основе (4.3.26) вычислять последовательно $P_e(1)$ (при этом $P_e(0) = 0$ в силу (4.3.29)), $P_e(2), \dots$ После некоторого числа шагов, когда $P_e(k+1) \approx P_e(k)$, примем

$$P_e(k) = P_e^0 \quad (4.3.37)$$

4.3.3 Теорема разделения

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями (4.3.10), (4.3.11). Пусть требуется найти управление, зависящее от измеряемого вектора \mathbf{u} выходов объекта, такое, чтобы на движениях объекта минимизировался функционал

$$J = M \left\{ \sum_{k=1}^N \mathbf{x}'(k)Q(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}'(k-1)\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{x}'(N)P^{(1)}\mathbf{x}(N) \right\}, \quad (4.3.38)$$

где $Q(k)$ и $P^{(1)}$ – заданные положительно-определенные матрицы.

Как и в непрерывном случае, решение этой задачи удовлетворяет принципу разделения.

Утверждение. (принцип разделения). Оптимальное в смысле функционала (4.3.38) стохастическое управление объектом (4.3.10), (4.3.11) имеет вид

$$\mathbf{u}(k) = C'(k)\hat{x}(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.3.39)$$

где $C'(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) – последовательность матриц коэффициентов, определяемая соотношениями (4.3.4) ... (4.3.6), которые получены для оптимального в смысле функционала (4.3.38) стохастического управления при полностью измеряемом векторе состояния объекта (4.3.10); вектор $\hat{x}(k)$ – n -мерный вектор переменных состояния оптимального в смысле функционала (4.3.12) наблюдателя (4.3.13), матрицы $K(k)$ коэффициентов которого определяются из соотношений (4.3.14), (4.3.15). Доказательство этого утверждения аналогично непрерывному случаю.

В стационарном случае управление объектом (4.3.22) имеет вид

$$\mathbf{u}(k) = C'\hat{x}(k) \quad (4.3.40)$$

где матрица C' определяется, как и в детерминированном случае, соотношениями (3.2.4) ... (3.2.8), а вектор $\hat{x}(k)$ является выходом (4.3.23), в котором матрица K находится из соотношений (4.3.24) ... (4.3.26).

Пример. Построим оптимальный цифровой регулятор гирорамы, описываемой уравнениями (4.3.31), (4.3.32). Оптимальность цифрового регулятора понимается в том смысле, чтобы на движениях гирорамы, замкнутой этим регулятором, минимизировался функционал

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} M \left\{ \sum_{k=1}^N 10^{10} x_1^2(k) + u^2(k-1) \right\}. \quad (4.3.41)$$

В соответствии с принципом разделения искомый оптимальный регулятор описывается уравнениями (3.1.120), (4.3.33) ... (4.3.35).

Параметры этих уравнений были определены ранее: параметры управления (3.1.120) были получены в примере 4.1.3 в результате решения задачи оптимизации при отсутствии внешних воздействий и измеряемых x_1 , x_2 , x_3 , а параметры наблюдателя (4.3.33) ... (4.3.35) были определены в предыдущем подпараграфе в результате решения задачи восстановления неизмеряемых переменных x_2 и x_3 .

Приведенные в этой главе результаты были вначале получены при целом ряде ограничений: 1) внешние воздействия и помехи являются гауссовскими случайными процессами типа "белый шум"; 2) внешние воздействия и помехи взаимно независимы (некоррелированы); 3) матрицы $R^{(1)}(t)$ и $R^{(2)}(t)$ – невырождены (положительно-определенны) и т. д.

К настоящему времени многие из этих ограничений сняты [?], [?]. Так, разработаны алгоритмы оптимального стохастического управления, когда векторы \mathbf{f} и \mathbf{x} коррелированы, а матрица $R^{(2)}(t)$ вырождена.

Когда внешние воздействия и помехи являются не "белыми шумами", а гауссовскими случайными процессами с корреляционными матрицами, не содержащими дельта-функций (цветные шумы), то такие процессы моделируют как результат прохождения случайного процесса типа "белый шум" через линейную динамическую систему. В частности, для непрерывного случая это означает, что

$$\mathbf{f}(t) = L^{(1)}(t)\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{f}}(t); \quad \mathbf{x}(t) = L^{(2)}(t)\mathbf{z} + \tilde{\mathbf{x}}(t); \quad (4.3.42)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{A}(t)\mathbf{z} + \xi(t), \quad (4.3.43)$$

где $\tilde{\mathbf{f}}(t)$, $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, $\xi(t)$ – гауссовские случайные процессы типа "белый шум"; матрицы $L^{(1)}(t)$, $L^{(2)}(t)$, $\tilde{A}(t)$ определяются по заданным корреляционным матрицам процессов $\mathbf{f}(t)$ и $\mathbf{x}(t)$.

Уравнения (4.3.42), (4.3.43) называются *уравнениями формирующего фильтра*.

Объединяя уравнения (4.2.1), (4.2.2) с уравнениями формирующего фильтра, получим систему

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{cc} A(t) & \Psi(t)L^{(1)}(t) \\ 0 & \tilde{A}(t) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} B(t) \\ 0 \end{array} \right\| \mathbf{u} + \left\| \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{f}}(t) \\ \xi(t) \end{array} \right\|; \\ \mathbf{y} &= \left\| \begin{array}{cc} D(t) & L^{(2)}(t) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{array} \right\| + \tilde{\mathbf{x}}(t), \end{aligned}$$

возбуждаемую случайными процессами типа "белый шум".

4.3.4 Программное обеспечение

МАТЛАБ-функции:

1) $[kest, K, P_e, Z, \bar{Z}] = kalman(Phi, R, D, E, \Psi, R^1, R^2)$ -синтез и формирование оптимального дискретного фильтра Калмана (4.3.23), где Z и \bar{Z} – ковариационные матрицы ошибок оценивания.

2) $[rlqg] = lqgreg(kest, C')$ -формирование LQG -регулятора (линейно-квадратического гауссова регулятора) путем соединения дискретный фильтра Калмана и матрицы C' , вычисляемой с помощью функции $dlqr$.

Глава 5 H_∞ субоптимальное управление

Задачи синтеза грубого либо точного управления многомерными объектами были формализованы Дж. Зеймсом [5.1] с использованием H_∞ нормы передаточной матрицы системы.

Для одномерных систем H_∞ норма-это максимум модуля частотной передаточной функции при изменении частоты от нуля до бесконечности. Например, показатель колебательности-это H_∞ норма передаточной функции, связывающей регулирующую переменную с задающим воздействием.

Использование H_∞ нормы позволило применить [5.2], [5.3] для построения H_∞ оптимального управления, обеспечивающего минимум этой нормы, известные методы теории функций комплексного переменного (теорема Нехари, интерполяция Неванлины-Пика). Позже был предложен [5.4], [5.5] метод построения H_∞ -субоптимального управления, называемый 2-Риккати подходом, который развивает изложенное в предыдущей главе на случай, когда внешние возмущения и помехи являются неизвестными исчезающими функциями с неизвестными статистическими характеристиками. Этот подход описывается ниже.

В разделе 5.1 вводится понятие H_∞ нормы и формулируется задача H_∞ оптимального управления, процедура решения которой приводится в разделе 5.2. Раздел 5.3 посвящен применению этой процедуры для построения точного управления объектами более общего, по сравнению с объектами раздела 3.3, вида.

5.1 Критерий оптимизации

5.1.1 Частотная передаточная матрица системы

Рассмотрим систему стабилизации, описываемую уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \Psi\mathbf{f}, \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad \boldsymbol{\theta} = N\mathbf{x}, \quad (5.1.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p\mathbf{x}_p + B_p\mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = D_p\mathbf{x}_p + F_p\mathbf{y}. \quad (5.1.2)$$

Пусть эта система асимптотически устойчива при $f = 0$ и $\mathbf{a} = 0$.

Построим матрицу $T_{\theta f}(s)$, связывающую вектор регулируемых переменных $\boldsymbol{\theta}(t)$ с вектором возмущений $\bar{\mathbf{f}}(t) = [\mathbf{f}^T(t), \mathbf{a}^T(t)]^T$, составленным из внешних воздействий и помех.

Уравнения объекта (5.1.1) можно записать как

$$\boldsymbol{\theta}(s) = P_{11}(s)\bar{\mathbf{f}} + P_{12}(s)\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = P_{21}(s)\bar{\mathbf{f}} + P_{22}(s)\mathbf{u}, \quad (5.1.3)$$

где

$$\begin{aligned} P_{11}(s) &= N(Es - A)^{-1}\bar{\Psi}, & P_{12}(s) &= N(Es - A)^{-1}B, \\ P_{21}(s) &= [D(Es - A)^{-1}\Psi, E_r], & P_{22}(s) &= D(Es - A)^{-1}B, \quad \bar{\Psi} = [\Psi, O_{n \times \mathbf{a}}] \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

(квадратные скобки здесь означают объединение матриц: Ψ и нулевой матрицы размеров $n \times \mathbf{a}$ и матрицы $D(Es - A)^{-1}\Psi$ с единичной матрицей размеров $r \times r$).

Уравнение регулятора (5.1.2) запишем в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(s)\mathbf{y} \quad (5.1.5)$$

где $K(s) = D_p (Es - A_p)^{-1} B_p + F_p$.

Подставим в (5.1.5) выражение (5.1.3) для измеряемого вектора и получим $\mathbf{u} = K(s)P_{21}(s)\bar{\mathbf{f}} + K(s)P_{22}(s)\mathbf{u}$ или

$$\mathbf{u} = T_{u\bar{\mathbf{f}}}(s)\bar{\mathbf{f}}, \quad (5.1.6)$$

где

$$T_{u\bar{\mathbf{f}}}(s) = [E - K(s)P_{22}(s)]^{-1} K(s)P_{21}(s) \quad (5.1.7)$$

Используя (5.1.6) запишем выражение (5.1.3) для регулируемого вектора как

$$\boldsymbol{\theta}(s) = T_{\theta\bar{\mathbf{f}}}(s)\bar{\mathbf{f}},$$

где искомая матрица $T_{\theta\bar{\mathbf{f}}}(s)$ имеет вид

$$T_{\theta\bar{\mathbf{f}}}(s) = P_{11}(s) + P_{12} [E - K(s)P_{22}(s)]^{-1} K(s)P_{21}(s) \quad (5.1.8)$$

Пусть $s = j\omega$, тогда $T_{\theta\bar{\mathbf{f}}}(j\omega)$ – частотная передаточная матрица системы (5.1.1), (5.1.2)

Для выяснения физического смысла этой передаточной матрицы рассмотрим реакцию системы (5.1.1), (5.1.2) на гармоническое возмущение

$$\bar{\mathbf{f}}(t) = \bar{\mathbf{f}}^s \sin \omega^f t, \quad (5.1.9)$$

где $\bar{\mathbf{f}}^s$ – заданный $\bar{\mu}$ -мерный вектор чисел ($\bar{\mu} = \mu + r$), ω^f – частота возмущения.

В установившемся режиме ($t \rightarrow \infty$) регулируемые переменные имеют вид

$$\theta_i(t) = a_i(\omega^f) \sin(\omega^f t + \varphi_i) \quad (i = \overline{1, m}). \quad (5.1.10)$$

Найдем связь амплитуд $a_i(\omega^f)$ ($i = \overline{1, m}$) вынужденных колебаний с элементами матрицы $T_{\theta\bar{\mathbf{f}}}(j\omega^f)$.

Учитывая, что $\sin \omega^f t = \frac{e^{j\omega^f t} - e^{-j\omega^f t}}{2j}$, обозначим реакции рассматриваемой системы на $e^{j\omega^f t}$ и $e^{-j\omega^f t}$ как

$$\boldsymbol{\theta}^+ = T_{\theta\bar{\mathbf{f}}}(j\omega^f)\bar{\mathbf{f}}^s e^{j\omega^f t}, \quad \boldsymbol{\theta}^- = T_{\theta\bar{\mathbf{f}}}(-j\omega^f)\bar{\mathbf{f}}^s e^{-j\omega^f t}. \quad (5.1.11)$$

Нетрудно показать, что $\boldsymbol{\theta}(t) = \frac{\boldsymbol{\theta}^+ - \boldsymbol{\theta}^-}{2j}$.

Вводя вектор $\mathbf{q}(\omega^f) + j\mathbf{p}(\omega^f) = \mathbf{T}_{\theta\bar{\mathbf{f}}}(j\omega^f)\bar{\mathbf{f}}^s$ запишем

$$\boldsymbol{\theta}^+ = [\bar{q}(\omega^f) + j\bar{p}(\omega^f)] e^{j\omega^f t}, \quad \boldsymbol{\theta}^- = [\bar{q}(\omega^f) - j\bar{p}(\omega^f)] e^{-j\omega^f t}. \quad (5.1.12)$$

Используя эти выражения, получим после несложных преобразований

$$\theta_i(t) = \sqrt{q_i^2(\omega^t) + \rho_i^2(\omega^t)} \sin(\omega^f t + \varphi_i) \quad (i = \overline{1, m}).$$

и таким образом, амплитуды вынужденных колебаний (5.1.10) связаны с элементами частотной передаточной матрицы как

$$a_i(\omega^f) = \sqrt{q_i^2(\omega^f) + \rho_i^2(\omega^f)} \quad (i = \overline{1, m}). \quad (5.1.13)$$

Заметим также, что из (5.1.12) и (5.1.13) следует

$$a_i^2(\omega^f) = \theta_i^+ \theta_i^- \quad (i = \overline{1, m}). \quad (5.1.14)$$

5.1.2 Понятие H_∞ -нормы частотной передаточной матрицы

Вначале рассмотрим заданную матрицу чисел T размеров $m \times \bar{\mu}$. Если эта матрица квадратная ($\bar{\mu} = m$), то ее собственные числа $\lambda_i[T]$ ($i = \overline{1, m}$) находятся как корни полинома $d(s) = \det(Es - T)$. Если ($\bar{\mu} \neq m$) (далее для простоты ($m \geq \bar{\mu}$)), то такой полином построить нельзя, и поэтому находят сингулярные числа $\sigma_i[T]$ ($i = \overline{1, \bar{\mu}}$), в общем случае комплексной матрицы, определяемые как

$$\sigma_i[T] = \sqrt{\lambda_i[T^*T]} \quad (i = \overline{1, \bar{\mu}}). \quad (5.1.15)$$

где T^* – комплексно-сопряженная с T и транспонированная матрица. (Если $T = T_1 + jT_2$, то $T^* = [T_1 - jT_2]^T = T_1^T - jT_2^T$).

Пусть матрица T является функцией $j\omega$: $T(j\omega) = T_1(\omega) + jT_2(\omega)$, тогда сингулярные числа зависят от ω : $\sigma_i[T(j\omega)] = \sqrt{\lambda_i[T^T(-j\omega)T(j\omega)]}$ ($i = \overline{1, \bar{\mu}}$)

Возвращаясь к передаточной матрице системы, запишем

$$\sigma_i[T_{\theta\bar{f}}(j\omega)] = \sqrt{\lambda_i[T_{\theta\bar{f}}^T(-j\omega)T_{\theta\bar{f}}(j\omega)]} \quad (i = \overline{1, \bar{\mu}}) \quad (5.1.16)$$

Определение H_∞ нормой передаточной матрицы $T_{\theta\bar{f}}(j\omega)$, обозначаемой как $\|T_{\theta\bar{f}}(j\omega)\|_\infty$, либо более просто как $\|T_{\theta\bar{f}}\|_\infty$, называется число

$$\|T_{\theta\bar{f}}(j\omega)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} [\sigma_1[T_{\theta\bar{f}}(j\omega)], \dots, \sigma_m[T_{\theta\bar{f}}(j\omega)]] . \quad (5.1.17)$$

■

Физический смысл этого числа заключается в следующем. Пусть система имеет скалярную регулируемую переменную ($m = 1$). В этом случае $\lambda_1(T_{\theta\bar{f}}^T(-j\omega)T_{\theta\bar{f}}(j\omega)) = |T_{\theta\bar{f}}(j\omega)|^2 = a_1^2(\omega)$, где $a_1(\omega)$ – амплитуда колебаний регулируемой переменной системы, возбужденной возмущением $\bar{f}_1 = 1 \cdot \sin \omega t$, и H_∞ норма передаточной функции системы $\|T_{\theta\bar{f}}\|_\infty = \sup_{0 \leq \omega \leq \infty} |a_1(\omega)|$ является установившемся максимальным значением амплитуды колебаний при различных значениях частоты ω .

В общем случае физический смысл H_∞ нормы раскрывается следующим ее свойством.

Свойство Если система (5.1.1), (5.1.2) возбуждена гармоническим возмущением (5.1.9), то отношение суммы квадратов амплитуд выхода и суммы квадратов амплитуд входа удовлетворяет неравенству

$$\frac{\sum_{i=1}^m a_i^2(\omega^f)}{\sum_{k=1}^{\bar{\mu}} (\bar{f}_k^s)^2} \leq \|T_{\theta f}(j\omega^f)\|_\infty \quad (5.1.18)$$

для всех частот возмущения $(0 \leq \omega^f < \infty)$.

Доказательство этого свойства приведено в Доказательстве 5.

5.1.3 Вычисление H_∞ -нормы

Рассмотрим некую, асимптотически устойчивую (при $\tilde{\mathbf{f}} = 0$) систему

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\Psi}\tilde{\mathbf{f}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{N}\tilde{\mathbf{x}}. \quad (5.1.19)$$

Ее передаточная матрица

$$\tilde{T}(s) = \tilde{N}(Es - \tilde{A})^{-1}\tilde{\Psi}. \quad (5.1.20)$$

Утверждение H_∞ норма передаточной матрицы $\tilde{T}(s)$ удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{T}\|_\infty < \gamma, \quad (\gamma > 0), \quad (5.1.21)$$

если и только если гамильтонова матрица

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \gamma^{-2}\tilde{\Psi}\tilde{\Psi}^T \\ -\tilde{N}^T\tilde{N} & -\tilde{A}^T \end{bmatrix} \quad (5.1.22)$$

не имеет собственных чисел на мнимой оси: $\text{Re } \lambda_i[\Gamma] = 0 \quad (i = \overline{1, 2\tilde{n}})$. ■

Следствие Чтобы найти минимальное значение $\gamma = \gamma_{\min}$ выбираем некоторое число $\gamma > 0$ и проверяем, нет ли среди собственных чисел Γ чисто мнимых, если нет, то уменьшаем γ , вновь вычисляем собственные числа матрицы Γ и так далее до тех пор, пока при некотором γ_{\min} не приблизимся, с заданным допуском, к значению $\text{Re } \lambda_i[\Gamma] = 0 \quad (i = \overline{1, 2n})$, и тогда

$$\|T\|_\infty = \gamma_{\min}, \quad (\gamma > 0), \quad (5.1.23)$$

■

Таким образом, H_∞ норма может быть вычислена посредством итеративной процедуры вычисления γ_{\min} вместо нахождения максимумов функции $\sigma_i[T(j\omega)] \quad (i = \overline{1, n})$ для всех частот ω .

5.1.4 Постановка задачи H_∞ оптимального управления

Рассмотрим объект (5.1.1), в котором внешние возмущения и помехи являются неизмеряемыми, неизвестными сигналами с ограниченной энергией. Последнее означает, что

$$\int_0^\infty \bar{\mathbf{f}}^T(t) \bar{\mathbf{f}}(t) dt < \infty. \quad (5.1.24)$$

В этом случае говорят также, что L_2 норма функции $\bar{\mathbf{f}}(t)$ ограничена.

Введем также вектор $\mathbf{z} = [\boldsymbol{\theta}^T, \mathbf{u}^T]^T$ и тогда передаточная матрица $T_{z\bar{\mathbf{f}}}(s)$, связывающая вектора \mathbf{z} и $\bar{\mathbf{f}}$, имеет вид

$$T_{z\bar{\mathbf{f}}}(s) = [T_{\theta\bar{\mathbf{f}}}^T(s) T_{u\bar{\mathbf{f}}}^T(s)]^T \quad (5.1.25)$$

Задача Для заданного полностью управляемого и полностью наблюдаемого объекта (5.1.1) найти регулятор (5.1.2) такой, чтобы H_∞ норма передаточной матрицы $T_{z\bar{\mathbf{f}}}(j\omega)$ этой системы принимала наименьшее значение

$$\|T_{z\bar{\mathbf{f}}}\|_\infty = \min. \quad (5.1.26)$$

Отличие этой задачи от задач АКОР и стохастической оптимизации состоит прежде всего в том, что теперь $\bar{\mathbf{f}}(t)$ – неизвестный, неизмеряемый вектор. В задаче АКОР внешние возмущения отсутствуют, либо являются измеряемыми исчезающими функциями, а в стохастической оптимизации это случайные процессы с известными статистическими свойствами.

Неравенство (5.1.24) означает, что $\bar{\mathbf{f}}(t)$ – исчезающая функция ($\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{f}}(t) = 0$). Однако она неизвестна. Это обстоятельство и более содержательный критерий оптимизации (в виде H_∞ нормы передаточной матрицы системы) делают эту задачу более трудной для ее решения, чем ранее рассмотренные.

5.2 Оптимальное управление

5.2.1 Минимаксное управление

Усложним задачу АКОР неизвестным возмущением с ограниченной энергией. Уравнение объекта (3.1.1) примет в этом случае вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \Psi\mathbf{f}. \quad (5.2.1)$$

Так как $\mathbf{f}(t)$ неизвестная функция, то будем искать наихудшее возмущение в смысле функционала

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{u} - \gamma^2 \mathbf{f}^T \mathbf{f}) dt, \quad (5.2.2)$$

в котором γ – заданное число, а Q – заданная положительно - определенная матрица.

Задача минимаксного управления состоит в том, чтобы найти управление $\mathbf{u}(t)$, которое минимизирует этот функционал и возмущение $\mathbf{f}(t)$, максимизирующее его.

Искомое оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{u} = C^T \mathbf{x}, \quad C^T = -B^T P, \quad (5.2.3)$$

а наихудшее возмущение

$$f = K_f \mathbf{x}, \quad \mathbf{K}_f = \gamma^{-2} \Psi^T P, \quad (5.2.4)$$

где положительно-определенная матрица P является решением следующего уравнения Риккати

$$PA + A^T P - PBB^T P + \gamma^{-2} P \Psi \Psi^T P + Q = 0. \quad (5.2.5)$$

Вывод соотношений (5.2.3) – (5.2.5) повторяет вывод уравнений (3.1.2), (3.1.15), (3.1.16), приведенный в Доказательстве 2.

При $\gamma \rightarrow \infty$ уравнение (5.2.5) совпадает с уравнением Риккати (3.1.15) процедуры АКОР.

Принципиальное различие этих уравнений Риккати состоит в том, что не для любого числа γ существует положительно- определенная матрица P , являющаяся решением уравнения (5.2.5). Существует некоторое минимальное число $\gamma = \gamma_{\min}$, при котором $P > 0$ и при $\gamma < \gamma_{\min}$ матрица P становится знакопеременной и поэтому для существования $P > 0$ число γ должно принадлежать интервалу $\gamma_{\min} \leq \gamma \leq \infty$.

Нетрудно показать, что система (5.2.1), (5.2.3), (5.2.4) асимптотически устойчива: матрица $A_e = A + BC^T + \Psi K(s)$ – гурвицева (имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями) и поэтому наихудшее возмущение – затухающая функция с ограниченной энергией.

5.2.2 Управление, обеспечивающее ограниченную H_∞ -норму

Рассмотрим регулятор, описываемый уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A \mathbf{x}_p + B \mathbf{u} + \Psi \mathbf{f}_p + K(\mathbf{y} - D \mathbf{x}_p), \quad \mathbf{f}_p = K_f \mathbf{x}_p \quad (5.2.6)$$

$$\mathbf{u} = C^T \mathbf{x}_p, \quad (5.2.7)$$

где

$$C^T = -B^T P, \quad K = (E - \gamma^{-2} P_e P) P_e D^T, \quad K_f = \gamma^{-2} \Psi^T P. \quad (5.2.8)$$

Утверждение Если при некотором γ существуют неотрицательно - определенные матрицы P и P_e , удовлетворяющие следующим уравнениям Риккати

$$PA + A^T P - PBB^T P + \gamma^{-2} P \Psi \Psi^T P + N^T N = 0, \quad (5.2.9)$$

$$AP_e + P_e A^T - P_e D^T D P_e + \gamma^{-2} P_e N^T N P_e + \Psi \Psi^T = 0 \quad (5.2.10)$$

и выполняется условие

$$\lambda_{\max}[PP_e] < \gamma^2, \quad (5.2.11)$$

где $\lambda_{\max}[M]$ – максимально собственное число матрицы M , то H_∞ норма передаточной матрицы системы (5.1.1), (5.2.6) – (5.2.8) удовлетворяет неравенству

$$\|T_{z\bar{f}}\|_\infty < \gamma. \quad (5.2.12)$$

Доказательство утверждения приведено в Доказательстве 6. ■

При $\gamma \rightarrow \infty$ уравнения Риккати (5.2.9) и (5.2.10) совпадают с уравнениями (3.1.15) процедуры АКОР и (4.2.16) фильтра Калмана (если положить в последнем $R^{(2)} = E$, $R^{(1)} = E$), а уравнения (5.2.6), (5.2.7) регулятора совпадают с уравнениями (4.2.28), (4.2.6) оптимального стохастического управления.

Если вектор состояния \mathbf{x} объекта (5.1.1) измеряется точно, то регулятор описывается как

$$\mathbf{u} = C^T \mathbf{x}, \quad C^T = -B^T P, \quad (5.2.13)$$

где матрица $P \geq 0$ удовлетворяет уравнению (5.2.9), которые совпадают с уравнениями минимаксного управления (5.2.3), (5.2.5).

Запишем уравнения регулятора (5.2.6) – (5.2.8) в форме уравнения (5.1.2). Исключая из (5.2.6) переменные \mathbf{u} и \mathbf{f}_p , описываемые уравнениями (5.2.6), (5.2.8), получим матрицы

$$A_p = A - BB^T P + \gamma^{-2} \Psi \Psi^T P - KD, \quad (5.2.14)$$

$$B_p = K, \quad D_p = B^T P, \quad F_p = 0. \quad (5.2.15)$$

Пример Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2 + b_{11}u_1 + \psi_{11}f_1, \quad \dot{x}_2 = b_{21}u_1 + \psi_{21}f_1, \quad y_1 = x_1 + \varkappa_1, \quad \theta_1 = x_1, \quad (5.2.16)$$

$$\dot{x}_{p1} = a_{p11}x_1 + a_{p12}x_2 + b_{p11}y_1, \quad \dot{x}_{p2} = a_{p21}x_1 + a_{p22}x_2 + b_{p21}y_1, \quad (5.2.17)$$

$$u_1 = a_{p11}x_{p1} + a_{p12}x_{p2} + f_p y_1. \quad (5.2.18)$$

Передаточная матрица этой системы, состоящая из объекта (5.2.16) и регулятора (5.2.17), (5.2.18) $T_{z\bar{f}}(j\omega)$, связывающая вектор $z = [\theta_1, u_1]$ с вектором возмущения $\bar{f} = [f_1, \varkappa_1]$ является матрицей размеров 2×2 .

Задача состоит в том, чтобы для объекта (5.2.16) с известными коэффициентами найти коэффициенты регулятора (5.2.17), (5.2.18) такие, чтобы выполнялось неравенство

$$\|T_{z\bar{f}}\|_{\infty} < \gamma. \quad (5.2.19)$$

В соответствии с (5.2.6) – (5.2.8) решение этой задачи описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k_{f11} & k_{f12} \end{vmatrix} &= -\gamma^{-2} \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{21} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{vmatrix} &= \left[\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \gamma^{-2} \begin{vmatrix} p_{e11} & p_{e12} \\ p_{e12} & p_{e22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} \right] \begin{vmatrix} p_{e11} & p_{e12} \\ p_{e12} & p_{e22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

в котором числа p_{ij} , p_{eij} ($ij = 1, 2$) являются решениями уравнения Риккати вида (5.2.9), (5.2.10).

Искомые коэффициенты находятся в соответствии с (5.2.13) как

$$A_p = \left[\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11}c_{11} & b_{11}c_{12} \\ b_{21}c_{11} & b_{21}c_{12} \end{vmatrix} - \gamma^{-2} \begin{vmatrix} \psi_{11}k_{f11} & \psi_{11}k_{f12} \\ \psi_{21}k_{f11} & \psi_{21}k_{f12} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} k_{11} & \theta \\ k_{12} & \theta \end{vmatrix} \right]$$

$$a_{p11} = -b_{11}c_{11} - \gamma^{-2}\psi_{11}k_{f11} - k_{11}; \quad a_{p12} = 1 - b_{11}c_{12} - \gamma^{-2}\psi_{11}k_{f12};$$

$$a_{p21} = -b_{21}c_{11} - \gamma^{-2}\psi_{21}k_{f11} - k_{11}; \quad a_{p22} = -b_{21}c_{12} - \gamma^{-2}\psi_{21}k_{f12};$$

$$b_{p11} = k_{11}; \quad b_{p21} = k_{21}; \quad d_{p11} = c_{21}; \quad d_{p12} = c_{12}; \quad f_{p1} = 0.$$

5.2.3 Процедура построения оптимального управления

Утверждение 5.2.2 дает возможность построить оптимальное управление, решающее задачу 6.1.4 путем нахождения наименьших значений γ на основе следующего алгоритма.

Алгоритм (вычисления γ_{\min}) состоит из следующих операций

Операция 1. Задаться некоторым числом $\gamma = \gamma^{(0)}$.

Операция 2. Решить уравнение Риккати (5.2.9) и проверить неотрицательность матрицы P . Если $P \geq 0$, то переходим к следующей операции, в противном случае возвращаемся к операции 1 и увеличиваем γ .

Операция 3. Решаем уравнение Риккати (5.2.10) при $\gamma = \gamma^{(0)}$. Если $P_e \geq 0$, то переходим к следующей операции, в противном случае возвращаемся к операции 1 и полагаем $\gamma > \gamma^{(0)}$.

Операция 4. Проверяем выполнение условия (5.2.11). Если оно выполняется, то возвращаемся к операции 1 и уменьшаем γ ($\gamma < \gamma^{(0)}$). В противном случае возвращаемся к операции 2 и увеличиваем γ ($\gamma > \gamma^{(0)}$).

Решение уравнения Риккати в операциях 2 и 3 осуществляется на основе метода диагонализации. Для этого в соответствии с операциями п.3.1.4, п.6.1.3. строятся гамильтонианы

$$\Gamma_{\text{н}} = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} \Psi \Psi^T - B B^T \\ -N^T N & -A^T \end{bmatrix} \quad (5.2.20)$$

$$\Gamma_{\text{н}} = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} N^T N - D^T D \\ \Psi \Psi^T & -A \end{bmatrix} \quad (5.2.21)$$

и вычисляются их собственные числа и т.д.

Если среди этих чисел хотя бы одно число приближается, при уменьшении γ , к мнимой оси ($\text{Re } \lambda_i(\Gamma_{\text{н}}) = 0$, либо $\text{Re } \lambda_i(\Gamma_{\text{н}}) (i = \overline{1, 2n})$), то это свидетельствует о том, что матрицы P либо P_e при уменьшении γ теряют неотрицательную определенность.

5.2.4 Программное обеспечение и практикум

ГАММА-директива: 131 (H_{∞} -субоптимальное управление).

Исходные данные:

- а) Уравнение объекта (5.1.1).
- б) Матрицы D и N уравнений измеряемых и регулируемых переменных.
- в) Положительный параметр γ .
- е) Время моделирования переходных процессов.

Результаты:

- а) Матрицы C' и K регулятора (5.2.6), (5.2.7)
- б) Графики переходных процессов по регулируемым переменным.

Используя директиву 131 выполняется практикум Пр.2.3. Одна из его целей состоит в исследовании инженерных показателей (установившихся ошибок, времени регулирования, перерегулирования) системы в зависимости от параметра γ .

5.3 Применение. Точное управление

5.3.1 Синтез регулятора

Продолжим решение задачи точного управления, рассмотренной в разделе 3.3, где приведено её решение для двух видов объектов. Теперь будем рассматривать объекты общего вида (которые удовлетворяют лишь требованиям полной управляемости и наблюдаемости), и учтем помехи измерения. В этом случае синтезируемая система описывается уравнениями (5.1.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \Psi\mathbf{f}, \quad \mathbf{y} = D\mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad \boldsymbol{\theta} = N\mathbf{x}, \quad (5.3.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p\mathbf{x}_p + B_p\mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = D_p\mathbf{x}_p + F_p\mathbf{y}, \quad (5.3.2)$$

в которых компоненты векторов возмущения и помех измерения являются полигармоническими функциями

$$f_i(t) = \sum_{k=1}^{p_1} f_{ik} \sin(\omega_k t + \varphi_{ik}), \quad k = \overline{1, \mu} \quad (5.3.3)$$

$$\mathbf{a}_j(t) = \sum_{q=1}^{p_2} \mathbf{a}_{jq} \sin(\tilde{\omega}_q t + \tilde{\varphi}_{jq}), \quad j = \overline{1, r}, \quad (5.3.4)$$

где частоты ω_k и $\tilde{\omega}_q$ и фаза φ_{ik} и $\tilde{\varphi}_{jq}$ ($k = \overline{1, P_1}$, ($q = \overline{1, P_2}$, $i = \overline{1, \mu}$, $j = \overline{1, r}$) неизвестны, а неизвестные амплитуды ограничены

$$\sum_{k=1}^{p_1} f_{ik}^2 \leq f_i^{*2} \quad (i = \overline{1, \mu}), \quad \sum_{q=1}^{p_2} \mathbf{a}_{jq}^2 \leq \mathbf{a}_j^{*2} \quad (j = \overline{1, r}), \quad (5.3.5)$$

где p_1 , p_2 , f_i^* и \mathbf{a}_j^* ($i = \overline{1, \mu}$, $j = \overline{1, r}$) – заданные числа.

Аналогично установившемуся ошибкам по регулируемым переменным, введем установившееся значение управления как

$$u_{j,\text{уст}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup |u_j(t)| \quad (j = \overline{1, m}) \quad (5.3.6)$$

Задача точного управления состоит в нахождении матрицы регулятора (5.3.2) таких, чтобы система (5.3.1), (5.3.2) удовлетворяла требованиям

$$\theta_{j,\text{уст}} \leq \theta_i^*, \quad u_{j,\text{уст}} \leq u_i^* \quad (i, j = \overline{1, m}), \quad (5.3.7)$$

где θ_i^* , u_i^* ($i, j = \overline{1, m}$)-заданные числа.

Заметим, что решение этой задачи не может существовать. В этом случае требуется найти регулятор (5.3.2) и числа $\nu_\theta > 1$ и $\nu_u > 1$ такие, что выполняются неравенства

$$\theta_{j,\text{уст}} \leq \theta_i^* \nu_\theta, \quad u_{j,\text{уст}} \leq u_i^* \nu_u \quad (i, j = \overline{1, m}) \quad (5.3.8)$$

Регулятор, решающий эту задачу имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A\mathbf{x}_p + B\mathbf{u} + \Psi\mathbf{f}_p + K(\mathbf{y} - D\mathbf{x}_p), \quad \mathbf{u} = C^T \mathbf{x}_p, \quad \mathbf{f}_p = K_f \mathbf{x}_p, \quad (5.3.9)$$

где

$$C^T = R^{-1} B^T P, \quad K_f = \gamma^{-2} L \Psi^T P, \quad K = (E - \gamma^{-2} P_e P)^{-1} P_e D^T, \quad (5.3.10)$$

а неотрицательно-определенные матрицы P_u и P_e удовлетворяют уравнениям Риккати

$$PA + A^P - PBR^{-1}BP + \gamma^{-2}P\Psi PL\Psi^T P + N^T Q_0 N = 0 \quad (5.3.11)$$

$$AP_e + P_e A^T - P_e DD^T P_e + \gamma^{-2}P_e N^T Q_0 N P_e + \Psi L \Psi^T = 0 \quad (5.3.12)$$

и неравенству

$$\lambda[PP_e] \leq \gamma^2, \quad (5.3.13)$$

где Q_0 , R и L – весовые диагонально-положительные матрицы размеров $m \times m$, $m \times m$ и $\mu \times \mu$ – соответственно. Элементы первых двух матриц определяются так, чтобы выполнялись требования к установившейся точности, а матрица L , для простоты, полагается единичной.

Уравнения Риккати (5.3.11), (5.3.12) совпадают с уравнениями (5.2.9), (5.2.10) при единичных весовых матрицах.

Утверждение Если коэффициенты весовых матриц Q_0 и R удовлетворяют условиям

$$q_{ij}^{(0)} \geq \frac{(p_1 + p_2) \left(\sum_{i=1}^{\mu} f_i^{*2} + \sum_{j=1}^r \mathfrak{a}e_j^{*2} \right)}{\Theta_i^{*2}}, \quad r_{ij}^{(0)} \geq \frac{(p_1 + p_2) \left(\sum_{i=1}^{\mu} f_i^{*2} + \sum_{j=1}^r \mathfrak{a}e_j^{*2} \right)}{u_i^{*2}} \quad (i = \overline{1, m}), \quad (5.3.14)$$

то установившееся движение в системе (5.3.1), (5.3.9), матрица регулятора которой вычисляется по формулам (5.3.10) – (5.3.12) и при выполнении неравенства (5.3.13), обладает свойством

$$\theta_{j,\text{уст}} \leq \theta_{i,\text{уст}}^* \gamma^2, \quad u_{j,\text{уст}} \leq u_{i,\text{уст}}^* \gamma^2 \quad (i, j = \overline{1, m}). \quad (5.3.15)$$

Из этого утверждения, доказанного в [5.7], следует, что числа ν_θ и ν_u в неравенствах (5.3.8) равны γ^2 и поэтому при минимальном $\gamma = \gamma^*$ эти числа $\nu_\theta = \nu_u = \gamma^{*2}$. Если $\gamma^{*2} \leq 1$, то задача решена и требования (5.3.7) к точности выполняются.

Заметим, что переходные процессы в системе (5.3.1), (5.3.9), удовлетворяющей требованиям к точности, могут быть очень медленными. Выбирая элементы матрицы L , отличные от единичных, можно [5.7] увеличить быстродействие системы.

5.3.2 Программное обеспечение и практикум

ГАММА-директива: 131 (Точное управление объектом общего вида).

Исходные данные:

а) Уравнение объекта (5.3.1)

в) Вектор границ внешних возмущений и помех.

г) Вектор границ допустимых значений установившихся ошибок.

д) Шаг изменения параметра γ .

Результаты:

а) Матрицы C' , K и K_f регулятора (5.3.9).

б) Графики переходных процессов по регулируемым переменным.

Используя директиву 131 выполняется практикум Пр.2.5. Одна из его целей состоит в исследовании инженерных показателей.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Введение

Построение управления при неопределенных параметрах объекта всегда являлось одной из центральных проблем теории автоматического управления. Если обратиться к истории, то можно заметить, что уже критерий Найквиста, установленный в 1932 г., явился методом исследования устойчивости систем, параметры которых неизвестны, а известны лишь частотные характеристики разомкнутой системы, получаемые экспериментально. В последующие годы (1939-1965) были разработаны теории систем с большими коэффициентами усиления [6.1], систем с переменной структурой [6.2], инвариантных систем [6.3], которые позволяют уменьшить влияние изменений параметров объектов и неконтролируемых внешних возмущений. Однако поскольку эти системы основаны на повышении (в явной или неявной формах) коэффициента усиления разомкнутой цепи, это требует учета "малых" постоянных времени, нелинейных факторов, запаздывания. В противном случае нарушается устойчивость системы. Таким образом, без увеличения данных об объекте не удастся существенно повысить коэффициент усиления.

Это приводит к необходимости построения регуляторов, параметры которых изменяются (адаптируются,самоприспосабливаются) так, чтобы при изменяющихся параметрах объекта точность и качество системы оставались неизменными. Системы с такими регуляторами были названы самонастраивающимися [6.4] либо адаптивными [6.5].

Ниже в этой части книги, состоящей, как и первая часть из пяти глав, приводятся методы построения адаптивных систем.

Вначале (в главе 6) вводятся основные понятия адаптивного управления и выделяются два класса систем:системы с прямым алгоритмом адаптации (функционально-адаптивные системы)и системы с идентификационным алгоритмом адаптации (параметрически-адаптивные системы). Формулируется задача синтеза адаптивных регуляторов и указываются этапы ее решения.

В седьмой главе рассматриваются системы с эталонной моделью. Приводятся методы адаптивного управления систем, желаемое движение которых задается эталонной моделью.Исторически,это первые системы адаптивного управления.В них используются прямые алгоритмы адаптации.

Первыми системами с идентификационным алгоритмом адаптации являются системы,в которых для идентификации неизвестного объекта используется метод наименьших квадратов (МНК). Этот метод излагается в разделе 8.2 главы 8, посвященной идентификации объектов управления.

В главе 9 описываются системы с идентификационным алгоритмом,использующим МНК.

В системах, рассмотренных в главах 7 и 9, предполагается, что внешние возмущения отсутствуют (в системах с эталонной моделью) либо они являются случайными процессами с известными статистическими характеристиками. Эти предположения весьма редко выполняются на практике, где внешние возмущения и помехи измерения – функции с неизвестными статистическими свойствами, что привело к развитию теории адаптивного управления с учетом неизвестных, ограниченных возмущений и помех.

Это конструктивное направление излагается в главе 12, которая посвящена двум методам управления при неизвестных возмущениях: методу рекуррентных целевых неравенств и частотному адаптивному управлению. Первый метод – прямой, второй – идентификационный, основанный на методе конечно – частотной идентификации, изложенном в разделе 8.2.

Глава 6 Введение в адаптивное управление

6.1 Понятие об адаптивных системах.

6.1.1 Понятие о неопределенных параметрах объекта. Гипотеза квазистационарности

Рассмотрим объект управления, возмущенное движение которого описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}; \quad (6.1.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (6.1.2)$$

где $\mathbf{x}(t)$ – n -мерный вектор переменных состояния объекта; $\mathbf{y}(t)$ – r -мерный вектор измеряемых переменных объекта; $\mathbf{f}(t)$ и $\boldsymbol{\chi}(t)$ – μ и r -мерные векторы внешних возмущений и помех измерения соответственно; $\boldsymbol{\alpha}(t)$ – n_α -мерный вектор неизвестных параметров объекта; φ , \mathbf{w} – известные вектор-функции своих аргументов.

Вместо уравнений (6.1.1), (6.1.2) часто используют уравнения первого приближения, имеющие вид

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} + \Psi(t)\mathbf{f}; \quad (6.1.3)$$

$$\mathbf{y} = D(t)\mathbf{x} + \boldsymbol{\chi}, \quad (6.1.4)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $\Psi(t)$, $D(t)$ – матрицы, все или отдельные элементы которых $a_{ij}(t)$, $b_{ik}(t)$, $\psi_{i\rho}(t)$, $d_{li}(t)$ ($i, j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, r}$, $\rho = \overline{1, \mu}$), являются неопределенными параметрами, из которых можно составить вектор $\boldsymbol{\alpha}' = \|\boldsymbol{\alpha}^{(1)}(t), \boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t), \boldsymbol{\alpha}^{(3)}(t), \boldsymbol{\alpha}^{(4)}(t)\|'$ где

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)}(t) = \|a_{11}(t), a_{12}(t), \dots, a_{1n}(t), a_{21}(t), a_{22}(t), \dots\|; \quad (6.1.5)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(2)}(t) = \|b_{11}(t), b_{12}(t), \dots, b_{1m}(t), b_{21}(t), b_{22}(t), \dots\|; \quad (6.1.6)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(3)}(t) = \|\phi_{11}(t), \phi_{12}(t), \dots, \phi_{1\mu}(t), \phi_{21}(t), \phi_{22}(t), \dots\|; \quad (6.1.7)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(4)}(t) = \|d_{11}(t), d_{12}(t), \dots, d_{1r}(t), d_{21}(t), d_{22}(t), \dots\|. \quad (6.1.8)$$

Природа неопределенных параметров может быть различной: а) неточное знание математической модели объекта; б) неполная информация о программном движении,

например, в случае, когда моменты перехода с одного режима работы объекта на другой неизвестны; в) разброс параметров в пределах технологических допусков; г) ”старение” элементов объекта и т.п.

Объем сведений о параметрах объекта может быть различным. Если упорядочить эти сведения по мере их возрастания, то можно различить следующие случаи.

1. Неопределенные, ограниченные по модулю параметры. В этом случае функции $\alpha_i(t)$ ($i = \overline{1, n_\alpha}$) – произвольные неизвестные функции, удовлетворяющие неравенствам

$$|\alpha_i(t)| \leq \alpha_i^*, \quad (6.1.9)$$

где α_i^* ($i = \overline{1, n_\alpha}$) – заданные числа.

2. Параметры объекта являются случайными функциями времени с известным законом распределения вероятности, но неизвестными параметрами этого закона распределения. Например, известно, что закон распределения – гауссовский, но неизвестна корреляционная матрица процесса.
3. Параметры объекта являются случайными функциями времени с известным законом распределения и известными параметрами этого закона.
4. Функции $\alpha_i(t)$ ($i = \overline{1, n_\alpha}$) заранее неизвестны, однако могут быть точно измерены в процессе работы объекта (6.1.1), (6.1.2).
5. Параметры объекта $\alpha_i(t)$ ($i = \overline{1, n_\alpha}$) – точно известные функции. Этот случай рассматривался в первой части книги.

Каждый из рассматриваемых случаев образует некоторое множество Ω_α возможных значений вектора $\alpha(t)$, определяющее класс допустимых объектов.

Обычно параметры объекта изменяются медленнее, чем переменные состояния, и поэтому интервал $[t_0, t_1]$ функционирования объекта разобьем на подинтервалы, в течение которых параметры объекта считаются постоянными. Полагая для простоты подинтервалы одинаковыми, запишем

$$\alpha_i(t) = \text{const} = \alpha_i(R\overline{T}); \quad R\overline{T} \leq t \leq (R+1)\overline{T} \quad (R = \overline{1, N}; i = \overline{1, n_\alpha}), \quad (6.1.10)$$

где $\overline{T} = \frac{t_1 - t_0}{N}$ – интервал квазистационарности параметров объекта.
Соотношение

$$t_{i \text{ пер}} \ll \overline{T} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (6.1.11)$$

($t_{i \text{ пер}}$ ($i = \overline{1, n}$) – время затухания переходных процессов по каждой из переменных состояния) выражает вместе с (6.1.10) *гипотезу квазистационарности*, в соответствии

с которой процессы, протекающие в объекте управления, разделяются на ”быстрые” (изменение переменных состояния) и ”медленные” (изменение параметров).

Таким образом, на каждом из подинтервалов объект (6.1.3), (6.1.4) описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = A^{(R)}\mathbf{x} + B^{(R)}\mathbf{u} + \Psi^{(R)}\mathbf{f}; \quad R\bar{T} \leq t \leq (R+1)\bar{T} \quad (R = \overline{1, N}); \quad (6.1.12)$$

$$\mathbf{y} = D^{(R)}\mathbf{x} + \chi; \quad R\bar{T} \leq t \leq (R+1)\bar{T} \quad (R = \overline{1, N}), \quad (6.1.13)$$

где $A^{(R)}$, $B^{(R)}$, $\Psi^{(R)}$, $D^{(R)}$ – неизвестные матрицы чисел, составляющие в соответствии с (6.1.5) ... (6.1.8) вектор α неопределенных параметров объекта (6.1.12), (6.1.13). В связи с широким использованием ЭВМ для реализации адаптивных систем управления часто используют дискретную модель объекта

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \Phi^{(R)}\mathbf{x}(kT) + R^{(R)}\mathbf{u}(kT) + \Psi^{(R)}\mathbf{f}(kT); \quad \frac{R\bar{T}}{T} \leq k \leq \frac{(R+1)\bar{T}}{T}; \quad (R = \overline{1, N}); \quad (6.1.14)$$

$$\mathbf{y} = D^{(R)}\mathbf{x}(kT) + \chi(kT); \quad \frac{R\bar{T}}{T} \leq k \leq \frac{(R+1)\bar{T}}{T} \quad (R = \overline{1, N}). \quad (6.1.15)$$

Для простоты изложения в этой части книги будут рассматриваться в основном одномерные объекты (когда y , u , f и χ – скаляры), описываемые уравнениями

$$\dot{x} = Ax + bu + \psi f; \quad y = dx + \chi \quad (6.1.16)$$

либо

$$x(k+1) = \Phi x(k) + ru(k) + \psi f(k); \quad y(k) = dx(k) + \chi(k), \quad (6.1.17)$$

в которых b , d , ψ , r – n -мерные векторы-столбцы чисел, а индекс R в обозначениях матриц и векторов параметров для сокращения обозначений опущен, однако далее подразумевается, что эти уравнения описывают объект управления только на одном из интервалов квазистационарности его параметров.

Наряду с этим уравнением часто будет использоваться при $\chi = 0$ форма ”вход-выход” описания объекта управления

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = \sum_{j=0}^{\gamma-1} k_j u^{(j)} + \sum_{\rho=0}^{\mu-1} k_{\rho}^{(1)} f^{(\rho)} \quad (6.1.18)$$

либо

$$y^{(k)} + \sum_{i=1}^n \varphi_i y(k-i) = \sum_{j=1}^{\mu-1} r_j^{(1)} u(k-j) + \sum_{\rho=1}^{\gamma-1} r_{\rho} f(k-\rho). \quad (6.1.19)$$

Параметры a_i , φ_i , $(i = \overline{1, n})$, k_j , $(j = 0, \overline{\gamma - 1})$, k_ρ ($\rho = 0, \overline{\mu - 1}$), $i^{(1)}$, r_ρ ($i = 1, \overline{\mu - 1}$; $\rho = 1, \overline{\gamma - 1}$) этих уравнений нетрудно выразить через матрицы и векторы параметров уравнений (6.1.16), (6.1.17).

6.1.2 Понятие об идентификации

Рассмотрим стационарный объект, описываемый уравнениями (6.1.16), с неизвестными параметрами. Для построения регулятора необходимо определить (идентифицировать) его параметры. Здесь можно различить два случая: во-первых, когда внешние возмущения и помехи измеряются либо известны (например, $f(t) = \chi(t) = 0$), и, во-вторых, когда о них известны лишь границы области их возможных значений либо статистические характеристики (закон распределения и его параметры).

В первом случае для простоты будем полагать, что внешние возмущения и помехи отсутствуют. Тогда движения объекта

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u; \quad y = \mathbf{d}\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)} \quad (6.1.20)$$

возбуждаются известным (измеряемым) входным сигналом $u(t)$. Анализируя сигнал $y(t)$ на выходе можно определить параметры объекта. Уточним, какие параметры при этом определяются. Дело в том, что решение задачи – определение матрицы A и векторов \mathbf{b} и \mathbf{d} -по сигналам входа $u(t)$ и выхода $y(t)$ не единственно. Действительно, рассмотрим наряду с (6.1.20) систему уравнений

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = M^{-1}AM\tilde{\mathbf{x}} + M^{-1}\mathbf{b}\tilde{u}; \quad \tilde{y} = \mathbf{d}M\tilde{\mathbf{x}}; \quad \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = M\mathbf{x}^{(0)}, \quad (6.1.21)$$

где M – произвольная, неособая ($\det M \neq 0$) матрица.

Если входное воздействие $\tilde{u}(t) = u(t)$, то выходные сигналы обеих систем совпадают $\tilde{y}(t) = y(t)$, хотя параметры матриц в них различны. В совпадении выходных сигналов нетрудно убедиться, преобразуя (6.1.21) по Лапласу и вычисляя

$$\begin{aligned} \tilde{y}(s) &= \mathbf{d}M(Es - M^{-1}AM)^{-1}M^{-1}\mathbf{b}\tilde{u} + \mathbf{d}M(Es - M^{-1}AM)^{-1}M^{-1}\mathbf{x}^{(0)} = \\ &= \mathbf{d}(Es - A)^{-1}\mathbf{b}\tilde{u} + \mathbf{d}(Es - A)^{-1}\mathbf{x}^{(0)} = y(s) \end{aligned}$$

при $\tilde{u}(s) = u(s)$.

В связи с этим возникает вопрос: а существует ли набор параметров, который единственным образом определяется на основе сигналов "вход-выход"?

Таким набором параметров для полностью управляемых и полностью наблюдаемых объектов являются параметры a_i ($i = 0, n - 1$), k_j ($j = 0, \gamma - 1$) объекта в форме (6.1.18). Поэтому далее под идентификацией параметров объекта будем подразумевать определение его параметров в форме "вход - выход".

В главе 10 описаны методы идентификации параметров объекта (6.1.18).

Если обобщить алгоритмы, приведенные в этой главе, то процесс идентификации (оценивания) можно описать разностным уравнением

$$\hat{\alpha}[(k+1)T] = \gamma(\hat{\alpha}(kT), y(kT), \dots, y((k-\mu_1)T), u(kT), \dots, u((k-\mu_2)T)) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (6.1.22)$$

где $\hat{\alpha}(kT)$ – оценка вектора параметров в момент времени kT ; $\gamma(\hat{\alpha}(kT) \dots y((k-\mu_1)T), u(kT), \dots, u((k-\mu_2)T))$ – известная вектор-функция, которая зависит от метода идентификации.

Естественно, что решения уравнения (6.1.22) должны обладать свойством

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\alpha}(kT) = \alpha^*,$$

(где $\alpha^* = \|a_0, \dots, a_{n-1}, k_0, \dots, k_{\gamma-1}\|$ процесса идентификации к истинным α^* значениям параметров объекта).

Термин ”идентификация” здесь и далее используется в узком смысле как определение параметров математической модели (6.1.16) объекта, структура которой (линейный характер дифференциального уравнения (6.1.16), его стационарность, размерность вектора переменных состояния n) известна.

В широком смысле идентификация включает в себя определение по входу и выходу объекта структуры его математической модели, определение ее параметров и оценивание (восстановление) вектора его переменных состояния.

Структура модели определяется физическими законами, которые определяют движение объекта (законы Кирхгофа, Максвелла, законы сохранения массы, энергии и импульса, законы распределения количества теплоты и энтропии). Из этих законов следуют нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, которые линеаризуются, а затем упрощаются (редуцируются) до обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих структуру модели. Эти сведения образуют априорную информацию об объекте. Параметры объекта определяются в результате измерений входа и выхода объекта. Измерения и последующее вычисление параметров составляют апостериорную информацию. Схема идентификации (в широком смысле) приведена на рис. 6.1.1.

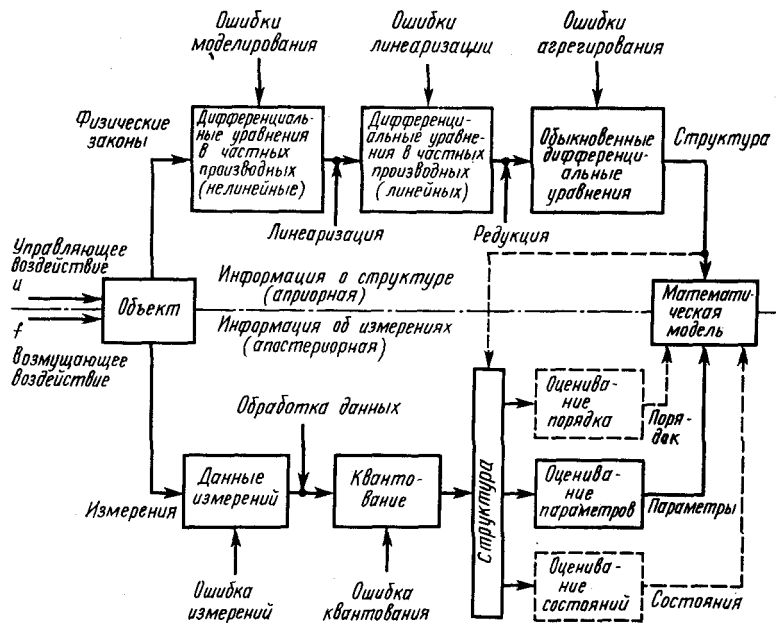


Рис. 6.1.1

6.1.3 Идентификационный алгоритм адаптивного управления. Параметрически адаптивные системы управления

Переходя к построению алгоритма управления объектом (6.1.12), (6.1.13), приведем эвристические соображения, которые порождают важный класс алгоритмов управления при неопределенных параметрах объекта.

В связи с этим рассмотрим следующие задачи, которые решает конструктор системы стабилизации этим объектом:

- 1) идентификация (определение) параметров объекта управления;
- 2) синтез алгоритма работы регулятора (синтез регулятора) при известных параметрах объекта, обеспечивающего требуемое качество работы системы;
- 3) конструирование регулятора, реализующего синтезированный алгоритм.

Поскольку параметры объекта (6.1.12), (6.1.13) изменяются, то эти три задачи должны решаться в процессе работы объекта, притом решаться автоматически, без участия человека. Другими словами, если при неизвестных, но постоянных параметрах объекта указанные задачи решались в процессе проектирования системы, то при изменяющихся во времени параметрах они должны решаться в естественных условиях работы объекта ("на борту" объекта) и в темпе работы объекта. Это означает, что алгоритм регулятора должен изменяться в процессе работы системы, приспосабливаясь (самонастраиваясь, адаптируясь) за время \bar{T} к изменяющимся параметрам объекта так, чтобы качество работы системы оставалось неизменным. Для построения такого алгоритма запишем уравнение регулятора для объекта (6.1.18) с неопределенными параметрами

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p(\boldsymbol{\alpha})y; \quad u = \mathbf{d}_p(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}_p + f_p(\boldsymbol{\alpha})y, \quad (6.1.23)$$

где $\mathbf{x}_p(t)$ – n_p -мерный вектор состояния регулятора, $A_p(\boldsymbol{\alpha})$ – матрица, $\mathbf{b}_p(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{d}_p(\boldsymbol{\alpha})$ – векторы, $f_p(\boldsymbol{\alpha})$ – скаляр, зависящие от неизвестного вектора параметров $(\boldsymbol{\alpha})$. Зависимости параметров регулятора (6.1.23) от параметров объекта (6.1.18) могут быть как аналитическими (заданными с помощью формул), так и алгоритмическими.

Последнее следует понимать в том смысле, что существует алгоритм (процедура), с помощью которого для каждого фиксированного вектора $\boldsymbol{\alpha}$ можно найти матрицу A_p вектора \mathbf{b}_p , \mathbf{d}_p и скаляр f_p . В качестве таких алгоритмов могут выступать, в частности, процедуры синтеза оптимальных регуляторов, приведенные в главах 4, 5 и 6.

Если в результате идентификации определено истинное значение $\boldsymbol{\alpha}^*$ вектора $\boldsymbol{\alpha}$, то, полагая в (6.1.23) $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^*$ получим искомый регулятор.

При таком подходе процесс управления не может быть начат, пока не закончится идентификация параметров и не будут вычислены (по формулам либо на основе процедур) матрица $A_p(\boldsymbol{\alpha}^*)$, векторы $\mathbf{b}_p(\boldsymbol{\alpha}^*)$, $\mathbf{d}_p(\boldsymbol{\alpha}^*)$ и скаляр $f_p(\boldsymbol{\alpha}^*)$ регулятора (6.1.23).

Естественно, не дожидаясь окончания процесса идентификации, использовать оценки $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, доставляемые алгоритмом (6.1.22), и тогда уравнение (6.1.23) примет вид

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p(\hat{\boldsymbol{\alpha}})\mathbf{x}_p + \mathbf{b}_p(\hat{\boldsymbol{\alpha}})y; \quad u = \mathbf{d}_p(\hat{\boldsymbol{\alpha}})\mathbf{x}_p + f_p(\hat{\boldsymbol{\alpha}})y, \quad (6.1.24)$$

Уравнения (6.1.22), (6.1.24) описывают *идентификационный алгоритм адаптивного управления*. Системы с идентификационным алгоритмом называют *параметрически адаптивными системами*.

Отметим, что уравнения (6.1.24) также можно записать в форме "вход - выход":

$$u^{(n_p)} + \sum_{i=0}^{n_p-1} a_{pi}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})u^{(i)} = \sum_{j=0}^{\gamma_p-1} k_{pj}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})y^{(j)}. \quad (6.1.25)$$

В дискретном случае уравнение принимает вид

$$u(k) + \sum_{i=0}^{n_p} \varphi_{pi}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})u(k-1) = \sum_{j=0}^{\mu_p-1} r_{pj}(\hat{\boldsymbol{\alpha}})y(k-1). \quad (6.1.26)$$

Пример. Пусть объектом управления является некоторый химико-технологический процесс, протекающий в замкнутом резервуаре-реакторе [?]. В моменты времени $0, T, 2T, \dots, kT, \dots$ в реактор поступает сырье, имеющее температуру $f(k)$ (параметр T , как и ранее, опускаем), и доза катализатора $u(k)$. Количество продукта реакции $y(k)$ зависит от концентрации промежуточного вещества $x(k)$:

$$y(k) = dx(k), \quad (6.1.27)$$

а величина $x(k+1)$ определяется значениями $x(k)$, $u(k)$, $f(k)$:

$$x(k+1) = ax(k) + bu(k) + \phi f(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.1.28)$$

Величины $y(k)$ и $f(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) доступны непосредственному измерению, а доза катализатора $u(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) является управляющим воздействием, которое влияет на ход процесса.

Коэффициенты a , b , ψ , d соотношений (6.1.27), (6.1.28) зависят от активности катализатора, скорости протекания реакции, конструкции установки и т.п.

Пусть целью управления является поддержание выходного продукта $y(k)$ на заданном уровне $g = \text{const}$. Если значения параметров a , b , ψ , d известны точно, то легко построить алгоритм работы регулятора, обеспечивающего достижение цели управления. Этот алгоритм имеет вид

$$u(k) = \frac{g - ay(k) - \phi df(k)}{db}. \quad (6.1.29)$$

Действительно, подставляя (6.1.29) в (6.1.28), получим, что

$$y(k+1) = g. \quad (6.1.30)$$

В реальных условиях многие факторы, от которых зависят параметры a , b , ψ , d недоступны непосредственному измерению либо могут изменяться во времени неизвестным образом (например, активность катализатора меняется при его отравлении, при переходе на новую партию катализатора и т.д.). Поэтому управление осуществляется в условиях неопределенности, когда законом управления (6.1.29) воспользоваться нельзя.

Переходя к построению идентификационного алгоритма адаптивного управления, обозначим

$$\alpha_1 = a, \quad \alpha_2 = b, \quad \alpha_3 = \phi, \quad \alpha_4 = d \quad (6.1.31)$$

и запишем закон управления (6.1.29) как функцию неопределенных параметров α_i ($i = \overline{1, 4}$):

$$u(k) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2\alpha_4}y(k) - \frac{\alpha_3\alpha_4}{\alpha_2\alpha_4}f(k) + \frac{1}{\alpha_2\alpha_4}g. \quad (6.1.32)$$

Для определения коэффициентов закона управления (6.1.32) идентифицируем параметры объекта (6.1.27), (6.1.28), уравнения которого можно с учетом введенных обозначений записать в виде

$$y(k+1) = \alpha_1 y(k) + \alpha_2 u(k) + \alpha_3 \alpha_4 f(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.1.33)$$

При $k = 0, 1, 2$ получим систему из трех алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} y(1) &= \alpha_1 y(0) + \alpha_2 u(0) + \alpha_3 \alpha_4 f(0); \\ y(2) &= \alpha_1 y(1) + \alpha_2 u(1) + \alpha_3 \alpha_4 f(1); \\ y(3) &= \alpha_1 y(2) + \alpha_2 u(2) + \alpha_3 \alpha_4 f(2), \end{aligned} \quad (6.1.34)$$

решая которую найдем числа α_1^* , $\alpha_2^*\alpha_4^*$, $\alpha_3^*\alpha_4^*$. Подставляя эти числа в (6.1.32), получим управление, обеспечивающее достижение цели (6.1.30).

Уравнение (6.1.32) вместе с процедурой решения алгебраических уравнений (6.1.34) образуют алгоритм идентификационного адаптивного управления.

Заметим, что столь простой алгоритм адаптивного управления обусловлен во многом доступностью для измерения $f(k)$ и отсутствием помех в измерении $y(k)$. Если $f(k)$ недоступно непосредственному измерению либо присутствуют помехи в измерении, это приводит к процессу идентификации, описываемому уравнением вида (6.1.22).

6.1.4 Прямой алгоритм адаптивного управления. Функционально-адаптивные системы

Идентификационный алгоритм (6.1.22), (6.1.23) адаптивного управления в сущности является моделью процесса проектирования, осуществляемого в темпе работы объекта, и идентификационная часть этого алгоритма вызвана скорее прототипом (в качестве которого выступает процесс проектирования), чем существом задачи. Дело в том, что алгоритм идентификации слабо связан с целью управления, хотя и служит ее достижению. В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли избежать идентификации и искать законы изменения параметров регулятора (6.1.23) исходя непосредственно (прямо) из целей управления? Другими словами, параметры регулятора (6.1.23) должны изменяться в зависимости от значения критерия качества работы системы (от функционирования системы).

Такие алгоритмы называют *прямыми алгоритмами адаптивного управления*, а системы, использующие эти алгоритмы, называются *функционально-адаптивными системами управления*. Так, для объекта (6.1.18) эти алгоритмы описываются уравнениями:

$$u^{(n_p)} + \sum_{i=0}^{n_p-1} \beta_{\mu_p+i}(t)u^{(i)} = \sum_{j=0}^{\mu_p-1} \beta_j y^{(j)}; \quad (6.1.35)$$

$$\dot{\beta}_i = \gamma(\beta_0, \dots, \beta_{\mu_p+n_p-1}, y, \dot{y}, \dots, y^{\mu_p-1}, u) \quad (i = \overline{0, \mu_p + n_p - 1}), \quad (6.1.36)$$

где β_i ($i = \overline{0, \mu_p + n_p - 1}$) – настраиваемые (подстраиваемые) параметры регулятора; γ_i ($i = \overline{0, \mu_p + n_p - 1}$) – функции, зависящие от критерия качества системы (цели управления). Уравнения (6.1.36) описывают алгоритм настройки параметров.

Дискретные прямые алгоритмы адаптивного управления описываются разностными уравнениями

$$u(k) + \sum_{i=0}^{n_p} \beta_{\mu_p+i}(k)u(k-i) = \sum_{j=0}^{\mu_p} \beta_j(k)y(k-j). \quad (6.1.37)$$

$$\beta_i(k+1) = \gamma_i(\beta_0(k), \dots, \beta_{\mu_p+n_p}(k), y(k), y(k-1), \dots, y(k-\mu_{p+1}), u(k), u(k-1), \dots, u(k-n_p)) \quad (i = \overline{0, \mu_p + n_p}). \quad (6.1.38)$$

Пример. Построим прямой алгоритм адаптивного управления химико-технологическим процессом, описанным в примере 6.1.1.

В соответствии с (6.1.29) уравнение регулятора этого процесса имеет вид

$$u(k) = \beta_0(k)y(k) + \beta_1(k)g + \beta_2(k)f(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (6.1.39)$$

где $\beta_0(k)$, $\beta_1(k)$, $\beta_2(k)$ – настраиваемые параметры (коэффициенты).

Требуется найти закон изменения этих параметров, при котором достигается цель управления (6.1.30).

Для нахождения такого закона введем критерий качества

$$J(k+1) = (y(k+1) - g)^2 \quad (6.1.40)$$

и тогда цель управления может быть интерпретирована как минимизация функции (6.1.40). Для ее минимизации применим градиентный метод, состоящий в изменении настраиваемых параметров в направлении, противоположном градиенту функции $J(k+1)$ по настраиваемым параметрам.

Выражая $J(k+1)$ через эти параметры, получим

$$J(k+1) = [ay(k) + d\phi f(k) + db(\beta_0(k)y(k) + \beta_1(k)g + \beta_2(k)f(k)) - g]^2. \quad (6.1.41)$$

Вычисляя теперь частные производные функции (6.1.41) по $\beta_0(k)$, $\beta_1(k)$, $\beta_2(k)$, приходим к алгоритму (6.1.38) настройки параметров:

$$\left. \begin{aligned} \beta_0(k+1) &= \beta_0(k) - 2a_1(k)(y(k+1) - g)db y(k); \\ \beta_1(k+1) &= \beta_1(k) - 2a_1(k)(y(k+1) - g)db g; \\ \beta_2(k+1) &= \beta_2(k) - 2a_1(k)(y(k+1) - g)db f(k), \end{aligned} \right\} \quad (6.1.42)$$

где $a_1(k) > 0$ – коэффициент пропорциональности.

При правильном выборе этого коэффициента

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(k+1) = 0. \quad (6.1.43)$$

Это означает, что прямой алгоритм (6.1.39), (6.1.42) адаптивного управления химико-технологическим процессом обеспечивает достижение цели управления (6.1.30). Правда, эта цель достигается не на первых нескольких шагах, как в идентификационном алгоритме, а при достаточно большом числе шагов управления.

При наличии помех в измерении $y(k)$ требование (6.1.30) следует ослабить и цель управления формулировать как требование выполнения неравенства

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} J(k+1) < \Delta, \quad (6.1.44)$$

где величина $\Delta > 0$ должна быть согласована с уровнем помех.

Соотношение (6.1.44) означает, что для любой траектории системы (6.1.27), (6.1.28), (6.1.39), (6.1.42) существует момент времени k^* , начиная с которого $J(k+1) < \Delta$.

В случае, когда помехи носят стохастический характер, цель управления следует задавать "в среднем":

$$\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} M \{J(k+1)\} < \Delta. \quad (6.1.45)$$

6.2 Структура адаптивных систем

6.2.1 Цели управления

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, u, f, \boldsymbol{\alpha}); \quad y = w(\mathbf{x}, u, \chi, \boldsymbol{\alpha}), \quad t > t_0, \quad (6.2.1)$$

в которых $\boldsymbol{\alpha}$ – неизвестный вектор чисел.

Требуется найти алгоритм адаптивного управления объектом (6.2.1), при котором достигается цель управления. Эта задача, которой посвящена вторая часть книги, точно не определена, пока не задана цель управления.

Для задания цели управления используются оценочные функции

$$J(t) = J(e(t)), \quad (6.2.2)$$

где $J(e) = q(e(t))$ – некоторая выпуклая функция, часто $J(e) = e^2$; $e(t)$ – ошибка (невязка), малость которой соответствует достижению цели управления. Выражение ошибки зависит от назначения системы управления. Приведем некоторые из этих выражений для непрерывных и дискретных систем.

1. СТАБИЛИЗАЦИЯ. В этом случае

$$e(t) = y(t); \quad e(k+1) = y(k+1). \quad (6.2.3)$$

2. СТАБИЛИЗАЦИЯ С ЗАДАННОЙ ДИНАМИКОЙ. Пусть требуется, чтобы выходная переменная системы $y(t)$ изменялась наперед заданным образом, который задается уравнением

$$y^{(l)} + \sum_{i=0}^{l-1} a_{ji} y^{(i)} = 0 \quad (l \leq n), \quad (6.2.4)$$

в котором числа a_{ji} ($i = 0, l-1$) заданы так, чтобы решение уравнения (6.2.4) было асимптотически устойчивым.

Тогда в непрерывном случае

$$e(t) = y^{(l)} + \sum_{i=0}^{l-1} a_{ji} y^{(i)}, \quad (6.2.5)$$

а в дискретном

$$e(k+1) = y(k+1) + \sum_{i=0}^l \varphi_{ji} y(k-i). \quad (6.2.6)$$

3. ИДЕАЛЬНОЕ СЛЕЖЕНИЕ. Если требуется отработать задающее воздействие $g(t)$, то невязку принимают в виде

$$e(t) = y(t) - g(t); \quad e(k+1) = y(k+1) - g(k). \quad (6.2.7)$$

4. СИСТЕМЫ С ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ. Системы с эталонной моделью составляют обширный класс адаптивных систем, в которых желаемое движение задается эталонной моделью, являющейся физическим устройством, описываемым уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}_m = A_m \mathbf{x}_m + \boldsymbol{\psi}_m g; \quad y_m = \mathbf{d}_m \mathbf{x}_m, \quad (6.2.8)$$

либо в общем случае нелинейным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \boldsymbol{\psi}_m(\mathbf{x}_m, g); \quad y_m = w_m(\mathbf{x}_m), \quad (6.2.9)$$

в которых \mathbf{x}_m — n_m -мерный вектор переменных состояния эталонной модели; A_m — заданная матрица чисел; $\boldsymbol{\psi}_m$, \mathbf{d}_m — заданные векторы чисел, которые определяются с использованием обычных методов синтеза. Это относится и к вектор-функции $\boldsymbol{\psi}_m$ и функции w_m . Выход $y_m(t)$ эталонной модели описывает желаемое движение (цель управления) системы при заданном (измеряемом) задающем воздействии $g(t)$. Отклонение от желаемого движения

$$e(t) = y(t) - y_m(t); \quad e(k+1) = y(k+1) - y_m(k+1). \quad (6.2.10)$$

Зависимость оценочной функции (критерия качества) (6.2.2) от ошибки $e(t)$ принимается различной в зависимости от объема информации о внешних возмущениях и помехах, действующих на объект (6.2.1).

Если упорядочить сведения о внешних возмущениях и помехах по мере возрастания информации о них, то можно различить:

- а) неопределенные, ограниченные по модулю внешние возмущения и помехи, когда $f(t)$, $\chi(t)$ суть произвольные неизвестные функции, удовлетворяющие неравенствам

$$|f(t)| \leq \tilde{f}, \quad |\chi(t)| \leq \tilde{\chi}, \quad (6.2.11)$$

где \tilde{f} , $\tilde{\chi}$ — заданные числа;

- б) случайные внешние воздействия и помехи с неизвестным законом распределения, но ограниченными математическими ожиданиями и дисперсиями:

$$|\bar{f}| \leq \bar{f}^*; \quad |\bar{\chi}| \leq \bar{\chi}^*; \quad \bar{f} = M \{f(t)\}; \quad \bar{\chi} = M \{\chi(t)\}. \quad (6.2.12)$$

$$\sigma_f^2 = M \left\{ [f(t) - \bar{f}]^2 \right\} \leq \sigma_f^{*2}; \quad \sigma_\chi^2 = M \left\{ [\chi(t) - \bar{\chi}]^2 \right\} \leq \sigma_\chi^{*2}, \quad (6.2.13)$$

где \bar{f}^* , $\bar{\chi}^*$, σ_f^* , σ_χ^* – заданные числа;

- в) внешние воздействия и помехи – случайные процессы, законы распределения которых известны, но не известны параметры этих законов распределения. Эти параметры включают во множество Ω_α и тогда оно описывает класс допустимых объектов и возмущений;
- г) внешние воздействия и помехи – случайные процессы с известными законами распределения и заданными параметрами этих законов.

Если внешние воздействия и помехи – неопределенные, ограниченные по модулю, то цель управления задается неравенством

$$q(e(t)) \leq \Delta; \quad q(e(k+1)) \leq \Delta, \quad (6.2.14)$$

где Δ – заданное положительное число, согласованное с уровнем помех и внешних воздействий.

При случайных воздействиях цели управления принимают вид

$$M \{q(e(t))\} \leq \Delta; \quad M \{q(e(k+1))\} \leq \Delta. \quad (6.2.15)$$

Естественно, что из-за недостатка информации о параметрах объекта целевые условия (6.2.14) или (6.2.15) не будут выполняться на начальном этапе функционирования объекта, поэтому требуют, чтобы цель достигалась асимптотически – при достаточно большом t (или k) или при $t \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$).

Таким образом, приходим к заданию цели в виде предельных неравенств

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} q(e(t)) \leq \Delta; \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} q(e(k+1)) \leq \Delta \quad (6.2.16)$$

при неопределенных воздействиях и неравенств

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} M \{q(e(t))\} \leq \Delta; \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} M \{q(e(k+1))\} \leq \Delta \quad (6.2.17)$$

при случайных внешних воздействиях и помехах.

Отметим, что наряду с ”локальными” критериями вида (6.2.14) иногда используют интегральные критерии с переменным верхним пределом

$$J = \int_{t_0}^t q(e) dt. \quad (6.2.18)$$

6.2.2 Структура адаптивных систем

Идентификационный и прямой алгоритмы адаптивного управления объектом (6.2.1) описываются уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \varphi_p(\mathbf{x}_p, y, g, \boldsymbol{\beta}); \quad u = w_p(\mathbf{x}_p, y, \boldsymbol{\beta}); \quad \mathbf{x}_p(t_0) = \mathbf{x}_p^{(0)}; \quad (6.2.19)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \gamma(\boldsymbol{\beta}, y, u, g), \quad \boldsymbol{\beta}(t_0) = \boldsymbol{\beta}^{(0)}, \quad (6.2.20)$$

где $\boldsymbol{\beta}(t)$ – n_β -мерный вектор настраиваемых параметров регулятора (в случае идентификационного алгоритма $\boldsymbol{\beta}(t)$ является оценкой вектора неопределенных параметров $\boldsymbol{\alpha}$); φ_p , γ_p – n_p и n_β -мерные вектор-функции своих аргументов, подлежащие, как и функции w_p , определению исходя из заданных целей управления (6.2.16) или (6.2.17).

Уравнения (6.2.19) описывают алгоритм работы регулятора, а уравнения (6.2.20) – алгоритм адаптации.

Устройство, реализующее алгоритм адаптации, называется *адаптером* [?].

Таким образом, адаптивный регулятор состоит из регулятора и адаптера. Структурная схема адаптивной системы приведена на рис. 6.2.1.

Рис. 6.2.1

Регулятор, приведенный на этом рисунке, состоит из двух частей: управляющего устройства (последовательного корректирующего контура) и управляющего устройства в цепи обратной связи (параллельного корректирующего контура). Первая часть содержит настраиваемые параметры, вторая – неизменна. Часто говорят, что объект вместе с регулятором – это *основной контур регулирования*, а изменяющаяся часть регулятора и адаптер составляют *контур адаптации (контур самонастройки)*. Если цель управления задается с помощью эталонной модели, то структурная схема принимает вид, приведенный на рис. 6.2.2.

6.2.3 Постановка задачи синтеза адаптивного регулятора и этапы ее решения

Задача синтеза адаптивного регулятора состоит в определении (по уравнениям (6.2.1) объекта, множеству Ω_α и цели (6.2.16) либо (6.2.17)) алгоритма регулирования (6.2.19) и алгоритма адаптации (6.2.20), такого, чтобы для любого вектора чисел $\alpha \in \Omega_\alpha$ и любых начальных условий $x^{(0)}$, $x_p^{(0)}$, $\beta^{(0)}$ достигалась цель управления (6.2.16) либо (6.2.17).

Возможность (существование) решения этой задачи зависит прежде всего от цели управления, при задании которой необходимо учитывать уровень (объем) априорной информации об объекте и возмущениях. Здесь существенную роль играет величина "порога" Δ . К наиболее простым относятся задачи синтеза, в которых величина Δ не фиксирована и требуется, чтобы целевое неравенство было выполнено при каком-нибудь $\Delta > 0$. Такие задачи возникают, когда априорная информация об интенсивности внешних возмущений и помех отсутствует, а объект управления неустойчив и требуется лишь обеспечить ограниченность выхода $y(t)$. Другой крайний случай возникает, когда значение Δ взято минимально возможным, равным нижней грани левой части соответствующего неравенства (6.2.16), (6.2.17). Такие задачи называются задачами оптимального адаптивного управления. Критериями оптимальности в таких задачах являются функционалы

$$J = \overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} \sup_{|f| \leq \tilde{f}, |x| \leq \tilde{x}} q(e(t)); \quad (6.2.21)$$

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} M \{q(e(t))\}. \quad (6.2.22)$$

Отметим, что в приведенной формулировке задачи синтеза фигурирует вектор чисел α , тогда как в содержательной задаче адаптивного управления, описанной в §6.1,

этот вектор зависит от времени. Это противоречие сглаживается следующими рассуждениями. Во-первых, изменение вектора α во времени можно описать часто формулой

$$\alpha(t) = \tilde{\alpha}^{(1)}\delta_1(t) + \tilde{\alpha}^{(2)}\delta_2(t) + \dots + \tilde{\alpha}^{(N)}\delta_N(t), \quad (6.2.23)$$

где $\delta_i(t)$ ($i = \overline{1, N}$) – известные функции; $\tilde{\alpha}^{(i)}$ ($i = \overline{1, N}$) – неопределенные векторы чисел, объединение которых и составляет вектор чисел α .

Во-вторых, выполнение целевых неравенств (6.2.16) либо (6.2.17) означает, что существует момент времени t_x ($\alpha, \beta^{(0)}$), такой, что

$$|\Delta - q(e(t))| \leq \varepsilon \text{ для всех } t > t_x, \quad (6.2.24)$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторое достаточно малое заданное число, характеризующее точность достижения цели управления.

Если

$$t_x(\alpha, \beta^{(0)}) < \overline{T}, \quad (6.2.25)$$

то цель управления достигается (с точностью до ε) в течение интервала квазистационарности параметров объекта.

Заметим, что при формулировке задачи синтеза подразумевается, что в случае прямого алгоритма адаптивного управления уравнение (6.2.20) обладает свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \beta^*, \quad (6.2.26)$$

где β^* – вектор чисел, такой, что регулятор

$$\dot{x}_p = \varphi_p(x_p, y, g, \beta^*); \quad u = w_p(x, y, \beta^*); \quad x_p(t_0) = x_p^{(0)}; \quad (6.2.27)$$

совпадает с регулятором, который получился бы, если решать задачу синтеза регулятора для объекта (6.2.1), в котором вектор α равен истинному значению α^* .

В случае идентификационного алгоритма управления решения (6.2.20) обладают свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \alpha^*, \quad (6.2.28)$$

При решении сформулированной задачи синтеза адаптивного регулятора можно различить следующие этапы [6.10]:

1. Построение закона управления (алгоритма регулирования). На этом этапе строятся функции φ_p , w_p уравнений (6.2.19). Способы построения этих функций для линеаризованных моделей объектов управления были указаны выше. Так, для идентификационных алгоритмов адаптивного управления искомый закон управления описывается уравнением (6.1.23) либо в форме "вход - выход" (6.1.25), а в случае прямых алгоритмов он имеет вид (6.1.35).

2. Выбор класса алгоритмов адаптивного управления. Здесь принимается решение о выборе идентификационного либо прямого алгоритма адаптивного управления.
3. Выбор алгоритма адаптации (6.2.20).
4. Определение параметров алгоритма адаптации из условий сходимости процесса адаптации и достижения цели адаптации.

Глава 7 Системы с эталонной моделью

Рассмотрим динамический объект, описываемый линейными дифференциальными уравнениями с неопределенными параметрами. Будем полагать, что неизмеряемые внешние возмущения и помехи измерения отсутствуют, а движения объекта возбуждаются начальными отклонениями (условиями) либо измеряемыми задающим воздействием. В этой ситуации часто используют эталонную модель, которая является физическим устройством, на вход которого подаются те же воздействия, что и на объект управления, а разность сигналов с выходов объекта и эталонной модели служит для изменения параметров адаптивного регулятора.

7.1 Адаптация с использованием "чистых" производных

7.1.1 Управление известным объектом

Рассмотрим физическое устройство, называемое эталонной моделью, которое описывается уравнением

$$y_m^{(n_m)} + d_{m,n_m-1}y_m^{(n_m-1)} + \dots + d_{m,1}\dot{y}_m + d_{m,0}y_m = k_{m,m_m}g^{(m_m)} + \dots + k_{m,0}g, \quad (7.1.1)$$

где $y_m(t)$ – измеряемый выход, $g(t)$ – задающее воздействие- известное заранее, либо измеряемый сигнал.

Наряду с эталонной моделью рассмотрим систему управления

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0y = k_m u^{(m)} + \dots + k_0 u; \quad (7.1.2)$$

$$d_{p,n_p}u^{(n_p)} + d_{p,n_p-1}u^{(n_p-1)} + \dots + d_{p,1}\dot{u} + d_{p,0}u = k_{p,m_p}y^{(m_p)} + \dots + k_{p,0} + l_p g^{(p)} + \dots + l_0 g. \quad (7.1.3)$$

Пусть коэффициенты объекта (7.1.2) известны, и пусть требуется найти коэффициенты регулятора (7.1.3) такие, чтобы выходы объекта этой системы и эталонной модели, возбуждаемые задающим воздействием $g(t)$ обладали свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_m(t)) = 0. \quad (7.1.4)$$

Таким образом, эталонная модель задает желаемое движение системы (7.1.2), (7.1.3).

Рассмотрим условия, при которых эта задача слежения за выходом эталонной модели, разрешима.

В связи с этим сравним изображения выходов при нулевых начальных условиях

$$y(s) = w(s)g(s) \text{ и } y_m(s) = w_m(s)g(s), \quad (7.1.5)$$

где $w(s) = \frac{k(s)l(s)}{d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s)}$, $w_m(s) = \frac{k_m(s)}{d_m(s)}$.

Вынужденные движения рассматриваемых систем совпадают, если $w(s) = w_m(s)$ или

$$\frac{k(s)l(s)}{d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s)} = \frac{k_m(s)}{d_m(s)}. \quad (7.1.6)$$

Степени полиномов числителя и знаменателя левой части этого равенства, как правило, превышают степени соответствующих полиномов правой части, и поэтому для его выполнения необходимо сокращение части этих полиномов. Найдем условия, при которых такое сокращение допустимо. Представим $k(s) = k^*(s)k^-(s)$, где $k^-(s)$ – полином, корни которого лежат в левой полуплоскости корней ($\operatorname{Re} s_i < 0, s_i$ ($i = \overline{1, m}$ – корни полинома $k^-(s)$, корни полинома $k^+(s)$ лежат в правой полуплоскости и на границах указанных полуплоскостей). Если полином $k^+(s)$ не является делителем полинома $k_m(s)$, то он должен делителем характеристического полинома системы (7.1.2), (7.1.3) $D(s) = d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s)$, что не допустимо, так как эта система должна быть асимптотически устойчивой. В связи с этим полином $k_m(s)$ модели должен удовлетворять условию

$$k_m(s) = k^+(s)\bar{k}_m(s). \quad (7.1.7)$$

Это означает, что неустойчивые нули объекта (корни $k^+(s)$) нельзя изменить и их следует включить в $k_m(s)$.

Так как $k^-(s)$ является делителем $D(s)$, то полином регулятора $d(s)$ (7.1.3) имеет следующую структуру $d_p(s) = k^-(s)\bar{d}_p(s)$.

Таким образом (7.1.6) принимает вид

$$\frac{k^-(s)k^+(s)l(s)}{k^-(s)(d(s)d_p(s) - k^+(s)k_p(s))} = \frac{k^+(s)\bar{k}_m(s)}{d_m(s)}$$

или

$$\frac{l(s)}{d(s)d_p(s) - k^+(s)k_p(s)} = \frac{\bar{k}_m(s)}{d_m(s)} \quad (7.1.8)$$

Отсюда следуют уравнения для определения коэффициентов регулятора (7.1.3)

$$l(s) = \bar{k}_m(s); \quad (7.1.9)$$

$$d(s)\bar{d}_p(s) - k^+(s)k_p(s) = d_m(s). \quad (7.1.10)$$

Решая тождество Безу (7.1.10), находим полиномы $\bar{d}_p(s)$ и $k_p(s)$ и вычисляем $d_p(s) = k^-(s)\bar{d}_p(s)$.

Полученный регулятор обеспечивает (при нулевых, либо совпадающих начальных отклонениях эталонной модели и системы (7.1.2), (7.1.3) совпадение их выходов: $y(t) = y_m(t)$. Исчезающая ошибка $e(t)$, обладающая свойством (7.1.4), вызвана только несовпадением начальных условий этих систем.

7.1.2 Постановка задачи

Рассмотрим объект (7.1.2) с неизвестными коэффициентами. Будем полагать, что его степени n и m известны, и кроме того известно, что он является минимально-фазовым. Это означает, что полином $k(s)$ – гурвицев полином, (его корни лежат в левой полуплоскости $k(s) = k^-(s)$, $k^+(s) = 1$).

Запишем его передаточную функцию в виде

$$w(s) = \frac{k(s^m + \dots + k_1s + k_0)}{s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0} = \frac{kk(s)}{d(s)}. \quad (7.1.11)$$

Аналогично запишем передаточную функцию эталонной модели (7.1.1), предполагая здесь и далее $n_m = n$, $m_m = m$

$$w(s) = \frac{k_m(s^m + \dots + k_{m1}s + k_{m0})}{s^n + d_{mn-1}s^{n-1} + \dots + d_{m1}s + d_{m0}} = \frac{k_mk_m(s)}{d_m(s)}, \quad (7.1.12)$$

где $k_m(s)$ и $d_m(s)$ – заданные гурвицевы полиномы.

Задача состоит в том, чтобы найти алгоритм настройки коэффициентов регулятора (7.1.3) так, чтобы разность выходов системы (7.1.2), (7.1.3) и эталонной модели стремилась к нулю (выполнялось условие (7.1.4)). Структурная схема адаптивной системы приведена на рис. 7.1.1.

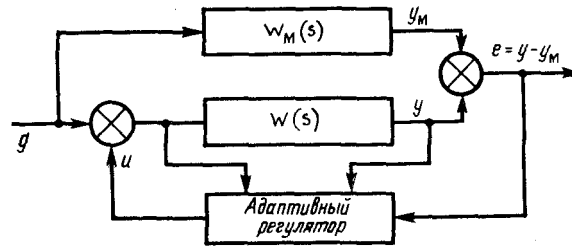


Рис. 7.1.1

Приведем решение этой задачи для различных структур объекта управления.

7.1.3 Алгоритм адаптации

Рассмотрим объект управления, описываемый уравнением

$$(s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0) = u + h_n g. \quad (7.1.13)$$

Нетрудно видеть, что он минимально-фазовый и полином $k(s) = 1$.

Эталонная модель имеет вид

$$(s^n + d_{m-1}s^{n-1} + \dots + d_{m1}s + d_{m0}) = u + h_m g. \quad (7.1.14)$$

Уравнения (7.1.13), (7.1.14) можно записать как

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{A}\dot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{h}}g; \quad y = \ddot{d}\dot{\mathbf{x}}; \quad \dot{\mathbf{x}}_m = \ddot{A}_m\dot{\mathbf{x}}_m + \ddot{\mathbf{h}}_m g; \quad y_m = \ddot{d}_m\dot{\mathbf{x}}_m, \quad (7.1.15)$$

где

$$\begin{aligned} \ddot{A} &= \begin{bmatrix} 0 & \vdots & E_{n-1} \\ \vdots & & \\ -\mathbf{d} & & \end{bmatrix}; \quad \ddot{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \ddot{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} 0 \\ h_n \end{bmatrix}; \quad \ddot{A}_m = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & E_{n-1} \\ \vdots & & \\ -\mathbf{d}_m & & \end{bmatrix}; \quad \ddot{\mathbf{h}}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ h_m \end{bmatrix}; \\ \ddot{d} &= \begin{bmatrix} 1, & 0, & \dots, & 0 \end{bmatrix}; \quad \ddot{d}_m = \begin{bmatrix} 1, & 0, & \dots, & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_0, & \dots, & d_{n-1} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{d}_m &= \begin{bmatrix} d_{m0}, & \dots, & d_{mn-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

Переходя к построению адаптивного регулятора, будем полагать, что возможно точное (чистое) вычисление производных измеряемых переменных y и y_m до $n-1$ -го порядка включительно. Тогда уравнение регулятора будем искать в виде

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(t) y^{(i)} + \beta_n(t) g, \quad (7.1.17)$$

где $y^{(i)}$ — i -я производная $y(t)$; $\beta_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$) — настраиваемые параметры регулятора.

Подставляя (7.1.17) в (7.1.13) и вычитая из (7.1.13) уравнение (7.1.14), получим уравнение для ошибки $e = y - y_m$:

$$\left(s^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_{mi} s^i \right) e = \sum_{i=0}^{n-1} (d_{mi} - d_i + \beta_i) y^{(i)} + (-h_m + h_n + \beta_n) g. \quad (7.1.18)$$

Утверждение. Алгоритм настройки параметров регулятора (7.1.17), при котором достигается цель адаптации ($\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$), имеет вид

$$\dot{\beta}_1 = -\gamma_j^{-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} l_j e^{(j)} \right) y^{(i)} \quad (i = \overline{0, n-1}); \quad (7.1.19)$$

$$\dot{\beta}_n = -\gamma_n^{-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} l_j e^{(j)} \right) g, \quad (7.1.20)$$

где $\gamma_i > 0$ ($i = \overline{0, n}$) а вектор $\mathbf{l} = \|l_0, \dots, l_{n-1}\|'$ определяется из выражения

$$\mathbf{l} = \check{P}\check{b}, \quad (7.1.21)$$

в котором положительно-определенная матрица \check{P} является решением уравнения Ляпунова

$$\check{A}'_m \check{P} + \check{P} \check{A}'_m = -Q \quad (7.1.22)$$

(Q – произвольная положительно-определенная матрица).

Алгоритм (7.1.19), (7.1.20) исторически первый обоснованный алгоритм адаптивного управления с эталонной моделью. Он был получен в работах [7.5], [7.2].

Переходя к доказательству утверждения, введем в рассмотрение векторы

$$\left. \begin{aligned} \check{e} &= \|\check{e}_1, \check{e}_2, \dots, \check{e}_n\|, \quad \text{где } \check{e}_1 = e; \check{e}_2 = \dot{e}, \dots, \check{e}_n = e^{(n-1)}; \\ \check{\varphi}' &= \|d_{m0} - d_0 + \beta_0, \dots, d_{mn-1} - d_{n-1} + \beta_{n-1} - h_m + h_n + \beta_n\|; \\ \check{\omega}' &= \|y, \dot{y}, \dots, y^{n-1}, g\|, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.23)$$

используя которые запишем (7.1.18) в виде

$$\check{e} = \check{A}_m \check{e} + \check{b} \check{\varphi}' \check{\omega}. \quad (7.1.24)$$

Для исследования устойчивости системы (7.1.13), (7.1.14), (7.1.17), (7.1.19), (7.1.20) по переменной e построим функцию Ляпунова

$$v = \check{e}' \check{P} \check{e} + \check{\varphi}' \Gamma \check{\varphi} > 0, \quad (7.1.25)$$

в которой положительно-определенная матрица \check{P} является решением уравнения (7.1.22), а $\Gamma = \text{diag } \|\gamma_0, \dots, \gamma_n\|$.

Полная производная функции (7.1.24) в силу уравнения (7.1.25)

$$\begin{aligned} \dot{v} &= (\check{A}_m \check{e} + \check{b} \check{\varphi}' \check{\omega})' \check{P} \check{e} + \check{e}' \check{P} (\check{A}_m \check{e} + \check{b} \check{\varphi}' \check{\omega}) + \check{\varphi}' \Gamma \dot{\check{\varphi}} + \dot{\check{\varphi}}' \Gamma \check{\varphi} = \\ &= -\check{e}' Q \check{e} + (\check{e}' \check{P} \check{b} \check{\omega}' + \check{\varphi}' \Gamma) \check{\varphi} + \dot{\check{\varphi}}' (\check{\omega} \check{b}' \check{P} \check{e} + \Gamma \dot{\check{\varphi}}). \end{aligned} \quad (7.1.26)$$

Очевидно, что

$$\dot{v} = -\check{e}'Q\check{e} < 0, \quad (7.1.27)$$

если

$$\dot{\check{\varphi}} = -\Gamma^{-1}(\Gamma'\check{e})\check{\omega}. \quad (7.1.28)$$

Принимая во внимание, что параметры a_{mi} , α_i ($i = \overline{0, n-1}$) модели и объекта постоянны, заключаем, что (7.1.28) совпадает с (7.1.19), (7.1.20).

Пример. Пусть имеется объект управления, описываемый уравнением

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = u + h_2 g, \quad (7.1.29)$$

параметры которого α_0 , α_1 , h_2 неизвестны. Требуется найти алгоритм настройки параметров регулятора

$$u = \beta_0(t)y + \beta_1(t)\dot{y} + \beta_2(t)g, \quad (7.1.30)$$

при котором выход y объекта приближается к значениям выходной переменной эталонной модели, описываемой уравнением

$$\ddot{y}_m + a_{m1}\dot{y}_m + a_{m0}y_m = h_m g, \quad (7.1.31)$$

с заданными параметрами. На основе (7.1.19), (7.1.20) получаем искомый алгоритм настройки

$$\left. \begin{aligned} \dot{\beta}_0 &= -\gamma_0^{-1}(l_0 e + l_1 \dot{e})y; \\ \dot{\beta}_1 &= -\gamma_1^{-1}(l_0 e + l_1 \dot{e})\dot{y}; \\ \dot{\beta}_2 &= -\gamma_2^{-1}(l_0 e + l_1 \dot{e})g, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.32)$$

в котором γ_0 , γ_1 , γ_2 — произвольные положительные числа, $l_0 = \check{p}_{12}$, $l_1 = \check{p}_{22}$, где \check{p}_{12} , \check{p}_{22} — элементы матрицы $\check{P} = \begin{bmatrix} \check{p}_{11} & \check{p}_{12} \\ \check{p}_{12} & \check{p}_{22} \end{bmatrix}$, являющейся решением матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_{m0} \\ -1 & -a_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{p}_{11} & \check{p}_{12} \\ \check{p}_{12} & \check{p}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \check{p}_{11} & \check{p}_{12} \\ \check{p}_{12} & \check{p}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{m0} & -a_{m1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}. \quad (7.1.33)$$

Здесь q_{11} , q_{22} — произвольные положительные числа.

Структурная схема адаптивной системы приведена на рис.7.1.2.

Разность степеней полиномов знаменателя и числителя передаточной функции называют относительной степенью и поэтому в первом случае относительная степень равна единице, а во втором—двум.

7.2.2 Адаптивный регулятор для объекта с относительной степенью равной единице

Отметим вначале, что в рассматриваемом случае можно положить $\eta(s) = 1$, поскольку параметры полинома $k_m(s)$ степени $n - 1$ всегда можно выбрать так, чтобы $w_m(s)$ была строго пассивной. Структурная схема адаптивной системы приведена на рис. 7.2.1.

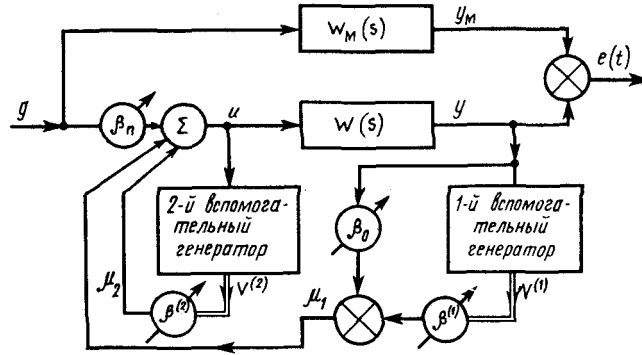


Рис. 7.2.1

В этой схеме вспомогательные генераторы описываются уравнениями

$$\dot{\mathbf{v}}^{(1)} = F\mathbf{v}^{(1)} + \check{\mathbf{b}}y; \quad \dot{\mathbf{v}}^{(2)} = F\mathbf{v}^{(2)} + \check{\mathbf{b}}u, \quad (7.2.2)$$

а сигналы μ_1 , μ_2 имеют вид

$$\mu_1 = \beta_0 y + \boldsymbol{\beta}^{(1)'} \mathbf{v}^{(1)}; \quad \mu_2 = \boldsymbol{\beta}^{(2)'} \mathbf{v}^{(2)}, \quad (7.2.3)$$

где $\mathbf{v}^{(1)}$ и $\mathbf{v}^{(2)}$ — $n - 1$ -мерные векторы переменных состояния вспомогательных генераторов; $\beta_0(t)$, $\boldsymbol{\beta}^{(1)}(t)$, $\boldsymbol{\beta}^{(2)}(t)$ — настраиваемые параметры, где $\boldsymbol{\beta}^{(1)} = \|\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\|'$, $\boldsymbol{\beta}^{(2)} = \|\beta_{n+1}, \dots, \beta_{n+2}\|'$; F — заданная матрица чисел, имеющая следующую структуру:

$$F = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ E_{n-2} \\ \hline -\boldsymbol{\rho} \end{array} \right\|,$$

где $\boldsymbol{\rho}$ есть $n - 1$ -мерный вектор-строка; $\boldsymbol{\rho} = \|\rho_0, \dots, \rho_{n-2}\|$;

$$\check{\mathbf{b}}' = \|0, 0, \dots, 1\|.$$

Очевидно, что

$$\mu_1(s) = \beta_0 y + \boldsymbol{\beta}^{(1)'} (Es - F)^{-1} \check{\mathbf{b}} y = \left[\beta_0 + \frac{\beta^{(1)}(s)}{\rho(s)} \right] y(s) = m_1(s) y(s), \quad (7.2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \rho(s) &= s^{n-1} + \rho_{n-2}s^{n-2} + \dots + \rho_1 s + \rho_0; \\ \beta^{(1)}(s) &= \beta_1 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-2}s + \beta_{n-1}; \\ \mu_2(s) &= \boldsymbol{\beta}^{(2)'} (Es - F)^{-1} \check{\mathbf{b}}' u = \frac{\beta^{(2)}(s)}{\rho(s)} u(s) = m_2(s) y(s). \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Здесь

$$\beta^{(2)}(s) = \beta_{n+1}s^{n-2} + \dots + \beta_{2n-2}s + \beta_{2n-1}; \quad m_2(s) = \frac{\beta^{(2)}(s)}{\rho(s)}. \quad (7.2.6)$$

Непосредственно из рис.7.2.1 следует, что

$$u = \beta_0 y + \boldsymbol{\beta}^{(1)'} \mathbf{v}^{(1)} + \beta_n g + \boldsymbol{\beta}^{(2)'} \mathbf{v}^{(2)}. \quad (7.2.7)$$

Вводя $2n$ -мерные векторы

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \|\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n, \beta_{n+1}, \dots, \beta_{2n-1}\| = \|\beta_0, \boldsymbol{\beta}^{(1)'}, \beta_n, \boldsymbol{\beta}^{(2)'}\|; \quad (7.2.8)$$

$$\delta(t) = \|y, \mathbf{v}^{(1)}, g, \mathbf{v}^{(2)}\|, \quad (7.2.9)$$

запишем (7.2.7) в компактной форме

$$u = \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{\delta}. \quad (7.2.10)$$

На основе структурной схемы заключаем, что передаточная функция объекта с адаптивным регулятором при постоянном значении вектора настраиваемых параметров имеет вид

$$w_a(s) = \frac{y(s)}{g(s)} = \frac{\beta_n w(s)}{1 \pm m_2(s) + m_1(s)w(s)} = \frac{\beta_n k k(s) \rho(s)}{[\beta^{(2)}(s) \mp \rho(s)] d(s) \pm k k(s) [\beta^{(1)}(s) + \beta_0 \rho(s)]}. \quad (7.2.11)$$

Действительно, из рис.7.2.1 следует, что

$$u = \beta_n g \pm m_2(s) u \mp m_1(s) y. \quad (7.2.12)$$

Учитывая, что $y = w(s)u$, и подставляя сюда (7.2.12), получим (7.2.11).

Полиномы в квадратных скобках знаменателя передаточной функции (7.2.11) будем искать как решение следующего тождества Безу

$$[\beta^{(2)}(s) \mp \rho(s)] d(s) \pm k k(s) [\beta^{(1)}(s) + \beta_0 \rho(s)] = n(s),$$

где $n(s)$ – произвольный полином степени $2n - 1$ с коэффициентом при s^{2n-1} равным 1. В результате решения получим вектор β .

Полагая

$$n(s) = k(s)d_m(s); \quad \rho(s) = k_m(s), \quad (7.2.13)$$

закключаем, что передаточная функция объекта с регулятором

$$w_a(s)' = \frac{\beta_n k}{k_m} w_m(s). \quad (7.2.14)$$

Таким образом, второе из равенств (7.2.13) служит для определения вектора ϱ в матрице F уравнений вспомогательных генераторов. Для завершения описания адаптивной системы необходимо определить алгоритм настройки вектора β .

Отметим, что в следующем параграфе будет рассматриваться случай, когда $k(s)$ и $k_m(s)$ – полиномы степени $n - 2$. В этом случае соотношения (7.2.13) принимают вид

$$n(s) = (s + \lambda_0)k(s)d_m(s); \quad \rho(s) = (s + \lambda_0)k_m(s). \quad (7.2.15)$$

Утверждение. Алгоритм настройки параметров β управления (7.2.10), при котором достигается цель управления (7.2.1) для объекта с неизвестной передаточной функцией (7.1.11) при $m = n - 1$, имеет вид

$$\dot{\beta} = -\Gamma^{-1} \delta e, \quad (7.2.16)$$

где Γ – произвольная положительно-определенная матрица чисел размеров $2n \times 2n$. Доказательство утверждения приведено в Доказательстве 7.

Пример. Пусть имеется объект управления с передаточной функцией

$$w(s) = \frac{s^2 + k_1 s + k_0}{s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0}, \quad (7.2.17)$$

параметры которой неизвестны.

Требуется построить адаптивный регулятор, при котором выход объекта y приближался бы к выходной переменной эталонной модели с передаточной функцией

$$w_m(s) = \frac{(s^2 + 4s + 3,79)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}. \quad (7.2.18)$$

Переходя к построению регулятора, отметим, что, как нетрудно проверить, передаточная функция модели (7.2.18) является строго пассивной.

Определим из равенства (7.2.13) параметры уравнений состояния вспомогательных генераторов

$$\rho_0 = 3,79; \quad \rho_1 = 4. \quad (7.2.19)$$

Структурная схема рассматриваемой адаптивной системы приведена на рис 7.2.2.

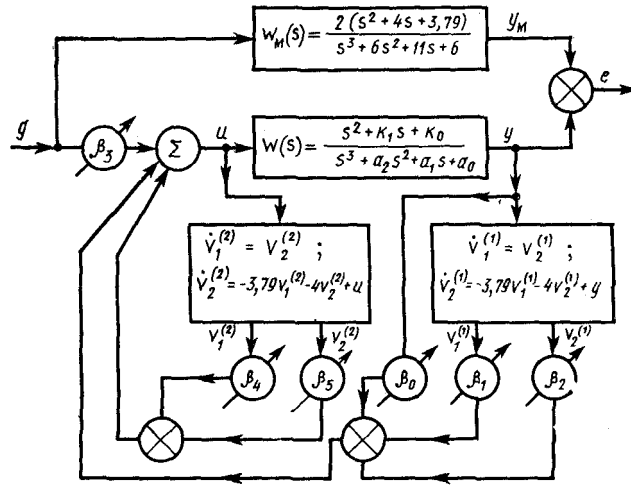


Рис. 7.2.2

Алгоритм настройки параметров регулятора

$$u = \beta_0 y + \beta_1 v_1^{(1)} + \beta_2 v_2^{(1)} + \beta_3 g + \beta_4 v_1^{(2)} + \beta_5 v_2^{(2)} \quad (7.2.20)$$

имеет вид

$$\dot{\beta}_0 = -\gamma_0^{-1} e y; \quad \dot{\beta}_1 = -\gamma_1^{-1} e v_1^{(1)}; \quad (7.2.21)$$

$$\dot{\beta}_2 = -\gamma_2^{-1} e v_2^{(1)}; \quad \dot{\beta}_3 = -\gamma_3^{-1} e g; \quad (7.2.22)$$

$$\dot{\beta}_4 = -\gamma_4^{-1} e v_1^{(2)}; \quad \dot{\beta}_5 = -\gamma_5^{-1} e v_2^{(2)}, \quad (7.2.23)$$

где γ_i ($i = 0, 5$) – положительные числа.

7.2.3 Адаптивный регулятор для объекта с относительной степенью равной двум

Так как теперь разность степеней полиномов знаменателя и числителя передаточной функции эталонной модели больше единицы, то нельзя обеспечить строгую пассивность передаточной функции $w_M(s)$ выбором ее параметров, и поэтому вначале определяется число η_0 , такое, что передаточная функция

$$\eta(s)w_M(s) = (s + \eta_0)w_M(s) \quad (7.2.24)$$

является строго пассивной. Такое число η_0 всегда существует.

Структурная схема адаптивной системы приведена на рис. 7.2.3.

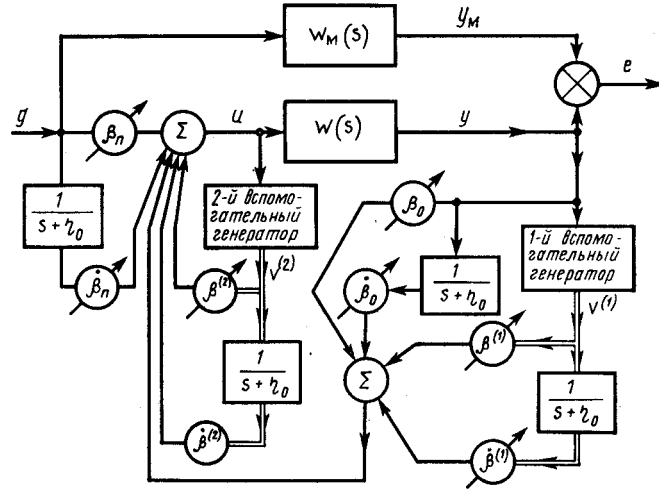


Рис. 7.2.3

Из схемы нетрудно заметить, что управление

$$u = \beta' \delta + \dot{\beta}' \zeta, \quad (7.2.25)$$

где ζ – $2n$ -мерный вектор,

$$\zeta' = \|\zeta_0, \zeta^{(1)'}, \zeta_n, \zeta^{(2)'}\| = \|\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, \zeta_n, \zeta_{n+1}, \dots, \zeta_{2n-1}\|, \quad (7.2.26)$$

связанный с вектором $\delta(t)$ уравнением

$$\dot{\zeta} = -\eta_0 \zeta + \delta. \quad (7.2.27)$$

Утверждение. Алгоритм настройки параметров β управления (7.2.25) для объекта с неизвестной передаточной функцией (7.1.11), в которой $m = n - 2$, имеет вид

$$\dot{\beta} = -\Gamma^{-1} \zeta e, \quad (7.2.28)$$

где Γ – произвольная положительно-определенная матрица чисел размеров $2n \times 2n$. Доказательство утверждения приведено в Доказательстве 8.

Пример. Построим адаптивную систему управления летательным аппаратом по углу тангажа.

Передаточная функция самолета по углу тангажа

$$w(s) = \frac{k(s + k_0)}{s(s^2 + d_2 s + d_1)}. \quad (7.2.29)$$

Эталонная модель имеет передаточную функцию

$$w_m(s) = \frac{1,6s + 4,8}{(s + 5)(s^2 + 3s + 2)}. \quad (7.2.30)$$

Переходя к построению адаптивного регулятора, найдем число η_0 , при котором передаточная функция

$$w_m(s)(s + \eta_0) = \frac{1,6(s + 3)(s + \eta_0)}{(s + 5)(s^2 + 3s + 2)} \quad (7.2.31)$$

является строго пассивной. Это число

$$\eta_0 = 1. \quad (7.2.32)$$

Определим теперь, используя (7.2.15), параметры характеристического полинома уравнений вспомогательных генераторов

$$\rho(s) = (s + \lambda_0)(s + 3), \quad (7.2.33)$$

где λ_0 – произвольное положительное число.

Положим $\lambda_0 = 4$ и тогда

$$\rho_0 = 12; \quad \rho_1 = 7. \quad (7.2.34)$$

Алгоритм настройки параметров регулятора

$$u = \beta_0 y + \beta_1 v_1^{(1)} + \beta_2 v_2^{(1)} + \beta_3 g + \beta_4 v_1^{(2)} + \beta_5 v_2^{(2)} + \dot{\beta}_0 \zeta_1 + \dot{\beta}_1 \zeta_2 + \dot{\beta}_2 \zeta_3 + \dot{\beta}_3 \zeta_4 + \dot{\beta}_4 \zeta_5 + \dot{\beta}_5 \zeta_6 \quad (7.2.35)$$

имеет вид

$$\dot{\beta}_i = -\gamma_i^{-1} \zeta_i e \quad (i = \overline{0, 5}), \quad (7.2.36)$$

где ζ_i ($i = \overline{0, 5}$) являются решениями уравнений:

$$\dot{\zeta}_1 + \eta_0 \zeta_1 = y; \quad \dot{\zeta}_2 + \eta_0 \zeta_2 = v_1^{(1)}; \quad \dot{\zeta}_3 + \eta_0 \zeta_3 = v_2^{(1)}; \quad (7.2.37)$$

$$\dot{\zeta}_4 + \eta_0 \zeta_4 = g; \quad \dot{\zeta}_5 + \eta_0 \zeta_5 = v_1^{(2)}; \quad \dot{\zeta}_6 + \eta_0 \zeta_6 = v_2^{(2)}; \quad (7.2.38)$$

где $v_1^{(1)}$, $v_2^{(1)}$, $v_1^{(2)}$, $v_2^{(2)}$ – выходы вспомогательных генераторов, описываемых уравнениями:

$$\dot{v}_1^{(1)} = v_2^{(1)}; \quad \dot{v}_2^{(1)} = -12v_1^{(1)} - 7v_2^{(1)} + y; \quad (7.2.39)$$

$$\dot{v}_1^{(2)} = v_2^{(2)}; \quad \dot{v}_2^{(2)} = -12v_1^{(2)} - 7v_2^{(2)} + u. \quad (7.2.40)$$

7.2.4 Программное обеспечение и практикум

ГАММА-директива: 511 (Адаптивное управление с эталонной моделью).

Исходные данные:

а) Полиномы $d(s)$, $k(s)$ и $m(s)$ объекта (7.1.2) с учетом внешних возмущений. Это означает, что объект описывается уравнением: $d(s)y = k(s)u + m(s)f$.

б) Полиномы $d_m(s)$ и $k_m(s)$ эталонной модели (7.1.1).

в) Вид внешнего возмущения.

г) Вид задающего воздействия.

е) Время моделирования процесса адаптации.

Результаты:

а) Графики процесса адаптации.

Используя директиву 511 выполняется практикум Пр.3.1. Одна из его целей состоит в исследовании зависимости процесса адаптации от выбора матрицы Γ в алгоритме настройки (7.2.16) и от внешних возмущений.

Глава 8 Идентификация

Идентификация, понимаемая, как и ранее, в узком смысле (как определение параметров объекта управления), является важным этапом при проектировании систем управления. К настоящему времени разработано много приемов, способов и методов определения параметров объектов. Ниже приводятся лишь те из них, которые используются для построения идентификационных алгоритмов адаптивного управления. Вначале излагается метод наименьших квадратов (§10.1), в котором внешние воздействия и шумы являются белым шумными случайными процессами. §10.2 посвящен методу конечно - частотной аппроксимации. Он позволяет идентифицировать объект при возмущениях с неизвестными статистическими характеристиками.

8.1 Метод наименьших квадратов

8.1.1 Некоторые понятия теории временных рядов

Рассмотрим объект, описываемый уравнением

$$\begin{aligned} y(kT) + \varphi_1 z^{-1} y(kT) + \dots + \varphi_{n-1} z^{-(n-1)} y(kT) + \varphi_n z^{-n} y(kT) = \\ = r_0 f(k) + r_1 z^{-1} f(kT) + \dots + r_{\mu-1} z^{-(\mu-1)} f(kT) + r_{\mu} z^{-\mu} f(kT) \quad (k = 1, \dots) \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

Для асимптотически устойчивых процессов будем также использовать модель

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i) f(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^{-i} f(k), \quad (8.1.2)$$

в которой числа h_i определяются выражением

$$\frac{r_0 + \dots + r_{\mu-1}z^{-(\mu-1)} + r_{\mu}z^{-\mu}}{1 + \varphi z^{-1} + \dots + \varphi_{n-1}z^{-(n-1)} + \varphi_n z^{-n}} = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots \quad (8.1.3)$$

Процедура определения правой части этого равенства по левой части называется *операцией длинного деления*.

Для асимптотически устойчивых процессов $h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, поэтому можно ограничиться конечным числом (q) слагаемых в (8.1.2). Тогда

$$y(k) = \sum_{i=0}^q h_i z^{-i} f(k). \quad (8.1.4)$$

Это выражение является временным рядом, позволяющим найти y в момент времени k по значениям f в q моментов времени, предшествующих моменту k .

Модель (8.1.4) называется *моделью со скользящим средним (СС-модель)*. Термин "скользящее среднее" появился в связи с тем, что выражение (8.1.4) по существу является оператором усреднения $(q+1)$ значения f (правда, при этом не выполняется ни условие $\sum_{i=0}^q h_i = 1$, ни условие $h_i > 0$ для всех i).

Пусть в (8.1.1) $r_i = 0$ ($i = \overline{1, \mu}$), $r_0 = 1$, тогда

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n \varphi_i z^{-i} y(k) + f(k). \quad (8.1.5)$$

Это также временной ряд, определяющий значение y в момент времени k на основе значений y в моменты, предшествовавшие k и значению $f(k)$.

Выражение (8.1.5) называется *авторегрессионной моделью (АР-модель)*. Этот термин вызван тем, что (8.1.5) регрессирует $y(k)$ на прошлые значения y .

И наконец, модель (8.1.1), которую можно записать как

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n \varphi_i z^{-i} y(k) + \sum_{j=0}^{\mu} r_j z^{-j} f(k), \quad (8.1.6)$$

называется *авторегрессионной моделью со скользящим средним (АРСС-модель)*.

Пусть параметры моделей (8.1.5), (8.1.6) неизвестны, тогда используя для обозначения неизвестных параметров вектор α , запишем эти модели в виде

$$y(k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i z^{-i} y(k) + f(k); \quad (8.1.7)$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i z^{-i} y(k) + \sum_{j=0}^{\mu} \alpha_{n+j+1} z^{-j} f(k). \quad (8.1.8)$$

Требуется по известным (в результате измерений) значениям $y(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) найти вектор параметров α .

8.1.2 Метод наименьших квадратов

Пусть в модели (8.1.7) $n = 2$, а $y(k)$, $f(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) точно измеряются и требуется определить параметры α_2 , α_1 уравнения (8.1.7), которое принимает вид

$$y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) + f(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (8.1.9)$$

Записывая это уравнение для $k = 2$ и $k = 3$, получим систему алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 y(1) + \alpha_2 y(0) &= y(2) - f(2); \\ \alpha_1 y(2) + \alpha_2 y(1) &= y(3) - f(3), \end{aligned} \right\} \quad (8.1.10)$$

решая которую найдем искомые числа α_2 , α_1 .

Допустим теперь, что $f(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) измеряется с погрешностями. Тогда для каждой пары уравнений вида (8.1.10), записанной для различных k (следующая пара порождается $k = 4$, $k = 5$, затем $k = 6$, $k = 7$ и т.д.), получим различные значения искомых параметров α_2 , α_1 . Возникает мысль определить α_2 , α_1 так, чтобы разность (невязка) между правой и левой частями уравнения (8.1.9) при $k = 2, \dots, N$ была наименьшей. Для этого сформируем сумму квадратов невязок

$$L_N = \sum_{k=2}^N [y(k) - \alpha_1 y(k-1) - \alpha_2 y(k-2) - f(k)]^2. \quad (8.1.11)$$

Необходимое и достаточное условие минимума L_N составляет систему из двух алгебраических уравнений

$$\frac{\partial L_N}{\partial \alpha_2} = 2 \sum_{k=2}^N [y(k) - \alpha_1 y(k-1) - \alpha_2 y(k-2) - f(k)] y(k-2); \quad (8.1.12)$$

$$\frac{\partial L_N}{\partial \alpha_1} = 2 \sum_{k=2}^N [y(k) - \alpha_1 y(k-1) - \alpha_2 y(k-2) - f(k)] y(k-1) = 0, \quad (8.1.13)$$

решая которую, найдем искомые числа α_2 , α_1 .

Рассмотрим теперь определение параметров модели (8.1.7), когда $f(k)$ ($k = 0, 1, \dots$) — неизмеряемая неизвестная функция.

Запишем авторегрессионную модель (8.1.7) в векторной форме

$$y(k) = \boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\delta}_y(k) + f(k) \quad (k = n, n+1, \dots), \quad (8.1.14)$$

где

$$\boldsymbol{\alpha} = \|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\|'; \quad \boldsymbol{\delta}_y(k) = \|y(k-1), \dots, y(k-n)\|'. \quad (8.1.15)$$

В (8.1.14) в отличие от (8.1.7) принято начальное значение $k = n$. Это связано с тем, что при $k \geq n$ вектор $\boldsymbol{\delta}(k)$ содержит только результаты измерений, тогда как

в противном случае он содержал бы неизвестные начальные условия $y(-1)$, $y(-2)$ и т.д.

Поскольку функция $f(k)$ ($k = 0, 1, \dots$) неизвестна, то будем искать такую оценку $\hat{\alpha}$ вектора α , чтобы сумма квадратов "невязок"

$$L_N = \sum_{k=n}^N [y(k) - \hat{\alpha}' \delta(k)]^2 \quad (N - n > n) \quad (8.1.16)$$

была минимальной. Дифференцируя (8.1.16) по компонентам вектора $\hat{\alpha}$ и приравнявая нулю производные, получим

$$\left[\sum_{k=n}^N \delta(k) \delta_y'(k) \right] \hat{\alpha} = \sum_{k=n}^N \delta_y(k) y(k). \quad (8.1.17)$$

Вводя обозначение

$$P_N = \left[\sum_{k=n}^N \delta_y(k) \delta_y'(k) \right]^{-1}, \quad (8.1.18)$$

найдем из (8.1.17) искомый вектор (8.1.18)

$$\hat{\alpha} = P_N \sum_{k=n}^N \delta_y(k) y(k). \quad (8.1.19)$$

Выведем еще одну эквивалентную (8.1.19) формулу для оценки вектора α на основе метода наименьших квадратов. В связи с этим введем в рассмотрение $N - n$ -мерные векторы η и \mathbf{v} , а также матрицу U :

$$\eta = \begin{Bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \vdots \\ y(N) \end{Bmatrix}; \quad U = \begin{Bmatrix} \delta_y'(n) \\ \delta_y'(n+1) \\ \vdots \\ \delta_y'(N) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} f(n) \\ f(n+1) \\ \vdots \\ f(N) \end{Bmatrix}. \quad (8.1.20)$$

При этих обозначениях уравнения (8.1.14) для $k = \overline{n, N-n}$ и минимизируемая функция L_N примут вид

$$\eta = U\alpha + \mathbf{v}; \quad (8.1.21)$$

$$L_N = [\eta - U\hat{\alpha}]' [\eta - U\hat{\alpha}]. \quad (8.1.22)$$

Дифференцируя (8.1.22) по компонентам вектора $\hat{\alpha}$ и приравнявая производную нулю, получим $U'[\eta - U\hat{\alpha}] = 0$, откуда

$$\hat{\alpha} = [U'U]^{-1} U'\eta. \quad (8.1.23)$$

Пример. Пусть имеется асимптотически устойчивый объект управления, описываемый уравнением

$$\dot{y} + a_0 y = 0. \quad (8.1.24)$$

в котором параметр a_0 и воздействие $f(t)$ неизвестны. Пусть в результате измерений выхода объекта в известные моменты времени $0, T, 2T, \dots$ ($T = 0,08$) получены

$$y(0) = 1,5; \quad y(1) = 0,6; \quad y(2) = 0,56; \quad y(3) = 0,236. \quad (8.1.25)$$

Требуется определить параметр a_0 .

Переходя к решению этой задачи, аппроксимируем (8.1.24) разностным уравнением вида

$$y(kT) + \varphi_1 y[(k-1)T] = r_0 f(kT) \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (8.1.26)$$

и представим это уравнение как авторегрессионную модель (8.1.7):

$$y(k) = \alpha_1 z^{-1} y(k) + \tilde{f}(k); \quad (8.1.27)$$

$$\alpha_1 = -\varphi_1 = \frac{1}{a_0 T + 1}; \quad \tilde{f}(k) = \frac{T}{a_0 T + 1} f(k). \quad (8.1.28)$$

Вычислим по формуле (8.1.18) значение P_N^{-1} . В рассматриваемом случае в соответствии с (8.1.15) $\delta_y(k) = y(k-1)$ и, таким образом,

$$P_N^{-1} = \sum_{k=1}^3 y^2(k-1) = 1,5^2 + 0,6^2 + 0,56^2 = 2,92.$$

На основе (8.1.19) заключаем, что

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{2,92} (y(0)y(1) + y(1)y(2) + y(2)y(3)) = \frac{1,36}{2,92} = 0,47, \quad (8.1.29)$$

и, следовательно, оценка искомого значения

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{-\hat{\alpha}_1 + 1}{T \hat{\alpha}_1} = 14. \quad (8.1.30)$$

Если использовать для определения параметра $\hat{\alpha}_1$ формулу (8.1.23), то следует ввести вектор $\boldsymbol{\eta}$ и матрицу U :

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{Bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,6 \\ 0,56 \\ 0,236 \end{Bmatrix}; \quad U = \begin{Bmatrix} 1,5 \\ 0,6 \\ 0,56 \end{Bmatrix},$$

тогда получим вновь

$$\hat{\alpha}_1 = 0,47. \quad (8.1.31)$$

8.1.3 Рекуррентный алгоритм метода наименьших квадратов

Представим себе реальный физический процесс, описываемый авторегрессионной моделью (8.1.7) с неизвестными параметрами α_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть требуется идентифицировать эти параметры в темпе реального процесса. Это означает, что оценка неизвестных параметров должна осуществляться сразу после очередного измерения выхода объекта. Используя метод наименьших квадратов, можно поступать так: после $N + 1$ -го измерения вычислить в соответствии с (8.1.18)(9.2.22) значение P_{N+1} и затем найти оценку $\hat{\alpha}^{(N+1)}$ по формуле (8.1.19), после P_{N+2} -го измерения, используя (8.1.18), (8.1.19), снова найти оценку $\hat{\alpha}^{(N+1)}$ и т.д.

Таким образом, после каждого измерения необходимо заново осуществлять обращение матрицы по формуле (8.1.18) и вычисление оценки по (8.1.19). В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли найти в явной форме связь между оценкой после i -го измерения, с одной стороны, и оценкой после $i - 1$ -го измерения и результатами i -го измерения – с другой. Такое рекуррентное соотношение существует и его использование называется *оцениванием параметров в замкнутом контуре или последовательным регрессионным методом*.

Утверждение. Рекуррентный (последовательный) алгоритм метода наименьших квадратов для последовательной оценки параметров авторегрессионной модели (8.1.7) имеет вид:

$$\hat{\alpha}^{(i)} = \hat{\alpha}^{(i-1)} + \mathbf{k}^{(i)} [y(i) - \delta'_y(i)\hat{\alpha}^{(i-1)}] \quad (i = n, n + 1, \dots); \quad (8.1.32)$$

$$\mathbf{k}^{(i)} = P_i \delta_y(i) \text{ либо } P_{i-1} \delta_y(i) [1 + \delta'_y P_{i-1} \delta_y(i)]^{-1}; \quad (8.1.33)$$

$$P_i = P_{i-1} - P_{i-1} \delta_y(i) [1 + \delta'_y P_{i-1} \delta_y(i)]^{-1} \delta_y(i) P_{i-1}, \quad (8.1.34)$$

где $\hat{\alpha}^{(i)}$ – оценка вектора параметров α после i -го измерения выходной переменной y .

В качестве начальных условий для алгоритма можно принять

$$\hat{\alpha}^{(0)} = 0; \quad P_0 = aE_n, \quad (8.1.35)$$

где a – достаточно большое положительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения несложно. Действительно, на основе (8.1.17), (8.1.18) запишем

$$P_N^{-1} \hat{\alpha}^{(N)} = \sum_{k=n}^N \delta_y(k) y(k) = \sum_{k=n}^{N-1} \delta_y(k) y(k) + \delta_y(N) y(N). \quad (8.1.36)$$

Заменяя $y(k)$ его оценкой $\delta'_y(k) \hat{\alpha}^{(N-1)}$, получим выражение

$$\begin{aligned}
P_N^{-1} \hat{\alpha}^{(N)} &= \sum_{k=n}^{N-1} \delta_y(k) \delta'_y(k) \hat{\alpha}^{(N-1)} + \delta_y(N) y(N) = \\
&= \left[\sum_{k=n}^N \delta_y(k) \delta'_y(k) \right] \hat{\alpha}^{(N-1)} + \delta_y(N) y(N) - \delta_y(N) \delta'_y(N) \alpha^{(N-1)} = \\
&= P_N^{-1} \hat{\alpha}^{(N-1)} + \delta_y(N) \left[y(N) - \delta'_y(N) \hat{\alpha}^{(N-1)} \right],
\end{aligned}$$

которое после умножения его слева на P_N совпадает с (8.1.32).

Переходя к выводу соотношения (8.1.34), запишем (8.1.18) в виде

$$P_N^{-1} = \sum_{k=n}^N \delta_y(k) \delta'_y(k) = \sum_{k=n}^{N-1} \delta_y(k) \delta'_y(k) + \delta_y(N) \delta'_y(N) = P_{N-1}^{-1} + \delta_y(N) \delta'_y(N). \quad (8.1.37)$$

Умножая это равенство слева на P_N и справа на P_{N-1} , получим

$$P_{N-1} = P_N + P_N \delta_y(N) \delta'_y(N) P_{N-1}. \quad (8.1.38)$$

Отсюда следует, что

$$P_{N-1} \delta_y(N) = P_N \delta_y(N) \left[1 + \delta'_y(N) P_{N-1} \delta_y(N) \right]$$

или

$$P_N \delta_y(N) = P_{N-1} \delta_y(N) \left[1 + \delta'_y(N) P_{N-1} \delta_y(N) \right]^{-1}.$$

Умножая это выражение справа на $\delta'_y(N) P_{N-1}$ и учитывая (8.1.38), получим (8.1.34), а подставляя его в первое из соотношений (8.1.33), получим второе.

Таким образом, утверждение доказано. Отметим, что одним из достоинств рекуррентного алгоритма является то обстоятельство, что он не содержит операции обращения матриц, так как входящее в (8.1.34) выражение $[1 + \delta'_y(i) P_{i-1} \delta_y(i)]$ является скаляром. Рекуррентный, или последовательный, алгоритм приводит к оценкам, обладающими следующими свойствами.

1. Если $f(k)$ ($k = 0, 1, \dots$) представляет собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, то оценка $\hat{\alpha}$ является несмещенной и состоятельной.

2. Если последовательность $f(k)$ ($k = 0, 1, \dots$) гауссовская, то оценка эффективна.

Пример 10. Применим алгоритм (8.1.32) ... (8.1.34) для оценки параметра α_1 модели (8.1.27) из примера 10.1.1. Итак, пусть в результате измерений получено $y(0) = 1,5$; $y(1) = 0,6$. Найдем вначале значение p_1 по формуле (8.1.34). Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае $\delta_y(i) = y(i-1)$ и p_1 - скаляры, запишем (8.1.34) в виде

$$p_i = \frac{p_{i-1}}{1 + \delta_y^2(i) p_{i-1}}. \quad (8.1.39)$$

Кроме того, в соответствии с (8.1.35) примем

$$\hat{\alpha}_1^{(0)} = 0; \quad p_0 = 1, \quad (8.1.40)$$

тогда из (9.2.43) при $l = 1$ получим

$$p_1 = \frac{1}{1 + (1,5)^2 \cdot 1} = 0,31.$$

На основе (8.1.32) заключаем

$$\hat{\alpha}_1^{(1)} = \hat{\alpha}_1^{(0)} + p_1 y(0) [y(1) - y(0)\hat{\alpha}_1^{(0)}] = 0,276. \quad (8.1.41)$$

Пусть после третьего измерения получено $y_1(2) = 0,56$. Тогда оценку (8.1.41) можно уточнить. Для этого вычислим

$$p_2 = \frac{p_1}{1 + \delta_y^2(2)p_1} = \frac{0,31}{1 + (0,6)^2 \cdot 0,31} = 0,28$$

и

$$\hat{\alpha}_1^{(2)} = \hat{\alpha}_1^{(1)} + p_2 y(1) [y(2) - y(1)\hat{\alpha}_1^{(1)}] = 0,336. \quad (8.1.42)$$

Затем после четвертого измерения получим $y(3) = 0,236$. Вновь уточняя оценку (8.1.42), найдем

$$p_3 = \frac{p_2}{1 + \delta_y^2(3)p_2} = \frac{0,28}{1 + (0,56)^2 \cdot 0,28} = 0,26;$$

$$\hat{\alpha}_1^{(3)} = \hat{\alpha}_1^{(2)} + p_3 y(2) [y(3) - y(2)\hat{\alpha}_1^{(2)}] = 0,394. \quad (8.1.43)$$

Эта оценка приближается к оценке (8.1.29), полученной при использовании некуррентного алгоритма наименьших квадратов.

8.1.4 Оценка параметров СС-модели

Пусть в (8.1.4) $f(k) = u(k)$ - измеряемая (либо известная) функция управления и пусть измерение $y(k)$ осуществляется при наличии помехи $\chi(k)$, тогда модель со скользящим средним примет вид

$$y(k) = \sum_{i=0}^q h_i u(k-i) + \chi(k). \quad (8.1.44)$$

Это соотношение, выражающее выходной сигнал линейной стационарной системы как взвешенную сумму прошлых значений входного сигнала, можно записать в векторной форме

$$y(k) = \mathbf{h}' \boldsymbol{\delta}'_u(k) + \chi(k), \quad (8.1.45)$$

где $\mathbf{h}' = \|h_0, h_1, \dots, h_n\|$; $\boldsymbol{\delta}_u(k) = \|u(k), u(k-1), \dots, u(k-q)\|'$.

Для оценки вектора \mathbf{h} будем минимизировать функцию

$$L_N = \sum_{k=1}^N \left[y(k) - \hat{\mathbf{h}}' \boldsymbol{\delta}_u(k) \right]^2. \quad (8.1.46)$$

Аналогично (8.1.16) заключаем, что h является решением уравнения

$$\left[\sum_{k=1}^N \boldsymbol{\delta}_u(k) \boldsymbol{\delta}_u'(k) \right] \hat{\mathbf{h}} = \sum_{k=1}^N y(k) \boldsymbol{\delta}_u(k). \quad (8.1.47)$$

Здесь следует отметить, что такая оценка \mathbf{h} не является несмещенной, за исключением случая, когда $\chi(k)$ и $u(k)$ некоррелированы. Убедимся в этом на простом примере. Пусть

$$y(k) = h_0 u(k) + \chi(k) \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (8.1.48)$$

Тогда в соответствии с (8.1.47) получим

$$\hat{h}_0 = \frac{\sum_{k=1}^N y(k) u(k)}{\sum_{k=1}^N u^2(k)}. \quad (8.1.49)$$

Подставляя в (8.1.49) выражение (8.1.48) для $y(k)$, получим

$$\hat{h}_0 = h_0 + \frac{\sum_{k=1}^N \chi(k) u(k)}{\sum_{k=1}^N u^2(k)}. \quad (8.1.50)$$

Отсюда видно, что \hat{h}_0 не стремится к h_0 при $N \rightarrow \infty$, за исключением случая, когда $M\{\chi(k)u(k)\} = 0$. Отметим, что последнее имеет место, в частности, тогда, когда $\chi(k)$ ($k = 0, 1, \dots$) является "белым шумом". Из этого вытекает необходимость "отбеливания" процесса $\chi(k)$ ($k = 0, 1, \dots$).

В связи с этим опишем помеху $\chi(k)$ ($k = 0, 1, \dots$) авторегрессионной моделью

$$\chi(k) = \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i^{(2)} \chi(k-i) + f^{(2)}(k), \quad (8.1.51)$$

где $f^{(2)}(k)$ ($k = 0, 1, \dots$)-гауссовский "белый шум" с нулевым средним.

Требуется оценить параметры $\alpha_i^{(2)}$ ($i = 1, N_2$). Модель, описываемую уравнениями (8.1.44), (8.1.51), можно записать как

$$y = h(z^{-1})u + \chi; \quad \chi = \alpha^{(2)}(z^{-1})\chi + f^{(2)}, \quad (8.1.52)$$

где $h(z^{-1}) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_q z^{-q}$; $\alpha^{(2)}(z^{-1}) = \alpha_1^{(2)} z^{-1} + \dots + \alpha_{N_2}^{(2)} z^{-N_2}$.

Исключая переменную χ , получим

$$y = \alpha^{(2)}(z^{-1})y + [1 - \alpha^{(2)}(z^{-1})]h(z^{-1})u + f^{(2)}. \quad (8.1.53)$$

Обозначая

$$[1 - \alpha^{(2)}(z^{-1})]h(z^{-1}) = b(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{q+N_2} b_i z^{-i}, \quad (8.1.54)$$

представим (8.1.53) в форме

$$y(k) = \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i^{(2)} y(k-i) + \sum_{j=0}^{q+N_2} b_j u(k-j) + f^{(2)}(k),$$

которую можно переписать в векторном виде

$$y(k) = \boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\delta}^{(3)}(k) + f(k), \quad (8.1.55)$$

где

$$\boldsymbol{\alpha}' = \|\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{N_2}^{(2)}, b_0, \dots, b_{q+N_2}\|, \quad \boldsymbol{\delta}^{(3)}(k) = \|y(k-1), \dots, y(k-N_2), u(k), \dots, u(k-q-N_2)\|.$$

Теперь, если порядки q и N_2 известны, то для получения несмещенных эффективных оценок α можно применить рекуррентный алгоритм (8.1.32) ... (8.1.34), затем найти, используя (8.1.54),

$$\hat{h}_0 = \hat{b}_0; \quad \hat{h}_1 = \hat{b}_1 + \hat{\alpha}_1^{(2)} \hat{h}_0, \dots \quad (8.1.56)$$

8.1.5 Оценка параметров АРСС-модели

Переходя к оценке параметров авторегрессионной модели со скользящим средним, запишем (8.1.8) в векторной форме:

$$y(k) = \boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\delta}^{(4)}(k) + \alpha_{n+1} f(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.1.57)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}' &= \|\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+2}, \dots, \alpha_{n+\mu+1}\|; \\ \boldsymbol{\delta}^{(4)}(k) &= \|y(k-1), \dots, y(k-n), f(k-1), \dots, f(k-\mu)\|'. \end{aligned} \right\} \quad (8.1.58)$$

Формально уравнение (8.1.57) эквивалентно уравнению (8.1.14), поэтому для определения вектора параметров α можно использовать рекуррентный алгоритм (8.1.32) ... (8.1.34). Однако вектор $\boldsymbol{\delta}^{(4)}(k)$ содержит неизмеряемые величины $f(k-1), \dots, f(k-\mu)$. В связи с этим оценим, используя (8.1.57), переменную $f(k)$, полагая без потери общности $\alpha_{n+1} = 1$:

$$\hat{f}(k) = y(k) - \hat{\alpha}' \delta^{(4)}(k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (8.1.59)$$

Задаваясь начальными условиями $y(-i) = y^{(0)}(-i)$, $f(-i) = f^{(0)}(-i)$ ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, \mu}$) заменим неизмеряемые компоненты вектора $\delta^{(4)}(k)$ их оценками и сформируем $\hat{\delta}(k) = \|y(k-1), \dots, y(k-n), f(k-1), \dots, f(k-\mu)\|$.

Таким образом, общий алгоритм последовательного оценивания принимает вид

$$\hat{\alpha}^{(i)} = \hat{\alpha}^{(i-1)} + \mathbf{k}^{(i)}[y(i) - \hat{\delta}'(i)\hat{\alpha}^{(i-1)}]; \quad (8.1.60)$$

$$\mathbf{k}^{(i)} = P_i \hat{\delta}(i); \quad (8.1.61)$$

$$P_i = P_{i-1} - P_{i-1} \hat{\delta}(i)[1 + \hat{\delta}'(i)P_{i-1}\hat{\delta}'(i)]^{-1} \hat{\delta}(i)P_{i-1}. \quad (8.1.62)$$

Этот алгоритм может приводить к смещенным оценкам $\hat{\alpha}$. Для получения несмещенных оценок следует полагать в (8.1.58) вместо n число $n' > n$. Фиксируя некоторое n' и используя алгоритм (8.1.60) ... (8.1.62), находим $\hat{\alpha}$ и определяем по формуле (8.1.59) последовательность $f(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), если она некоррелирована, то это свидетельствует о несмещенности и состоятельности оценки $\hat{\alpha}$. Если же последовательность $f(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) коррелирована, то следует увеличить число n' до тех пор, пока элементы этой последовательности окажутся независимыми.

8.1.6 Связь с алгоритмом фильтрации

Рассмотрим объект управления, описываемый авторегрессионной моделью:

$$y(k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y(k-i) + f(k). \quad (8.1.63)$$

Пусть параметры α_i ($i = \overline{1, n}$) этого уравнения неизвестны, а $f(k)$ - последовательность гауссовских случайных величин с нулевым средним и известной дисперсией $r_{11}^{(1)}$.

Интерпретируем задачу определения неизвестных параметров α_i ($i = \overline{1, n}$) как задачу фильтрации. В связи с этим введем в рассмотрение "объект", описываемый уравнениями:

$$\alpha(k+1) = \alpha(k); \quad \alpha(0) = \alpha^{(0)}; \quad (8.1.64)$$

$$y(k) = \delta_y'(k)\alpha + \chi(k). \quad (8.1.65)$$

Первое из них отражает факт постоянства (независимости от k) параметров уравнения (8.1.63), а второе - совпадает с (8.1.63), если учесть (8.1.15) и переобозначить

$f(k) = \chi(k)$. При этом $\delta_y(k)$ - известный (получаемый в процессе работы системы) вектор.

Для "объекта" (8.1.64), (8.1.65) можно построить устройство восстановления (фильтрации) вектора $\alpha(k)$ по результатам измерения сигнала $y(k)$, который состоит из полезного сигнала $\delta'_y(k)\alpha$ и помехи $\chi(k)$. Для построения этого фильтра воспользуемся уравнениями (??) ... (??) оптимальной фильтрации. Очевидно, что в рассматриваемом $\Phi(k) = E_n$, $R(k) = 0$, $D(k) = \delta'_y(k)$ и поэтому уравнения фильтра примут вид:

$$\hat{\alpha}(k+1) = \hat{\alpha}(k) + \mathbf{k}(k+1)[y(k+1) - \delta'_y(k+1)\hat{\alpha}(k)]; \quad (8.1.66)$$

$$\mathbf{k}(k+1) = P_a(k+1)\delta_y(k+1)[\delta'_y(k+1)P_a(k+1)\delta_y(k+1) + r_{11}^{(1)}]^{-1}; \quad (8.1.67)$$

$$P_a(k+1) = [E - \mathbf{k}(k)\delta'_y(k)]P_a(k). \quad (8.1.68)$$

Подставляя (8.1.67) в (8.1.68), получим

$$P_a(k+1) = P_a(k) - P_a(k)\delta_y(k)[\delta'_y(k)P_a(k)\delta_y(k) + r_{11}^{(1)}]^{-1}\delta'_y(k)P_a(k). \quad (8.1.69)$$

Сравнивая (8.1.66), (8.1.69) с (8.1.32) ... (8.1.34), заключаем, что соотношения (8.1.32) ... (8.1.34) определяют алгоритм фильтрации, в котором [9.1]

$$P_a(k) = P_i r_{11}^{(1)}.$$

8.1.7 Программное обеспечение и практикум

ГАММА-директива: 211.3 (Идентификация на основе метода наименьших квадратов).

Исходные данные:

а) Полиномы $d(s)$, $k(s)$ и $m(s)$ объекта с учетом внешних возмущений. Это означает, что объект описывается уравнением: $d(s)y = k(s)u + m(s)f$. Его дискретная модель имеет вид

$$y(k) = -\sum_{i=1}^n \varphi_i z^{-i} y(k) + \sum_{j=0}^n r_j z^{-j} u(k) + \sum_{j=0}^{\mu} c_j z^{-j} f(k), \quad (8.1.70)$$

б) Амплитуды и частоты формируемого входного полигармонического сигнала

$$u(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k \sin \omega_k t, \quad (8.1.71)$$

в) Интервал дискретности T , задаваемый числом делений периода максимальной из частот сигнала (8.1.71)

в) Вид внешнего возмущения.

е) Длительность процесса идентификации задается числом периодов минимальной из частот сигнала (8.1.71)

Результаты:

а) Оценки коэффициентов φ_i и r_i дискретной модели (8.1.70)

а) Графики процесса идентификации.

Используя директиву 211.3 выполняется практикум Пр.3.2. Одна из его целей состоит в исследовании зависимости процесса идентификации от параметров внешнего возмущения и входного (испытательного) сигнала

МАТЛАБ-функции:

1) $th = armax(p, nn)$ - оценка коэффициентов дискретной модели (8.1.70) с помощью метода наименьших квадратов

Аргументы функции:

$p = [y, u]$ - матрица экспериментальных данных; в многомерном случае u является матрицей с числом столбцов равным числу входов.

$nn = [n\varphi, nr, nc]$ - степени полиномов z_1 дискретной модели (8.1.70)

Результаты: Оценки коэффициентов дискретной модели (8.1.70)

2) $thm = rarmax(p, nn, adm, adg)$ - оценка коэффициентов дискретной модели (8.1.70) с помощью рекуррентного метода наименьших квадратов. Здесь adm и adg аргументы, задающие вид процедуры идентификации, например, значения $adm = ff$ и $adg = lam$ задают рекуррентный алгоритм раздела 8.1.3.

Вектор δ в этих функциях содержит наряду с $y(k-1), \dots, y(k-n)$ измеряемые переменные $u(k), \dots, u(k-n)$ и в этом случае выражение для $y(k)$ имеет структуру (8.1.55)

8.2 Конечно-частотная идентификация

Частотные методы служат для идентификации непрерывных объектов управления. В них можно выделить "классический" частотный и конечно-частотный методы идентификации.

В соответствии с первым методом [8.8],[8-9],[8-10] объект возбуждается испытательным сигналом, который является суммой бесконечного числа известных гармоник. Коэффициенты передаточной функции объекта находятся минимизацией суммы квадратов разности измеряемых частотных характеристик и частотных характеристик, соответствующих искомому коэффициенту. Возмущения предполагаются белым шумом и для минимизации указанной суммы используется специальный метод наименьших квадратов.

В конечно-частотном методе [8-11] испытательный сигнал содержит минимально возможное число гармоник (равное размерности вектора пространства состояний объекта) и это позволяет существенно расширить класс возмущений и помех, при которых достигается необходимая точность идентификации.

8.2.1 Постановка задачи и подход к ее решению

Рассмотрим полностью управляемый и асимптотически устойчивый объект управления, описываемый уравнением

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0y = k_m u^{(m)} + \dots + k_1\dot{u} + k_0u + f, \quad (8.2.1)$$

в котором коэффициенты a_i, k_j ($i = \overline{0, n-1}$ ($i = \overline{0, m}$ – неизвестные числа, n – известно, m ($m < n$) – неизвестно, $f(t)$ – неизвестная ограниченная функция

$$|f(t)| \leq f^*, \quad (8.2.2)$$

где f^* – число.

Задача идентификации состоит в нахождении оценок \hat{d}_i и \hat{k}_i ($i = \overline{0, n-1}$) коэффициентов уравнения (8.2.1) таких, чтобы ошибки идентификации $\Delta d_i = d_i - \hat{d}_i$, $\Delta k_j = k_j - \hat{k}_j$ удовлетворяли требованиям

$$|\Delta d_i| \leq \varepsilon_i^d, \quad |\Delta k_i| \leq \varepsilon_i^k \quad (i = \overline{0, n-1}), \quad (8.2.3)$$

в которых $\varepsilon_i^d, \varepsilon_i^k$ ($i = \overline{0, n-1}$) – заданные числа.

Отличие этой задачи от рассматриваемых ранее состоит в том, что неизвестны стохастические характеристики возмущения $f(t)$. Отсутствие сведений о возмущении приводит к тому, что выход объекта $y(t)$ зависит от неизвестных его коэффициентов и неизвестного возмущения, и поэтому, точность идентификации ограничена в принципе и зависит от возмущения, реализующегося в процессе идентификации.

Необходимо выделить составляющую выхода, которая зависит только от неизвестных коэффициентов.

Для этой цели используем испытательный сигнал

$$u(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k \sin \omega_k t, \quad (8.2.4)$$

в котором амплитуды ρ_k ($k = \overline{1, n}$) и испытательные частоты ω_k ($k = \overline{1, n}$) – заданные положительные числа.

В этом случае выход объекта можно представить как

$$y(t) = y_n(t) + y_0(t) + y_f(t), \quad (8.2.5)$$

где $y_n(t)$ – составляющая, вызванная испытательным сигналом (8.2.4), $y_0(t)$ – зависит от начальных условий, $y_f(t)$ возбуждается возмущением $f(t)$.

Составляющая $y_n(t)$ не зависит от возмущения и поэтому необходимо выделить ее из выходного сигнала и затем использовать ее для идентификации, достигая при этом требуемой точности (8.2.3). Такое выделение осуществляется с помощью фильтра Фурье, с помощью которого находятся оценки частотных параметров.

8.2.2 Частотные параметры и частотные уравнения

Частотными параметрами называется набор $2n$ чисел

$$\alpha_k = \operatorname{Re} w(j\omega_k), \quad \beta_k = \operatorname{Im} w(j\omega_k) \quad (k = \overline{1, n}), \quad (8.2.6)$$

где $w(s) = \frac{k(s)}{d(s)}$.

Найдем связь частотных параметров с коэффициентами объекта

Очевидно, что

$$\frac{k(j\omega_k)}{d(j\omega_k)} = \alpha_k + j\beta_k \quad (k = \overline{1, n}). \quad (8.2.7)$$

Отсюда следует система уравнений

$$k(j\omega_k) - (\alpha_k + j\beta_k)\bar{d}(j\omega_k) = (\alpha_k + j\beta_k)(j\omega_k)^n \quad (k = \overline{1, n}), \quad (8.2.8)$$

где $\bar{d}(s) = d(s) - s = d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_0$.

Заменяя в этой системе частотные параметры их оценками $\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k$ ($k = \overline{1, n}$), которые, как показано ниже, являются выходами фильтра Фурье, и записывая ее в более подробной форме, получим частотные уравнения идентификации

$$\sum_{i=0}^{n-1} (j\omega_k)^i \hat{k}_i - (\hat{\alpha}_k + j\hat{\beta}_k) \sum_{i=0}^{n-1} (j\omega_k)^i \hat{d}_i = (\hat{\alpha}_k + j\hat{\beta}_k)(j\omega_k)^n \quad (k = \overline{1, n}). \quad (8.2.9)$$

Эти уравнения можно записать в виде системы $2n$ линейных алгебраических уравнений для определения $2n$ неизвестных \hat{k}_i и \hat{d}_i ($i = \overline{0, n-1}$).

Утверждение. Если объект полностью управляем, испытательные частоты ω_k ($k = \overline{1, n}$) – различны и частотные параметры известны точно ($\hat{\alpha}_k = \alpha_k, \hat{\beta}_k = \beta_k$ $k = \overline{1, n}$), то [8-11] частотные уравнения (8.2.9) имеют единственное решение $\hat{d}_i = d_i, \hat{k}_i = k_i$ (где $k_{n-1} = \dots = k_{m+1} = 0$) и это решение не зависит от выбора испытательных частот.

Пример. Запишем частотные уравнения для случая $n = 2$. В этом случае объект описывается уравнением

$$\ddot{y} + d_1 \dot{y} + d_0 y = k_1 \dot{u} + k_0 u. \quad (8.2.10)$$

Частотные уравнения для определения оценок коэффициентов этого объекта имеют вид

$$\hat{k}_0(j\omega_k)\hat{k}_1 - (\hat{\alpha}_k + j\hat{\beta}_k)(\hat{d}_0 + (j\omega_k)\hat{d}_1) = (\hat{\alpha}_k + j\hat{\beta}_k)(j\omega_k)^2, \quad (k = 1, 2). \quad (8.2.11)$$

Их можно записать как систему из 4^x уравнений:

$$\begin{aligned}\hat{k}_0 - \hat{\alpha}_k \hat{d}_0 + \hat{\beta}_k \omega_k \hat{d}_1 &= -\hat{\alpha}_k \omega_k^2 \\ \omega_k \hat{k}_1 - \beta_k \hat{d}_0 - \hat{\alpha}_k \omega_k \hat{d}_1 &= -\hat{\beta}_k \omega_k^2\end{aligned} \quad (k = 1, 2) \quad (8.2.12)$$

для определения 4^x неизвестных $\hat{d}_1, \hat{d}_0, \hat{k}_1, \hat{k}_0$.

8.2.3 Экспериментальное определение частотных параметров

Подадим выход объекта (8.2.1), возбужденного испытательным сигналом (8.2.4) на вход фильтра Фурье, описываемого выражениями

$$\begin{aligned}\alpha_k(\tau) &= \frac{2}{\rho_k \tau} \int_0^\tau y(t) \sin \omega_k t dt \\ \beta_k(\tau) &= \frac{2}{\rho_k \tau} \int_0^\tau y(t) \cos \omega_k t dt\end{aligned} \quad (k = \overline{1, n}), \quad (8.2.13)$$

где τ – время фильтрации.

Обозначим $\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k$ ($k = \overline{1, n}$) выходы фильтра при фиксированном τ .

Убедимся, что при отсутствии возмущения ($f(t) = 0$) выходы фильтра сходятся к частотным параметрам:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \alpha_k(\tau) = \alpha_k, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \beta_k(\tau) = \beta_k \quad (k = \overline{1, n}). \quad (8.2.14)$$

Составляющая выхода объекта, вызванная испытательным сигналом состоит из вынужденной компоненты $y_{\text{в}}(t)$ и сопровождающей (затухающей) функции $\varkappa_{\text{н}}(t)$: $y_{\text{н}}(t) = y_{\text{в}}(t) + \varkappa_{\text{н}}(t)$.

Вынужденная составляющая описывается выражением

$$y_{\text{в}}(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k [\alpha_k \sin \omega_k t + \beta_k \cos \omega_k t]. \quad (8.2.15)$$

Подставляя выражение (8.2.5) для выхода объекта с учетом $f(t) = 0$ и соотношения (8.2.15) в (8.2.13), получим, например, для первого выхода фильтра

$$\begin{aligned}\alpha_1(\tau) &= \frac{2}{\tau} \int_0^\tau [\alpha_1(t) \sin \omega_k t + \beta_1 \cos \omega_k t] \sin \omega_k t dt + \alpha_{10}(t) + \alpha_{1\text{н}}(t) = \\ &= \alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\tau} \int_0^\tau \cos 2\omega_1 t dt + \frac{\beta_1}{\tau} \int_0^\tau \sin 2\omega_1 t dt + \alpha_{10}(t) + \alpha_{1\text{н}}(t),\end{aligned} \quad (8.2.16)$$

где

$$\alpha_{10}(t) = \frac{2}{\rho_1 \tau} \int_0^\tau [\alpha_{10}(t) + y_0(t)] \sin \omega_1 t \, dt; \quad (8.2.17)$$

$$\alpha_{1n}(t) = \frac{2}{\rho_1 \tau} \int_0^\tau \left[\sum_{k=2}^n \rho_k [\alpha_k \sin \omega_k t + \beta_k \cos \omega_k t] \sin \omega_1 t \, dt \right].$$

Так как значения интегральных выражений ограничены, то из (8.2.16) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \alpha_1(\tau) = \alpha_1$. Для остальных выходов фильтра ситуация аналогична и поэтому справедливо соотношение (8.2.14).

Когда возмущение $f(t) \neq 0$, то эти соотношения могут нарушаться. Например, если $f(t)$ содержит гармоники, частоты которых совпадают с испытательными частотами, а амплитуды неизвестны. В этом случае амплитуда результирующего "испытательного сигнала" известна с точностью до неизвестных амплитуд гармоник возмущения.

Опишем возмущения, при которых выходы фильтра сходятся к частотным параметрам.

Введем экспериментально получаемые функции

$$\begin{aligned} \ell_k^\alpha(\tau) &= \frac{2}{\rho_k \tau} \int_0^\tau \bar{y}(t) \sin \omega_k t \, dt; \\ \ell_k^\beta(\tau) &= \frac{2}{\rho_k \tau} \int_0^\tau \bar{y}(t) \cos \omega_k t \, dt, \end{aligned} \quad (8.2.18)$$

являющиеся выходами фильтра Фурье, на входы которого подается "естественный" выход объекта, когда $u(t) = 0$, $(\bar{y}(t) = y_0(t) + y_f(t))$.

Определение. Возмущение $f(t)$ называется **ФФ-фильтруемым** (фильтруемым с помощью фильтра Фурье) на заданном наборе испытательных частот ω_k ($k = \overline{1, n}$) если существует время фильтрации τ^* такое, что выполняются неравенства

$$|\ell_k^\alpha(\tau)| \leq \varepsilon_k^\alpha, \quad |\ell_k^\beta(\tau)| \leq \varepsilon_k^\beta \quad (k = \overline{1, n}), \quad (8.2.19)$$

в которых ε_k^α и ε_k^β ($k = \overline{1, n}$) – заданные числа.

Если возмущения таковы, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \ell_k^\alpha(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \ell_k^\beta(\tau) = 0, \quad (8.2.20)$$

то оно называется строго **ФФ-фильтруемым**.

■

Нетрудно проверить, что, например, возмущение

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n_1} \delta_k \sin \omega_k^f t, \quad (8.2.21)$$

где $n_1, \delta_k, \omega_k^f$ – неизвестные числа, является строго ФФ-фильтруемым, если $\omega_k^f \neq \omega_i$ ($(i = \overline{1, n}), k = \overline{1, n_1}$).

Утверждение. Если возмущение $f(t)$ является ФФ-фильтруемым, то существует время фильтрации τ^{**} такое, что ошибки фильтрации $\Delta\alpha^k(\tau) = \alpha^k - \alpha^k(\tau)$, $\Delta\beta^k(\tau) = \beta^k - \beta^k(\tau)$ ($k = \overline{1, n}$), удовлетворяют неравенствам

$$|\Delta\alpha_k(\tau)| \leq \varepsilon_k^\alpha, \quad |\Delta\alpha_k(\tau)| \leq \varepsilon_k^\beta (k = \overline{1, n}), \quad (8.2.22)$$

Если возмущение – строго ФФ-фильтруемо, то эти ошибки – исчезающие функции

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Delta\alpha_k(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Delta\beta_k(\tau) = 0 \quad (k = \overline{1, n}), \quad (8.2.23)$$

■

Доказательство утверждения следует из функции оценок частотных параметров

$$\alpha_k(\tau) = \alpha_k + e_k^\alpha(\tau) + \ell_k^\alpha(\tau), \quad \beta_k(\tau) = \beta_k + e_k^\beta(\tau) + \ell_k^\beta(\tau) (k = \overline{1, n}), \quad (8.2.24)$$

в котором слагаемые $e_k^\alpha(\tau)$ и $e_k^\beta(\tau)$ ($k = \overline{1, n}$) – зависят от исчезающих функций $\varkappa_n(t)$ и $y_0(t)$ и поэтому $\lim_{\tau \rightarrow \infty} e_k^\alpha(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e_k^\beta(\tau) = 0$ ($k = \overline{1, n}$). Учитывая условия (8.2.19), получим неравенства (8.2.22) и (8.2.23).

8.2.4 Алгоритм идентификации

Далее будем полагать, что испытательные сигналы кратны базовой частоте ω_6 . Это означает, что $\omega_k = c_k \omega_6$ ($k = \overline{1, n}$), где c_k ($k = \overline{1, n}$) – заданные целые положительные числа. Будем измерять выходы фильтра Фурье в дискретные моменты $\tau = qT_6$, где базовый период $T_6 = \frac{2\pi}{\omega_6}$, $q = 1, 2, \dots$. В этом случае, как нетрудно показать, ошибки фильтрации уменьшаются, так как составляющие выхода вида (8.2.17) равны нулю.

Для определения длительности идентификации будем использовать следующие необходимые условия сходимости идентификации

$$|d_i(qT_6) - d_i[(q-1)T_6]| \leq \varepsilon_i^d, \quad |k_i(qT_6) - k_i[(q-1)T_6]| \leq \varepsilon_i^k \quad (i = \overline{0, n-1}), \quad (8.2.25)$$

где $d_i(qT_6)$ и $k_i(qT_6)$ ($i = \overline{0, n-1}$) – оценки коэффициентов объекта, получаемые в результате решения частотных уравнений (8.2.9), в которых $\hat{\alpha}_k = \alpha_k(qT_6)$, $\hat{\beta}_k = \beta_k(qT_6)$ $q = 1, 2, \dots$

Алгоритм. (алгоритм конечно-частотной идентификации):

- приложить выход объекта (8.2.1), возбужденного испытательным сигналом (8.2.4), ко входу фильтра Фурье (8.2.13);



- измерить выходы $\alpha_k(qT_6)$ и $\beta_k(qT_6)$ ($k = \overline{1, n}$) этого фильтра в моменты времени $\tau = (qT_6)$ $q = 1, 2, \dots$;
- найти оценки коэффициентов объекта, решая для каждого момента времени $\tau = (qT_6)$ частотные уравнения (8.2.9);
- проверять необходимые условия (8.2.25) для каждого q до тех пор, пока эти условия не выполняются для некоторого $q = q_1$.

В момент времени $\tau = q_1 T_6$ начинается процесс подтверждения модели. Его цель косвенно проверить выполнение требований (8.2.3) к точности идентификации. Способ подтверждения модели будет рассмотрен в разделе 10.2 (примечание 10.2.3).

Если результат идентификации неудовлетворителен, то идентификация продолжается до тех пор, пока будет достигнута необходимая точность. Достижимость цели идентификации, выражаемой неравенствами (8.2.3), определяется свойствами возмущения. Если возмущение строго ФФ-фильтруемо, то процесс идентификации сходится к истинным значениям коэффициентов объекта:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} d_i(qT_6) = d_i, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} k_i(qT_6) = k_i, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (8.2.26)$$

Это следует из утверждения (8.2.1) и (8.2.2).

Если возмущение только ФФ-фильтруемо, то выполнение требований (8.2.3) зависит от границ ε_i^α и ε_i^β ($i = \overline{1, n}$) в неравенствах (8.2.19).

8.2.5 Выбор амплитуд и частот испытательного сигнала

Выше предполагалось, что амплитуды и частоты испытательного сигнала (8.2.4) заданы. В действительности они неизвестны и находятся на первом этапе идентификации, называемом планированием эксперимента [8.2].

Если испытательные частоты известны, то амплитуды испытательного сигнала легко находятся из следующего условия "малости возбуждения":

$$|y(t) - \bar{y}(t)| \leq \varepsilon_y, \quad (8.2.27)$$

в котором ε_y – заданное положительное число.

Это условие означает, что испытательное воздействие может изменять "естественный" выход объекта $y(t)$ лишь в пределах заданного допуска ε_y .

Определение значений испытательных частот является более сложной задачей. Интуитивно ясно, что эти частоты должны выбираться из диапазона частот, где логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) объекта имеет изломы. На первый взгляд может показаться, что это противоречит утверждению 8.3.2, в соответствии с которым решение частотных уравнений не зависит от выбора испытательных частот. Однако, в действительности, это справедливо лишь при точно известных частотных параметрах, а в частотных уравнениях используются их оценки, и поэтому

8.2.6 Программное обеспечение и практикум

ГАММА-директива: 111.4 (Конечно-частотная идентификация).

Исходные данные:

а)Полиномы $d(s)$, $k(s)$ и $m(s)$ объекта (8.2.1), который описывается уравнением :
 $d(s)y = k(s)u + m(s)f$.

б)Вид внешнего возмущения.

в)Амплитуды и частоты испытательного сигнала (8.2.4)

г)Длительность процесса идентификации задается числом периодов минимальной из частот испытательного сигнала

д)Интервал дискретности T , задаваемый числом делений периода максимальной из частот испытательного сигнала .

Результаты:

а)Оценки коэффициентов d_i $i = \overline{0, n}$ и k_j $j = \overline{0, m}$ объекта (8.2.1)

а)Графики процесса идентификации.

Используя директиву 111.4 выполняется практикум Пр.3.1.Одна из его целей состоит в исследовании зависимости процесса идентификации от параметров внешнего возмущения и испытательного сигнала

Глава 9 Адаптивные стохастические системы

В этой главе строятся параметрически адаптивные системы. Алгоритм регулирования этих систем основывается на модальном управлении, а в качестве идентификационного алгоритма адаптации используются процедуры метода наименьших квадратов.

9.1 Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемый дискретный объект управления, описываемый уравнением

$$y(k) + \varphi_1 y(k-1) + \dots + \varphi_n y(k-n) = r_1 u(k-1) + \dots + r_\mu (k-\mu) + f(k), \quad (9.1.1)$$

где $y(k)$ – измеряемая (выходная) переменная объекта; $f(k)$ – внешнее воздействие, являющееся случайным процессом с независимыми значениями (случайным процессом типа ”белый шум”), причем

$$M\{f(k)\} = 0; \quad M\{f^2(k)\} = \sigma_f^2 \quad (9.1.2)$$

(σ_f^2 – некоторое число), параметры φ_i , r_j , ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, \mu}$) – неизвестные числа.

Требуется найти алгоритм управления, при котором достигается цель управления, задаваемая критерием

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M\{y^2(k)\} < \Delta, \quad (9.1.3)$$

в котором Δ – заданное число.

Возвращаясь к первому этапу синтеза, допустим, что параметры $\varphi_i, r_i, (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, \mu})$ объекта (9.1.1) известны. Пусть в (9.1.3) число $\Delta = \infty$. Цель управления

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M\{y^2(k)\} < \infty \quad (9.1.4)$$

достигается при любом регуляторе, обеспечивающем асимптотическую устойчивость системы. Потребуем дополнительно к асимптотической устойчивости, чтобы корни характеристического полинома замкнутой системы имели наперед заданные значения. Таким образом, речь идет о построении модального управления для объекта (9.1.1). Уравнение регулятора имеет вид

$$\varphi_{p0}u(k) + \varphi_{p1}u(k-1) + \dots + \varphi_{pn}u(k-n_p) = r_{p0}y(k) + \dots + r_{p\mu_p}y(k-\mu_p), \quad (9.1.5)$$

где $\varphi_{pi}, r_{pj} (i = \overline{0, n_p}, j = \overline{0, \mu_p})$ – искомые числа.

Преобразуя (9.1.1), (9.1.5) по Лапласу при нулевых начальных условиях, запишем уравнения объекта и регулятора в виде

$$\varphi(z^{-1})y = r(z^{-1})u + f(k); \quad (9.1.6)$$

$$\varphi_p(z^{-1})u = r_p(z^{-1})y + r_{p0}y, \quad (9.1.7)$$

где z – комплексное число;

$$\varphi(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^n \varphi_i z^{-i}; \quad r(z^{-1}) = \sum_{i=1}^{\mu} r_i z^{-i}; \quad (9.1.8)$$

$$\varphi_p(z^{-1}) = \varphi_{p0} + \sum_{i=1}^{n_p} \varphi_{pi} z^{-i}; \quad r_p(z^{-1}) = \sum_{i=1}^{\mu_p} r_{pi} z^{-i}. \quad (9.1.9)$$

Для удобства далее будем использовать обозначения $z^{-i} = \lambda^i$ и положим в (9.1.8) $\mu = n$, предполагая коэффициенты при отсутствующих степенях z равными нулю. Аналогично, положим в (9.1.9) $\mu_p = n_p$ и будем искать параметры регулятора (9.1.5) при условии, что $\mu_p = n$. При этих предположениях характеристический полином системы (9.1.6), (9.1.7) имеет вид

$$D(\lambda) = \varphi(\lambda)\varphi_p(\lambda) - r(\lambda)r_p(\lambda) = \left(1 + \sum_{i=1}^n \varphi_i \lambda^i\right) \left(\sum_{i=0}^n \varphi_{pi} \lambda^i\right) - \left(\sum_{i=1}^n r_i \lambda^i\right) \left(\sum_{i=0}^n r_{pi} \lambda^i\right). \quad (9.1.10)$$

$$D^*(\lambda) = \left(\prod_{i=1}^{2n} \lambda_i^* \right)^{-1} \prod_{i=1}^{2n} (\lambda_i - \lambda_i^*) = d_{2n}^* \lambda^{2n} + \dots + d_1 \lambda + 1, \quad (9.1.11)$$

где λ_i^* ($i = \overline{1, 2n}$) – заданные числа, $|\lambda_i| \geq 1$ ($i = \overline{1, 2n}$).

Для реализуемости алгоритма регулирования (9.1.5) потребуем, чтобы

$$r_{p0} = 0. \quad (9.1.12)$$

Кроме того, пусть

$$\varphi_{p0} = 1. \quad (9.1.13)$$

Для определения остальных параметров регулятора (9.1.5) приравняем полиномы (9.1.10), (9.1.11). Тогда

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n \varphi_i \lambda^i \right) \left(1 + \sum_{i=1}^n \varphi_{pi} \lambda^i \right) - \left(\sum_{i=1}^n r_i \lambda^i \right) \left(\sum_{i=1}^n r_{pi} \lambda^i \right) - \sum_{i=1}^{2n} d_i^* \lambda^i - 1 = 0. \quad (9.1.14)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных φ_{pi} , r_{pi} ($i = \overline{1, n}$). Эта система имеет вид

$$N(\beta \mathbf{v}) = \mathbf{d}^*, \quad (9.1.15)$$

где $\mathbf{v} = \|\varphi_{p1}, \dots, \varphi_{pn}, r_{p1}, \dots, r_{pn}\|'$; $\mathbf{d}^* = \|d_{2n}^*, d_{2n-1}^*, \dots, d_1^*\|'$; $N(\beta)$ – матрица чисел размеров $2n \times 2n$, элементами которой являются известные параметры объекта (9.1.1), представленные как компоненты вектора $\beta = \|\varphi_1, \dots, \varphi_n, r_1, \dots, r_n\|$. В [?] показано, что если объект (9.1.1) полностью управляем [это означает, что полиномы $\varphi(\lambda)$ и $r(\lambda)$ не имеют общих корней] и $d_{2n}^* \neq 0$, то система (9.1.15) имеет единственное решение относительно искомых параметров φ_{pi} , r_{pi} ($i = \overline{1, n}$).

Утверждение.. Процедура определения параметров регулятора (9.1.5), при котором характеристический полином замкнутой системы (9.1.1), (9.1.5) имеет заданные значения λ_i^* ($i = \overline{1, 2n}$) заключается в следующем:

- 1) сформировать коэффициенты d_i^* ($i = \overline{1, 2n}$) желаемого полинома (9.1.11);
- 2) на основе уравнения (9.1.14) построить матрицу чисел $N(\beta)$ уравнения (9.1.15);
- 3) решить уравнение (9.1.15) и найти параметры регулятора (9.1.5).

Пример. Модальное управление гирорамой.

Рассмотрим гирораму, дискретная модель которой описывается уравнениями (4.3.31), (4.3.32).

$$x_1(k+1) = x_1(k) + \varphi_{12}x_2(k) + \varphi_{13}x_3(k) + r_1(u(k) + f(k)); \quad (9.1.16)$$

$$x_2(x+1) = \varphi_{22}x_2(k) + \varphi_{23}x_3(k) + r_2(u(k) + f(k)); \quad (9.1.17)$$

$$x_3(k+1) = \varphi_{32}x_2(k) + \varphi_{33}x_3(k) + r_3(u(k) + f(k)); \quad (9.1.18)$$

$$y(k) = x_1(k) + \chi(k). \quad (9.1.19)$$

Требуется найти параметры регулятора

$$u(k) + \varphi_{p1}u(k-1) + \varphi_{p2}u(k-2) + \varphi_{p3}u(k-3) = r_{p1}y(k-1) + r_{p2}y(k-2) + r_{p3}y(k-3), \quad (9.1.20)$$

такие, чтобы корни характеристического полинома замкнутой системы (9.1.16) ... (9.1.20) имели заданные значения $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*$.

Переходя к решению этой задачи, приведем уравнения гиросамы (9.1.16) ... (9.1.19) к виду (9.1.1). Для этого запишем соотношения

$$y(k) = x_1(k) + \chi(k) = \mathbf{d}\mathbf{x}(k) + \chi(k); \quad \mathbf{d} = \|1, 0, 0\|;$$

$$y(k-1) = \mathbf{d}\mathbf{x}(k) + \chi(k-1) = \mathbf{d}\Phi^{-1}\mathbf{x}(k) - \mathbf{d}\Phi^{-1}\mathbf{r}(u(k-1) + f(k-1)) + \chi(k-1);$$

$$y(k-2) = \mathbf{d}\Phi^{-2}\mathbf{x}(k) - \mathbf{d}\Phi^{-2}\mathbf{r}(u(k-1) + f(k-1)) - \mathbf{d}\Phi^{-1}\mathbf{r}(u(k-2) + f(k-2)) + \chi(k-2).$$

Разрешая эту систему из трех уравнений относительно трехмерного вектора $\mathbf{x}(k)$ и подставляя полученное выражение для $x(k)$ в уравнение $y(k-3) = \mathbf{d}\Phi^{-3}\mathbf{x}(k) - \mathbf{d}\Phi^3\mathbf{r} \times (u(k-1) + f(k-1)) - \mathbf{d}\Phi^{-2}\mathbf{r}(u(k-2) + f(k-2)) - \mathbf{d}\Phi^{-1}\mathbf{r}(u(k-3) + f(k-3)) + \chi(k-3)$, получим уравнение гиросамы в форме "вход-выход" (9.1.1):

$$y(k) + \varphi_1y(k-1) + \varphi_2y(k-2) + \varphi_3y(k-3) = r_1u(k-1) + r_2u(k-2) + r_3u(k-3) + r_1f(k-1) + r_2f(k-2) + r_3f(k-3) + r_0^{(1)}\chi(k) + r_1^{(1)}\chi(k-1) + r_2^{(1)}\chi(k-2) + r_3^{(1)}\chi(k-3). \quad (9.1.21)$$

Опускаем пока внешние возмущения и помехи и запишем это уравнение в виде

$$y(k) + \varphi_1y(k-1) + \varphi_2y(k-2) + \varphi_3y(k-3) = r_1u(k-1) + r_2u(k-2) + r_3u(k-3). \quad (9.1.22)$$

В соответствии с процедурой модального управления объектом сформируем желаемый полином замкнутой системы

$$\begin{aligned} D^*(\lambda) &= [\lambda_1^*\lambda_2^*\lambda_3^*\lambda_4^*\lambda_5^*\lambda_6^*]^{-1} (\lambda - \lambda_1^*) (\lambda - \lambda_2^*) (\lambda - \lambda_3^*) (\lambda - \lambda_4^*) (\lambda - \lambda_5^*) (\lambda - \lambda_6^*) = \\ &= d_6^*\lambda^6 + d_5^*\lambda^5 + d_4^*\lambda^4 + d_3^*\lambda^3 + d_2^*\lambda^2 + d_1^*\lambda + d_0^*. \end{aligned} \quad (9.1.23)$$

Характеристический полином системы (9.1.20), (9.1.22) имеет вид

$$D(\lambda) = \left(1 + \varphi_1\lambda + \varphi_2\lambda^2 + \varphi_3\lambda^3\right) \left(1 + \varphi_{p1}\lambda + \varphi_{p2}\lambda^2 + \varphi_{p3}\lambda^3\right) - \left(r_1\lambda + r_2\lambda^2 + r_3\lambda^3\right) \left(r_{p1}\lambda + r_{p2}\lambda^2 + r_{p3}\lambda^3\right). \quad (9.1.24)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ полиномов (9.1.23), (9.1.24), получим систему алгебраических уравнений (9.1.15):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_3\varphi_{p3} - r_3r_{p3} &= d_6^*; \quad \varphi_2\varphi_{p3} + \varphi_3\varphi_{p2} - r_2r_{p3} - r_3r_{p2} = d_5^*; \\ \varphi_3\varphi_{p1} + \varphi_2\varphi_{p2} + \varphi_1\varphi_{p3} - r_3r_{p1} - r_2r_{p2} - r_1r_{p3} &= d_4^*; \\ \varphi_3 + \varphi_2\varphi_{p1} + \varphi_1\varphi_{p2} + \varphi_{p3} - r_2r_{p1} - r_1r_{p2} &= d_3^*; \\ \varphi_2 + \varphi_1\varphi_{p1} + \varphi_{p2} - r_1r_{p1} &= d_2^*; \quad \varphi_1 + \varphi_{p1} = d_1^*. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.25)$$

Решая эту систему из шести линейных уравнений, получим искомые значения параметров φ_{p1} , φ_{p2} , φ_{p3} , r_{p1} , r_{p2} , r_{p3} , регулятора (9.1.20).

9.2 Алгоритм адаптации

9.2.1 Построение алгоритма на основе метода наименьших квадратов

Переходя к алгоритму идентификации параметров объекта (9.1.1), представим его в форме

$$y(k+1) + \varphi_1y(k) + \dots + \varphi_ny(k-n+1) = r_1u(k) + \dots + r_\mu u(k-\mu+1) + f(k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (9.2.1)$$

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\delta}(k) &= \|y(k), \dots, y(k-n+1), u(k), \dots, u(k-\mu+1)\|'; \\ \boldsymbol{\beta} &= \|\varphi_1, \dots, \varphi_n, r_1, \dots, r_\mu\|', \end{aligned} \right\} \quad (9.2.2)$$

запишем (9.2.1) как

$$y(k+1) - \boldsymbol{\delta}'(k)\boldsymbol{\beta} = f(k+1).$$

Вектор неизвестных параметров $\boldsymbol{\beta}$ будем искать из условия минимума суммы квадратов невязок

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N [y(k+1) - \boldsymbol{\delta}'(k)\boldsymbol{\beta}]^2.$$

В соответствии с методом наименьших квадратов этот минимум достигается, если сходится последовательность оценок этого вектора, задаваемая соотношениями (??), (??). Однако их формальное использование может не дать результата, поскольку вектор $\boldsymbol{\delta}(k)$ в этих соотношениях содержит значения переменной y в различные моменты времени, а вектор $\boldsymbol{\delta}(k)$, определяемый (9.2.2), включает в себя входную переменную

u . Если $u(k)$ является выходом регулятора (9.1.5), параметры которого определяются в результате процедуры, описанной в утверждении 9.1.1 при условии, что в (9.1.15) β заменяется его оценкой, то можно построить последовательность, сходящуюся к искомому вектору β .

Такая последовательность определяется рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned}\beta(k+1) &= \beta(k) + P(k)\delta(k)[y(k+1) - \delta'(k)\beta(k)]h(k)c(k); \\ \beta(0) &= \beta^{(0)};\end{aligned}\tag{9.2.3}$$

$$P(k+1) = P(k) - P(k)\delta(k)\delta'(k)P(k)h(k)c(k);\tag{9.2.4}$$

где

$$h(k) = \left(1 + \sum_{i=1}^{n+\mu} \delta_i^2(k)\right)^{-1/2}; \quad c(k) = (1 + h(k)\delta'(k)P(k)\delta(k))^{-1},\tag{9.2.5}$$

которые являются некоторой модификацией соотношений (??) ... (??) и при $h(k) = 1$ с точностью до обозначений совпадают с ними.

Утверждение. Пусть имеется объект управления, описываемый уравнением (9.1.1), с неопределенными параметрами. Адаптивный регулятор, обеспечивающий достижение цели управления (9.1.3) при $\Delta = \infty$, описывается уравнением

$$u(k) + \varphi_{p1}(k)u(k-1) + \dots + \varphi_{pn}(k)u(k-n) = r_{p1}(k)y(k-1) + \dots + r_{pn}(k)y(k-n),\tag{9.2.6}$$

параметры которого являются решением линейного алгебраического уравнения

$$N(\beta(k))\mathbf{v}(k) = \mathbf{d}^*,\tag{9.2.7}$$

где $\beta(k)$ – вектор оценок параметров объекта (9.1.1), получаемых на основе рекуррентных соотношений (9.2.3) ... (9.2.5).

В этих соотношениях вектор $\delta(k)$, определяемый (9.2.2), доступен непосредственному измерению. При достаточно больших значениях k векторы $|\beta(k) - \beta| \leq E_\varepsilon$ (ε – достаточно малое положительное число) и корни характеристического уравнения системы (9.1.11), (9.2.6) будут близки к заданным числам λ_i^* ($i = \overline{1, 2n}$).

Строгая формулировка этого утверждения и его доказательство приведены в работе [10.3]. В книге [6.5] эти результаты развиваются на случай, когда $\Delta \neq \infty$. Там же получены алгоритмы оптимального (в смысле критериев $J = \lim_{k \rightarrow +\infty} M\{y^2(k)\}$ и $J = \lim_{k \rightarrow +\infty} M\{y^2(k) + u^2(k)\}$ адаптивного управления; кроме того, в [6.5] указаны пути обобщения на многомерные системы.

Пример. Параметрически адаптивная система управления гирорамой.

Рассмотрим гирораму, дискретная модель которой описывается уравнениями (9.1.16) ... (9.1.19). Пусть ее параметры изменяются непредвиденным образом. Причина этих

изменений может быть различна. Так, например, при сбоях в питании гиросмотора кинетический момент гироскопа будет изменяться. При этом скорость изменения кинематического момента будет мала по сравнению со скоростями переходного процесса в гиросмоторе, поэтому гипотеза квазистационарности будет выполняться. Это означает, что можно полагать в (9.1.16) ... (9.1.19) параметры φ_{ij} , r_i ($i, j = \overline{1, 3}$) постоянными, но неизвестными величинами.

Приведем уравнения (9.1.16) ... (9.1.19) к виду (9.1.21) и будем полагать, что совокупность внешних возмущений и помех в правой части (9.1.21) является процессом типа "белый шум".

Регулятор описывается уравнением

$$\begin{aligned} u(k) + \varphi_{p1}(k)u(k-1) + \Phi_{p2}(k-2) + \varphi_{p3}(k)u(k-3) = \\ = r_{p1}(k)y(k-1) + r_{p2}(k)y(k-2) + r_{p3}(k)y(k-3), \end{aligned} \quad (9.2.8)$$

изменяющиеся параметры которого находятся как решения уравнений, построенных на основе (9.1.25):

$$\left. \begin{aligned} -\beta_3(k)\varphi_{p3}(k) + \beta_6(k)r_{p3}(k) &= d_6^*; \\ -\beta_2(k)\varphi_{p3}(k) - \beta_3(k)\varphi_{p2}(k) - \beta_5(k)r_{p3} - \beta_6(k)r_{p2}(k) &= d_5^*; \\ -\beta_3(k)\varphi_{p1}(k) - \beta_2(k)\varphi_{p2}(k) - \beta_1(k)\varphi_{p3}(k) - \beta_6(k)r_{p1}(k) - \beta_5(k)r_{p2}(k) - \beta_4(k)r_{p3}(k) &= d_4^*; \\ -\beta_3(k) - \beta_2(k)\varphi_{p1}(k) - \beta_1(k)\varphi_{p2}(k) + \varphi_{p3}(k) - \beta_5(k)r_{p1}(k) - \beta_4(k)r_{p2}(k) &= d_3^*; \\ -\beta_2(k) - \beta_1(k)\varphi_{p2}(k) - \beta_4(k)r_{p1}(k) &= d_2^*; \\ -\beta_1(k) + \varphi_{p1}(k) &= d_1^*. \end{aligned} \right\} \quad (9.2.9)$$

Оценки $\beta_1(k)$ ($k = 1, 6$) параметров объекта (9.1.1), входящие в (9.2.9), определяются рекуррентными соотношениями:

$$\beta_i(k+1) = \beta_i(k) + \left[\sum_{j=1}^6 p_{ij}(k)\delta_j(k) \right] \left[y(k+1) - \sum_{\rho=1}^6 \delta_\rho(k)\beta_\rho(k) \right] h(k)c(k); \quad (9.2.10)$$

$$P(k+1) = P(k) - P(k)\delta(k)\delta'(k)P(k)h(k)c(k); \quad (i = \overline{1, 6}) \quad (9.2.11)$$

$$h(k) = \left(1 + \sum_{i=1}^6 \delta_i^2(k) \right)^{-1/2}; \quad (9.2.12)$$

$$c(k) = \left[1 + h(k) \sum_{i,j=1}^6 p_{ij}(k)\delta_i(k)\delta_j(k) \right]^{-1}, \quad (9.2.13)$$

где $P(k)$ – симметричная матрица размеров 6×6 ; $\delta(k)$ – вектор с компонентами

$$\begin{aligned} \delta_1(k) &= y(k); \quad \delta_2(k) = y(k-1); \quad \delta_3(k) = y(k-2); \\ \delta_4(k) &= u(k); \quad \delta_5(k) = u(k-1); \quad \delta_6(k) = u(k-2). \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

9.2.2 Программное обеспечение и практикум

ГАММА-директива: 411 (Адаптивное управление на основе метода наименьших квадратов).

Исходные данные:

а) Полиномы $d(s)$, $k(s)$ и $m(s)$ объекта, который описывается уравнением $d(s)y = k(s)u + m(s)f$. Его дискретная модель имеет вид (9.1.1)

б) Интервал дискретности T .

в) Вид внешнего возмущения.

г) Коэффициенты начального регулятора (9.1.5) (В качестве этих коэффициентов можно взять произвольные числа).

д) Желаемый полином (9.1.11) замкнутой системы.

е) Длительность процесса адаптации.

Результаты:

а) Графики процесса адаптации.

Используя директиву 411 выполняется практикум Пр.3.4. Одна из его целей состоит в исследовании зависимости процесса адаптации от параметров внешнего возмущения.

Глава 10 Адаптивное управление при неизвестных, ограниченных возмущениях

Параграф 10.1 посвящен синтезу функционально-адаптивных систем с минимально-фазовыми дискретными объектами на основе метода рекуррентных целевых неравенств [10.1].

В §10.2. излагаются параметрически -адаптивные системы, использующие частотное адаптивное управление [10.3] В качестве идентификационного алгоритма используется конечно- частотный метод идентификации.

10.1 Метод рекуррентных целевых неравенств

10.1.1 Постановка задачи синтеза адаптивного регулятора

Рассмотрим дискретный объект управления, описываемый уравнением

$$y(k+1) + \varphi_1 y(k) + \dots + \varphi_n y(k-n+1) = r_0 u(k) + \dots + r_\mu u(k-\mu) + f(k) \quad (10.1.1)$$

$(k = 0, 1, \dots; \mu < n),$

переменная $y(k)$ которого доступна непосредственному измерению, внешнее воздействие $f(k)$ является ограниченной последовательностью неизвестных чисел

$$|f(k)| \leq f^*, \quad (10.1.2)$$

где f^* – заданное число.

Параметры $\varphi_1, \dots, \varphi_n, r_0, \dots, r_\mu$ объекта неизвестны. Известно лишь, что объект (10.1.1) является минимально-фазовым. Это означает, что корни полинома $r_0 + r_1\lambda + \dots + r_\mu\lambda^\mu$ обладают свойством $|\lambda_i| \geq 1$ ($i = \overline{1, \mu}$).

Пусть, кроме того, известен знак коэффициента r_0 и верхняя оценка $|r_0|$ – число c_r в неравенстве $|r_0| \leq c_r$.

Пусть цель управления состоит в выполнении неравенства

$$|y(k+1)| \leq \Delta, \quad (10.1.3)$$

где Δ – заданное число, согласованное с уровнем внешних воздействий.

Далее будем полагать, что

$$\Delta \geq f^*. \quad (10.1.4)$$

Требуется построить адаптивный регулятор, выходная переменная которого $u(k)$ обеспечивает достижение объектом (10.1.1) цели управления (10.1.3).

Отметим, что в зависимости от физической природы объекта и назначения системы цели управления могут описываться более сложным выражением, чем (10.1.3), например

$$e^2(k+1) \leq \Delta^2, \quad (10.1.5)$$

где невязка $e(k+1)$ определяется как

$$e(k+1) = y(k+1) + \sum_{i=0}^l \varphi_{ji} y(k-i) \quad (10.1.6)$$

– при стабилизации с заданной динамикой

$$y(k+1) + \sum_{i=0}^l \varphi_{ji} y(k-i) = 0 \quad \text{либо} \quad e(k+1) = y(k+1) - g(k) \quad (10.1.7)$$

– при слежении за задающим воздействием $g(k)$, либо

$$e(k+1) = y(k+1) - y_m(k+1) \quad (10.1.8)$$

– при слежении за эталонной моделью, заданной уравнением

$$y_m(k+1) + \varphi_{m1}y_m(k) + \dots + \varphi_{mn}y_m(k-n+1) = r_{m0}g(k) + \dots + r_{ml}g(k-l).$$

Отметим, что при безынерционной стабилизации невязка

$$e(k+1) = y(k+1) \quad (10.1.9)$$

и тогда (10.1.3) совпадает с (10.1.5).

10.1.2 Синтез регулятора

Приступая к первому из четырех этапов синтеза адаптивного регулятора, отметим, что при известных параметрах φ_i, r_j ($i = \overline{1, n}; j = \overline{0, \mu}$) объекта (10.1.1) построение алгоритма регулирования, при котором достигается цель (10.1.3), очень просто. Действительно, если принять этот алгоритм в виде

$$u(k) = r_0^{-1}[\varphi_1 y(k) + \dots + \varphi_n y(k - n + 1) - r_1 u(k - 1) - \dots + r_\mu u(k - \mu)], \quad (10.1.10)$$

то, подставляя (10.1.10) в (10.1.1) получим

$$y(k + 1) = f(k). \quad (10.1.11)$$

Если функция $f(k)$ удовлетворяет неравенству (10.1.2), то

$$|y(k + 1)| \leq f^* \leq \Delta \quad (10.1.12)$$

и, следовательно, цель управления достигается.

Более того, компенсирующее управление (10.1.10) является оптимальным в смысле функционала

$$J_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{|f(t)| \leq f^*} |y(k + 1)|, \quad (10.1.13)$$

так как при этом управлении он принимает наименьшее значение, равное f^* . Если цель управления описывается неравенством (10.1.5), в котором невязка $\epsilon(t)$ определяется выражениями (10.1.6) ... (10.1.8), то законы регулирования, при которых эти цели достигаются, имеют вид:

а) при стабилизации с заданной динамикой

$$u(k) = r_0^{-1} \left[\sum_{i=0}^{n-1} (\varphi_{i+1} - \varphi_{ji}) y(k - i) - \sum_{j=1}^{\mu} r_j u(k - j) \right]; \quad (10.1.14)$$

б) при идеальном слежении за задающим воздействием

$$u(k) = r_0^{-1} \left[g(k) + \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{i+1} y(k - i) + \sum_{j=1}^{\mu} r_j u(k - j) \right]. \quad (10.1.15)$$

Представим закон управления (10.1.10) в более компактной форме. Для этого введем $n + \mu$ -мерные векторы:

$$\delta = \|y(k), \dots, y(k - n + 1), u(k - 1), \dots, u(k - \mu)\|'; \quad (10.1.16)$$

$$\beta^* = \left\| \frac{\varphi_1}{r_0}, \dots, \frac{\varphi_n}{r_0}, -\frac{r_1}{r_0}, \dots, -\frac{r_\mu}{r_0} \right\|'. \quad (10.1.17)$$

Тогда (10.1.10) примет вид

$$u(k) = \beta^{*'} \delta(k). \quad (10.1.18)$$

Это соотношение называют *идеальным законом регулирования*, поскольку он обеспечивает безусловное достижение цели управления. Законы регулирования (10.1.14), (10.1.15) также принимают вид (10.1.18), если положить для (10.1.14)

$$\beta^* = \left\| \frac{\varphi_1 - \varphi_{ж1}}{r_0}, \dots, \frac{\varphi_n - \varphi_{жn}}{r_0}, -\frac{r_1}{r_0}, \dots, -\frac{r_\mu}{r_0} \right\|', \quad (10.1.19)$$

а для (10.1.15)

$$\delta(k) = \|y(k), \dots, y(k - n + 1), u(k - 1), \dots, u(k - \mu), g(k)\|; \quad (10.1.20)$$

$$\beta^* = \left\| \frac{\varphi_1}{r_0}, \dots, \frac{\varphi_n}{r_0}, -\frac{r_1}{r_0}, \dots, -\frac{r_\mu}{r_0}, 1 \right\|. \quad (10.1.21)$$

Учитывая (10.1.18), запишем уравнение объекта (10.1.1) в следующей эквивалентной форме:

$$y(k + 1) = r_0[u(k) - \beta^{*'} \delta(k)] + f(k). \quad (10.1.22)$$

Закон регулирования будем искать в форме, аналогичной (10.1.18), заменяя неизвестный вектор β^* вектором настраиваемых параметров $\beta(k)$, и, таким образом,

$$u(k) = \beta'(k) \delta(k) \quad (10.1.23)$$

является алгоритмом регулирования.

10.1.3 Алгоритм адаптации без внешних возмущений

В соответствии со вторым и третьим этапами синтеза адаптивного регулятора выберем прямой алгоритм адаптивного управления, для построения которого используем градиентный метод. Рассмотрим вначале случай отсутствия внешних возмущений

$$f(k) = 0. \quad (10.1.24)$$

В этом случае цель управления принимает вид

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^2(k) = 0. \quad (10.1.25)$$

В соответствии с методом градиента направление движения в пространстве настраиваемых параметров $\beta(k)$ пропорционально производным функции

$$r_0^{-2} e^2(k + 1) = [u(k) - \beta^{*'} \delta(k)]^2 = \{\beta(k) - \beta^*\}' \delta(k) \quad (10.1.26)$$

по настраиваемым параметрам. Это означает, что

$$\beta_i(k+1) = \beta_i(k) - \tilde{a}_1(k) \frac{\partial \{[\beta(k) - \beta^*]' \delta(k)\}^2}{\partial \beta_i(k)} r_0^2. \quad (10.1.27)$$

Учитывая (10.1.22), нетрудно видеть, что

$$r_0^2 \frac{\partial \{[\beta(k) - \beta^*]' \delta(k)\}^2}{\partial \beta_i(k)} = 2 \{[\beta(k) - \beta^*]' \delta(k)\} \delta_i(k) r_0^2 = y(k+1) r_0 \delta_i(k),$$

и, таким образом, искомый алгоритм имеет вид

$$\beta_i(k+1) = \beta_i(k) - \tilde{a}_1(k) r_0 y(k+1) \delta_i(k) \quad (i = \overline{1, n + \mu}). \quad (10.1.28)$$

Переходя к последнему (четвертому) этапу синтеза адаптивного регулятора, состоящему в определении параметра $\tilde{a}_1(k)$ алгоритма (10.1.28), введем обозначение

$$a_1(k) = \tilde{a}_1(k) r_0. \quad (10.1.29)$$

Тогда (10.1.28) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \beta_i(k+1) &= \beta_i(k) - a_1(k) (\text{sign } r_0) y(k+1) \delta_i(k); \\ \beta_i(0) &= \beta_i^{(0)} \quad (i = \overline{1, n + \mu}). \end{aligned} \right\} \quad (10.1.30)$$

Утверждение. Параметр $a_1(k)$ алгоритма адаптации (10.1.30), при котором адаптивный регулятор (10.1.23), (10.1.30) обеспечивает достижение объектом (10.1.1) при $f(k) = 0$ цели управления (10.1.25), определяется выражением

$$a_1(k) = \nu \left[c_r \sum_{i=1}^{n+\mu} \delta_i^2(k) \right]^{-1}, \quad (0 < \nu < 2). \quad (10.1.31)$$

Для доказательства этого утверждения возьмем функцию Ляпунова

$$v(k) = \sum_{i=1}^{n+\mu} (\beta_i(k) - \beta_i^*)^2 > 0, \quad (10.1.32)$$

которая выражает "расстояние" настраиваемых параметров регулятора (10.1.23) от параметров идеального закона регулирования (10.1.18).

Найдем условия убывания величины $v(\beta(k))$ вдоль траектории движения адаптивной системы (10.1.22), (10.1.23), (10.1.30).

Для этого рассмотрим разность

$$\Delta v(k) = v(k+1) - v(k) = [\beta(k+1) - \beta^*]' [\beta(k+1) - \beta^*] - [\beta(k) - \beta^*]' [\beta(k) - \beta^*]. \quad (10.1.33)$$

Учитывая (10.1.30) и (10.1.26), запишем при $f(k) = 0$, что

$$\begin{aligned}
& [\beta(k+1) - \beta^*]' [\beta(k+1) - \beta^*] = [\beta(k) - a_1(k)(\text{sign } r_0)y(k+1)\beta(k) - \delta^*]' \times \\
& \times [\beta(k) - a_1(k)(\text{sign } r_0)y(k+1)\delta(k) - \beta^*] = [\beta(k) - \beta^*]' (\beta(k) - \beta^*) - \\
& - a_1(k)(\text{sign } r_0)y(k+1) \{ 2\delta'(k)[\beta(k) - \beta^*] - a_1(k)(\text{sign } r_0)y(k+1)\delta'(k)\delta(k) = \\
& = [\beta(k) - \beta^*]' [\beta(k) - \beta^*] - a_1(k)(\text{sign } r_0)y(k+1) \left[\frac{2}{r_0}y(k+1) - \right. \\
& \left. - a_1(k)(\text{sign } r_0)y(k+1)\delta'(k)\delta(k) \right].
\end{aligned} \tag{10.1.34}$$

Подставляя это выражение в (10.1.33), получим

$$\Delta v(k) = -a_1(k) \left[2 \frac{\text{sign } r_0}{r_0} - a_1(k)\delta'(k)\delta(k) \right] y^2(k+1). \tag{10.1.35}$$

Нетрудно видеть, что $\Delta v(k) \leq 0$, если

$$0 \leq a_1(k) \leq \frac{2}{|r_0|\delta'(k)\delta(k)} \leq \frac{2}{c_r\delta'(k)\delta(k)}. \tag{10.1.36}$$

Для того чтобы обеспечить строгое убывание $\Delta v(k)$ (при $y(k+1) \neq 0$), достаточно взять

$$a_1(k) = \frac{\gamma}{c_r\delta'(k)\delta(k)}, \tag{10.1.37}$$

где

$$0 < \gamma < 2. \tag{10.1.38}$$

При таком значении $a_1(k)$ получим

$$\Delta v(k) = -\frac{\rho y^2(k+1)}{\delta'(k)\delta(k)} < 0, \tag{10.1.39}$$

где ρ – некоторое положительное число.

Так как

$$-\frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta v(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^2(k+1)}{\delta'(k)\delta(k)} = \frac{v(\beta^{(0)})}{\rho} < \infty, \tag{10.1.40}$$

то это означает, что $\frac{y^2(k+1)}{\delta'(k)\delta(k)} \rightarrow 0$, и, следовательно, достигается цель адаптации $\lim_{k \rightarrow \infty} y(k+1) = 0$, если только величины $\delta'(k)\delta(k)$ будут оставаться ограниченными. Ограниченность измеряемого вектора $\delta(k)$, состоящего из значений выхода и входа объекта в различные моменты времени, не является очевидной. Например, если рассматриваемая система неустойчива при начальных значениях параметров регулятора, то на первых шагах процесса адаптации переменные объекта будут расти. Это повлечет за собой затормаживание настройки и, возможно, нарушение сходимости $y(k+1)$. Однако известно [6.5], что если объект является минимально-фазовым, то $\delta'(k)\delta(k)$ ограничена и, таким образом, утверждение доказано.

10.1.4 Алгоритм адаптации при внешних возмущениях

Рассмотрим теперь объект (10.1.1) или эквивалентный ему объект (10.1.22) с учетом внешних возмущений, удовлетворяющих неравенству (10.1.2). Найдем условие убывания "расстояния" (10.1.32) на движениях адаптивной системы. Нетрудно видеть, что теперь в отличие от (10.1.35)

$$\Delta v(k) = -a_1(k) \left[\frac{2}{|r_0|} \left(1 - \frac{f(k)}{y(k+1)} \right) - a_1(k) \delta'(k) \delta(k) \right] y^2(k+1). \quad (10.1.41)$$

Это выражение получается, если в (10.1.34) заменить $\delta'(k)[\beta(k) - \beta^*]$ на $y(k+1) - f(k)$, а не на $y(k+1)$, как было ранее.

Если величина $y(k+1)$ мала, а внешнее воздействие $f(k)$ имеет неблагоприятный знак, то величина $\Delta v(k)$ может стать положительной и алгоритм не будет приводить к достижению цели адаптации.

Эффективным способом достижения цели управления при действии возмущений является введение в алгоритм зоны нечувствительности. Из (10.1.41) следует, что если изменять $\beta(k)$ только при $|y(k+1)| > \Delta$ так, что

$$\beta_i(k+1) = \begin{cases} \beta_i(k) & \text{при } |y(k+1)| \leq \Delta \quad (i = \overline{1, n + \mu}); \\ \beta_i(k) - \nu \frac{(\text{sign } r_0) y(k+1)}{c_r \delta'(k) \delta(k)} \delta_i(k) & \text{при } |y(k+1)| > \Delta, \end{cases} \quad (10.1.42)$$

где

$$0 < \nu < 2 \left(1 - \frac{f^{*2}}{\Delta^2} \right), \quad (10.1.43)$$

то вновь, как и при отсутствии $f(k)$, будет выполнено (10.1.40) и, следовательно, в силу ограниченности $\delta'(k) \delta(k)$ цель (10.1.3) будет достигнута.

Полученные алгоритмы адаптации в системах безынерционной стабилизации легко обобщаются на системы стабилизации с заданной динамикой и на следящие системы. Действительно, если невязка $e(t)$ описывается выражениями (10.1.6) либо (10.1.8), то уравнение объекта (10.1.1) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$e(k+1) = r_0[u(k) - \beta^{*'} \delta(k)] + f(k), \quad (10.1.44)$$

где векторы β^* и $\delta(k)$ определяются соотношениями (10.1.17) ... (10.1.21)), и тогда для вывода алгоритма адаптации вида (10.1.42) нужно просто заменить во всех соотношениях, начиная с (10.1.28), $y(k+1)$ на $e(k+1)$. Таким образом, доказано следующее ниже утверждение.

Утверждение. Пусть имеется неминимально-фазовый объект управления, описываемый уравнением (10.1.1), параметры которого неизвестны (известен лишь знак параметра r_0 и число c_r в неравенстве $|r_0| < c_r$, внешнее воздействие на объект неизвестно, но ограничено известным числом f^*). Адаптивный регулятор, обеспечивающий достижение цели управления (10.1.5) [где $e(k+1)$ определяется одним из выражений (10.1.6), (10.1.7), (10.1.29)], описывается уравнениями

$$u(k) = \sum_{i=1}^{n+\mu} \beta_i(k) \delta_i(k); \quad (10.1.45)$$

$$\beta_i(k+1) = \begin{cases} \beta_i(k) & \text{при } |e(k+1)| \leq \Delta \quad (i = \overline{1, n+\mu}); \\ \beta_i(k) - \nu \frac{(\text{sign } r_0) e(k+1) \delta_i(k)}{c_r \sum_{i=1}^{n+\mu} \delta_i^2(k)} & \text{при } |e(k+1)| > \Delta, \end{cases} \quad (10.1.46)$$

где

$$0 < \nu < 2 \left(1 - \frac{f^2}{\Delta^2} \right), \quad (10.1.47)$$

а компоненты $\delta_i(k)$ вектора $\delta(k)$ определяются одним из соотношений (10.1.16), (10.1.20).

Алгоритм адаптации (10.1.42) впервые был получен на основе метода рекуррентных целевых неравенств, разработанного В. А. Якубовичем [10.1].

Для сокращения изложение собственно метода рекуррентные целевых неравенств было опущено, однако процесс вывода алгоритма адаптации (10.1.42) полностью следует идеям метода. На основе этого метода приведенные результаты были распространены [6.5] на случай многомерных объектов, а также на случай запаздывания в измерении и управлении, ограничений на управления.

Пример. Построим адаптивный регулятор химико-технологических процессов, рассмотренный в примерах 6.1.1, 6.1.2. Этот процесс описывается уравнениями

$$x(k+1) = ax(k) + bu(k) + \psi f(k); \quad (10.1.48)$$

$$y(k) = dx(k), \quad (10.1.49)$$

в которых параметры a , b , ψ и d неизвестны. В отличие от примеров 6.1.1, 6.1.2 будем полагать, что $f(k)$ – неизвестная последовательность. При этом

$$|f(k)| \leq f^*. \quad (10.1.50)$$

Требуется построить адаптивный регулятор, при котором достигается цель управления

$$[y(k+1) - g]^2 \leq \Delta^2. \quad (10.1.51)$$

В (10.1.50) и (10.1.51) f^* , g , Δ – заданные числа.

Запишем вначале уравнения (10.1.48), (10.1.49) в форме (10.1.1):

$$y(k+1) + \varphi_1 y(k) = r_0 u(k) + f(k), \quad (10.1.52)$$

где

$$\varphi_1 = -a; \quad r_0 = db; \quad f(k) = d\psi f(k). \quad (10.1.53)$$

Далее будем полагать, что известна оценка

$$|r_0| \leq c_r \quad (10.1.54)$$

и знак числа r_0 .

Переходя к построению алгоритма адаптивного управления, введем в соответствии с (10.1.20) и (10.1.21) векторы $\beta^*(k)$ и $\delta(k)$ с компонентами

$$\beta_1^* = \frac{\varphi_1}{r_0}; \quad \beta_2^* = 1; \quad \delta_1(k) = y(k); \quad \delta_2(k) = g. \quad (10.1.55)$$

Тогда закон регулирования (10.1.45) примет вид

$$u(k) = \beta_1(k)y(k) + \beta_2(k)g. \quad (10.1.56)$$

Алгоритм адаптации параметров этого регулятора запишем в соответствии с (10.1.46) как

$$\beta_1(k+1) = \begin{cases} \beta_1(k) & \text{при } |y(k+1) - g| \leq \Delta; \\ \beta_1(k) - \nu \frac{(\text{sign } r_0)[y(k+1) - g]y(k)}{c_r(y^2(k) + g^2)} & \text{при } |y(k+1) - g| > \Delta. \end{cases} \quad (10.1.57)$$

$$\beta_2(k+1) = \begin{cases} \beta_2(k) & \text{при } |y(k+1) - g| \leq \Delta; \\ \beta_2(k) - \nu \frac{(\text{sign } r_0)[y(k+1) - g]g}{c_r(y^2(k) + g^2)} & \text{при } |y(k+1) - g| > \Delta. \end{cases} \quad (10.1.58)$$

10.2 Частотное адаптивное управление

10.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим полностью управляемый, асимптотически устойчивый объект управления, описываемый уравнением

$$y^{(n)} + d_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + d_1\dot{y} + d_0y = k_n u^{(m)} + \dots + k_0 u + f, \quad (10.2.1)$$

в котором d_i , k_j ($i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m}$) – неизвестные числа, $f(t)$ – неизвестная, ограниченная функция.

Задача состоит в построении регулятора, описываемого, начиная с момента времени t_N , дифференциальным уравнением

$$d_{p_{(n-1)}} u^{(n-1)} + \dots + d_{p_1} \dot{u} + d_{p_0} u = k_{p_{n-1}} y^{(n-1)} + \dots + k_{p_1} \dot{y} + k_{p_0} y, \quad (10.2.2)$$

коэффициенты которого таковы, что характеристический полином системы

$$D(s) = d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s) = D_{2n-1}s^{2n-1} + \dots + D_0 \quad (10.2.3)$$

был близок к заданному полиному

$$D^*(s) = s^{(2n-1)} + d_{(2n-2)}s^{(2n-2)} + \dots + d_1s + d_0^*, \quad (10.2.4)$$

корни которого имеют отрицательные вещественные части.

Указанную близость будем характеризовать неравенствами

$$|D_i - d_i^*| \leq \varepsilon_i \quad (i = \overline{0, 2n-2}), \quad (10.2.5)$$

в котором ε_i ($i = \overline{0, 2n}$) – заданные числа, D_i ($i = \overline{0, 2n}$) – коэффициенты характеристического полинома (10.2.3).

Адаптивный регулятор, решающий эту задачу, описывается дифференциальным уравнением с кусочно - постоянными коэффициентами

$$d_{p_{(n-1)}}^{[i]} u^{(n-1)} + \dots + d_{p_1}^{[i]} \dot{u} + d_{p_0}^{[i]} u = k_{p_{n-1}}^{[i]} y^{(n-1)} + \dots + k_{p_1}^{[i]} \dot{y} + v, \quad (10.2.6)$$

где i ($i = \overline{1, N}$) – номер интервала адаптации, t_i – момент окончания i -того интервала t_i так же как числа N , $a_{p_k}^{[i]}$, $k_{p_k}^{[i]}$ ($k = \overline{0, n-1}$, $i = \overline{0, N}$) находятся в процессе адаптации, $v(t)$ – испытательное воздействие вида

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\theta} \rho_k \sin \omega_k(t - t_{i-1}), \quad t_{i-1} \leq t \leq t_1, \quad (i = \overline{1, N}) \quad (10.2.7)$$

с заданными амплитудами ρ_k и частотами ω_k ($k = \overline{1, \theta}$), $\theta = n$, либо $\theta = 2n - 1$.

Заметим, что в действительности амплитуды и частоты испытательного сигнала различны на различных интервалах адаптации и он описывается выражением

$$v^{[i]}(t) = \sum_{k=1}^{\theta} \rho_k^{[i]} \sin \omega_k^{[i]}(t - t_{i-1}), \quad t_{i-1} \leq t \leq t_1, \quad (i = \overline{1, N}). \quad (10.2.8)$$

Однако настройка этих амплитуд и частот на различных интервалах для простоты не рассматривается, и поэтому будем полагать эти параметры испытательного сигнала неизменными на некоторых интервалах адаптации, в частности, при $i = 1$ дифференциальное уравнение (10.2.6) заменяется алгебраическим соотношением

$$u = v \quad (10.2.9)$$

которое является частным случаем уравнения (10.2.6), когда $d_{p_k}^{[i]} = k_{p_k}^{[i]} = 0$, ($k = \overline{1, n-1}$), $d_{p_0}^{[i]} = 1$, $k_{p_0}^{[i]} = 0$, ($i \in \overline{1, N}$).

В этих случаях испытательный сигнал (10.2.7) содержит n гармоник ($\theta = n$), а в остальных случаях $\theta = 2n - 1$.

10.2.2 Первый интервал адаптации (идентификация объекта)

На первом интервале адаптации идентифицируется объект (10.2.1).

Для этой цели он возбуждается испытательным сигналом (10.2.7) при ($\theta = n$), и в соответствии с алгоритмом (8.2.1) конечно- частотной идентификации находятся оценки $\hat{d}_i = d_i^{[1]} = d_i(q_1, T_6)$, $\hat{k}_i = k_i^{[1]} = k_i(q_1, T_6)$ ($i = \overline{0, n-1}$) коэффициентов объекта.

Решая тождество Безу

$$d^{[1]}(s)d_p^{[2]}(s) - k^{[1]}(s)k_p^{[2]}(s) = D^*(s), \quad (10.2.10)$$

в котором $d^{[1]}(s) = s^n + \sum_{i=1}^{n-1} d_i^{[1]}s^i$, $k^{[1]}(s) = s^n + \sum_{i=1}^{n-1} k_i^{[1]}s^i$, найдем коэффициенты регулятора для второго интервала

$$d_p^{[2]}(s) = k_p^{[2]}(s)y + v, \quad (10.2.11)$$

где $d_p^{[2]}(s) = d_{p(n-1)}^{[2]}s^{(n-1)} + \dots + d_{p0}^{[2]}$, $k_p^{[2]}(s) = k_{p(n-1)}^{[2]}s^{(n-1)} + \dots + k_{p0}^{[2]}$.

Рассмотрим объект с регулятором (10.2.11). Исключая переменную $u(t)$, запишем уравнения этой системы в виде

$$D^{[2]}(s)y = k(s)v + d_p^{[2]}(s)f, \quad (10.2.12)$$

где

$$D^{[2]}(s) = d(s)d_p^{[2]}(s) - k(s)k_p^{[2]}(s) = D_{2n-1}^{[2]}s^{2n-1} + \dots + D_0^{[2]} \quad (10.2.13)$$

Уравнение (10.2.12) будем рассматривать как уравнение "нового" объекта с управлением v и возмущением $d_p^{[2]}(s)f$ и идентифицировав этот "объект", используя алгоритм 10.3.1 конечно- частотной идентификации, будем сравнивать оценку полинома $D^{[2]}(s)$ с заданным полиномом $D^*(s)$.

Рассмотрим этот путь более подробно.

Частотные параметры этого "объекта", называемые частотными параметрами замкнутой системы, определяются как

$$\nu_k = \operatorname{Re} w_{cl}(j\omega_k), \quad \mu_k = \operatorname{Im} w_{cl}(j\omega_k) \quad (k = \overline{1, 2n-1}), \quad (10.2.14)$$

где $w_{cl}(s)$ – передаточная функция от v к y :

$$w_{cl}(s) = \frac{k(s)}{D^{[2]}(s)} = \frac{k(s)}{d(s)d_p^{[2]}(s) - k(s)k_p^{[2]}(s)}. \quad (10.2.15)$$

Её можно выразить через передаточную функцию объекта и регулятора как

$$w_{cl}(s) = \frac{w(s)}{1 - w(s)w_p^{[2]}(s)} \cdot \frac{1}{d_p^{[2]}(s)}, \quad (10.2.16)$$

где $w_p^{[2]}(s) = \frac{k_p^{[2]}(s)}{d_p^{[2]}(s)}$.

10.2.3 Второй интервал адаптации(идентификация замкнутой системы)

Переходя к идентификации "объекта" (10.2.12) повторим этапы алгоритма 8.2.1.

Возбудим объект (10.2.12) испытательным сигналом (10.2.7), содержащим $(2n)$ гармоник и подадим его выход на вход фильтра Фурье

$$\begin{aligned} \nu_k(\tau) &= \frac{2}{\rho_k \tau} \int_{t_1}^{t_1 + \tau} y(t) \sin \omega_k(t - t_1) dt, \\ \mu_k(\tau) &= \frac{2}{\rho_k \tau} \int_{t_1}^{t_1 + \tau} y(t) \cos \omega_k(t - t_1) dt, \end{aligned} \quad (k = \overline{1, 2n-1}) \quad (10.2.17)$$

где $t_1 = q_1 T_6$.

Измеряя выходы фильтра в моменты времени $\tau = qT_6$ ($q = q_1 + 1, \dots$) и решая частотные уравнения

$$\sum_{i=0}^{2n-2} (j\omega_k)^i \hat{k}_i - [\nu_k(qT_6) - j\mu_k(qT_6)] \sum_{i=0}^{2n-2} (j\omega_k)^i \hat{D}_i^{[2]} = [\nu_k(qT_6) + j\mu_k(qT_6)] (j\omega_k)^{2n-1} \quad (k = \overline{1, 2n}), \quad q = q_1 + 1, \quad (10.2.18)$$

получим оценки $\hat{D}_i^{[2]} = D_i^{[2]}(qT_6)$ ($i = \overline{0, 2n-2}$), ($q = q_1 + 1$) коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы.

Целевые неравенства

$$\left| \hat{D}_i^{[2]}(qT_6) - a_i^* \right| \leq \varepsilon_i \quad (i = \overline{0, 2n-2}) \quad (10.2.19)$$

проверяются для каждого $q = q_1 + 1, \dots$

Если при некотором $q = q_2$ эти неравенства выполняются, то адаптация заканчивается, $N = 2$ и искомые полиномы регулятора (10.2.2) имеют вид

$$d_p(s) = d_p^{[2]}(s), \quad k_p(s) = k_p^{[2]}(s). \quad (10.2.20)$$

Примечание. Если неравенства (10.2.19) выполняются, а числа ε_i ($i = 0, 2n-2$) согласованы соответствующим образом с допусками (8.2.3) на точность идентификации, то изложенное является способом подтверждения модели, получаемой в результате конечно- частотной идентификации, рассмотренной в разделе 8.2. ■

Если точность идентификации недостаточна, то не существует числа q , при котором условия (10.2.19) выполняются. При этом возможны два случая:

А) система (10.2.1), (10.2.11) – асимптотически устойчива;

Б) эта система неустойчива.

В СЛУЧАЕ А) оценки частотных параметров замкнутой системы, получаемых в течении второго интервала, используются для улучшения оценок частотных параметров объекта, полученных на первом интервале. Для этой цели используется связь (10.2.16), которую нетрудно представить как

$$\alpha_k + j\beta_k = \frac{\nu_k + j\mu_k}{(\nu_k + j\mu_k)w_p^{[2]}(j\omega_k) + \frac{1}{d_p^{[2]}(s)}}, \quad (k = \overline{1, n}). \quad (10.2.21)$$

Заменяя ν_k и μ_k ($k = \overline{1, n}$) их оценками $\nu_k(qT_6)$ и $\mu_k(qT_6)$ ($k = \overline{1, n}$) $q = q_1 + 1, \dots$, вычисляем по этим формулировкам оценки частотных параметров объекта $\hat{\alpha}_k = \alpha_k(qT_6)$ и $\hat{\beta}_k = \beta_k(qT_6)$ ($k = \overline{1, n}$, $q = q_1 + 1, \dots$).

Решая частотные уравнения (8.2.9) и проверяя необходимые условия (8.2.25) получим, в момент времени $t_2 = q_2 T_6$, в который эти условия выполняются, новые оценки коэффициентов объекта

$$\hat{d}_i = d_i^{[2]} = d_i(q_2 T_6), \quad \hat{k}_i = k_i^{[2]} = k_i(q_2 T_6), \quad (i = \overline{0, n-1}). \quad (10.2.22)$$

При этом необходимо проверить выполнение *условий расширяемости интервалов адаптации*:

$$q_i - q_{i-1} \geq q_{i-1} - q_{i-2} + k, \quad i = 2, 3, \quad (10.2.23)$$

где k – заданное положительное целое число.

Это условие для рассматриваемого нтервала имеет вид $q_2 - q_1 \geq q_1 + k$. Если оно не выполняется, то решаем частотные уравнения до момента $q_2 = 2q_1 + k$.

Используя оценки (10.2.23), решаем тождество Безу

$$d^{[2]}(s)d^{[3]}(s) - k^{[2]}(s)k^{[3]}(s) = D^*(s) \quad (10.2.24)$$

и формируем регулятор для третьего интервала адаптации

$$d_p^{[3]}(s)u = k_p^{[3]}(s)y + v \quad (10.2.25)$$

В СЛУЧАЕ Б) выход объекта достигает в момент времени $t = t^*$ предельно допустимого значения y^* ($y(t^*) = y^*$), и тогда второй интервал заканчивается, регулятор (10.2.11) отключается и на третьем интервале объект возбуждается испытательным сигналом (10.2.7) с n гармониками ($\theta = n$) и повторяются операции первого интервала. При этом длительность фильтрации превышает длительность первого интервала. Действительно, несмотря на то, что физически длительность второго интервала может оказаться сколь угодно малой, полагаем, что его дительность удовлетворяет условию

(10.2.23) расширяемости и $t_2 = (q_2 T_6)$ ($q_2 = 2q_1 + k$), (фактически $t_2 = t^*$, однако, для соответствия физическому смыслу можно на интервале $[t^*, t_2]$ полагать $u(t) = 0$), и тогда $q_3 - q_2 = q_1 + 2k$).

В результате идентификации получим новые оценки коэффициентов объекта $d_i^{[3]}$ и $k_i^{[3]}$ ($i = \overline{0, n-1}$) и на основе тождества Безу получим регулятор для четвертого интервала

$$d_p^{[4]}(s)u = k_p^{[4]}(s)y + v \quad (10.2.26)$$

и т.д.

10.2.4 Сходимость адаптации

Если возмущение $f(t)$ – строго ФФ-фильтруемо на более широком наборе ω_k ($k = \overline{1, 2n-1}$), то ошибки фильтрации частотных параметров замкнутой системы $\Delta\nu_k(\tau) = \nu_k - \nu_k(\tau)$, $\Delta\mu_k(\tau) = \mu_k - \mu_k(\tau)$ ($k = \overline{1, 2n-1}$) обладают свойством

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Delta\nu_k(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Delta\mu_k(\tau) = 0, \quad (k = \overline{1, 2n-1}). \quad (10.2.27)$$

Процесс адаптации сходится, если длительность некоторого его интервала будет больше числа τ^{**} , при котором ошибки фильтрации будут таким, что целевые условия (10.2.5) достижимы. Как бы ни было велико число τ^{**} , в силу условия (10.2.23) расширяемости интервалов, всегда найдется i^* -тый интервал такой, что $t_i - t_{i^*} \geq \tau^{**}$. Это означает сходимость адаптации.

10.2.5 Программное обеспечение и практикум

ГАММА-директива: 311 (Частотное адаптивное управление).

Исходные данные:

- а) Полиномы $d(s)$, $k(s)$ и $m(s)$ объекта (10.2.1),
- б) Полином $l(s)$ при испытательном сигнале в регуляторе (10.2.6), где для простоты принято $l(s) = 1$.
- в) Вид внешнего возмущения.
- г) Амплитуды и частоты испытательного сигнала (10.2.8), прикладываемого к объекту.
- д) Амплитуды и частоты испытательного сигнала (10.2.8), прикладываемого к замкнутой системе.
- е) Длительность процесса идентификации объекта (задается числом периодов минимальной из частот испытательного сигнала)
- ж) Длительность процесса идентификации замкнутой системы (задается числом периодов минимальной из частот испытательного сигнала)
- з) Интервал дискретности объекта, задаваемый числом делений периода максимальной из частот испытательного сигнала.

и)Интервал дискретности замкнутой системы,задаваемый числом делений периода максимальной из частот испытательного сигнала .

Результаты:

а)Графики процесса адаптации.

Используя директиву 311 выполняется практикум Пр.3.5.Одна из его целей состоит в исследовании зависимости процесса адаптации от параметров внешнего возмущения и испытательного сигнала

Практикум 1

Программное обеспечение разработки систем управления

Одним из важных этапов проектирования [2.6] каждой системы автоматического управления является разработка алгоритма управления. Программное обеспечение для автоматизации этого этапа разрабатывается уже более четырех десятков лет. К середине восьмидесятых годов было разработано несколько десятков пакетов прикладных программ для анализа САУ, идентификации, синтеза регуляторов и т.д. Это, в частности, отечественные пакеты: ДИСПАС [пр.1], САПРАС [пр.2] , РАДИУС-2 [пр.3] , ГАММА [пр.4]- [пр.6] и зарубежные: IDPAC, CYNPAC, KEDDS, MATLAB. Описание этих отечественных пакетов имеется в справочнике [2.6], а зарубежных - в книге [пр.7].

Последние десять лет система MATLAB [пр.8], [пр.9]стала доминирующей среди зарубежных программ для разработки алгоритмов автоматизации. Это связано с тем, что MATLAB основан эффективном языке программирования высокого уровня, который позволяет достаточно быстро разрабатывать программное обеспечение методов теории автоматического управления. К настоящему времени программное обеспечение традиционных методов ТАУ, содержащееся в указанных выше пакетах воссоздано в MATLAB. Кроме того, MATLAB содержит программное обеспечение новых методов: Н-бесконечного субоптимального управления, мю-анализ и синтез , грубое управление и т.д.

Однако, инженер-разработчик реальной системы автоматического управления (САУ), который хотел бы использовать MATLAB для разработки алгоритмов управления столкнется с рядом трудностей:а) он должен глубоко знать теорию управления, чтобы выбрать, исходя из его задачи, неопределенные параметры используемого метода (например, параметры квадратичного функционала IQ- и Н-бесконечной оптимизации, при которых достигается необходимая точность регулирования, вид и параметры испытательных сигналов при идентификации и т.д),б) ему необходимо знать язык программирования MATLAB, чтобы объединить выбранные им программы (функции) MATLAB,в)он должен уметь создавать интерфейс пользователя и формировать протокол результатов.

Цели инженера-разработчика (САУ) исключают его участие в работах по разработке программных обеспечения (средств проектирования), решающих его задачу. Эта трудность преодолевается системой ГАММА. В этой системе инженер-разработчик САУ выбирает из списка программу для решения его задачи и вводит по запросу системы: а) модель объекта управления либо (если она неизвестна) результаты испытаний

объекта; б) технические требования к САУ: допустимые ошибки управления, время регулирования и т.д. Система работает без его участия (автоматически). Анализируя протокол результатов он принимает решение об их качестве.

Пр.1.1 Структура программного обеспечения

Сформулируем требования к программному обеспечению для автоматизации проектирования (средствам проектирования). Они состоят в следующем. 1. Пользователь средств проектирования не должен участвовать в их создании.

2. Средства проектирования должны предоставлять возможность "естественного" по форме и существу описания своей задачи.

Для средств разработки алгоритмов управления "естественная" форма описания задачи означает наличие пользовательского интерфейса, который позволяет в частности: а) ввести модель объекта управления в привычной форме - в виде дифференциальных уравнений произвольного вида либо в форме передаточной матрицы. "Естественное описание задачи по существу" означает, что средства проектирования дают возможность решать задачи проектирования, когда цель управления описывается принятыми на практике инженерными показателями (допустимыми установившимися ошибками, временем регулирования, запасами устойчивости), а внешние возмущения и помехи мало известные функции, о которых часто известны лишь их границы.

3. Задача пользователя должна решаться автоматически. Участие пользователя ограничено возможностью остановить решение, если промежуточные результаты выводимые на экран и в протокол, не удовлетворительны.

Из этих требований следует, что программное обеспечение должно быть двухуровневым: первый уровень - средства (среда) инженера-разработчика САУ, второй уровень является инструментарием (средой) для разработки и модернизации первого уровня.

Для уточнения структуры программного обеспечения введем некоторые определения.

Многие понятия ТАУ наряду с содержательным определением имеют *операционное определение (описание)* в форме некоторой последовательности вычислительных операций.

Операционное определение может быть неединственным. Например, устойчивость линейной стационарной системы может операционно определяться как решение уравнения Ляпунова так и вычисление собственных чисел матрицы, описывающей модель системы в пространстве состояний.

Элементарной проектной операцией называется операционное определение неделимого (минимального) содержательного фрагмента ТАУ. Например, устойчивость, управляемость, АКОР (LQ-оптимизация), Н-бесконечное субоптимальное управление являются элементарными проектными операциями (ЭПО).

Модулем называется программа для ЭВМ, реализующая ЭПО.

Директива - это программа, состоящая из трех частей: а) модулей; б) средств формирования интерфейса пользователя и в) средств вывода промежуточных и окончательных результатов (протокол).

Каждая директива служит для решения определенного класса задач по разработке алгоритмов управления. *Класс задач* характеризуется [1] тремя видами моделей: моделью целей управления (показателей точности и качества), моделью объекта управления и регулятора, моделью среды (внешние возмущения и помехи измерения) .

Интерфейс пользователя служит для описания им конкретной задачи из определенного класса.

Среда инженера-разработчика САУ (среда пользователя) состоит из директив. Пользователь (инженер-разработчик САУ) выбирает директиву, вводит, используя интерфейс, описание его конкретной задачи и после решения анализирует протокол результатов. Задача решается без его участия.

Среда пользователя разрабатывается исследователем, который обладает глубокими знаниями ТАУ и владеет одним из языков программирования для того, чтобы создавать модули и директивы.

Среда исследователя - это программные средства, с помощью которых исследователь создает новые директивы и формирует среду пользователя.

Пр.1.2 ГАММА-2РС

Пр.1.2.1 Среда пользователя(Разработчика систем управления)

Директивы(Классы решаемых задач)

Библиотека ГАММА-2РС состоит из пяти групп основных директив:

1. Преобразование видов и форм моделей
2. Анализ систем
3. Синтез регуляторов
4. Идентификация
5. Адаптивное управление

и нескольких групп вспомогательных директив:

6. Математические операции (с векторами, матрицами, полиномиальными матрицами и т.п.)
7. Различные операции

Каждая группа состоит из основных и дополнительных директив.

Приведем имена (набор цифр) и класс решаемых задач некоторых директив из групп, которые будут использоваться в практикуме.

3. Синтез регуляторов
 - 111 Аналитическое конструирование регуляторов
 - 113 Оптимальная система с наблюдателем
 - 131 H_{inf} -субоптимальное управление
 - 142 Точное управление

4. Идентификация

111.4 Построение непрерывной модели

121.2 Построение дискретной модели

5. Адаптивное управление

311.1 Частотное адаптивное управление

314.1 Частотный адаптивный ПИД-регулятор

1. Анализ систем

221 Анализ управляемости

221.1 Анализ наблюдаемости

241 Анализ точности и качества объекта управления

242 Анализ точности и качества системы с непрерывным регулятором

Интерфейс пользователя

А). Запросы системы

При запуске системы на экран выводится заставка с двумя кнопками: "пользователь" и "разработчик". Для работы с готовыми директивами следует нажать кнопку "пользователь".

Рис. 1.1. Заставка системы ГАММА-2РС

Далее на экран выводится список доступных директив, разбитый на группы и подгруппы. Пользователь выбирает нужную директиву и запускает ее.

Рис. 1.2. Директивы системы ГАММА-2РС. Группа "Идентификация"

Б). Ввод исходных данных

После выбора директивы появляется окно ввода исходных данных.

Рис. 1.3. Пример окна ввода исходных данных

При вводе данных необходимо придерживаться следующих правил.

а) Дифференциальные и алгебраические уравнения записываются в их естественной форме. Формат записи уравнения следующий:

$$iY_i :: = iChY_i = iChY_i - iChY_i = 0$$

$$iChY_i :: [?], iChY_i - [?] iChY_i ? iChY_i$$

$$iChY_i :: [iK_i], iID_i, [iNP_i], [(iNPR_i)]$$

, где iY_i - уравнение;

$iChY_i$ - часть уравнения (левая или правая);

$iChY_i$ - член уравнения;

iK_i - коэффициент (целое или вещественное число),

если $iK_i = 1$, то iK_i в записи члена уравнения можно опустить;

iID_i - идентификатор (строка);

iNP_i - номер переменной (целое число);

$iNPR_i$ - номер производной (целое число),

если $iNPR_i = 0$, то $iNPR_i$ можно не указывать. Например, j -я производная i -й компоненты вектора z записывается как $zi(j)$. Левые и правые части уравнений

разделяются символом "=", знак "+" у первых членов уравнений можно опускать в левой и правой частях. б) Матрица записывается в виде последовательности целых или вещественных чисел по строкам, элементы одной строки отделяются друг от друга символом ",", строки отделяются символом ";". в) Вектор записывается в виде последовательности целых или вещественных чисел, разделенных символом ";". г) Числа записываются в соответствии с правилами: Целые числа - в их естественной форме, например, 3, 205 и т.п. Вещественные числа - в форме с фиксированной или плавающей точкой, например, 7.1264, -8.74E-3 и т.п.

В). Загрузка и сохранение данных

Система имеет возможность сохранения и загрузки как отдельных элементов (чисел, векторов, матриц, уравнений), так и всех исходных данных одновременно. Для сохранения отдельного элемента следует нажать на кнопку "Сохранить" справа от панели ввода этого элемента, и в открывшемся окне ввести имя файла. Нажав на кнопку "Загрузить", можно аналогичным образом загрузить данные из файла. Для сохранения и загрузки всего набора исходных данных следует воспользоваться пунктами верхнего меню "Сохранить" и "Загрузить".

Г). Вывод результатов

Результаты работы директивы автоматически выводятся в окно протокола. Для сохранения протокола в текстовом файле, например для последующей печати, следует нажать на пункт меню "Сохранить" и в открывшемся окне ввести имя файла.

Рис. 1.4. Пример окна протокола

21 *Технические средства, загрузка системы и ее освоение* Система ГАММА-2РС

предназначена для работы на персональной ЭВМ типа IBM PC AT и совместимых с ней. Система работает под управлением ОС Windows 95/98/2000/NT. Рекомендуемое разрешение экрана - 800x600 (мелкие шрифты) и выше. Для просмотра файлов справки на компьютере должна быть установлена программа Microsoft Word 97 из пакета Microsoft Office.

Вызов и загрузка системы осуществляется запуском программы newgamma.exe. Для удобства запуска рекомендуется создать ярлык на рабочем столе или в меню "Пуск".

Освоение системы инженером-разработчиком САУ крайне просто. Время освоения составляет около одного часа, если придерживаться следующей последовательности:

- а) выбрать необходимую директиву,
- б) ввести по запросам ЭВМ тестовую задачу, используя приведенные выше правила ввода,
- в) после ее решения сравнить протокол результатов с протоколом результатов тестовой задачи, который хранится в файле с расширением ...

Совпадение протоколов свидетельствует об освоении директивы.

Пр.1.2.2 Среда исследователя.(Разработчика директив)

Основные компоненты системы Структурно система ГАММА-2РС состоит из четырех взаимосвязанных компонентов:

1. Библиотека модулей.
2. Графический редактор
- 3.Windows-Диалог
4. Windows-Инструмент

Библиотека модулей предназначена для хранения информации о подключенных к системе модулях. Обеспечивает возможность добавления новых модулей, модификации и удаления существующих, автономного исполнения модулей. Графический редактор предназначен для составления структурных схем из модулей, содержащихся в библиотеке путем перетаскивания их на рабочее поле и соединения соответствующих входов и выходов. Программа Windows-Диалог предназначена для ввода, сохранения и загрузки исходных данных директивы, и для трансляции введенных данных из естественного вида во внутренний формат системы. Программа Windows-Инструмент обеспечивает выполнение директивы в соответствии со структурной схемой и автоматически создает протокол работы директивы. *Форматы хранения данных в системе*

Базовые типы данных. В системе используются 5 предопределенных базовых типов данных: - логический (log); - число (val); - вектор (vec); - матрица (matr); - полиномиальная матрица (polmatr);

Для каждого базового типа данных определен свой формат хранения при передаче данных между модулями:

логический - соответствует формату используемому для записи логической переменной в языке Фортран: Т - истина, F - ложь;

число (числа) записывается в виде последовательности целых или вещественных чисел разделенных символом переноса строки или пробелом. Пример записи чисел: 1 1.2 3.e+5;

вектор записывается в следующем формате: в первой строке количество элементов начиная со второй строки элементы вектора последовательность целых или вещественных чисел, разделенных символом пробела или символом переноса строки. Пример записи вектора:

3 1.2 4 5.34;

матрица - в первой строке размерности (2 целых числа, разделенных пробелом), коэффициенты по столбцам, начиная со второй строки. Пример записи матрицы: 2 2 1.2 4.5 7.3 5.01e+2. Эта запись соответствует матрице:

1.2 7.3

4.5 5.01e+2

полиномиальная матрица - в первой строке размерности (3 целых числа, разделенных пробелом), начиная со второй строки коэффициенты по столбцам (последним меняется индекс степени). Пример записи полиномиальной матрицы:

2 2 2

1.1 5 0 5 4.4 1.0e+4 8 9

Эта запись соответствует полиномиальной матрице:

$4.4s + 1.1$ $8s$

$1.0e+4s + 5$ $9s + 5$

Составные типы данных

Составной тип данных представляет собой набор переменных базового типа, объединенных общим именем. В системе определены следующие составные типы:

ldeqr - Дифференциальные уравнения объекта управления в форме Лагранжа. Транслируется в 3 переменные типа polmatr.

ldeqc - Дифференциальные уравнения регулятора в форме Лагранжа. Транслируется в 3 переменные типа polmatr.

lmvr - Уравнения измеряемых переменных объекта управления в форме Лагранжа. Транслируется в 2 переменные типа matr.

lmv - Уравнения измеряемых переменных объекта управления в форме Лагранжа. Транслируется в 1 переменную типа matr.

lcv - Уравнения регулируемых переменных объекта управления в форме Лагранжа. Транслируется в 1 переменную типа matr.

lu - Уравнения управлений регулятора в форме Лагранжа. Транслируется в 3 переменные типа matr.

cdeqr - Дифференциальные уравнения объекта управления в форме Коши. Транслируется в 3 переменные типа matr.

cdeqc - Дифференциальные уравнения регулятора в форме Коши. Транслируется в 3 переменные типа matr.

cmvr - Уравнения измеряемых переменных объекта управления в форме Коши. Транслируется в 3 переменные типа matr.

csvr - Уравнения регулируемых переменных объекта управления в форме Коши. Транслируется в 3 переменные типа matr.

cmv - Уравнения изм. переменных объекта управления в форме Коши. Транслируется в 1 переменную типа matr.

csv - Уравнения регулируемых переменных объекта управления в форме Коши. Транслируется в 1 переменную типа matr.

cu - Уравнения управлений регулятора в форме Коши. Транслируется в 3 переменные типа matr.

vv - Дифференциальные уравнения объекта в форме вход-выход. Транслируется в 3 переменные типа polmatr.

Передача данных между модулями системы

Передача данных между модулями системы осуществляется через файлы. Каждая

переменная базового или производного типа во время работы системы связывается с файлом, имя которого генерируется системой. Переменная составного типа данных связывается с несколькими файлами. Имена файлов с исходными данными передаются модулю в файле input.tmp следующего формата: в первой строке указывается количество файлов с данными, далее идут имена файлов.

Пример файла input.tmp:

3

d.tmp

k.tmp

h.tmp

Имена файлов для размещения результатов работы модуля передаются в файле output.tmp. Формат файла такой же, как и input.tmp. Если модуль имеет возможность автономной работы, то в файле result.tmp ему передается имя файла для вывода протокола работы (в виде, удобном пользователю). Если модуль использует ключи, они передаются в файле key.tmp.

В процессе работы модуль должен создать файл с именем 2.gma и записать в него следующий код: 0 - успешное завершение работы 1 - выход по ошибке.

Если такой файл не был создан, система считает, что модуль выполнялся с ошибкой, но работа директивы не прерывается.

Файлы настройки системы

Основной файл настроек называется newgamma.ini и находится в каталоге с системой. В нем могут быть заданы следующие параметры:

GAMMA = путь к каталогу системы ГАММА1-РС

DATA = путь к каталогу с данными библиотеки модулей ГАММА-2РС

DLIST = путь к каталогу с файлами-списками директив

DIR = путь к каталогу со схемами директив

PAGEWIDTH = ширина файла протокола в символах (по умолчанию - 78)

TIMEOUT = время ожидания исполнения модуля в минутах

DEBUG = режим отладки: 1 - включить, 0 - выключить.

Дополнительный файл настроек называется gamma.ini и находится в каталоге системы ГАММА1-РС. Он предназначен для создания файла gamma.cfg, необходимого для работы модулей из системы ГАММА1-РС. Могут быть заданы следующие параметры:

EXEMOD = путь к каталогу с исполняемыми файлами модулей; SAVEDATA = путь к каталогу для сохранения и загрузки данных; TMPDATA = путь к каталогу для размещения временных файлов

Добавление новых модулей в библиотеку

Библиотека модулей системы ГАММА-2РС разбита на группы в соответствии с классификацией решаемых задач. Существует возможность добавления и изменения группы. Для этого в меню "Группы" необходимо выбрать соответствующую команду.

Удалить непустую группу нельзя. Включение модулей в библиотеку ГАММА-2РС осуществляется в пределах конкретной группы выбором в меню "Модули" команды "Добавить". При выполнении этой команды на экране появляется окно описания модуля.

Рис. 2.1. Окно описания модуля

Включение модуля подразумевает заполнение окон:

- Имя модуля - имя модуля, которым идентифицируется модуль в окне группы. Длинное имя разделяют двойным слешем (//), в этом случае оно переносится на следующую строку.
- Номер - номер модуля в классификационном списке
- Название - название модуля в классификационном списке
- Ключи - ключи, если они необходимы для работы программы
- Программа - имя ехе-файла (без расширения), запуск которого осуществляет выполнение программы. Саму исполняемую программу следует поместить в каталог, заданный в файле gamma.ini параметром EXEMOD. Обычно это каталог GAMMA/MODULES/.
- Справка - имя файла справки (в формате doc или rtf) с расширением. Если файл находится не в главном каталоге программы, то указывается путь, например DOC/m010.doc. Вызов справки осуществляется выбором в меню "Модули" команды "Справка".
- Тип модуля - устанавливается мышью на соответствующее окно
- Входы - в этом окне пишут число входов модуля, например 3, затем нажимают кнопку "Описание" - высвечивается окно описания входов.

Рис. 2.2. Окно описания входов

Здесь: название - обозначение входа, которое будет идентифицировать вход модуля на графическом изображении. Не рекомендуется использовать более трех символов; описание - смысловое описание входа (например, "коэффициенты полинома при регулируемой переменной"); тип - обозначение типа входа, устанавливается нажатием мышью стрелки "вниз" и выбором обозначения типа.

- Выходы - окно описания выходов заполняется аналогично окну входов. - Возможность автономной работы - устанавливается нажатием кнопки мыши. Показывает, возможен ли автономный (не в составе директивы) запуск модуля. Чтобы запустить модуль автономно, нужно в меню "Модули" выбрать команду "Выполнить".

Модули могут переноситься в другие группы. Для этого нужно нажать мышью на стрелку "вниз" у окна "Группа" и выбрать в списке групп ту, в которую должен быть перенесен модуль. Включенный модуль будет иметь свое графическое изображение.

Рис. 2.3. Пример графического изображения модуля

Создание новых директив Создание директивы начинается с создания входного (интерфейсного) модуля, осуществляющего ввод исходных данных в директиву. Такой модуль создается как было описано выше, переключатель типа модуля (см. рис.

2.1) ставится в положение "входной" и описываются только выходы модуля. Директива может иметь только один входной модуль. Ввод директивы заключается в наборе структурной схемы в окне ГАММА-2РС. Структурная схема набирается из включенных ранее модулей путем соединения их выходов и входов. Набор структурной схемы осуществляется следующим образом. Модуль мышью переносится из группы, в состав которой он входит, в графический редактор системы. Далее его необходимо соединить с вынесенными ранее модулями. Нажатием кнопки мыши отмечают соединяемые вход и выход двух модулей. На экране связь отображается в виде прямой линии черного цвета. Одновременно на экране отображаются только те линии, которые связаны с выбранным в данный момент модулем, остальные линии скрываются. Выход модуля может иметь несколько связей, а вход - только одну. Допускается не задействовать выходы модулей, входы должны быть заданы все. Если вход еще не задан, он отмечен красным цветом. Входы типа "text" не должны быть соединены с другими выходами, данные для них задаются напрямую при создании директивы с помощью двойного щелчка мышью на модуле и заполнения появившегося окна. Последовательность выполнения модулей задается соединением специальных входов и выходов, обозначенных ромбиками. Такие соединительные линии имеют зеленый цвет и постоянно находятся на экране. Возможно многократное разветвление структуры директивы с помощью модуля "Условие". Входом такого модуля является переменная логического типа (log). Если ее значение является истиной (true), то выполнение директивы продолжается по ветви от выхода, обозначенного "1", если ложь (false) - то по ветви, обозначенной "0".

Рис. 2.4. Модуль разветвления структуры директивы

Для автоматического ведения протокола директивы необходимо указать, какие входы и выходы нуждаются в протоколировании, и задать необходимые текстовые пояснения. Для этого надо щелкнуть мышью на модуле и в открывшемся окне:

- поставить галочку у пункта "Добавлять входы и выходы в файл протокола";
- поставить галочки слева от тех входов/выходов, которые нужно добавлять в протокол;
- задать необходимые пояснения в текстовых полях справа от обозначения входов/выходов. В пояснениях можно использовать следующие символы: "/" (двойной слэш) - перенос на следующую строку; " " - разделительная линия.

Рис. 2.5. Пример окна ввода комментариев

Также для ведения протокола можно использовать специальные модули "Протокол" с различным числом входов.

Для вывода на экран графиков используется модуль "график" с различным числом входов. Текстовые пояснения к графикам задаются аналогично протоколу.

Для остановки выполнения директивы используется модуль "останов". В качестве текстового пояснения к его единственному входу задается сообщение, которое при выполнении этого модуля выводится на экран.

Таким образом набирается вся структурная схема. (примеры схем см. далее на рис. 2.6, 2.8). Далее структурную схему можно сохранить, выбрав в меню "Дирек-

тивы” соответствующую команду. Для запуска директивы следует выбрать команду ”Выполнить”. После этого на экране появится окно ввода исходных данных. Заполнив это окно и нажав кнопку ”Выполнить”, можно запустить директиву на выполнение. Для работы с включенной ранее директивой необходимо в меню ”Директивы” выбрать команду ”Открыть”. (структурные схемы хранятся на диске в виде файлов с расширением shm). Директива открывается по имени введенной ранее структурной схемы.

Расширение меню пользователя Меню пользователя (открывающееся при нажатии кнопки ”Пользователь” при запуске системы) организовано в виде .lst-файлов, хранящихся в каталоге, заданном параметром DLIST в файле newgamma.ini. Каждый .lst-файл представляет собой список пунктов меню, каждому из которых может быть противопоставлено некоторое действие. Формат файла таков: ПУНКТ МЕНЮ [= ИМЯ ФАЙЛА]

Если ИМЯ ФАЙЛА имеет расширение .lst, то при выборе этого пункта открывается новое меню, описанное в указанном файле. Если ИМЯ ФАЙЛА имеет расширение .shm, то при выборе этого пункта открывается соответствующая директива и вызывается окно ввода исходных данных. Если ИМЯ ФАЙЛА не указано, то перед пунктом меню автоматически ставится символ ”[-]”, и нажатие на него не дает никакого эффекта. Первым всегда открывается файл start.lst. Русские буквы в lst-файлах должны быть в кодировке Windows

Пример lst-файла:

```
401 Построение непрерывной модели (111.3) = d401.shm
402 Построение непрерывной модели с её подтверждением (112.1)
404 Директива 401 с парными испытаниями (118.1) = d404.shm
405 Оценка верхней границы собственных частот объекта (119.1)
406 Построение дискретной модели (121.2)
407 Идентификация с параллельной фильтрацией (131.1)
408 Идентификация с последовательной фильтрацией (131.2)
409 Построение дискретной модели (211.3) = d409.shm ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ДИРЕКТИВЫ
= identd.lst ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ДИРЕКТИВЫ = identv.lst
```

Практикум 2

Оптимальные системы

Практикум выполняется на ЭВМ типа IBM PC (и совместимых с ней) с использованием системы ГАММА - 2РС.

До начала практикума необходимо освоить систему ГАММА - 2РС.

Цикл из 5-ти работ разбит на две части. Первая часть, состоящая из работ 1 – 3, посвящена оптимальному управлению, вторая (работы 4 и 5) – её применению для синтеза регуляторов по инженерным показателям точности и качества (установившимся ошибкам по регулируемым переменным, полосе пропускания системы, запасам устойчивости).

Пр.2.1 Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов (Директива 111)

Цель работы:

Исследование инженерных показателей оптимальных систем в зависимости от структуры уравнений объекта управления, структуры и коэффициентов функционала оптимизации.

Задания выполняются по директиве 111.

Задание 1

а) Изменяя параметр функционала $q_{11}^{(0)}$ (начиная с $q_{11}^{(0)} = 10$), синтезировать для каждого из этих значений регулятор и, моделируя замкнутую этим регулятором систему, определить инженерные показатели (время регулирования ($t_{\text{рег}}$), перерегулирование (σ), установившуюся ошибку при единичном ступенчатом возмущении, частоту среза, запасы устойчивости) оптимальных систем;

б) Построить графики зависимости $t_{\text{рег}}$, σ и $y_{\text{уст}}$ от $q_{11}^{(0)}$.

Исходные данные

Объект управления описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= x_3, & \dot{x}_3 &= -600x_3 - \delta \cdot 1800x_2 + 3 \cdot 10^6 u + 1.5 \cdot 10^6 w \\ y_1 &= x_1, & y_2 &= x_2, & y_3 &= x_3, & z &= x_1,\end{aligned}$$

где $\delta = 10N$, — номер варианта задания, $w = f$ — внешнее возмущение, $z = \theta$ — регулируемая переменная.

Функционал оптимизации:

$$J = \int_0^{\infty} \left(q_{11}^{(0)} z^2 + u^2 \right) dt \quad (\text{Пр.2.1})$$

Задание 2

Повторить задание 1 для объекта другого вида

Исходные данные

Объект управления описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + w, & \dot{x}_2 &= u + \delta w, \\ y_1 &= x_1, & y_2 &= x_2, & z &= -x_1 + x_2,\end{aligned}$$

где $\delta = 10N$, N — номер варианта задания.

Функционал оптимизации имеет вид: (Пр.2.1)

Упражнения

1. Сформировать следующие матрицы задачи оптимизации (для одного значения $q_{11}^{(0)}$) и сравнить их с матрицами, приведенными в протоколе директивы

а) Матрицу Q в уравнении Риккати;

б) Гамильтониан;

в) Матрицу C управления.

2) Сравнить графики зависимости установившейся ошибки от $q_{11}^{(0)}$, полученные в двух заданиях и объяснить причину существенного различия этих графиков.

Пр.2.2 Оптимальная система с наблюдателем (Директива113)

Цель работы:

Исследование инженерных показателей оптимальных систем с наблюдателем в зависимости от структуры объекта и настраиваемого параметра ρ в уравнениях Риккати для наблюдателя.

Задания выполняются по директиве 113.

Задание 1

а) Изменяя параметр ρ (начиная с $\rho = 1$), синтезировать для каждого из значений ρ наблюдатель и, моделируя систему с этими наблюдателями, определить инженерные показатели оптимальных систем;

б) Построить графики зависимости установившихся ошибок ($y_{уст}$) от ρ .

Исходные данные

Объект управления описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= x_3, & \dot{x}_3 &= -600x_3 - \delta \cdot 1800x_2 + 3 \cdot 10^6 u + 1.5 \cdot 10^6 w \\ y_1 &= x_1, & z &= x_1,\end{aligned}$$

где $\delta = 10N$, N — номер варианта задания, $w = f$ — внешнее возмущение, $z = \theta$ — регулируемая переменная.

Функционал оптимизации имеет вид: $J = \int_0^{\infty} (100z^2 + u^2) dt$

Задание 2

Выполняется аналогично предыдущему заданию при начальном $\rho = 100$.

Исходные данные

Объект управления описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -5x_3 + 5u + w, & \dot{x}_2 &= x_1 - 25.1x_3 - \delta u, & \dot{x}_3 &= x_2 - 6.2x_3, \\ y_1 &= x_3, & z &= -x_3\end{aligned}$$

где $\delta = 10N$, N — номер варианта задания.

Функционал оптимизации имеет вид: $J = \int_0^{\infty} (10000z^2 + u^2) dt$

Упражнения

1. Сформировать следующие матрицы (для одного значения ρ) и сравнить их с матрицами, приведенными в протоколе директивы

а) Матрицу Q в уравнении Риккати для наблюдателя;

б) Гамильтониан для наблюдателя;

в) Матрицы A_p , B_p , C_p — регулятора.

2) Сравнить графики $y_{уст}(\rho)$ в результате выполнения первого и второго задания. Объяснить причину их существенного различия.

Пр.2.3 H_∞ –оптимальное управление (Директива 131)

Цель работы:

Исследование инженерных показателей систем, регуляторы которых получены на основе процедуры H_∞ –субоптимального управления.

Задания выполняются по директиве 131.

Задание

Изменяя параметр γ^2 , синтезировать для каждого из значений регулятор и определить минимальное γ , при котором он существует.

Исходные данные

Исходные данные совпадают с исходными данными для заданий 1 и 2 занятия.

Упражнения

1. Сформировать следующие матрицы задачи оптимизации (для одного значения γ^2) и сравнить их с матрицами, приведенными в протоколе директивы:
 - а) Матрицы, независимые от P и P_e , в уравнениях Риккати для управления и наблюдателя;
 - б) Гамильтонианы для решения уравнений Риккати;
 - в) Матрицы A_p , B_p , C_p – регулятора.
2. Сравнить графики $t_{\text{рег}}(\gamma^2)$ для этих двух заданий и объяснить причину их различия.
3. Исследовать влияние изменения γ в окрестностях γ_{\min} :
 - а) Изменяя γ в окрестностях γ_{\min} исследовать зависимость матриц регулятора от γ ;
 - б) Объяснить причину существенного влияния таких γ на матрицы регулятора;
 - в) Убедиться, что эти изменения матриц регулятора слабо влияют на инженерные показатели.

Пр.2.4 Синтез точного управления для объектов второго вида (Директива 113)

Цель работы:

Синтез регуляторов при различных требованиях к точности, а также анализ по другим инженерным показателям: времени регулирования, перерегулированию, запасам устойчивости.

Задание выполняется по директиве 142.

Задание

а) Задаваясь требованиями к точности $z_1^* = z_2^* = z^*$ (0.5, 0.05, 0.005, 0.0005), синтезировать для каждого из этих значений регулятор и, моделируя систему замкнутую этими регуляторами, определить инженерные показатели систем.

Исходные данные

Рассмотрим гироскоп, описываемую уравнениями [?]

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + 400\dot{q}_1 + 0.342\dot{q}_3 + 0.94\dot{q}_4 - 940q_3 + 324q_4 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + 400\dot{q}_2 + 0.866\dot{q}_3 + 0.5\dot{q}_4 - 500q_3 + 866q_4 &= 0, \\ \delta \cdot 803\dot{q}_1 + 154\dot{q}_2 + 100\dot{q}_3 + 754q_3 + 1130q_4 &= u_1 + w_1, \\ \delta \cdot -718\dot{q}_1 - 1070\dot{q}_2 + 201\dot{q}_4 - 867q_3 - 754q_4 &= u_2 + w_2,\end{aligned}$$

где q_1, q_2 – углы прецессии гироскопов; \dot{q}_3, \dot{q}_4 – проекции абсолютной угловой скорости площадки на её оси; u_1, u_2 – моменты двигателей; w_1, w_2 – возмущающие моменты. Регулируемые и измеряемые переменные совпадают и связаны с физическими переменными соотношениями

$$z_1 = y_1 = q_1, \quad z_2 = y_2 = q_2.$$

w_1 и w_2 – полигармонические функции, ограниченные числами $w_1^* = w_2^* = 700$, $w_1(t) = 410 \sin(5\delta)t + 565 \cos(7\delta)t$, $w_2(t) = 565 \sin(5\delta)t + 410 \cos(7\delta)t$. w_1 и w_2 могут быть также ступенчатыми функциями с величиной "ступеньки" $w_1 = w_2 = 700,0$. $\delta = 10N$, N — номер варианта задания.

Упражнения

Указание Матрицы и параметр ρ в уравнении Риккати для наблюдателя принять следующим: $Q_e = 0$, $V = E$, $\rho = 10^{10}$.

1. Используя протокол директивы, убедиться, что объект управления обладает свойствами, необходимыми для использования этих директив.
2. Построить матрицы Q_0, Q_1 в уравнениях Риккати и сравнить их с матрицами, приведенными в протоколе директивы.
3. Объяснить зависимость инженерных показателей от значений z^* .

Пр.2.5 Синтез точного управления для объектов общего вида (Директива 144)

Цель работы:

Найти минимальное значение показателя установившейся точности при различных значениях параметров α и β в уравнениях Риккати и определить при этом значения инженерные показатели.

Задание выполняется по директиве 144.

Задание 1

Выполнить задание предыдущего занятия 4, исследуя зависимость времени регулирования от параметра β^2 .

Задание 2

Изменяя параметры α и β (начиная с $\alpha = 10$ и $\beta = 10$), синтезировать для каждого из значений регулятор и, моделируя систему замкнутую этими регуляторами, определить инженерные показатели оптимальных систем.

Исходные данные

Рассмотрим уравнения продольного возмущенного движения вертолета МИ-6 в строю в одном из режимов полета.

$$\begin{aligned}\delta \cdot \ddot{q}_1 + 0.031\dot{q}_1 - 0.0034\dot{q}_2 + 3.4\dot{q}_3 + 9.8q_3 &= -1.04u_1 - 15u_2 - 0.155w_1, \\ \delta \cdot \ddot{q}_2 - 0.049\dot{q}_1 + 0.62\dot{q}_2 + 0.3\dot{q}_3 &= -74u_1 - 47u_2 + 0.254w_2, \\ \ddot{q}_3 + 0.77 \cdot 10^{-3}\dot{q}_1 + 0.0047\dot{q}_2 + 0.32\dot{q}_3 &= -u_1 - 3.3u_2 - 0.385 \cdot 10^{-2}w_3, \\ y_1 &= q_1, \quad y_2 = q_2, \quad y_3 = q_3, \\ z_1 &= q_1, \quad z_2 = q_2, \quad z_3 = q_3,\end{aligned}$$

где $q_i(t)$ ($i = \overline{1,3}$ – проекции вектора расстояния вертолета от ведущего, $w_i(t)$ ($i = \overline{1,3}$ – проекции вектора возмущений – ступенчатые функции $w_i(t) = 5 \cdot 1(t)$ ($i = \overline{1,3}$ (порыв ветра), $\delta = 10N$, N — номер варианта задания.

Матрицы, входящие в уравнения Риккати $Q^{(0)} = \text{diag}[100, 15625, 6718.62]$, $Q^{(1)} = \text{diag}[1, 1, 1]$

Упражнения

1. Построить матрицы Q_0 и Q_1 в уравнениях Риккати 1^{го} и 2^{го} заданий и сравнить их с приведенными в протоколе директивы.
2. Объяснить зависимость времени регулирования от параметра β^2 в первом задании.

Практикум 3

Идентификация и адаптивное управление

Практикум состоит из цикла 5-ти занятий по разделам *идентификация* и *адаптивное управление* курса.

Эти работы выполняются на ЭВМ типа РС АТ (и совместимых с ней) с использованием системы ГАММА-2РС.

Цель этих занятий состоит в исследовании влияния неопределенных, ограниченных внешних возмущений и параметров алгоритмов на процессы идентификации и адаптации.

Цель работ 1 и 2 состоит в практическом освоении методов и приобретении опыта идентификации, а также сравнения двух методов идентификации: *частотного метода* и *метода наименьших квадратов*.

Динамический объект имитируется программой решения линейного дифференциального уравнения, структура (степень числителя и знаменателя его передаточной функции) и параметры которого неизвестны обучаемому.

Процесс идентификации можно разделить на следующие этапы.

1. Планирование экспериментов.
 - (а) Выбор входных (испытательных) сигналов.
 - (б) Определение выборочного интервала (интервала дискретности) – h .
 - (в) Выбор длительности испытаний – δ .

2. Выбор структуры модели.

- (а) Выбор степеней числителя и знаменателя передаточной функции объекта.
- (б) Выбор вида модели объекта: непрерывная модель (описываемая дифференциальным уравнением) либо дискретная (описываемая разностным уравнением).

3. Выбор метода определения параметров.

4. Подтверждение модели.

На этом этапе сравниваются выходы объекта и идентифицированной модели и делается заключение о завершении (или продолжении) идентификации.

Пр.3.1 Конечно- частотная идентификация (директива 111.3).

Цель работы

Работа направлена на практическое освоение частотного метода идентификации и приобретение опыта идентификации физического объекта, описываемого выходными и входными сигналами.

Три вида моделей объекта

Можно различить три вида моделей объекта: предполагаемую, действительную и идентифицированную модели.

Предполагаемая модель описывается в задании на лабораторную работу (таблица 1 приложения).

Действительная модель формируется ЭВМ на основе предполагаемой модели путём изменения её коэффициентов с помощью генератора случайных чисел в пределах, указанных в таблице 1 процентов. Командой на формирование действительной модели является задание режима работы объекта (номера варианта). Если этот номер равен 1, то введенная из таблицы 1 модель (предполагаемая модель) остается без изменения. Если номер режима равен 2, то случайным образом формируется новая (действительная) модель. Если номер режима равен 3, то параметры сформированные в режиме 2, изменяются случайным образом в пределах указанных в таблице 1 процентов и т.д..

Идентифицированная модель – это модель получаемая в результате идентификации.

Последовательность экспериментов

Процесс выполнения лабораторной работы состоит из трех серий экспериментов.

Целью *первой серии* экспериментов является определение параметров испытательного сигнала.

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \rho_i \sin \omega_i t \quad (\text{Пр.3.1})$$

где ρ_i ($i = \overline{1, n}$) – амплитуды, ω_i ($i = \overline{1, n}$) – частоты испытательного воздействия (для простоты, далее $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$), n – порядок модели объекта. Эксперименты этой серии выполняются с помощью директив 116.2 и 116.3.

Вторая серия экспериментов (моделирование процесса идентификации) предназначена для определения интервала дискретности – h , измеряемого числом делений периода наибольшей частоты ω_n , длительности задержки начала фильтрации и длительности фильтрации измеряемых числом периодов наименьшей частоты ω_1 . Для этой серии используется директива 111.4 (режим 1).

Третья серия экспериментов – это идентификация, которая осуществляется с помощью директивы 111.4 (режим, указанный в задании).

Таким образом первые две серии являются подготовительными для третьей.

В первой и третьей сериях используется действительная модель объекта, а во второй серии – предполагаемая модель.

Методика экспериментов

Первая серия экспериментов

Для выполнения первой серии экспериментов используется директива 116.2 (определение частот испытательного воздействия) и директива 116.3 (определение амплитуд испытательного воздействия). Эксперименты проводятся над действительной моделью.

Для определения частот испытательного воздействия объект возбуждается ступенчатым сигналом.

$$u(t) = \bar{u} \cdot 1(t), \quad (\text{Пр.3.2})$$

в котором амплитуда \bar{u} выбирается так чтобы можно было визуально определить время переходного процесса T . При этом \bar{u} должно быть таковым, чтобы процессы при $\bar{u} = 0$ и $\bar{u} \neq 0$ отличались не более чем в 1.5 раза.

Используя полученное значение T определяем

$$\omega_1 = \frac{3}{T} \quad (\text{Пр.3.3})$$

Остальные испытательные частоты ω_i ($i = \overline{1, n}$) должны быть кратны ω_1 :

$$\omega_i = k\omega_1, \quad i = \overline{2, n} \quad (\text{Пр.3.4})$$

где k_i ($i = \overline{2, n}$) – целые положительные числа.

Заметим что эти частоты желательно выбирать близкими к числам $\frac{1}{T_i}$ ($i = \overline{1, n} < n$), где T_i – постоянная времени знаменателя передаточной функции предполагаемой модели.

Определение амплитуд ρ_i ($i = \overline{1, n}$) испытательного сигнала (??) осуществляется с использованием директивы 116.3.

Объект возбуждается воздействием (??) с определенными выше частотами.

При этом показатель $\lambda = 0$ для асимптотически устойчивых объектов.

В экспериментах по определению амплитуд ρ_i ($i = \overline{1, n}$) вначале выбираются малые их значения и запоминается выход объекта $y^{(1)}(t)$. Эта функция сравнивается с функцией $y_{u=0}(t)$ (которая является выходом объекта при $u = 0$), если $y^{(1)}(t)$ и $y_{u=0}(t)$ отличаются менее чем в 1.5 раза, то эксперимент повторяется для больших значений ρ_i ($i = \overline{1, n}$) и запоминается график $y^{(2)}(t)$, который сравнивается с $y_{u=0}(t)$. Если они различаются более чем в 1.5 раза, то ρ_i ($i = \overline{1, n}$) – уменьшается и т.д.

Вторая серия экспериментов

Эта серия осуществляется над предполагаемой моделью с использованием директивы 111.4 (режим 1). Если идентифицируемая модель ищется в непрерывной форме, то в начале определяется минимально допустимый интервал дискретности h , при котором дискретность практически не искажает непрерывной модели. Для определения такого h необходимо задаться некоторым числом делений (N) периода максимальной испытательной частоты, числами периодов задержки и фильтрации равным 1 и начать моделирование процесса идентификации.

Если таблицы 2 и 3 протокола директивы показывают удовлетворительную близость полиномов $d_{con}(s)$ и $d(s)$, $k_{con}(s)$ и $k(s)$, то процесс моделирования продолжается, в противном случае он прекращается и начинается снова при большем числе делений N .

Процесс моделирования завершается графиком 3 (Подтверждение модели), на котором приведены результаты моделирования предполагаемой и идентифицированной модели при $u(t) = 1(t)$ и $f(t) = 0$. Если выходы этих моделей достаточно близки то это означает, что значения периодов фильтрации, принятые в этом эксперименте, могут быть использованы в третьей серии экспериментов.

В противном случае (когда выходы моделей существенно отличаются) необходимо повторить эксперимент увеличивая число число периодов фильтрации.

Третья серия экспериментов

Эта серия осуществляется над действительной моделью с использованием директивы 111.4 (режим, указанный в задании).

Пр.3.2 Идентификация на основе метода наименьших квадратов (директива 211)

В этой работе необходимо исследовать влияние начальных условий рекуррентных уравнений МНК на длительность процесса идентификации, а также определить наименьшую амплитуду гармонического внешнего возмущения, при которой ошибки идентификации выходят за допустимые пределы.

Пр.3.3 Частотное адаптивное управление (директива 311)

Цель работы

Исследовать влияние параметров алгоритма адаптации на процесс частотного адаптивного управления. Параметрами алгоритма служат амплитуды и частоты испытательных воздействий, прикладываемых к объекту и замкнутой системе, а также верхние границы разностей текущих частотных параметров, ошибок идентификации и т.д.. Процесс адаптивного управления характеризуется его длительностью и максимальными отклонениями выходов объекта и регулятора.

Планирование экспериментов

При планировании экспериментов необходимо выбрать амплитуды и частоты испытательных воздействий для первого этапа адаптации, в котором используется объект управления (для простоты, начальный регулятор на этом этапе не используется) и второго этапа, когда объект замыкается регулятором.

При их выборе использовать рекомендации п.3.2.4. Испытательные частоты второго этапа определяются как вещественные корни желаемого полинома (а в случае комплексных корней эти частоты равны половине и удвоенной частоте мнимых частей этих корней).

Пр.3.4 Адаптивное управление с использованием МНК (директива 411)

Цель работы состоит в исследовании влияния начальных условий для рекуррентных уравнений идентификации и внешних возмущений на сходимость адаптации, а также в определении амплитуды гармонического внешнего возмущения, при которой процесс адаптации не ведёт к цели адаптации, выраженной желаемым полиномом замкнутой системы.

Для планирования эксперимента использовать рекомендации раздела 3.3.

Пр.3.5 Адаптивное управление с эталонной моделью (директива 511)

Цель работы

Изучить процессы адаптивного управления с эталонной моделью и исследовать влияния внешних возмущений на процесс адаптации.

Варианты заданий к работам 1 – 4

Таблица 1¹

¹Вариации коэффициентов означают различие коэффициентов предполагаемой и действительной моделей объекта и возмущения.

NN за- да- ний	Предполагаемая модель объекта	Внешнее возмущение	Номер варианта
1	$(s^2 + 6s + 25)(5s + 1)y =$ $= 25(-0.4s + 1)u + f$ Вариации коэффициентов: (5) : 70%	$10 \sin 6.1t$ 80%	1 вар. – режим 3 2 вар. – режим 4
2	$(1000s + 1)(50s + 1)y =$ $= 5(-50s + 1)u + f$ Вариации коэффициентов: (1000) : 70%	$\sin 0.025t$ 80%	1 вар. – режим 3 2 вар. – режим 4
3	$(1000s + 1)(s^2 + 0.3s + 0.25)y =$ $= 5u + f$ Вариации коэффициентов: (1000) : 70%	$5 \sin 0.31t$ 80%	1 вар. – режим 3 2 вар. – режим 4

Желаемые полиномы для занятий 3, 4

Таблица 2

N зада- ния	Желаемый полином
1	$(s + 1)(s + 2)(s + 3)(s + 4)(s + 5)$
2	$(100s + 1)(150s + 1)(200s + 1)(250s + 1)$
3	$(50s + 1)(100s + 1)(150s + 1)(180s + 1)(200s + 1)$
4	$(s + 1)(s + 2)(s + 3)(s + 4)(s + 5)$

Варианты заданий к работе 5

Таблица 3

Задание 1:

Уравнение объекта: $(s^2 - 1)y = (s + 2)u + (s + 2)f$;

Уравнение модели: $(s^2 + 5s + 6)y = (s + 1)g$;

Вид и параметры внешнего возмущения: $5 \sin 20t$;

Вид и параметры задающего воздействия: $20 \cos 2.5t + 20 \cos 5t$.

Задание 2:

Уравнение объекта: $(s^3 + 10s^2 + 20s + 20)y = (s^2 + 5s + 4)u + (s^2 + 5s + 4)f$;

Уравнение модели: $(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)y = 2(s^2 + 4s + 3.75)g$;

Вид и параметры внешнего возмущения: $5 \cos 25t$;

Вид и параметры задающего воздействия: $10 \sin 2.5t$.

Задание 3:

Уравнение объекта: $(s^3 + 7s^2 + 5s + 2.25)y = (s^2 + 4s + 3.75)u + (s^2 + 4s + 3.75)f$;

Уравнение модели: $(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)y = (s^2 + 4s + 3.75)g$;

Вид и параметры внешнего возмущения: $3 \sin 30t$;

Вид и параметры задающего воздействия: $5 \operatorname{sign}(\sin 0.75t)$.

Задание 4:

Уравнение объекта: $(s^3 + 12s^2 + 8s + 5)y = (s^2 + 3s + 10)u + (s^2 + 3s + 10)f$;

Уравнение модели: $(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)y = 2(s^2 + 4s + 3.75)g$;

Вид и параметры внешнего возмущения: $501(t)$;

Вид и параметры задающего воздействия: $10 \operatorname{sign}(\sin 0.5t)$.

Задание 5:

Уравнение объекта: $(s^3 + 14s^2 + 40s + 20)y = (s^2 + 5s + 4)u + (s^2 + 5s + 4)f$;

Уравнение модели: $(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)y = (s^2 + 4s + 3.75)g$;

Вид и параметры внешнего возмущения: $10 \sin 50t$;

Вид и параметры задающего воздействия: $10 \sin 2.5t + 20 \sin 5t$.

Задание 6:

Уравнение объекта: $(s^2 - 0.5)y = (s + 5)u + (s + 5)f$;

Уравнение модели: $(s^2 + 5s + 6)y = (s + 1)g$;

Вид и параметры внешнего возмущения: $10 \operatorname{sign}(\sin 0.125t)$;

Вид и параметры задающего воздействия: $20 \sin 2.5t + 5 \sin 5t + 2.5 \sin 10t$.

Дополнение 1

Элементы классического вариационного исчисления

Доп.1.1 Создание вариационного исчисления

В 1696 г. появилась заметка И.Бернулли, озаглавленная "Новая задача, к решению которой приглашаются математики". В ней ставилась следующая задача. "В вертикальной плоскости даны две точки А и В (рис. 2.1.1). Определить путь АМВ, опускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело М, начав двигаться из точки А, дойдет до точки В в кратчайшее время".

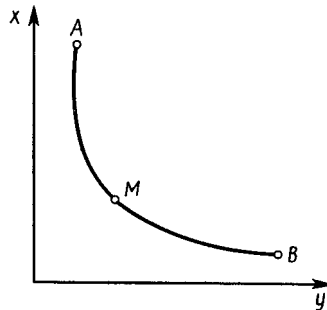


Рис. 2.1.1

Решение этой задачи было получено самим И. Бернулли, а также Г.Лейбницем, Я.Бернулли и И.Ньютоном. Оказалось, что линией наискорейшего спуска (брахистохроной) является циклоида. После этих работ стали появляться и решаться многие задачи того же типа. И. Бернулли поставил перед своим учеником Л. Эйлером проблему найти общий путь их решения.

В 1744 г. вышел труд Эйлера "Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума и минимума или решения изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле", а в 1759 г. появилась работа Лагранжа и с ней новые методы исследования, которые составили новый раздел математики, названный Эйлером *вариационным исчислением*.

Доп.1.2 Понятия вариационного исчисления

Переменная величина $J[x(t)]$ называется *функционалом*, зависящим от функции $x(t)$, если каждой функции $x(t)$ (из некоторого класса функций) соответствует число J . Аналогично определяются функционалы, зависящие от нескольких функций.

Функционал $J[x(t)]$ достигает на $x^0(t)$ минимума, если его значение на любой близкой к $x^0(t)$ кривой $\bar{x}(t)$ не меньше, чем $J[x^0(t)]$, т.е.

$$\delta J = J[\bar{x}(t)] - J[x^0(t)] \geq 0.$$

Аналогично определяется кривая, на которой реализуется максимум. В этом случае $\delta J \leq 0$ для всех кривых, близких к кривой $x^0(t)$.

Уточним понятие близости кривых. Кривые $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ близки в смысле близости нулевого порядка, если модуль разности $x(t) - \bar{x}(t)$ мал. Кривые $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ близки в смысле близости 1-го порядка, если модули разностей $x(t) - \bar{x}(t)$ и $\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)$ малы. Кривые $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ близки в смысле близости k -го порядка, если $|x^i(t) - \bar{x}^i(t)| \leq \varepsilon$ ($i = \overline{1, k}$), $x^i(t)$ — i -я производная, ε — достаточно малое число. На рис. 2.1.2 изображены кривые, близкие в смысле близости нулевого порядка (координаты их близки, а направления касательных существенно различаются), а на рис. 2.1.3 приведены кривые, близкие в смысле близости 1-го порядка.

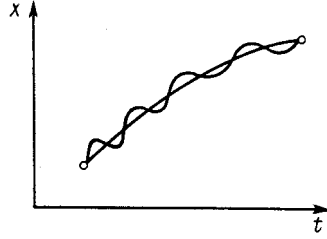


Рис. 2.1.2

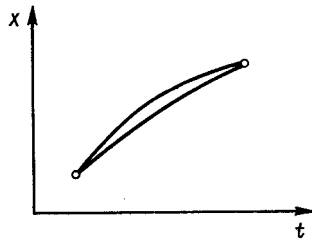


Рис. 2.1.3

Если функционал $J[x(t)]$ достигает на кривой $x^0(t)$ минимума или максимума по отношению ко всем кривым, близким к $x^0(t)$ в смысле близости нулевого порядка, то такой *минимум* (или *максимум*) называется *сильным*.

Если функционал $J[x(t)]$ достигает минимума (или максимума) лишь по отношению к кривым $x(t)$, близким к $x^0(t)$ в смысле близости 1-го порядка, то такой *минимум* (или *максимум*) называется *слабым*. Очевидно, что если достигается сильный минимум (максимум), то достигается и слабый. Далее, если не оговорено противное, будет подразумеваться слабый минимум (максимум).

Разность функций $\bar{x}(t) - x(t) = \delta x(t)$ называется *вариацией* (приращением) *аргумента* $x(t)$ функционала $J[x(t)]$.

Доп.1.3 Вариационная задача с закрепленными граничными точками. Первое необходимое условие экстремума (уравнение Эйлера)

Исследуем на экстремум (максимум или минимум) функционал

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0[t, x(t), \dot{x}(t)] dt, \quad (\text{Дп.1.1})$$

где $\varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))$ – непрерывная и трижды дифференцируемая функция своих аргументов.

Искомая функция (для которой этот функционал принимает экстремальное значение) удовлетворяет краевым условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \quad (\text{Дп.1.2})$$

Задача о нахождении экстремума функционала (Дп.1.1) при условиях (Дп.1.2), в которых x_0 и x_1 – заданные числа, называется *вариационной задачей с закрепленными граничными точками*. Непрерывно дифференцируемые функции $x(t)$, определенные на $[t_0, t_1]$ и удовлетворяющие условиям (Дп.1.2), называются *допустимыми функциями*.

Переходя к решению вариационной задачи, допустим, что ее решение – кривая $x^0(t)$ – найдено. Возьмем некоторую функцию $\bar{x}(t)$ и включим ее в однопараметрическое семейство кривых

$$x(t, \alpha) = x^0(t) + \alpha[\bar{x}(t) - x^0(t)], \quad (\text{Дп.1.3})$$

где α – некоторое число.

Концы варьируемых кривых естественно также закреплять в точках (Дп.1.2) (рис. 2.1.4), и поэтому

$$x(t_0, \alpha) = x_0, \quad x(t_1, \alpha) = x_1. \quad (\text{Дп.1.4})$$

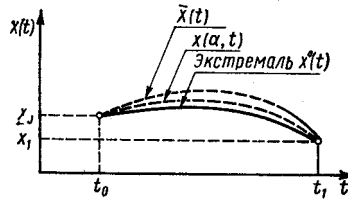


Рис. 2.1.4

Рассмотрим значения, которые принимает функционал (Дп.1.1) на кривых семейства (Дп.1.3),

$$J(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0[t, x^0(t) + \alpha \delta x(t), \dot{x}^0(t) + \alpha \delta \dot{x}(t)] dt, \quad (\text{Дп.1.5})$$

где $\delta x(t) = \bar{x}(t) - x^0(t)$, $\delta \dot{x}(t) = \dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}^0(t)$.

Нетрудно видеть, что при известных кривых $x^0(t)$ и $\bar{x}(t)$ функционал (Дп.1.1) становится функцией α . Эта функция достигает своего экстремума при $\alpha = 0$, так как, по определению, $x(t, 0) = x^0(t)$.

Необходимым условием экстремума функции $J(\alpha)$ при $\alpha = 0$, является, как известно, равенство

$$\left. \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (\text{Дп.1.6})$$

Подставляя в это условие выражение (Дп.1.5), получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right] dt \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) \right] dt \Big|_{\alpha=0} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right|_{\alpha=0} \delta x(t) + \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right|_{\alpha=0} \delta \dot{x}(t) \right] dt = 0. \end{aligned}$$

После интегрирования по частям

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) dt = \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \right|_{t=t_0}^{t=t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \delta x(t) dt,$$

и тогда запишем (Дп.1.6) окончательно с учетом краевых условий $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$ в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right) \delta x(t) dt = 0. \quad (\text{Дп.1.7})$$

В этом выражении сомножитель $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}}$ является на кривой $x^0(t)$, реализующей экстремум, заданной непрерывной функцией, а второй сомножитель $\delta x(t)$ – произвольная (в силу произвола при выборе функции $\bar{x}(t)$) дифференцируемая функция.

При этих условиях из (Дп.1.7) следует тождество

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \equiv 0 \quad (\text{Дп.1.8})$$

которое выполняется на экстремалих $x^0(t)$.

Доказательство того, что (Дп.1.8) следует из (Дп.1.7), опирается на основную *лемму вариационного исчисления*, которая формулируется так: если для каждой непрерывной функции $\eta(t)$ (удовлетворяющей условию $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$)

$$\int_{t_0}^{t_1} \mu(t) \eta(t) dt = 0, \quad (\text{Дп.1.9})$$

где $\eta(t)$ – непрерывная на отрезке $[t_0, t_1]$ функция, то $\eta(t) \equiv 0$ на том же отрезке.

Для доказательства леммы предположим (в противоречии с ее утверждением), что в точке $\bar{t} \in [t_0, t_1]$ значение $\eta(\bar{t}) \neq 0$. Тогда придем к противоречию с утверждением леммы. Действительно, из непрерывности функции $\eta(t)$ следует, что если $\eta(\bar{t}) \neq 0$, то $\mu(t)$ сохраняет знак в некоторой окрестности $\bar{t}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{t}_1$ точки \bar{t} . Выбирая функцию $\eta(t)$ сохраняющей знак на отрезке $[\bar{t}_0, \bar{t}_1] \in [t_0, t_1]$ и равной нулю вне этого отрезка, заключаем, что произведение $\mu(t)\eta(t)$ сохраняет знак на отрезке $[\bar{t}_0, \bar{t}_1]$ и равно нулю вне этого отрезка и, следовательно,

$$\int_{t_0}^{t_1} \mu(t)\eta(t) dt = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \mu(t)\eta(t) dt \neq 0,$$

а это противоречие и доказывает лемму. Таким образом, $x^0(t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} = 0, \quad (\text{Дп.1.10})$$

которое называется *уравнением Эйлера*.

Принимая во внимание, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0(t, x(t), \dot{x}_1(t))}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial t \partial \dot{x}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x \partial \dot{x}} \dot{x}_1 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \ddot{x},$$

запишем (Дп.1.10) в развернутой форме:

$$-\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \ddot{x} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} \dot{x} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \partial \dot{x}} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0. \quad (\text{Дп.1.11})$$

Его решения $x(t, c_1 c_2)$, где c_1 и c_2 – постоянные, определяемые краевыми условиями (Дп.1.2), называются *экстремальями*.

Пример. Найдём кривую $x^0(t)$, проходящую через заданные точки x_0 и x_1 в моменты времени t_0 и t_1 на которой достигает экстремума функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + \tau^2 \dot{x}^2) dt, \quad (\text{Дп.1.12})$$

где τ – заданное число.

В рассматриваемом случае $\varphi_0 = x^2 + \tau^2 \dot{x}^2$, поэтому

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} = 2\tau^2 \dot{x}$$

и уравнение Эйлера для экстремалей функционала (Дп.1.12) имеет вид

$$\ddot{x} - \frac{1}{\tau^2} x = 0. \quad (\text{Дп.1.13})$$

Решением этого уравнения является (как нетрудно проверить непосредственной подстановкой) кривая

$$x(t) = c_1 e^{\frac{t}{\tau}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (\text{Дп.1.14})$$

Используя граничные условия, определим значения постоянных c_1 и c_2 из уравнений

$$\begin{aligned} x_0 &= c_1 e^{\frac{t_0}{\tau}} + c_2 e^{-\frac{t_0}{\tau}}; \quad x_1 = c_1 e^{\frac{t_1}{\tau}} + c_2 e^{-\frac{t_1}{\tau}} \\ c_1 &= \frac{x_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}} - x_1 e^{-\frac{t_0}{\tau}}}{e^{\frac{t_0-t_1}{\tau}} - e^{-\frac{t_0-t_1}{\tau}}}; \quad c_2 = \frac{x_1 e^{\frac{t_0}{\tau}} - x_0 e^{\frac{t_1}{\tau}}}{e^{\frac{t_0-t_1}{\tau}} - e^{-\frac{t_0-t_1}{\tau}}}. \end{aligned} \quad (\text{Дп.1.15})$$

Доп.1.4 Уравнения Эйлера-Пуассона

Исследуем на экстремум функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt, \quad (\text{Дп.1.16})$$

в котором функцию φ_0 будем считать дифференцируемой по своим аргументам необходимое число раз.

Пусть граничные условия имеют вид

$$x(t_0) = x_0; \quad \dot{x}(t_0) = x_0^{(1)}; \quad x(t_1) = x_1; \quad \dot{x}(t_1) = x_1^{(1)}, \quad (\text{Дп.1.17})$$

где $x_0, x_0^{(1)}, x_1, x_1^{(1)}$, — заданные числа.

Нетрудно показать, повторяя изложенное при выводе уравнения Эйлера, что экстремали функционала (Дп.1.16) являются решением уравнения

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \ddot{x}} = 0, \quad (\text{Дп.1.18})$$

которое называется *уравнением Эйлера-Пуассона*. Это уравнение четвертого порядка, его решение $x(t_1, c_1, c_2, c_4)$ содержит постоянные c_i ($i = \overline{1, 4}$), которые определяются из граничных условий (Дп.1.17).

Пример. Найдём экстремали функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + \tau^4 \ddot{x}^2) dt$$

при граничных условиях (Дп.1.17).

Вычислим вначале

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \ddot{x}} = 2\tau^4 \ddot{x},$$

тогда уравнение Эйлера - Пуассона имеет вид

$$x + \tau^4 x^{\text{IV}} = 0.$$

Характеристический полином этого уравнения

$$d(s) = \tau^4 s^4 + 1 = (\tau^2 s^2 - \sqrt{2}\tau s + 1)(\tau^2 s^2 + \sqrt{2}\tau s + 1).$$

Его корни

$$s_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}\tau} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}\tau}; \quad s_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{2}\tau} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}\tau}.$$

И, таким образом, экстремаль функционала имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}\tau}(1+j)} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}\tau}(1-j)} + c_3 e^{\frac{1}{\sqrt{2}\tau}(1+j)} + c_4 e^{\frac{1}{\sqrt{2}\tau}(1-j)},$$

где c_i ($i = \overline{1,4}$) определяются из граничных условий (Дп.1.17).

Доп.1.5 Вариационные задачи с подвижными границами

До сих пор при исследовании функционала (Дп.1.1) предполагалось, что граничные точки (t_0, x_0) , (t_1, x_1) заданы. Теперь будем полагать, что одна или обе граничные точки могут перемещаться. Класс допустимых кривых в этом случае расширяется, так как кроме кривых сравнения, имеющих общие граничные точки с исследуемой кривой, можно брать кривые со смещенными граничными точками. Это означает, что если на какой-нибудь кривой $x_0(t)$ функционал (Дп.1.1) достигает экстремума в задаче с подвижными точками, то экстремум тем более достигается по отношению к более узкому классу кривых, имеющих общие граничные точки с кривой $x^0(t)$, и, следовательно, $x(t)$, должна быть решением уравнения Эйлера (Дп.1.10).

Общее решение уравнения Эйлера содержит две произвольные постоянные, которые находятся при закрепленных границах из граничных условий, а при подвижных границах – из *условий трансверсальности*.

Эти условия имеют вид

$$\left[\varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t)) - \dot{x}(t) \frac{\partial \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \right] \Big|_{t=t_0} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=t_0} = 0; \quad (\text{Дп.1.19})$$

$$\left[\varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t)) - \dot{x}(t) \frac{\partial \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \right] \Big|_{t=t_1} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=t_1} = 0. \quad (\text{Дп.1.20})$$

Если правая граничная точка (t_1, x_1) должна перемещаться по некоторой кривой $x_1 \neq \rho_1(t_1)$, то условия (Дп.1.20) принимают вид

$$\left[\varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t)) + \left(\frac{d\rho_1}{dt} - \frac{dx}{dt} \right) \frac{\partial \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \right] \Big|_{t=t_1} = 0.$$

Аналогичный вид принимают условия (Дп.1.19), если левая граничная точка (t_0, x_0) перемещается по кривой $x_0 = \rho_0(t_0)$.

Соотношения (Дп.1.19), (Дп.1.20) представляют собой четыре уравнения для определения четырех неизвестных: t_0 , t_1 и произвольных постоянных c_1 , c_2 , входящих в общее решение уравнения Эйлера. Часто числа t_0 и t_1 заданы, т. е. точки (t_0, x_0) , (t_1, x_1) могут перемещаться только вертикально, и тогда условия (Дп.1.19), (Дп.1.20) принимают вид

$$\left. \frac{\partial \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_1} = 0. \quad (\text{Дп.1.21})$$

Вывод соотношений (Дп.1.19) ... (Дп.1.21) приведен в [2.2].

Пример. Найдем экстремаль функционала (Дп.1.12) при заданных t_0 и t_1 произвольных x_0 и x_1 . Используя (Дп.1.21), получим

$$\left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_0} = 2\tau^2 \dot{x}(t_0) = 0; \quad \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_1} = 2\tau^2 \dot{x}(t_1) = 0.$$

Подставляя в эти равенства решения (Дп.1.14), имеем

$$c_1 \frac{1}{\tau} e^{\frac{t_0}{\tau}} + c \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t_0}{\tau}} = 0; \quad c_1 \frac{1}{\tau} e^{\frac{t_1}{\tau}} + c \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0.$$

Откуда следует, что $c_1 = c_2 = 0$, и таким образом, экстремалью функционала (Дп.1.12) с подвижными границами является $x(t) \equiv 0$.

Если предположить теперь, что наряду с x_0 , x_1 нефиксированы и числа t_0 , t_1 то, используя (Дп.1.19), (Дп.1.20), получим

$$x^2(t_0) + \tau^2 \dot{x}(t_0) - \dot{x}(t_0) 2\tau^2 \dot{x}(t_0) = 0; \quad 2\tau^2 \dot{x}(t_0) = 0;$$

$$x^2(t_1) + \tau^2 \dot{x}(t_1) - \dot{x}(t_1) 2\tau^2 \dot{x}(t_1) = 0; \quad 2\tau^2 \dot{x}(t_1) = 0.$$

Из этих равенств следует, что $x(t_0) = x(t_1) = 0$ независимо от t_0 и t_1 , и поэтому из (Дп.1.15) получим вновь $c_1 = c_2 = 0$. Таким образом, и в этом случае экстремалью является $x(t_0) \equiv 0$.

Доп.1.6 Второе необходимое условие экстремума (условие Лежандра)

Экстремали функционала (Дп.1.1) с закрепленными концами удовлетворяют уравнению (Дп.1.10), которое выражает первое необходимое условие экстремума. Однако оставалось неясным, доставляют ли они функционалу (Дп.1.1) максимум или минимум? Ответ на этот вопрос дает теорема Лежандра, выражающая *второе необходимое условие экстремума*: для того чтобы функционал (Дп.1.1) в задаче с закрепленными границами достигал на кривой $x_1(t)$ минимума (максимума), необходимо, чтобы вдоль этой кривой выполнялось условие

$$\frac{\partial^2 \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}(t) \partial \dot{x}(t)} \geq 0 \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi_0(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial \dot{x}(t) \partial \dot{x}(t)} \leq 0 \right). \quad (\text{Дп.1.22})$$

Пример. Исследуем, выполняется ли это условие для экстремалей (Дп.1.14) функционала (Дп.1.12).

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \dot{x} \partial \dot{x}} = \tau^2 > 0$$

и, следовательно, на кривых (Дп.1.14) функционал (Дп.1.12) достигает минимума.

Доп.1.7 Вариационные задачи на условный экстремум. Уравнения Эйлера – Лагранжа

Вариационными задачи на *условный экстремум* (связанный экстремум) называются задачи, в которых требуется найти кривые, доставляющие экстремум функционалу, при этом помимо граничных условий они должны удовлетворять некоторым связям (условиям). Например, эти кривые должны иметь заданную длину (изопериметрическая задача) либо удовлетворять некоторой заданной системе дифференциальных уравнений (задача Лагранжа), либо лежать на некоторой поверхности.

Приведенная в первой главе задача об оптимальном программном движении является по математическому содержанию задачей на условный экстремум, в которой требуется найти вектор - функции $\mathbf{x}(t)$, и $\mathbf{u}(t)$, доставляющие функционалу (1.1.4) минимум, причем эти функции должны удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (\text{Дп.1.23})$$

а также интегральным связям (1.1.7) и ограничениям (1.1.5). Опустим пока эти связи и ограничения и для удобства изложения введем в функционал производные переменных состояния и управлений.

Итак, требуется найти экстремали функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) dt, \quad (\text{Дп.1.24})$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}; \quad (\text{Дп.1.25})$$

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^{(1)} \quad (\text{Дп.1.26})$$

и являющиеся решением уравнений связей (Дп.1.23). Эта задача называется *задачей Лагранжа*. Отметим, что если в функционале (Дп.1.24) отсутствует производная

какой-либо из компонент векторов \mathbf{x} или \mathbf{u} , то, естественно, что граничные условия для нее не задаются.

Переходя к решению, введем в рассмотрение новый функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\varphi}_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\psi}, t) dt, \quad (\text{Дп.1.27})$$

в котором

$$\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) + \boldsymbol{\psi}'(t)[\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)], \quad (\text{Дп.1.28})$$

где $\boldsymbol{\psi}'(t)$ — n -мерный вектор, компонентами которого являются пока неопределенные функции, называемые *множителями Лагранжа*. С помощью этих множителей задача об условном экстремуме функционала (Дп.1.24) сводится к задаче на безусловный экстремум функционала (Дп.1.27). Уравнения Эйлера для безусловных экстремалей функционала (Дп.1.27) имеют вид:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \phi_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left[\phi_i(t) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}_i} \right] = 0 \quad (i = \overline{1, n}); \quad (\text{Дп.1.29})$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_k} - \sum_{j=1}^n \phi_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{u}_k} = 0 \quad (k = \overline{1, m}); \quad (\text{Дп.1.30})$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \phi_i} = \dot{x}_i - \varphi_i = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (\text{Дп.1.31})$$

Уравнения (Дп.1.31), (Дп.1.29), (Дп.1.30) образуют систему из $2n + m$ уравнений, которые называются *уравнениями Эйлера — Лагранжа*, для определения такого же числа неизвестных $x_i(t)$, $\psi_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$), $u_k(t)$, ($k = \overline{1, m}$).

Если кривые $x_i(t)$, $u_k(t)$, ($i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}$) доставляют безусловный экстремум функционалу (Дп.1.27), то на них достигается и условный экстремум функционала (Дп.1.24). Действительно, если на указанных кривых достигается безусловный экстремум функционала (Дп.1.27), то они удовлетворяют уравнениям Эйлера (Дп.1.31), (Дп.1.29), (Дп.1.30). Это означает [см. (Дп.1.28)], что на таких кривых значение функционала $J_1 = J$. И если они доставляют безусловный экстремум функционалу (Дп.1.27), то они будут доставлять экстремум и в более узком классе кривых, удовлетворяющих уравнениям связей (Дп.1.23).

Обратное утверждение о том, что функции $x_i(t)$, $u_k(t)$, ($i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}$), доставляющие условный экстремум функционалу (Дп.1.24) при наличии связей (Дп.1.23), будут являться безусловными экстремалами функционала (Дп.1.27), дает следующая теорема.

Теорема. (Теорема Лагранжа) Если функции $x_i(t)$, $u_k(t)$, ($i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}$) доставляют экстремум функционалу (Дп.1.24), удовлетворяют уравнениям связи (Дп.1.23) и краевым условиям (Дп.1.25), (Дп.1.26), то существуют такие множители $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$, что эти функции удовлетворяют уравнениям Эйлера (Эйлера — Лагранжа) для функционала (Дп.1.27).

Доказательство теоремы приведено ниже в Доп. 1.9.

К задачам на условный экстремум относится также *изопериметрическая задача*, которая формулируется так: среди всех кривых, удовлетворяющих граничным условиям (Дп.1.25), (Дп.1.26) и равенствам

$$\int_{t_0}^{t_1} l_i(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) dt = J_{l_i}^* \quad (i = \overline{1, \alpha}),$$

где $l_i(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t)$ – заданные функции; $J_{l_i}^*$ – заданные числа ($i = \overline{1, \alpha}$), требуется найти кривые $x_i(t)$, $u_k(t)$, ($i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}$), на которых достигается экстремум функционала (Дп.1.24).

Изопериметрическая задача сводится путем введения вспомогательных множителей ψ_i , (здесь ψ_i , – некоторые числа, $i = \overline{1, n}$) к задаче на безусловный экстремум функционала

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} \left(\varphi_0 + \sum_{i=1}^{\alpha} \phi_i l_i \right) dt.$$

Пример. Найдем экстремали функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (qx^2 + u^2) dt \quad (q > 0) \quad (\text{Дп.1.32})$$

на связях

$$\dot{x} = ax + bu \quad (\text{Дп.1.33})$$

при граничных условиях

$$x(t_0) = x_0; \quad x(t_1) = x_1. \quad (\text{Дп.1.34})$$

В соответствии с методом решения задачи на условный экстремум составим вспомогательный функционал

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} [qx^2 + u^2 + \phi(t)(\dot{x} - ax - bu)] dt = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\varphi}_0(x, u, \phi) dt. \quad (\text{Дп.1.35})$$

Уравнения Эйлера (Эйлера – Лагранжа) для безусловных экстремалей этого функционала имеют вид

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{x}} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{u}} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{\phi}} = 0.$$

Принимая во внимание, что $\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{\psi}} = 0$, $\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \dot{x}} = \psi$ запишем эти уравнения соответственно в виде,

$$\dot{\phi} = -a\phi + 2qx; \quad 2u = b\phi; \quad \dot{x} = ax + bu. \quad (\text{Дп.1.36})$$

Исключая переменную u , получим систему из двух уравнений

$$\dot{x} = -ax + \frac{1}{2}b^2\phi; \quad \phi = -a\phi + 2qx.$$

Дифференцируя первое уравнение с учетом второго, имеем

$$\ddot{x} = -a\dot{x} + \frac{1}{2}b^2(a\phi + 2qx).$$

Исключая из этого уравнения переменную

$$\phi = \frac{1}{0,5b^2}(\dot{x} - ax),$$

получим окончательно уравнение для экстремали $x(t)$:

$$\ddot{x} - (a^2 + qb^2)x = 0. \quad (\text{Дп.1.37})$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{\frac{t}{\tau}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (\text{Дп.1.38})$$

где $\tau = \frac{1}{\sqrt{a^2 + qb^2}}$.

Используя граничные условия (Дп.1.34), получим постоянные c_1 и c_2 .

Доп.1.8 Задачи Майера и Больца

В более общем случае функционал (Дп.1.24) и граничные условия (Дп.1.25), (Дп.1.26) имеют вид

$$J = q_1 \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{u}}, t) dt + q_2 \nu_0(\mathbf{x}^{(1)}, t_1), \quad (\text{Дп.1.39})$$

$$\nu_{j0}(\mathbf{x}^{(0)}, t_0) = 0; \quad \nu_{i1}(\mathbf{x}^{(1)}, t_1) = 0 \quad (j = \overline{1, s} \leq n; \quad i = \overline{1, p} \leq n), \quad (\text{Дп.1.40})$$

где $\nu_0(\mathbf{x}^{(1)}, t_1)$ – заданная функция; q_1 и q_2 – известные числа. Если в (Дп.1.39) $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$, то задача о нахождении экстремалей этого функционала, удовлетворяющих уравнениям связи (Дп.1.23) и граничным условиям (Дп.1.40), называется *задачей Больца*. Если в (Дп.1.39) $q_1 = 0$, то она называется *задачей Майера*. При $q_2 = 0$ это задача Лагранжа.

Покажем, что задачи Больца и Лагранжа сводятся к задаче Майера. Действительно, если дополнить уравнения (Дп.1.23) уравнением $\dot{x}_0 = \varphi_0$, а граничные условия (Дп.1.40) – равенством $x_0(t_0) = 0$, то функционал (Дп.1.39) примет вид $J = q_1 x_0(t_1) + q_2 \nu_0$. Верно и обратное. Действительно, рассмотрим вместо функционала

$$J = \nu_0(\mathbf{x}^{(1)}, t_1) \quad (\text{Дп.1.41})$$

в задаче Майера функционал

$$J_1 = \nu_0(\mathbf{x}^{(1)}, t_1) - \nu_0(\mathbf{x}^{(0)}, t_0). \quad (\text{Дп.1.42})$$

Поскольку $\nu_0(\mathbf{x}^{(0)}, t_0)$ – известная величина, то экстремали функционалов (Дп.1.41) и (Дп.1.42) совпадают.

С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \nu_0(\mathbf{x}(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \nu_0}{\partial x_i} \varphi_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \right) dt,$$

а задача об экстремуме этого функционала на связях (Дп.1.23) – это уже задача Лагранжа.

Покажем также, что задача Больца эквивалентна задаче Лагранжа. В связи с этим запишем функционал (Дп.1.40) как

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (q_1 \varphi_0 + q_2 x_{n+1}) dt,$$

дополним уравнения (Дп.1.23) уравнением $\dot{x}_{n+1} = 0$, а краевые условия (Дп.1.40) – равенством $x_{n+1}(t_0) = \frac{\nu_0}{t_1 - t_0}$. Тогда из уравнения связи следует $x_{n+1} = \text{const} = \frac{\nu_0}{t_1 - t_0}$, и, следовательно, задачи Больца и Лагранжа эквивалентны. Выбор той или иной формы вариационной задачи определяется соображениями удобства ее формулировки.

В заключение этого параграфа отметим, что в связи с задачами оптимального управления в последние десятилетия уравнения Эйлера, Эйлера – Лагранжа были получены для дискретных систем [2.4] и систем с распределенными параметрами [2.5].

Доп.1.9 Доказательство теоремы Лангранжа

Повторяя рассуждения, приведенные вначале (§2.1), получим аналогичное (Дп.1.7) равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{u}_k} \right) \delta u_k \right] dt = 0. \quad (\text{Дп.1.43})$$

Однако к этому равенству нельзя применить основную лемму вариационного исчисления, так как вариации δx_i и δu_k ($i = \overline{1, n}$; $k = \overline{1, m}$) произвольны и вдоль варьируемых кривых $\bar{x}_i(t) = x_i(t) + \delta x_i(t)$, $\bar{u}_k(t) = u_k(t) + \delta u_k(t)$ ($i = \overline{1, n}$; $k = \overline{1, m}$) должны удовлетворяться уравнения (Дп.1.23). Последнее означает, что

$$\dot{x}_i + \delta \dot{x}_i = \varphi_i(x_1 + \delta x_1, \dots, x_n + \delta x_n, u_1 + \delta u_1, \dots, u_m + \delta u_m) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (\text{Дп.1.44})$$

Вычитая из этих уравнений уравнения (Дп.1.23), получим, повторяя изложенное в §1.2, уравнения первого приближения для вариаций [уравнения возмущенного движения, если считать $\delta u_k(t)$ ($k = \overline{1, m}$) произвольными возмущениями, а экстремали - программным движением]:

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \delta x_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \delta u_k \quad (i = \overline{1, n}). \quad (\text{Дп.1.45})$$

Частные производные в этих уравнениях вычисляются вдоль экстремалей $x_i(t)$, $u_k(t)$ ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$).

Умножая каждое из этих уравнений (Дп.1.45) на $\psi_i(t)$, ($i = \overline{1, n}$) и интегрируя, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\phi}_i(t) \left[\delta \dot{x}_i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \delta x_j - \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \delta u_k \right] dt = 0. \quad (\text{Дп.1.46})$$

Интегрируя первое слагаемое по частям и учитывая, что $\delta x_i(t)|_{t=t_0} = \delta x_i(t)|_{t=t_1} = 0$, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[-\dot{\phi}_i \delta x_i - \phi_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \delta x_j - \phi_i \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \delta u_k \right] dt = 0 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (\text{Дп.1.47})$$

Сложим почленно все уравнения системы (Дп.1.47), тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[-\sum_{i=1}^n \dot{\phi}_i \delta x_i - \sum_{i=1}^n \phi_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \delta x_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \delta u_k \right) \right] dt = 0$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[-\sum_{j=1}^n \dot{\phi}_j \delta x_j - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \phi_i \right) \delta x_j - \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \phi_i \right) \delta u_k \right] dt = 0. \quad (\text{Дп.1.48})$$

Суммируя это уравнение с (Дп.1.43), получим

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha=1}^n \left[\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\alpha} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha} \phi_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\phi_\alpha + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) \right] \delta x_\alpha dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^m \left[\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_k} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \phi_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{u}_k} \right) \right] \delta u_k dt = 0. \end{aligned} \quad (\text{Дп.1.49})$$

Выберем множители $\psi_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) так, чтобы они удовлетворяли дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\alpha} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha} \phi_i - \frac{d}{dt} \left(\phi_\alpha + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) = 0. \quad (\text{Дп.1.50})$$

Другими словами, пусть $\psi_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) являются решениями системы (Дп.1.50). Эти решения зависят от n произвольных постоянных.

При таком выборе множителей Лагранжа равенство (Дп.1.49) примет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^m \left[\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_k} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \phi_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{u}_k} \right) \right] \delta u_k dt = 0. \quad (\text{Дп.1.51})$$

Здесь вариации $\delta u_k(t)$ ($k = \overline{1, m}$) произвольны, и поэтому, применяя к (Дп.1.51) основную лемму вариационного исчисления, получим уравнения

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_k} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_k} \phi_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \dot{u}_k} = 0 \quad (k = \overline{1, m}). \quad (\text{Дп.1.52})$$

Таким образом, теорема доказана.

Дополнение 2

Метод динамического программирования для дискретных систем. Численное решение функционального уравнения

Для удобства изложения существа метода ограничимся вначале частным случаем этой задачи, когда объект описывается уравнением первого порядка $\dot{x} = \varphi(x, u)$. Кроме того, заменим приближенно этот непрерывный объект дискретным. В связи с этим разобьем интервал (t_0, t_1) на N^* равных участков достаточно малой длины T и будем рассматривать лишь дискретные значения $x(t) = x(kT)$ и $u(t) = u(kT)$, ($k = \overline{0, N^*}$, $N^* = \frac{t_1 - t_0}{T}$) в моменты времени $t = t_0$, $t = t_0 + T$, $t = t_0 + 2T$, ..., $t = t_0 + (N^* - 1)T$, $t = t_0 + N^*T$ соответственно (далее будем полагать $t_0 = 0$).

Дифференциальное уравнение можно приближенно заменить уравнением в конечных разностях

$$\frac{x[(k+1)T] - x[kT]}{T} = \varphi[x[kT], u[kT]]$$

или

$$x(k+1) = \varphi_d[x(k), u(k)], \quad (k = \overline{0, N^*}), \quad (\text{Дп.2.1})$$

где $\varphi_d = x(k) + T\varphi[x(k), u(k)]$, и кроме того, здесь и далее нижний индекс в обозначении φ_d , а также число T опущены.

Начальные условия для этого разностного уравнения остаются прежними:

$$x(0) = x_0. \quad (\text{Дп.2.2})$$

Для удобства изложения примем $\varphi_0(x, u, t) = q(x(t)) + \mu(u(t))$, где $q(x)$, $\mu(u)$ – заданные функции. Заменим приближенно интеграл (2.3.3) суммой

$$J_{N^*} = T \sum_{k=0}^{N^*} \{q[x(k)] + \mu[u(k)]\} = T \left\{ q[x(0)] + \sum_{i=1}^{N^*} [q[x(i)] + \mu[u(i-1)]] + \mu[u(N^*)] \right\}.$$

Принимая во внимание, что $u(N) = 0$, а $x(0)$ и T суть константы, запишем функционал качества в виде

$$J_{N^*} = \sum_{k=0}^{N^*} \{q[x(k)] + \mu[u(k-1)]\}. \quad (\text{Дп.2.3})$$

Задача . Определить функцию управления

$$u(k) = r_k[x(k)] \quad (k = \overline{0, N^* - 1}), \quad (\text{Дп.2.4})$$

такую, чтобы на решениях системы (Дп.2.1), (Дп.2.4) при любых начальных условиях (Дп.2.2) минимизировалась сумма (Дп.2.3). При этом искомая функция должна удовлетворять ограничению $u \in U$.

Для определенности будем полагать, что эти ограничения на управления имеют вид

$$|u(k)| \leq 1 \quad (k = \overline{0, N^* - 1}). \quad (\text{Дп.2.5})$$

Сформулированная задача является, в сущности, задачей условного экстремума функции (Дп.2.3). Независимыми переменными являются числа $u(0), u(1), \dots, u(N^* - 1)$.

Доп.2.1 Синтез на основе классических методов математического анализа

Используя связи (Дп.2.1), исключим $x(1), x(2), \dots, x(N)$ из (Дп.2.3), тогда

$$\begin{aligned} J_{N^*} = & \mu[u(0)] + q[\varphi[x(0)], u(0)] + \mu[u(1)] + q[\varphi[\varphi[x(0)u(0)], u(1)]] + \\ & + \mu[u(2)] + \dots + q[\varphi[\varphi[\dots u(N^* - 2)], u(N^* - 1)]] + \mu[u(N^* - 1)]. \end{aligned} \quad (\text{Дп.2.6})$$

Если абсолютный минимум этой функции N^* переменных $u(0), \dots, u(N^* - 1)$ достигается при $|u(k)| < 1$, т. е. внутри множества U , то необходимые условия относительного экстремума функции (Дп.2.6) записываются системой N^* нелинейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial J_{N^*}}{\partial u(0)} = 0; \quad \frac{\partial J_{N^*}}{\partial u(1)} = 0; \quad \dots, \quad \frac{\partial J_{N^*}}{\partial u(N^* - 1)} = 0. \quad (\text{Дп.2.7})$$

К сожалению, подобные системы нелинейных уравнений трудно решить даже при сравнительно небольших $N^* = 10 \dots 20$.

Откажемся от аналитических методов и обратимся к прямым численным методам. Пусть $N^* = 10$. Будем определять минимум функции (Дп.2.6) путем подсчета ее значения при различных значениях $u(0), u(1), \dots, u(9)$.

Разобьем интервал $[-1, 1]$ возможных значений $u(k)$ на 10 частей и подсчитаем значения для каждого из полученных таким образом 10 наборов значений $u(0), \dots, u(9)$. Если вычислительной машине требуется 1 с на вычисление функции (Дп.2.6) в одной точке, то для вычисления ее значений в 10^{10} потребуется 2,77 млн. ч (более 10 лет). Таким образом, и этот подход оказывается мало пригодным для решения задачи (Дп.2.1). Более того, если бы даже эти пути и привели к числам $u(0), u(1), \dots, u(N^* - 1)$, при которых функция (Дп.2.6) принимает наименьшее значение, то эти числа не разрешили бы полностью задачу (Дп.2.1), поскольку в последней требуется найти функцию (Дп.2.4), зависящую от текущих значений $x(k)$. Полученные же числа $u(0), \dots, u(N^* - 1)$ зависят только от $x(0)$.

Доп.2.2 Синтез на основе принципа оптимальности

Будем полагать, что N^* не фиксировано, и рассмотрим различные случаи задачи Доп.2.1, соответствующие различным значениям параметра N , характеризующего время, в течение которого исследуется качество процессов в системе.

Эти частные случаи будем называть N -шаговыми процессами.

Обозначим v_N значение функционала качества (Дп.2.3) при N -шаговом оптимальном процессе.

Пусть $N = 1$. Для этого одношагового процесса уравнения (Дп.2.1) и функционал (Дп.2.3) имеют вид

$$x(1) = \varphi[x(0), u(0)]; \quad (\text{Дп.2.8})$$

$$J_1 = q[x(1)] + \mu[u(0)]. \quad (\text{Дп.2.9})$$

Нетрудно видеть, что

$$v_1[x(0)] = \min_{u(0) \in U} \{q[x(1)] + \mu[u(0)]\} = \min_{u(0) \in U} \{q[\varphi[x(0)], u(0)] + \mu[u(0)]\}. \quad (\text{Дп.2.10})$$

Опишем вычислительную процедуру определения оптимального управления $u^{(1)}(0) = r^{(1)}[x(0)]$ в одношаговом процессе.

ПРОЦЕДУРА 1. Положим $x(0) = x^*(0)$, где $x^*(0)$ есть некоторое фиксированное число. Тогда

$$J_1 = q[\varphi[x^*(0), u(0)]] + \mu[u(0)]. \quad (\text{Дп.2.11})$$

Разобьем интервал $[-1, 1]$ допустимых изменений $u(0)$ на i отрезков длиной $\frac{2}{i}$ и вычислим значение функции (Дп.2.11) в точках разбиения. При некотором значении $i = j$ эта функция принимает наименьшее значение $J_1 = [x^*(0), \left(\frac{2j}{i}\right) - 1]$. Запомним $u^*(0) = \left(\frac{2j}{i}\right) - 1$.

Положим теперь $x(0) = x^{**}(0)$. Тогда $J_1 = q[\varphi[x^{**}(0), u(0)]] + \mu[u(0)]$. При некотором $u^{**}(0) = \frac{2k}{i} - 1$ эта функция принимает наименьшее значение.

Таким образом, задаваясь различными значениями $x(0)$, получим значения $u(0)$. Эта зависимость оптимальных значений $u(0)$ от начальных условий $x(0)$ и является искомой функцией

$$u^{(1)}(0) = r^{(1)}[x(0)], \quad (\text{Дп.2.12})$$

задаваемой таблично.

Используя эту функцию, получим наименьшее значение функционала (Дп.2.9):

$$v_1[x(0)] = q[\varphi[x(0), r^{(1)}[x(0)]]] + \mu[r^{(1)}[x(0)]]. \quad (\text{Дп.2.13})$$

Рассмотрим теперь ДВУХШАГОВЫЙ ПРОЦЕСС $N = 2$. В этом случае

$$x(1) = \varphi[x(0), u(0)]; \quad x(2) = \varphi[x(1), u(1)]; \quad (\text{Дп.2.14})$$

$$J_2 = q[x(1)] + \mu[u(0)] + q[x(2)] + \mu[u(1)]. \quad (\text{Дп.2.15})$$

Представим $J_2 = J'_2 + J''_2$, где $J'_2 = q[x(1) + \mu[u(1)]]$; $J''_2 = q[x(2)] + \mu[u(1)]$.

Значение J_2 зависит от выбора $u^{(2)}(0)$ и $u^{(2)}(1)$. При этом J'_2 зависит от $u(0)$, а J''_2 – от $u(0)$ и $u(1)$, так как $x(2)$ зависит от $x(1)$, которое в свою очередь определяется выбором $u(0)$.

Положим $u(0) = u^{(2)*}(0)$, где $u^{(2)*}(0)$ – некоторое произвольное, но фиксированное число. Это управление отклоняет $x(1)$ на величину $x^*(1) = \varphi[x(0), u^{(2)*}(0)]$.

Почти очевидно, что если требуется получить наименьшее значение J_2 при $u^{(2)}(0) = u^{(2)*}(0)$, то необходимо выбирать $u^{(2)}(1)$ так, чтобы J''_2 принимало наименьшее значение.

Управление $u^{(2)}(1)$, доставляющее минимум J''_2 , является управлением в одношаговом процессе (так как $u^{(2)}(0)$ зафиксировано) и определяется формулой (Дп.2.12), т. е.

$$u^{(2)}(1) = r^{(1)}[x^*(1)]. \quad (\text{Дп.2.16})$$

При этом

$$\min_{u^{(2)}(1)} J''_2 = v_1[x^*(1)] = v_1[\varphi(0), u^{(2)*}(0)]. \quad (\text{Дп.2.17})$$

Значение функционала (Дп.2.15) при $u^{(2)}(0) = u^{(2)*}(0)$, $u^{(2)}(1) = u^{(2)*}(1) = r^{(1)}[x(1)]$ определяется выражением

$$J_2 = q[x^*(1)] + \mu[u^{(2)*}(0)] + v_1[x^*(1)]. \quad (\text{Дп.2.18})$$

Минимизируя эту сумму по $u^{(2)}(0)$, получим

$$v_2[x(0)] = \min_{u^{(2)}(0) \in U} \{q[\varphi[x(0), u^{(2)}(0)] + \mu[u^{(2)}(0)] + v_1[\varphi[x(0), u^{(2)}(0)]]\}. \quad (\text{Дп.2.19})$$

Выражение в фигурных скобках является функцией одной переменной $u^{(2)}(0)$. Используя процедуру 1, получим функцию $u^{(2)*}(0) = r^{(2)}[x(0)]$, при которой это выражение принимает наименьшее значение.

Таким образом, оптимальное управление в двухшаговом процессе имеет вид

$$u^{(2)}(0) = r^{(2)}[x(0)]; \quad u^{(2)}(1) = r^{(1)}[x(1)]. \quad (\text{Дп.2.20})$$

При этом экстремальное значение функционала (Дп.2.15)

$$v_2[x(0)] = q[\varphi[x(0), r^{(2)}[x(0)]]] + \mu[r^{(2)}[x(0)]] + v_1[\varphi[x(0), r^{(2)}[x(0)]]]. \quad (\text{Дп.2.21})$$

Пусть $N = 3$. Для этого случая

$$x(1) = \varphi[x(0), u(0)]; \quad x(2) = \varphi[x(1), u(1)]; \quad x(3) = \varphi[x(2), u(1)]; \quad (\text{Дп.2.22})$$

$$J_3 = q[x(1)] + \mu[u(0)] + q[x(2)] + \mu[u(1)] + q[x(3)] + \mu[u(2)]. \quad (\text{Дп.2.23})$$

Представим $J_3 = J'_3 + J''_3$, где $J'_3 = q[x(1)] + \mu[u(0)]$.

Пусть $u^{(3)}(0) = u^{(3)*}(0)$, где $u^{(3)*}(0)$ - произвольное, но фиксированное число.

Для оптимальности управления в этом трехшаговом процессе при условии, что управление на первом шаге фиксировано, необходимо определить $u^{(3)}(1)$ и $u^{(3)}(2)$ так, чтобы $J''_3 = q[x(2)] + \mu[u(1)] + q[x(3)] + \mu[u(2)]$ принимало наименьшее значение. Для определения $u^{(3)}(1)$ и $u^{(3)}(2)$ воспользуемся результатами, полученными для двухшагового процесса с начальным условием $x^*(1) = \varphi[x(0), u^{(3)*}(0)]$.

На основе (Дп.2.20) получим

$$u^{(3)}(1) = r^{(2)}[x^*(1)]; \quad u^{(3)}(2) = r^{(1)}[x(2)]. \quad (\text{Дп.2.24})$$

Значение функционала (Дп.2.23) при управлении (Дп.2.24) $u^{(3)}(0) = u^{(3)*}(0)$ определяется выражением

$$J_3 = q[x^*(1)] + \mu[u^{(3)*}(0)] + v_2[x^*(1)].$$

Минимизируя его по $u^{(3)}(0)$, получим

$$v_3[x(0)] = \min_{u^{(3)}(0) \in U} \{q[\varphi[x(0), u^{(3)}(0)]] + \mu[u^{(3)}(0)] + v_2[\varphi[x(0), u^{(3)}(0)]]\}. \quad (\text{Дп.2.25})$$

Выражение в фигурных скобках является функцией одной переменной $u^{(3)}(0)$. Используя процедуру 1, находим

$$u^{(3)}(0) = r^{(3)}[x(0)]. \quad (\text{Дп.2.26})$$

Таким образом, оптимальное управление в трехшаговом процессе описывается выражениями (Дп.2.24), (Дп.2.26).

Повторяя эти рассуждения для $N = 4, 5, \dots$, получим соотношение

$$v_N[x(0)] = \min_{u^{(N)}(0) \in U} \{q[\varphi[x(0), u^{(N)}(0)]] + \mu[u^{(N)}(0)] + v_{N-1}[\varphi[x(0), u^{(N)}(0)]]\}, \quad (\text{Дп.2.27})$$

которое является функциональным уравнением для дискретных систем.

Вывод этого уравнения опирался на ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ, который можно переформулировать так:

оптимальное уравнение обладает тем свойством, каковы бы ни были начальное состояние (условие) и управление на первом шаге (или нескольких первых шагах), управление на последующих шагах должно быть оптимальным относительно состояния, возникшего в результате управления на первом шаге.

Какие же трудности в решении задачи Доп.2.1 мы преодолели, используя подход, основанный на принципе оптимальности? Главной трудностью являлась минимизация функции N^* переменных (Дп.2.6). Функциональное уравнение (Дп.2.27) позволило свести задачу минимума функции N переменных к значительно более простой задаче минимизации функций одной переменной. Действительно, используя (Дп.2.27) при $N = 1, 2, \dots$, получим функции:

$$\left. \begin{aligned} u^{(1)}(0) &= r^{(1)}[x(0)]; \quad v_1[x(0)] \quad (N = 1); \quad u^{(2)}(0) = r^{(2)}[x(0)]; \\ v_2[x(0)] \quad (N = 2); \quad &\dots \\ u^{N-1}(0) &= r^{(N-1)}[x(0)]; \quad v_{N-1}[x(0)] \quad (N = N^* - 1); \\ u^{(N)}(0) &= r^{(N)}[x(0)]; \quad v_N[x(0)] \quad (N = N^*). \end{aligned} \right\} \quad (\text{Дп.2.28})$$

Отметим еще раз, что функции $u^{(i)}(0) = r^{(i)}[x(0)]$ ($i = \overline{1, N^*}$) получены в результате минимизации функции $\{q[\varphi[x(0), u^{(i)}(0)]] + \mu[u^{(i)}(0)] + v_{i-1}[\varphi[x(0), u^{(i)}(0)]]$ одной переменной $u^{(i)}(0)$.

В задаче П.3.1 требуется найти управление вида (Дп.2.4)

$$u(0) = r_0[x(0)]; \quad u(1) = r_1[x(1)]; \quad u(2) = r_2[x(2)], \dots$$

Очевидно, что искомые и полученные управления связаны соотношениями

$$\begin{aligned} u(0) &= r^{(N^*)}[x(0)]; \quad u(1) = r^{N^*-1}[x(1)]; \\ u(2) &= r^{(N^*-2)}[x(2)], \dots, u(N^* - 2) = r^{(2)}[x(N^* - 2)]; \quad u(N^* - 1) = r^{(1)}[x(N^* - 1)]. \end{aligned} \quad (\text{Дп.2.29})$$

Таким образом, искомые функции управления

$$r_k[x(k)] = r^{(N^*-k)}[x(k)] \quad (k = \overline{0, N^* - 1}). \quad (\text{Дп.2.30})$$

ВТОРОЙ ВАРИАНТ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА ОПТИМАЛЬНОСТИ. Приведем еще одну систему рассуждений, основанных на принципе оптимальности, позволяющих определить управления (Дп.2.29). Определение этих управлений начнем с последнего интервала времени $[(N^* - 1), N^*]$ предполагая, что состояние $x(N^* - 1)$ известно. Согласно принципу оптимальности, управление $u(N^* - 1)$ на этом интервале должно минимизировать частичную сумму, соответствующую этому интервалу:

$$J^{(N^*-1)} = q[x(N^*)] + \mu[u(N^* - 1)]. \quad (\text{Дп.2.31})$$

Учитывая, что $x(N^*) = \varphi[x(N^* - 1), u(N^* - 1)]$, получим

$$J^{(N^*-1)} = q[\varphi[x(N^* - 1), u(N^* - 1)]] + \mu[u(N^* - 1)]. \quad (\text{Дп.2.32})$$

Это выражение с точностью до обозначений совпадает с (Дп.2.11) и поэтому, применяя процедуру 1, получаем оптимальное управление на последнем участке:

$$u(N^* - 1) = r^{(1)}[x(N^* - 1)]. \quad (\text{Дп.2.33})$$

Минимальное значение (Дп.2.32) определяется выражением

$$v^{(N^*-1)}[x(N^* - 1)] = q[\varphi[x(N^* - 1), r^{(1)}[x(N^* - 1)]]] + \mu[r^{(1)}[x(N^* - 1)]]. \quad (\text{Дп.2.34})$$

Рассмотрим интервал времени $[(N^* - 2), N^*]$, состоящий из последнего и предпоследнего интервалов. Этому интервалу соответствует частичная сумма

$$\begin{aligned} J^{(N^*-2)} &= q[x(N^* - 1)] + \mu[u(N^* - 2)] + q[x(N^*)] + \mu[u(N^* - 1)] = \\ &= q[x(N^* - 1)] + \mu[u(N^* - 2)] + J^{(N^*-1)}. \end{aligned} \quad (\text{Дп.2.35})$$

Состояние $x(N^* - 2)$ будем предполагать известным. Из принципа оптимальности следует, что лишь состояние $x(N^* - 2)$ и цель управления (минимизация $J^{(N^*-2)}$) определяют оптимальное управление на интервале $[(N^* - 2), N^*]$.

Найдем минимум $J^{(N^*-2)}$ по $u(N^* - 1), u(N^* - 2)$. Учтем при этом

$$\min_{u(N^*-1) \in U} J^{(N^*-1)} = v^{(N^*-1)}[x(N^* - 1)] = v^{(N^*-1)}[\varphi[x(N^* - 2), u(N^* - 2)]].$$

Первые два слагаемых в (Дп.2.35) не зависят от $u(N^* - 1)$ и поэтому

$$\begin{aligned}
v^{(N^*-2)} &= \min_{u(N^*-2) \in U} J^{(N^*-2)} = \min_{u(N^*-2) \in U} \{q[\varphi[x(N^*-2), u(N^*-2)]] + \\
&+ \mu[u(N^*-2)] + \min_{u(N^*-1) \in U} \{q[\varphi[x(N^*-1), u(N^*-1)]] + \mu[u(N^*-1)]\} \} = \\
&= \min_{u(N^*-2) \in U} \{q[\varphi[x(N^*-2), u(N^*-2)]] + \mu[u(N^*-2)] + v^{(N^*-1)}[\varphi[x(N^*-2), u(N^*-2)]]\}.
\end{aligned}
\tag{Дп.2.36}$$

Применяя к последнему выражению в фигурных скобках, совпадающему с точностью до обозначений с (Дп.2.19), процедуру 1, получим оптимальное управление на предпоследнем интервале $[(N^*-2), (N^*-1)]$.

При этом

$$u(N^*-2) = r^{(2)}[x(N^*-2)], \quad v(N^*-2) = v^{(N^*-2)}[x(N^*-2)]. \tag{Дп.2.37}$$

Перейдем теперь к интервалу времени $[(N^*-3), (N^*)]$, состоящему из трех последних интервалов. Этому интервалу соответствует частичная сумма

$$J^{(N^*-3)} = q[x(N^*-2)] + \mu[u(N^*-3)] + J^{(N^*-2)}. \tag{Дп.2.38}$$

Предполагая состояние $x(N^*-3)$ известным, определим управления $u(N^*-3)$, $u(N^*-2)$, $u(N^*-1)$, минимизирующие сумму (Дп.2.38). В соответствии с принципом оптимальности, эти управления являются оптимальными для трех последних интервалов времени движения.

Учитывая, что первые два слагаемых в (Дп.2.38) не зависят от $u(N^*-2)$, $u(N^*-1)$, запишем

$$\begin{aligned}
v^{(N^*-3)} &= \min_{\substack{u(N^*-1) \in U \\ u(N^*-2) \in U \\ u(N^*-3) \in U}} J^{N^*-3} = \min_{u(N^*-3) \in U} \{q[\varphi[x(N^*-3), u(N^*-3)]] + \\
&+ \mu[u(N^*-3)] + \min_{\substack{u(N^*-2) \in U \\ u(N^*-1) \in U}} J^{(N^*-2)}\} = \min_{u(N^*-3) \in U} \{q[\varphi[x(N^*-3), u(N^*-3)]] + \\
&+ \mu[u(N^*-3)] + v^{(N^*-2)}[\varphi[x(N^*-3), u(N^*-3)]]\}.
\end{aligned}
\tag{Дп.2.39}$$

Применяя процедуру 1, получим оптимальное управление на интервале $[(N^*-3), (N^*-2)]$

$$u(N^*-3) = r^{(3)}[x(N^*-3)], \quad v(N^*-3) = v^{(N^*-3)}[x(N^*-3)]. \tag{Дп.2.40}$$

Продолжая этот процесс, получим общую рекуррентную формулу

$$\begin{aligned}
v^{(N^*-k)} &= \min_{\substack{u(N^*-k) \in U \\ u(N^*-1) \in U}} J^{(N^*-k)} = \min_{u(N^*-k) \in U} \{q[\varphi[x(N^*-k), u(N^*-k)]] + \\
&+ \mu[u(N^*-k)] + v^{(N^*-k-1)}[\varphi[x(N^*-k), u(N^*-k)]]\} \quad (k = \overline{1, N}).
\end{aligned}
\tag{Дп.2.41}$$

Используя процедуру 1, получаем оптимальное уравнение на интервале $[(N^* - k), (N^* - k - 1)]$:

$$u(N^* - k) = r^{(k)} x(N^* - k) \quad (k = \overline{1, N}). \quad (\text{Дп.2.42})$$

Это выражение совпадает с (Дп.2.29), а функциональное уравнение (Дп.2.41) при $k = N$ совпадает с (Дп.2.27).

Дополнение 3

Аналитическое конструирование регуляторов дискретных систем

Пусть объект регулирования описывается уравнением

$$\mathbf{x} = [(k + 1)T] = \Phi(kT)\mathbf{x}(kT) + R(kT)\mathbf{u}(kT) \quad (k = \overline{1, n}). \quad (\text{Дп.3.1})$$

Требуется определить матрицу $C'(kT)$ коэффициентов регулятора

$$\mathbf{u}(kT) = C'(kT)\mathbf{x}(kT) \quad (k = \overline{1, N}), \quad (\text{Дп.3.2})$$

такую, чтобы на движениях системы (Дп.3.1), (Дп.3.2), возбужденных произвольными начальными условиями, минимизировался функционал

$$J = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}'(kT)Q(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{u}'[(k-1)T]\mathbf{u}[(k-1)T]. \quad (\text{Дп.3.3})$$

Здесь $\Phi(kT)$, $R(kT)$ ($k = 0, 1, \dots$) – заданные матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$ соответственно; $Q(kT)$ – неотрицательная определенная известная матрица размеров $n \times n$.

Для решения этой задачи применим принцип оптимальности. Управление будем определять, начиная с последнего интервала времени $[(N-1)T, NT]$. На этом интервале с учетом (Дп.3.1) имеем частичную сумму

$$\begin{aligned} J^{N-1} &= \mathbf{x}'(NT)Q(NT)\mathbf{x}(NT) + \mathbf{u}'[(N-1)T]\mathbf{u}[(N-1)T] = \\ &= \{\Phi[(N-1)T]\mathbf{x}[(N-1)T] + R[(N-1)T]\mathbf{u}[(N-1)T]\}' Q(NT) \times \\ &\times \{\Phi[(N-1)T]\mathbf{x}[(N-1)T] + R[(N-1)T]\mathbf{u}[(N-1)T]\} + \\ &+ \mathbf{u}'[(N-1)T]\mathbf{u}[(N-1)T]. \end{aligned} \quad (\text{Дп.3.4})$$

Опуская аргументы, запишем ее наименьшее значение

$$v^{(N-1)} = \min_{\mathbf{u}^{(N-1)}} [\mathbf{x}'\Phi Q \mathbf{x} + 2\mathbf{x}'\Phi Q R \mathbf{u} + \mathbf{u}'(R'QR + E)\mathbf{u}]. \quad (\text{Дп.3.5})$$

Положим равным нулю градиент по \mathbf{u} от выражения в квадратных скобках:

$$2\mathbf{x}'\Phi'QR\mathbf{u} + 2\mathbf{u}'(R'QR + E) = 0. \quad (\text{Дп.3.6})$$

Разрешая это уравнение, получим оптимальное управление на последнем участке

$$\begin{aligned} \mathbf{u}[(N-1)T] = & -\{R'[(N-1)T]Q(NT)R[(N-1)T] + E\}^{-1} \times \\ & \times R'[(N-1)T]Q(NT)\Phi[(N-1)T]\mathbf{x}[(N-1)T]. \end{aligned} \quad (\text{Дп.3.7})$$

Таким образом,

$$\mathbf{u}[(N-1)T] = C'[(N-1)T]\mathbf{x}[(N-1)T], \quad (\text{Дп.3.8})$$

где

$$\begin{aligned} C'[(N-1)T] = & -\{R'[(N-1)T]Q[NT]R[(N-1)T] + E\}^{-1} \times \\ & \times R'[(N-1)T]Q(NT)\Phi[(N-1)T]. \end{aligned} \quad (\text{Дп.3.9})$$

Подставляя (Дп.3.7) в (Дп.3.5), получим минимальное значение суммы (Дп.3.4):

$$\begin{aligned} v^{(N-1)} = & \mathbf{x}'\Phi Q\mathbf{x} - 2\mathbf{x}'\Phi'QR[R'QR + E]^{-1}R'Q\Phi\mathbf{x} + \\ & + \mathbf{x}'\Phi QR(R'QR + E)^{-1}R'Q\Phi\mathbf{x} = \mathbf{x}'[(N-1)T]A[(N-1)T]\mathbf{x}[(N-1)T], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A[(N-1)T] = & \Phi'[(N-1)T]\{Q(NT) - Q(NT)R[(N-1)T] \times \\ & \times R'[(N-1)T]Q(NT)R[(N-1)T] + E\}^{-1}R'[(N-1)T]Q(NT)\} \times \\ & \times \Phi[(N-1)T]. \end{aligned} \quad (\text{Дп.3.10})$$

Таким образом, минимальное значение $v^{(N-1)}$ является квадратичной формой от $\mathbf{x}[(N-1)T]$.

Оптимальное управление на предпоследнем шаге определяется на основе соотношения (Дп.2.36), которое принимает в рассматриваемом случае вид

$$\begin{aligned} v^{N-2} = & \min_{\mathbf{u}[(N-2)T]} \{\mathbf{x}'[(N-1)T]Q[(N-1)T]\mathbf{x}[(N-1)T] + \\ & + \mathbf{u}'[(N-2)T]\mathbf{u}[(N-2)T] + v^{(N-1)}\} = \\ = & \min_{\mathbf{u}[(N-2)T]} \{\mathbf{x}'[(N-1)T][Q[(N-1)T] + A[(N-1)T]\mathbf{x}[(N-1)T] + \\ & + \mathbf{u}'[(N-2)T]\mathbf{u}[(N-2)T]\} = \min_{\mathbf{u}[(N-2)T]} \{\{\Phi[(N-2)T]\mathbf{x}[(N-2)T] + \\ & + R[(N-2)T]\mathbf{u}[(N-2)T]\}'[Q[(N-1)T] + A[(N-1)T] \times \\ & \times \{\Phi[(N-2)T]\mathbf{x}[(N-2)T]\} + R[(N-2)T]\mathbf{u}[(N-2)T]\} + \\ & + \mathbf{u}'[(N-2)T]\mathbf{u}[(N-2)T]\} = \min_{\mathbf{u}[(N-2)T]} \{\mathbf{x}'\Phi'[Q + A]\Phi\mathbf{x} + \\ & + 2\mathbf{x}'\Phi'[Q + A]R\mathbf{u} + \mathbf{u}'[R'[Q + A]R + E]\mathbf{u}\}. \end{aligned} \quad (\text{Дп.3.11})$$

Приравнявая нулю градиент последнего выражения в фигурных скобках, получаем

$$\mathbf{u}[(N-2)T] = C'[(N-2)T]\mathbf{x}[(N-2)T], \quad (\text{Дп.3.12})$$

где

$$\begin{aligned}
C'[(N-2)T] = & -\{R'[(N-2)T][Q[(N-1)T] + \\
& + A[(N-1)T]R[(N-2)T]] + E\}^{-1}R'[(N-2)T] \times \\
& \times \{Q[(N-1)T] + A[(N-1)T]\}\Phi[(N-2)T].
\end{aligned} \tag{Дп.3.13}$$

Отметим, что последнее равенство в (Дп.3.11) совпадает с точностью до замены Q на $(Q + A)$ с выражением в правой части (Дп.3.5), поэтому (Дп.3.13) совпадает с (Дп.3.9), если в последнем заменить Q на $Q + A$, а $N - 1$ на $N - 2$.

Подставляя (Дп.3.12), (Дп.3.13) в (Дп.3.11), получаем минимальное значение частичной суммы на последних двух интервалах управления

$$v^{(N-2)} = \mathbf{x}'[(N-2)T]A[(N-2)T]\mathbf{x}[(N-2)T], \tag{Дп.3.14}$$

где

$$\begin{aligned}
A[(N-2)T] = & \Phi'[(N-2)T]\{Q[(N-2)T] + A[(N-1)T] - \\
& - [Q[(N-1)T] + A[(N-1)T]] \times R[(N-2)T]\{R'[(N-2)T] \times \\
& \times [Q[(N-1)T] + A[(N-1)T]]R[(N-2)T] + E^{-1} \times \\
& \times R'[(N-2)T][Q[(N-1)T] + A[(N-1)T]]\}\Phi[(N-2)T].
\end{aligned} \tag{Дп.3.15}$$

Продолжая этот процесс, определим управление на интервале $[(N-j)T, (N-j+1)T]$ из условия минимума правой части соотношения принципа оптимальности

$$\begin{aligned}
v^{(N-j)} = & \min_{\mathbf{u}[(N-j)T]} \{ \mathbf{x}'[(N-j+1)T]Q[(N-j+1)T]\mathbf{x}[(N-j+1)T] + \\
& + \mathbf{u}'[(N-j)T]\mathbf{u}[(N-j)T] + v^{(N-j+1)} \},
\end{aligned} \tag{Дп.3.16}$$

которое можно представить как

$$\begin{aligned}
v^{(N-j)} = & \min_{\mathbf{u}[(N-j)T]} \{ \mathbf{x}'[(N-j+1)T]Q[(N-j+1)T] + \\
& + A[(N-j+1)T]\mathbf{x}[(N-j+1)T] + \mathbf{u}'[(N-j)T]\mathbf{u}[(N-j)T] \} = \\
= & \min_{\mathbf{u}[(N-j)T]} \{ \{ \Phi[(N-j)T]\mathbf{x}[(N-j)T] + R[(N-j)T]\mathbf{u}[(N-j)T] \}' \times \\
& \times [Q[(N-j+1)T] + A[(N-j+1)T]] \{ \Phi[(N-j)T]\mathbf{x}[(N-j)T] + \\
& + R[(N-j)T]\mathbf{u}[(N-j)T] \} + \mathbf{u}'[(N-j)T]\mathbf{u}[(N-j)T] \}.
\end{aligned} \tag{Дп.3.17}$$

Приравнявая нулю градиент по \mathbf{u} последнего равенства в фигурных скобках, получим

$$\mathbf{u}[(N-j)T] = C'[(N-j)T]\mathbf{x}[(N-j)T], \tag{Дп.3.18}$$

где

$$\begin{aligned}
C'[(N-j)T] = & -\{R'[(N-j)T][Q[(N-j+1)T] + \\
& + A[(N-j+1)T]]R[(N-j)T] + E\}^{-1}R'[(N-j)T] \times \\
& \times \{Q[(N-j+1)T] + A[(N-j+1)T]\}\Phi[(N-j)T].
\end{aligned} \tag{Дп.3.19}$$

Подставляя (Дп.3.18), (Дп.3.19) в (Дп.3.17), получим

$$v^{(N-j)} = \mathbf{x}'[(N-j)T]A[(N-j)T]\mathbf{x}[(N-j)T], \quad (\text{Дп.3.20})$$

где

$$\begin{aligned} A[(N-j)T] = & \Phi'[(N-j)T]\{Q[(N-j+1)T]+ \\ & + A[(N-j+1)T]\}\Phi[(N-j)T] - \Phi'[(N-j)T]\{Q[(N-j+1)T]+ \\ & + A[(N-j+1)T]\}R[(N-j)T]\{R'[(N-j)T][Q[(N-j+1)T]+ \\ & + A[(N-j+1)T]]R[(N-j)T] + E\}^{-1}R'[(N-j)T] \times \\ & \times [Q[(N-j+1)T] + A[(N-j+1)T]]\Phi[(N-j)T]. \end{aligned} \quad (\text{Дп.3.21})$$

Выражения (Дп.3.18) ... (Дп.3.21) справедливы для всех $i = \overline{1, N}$ ($A(N) = 0$) и, таким образом, выражения (Дп.3.20), (Дп.3.19) являются рекуррентными соотношениями для последовательного вычисления искомой матрицы

$$C'[kT] = C'[(N-j)T] \quad (j = \overline{1, N}). \quad (\text{Дп.3.22})$$

Дополнение 4

Модальное управление

Пусть задан полностью управляемый объект, описываемый уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (\text{Дп.4.1})$$

Требуется найти матрицу C управления

$$\dot{\mathbf{u}} = C'\mathbf{x} \quad (\text{Дп.4.2})$$

такую, чтобы характеристический полином системы

$$D(s) = \det(Es - A - BC') \quad (\text{Дп.4.3})$$

имел заданные корни (моды) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Эта задача называется задачей модального управления. Опишем ее решение для скалярного управления.

В этом случае в (Дп.4.1) и (Дп.4.2) $B = \mathbf{b}$, $C = \mathbf{c}$, где \mathbf{b} и \mathbf{c} — n -мерные векторы, и процедура построения модального управления состоит из следующих операций.

1. Приведем уравнение (Дп.4.1) к форме Фробениуса

$$\dot{\check{\mathbf{x}}} = \check{A}\check{\mathbf{x}} + \check{\mathbf{b}}u, \quad (\text{Дп.4.4})$$

где

$$\check{A} = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & E_{n-1} & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & \dots & -d_{n-1} \end{array} \right\|; \quad \check{\mathbf{b}} = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\|; \quad (\text{Дп.4.5})$$

E_{n-1} – единичная матрица размеров $(n-1) \times (n-1)$; d_0, d_1, \dots, d_{n-1} – коэффициенты характеристического уравнения объекта (Дп.4.1);

$$D(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0. \quad (\text{Дп.4.6})$$

Переход от уравнения (3.2.19) к уравнению (Дп.4.4) осуществляется с помощью преобразования

$$\mathbf{x} = \Psi_y^{-1} \check{\mathbf{x}}, \quad (\text{Дп.4.7})$$

где

$$\Psi_y = \left\| \check{b}, \check{A}\check{b}, \dots, \check{A}^{n-1}\check{b} \right\| \left\| b, Ab, \dots, A^{n-1}b \right\|^{-1}. \quad (\text{Дп.4.8})$$

Нетрудно видеть, что для полностью управляемого объекта (Дп.4.1)

$$\det \Psi_y \neq 0. \quad (\text{Дп.4.9})$$

2. Из структуры матрицы \check{A} следует, что уравнение (Дп.4.4), разрешенное относительно переменной \check{x}_1 , имеет после преобразования его по Лапласу вид

$$D(s)\check{x}_1 = u. \quad (\text{Дп.4.10})$$

Сравнивая это уравнение и заданный полином $D^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i^*) = s^n + d_{n-1}^*s^{n-1} + \dots + d_1^*s + d_0^*$ получим

$$u(s) = -(\check{c}_n s^{n-1} + \dots + \check{c}_2 s + \check{c}_1) \check{x}_1, \quad (\text{Дп.4.11})$$

где

$$\check{c}_{(i+1)} = d_i^* - d_i \quad (i = \overline{0, n-1}). \quad (\text{Дп.4.12})$$

Принимая во внимание, что $s\check{x}_i = \check{x}_{i+1}$ ($i = \overline{1, n-1}$) имеем

$$u = -\sum_{i=1}^n \check{c}_i \check{x}_i = -\check{\mathbf{c}}' \check{\mathbf{x}} \quad (\text{Дп.4.13})$$

(где $\check{\mathbf{c}}'$ – n -мерный вектор чисел).

3. Возвращаясь к прежним переменным, получим искомый вектор

$$\check{c}' = -\check{c}'\Psi_y \quad (\text{Дп.4.14})$$

обеспечивающий заданные корни характеристического полинома системы (3.2.19), (3.2.20).

Рассмотрим теперь случай, когда состояния объекта не доступны измерению, а измеряется переменная y . В этом случае будем использовать описание объекта в форме "вход - выход":

$$(s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0)y = (k_ms^m + \dots + k_{p_1}s + k_{p_0})u. \quad (\text{Дп.4.15})$$

Будем искать коэффициенты регулятора

$$(d_{n_p}s^{n_p} + \dots + d_{p_1}s + d_{p_0})u = (k_{pm_p}s^{m_p} + \dots + k_{p_1}s + k_{p_0})y \quad (\text{Дп.4.16})$$

так, чтобы характеристический полином системы (Дп.4.15), (Дп.4.16) имел заданные корни.

Для общности будем полагать, что число этих корней равно n_c и оно не обязательно совпадает с n .

Сформируем желаемый полином:

$$D^*(s) = \prod_{i=1}^{n_c} (s - \lambda_i^*) = s^{n_c} + d_{n_c-1}s^{n_c-1} + \dots + d_1^*s + d_0^*. \quad (\text{Дп.4.17})$$

Характеристический полином рассматриваемой системы

$$D(s) = d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s). \quad (\text{Дп.4.18})$$

Сформируем *тождество Безу*:

$$d(s)d_p(s) - k(s)k_p(s) = D^*(s). \quad (\text{Дп.4.19})$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s в правой и левой частях этого тождества, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$N(d, k)\nu = d^*, \quad (\text{Дп.4.20})$$

где $\nu = [d_{p_0}, \dots, d_{p_{n_p}}, k_{p_0}, \dots, k_{p_{m_p}}]^T$ — $n_p + m_p + r$ -мерный вектор искоемых коэффициентов регулятора (Дп.4.16) $d^* = [d_0^*, d_1^*, \dots, d_{n_c}^*]^T$ — вектор коэффициентов желаемого полинома, $N(d, k)$ — квадратная матрица, составленная из известных коэффициентов объекта (Дп.4.15).

Известно, [6.5] что

$$\det N(d, k) \neq 0, \quad (\text{Дп.4.21})$$

если объект полностью управляем, а степени полиномов регулятора удовлетворяют одному из следующих двух условий

$$n_p < m, \quad m_p < n. \quad (\text{Дп.4.22})$$

Пример. Рассмотрим случай $n = 2$, $m = 1$, $n_c = 3$.

В этом случае объект описывается уравнением

$$(s^2 + d_1 s + d_0) y = (k_1 s + k_0) u, \quad (\text{Дп.4.23})$$

а желаемый полиномом имеет вид

$$D^*(s) = s^3 + d_2^* s^2 + d_1^* s + d_0^*. \quad (\text{Дп.4.24})$$

Будем искать регулятор в виде

$$(d_{p1} s + d_{p0}) u = (k_{p1} s + k_{p0}) y.$$

Тождество Безу имеет вид

$$(s^2 + d_1 s + d_0)(d_{p1} s + d_{p0}) - (k_1 s + k_0)(k_{p1} s + k_{p0}) = s^3 + d_2^* s^2 + d_1^* s + d_0^*.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} d_0 d_{p0} - k_0 k_{p0} &= d_0^*, & d_0 d_{p1} + d_1 d_{p0} - k_0 k_{p1} - k_1 k_{p0} &= d_1^* \\ d_1 d_{p1} + d_2 d_{p0} - k_0 k_{p1} &= d_2^* & d_2 d_{p1} &= d_3^* \end{aligned}.$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае

$$N(d, k) = \begin{bmatrix} d_0 & 0 & -k_0 & 0 \\ d_1 & d_0 & -k_1 & -k_0 \\ d_2 & d_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \nu = \begin{bmatrix} d_{p0} \\ d_{p1} \\ k_{p0} \\ k_{p1} \end{bmatrix}; \quad d^* = \begin{bmatrix} d_0^* \\ d_1^* \\ d_2^* \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Доказательство 1

Вывод основного соотношения принципа максимума

При доказательстве принципа максимума ограничимся для простоты случаем скалярного ($m = 1$) управления $u(t)$ и будем полагать также правый конец траектории свободным, т. е. будем полагать, что числа x_{i1} ($i = \overline{1, n}$) не заданы.

Пусть найдены оптимальное управление $u^0(t)$ и соответствующие этому управлению траектории $x_0^0(t)$, $x_1^0(t)$, ..., $x_n^0(t)$, начинающиеся в точке (2.2.3).

На рис. П.2.1 приведена кривая, которая содержит конечное число точек с разрывами первого рода.

Рис. П.2.1

Рассмотрим оптимальное управление на бесконечно малом промежутке времени

$$\tau - \varepsilon < t < \tau, \quad (\text{Д.1.1})$$

где ε — бесконечно малая положительная величина, а $0 < \tau < t_1$. Изменим на этом промежутке времени оптимальное управление до некоторой величины $\bar{u} \neq u^0$, при этом $\bar{u} \in U$. На остальных интервалах $(0, \tau - \varepsilon)$ и (τ, t_1) оставим управление неизменным и равным $u^0(t)$. Такая вариация экстремали $u^0(t)$ носит название *”игольчатой” вариации*. Игольчатая вариация принципиально отличается от применяемой в классическом вариационном исчислении, где вариации экстремалей предполагаются непрерывными и необходимое число раз непрерывно дифференцируемыми.

Отметим, что величина приращения $\bar{u} - u^0$ на рассматриваемом интервале $[\tau - \varepsilon, \tau]$ может быть любой, лишь бы величина \bar{u} не выходила из допустимых пределов. Например, если $-u^* \leq u \leq u^*$, то модуль разности $\bar{u} - u^0$ может лежать в пределах от 0 до $2u^*$.

Для игольчатой вариации характерно, что, несмотря на конечную величину разности $\bar{u} - u^0$, влияние этой вариации на последующее движение объекта бесконечно мало, так как площадь импульса $(\bar{u} - u^0)\varepsilon$ бесконечно мала. Убедимся в этом.

В результате изменения управления на бесконечно малом интервале $\tau - \varepsilon < t < \tau$ дальнейшее движение $x_0(t)$, $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ при $t > \tau$ отличается от оптимального (рис. П.2.2).

Рис. П.2.2

Очевидно, что $\mathbf{x}^0(\tau) - \mathbf{x}^0(\tau - \varepsilon) = \varepsilon \varphi[\mathbf{x}^0(\tau), \mathbf{u}^0(\tau)]$; $\bar{\mathbf{x}}(\tau) - \bar{\mathbf{x}}(\tau - \varepsilon) = \varepsilon \varphi[\bar{\mathbf{x}}^0(\tau), \bar{\mathbf{u}}^0(\tau)]$. Принимая во внимание, что $\mathbf{x}(\tau - \varepsilon) = \mathbf{x}^0(\tau - \varepsilon)$, получим

$$\bar{\mathbf{x}}(\tau) - \mathbf{x}^0(\tau) = \varepsilon \left\{ \varphi[\bar{\mathbf{x}}(\tau), \bar{\mathbf{u}}(\tau)] - \varphi[\mathbf{x}^0(\tau), \mathbf{u}^0(\tau)] \right\}. \quad (\text{Д.1.2})$$

Эта разность бесконечно мала, но отлична от нуля, и поэтому при $t > \tau$ будет существовать расхождение между траекториями $\bar{\mathbf{x}}(t)$ и $\mathbf{x}^0(t)$. Однако это расхождение также будет бесконечно мало.

Введем вектор вариации $\delta \mathbf{x}(t)$ с координатами $\delta x_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$) определяемый как

$$\delta \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}^0(t). \quad (\text{Д.1.3})$$

При этом на основе (Д.1.2) можно записать начальное значение этой вариации

$$\delta \mathbf{x}(\tau) = \varepsilon \left\{ \varphi[\bar{\mathbf{x}}(\tau), \bar{\mathbf{u}}(\tau)] - \varphi[\mathbf{x}^0(\tau), \mathbf{u}^0(\tau)] \right\}. \quad (\text{Д.1.4})$$

Полагая кривую $\mathbf{x}^0(t)$ "программной" траекторией, составим уравнение возмущенного движения для системы (2.1.1).

Это уравнение имеет в первом приближении вид

$$\frac{d(\delta x_i)}{dt} = \sum_{j=0}^n \left. \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_j} \right|_0 \delta x_j \quad (i = \overline{0, n}). \quad (\text{Д.1.5})$$

Решения этих уравнений при начальных условиях (Д.1.4) описывают расхождение траекторий $x_i^0(t)$ и $\bar{x}_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$) при $t > \tau$.

Величина $\delta x_0(t_1)$ представляет собой изменение δJ наименьшего (оптимального) значения функционала (2.1.5), вызванное игольчатой вариацией.

Так как оптимальное управление $u(t)$ обеспечивает наименьшее значение J , то при любом другом управлении $x_0(t_1)$ может лишь увеличиваться, поэтому

$$\delta J = \delta x_0(t_1) \geq 0. \quad (\text{Д.1.6})$$

Перепишем это соотношение в виде

$$-\delta J = -\delta x_0(t_1) = [\delta \mathbf{x}(t_1)]' \boldsymbol{\psi}(t_1) \leq 0, \quad (\text{Д.1.7})$$

где $\boldsymbol{\psi}(t_1)$ – вектор, подобранный так, чтобы произведение $[\delta \mathbf{x}(t_1)]' \boldsymbol{\psi}(t_1)$ было равно $\delta x_0(t_1)$.

Очевидно, что

$$\boldsymbol{\psi}(t_1) = \{-1, 0, 0, \dots, 0\}. \quad (\text{Д.1.8})$$

При $\bar{u}(\tau) = u^0(\tau)$ приращение $(-\delta J)$ достигает своего наибольшего значения, равного нулю, а соотношение (Д.1.6) означает, что любое неоптимальное управление ”хуже”, чем оптимальное: оно дает меньший эффект, чем оптимальное.

Значение $\bar{u}(\tau)$ должно выбираться так, чтобы сделать величину $(-\delta J)$ возможно большей, и для неоптимальных управлений эта величина равна

$$-\delta J = [\delta \mathbf{x}(t_1)]' \boldsymbol{\psi}(t_1). \quad (\text{Д.1.9})$$

Заметим одно важное обстоятельство: значение $\bar{u}(\tau)$ можно выбирать независимо от процесса управления, предшествовавшего времени τ , и это значение должно выбираться так, чтобы максимизировать величину $(-\delta J)$, определяемую выражением (Д.1.9).

Использование (Д.1.9) для выбора $\bar{u}(\tau)$ представляется затруднительным, ибо для вычисления $[\delta \mathbf{x}(t_1)]' \boldsymbol{\psi}(t_1)$ необходимо проинтегрировать уравнение (Д.1.5) при начальных условиях (Д.1.4) и найти $\delta x(t_1)$ в зависимости от этих начальных условий и управления $u^0(\tau)$.

В связи с этим покажем, что вектор $\boldsymbol{\psi}(t)$, являющийся решением уравнения (2.1.9), удовлетворяет соотношению

$$[\delta \mathbf{x}(t)]' \boldsymbol{\psi}(t) = [\delta \mathbf{x}(t_1)]' \boldsymbol{\psi}(t_1) \quad \tau \leq t \leq t_1. \quad (\text{Д.1.10})$$

Тогда при $t = \tau$ получим равенство

$$[\delta \mathbf{x}(\tau)]' \boldsymbol{\psi}(\tau) = [\delta \mathbf{x}(t_1)]' \boldsymbol{\psi}(t_1) \quad \tau \leq t \leq t_1. \quad (\text{Д.1.11})$$

Теперь можно судить о величине δJ по левой части этого равенства, которая явно зависит от $u^0(\tau)$.

Из (Д.1.10) следует, что

$$[\delta \mathbf{x}(t)]' \boldsymbol{\psi}(t) = \text{const} \quad (\tau \leq t \leq t_1), \quad (\text{Д.1.12})$$

и тогда

$$\frac{d}{dt} \{ [\delta \mathbf{x}(t)]' \boldsymbol{\psi}(t) \} = 0 \quad (\tau \leq t \leq t_1), \quad (\text{Д.1.13})$$

или

$$\frac{d}{dt} [\delta \mathbf{x}(t)]' \boldsymbol{\psi}(t) + [\delta \mathbf{x}(t)]' \frac{d\boldsymbol{\psi}(t)}{dt} = 0.$$

Запишем это равенство в развернутом виде

$$\sum_{i=0}^n \frac{d}{dt} [\delta \mathbf{x}_i(t)] \phi_i(t) + \sum_{i=0}^n \delta x_i \frac{d}{dt} \phi_i(t) = 0.$$

Используя (2.1.9) и (Д.1.5), получим

$$\sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \delta x_j \right] \phi_i(t) - \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \phi_j \right] \delta x_i \equiv 0.$$

Таким образом, соотношение (Д.1.10) доказано.

Теперь можно рассматривать величину $-\delta J = [\delta x(\tau)]' \boldsymbol{\psi}(\tau) \leq 0$.

Представим это соотношение с учетом (Д.1.4) в виде

$$\varepsilon \left\{ \boldsymbol{\psi} [\bar{\mathbf{x}}(\tau), \bar{u}(\tau)] - \boldsymbol{\psi} [\mathbf{x}^0(\tau), u^0(\tau)] \right\}' \boldsymbol{\psi}(\tau) \leq 0. \quad (\text{Д.1.14})$$

Из (Д.1.2) следует, что разность $\bar{\mathbf{x}}(\tau) - \mathbf{x}^0(\tau)$ это вектор, компоненты которого являются величинами того же порядка малости, что и ε , и поэтому вектор $\bar{\mathbf{x}}(\tau)$ в (Д.1.14) можно заменить на $\mathbf{x}^0(\tau)$.

Сокращая (Д.1.14) на $\varepsilon > 0$ и учитывая выражение (2.1.7), заключаем, что

$$H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}^0, \bar{u}) \leq H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}^0, u^0). \quad (\text{Д.1.15})$$

Это означает, что функция H достигает максимума при $\bar{u} = u^0$ и, таким образом, основное утверждение (2.1.13) доказано.

Доказательство 2

Вывод алгебраического уравнения Риккати

Запишем уравнения (3.1.1), (3.1.2) и функционал (3.1.3) в развернутой форме:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k; \quad (i = \overline{1, n}); \quad (\text{Д.2.1})$$

$$u_k = \sum_{i=1}^n c_{ik} x_i \quad (k = \overline{1, m}); \quad (\text{Д.2.2})$$

$$J = \int_0^\infty \left(\sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^m u_k^2 \right) dt, \quad (\text{Д.2.3})$$

где $\sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j \geq 0$ для всех значений x_i ($i = \overline{1, n}$).

Уравнения в частных производных (2.3.11), (2.3.12) имеют в рассматриваемом случае вид

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k \right] + \sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^m u_k^2. \quad (\text{Д.2.4})$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} b_{ik} + 2u_k = 0 \quad \text{или} \quad u_k = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} b_{ik} \quad (k = \overline{1, m}). \quad (\text{Д.2.5})$$

Исключая u_k ($k = \overline{1, m}$) из (Д.2.4) с помощью (Д.2.5), получим нелинейное уравнение в частных производных

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} b_{ik} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j = 0. \quad (\text{Д.2.6})$$

Решение этого уравнения будем искать в виде квадратичной формы

$$v = \sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j. \quad (\text{Д.2.7})$$

Подставляя выражение (Д.2.7) в (Д.2.6), получим

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) - \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right) b_{ik} \right]^2 \frac{1}{4} + \sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j = 0. \quad (\text{Д.2.8})$$

Это равенство можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{\alpha j} x_j \right) \left(\sum_{i=1}^n a_{\alpha j} x_i \right) - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha j} b_{\alpha k} \right) x_j \right] \times \\ & \times \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha i} b_{\alpha k} \right) x_i \right] + \sum_{i,j=1}^n q_{ij} x_i x_j = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю совокупность коэффициентов при произведениях $x_i x_j$, ($i, j = \overline{1, n}$) и учитывая, что $x_i x_j = x_j x_i$, получим систему из $\frac{n(n+1)}{2}$ алгебраических уравнений для определения коэффициентов p_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$):

$$\sum_{\alpha=1}^n (p_{\alpha i} a_{\alpha j} + a_{\alpha j} p_{\alpha i}) - \sum_{k=1}^m \left(\sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha i} b_{\alpha k} \right) \left(\sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha j} b_{\alpha k} \right) + q_{ij} = 0, \quad (\text{Д.2.9})$$

при этом $p_{ij} = p_{ji}$.

Подставляя квадратичную форму (Д.2.7) в (Д.2.5), получим

$$u_k = -\sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha i} b_{\alpha k} \right) x_i \quad (k = \overline{1, m}). \quad (\text{Д.2.10})$$

Если система алгебраических уравнений (Д.2.9) имеет своим решением хотя бы один набор чисел p_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$), при котором форма (Д.2.7) является положительно-определенной,

$$\sum_{i,j=1}^n p_{ij} x_i x_j > 0$$

для всех x_i ($i = \overline{1, n}$), то искомое оптимальное уравнение (Д.2.2), разрешающее задачу, имеет вид (Д.2.10) и, следовательно, искомые коэффициенты c_{ik} ($i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}$) равны

$$c_{ik} = - \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha i} b_{\alpha k} \quad (i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}) \quad (\text{Д.2.11})$$

Записывая (Д.2.9) и (Д.2.10) в матричной форме, получим (3.1.15), (3.1.16).

Доказательство 3

Вывод уравнений оптимального наблюдения

1. Найдем вначале уравнения для ошибки ($\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$) наблюдения. Для этого вычтем из уравнения объекта (4.2.1) уравнение наблюдателя (4.2.6), тогда получим

$$\dot{\mathbf{e}} = [A(t) - K(t)D(t)]\mathbf{e} - K(t)\boldsymbol{\chi} + \Psi(t)\mathbf{f}; \quad \mathbf{e}(t_0) = \mathbf{e}^{(0)}. \quad (\text{Д.3.1})$$

2. Теперь вычислим значение критерия (4.2.7) на решениях (Д.3.1). В связи с этим введем обозначения

$$\bar{\mathbf{e}}(t) = M \{ \mathbf{e}(t) \}; \quad (\text{Д.3.2})$$

$$\tilde{P}_e(t) = M \{ [\mathbf{e}(t) - \bar{\mathbf{e}}(t)][\mathbf{e}(t) - \bar{\mathbf{e}}(t)]' \}, \quad (\text{Д.3.3})$$

где $\bar{\mathbf{e}}(t)$ - математическое ожидание; $\tilde{P}_e(t)$ - матрица дисперсий ошибок наблюдения.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \tilde{P}_e(t) &= M \{ [\mathbf{e}(t) - \bar{\mathbf{e}}(t)][\mathbf{e}(t) - \bar{\mathbf{e}}(t)]' \} = \\ &= M \{ \mathbf{e}(t)\mathbf{e}'(t) \} - M \{ \mathbf{e}(t) \} \bar{\mathbf{e}}'(t) - \bar{\mathbf{e}}(t)M \{ \mathbf{e}'(t) \} + \{ \bar{\mathbf{e}}(t)\bar{\mathbf{e}}'(t) \} = M \{ \mathbf{e}(t)\mathbf{e}'(t) \} - \bar{\mathbf{e}}(t)\bar{\mathbf{e}}'(t). \end{aligned} \quad (\text{Д.3.4})$$

Отсюда следует, что

$$M \{ \mathbf{e}(t)\mathbf{e}'(t) \} = \tilde{P}_e(t) + \bar{\mathbf{e}}(t)\bar{\mathbf{e}}'(t). \quad (\text{Д.3.5})$$

Матрица $M \{ \mathbf{e}(t)\mathbf{e}'(t) \}$ называется *матрицей моментов второго порядка*. Элементы матрицы $G_e(t) = M \{ \mathbf{e}(t)\mathbf{e}'(t) \}$ определяются выражениями

$$g_{ij}^{(e)}(t) = M \{ \mathbf{e}_i(t)\mathbf{e}_j(t) \}. \quad (\text{Д.3.6})$$

Таким образом, (Д.3.5) можно записать в виде

$$G_e(t) = \tilde{P}_e(t) + \bar{\mathbf{e}}(t)\bar{\mathbf{e}}'(t). \quad (\text{Д.3.7})$$

Утверждение А. Среднее значение квадрата ошибки восстановления (4.2.7) выражается через математическое ожидание и матрицу дисперсий ошибок наблюдения следующим образом:

$$M \{ \mathbf{e}'(t) \Lambda(t) \mathbf{e}(t) \} = \text{tr} [\tilde{P}_e(t) + \Lambda(t)] + \bar{\mathbf{e}}'(t) \Lambda(t) \bar{\mathbf{e}}(t). \quad (\text{Д.3.8})$$

Доказательство этого соотношения получаем, если с учетом (Д.3.6), (Д.3.7) запишем

$$\begin{aligned} M \{ \mathbf{e}'(t) \Lambda(t) \mathbf{e}(t) \} &= M \left\{ \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}(t) e_i(t) e_j(t) \right\} = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}(t) M \{ e_i(t) e_j(t) \} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}(t) g_{ij}^{(e)}(t) = \text{tr} [\Lambda(t) G_e(t)] = \text{tr} \left\{ \Lambda(t) [\bar{P}_e(t) + \bar{\mathbf{e}}(t) \bar{\mathbf{e}}'(t)] \right\} = \\ &= \text{tr} [\tilde{P}_e(t) \Lambda(t)] + \bar{\mathbf{e}}'(t) \Lambda(t) \bar{\mathbf{e}}(t). \end{aligned}$$

Далее для простоты полагаем $\Lambda = \text{diag} \|\lambda_1, \dots, \lambda_n\|$, $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$.

3. Переходя к минимизации критерия (4.2.7), заметим, что в соответствии с (Д.3.8) второе слагаемое достигает минимума, когда $\bar{\mathbf{e}}(t) = 0$. Найдем условия, при которых выполняется это равенство. В соответствии с формулой Коши (1.3.18) решение уравнения (Д.3.1) имеет вид

$$\mathbf{e}(t) = \check{H}(t, t_0) \mathbf{e}(t_0)' + \int_{t_0}^t \check{H}(t, \tau) [\Psi(\tau) \mathbf{f}(\tau) - K(\tau) \chi(\tau)] d\tau, \quad (\text{Д.3.9})$$

где $\check{H}(t, t_0)$ – нормированная фундаментальная матрица решений однородного уравнения

$$\dot{\mathbf{e}} = [A(t) - K(t)D(t)] \mathbf{e}(t). \quad (\text{Д.3.10})$$

Принимая во внимание, что $M\{\chi(t)\} = M\{\mathbf{f}(t)\} = 0$, получим на основе (Д.3.9)

$$M\{\mathbf{e}(t)\} = \check{H}(t, t_0) M\{\mathbf{e}(t_0)\} \quad \text{или} \quad \bar{\mathbf{e}}(t) = \check{H}(t, t_0) \bar{\mathbf{e}}(t_0).$$

Это означает, что $\bar{\mathbf{e}}(t)$ является решением уравнения

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}} = [A(t) - K(t)D(t)] \bar{\mathbf{e}}. \quad (\text{Д.3.11})$$

Если задать начальное условие наблюдателя

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}^{(0)},$$

то $\bar{\mathbf{e}}(t_0) = 0$ и, следовательно, решение уравнения (Д.3.11)

$$\bar{\mathbf{e}}(t) = 0. \quad (\text{Д.3.12})$$

Таким образом, доказано соотношение (4.2.11).

4. Найдем условия, при которых достигает минимума первое слагаемое в выражении (Д.3.8). Для этого построим вначале уравнение, которому удовлетворяет матрица дисперсий ошибок восстановления $\tilde{P}_e(t)$. Такое уравнение нетрудно записать, если воспользоваться следующим утверждением [3.7].

Утверждение Б. Если $\mathbf{x}(t)$ - решение уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \Psi(t)\mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad (\text{Д.3.13})$$

(где $f(t)$ - "белый шум" интенсивности $R^{(1)}(t)$; $\mathbf{x}^{(0)}$ - стохастический вектор, не зависящий от $\mathbf{f}(t)$ со средним $\bar{\mathbf{x}}^{(0)}$ и матрицей дисперсий $R^{(0)} = M\{[\mathbf{x}^{(0)} - \bar{\mathbf{x}}^{(0)}][\bar{\mathbf{x}}^{(0)} - \mathbf{x}^{(0)}]'\}$, то матрица дисперсий

$$P_x(t) = M\{\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)][\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)]'\} \quad \bar{\mathbf{x}}(t) = M\{\mathbf{x}(t)\}$$

удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{P}_x(t) = A(t)P_x(t) + P_x A'(t) + \Psi(t)R^{(1)}(t)\Psi'(t), \quad P_x(t_0) = R^{(0)}. \quad (\text{Д.3.14})$$

Для доказательства этого утверждения запишем вначале в соответствии с (Д.3.5)

$$P_x(t) = M\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}'(t)\} - \bar{\mathbf{x}}(t)\bar{\mathbf{x}}'(t). \quad (\text{Д.3.15})$$

Для вычисления значения матрицы $M\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}'(t)\}$ воспользуемся выражением для решения уравнения (Д.3.13):

$$\mathbf{x}(t) = H(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t H(t, \tau)\Psi(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau. \quad (\text{Д.3.16})$$

Тогда

$$\begin{aligned}
M\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}'(t)\} &= M\{H(t, t_0)\mathbf{x}^{(0)}\mathbf{x}^{(0)'}H'(t, t_0)\} + \\
&+ M\left\{H(t, t_0)\mathbf{x}^{(0)}\left[\int_{t_0}^t H(t, \tau)\Psi(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau\right]'\right\} + \\
&+ M\left\{\left[\int_{t_0}^t H(t, \tau)\Psi(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau\right]x^{(0)'}H'(t, t_0)\right\} + \\
&+ M\left\{\left[\int_{t_0}^t H(t, \tau)\Psi(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau\right]\left[\int_{t_0}^t H(t, \tau)\Psi(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau\right]'\right\}.
\end{aligned} \tag{Д.3.17}$$

Второе и третье слагаемые в этом выражении равны нулю, так как векторы $\mathbf{x}^{(0)}$ и $\mathbf{f}(t)$ независимы и $M\{\mathbf{f}(t)\} = 0$.

Преобразуем последнее слагаемое с учетом (4.1.3)

$$\begin{aligned}
M\left\{\left[\int_{t_0}^t H(t, \tau)\Psi(\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau\right]\left[\int_{t_0}^t H(t, \eta)\Psi(\eta)\mathbf{f}(\eta)d\eta\right]'\right\} &= \\
= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t H(t, \tau)\Psi(\tau)M\{\mathbf{f}(\tau)\mathbf{f}'(\eta)\}\Psi'(\tau)H'(t, \eta)|d\tau d\eta &= \\
= \int_{t_0}^t H(t, \tau)\Psi(\tau)R^{(1)}(\tau)\Psi'(\tau)H'(t, \tau)d\tau.
\end{aligned} \tag{Д.3.18}$$

Подставляя (Д.3.17) в (Д.3.15), получим с учетом (Д.3.18)

$$\begin{aligned}
P_x(t) &= H(t, t_0)G_{x(0)}H'(t, t_0) + \int_{t_0}^t H'(t, \tau)\Psi(\tau)R^{(1)}(\tau)\Psi'(\tau)H'(t, \tau)d\tau - \\
&- H(t, t_0)\bar{\mathbf{x}}^{(0)}\bar{\mathbf{x}}^{(0)'}H(t, t_0),
\end{aligned}$$

где $G_{x(0)} = M[\mathbf{x}^{(0)}\mathbf{x}^{(0)'}]$.

Аналогично (Д.3.7) получим

$$P_x(t) = H(t, t_0)R^{(0)}H'(t, t_0) + \int_{t_0}^t H(t, \tau)\Psi(\tau)R^{(1)}(\tau)\Psi'(\tau)H'(t, \tau)d\tau. \tag{Д.3.19}$$

(Нетрудно видеть, что $P_x(t_0) = R^{(0)}$). Дифференцируя это равенство с учетом соотношения

$$\frac{dH(t, \tau)}{d\tau} = A(t)H(t, \tau) \quad (\text{Д.3.20})$$

и равенства

$$H(t, t) = E_n, \quad (\text{Д.3.21})$$

получим (Д.3.14), и таким образом, утверждение Б доказано.

Используя это утверждение, запишем уравнение для матрицы дисперсий ошибок восстановления

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\epsilon(t) = [A(t) - K(t)D(t)]\tilde{P}_\epsilon(t) + \tilde{P}_\epsilon(t)[A(t) - K(t)D(t)]' + \\ + K(t)R^{(2)}(t)K'(t) + \Psi(t)R^{(1)}(t)\Psi'(t); \end{aligned} \quad (\text{Д.3.22})$$

$$P_\epsilon(t_0) = R^{(0)}. \quad (\text{Д.3.23})$$

5. Сформулируем одно утверждение, касающееся свойств решений матричного дифференциального уравнения Риккати (3.1.37).

Отметим вначале, что в соответствии с (2.3.14) функция

$$v(t) = \mathbf{x}'(t)P(t)\mathbf{x}(t), \quad (\text{Д.3.24})$$

являющаяся решением уравнения метода динамического программирования, возникшего в связи с задачей о минимуме функционала (3.1.30) на связях (3.1.29), позволяет вычислить значение функционала (3.1.30) на оптимальных траекториях. Это значение

$$\min J = v(t_0) = \mathbf{x}'(t_0)P(t_0)\mathbf{x}(t_0). \quad (\text{Д.3.25})$$

Вычислим значение функционала (3.1.30) при неоптимальном управлении

$$\mathbf{u} = \tilde{C}'(t)\mathbf{x}, \quad (\text{Д.3.26})$$

где $\tilde{C}(t)$ – произвольная, но фиксированная матрица функций времени, заданных на интервале $[t_0, t_1]$.

Объект, замкнутый управлением (Д.3.26), описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{A}(t)\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad (\text{Д.3.27})$$

где

$$\tilde{A}(t) = A(t) + B(t)\tilde{C}'(t), \quad (\text{Д.3.28})$$

а функционал (3.1.30) принимает вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}\tilde{Q}\mathbf{x}dt + \mathbf{x}'(t_1)P^{(1)}\mathbf{x}(t_1), \quad (\text{Д.3.29})$$

где

$$\tilde{Q} = Q(t) + \tilde{C}(t)\tilde{C}'(t). \quad (\text{Д.3.30})$$

Итак, необходимо вычислить значение функционала (Д.3.29) на решениях уравнения (Д.3.27).

Не фиксируя пока t_0 , будем искать значение функционала (Д.3.29) как

$$\mathbf{x}'(t)\tilde{P}(t)\mathbf{x}(t) = \int_t^{t_1} \mathbf{x}'(t)\tilde{Q}(t)\mathbf{x}(t)dt + \mathbf{x}'(t_1)P^{(1)}\mathbf{x}(t_1). \quad (\text{Д.3.31})$$

Из этого выражения следует, в частности, что

$$\tilde{P}(t_1) = P^{(1)}. \quad (\text{Д.3.32})$$

Дифференцируя обе части (Д.3.31) с учетом (Д.3.27), получим

$$\mathbf{x}'(t)[\tilde{A}'(t)\tilde{P}(t) + \dot{\tilde{P}} + \tilde{P}(t)\tilde{A}(t)]\mathbf{x}(t) = -\mathbf{x}'(t)\tilde{Q}(t)\mathbf{x}(t).$$

Отсюда следует уравнение

$$-\dot{\tilde{P}}(t) = \tilde{P}(t)\tilde{A}(t) + \tilde{A}'(t)\tilde{P}(t) + \tilde{Q}(t).$$

Это уравнение с учетом (Д.3.28), (Д.3.30) примет вид

$$-\dot{\tilde{P}}(t) = \tilde{P}(t)[A(t) + B(t)\tilde{C}'(t)] + [A(t) + B(t)\tilde{C}'(t)]'\tilde{P}(t) + Q(t) + \tilde{C}(t)\tilde{C}'(t). \quad (\text{Д.3.33})$$

Из (Д.3.31) получим значение функционала (Д.3.29)

$$\tilde{v}(t_0) = \mathbf{x}'(t_0)\tilde{P}(t_0)\mathbf{x}(t_0). \quad (\text{Д.3.34})$$

Очевидно, что

$$\tilde{v}(t_0) \geq v(t_0), \quad (\text{Д.3.35})$$

так как $v(t_0)$ – значение этого функционала при оптимальном управлении.

Из (Д.3.34) следует, что $\tilde{P}(t_0) \geq P(t_0)$, поскольку вектор $\mathbf{x}(t_0)$ произвольный. Кроме того, используя произвольность t_0 , заключаем, что

$$[\tilde{P}(t) - P(t)] \geq 0. \quad (\text{Д.3.36})$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение В. Матричное уравнение (Д.3.33) с краевым условием (Д.3.32) имеет решение, удовлетворяющее неравенству (Д.3.36). Это неравенство обращается в равенство, если

$$\tilde{C}(t) = -\tilde{P}(t)B(t). \quad (\text{Д.3.37})$$

Если функционал (3.1.30) имеет вид (3.1.42), то уравнение (Д.3.33) принимает вид

$$\begin{aligned} -\dot{\tilde{P}}(t) = [A(t) + B(t)\tilde{C}'(t)]'\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)[A(t) + B(t)\tilde{C}'(t)] + \\ + Q + \tilde{C}(t)Q^{(1)}(t)\tilde{C}_j(t), \end{aligned} \quad (\text{Д.3.38})$$

а матрица

$$\tilde{C}(t) = -\tilde{P}(t)B(t)Q^{(1)-1}. \quad (\text{Д.3.39})$$

6. Введем (полагая дальше для простоты $t_0 = 0$) в рассмотрение дифференциальное уравнение для некоторой матрицы $\tilde{S}(t)$ (размеров $n \times n$), которое получается из уравнения (Д.3.22) обращением времени путем введения $\tau = t_1 - t$ и последующей замены τ на t :

$$\begin{aligned} -\dot{\tilde{S}}(t) = [A'(t_1 - t) - D'(t_1 - t)K'(t_1 - t)]'\tilde{S}(t) + \tilde{S}(t)[A'(t_1 - t) - \\ - D'(t_1 - t)K'(t_1 - t)] + K(t_1 - t)R^{(2)}(t_1 - t)K'(t_1 - t) + \Psi(t_1 - t)R^{(1)}(t_1 - t)\Psi(t_1 - t); \end{aligned} \quad (\text{Д.3.40})$$

$$\tilde{S}(t_1) = R^{(0)} \quad (\text{Д.3.41})$$

Очевидно, что решения уравнений (Д.3.22), (Д.3.40) связаны равенством

$$\tilde{P}_e(t) = \tilde{S}(t_1 - t). \quad (\text{Д.3.42})$$

Применим теперь утверждение В к уравнению (Д.3.40). Матрица $S(t)$ достигает минимума, если матрица

$$K(t_1 - t) = \tilde{S}(t)D'(t_1 - t)R^{(2)-1}(t_1 - t). \quad (\text{Д.3.43})$$

Действительно, уравнение (Д.3.40) совпадает с уравнением (Д.3.38), если в последнем положить $B(t) = D'(t_1 - t)$, $\tilde{C}(t) = -K(t_1 - t)$.

$$A(t) = A'(t_1 - t), \quad Q(t) = \Psi(t_1 - t)R^{(1)}(t_1 - t)\Psi'(t_1 - t),$$

$$Q^{(1)}(t) = R^{(2)}(t_1 - t),$$

и тогда на основе (Д.3.37) получаем (Д.3.43). Подставляя (Д.3.43) в (Д.3.40), получим уравнение для наименьшего значения матрицы $\tilde{S}(t) = S(t)$:

$$\begin{aligned} -\dot{S}(t) &= A(t_1 - t)S(t) + S(t)A'(t_1 - t) - \\ &- S(t)D'(t_1 - t)R^{(2)-1}(t_1 - t)D(t_1 - t)S(t) + \Psi(t_1 - t) \times \\ &\times R^{(1)}(t_1 - t)\Psi'(t_1 - t); \quad S(t) = R^{(0)}. \end{aligned} \quad (\text{Д.3.44})$$

Решения уравнений (Д.3.40) и (Д.3.44) удовлетворяют условию

$$[\tilde{S}(t) - S(t)] \geq 0.$$

Обращая время в уравнении (Д.3.44), заключаем, что

$$[\tilde{P}_e(t) - P_e(t)] \geq 0. \quad (\text{Д.3.45})$$

где $P_e(t)$ – решение уравнения (4.2.9), которое совпадает с (Д.3.44) после обращения времени.

Из (Д.3.45) следует

$$\text{tr} [\tilde{P}_e(t)\Lambda(t)] \geq \text{tr} [P_e(t)\Lambda(t)],$$

и поэтому матрица (Д.3.43), совпадающая при $\tilde{S}(t) = S(t) = P_e(t)$ с матрицей (4.2.8), минимизирует наблюдатель, и таким образом, утверждение 4.2.2 доказано.

Отметим, что полученный результат не зависит от конкретного момента времени t , который выбран для минимизации критерия (4.2.7) и выбора матрицы $\Lambda(t)$, поэтому матрица (4.2.8) минимизирует (4.2.7) одновременно для всех $t > t_0$ и любых знакоопределенных матриц $\Lambda(t)$.

Доказательство 4

Доказательство теоремы разделения

Запишем функционал (4.2.5) с учетом коммутативности операции интегрирования и математического ожидания в виде

$$J = \int_{t_0}^{t_1} M \{ \mathbf{x}' Q(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{u} \} dt + M \{ \mathbf{x}'(t_1) P^{(1)} \mathbf{x}(t_1) \} \quad (\text{Д.4.1})$$

и рассмотрим

$$\begin{aligned} M \{ \mathbf{x}' Q(t) \mathbf{x} \} &= M \{ [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{x}}(t)]' Q(t) [\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{x}}(t)] \} = \\ &= M \{ [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)]' Q(t) [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] \} + 2M \{ [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)]' Q(t) \hat{\mathbf{x}}(t) \} + \\ &+ M \{ \hat{\mathbf{x}}'(t) Q(t) \hat{\mathbf{x}}(t) \}, \end{aligned} \quad (\text{Д.4.2})$$

где $\hat{\mathbf{x}}$ – вектор переменных состояния оптимального наблюдателя (4.2.6), в котором матрица $K(t)$ определяется соотношениями (4.2.8) ... (4.2.9).

В соответствии с (Д.3.8) матрица дисперсий ошибки оптимального наблюдения

$$M \left\{ [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)]' Q(t) [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] \right\} = \text{tr} [P_e(t) Q(t)], \quad (\text{Д.4.3})$$

так как при оптимальном восстановлении $\bar{\mathbf{e}}(t) = 0$, а $\tilde{P}_e = P_e$, где P_e – решение уравнения (4.2.9).

Второе слагаемое в (Д.4.2)

$$M \left\{ [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)]' Q(t) \hat{\mathbf{x}}(t) \right\} = 0 \quad (\text{Д.4.4})$$

в силу следующего утверждения.

Утверждение А. Векторы $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ и $\hat{\mathbf{x}}(t)$ не коррелированы. Доказательство этого утверждения будет приведено ниже.

Таким образом,

$$M \left\{ \mathbf{x}'(t) Q(t) \mathbf{x}(t) \right\} = \text{tr} [P_e(t) Q(t)] + M \left\{ \hat{\mathbf{x}}'(t) Q(t) \hat{\mathbf{x}}(t) \right\}. \quad (\text{Д.4.5})$$

Полагая в этом выражении $t = t_1$ и заменяя $Q(t_1)$ на $P^{(1)}$, получим

$$M \left\{ \mathbf{x}'(t_1) P^{(1)}(t_1) \mathbf{x}(t_1) \right\} = \text{tr} [P_e(t_1) P^{(1)}] + M \left\{ \hat{\mathbf{x}}'(t_1) P^{(1)} \hat{\mathbf{x}}(t_1) \right\}. \quad (\text{Д.4.6})$$

Используя эти выражения, запишем функционал (4.2.5) в виде

$$J = M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} [\hat{\mathbf{x}}' Q(t) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}' \mathbf{u}] dt + \hat{\mathbf{x}}'(t_1) P^{(1)}(t_1) \hat{\mathbf{x}}(t_1) \right\} + \text{tr} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} P_e(t) Q(t) dt + P_e(t_1) P^{(1)} \right\}. \quad (\text{Д.4.7})$$

Заметим, что два последних слагаемых в этом выражении не зависят от управления.

Запишем теперь уравнение оптимального наблюдателя (4.2.6)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A(t) \hat{\mathbf{x}} + B(t) \mathbf{u} + K(t) [\mathbf{y} - D(t) \hat{\mathbf{x}}]. \quad (\text{Д.4.8})$$

Утверждение Б. Разность

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{y} - D(t) \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{Д.4.9})$$

является случайным процессом типа "белый шум" с интенсивностью $R^{(2)}(t)$.

Правдоподобность этого утверждения следует из (4.2.2), которое можно записать как $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{y} - D(t) \mathbf{x}$.

Утверждения А и Б позволяют свести задачу оптимального в смысле функционала (4.2.5) управления при неполной информации о состояниях объекта (4.2.1); (4.2.2) к задаче оптимального в смысле функционала

$$J = M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} [\hat{\mathbf{x}}' Q(t) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}' \mathbf{u}] dt + \hat{\mathbf{x}}'(t_1) P^{(1)} \hat{\mathbf{x}}(t_1) \right\} \quad (\text{Д.4.10})$$

стохастического управления для "объекта"

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A(t)\hat{\mathbf{x}} + B(t)\mathbf{u} + K(t)\boldsymbol{\alpha}(t), \quad (\text{Д.4.11})$$

возбужденного случайным процессом $\boldsymbol{\alpha}(t)$, являющимся "белым шумом".

Решение этой задачи

$$\mathbf{u} = C'(t)\hat{\mathbf{x}}, \quad (\text{Д.4.12})$$

где матрица $C'(t)$ определяется выражениями (4.1.7), (4.1.8), и таким образом, теорема разделения доказана.

Для доказательства утверждения А запишем уравнения системы с оптимальным наблюдателем:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u} + \Psi(t)\mathbf{f}; \quad \mathbf{y} = D(t)\mathbf{x} + \boldsymbol{\chi}(t); \quad (\text{Д.4.13})$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A(t)\hat{\mathbf{x}} + B(t)\mathbf{u} + K(t)[\mathbf{y} - D(t)\hat{\mathbf{x}}]. \quad (\text{Д.4.14})$$

Вычитая из первого уравнения системы (Д.4.13) уравнение (Д.4.14), получим

$$\dot{\mathbf{e}} = [A(t) - K(t)D(t)]\mathbf{e} + \Psi(t)\mathbf{f} - K(t)\boldsymbol{\chi}. \quad (\text{Д.4.15})$$

Подставляя в (Д.4.14) выражение (Д.4.12), заключаем

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = [A(t) + B(t)C'(t)]\hat{\mathbf{x}} + K(t)D(t)\mathbf{e} + K(t)\boldsymbol{\chi}. \quad (\text{Д.4.16})$$

Рассмотрим расширенный вектор $\text{col} \|\mathbf{e}(t), \hat{\mathbf{x}}(t)\|$, который удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A(t) - K(t)D(t), & 0 \\ K(t)D(t), & A(t) + B(t)C'(t) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{e} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cc} \Psi(t) & -K(t) \\ 0 & K(t) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\chi} \end{array} \right\| \quad (\text{Д.4.17})$$

с начальным условием

$$\left\| \begin{array}{c} \mathbf{e}(t_0) \\ \hat{\mathbf{x}}(t_0) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{x}(t_0) & -\bar{\mathbf{x}}^{(0)} \\ \bar{\mathbf{x}}^{(0)} & \end{array} \right\|. \quad (\text{Д.4.18})$$

Обозначим матрицу дисперсий расширенного вектора через

$$M \left\{ \left\| \begin{array}{c} \mathbf{e}(t) - M\{\mathbf{e}(t)\} \\ \hat{\mathbf{x}}(t) - M\{\hat{\mathbf{x}}(t)\} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} [\mathbf{e}(t) - M\{\mathbf{e}(t)\}]' \\ [\hat{\mathbf{x}}(t) - M\{\hat{\mathbf{x}}(t)\}]' \end{array} \right\| \right\} =$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P'_{12}(t) & P_{22}(t) \end{array} \right\|.$$
(Д.4.19)

Дифференциальные уравнения для определения матриц $P_{11}(t)$, $P_{12}(t)$, $P_{22}(t)$ можно получить, используя утверждение Док.3.Б. Так, подставляя матрицу уравнения (Д.4.17) в (Д.3.14), получим, в частности, для матриц $P_{11}(t)$ и $P_{12}(t)$ уравнения:

$$\dot{P}_{11}(t) = [A(t) - K(t)D(t)] P_{11}(t) + P_{11}(t) [A(t) - K(t)D(t)]' +$$

$$+ \Psi(t)R^{(1)}(t)\Psi'(t) + K(t)R^{(2)}(t)K'(t);$$
(Д.4.20)

$$\dot{P}_{12}(t) = [A(t) - K(t)D(t)] P_{12}(t) + P_{11}(t)D'(t)K'(t) +$$

$$+ P_{12}(t)[A(t) + B(t)C'(t)] - K(t)R^{(2)}(t)K'(t);$$
(Д.4.21)

с начальными условиями

$$\left\| \begin{array}{cc} P_{11}(t_0) & P_{12}(t_0) \\ P'_{12}(t_0) & P_{22}(t_0) \end{array} \right\| =$$

$$= M \left\{ \left\| \begin{array}{c} \mathbf{e}(t_0) - \bar{\mathbf{e}}(t_0) \\ \hat{\mathbf{x}}(t_0) - \bar{\hat{\mathbf{x}}}(t_0) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} [\mathbf{e}(t_0) - \bar{\mathbf{e}}(t_0)]' \\ [\hat{\mathbf{x}}(t_0) - \bar{\hat{\mathbf{x}}}(t_0)]' \end{array} \right\| \right\} =$$
(Д.4.22)

$$= M \left\{ \left\| \begin{array}{c} \mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}(t_0) \\ 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{x}(t_0) - \bar{\mathbf{x}}(t_0) \\ 0 \end{array} \right\| \right\} = \left\| \begin{array}{cc} R^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Таким образом, $P_{11}(t_0) = R^{(0)}$, $P_{12}(t_0) = 0$.

Нетрудно видеть, что уравнение (Д.4.20) совпадает с уравнением (4.2.9), если $K(t)$ определяется на основе (4.2.8). Следовательно,

$$P_{11}(t) = P_e(t).$$
(Д.4.23)

Подставляя это выражение в (Д.4.21) и принимая во внимание (4.2.8), заключаем, что слагаемые $P_{11}(t)D'(t)K'(t)$ и $-K(t)R^{(2)}(t)K'(t)$ в уравнении (Д.4.21) взаимно уничтожаются. Оставшаяся часть этого уравнения является однородным дифференциальным уравнением с начальным условием $P_{12}(t_0) = 0$, которое имеет решение

$$P_{12}(t) = 0.$$
(Д.4.24)

По определению (Д.4.19) с учетом (Д.3.12) получим

$$P_{12}(t) = M \left\{ [\hat{\mathbf{x}}(t) - M\{\hat{\mathbf{x}}(t)\}] [\mathbf{e}(t) - \bar{\mathbf{e}}(t)]' \right\} = M \left\{ [\hat{\mathbf{x}}(t) - M\{\hat{\mathbf{x}}(t)\}] \mathbf{e}'(t) \right\} =$$

$$= M \left\{ \hat{\mathbf{x}}(t) \mathbf{e}'(t) \right\} - M \left\{ \hat{\mathbf{x}}(t) \right\} \bar{\mathbf{e}}' = M \left\{ \hat{\mathbf{x}}(t) \mathbf{e}'(t) \right\} = 0,$$

и таким образом, утверждение А доказано.

Доказательство утверждения Б аналогично, если ввести в рассмотрение уравнение

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{y} - D(t)\hat{\mathbf{x}} = D(t)\hat{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\chi}; \quad \mathbf{s}(t_0) = 0 \quad (\text{Д.4.25})$$

и рассмотреть его совместно с уравнением (Д.4.15). Сформировав расширенный вектор $\text{col } \|\mathbf{s}(t), \mathbf{e}(t)\|$, запишем уравнение для матрицы дисперсий расширенного вектора. Анализ этого уравнения приводит к утверждению Б.

Доказательство 5

Свойство H_∞ нормы

На основе (5.1.14) запишем

$$\theta^+ \theta^- = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i^2(\omega^f). \quad (\text{Д.5.1})$$

Это выражение можно записать с учетом (5.1.11) как

$$\sum_{i=1}^m a_i^2(\omega^f) = \theta^+ \theta^- = \mathbf{f}^{\text{sT}} \mathbf{T}^T(-j\omega^f) \mathbf{T}(j\omega^f) \mathbf{f}^{\text{s}}. \quad (\text{Д.5.2})$$

Зафиксируем $\omega^f = \omega_*^f$, тогда по теореме Реля-Рица имеем неравенства

$$\mathbf{f}^{\text{sT}} \mathbf{T}^T(-j\omega_*^f) \mathbf{T}(j\omega_*^f) \mathbf{f}^{\text{s}} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{T}(j\omega_*^f) \mathbf{T}^T(j\omega_*^f)) \mathbf{f}^{\text{sT}} \mathbf{f}^{\text{s}}, \quad (\text{Д.5.3})$$

где $\lambda_{\max}(j\omega_*^f)$ – максимальное собственное число эрмитовой матрицы $\mathbf{T}^T(-j\omega_*^f) \mathbf{T}(j\omega_*^f)$, $\left(\lambda_{\max}(j\omega_*^f) = \max_{1 \leq i \leq m} [\lambda_1(j\omega_*^f), \dots, \lambda_m(j\omega_*^f)] \right)$.

По определению сингулярного числа матрицы $\mathbf{T}(j\omega_*^f)$ запишем $\sigma_{\max}(j\omega_*^f) = \lambda_{\max}^{1/2}(j\omega_*^f)$, и тогда для произвольных ω^f имеем $\|\mathbf{T}(j\omega^f)\|_\infty^2 = \sup_{0 \leq \omega^f \leq \infty} \lambda_{\max}(j\omega^f)$, и поэтому (Д.5.3) принимает вид

$$\mathbf{f}^{\text{sT}} \mathbf{T}^T(-j\omega^f) \mathbf{T}(j\omega^f) \mathbf{f}^{\text{s}} \leq \|\mathbf{T}(j\omega^f)\|_\infty^2 \mathbf{f}^{\text{sT}} \mathbf{f}^{\text{s}}. \quad (\text{Д.5.4})$$

Учитывая выражение (Д.5.2), получим искомое свойство.

Доказательство 6

Регулятор, обеспечивающий H_∞ норму

Чтобы доказать, что регулятор (5.2.6) – (5.2.8) обеспечивает H_∞ , ограниченную γ , сформулируем лемму, на которой будет базироваться доказательство.

В связи с этим рассмотрим систему

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\Psi}\tilde{f}, \quad \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{N}}\tilde{\mathbf{x}}. \quad (\text{Д.6.1})$$

Лемма. Если существует неотрицательно определенное решение P ($P > 0$) уравнения Риккати

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P + \gamma^{-2} P\tilde{\Psi}\tilde{\Psi}^T P + \tilde{N}^T \tilde{N} = 0, \quad (\text{Д.6.2})$$

то матрица \tilde{A} – гурвицева, и H_∞ норма передаточной матрицы $\tilde{T}_{z\tilde{f}} = \tilde{N}(Es - \tilde{A})^{-1}\tilde{\Psi}$ удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{T}_{z\tilde{f}}\|_\infty \leq \gamma. \quad (\text{Д.6.3})$$

Доказательство. Прибавим и вычтем из левой части уравнения Риккати произведение sP и умножим результат слева на $\tilde{\Psi}^T(-Es - \tilde{A}^T)$, а справа на $(Es - \tilde{A})^{-1}\tilde{\Psi}$. Повторяя преобразования (3.3.7) и прибавляя к обоим частям $\gamma^2 E$ получим тождество

$$[E - \tilde{T}_{z\tilde{f}}(-s)]^T \gamma^2 [E - \tilde{T}_{z\tilde{f}}(s)] = \gamma^2 E - \tilde{T}_{z\tilde{f}}^T(-s) \tilde{T}_{z\tilde{f}}(s), \quad (\text{Д.6.4})$$

в котором

$$\tilde{T}_{z\tilde{f}}(s) = \gamma^{-2} \tilde{\Psi}^T (Es - \tilde{A})^{-1} \tilde{\Psi}. \quad (\text{Д.6.5})$$

При $s = j\omega$ получим, в силу неотрицательности левой части, следующее неравенство

$$\tilde{T}_{z\tilde{f}}^T(-j\omega) \tilde{T}_{z\tilde{f}}(j\omega) \leq E\gamma^2, \quad (\text{Д.6.6})$$

из которого следует, после несложных преобразований, связанных с квадратичными формами, ограничение (Д.6.3). Гурвицевость матрицы \tilde{A} следует из второго метода Ляпунова, если записать (Д.6.2) в виде

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P = -\tilde{Q}, \quad (\text{Д.6.7})$$

где $\tilde{Q} = -\tilde{N}^T \tilde{N} - \gamma^2 P\tilde{\Psi}\tilde{\Psi}^T P$ – неотрицательно - определенная матрица и предполагать, что пара $[\tilde{N}, \tilde{A}]$ – полностью наблюдаема.

Применим лемму для доказательства неравенства (5.2.12) в случае, когда вектор состояния объекта $\mathbf{x}(t)$ точно измеряется. В этом случае регулятор описывается соотношениями (5.2.13):

$$\mathbf{u} = C^T \mathbf{x}; \quad C^T = -B^T P, \quad (\text{Д.6.8})$$

а уравнения Риккати имеет вид (5.2.9)

$$PA + A^T P - PBB^T P + \gamma^{-2} P\Psi\Psi^T P + N^T N = 0. \quad (\text{Д.6.9})$$

Будем искать матрицу C^T регулятора так, чтобы выполнялось равенство

$$P(A + BC^T) + (A + BC^T)^T P + \frac{1}{\gamma^2} P\Psi\Psi^T P + N^T N + CC^T = 0. \quad (\text{Д.6.10})$$

Преобразуем его к виду

$$PA + A^T P + \frac{1}{\gamma^2} P \Psi \Psi^T P - P B B^T P + (C + P B)(C^T + B^T P) + N^T N = 0. \quad (\text{Д.6.11})$$

Очевидно, что, если матрица C^T удовлетворяет равенству (Д.6.8), то последнее уравнение совпадёт с уравнением (Д.6.9).

Если обозначить

$$\tilde{A} = A + B C^T; \quad \tilde{N} = [N^T, C]^T, \quad (\text{Д.6.12})$$

то уравнение (Д.6.10) совпадает с уравнением (Д.6.2).

С другой стороны, объект (5.1.1), замкнутый регулятором (Д.6.8), описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + B C^T) \mathbf{x} + \Psi \mathbf{f}; \quad \mathbf{z} = [\boldsymbol{\theta}^T, \mathbf{u}^T]^T = \left[(N \mathbf{x},)^T (C^T \mathbf{x})^T \right]^T = [N^T, C] \mathbf{x}, \quad (\text{Д.6.13})$$

которые при обозначениях (Д.6.12) принимают вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{A} \mathbf{x} + \Psi \mathbf{f}; \quad \mathbf{z} = \tilde{N} \mathbf{x},$$

и, следовательно $\|T_{zf}\| \leq \gamma$.

Переходя к общему случаю, введем вектор состояния рассматриваемой системы (5.1.1), (5.2.7), (5.2.6)

$$\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}^T, \mathbf{e}^T]^T, \quad (\text{Д.6.14})$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{x}_p - \mathbf{x}$, и запишем эту систему, заменяя в ней \mathbf{x}_p на $\mathbf{x} + \mathbf{e}$, \mathbf{u} на $C^T \mathbf{x}_p$ и \mathbf{f}_p на $K_f \mathbf{x}_p$, в виде

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{A} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\Psi} \bar{\mathbf{f}}, \quad \mathbf{z} = \bar{N} \bar{\mathbf{x}}, \quad (\text{Д.6.15})$$

где

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A + B C^T & B C^T \\ \Psi K_f & A + \Psi K_f - K D \end{bmatrix}; \quad \bar{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi & 0 \\ -\Psi & K \end{bmatrix}; \quad \bar{N} = \begin{bmatrix} N & 0 \\ C^T & C^T \end{bmatrix}.$$

Действительно, в новых переменных уравнение (5.2.6) с учетом (5.1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= -\dot{\mathbf{x}} + A(\mathbf{x} + \mathbf{e}) + B C^T(\mathbf{x} + \mathbf{e}) + \Psi K_f(\mathbf{x} + \mathbf{e}) + K(D\mathbf{x} + \mathbf{a}) - K D(\mathbf{x} + \mathbf{e}) = \\ &= \Psi K_f \mathbf{x} + (A + \Psi K_f - K D) \mathbf{e} - \Psi \mathbf{f} + K \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Кроме того, имеем

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^T, u^T \end{bmatrix}^T = \left[(N\mathbf{x})^T (C^T \mathbf{x}_p)^T \right]^T = \left[(Nx)^T, (C^T(\mathbf{x} + \mathbf{e}))^T \right]^T = \bar{N}\bar{\mathbf{x}}.$$

В соответствии с утверждением 5.2.2 нужно найти матрицы C^T , K_f и K такие, чтобы существовала матрица $\bar{P} \geq 0$, удовлетворяющая уравнению Риккати

$$\bar{P}\bar{A} + \bar{A}^T\bar{P} + \gamma^{-2}\bar{P}\bar{\Psi}\bar{\Psi}^T\bar{P} = -\bar{N}^T\bar{N}. \quad (\text{Д.6.16})$$

Будем искать решение этого уравнения в виде блочно-диагональной матрицы

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{Д.6.17})$$

Уравнение (Д.6.16) в развернутой форме имеет вид

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + BC^T & BC^T \\ \Psi K_f & A + \Psi K_f - KD \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A + BC^T)^T & (\Psi K_f)^T \\ (BC^T)^T & (A + \Psi K_f - KD)^T \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} + \gamma^{-2} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi & 0 \\ -\Psi & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^T & -\Psi^T \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} = \\ & = - \begin{bmatrix} N^T & C \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & 0 \\ C^T & C^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{Д.6.18})$$

Левый верхний блок этого уравнения совпадает с уравнением (Д.6.10) и это доказывает соотношение (5.2.7).

Верхний правый блок имеет вид

$$PBC^T + (\Psi K_f)^T + \gamma^{-2}P\Psi\Psi^T P_1 = -CC^T. \quad (\text{Д.6.19})$$

Учитывая (5.2.7), получим

$$K_f = \gamma^{-2}\Psi^T P. \quad (\text{Д.6.20})$$

Нижний правый блок уравнения (Д.6.18) имеет вид

$$P_1(A + \Psi K_f - KD) + (A + \Psi K_f - KD)^T + \gamma^{-2}P_1\Psi(\Psi\Psi^T + KK^T)P_1 = -CC^T. \quad (\text{Д.6.21})$$

Учитывая выражения (5.2.7) и (Д.6.20) запишем

$$\begin{aligned} & P_1A + A^T P_1 + \gamma^{-2}P_1\Psi\Psi^T P + \gamma^{-2}P\Psi\Psi^T P_1 + \gamma^{-2}P_1(\Psi\Psi^T + KK^T)P_1 - \\ & - P_1KD - D^T K^T P_1 = -PBB^T P. \end{aligned}$$

Сложим это уравнение с уравнением (Д.6.9) и тогда

$$(P_1 + P)A + A^T(P_1 + P) + \gamma^{-2}(P_1 + P)\Psi\Psi^T(P_1 + P) + \gamma^{-2}P_1KK^TP_1 - \\ - P_1KD - D^TK^TP_1 = -N^TN.$$

Это уравнение можно представить в виде

$$(P_1 + P)A + A^T(P_1 + P) + \gamma^{-2}(P_1 + P)\Psi\Psi^T(P_1 + P) - \gamma^2D^TD + \\ + (\gamma D^T - \gamma^{-1}P_1K) - (\gamma D - \gamma^{-1}K^TP_1) = -N^TN. \quad (\text{Д.6.22})$$

Примем матрицу коэффициентов наблюдателя такой, что

$$P_1K = \gamma^2D. \quad (\text{Д.6.23})$$

Умножим (Д.6.22) справа и слева на $(P_1 + P)$ и получим уравнение

$$A(P_1 + P)^{-1} + (P_1 + P)^{-1} - \gamma^2(P_1 + P)^{-1}D^TD(P_1 + P)^{-1} + \Psi\Psi^T\gamma^{-2} = \\ = (P_1 + P)^{-1}N^TN(P_1 + P)^{-1}. \quad (\text{Д.6.24})$$

Введем матрицу

$$Y = \gamma^2(P_1 + P)^{-1}. \quad (\text{Д.6.25})$$

Подставляя в (Д.6.24) $(P_1 + P)^{-1} = Y\gamma^{-2}$ и умножая результат на γ^2 получим, полагая $Y = P_e$ уравнение (5.2.10).

Найдем теперь условия, при которых матрица P_1 является положительно определенной.

Запишем (Д.6.25) как $Y(P + P_1) = E\gamma^2$, откуда $P_1 = \gamma^2Y^{-1} - P$.

Из условия $\gamma^2Y^{-1} - P > 0$, следует неравенство $PY < E\gamma^2$, которое с точностью до обозначения $Y = P_e$, эквивалентно условию (5.2.10).

Доказательство 7

Вывод алгоритма настройки параметров регулятора

Опишем вначале объект управления с адаптивным регулятором. Не теряя общности изложения, запишем уравнение объекта, имеющую передаточную функцию (??) в виде

$$\dot{\check{\mathbf{x}}} = \check{A}\check{\mathbf{x}} + \check{\mathbf{b}}u; \quad y = \check{\mathbf{d}}\check{\mathbf{x}}, \quad (\text{Д.7.1})$$

где

$$\check{A} = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ E_{n-1} \\ -\mathbf{a} \end{array} \right\|; \quad \check{\mathbf{b}} = \left\| \begin{array}{c} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-1} \\ \tilde{b}_n \end{array} \right\|; \quad \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{d}} = \left\| \begin{array}{cccc} 1, & 0, & \dots, & 0 \end{array} \right\|; \\ \tilde{\mathbf{a}} = \left\| \begin{array}{cccc} a_0, & a_1, & \dots & a_{n-1} \end{array} \right\|. \end{array} \quad (\text{Д.7.2})$$

Теперь объединим уравнения (Д.7.1), (7.2.2), (7.2.10):

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{\check{\mathbf{x}}} \\ \dot{\mathbf{v}}^{(1)} \\ \dot{\mathbf{v}}^{(2)} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \check{A} & 0 & 0 \\ \check{\mathbf{b}}\check{\mathbf{d}} & F & 0 \\ 0 & 0 & F \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \check{\mathbf{x}} \\ \mathbf{v}^{(1)} \\ \mathbf{v}^{(2)} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} \check{\mathbf{b}} \\ 0 \\ \check{\mathbf{b}} \end{array} \right\| \left\| \beta' \quad \delta \right\|. \quad (\text{Д.7.3})$$

$$y = \check{\mathbf{d}}\check{\mathbf{x}}.$$

Полагая

$$\beta(t) = \beta^* + \varphi(t), \quad (\text{Д.7.4})$$

где β^* – некоторый постоянный вектор, запишем (Д.7.3) и (Д.7.4) как

$$\dot{\mathbf{x}}_c = A_c \mathbf{x}_c + \mathbf{b}_c [\beta_n^* g + \varphi'(t)\delta]; \quad y = \mathbf{d}_c \mathbf{x}_c, \quad (\text{Д.7.5})$$

где

$$\mathbf{x}'_c = \left\| \check{\mathbf{x}}' \mathbf{v}^{(1)'} , \mathbf{v}^{(2)'} \right\| ;$$

$$A_c = \left\| \begin{array}{ccc} \check{A} + \beta_0^* \check{\mathbf{b}}\check{\mathbf{d}} & \check{\mathbf{b}}\beta^{(1)*'} & \check{\mathbf{b}}\beta^{(2)*'} \\ \check{\mathbf{b}}\check{\mathbf{d}} & F & 0 \\ \beta_0^* \check{\mathbf{b}}\check{\mathbf{d}} & \check{\mathbf{b}}\beta^{(1)*'} & F + \check{\mathbf{b}}\beta^{(2)*'} \end{array} \right\| ; \quad \mathbf{b}_c = \left\| \begin{array}{c} \check{\mathbf{b}} \\ 0 \\ \check{\mathbf{b}} \end{array} \right\|. \quad (\text{Д.7.6})$$

Если $\varphi(t) \equiv 0$, $\beta = \beta^*$, то (Д.7.3) может быть использовано для написания эталонной модели. Действительно, пусть \mathbf{x}_{mc} – вектор состояния неминимального представления модели,

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{mc}} = A_c \mathbf{x}_{\text{mc}} + \mathbf{b}_c \beta_n^* g; \quad y_{\text{m}} = \mathbf{d}_c \mathbf{x}_{\text{mc}}, \quad (\text{Д.7.7})$$

$$\mathbf{x}'_{\text{mc}} = \left\| \mathbf{x}'_{\text{m}}, \mathbf{v}_{\text{m}}^{(1)'}, \mathbf{v}_{\text{m}}^{(2)'} \right\| ; \quad \tilde{\mathbf{d}}_c = \left\| 1, \quad 0, \quad \dots, \quad 0 \right\|.$$

Естественно, поскольку матрица A и вектор \mathbf{b} неизвестны, эталонная модель не может быть реализована в виде (Д.7.7), однако для последующего изложения достаточно установленного ранее факта существования вектора β^* , при котором передаточная функция, связывающая переменные $y(s)$, $g(s)$ уравнений (Д.7.7) совпадает с $\frac{k\beta_n^*}{k_{\text{m}}} w_{\text{m}}(s)$.

Вычитая из (Д.7.5) уравнение (Д.7.7), получим уравнения

$$\dot{\mathbf{e}} = A_c \mathbf{e} + \mathbf{b}_c [\varphi'(t)\delta]; \quad e = \mathbf{d}_c \mathbf{e}, \quad (\text{Д.7.8})$$

где

$$\tilde{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{x}_c(t) - \mathbf{x}_{\text{mc}}(t).$$

Переходя непосредственно к доказательству утверждения 7.2.2, найдем вектор $\varphi(t)$, при котором выполняется целевое условие $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$. Для этого используем функцию Ляпунова

$$v = \tilde{e}' \tilde{P} e + \varphi' \Gamma \varphi > 0, \quad (\text{Д.7.9})$$

где P – положительно-определенная матрица размеров $(3n-2)(3n-2)$, являющаяся решением матричного уравнения Ляпунова

$$A_c' P + P A_c = -Q, \quad (\text{Д.7.10})$$

в котором Q – некоторая положительно-определенная матрица. Полная производная функции (Д.7.9) в силу уравнения (Д.7.8) имеет вид

$$\begin{aligned} v &= (A_c \tilde{e} + b_c \varphi' \delta)' + P \tilde{e} + \tilde{e}' P (A_c \tilde{e} + b_c \varphi' \delta) + \dot{\varphi}' \Gamma \varphi + \varphi' \Gamma \dot{\varphi} = \\ &= -\tilde{e}' Q \tilde{e} + (\delta' b_c' P \tilde{e} + \dot{\varphi}' \Gamma) \varphi + \varphi' (\tilde{e}' P b_c \delta + \Gamma \dot{\varphi}). \end{aligned} \quad (\text{Д.7.11})$$

Если существует матрица Q , такая, что решение уравнения (Д.7.10) удовлетворяет условию

$$P b_c = d_c', \quad (\text{Д.7.12})$$

то, полагая

$$\dot{\varphi} = -\Gamma^{-1} \tilde{e}' d_c' \delta = -\Gamma^{-1} \delta e \quad (\text{Д.7.13})$$

получим, что

$$\dot{v} = -\tilde{e}' Q \tilde{e} \leq 0. \quad (\text{Д.7.14})$$

Для доказательства существования такой матрицы Q используем лемму [6.5], в соответствии с которой искомая матрица существует, если передаточная функция

$$w(s) = d_c (E s - A_c)^{-1} b_c = \frac{k}{k_m} w_m(s)$$

является строго пассивной.

Поскольку $w_m(s)$ – строго пассивна по построению, то из неравенства (Д.7.9), (Д.7.14) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$. Неравенство (Д.7.14) выполняется, если $\varphi(t)$ определено уравнением (Д.7.13), которое при учете $\varphi(t) = \beta(t) + \beta^*$ совпадает с алгоритмом настройки (7.2.16).

Доказательство 8

Вывод алгоритмов настройки регулятора

Представим управление (7.2.25) с учетом обозначения (7.2.27) уравнением в виде

$$u = \beta^{*'} \delta + \varphi'(t) \delta + \dot{\varphi}' \zeta = \beta^{*'} \delta + \varphi'(\dot{\zeta} + \eta_0 \zeta) + \dot{\varphi}' \zeta = \beta^{*'} \delta + (s + \eta_0) \varphi' \zeta. \quad (\text{Д.8.1})$$

Полностью повторяя доказательство утверждения 7.2.2 при условии, что u определяется выражением (Д.8.1), получим

$$\dot{\mathbf{e}} = A_c \tilde{\mathbf{e}} + b_c [(s + \eta_0) \varphi' \zeta], \quad e = \mathbf{d}_c \tilde{\mathbf{e}}. \quad (\text{Д.8.2})$$

Эти уравнения можно представить как

$$\dot{\mathbf{e}} = A_c \tilde{\mathbf{e}} + b_c \varphi' \zeta, \quad e = \mathbf{d}_c \tilde{\mathbf{e}}, \quad (\text{Д.8.3})$$

где $\left[\mathbf{d}_c [Es - A_c]^{-1} \mathbf{b}_c \right] (s + \eta_0) = \frac{k}{k_M} w_M(s + \eta_0)$ — строго пассивная передаточная функция.

Используя функцию Ляпунова (Д.7.9), заключаем, как и ранее, что алгоритм (7.2.28) обеспечивает выполнение целевого условия $\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0$.

Глава References

К предисловию, введению и главе 1

- [1.1] Олейников В.А., Зотов Н.С., Пришвин А. М. Основы оптимального и экстремального управления. М.,Высш.шк., 1969. 296 с.
- [1.2] Куропаткин П.В. Оптимальные и адаптивные системы. М.,Высш.шк., 1980. 288 с.
- [1.3] Петров Ю.П. Оптимальное управление электроприводами. М.,Энергия, 1961. 187 с.
- [1.4] Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.Физматгиз, 1963, 1966.
- [1.5] Чураков Е.П. Оптимальные и адаптивные системы. М.,Энергоатомиздат, 1987. 256 с.
- [1.6] Справочник по теории автоматического управления /Под ред. А.А.Красовского. М.,Наука, 1987. 712 с.
- [1.7] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Д. Математическая теория конструирования систем управления. М. Высш. школа, 1989, 488с.
- [1.8] Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. М. Высш. школа, 1989, 263с.
- [1.9] Пупков К.А., Фалдин Н.В., Егупов Н.Д. Методы синтеза оптимальных систем автоматического управления. М. Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000.
- [1.10] Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления. /Под ред. Н.Д.Егупова. М. Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002.

К главе 2

- [2.1] Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. М.,Физматгиз. 1969. 512 с.
- [2.2] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.,Наука, 1979. 430 с.
- [2.3] Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М.,Наука, 1981. 336 с.
- [2.4] Крутько П.Д. Вариационные методы синтеза систем с цифровыми регуляторами. М.,Энергия, 1967. 440 с.

- [2.5] *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.,Наука, 1977. 480 с.
- [2.6] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.,Наука, 1968. 476 с. 2.7.
- [2.7] Математическая теория оптимальных процессов. /*Понтрягин Л.С.* и др. М.,Наука, 1961. 392 с.
- [2.8] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.,Наука, 1980. 518с.
- [2.9] *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.,Наука, 1978. 487 с.
- [2.10] *Бахвалов Н.С.* Численные методы. Ч.1. М.,Наука, 1973. 663 с.
- [2.11] *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.,Наука, 1978. 512 с.
- [2.12] *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.,Наука, 1975. 528 с.
- [2.13] *Черноузько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. М ,Наука, 1973. 238 с.
- [2.14] *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.,Наука, 1973. 446 с.
- [2.15] *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.,Наука, 1965. 376 с.
- [2.16] *Лейтман Д.* Методы оптимизации с приложением к космическим летательным аппаратам: Пер. с англ. М.,ИЛ, 1965. 538 с.
- [2.17] *Чистов В.П., Бондаренко В.И., Святославский В.А.* Оптимальное управление электрическими приводами постоянного тока. М.,Энергия, 1968. 232 с.
- [2.18] *Бутковский А.Г., Черкашин А.Ю.* Оптимальное управление электромеханическими устройствами постоянного тока. М.,Энергия, 1972. 109 с.
- [2.19] *Охоцимский Д.Е.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском ракет. //Прикладная математика и механика. 1946. Т. 10. Вып. 2.
- [2.20] *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.,ИЛ, 1960. 400 с.
- [2.21] *Розоноэр Л.И.* Принцип максимума Л. С.Понтрягина в теории оптимальных систем. //Автоматика и телемеханика. 1959. Т. 20. 10, с.1320- 1334; 11, с. 1441-1458; 12, с. 1561-1578.

- [2.22] *Кротов В.Ф.* Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума I и II. //Автоматика и телемеханика-1962. Т. 13. 12 1963. Т.14. 5.
- [2.23] *Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.,Наука, 1969. 288 с.
- [2.24] *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.,Наука, 1973. 446 с
- [2.25] *Хрусталеv М.М.* Необходимые и достаточные условия оптимальности в форме уравнения Беллмана. //Докл. АН СССР. Т. 242. 5.
- [2.26] *Субботин А.И., Субботина Н.Н.* К вопросу обоснования метода динамического программирования в задаче оптимального управления. //Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. 2. с. 24-32.
- [2.27] *Марьяновский Д.И., Свечарник Д.В.* Патент 77023, заявка 181007 от 25 февраля 1935 г.
- [2.28] *Фельдбаум А.А.* Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования //Автоматика и телемеханика. 1953. 6. с. 712-728.
- [2.29] *Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Понтрягин Л.С.* К теории оптимальных процессов. //Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. 1. с. 7-10.
- [2.30] *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М., 1966. 308 с.
- [2.31] *Павлов А.А.* Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. М.,Наука, 1966. 390 с.
- [2.32] *Олейников В.А.* Оптимальное управление технологическими процессами в нефтяной и газовой промышленности. Л.,Энергия, 1982. 216 с.
- [2.33] *Клюев А.С., Колесников А.А.* Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.,Энергия, 1982. 238 с.

К главе 3

- [3.1] *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов I-IV //Автоматика и телемеханика. 1960. 4. с. 436-441; 5. с.561-568; 6. с.661-665; 1961. 4. с.425-435.
- [3.2] *Лурье А.И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.,Физматгиз, 1951. 216 с.
- [3.3] *Ишлинский А.Ю.* Механика специальных гироскопических систем. М.,Наука, 1963. 482 с.

- [3.4] *Ривкин С.С.* Теория гироскопических устройств. Л. Судостроение, 1962. Ч.І; 1964. Ч.ІІ. 548 с.
- [3.5] *Решин Ю.М., Третьяков В.Е.* Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих установках. //Автоматика и телемеханика. 1963. Т. 24. 6.
- [3.6] *Уонем У.М.* Линейные многомерные системы управления. М.Мир, 1980, 376с.
- [3.7] *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.Мир, 1977. 650 с.
- [3.8] *Красовский А.А.* Интегральные оценки моментов и синтез линейных систем. //Автоматика и телемеханика. 1967. 10.
- [3.9] *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.,Наука, 1973. 558 с.
- [3.10] *Альбрехт Э.Г.* Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. //Прикладная математика и механика. 1961. Вып. 5.
- [3.11] *Гункель Т.Л., Франклин Ж.Ф.* Общее решение для линейных дискретных систем управления. //Труды американского общества инженеров -механиков. Техническая механика. 1963. Т. 85. 12.
- [3.12] *Салуквадзе М.Е.* Об аналитическом конструировании оптимального регулятора при постоянно действующих возмущениях. //Автоматика и телемеханика. 1962. 6.
- [3.13] *Летов А.М.* Динамика полета и управления. М.Наука, 1969. 360 с.
- [3.14] *Александров А.Г.* Степень грубости системы с устройствами восстановления фазовых переменных // Межвузовский научный сборник "Аналитические методы синтеза регуляторов", вып. 2, Саратов, СПИ, 1977, стр. 105 - 118.
- [3.15] *Doyle J.C., Stein G.* Robustness with observers //IEEE Trans. Autom. Control. 1979. V. 24. No. 1. P. 607-611.
- [3.16] *Lehtomaki N.A., Sandell N.R., Athans M.* Robustness results in Linear-Quadratic Gaussian based multivariable control designs //IEEE Trans. Autom. Control. 1981. V. 26. No. 1. P. 75-92.
- [3.17] *Калман Р.Е.* Когда линейная система управления является оптимальной.//Тр.Амер.общества инж.-мех.,сер. Д,№1, (пер. с англ.).Мир,1964.
- [3.18] *Александров А.Г.* Частотные свойства оптимальных линейных систем управления. //Автоматика и телемеханика, 1969, N9.

- [3.19] *Anderson B.D.O., Moor J.B.* Linear system optimisation with prescribed degree of stability. // Proc. Inst. Eng., 1969, 116, N2.
- [3.20] *Александров А.Г., Небалуев Н.А.* Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества, ч.1. "Автом. и телемех." N12, 1971, стр. 12 - 20.
- [3.21] *Safonov M.G., Athans M* Gain and phase margin for multi-loop LQG regulators. // IEEE Trans. Automat. Control, 1977, vl. Ac-22, N2, pp.173-179.
- [3.22] *Тимофеев Ю.К.* Статические ошибки аналитически сконструированных систем. // Межвузовский научный сборник "Аналитические методы синтеза регуляторов", вып. 1, Саратов, СПИ, 1976, стр.53-60.
- [3.23] *Александров А.Г., В.Н. Честнов* Синтез многомерных систем заданной точности, I. Применение процедур LQ - оптимизации. "Автом. и телемех." N7, 1998, стр.83-95.
- [3.24] *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. М., 1986. 272 с.
- [3.25] *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М., 1976. 184 с.
- [3.26] *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976. 424 с.
- [3.27] *Kalman R.E.* Contributions to the Theory of Optimal Control // Bullet Soc. Mat. Mech. 1960. Vol. 5, No 1. p.102- 119.

К главе 4

- [4.1] *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1987.
- [4.2] *Медич Дж.* Статически оптимальные оценки и управление. М., 1973. 440 с.
- [4.3] *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М., 1976. 496 с.
- [4.4] *Колмогоров А. Н.* Интерполяция и экстраполяция стационарных случайных последовательностей. // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1941. Т.5. 1.
- [4.5] *Winer N.* The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. N.Y. Wiley, 1949.
- [4.6] *Kalman R.E., Busy R.* New Results in Linear Filtering And prediction Theory. J. Basis Eng. Trans ASME, Vol. 83, D 1961, p.95- 108.

К главе 5

- [5.1] *Zames G.* Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses// IEEE Trans. Autom. Control. 1981. V. 26. 2. P. 301—320.
- [5.2] *Francis B.A.* A course in H_∞ control theory. New York: Springer-Verlag, 1987.
- [5.3] *Поздняк А.С., Серебряков Г.Г., Семенов А.В., Федосов Е.А.* H_∞ теория управления: феномен, достижения, перспективы, открытые проблемы. М. ГосНИИАС, 1990.
- [5.4] *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem// IEEE Trans. Autom. Contr. 1989. V.34. 8. P. 831—846.
- [5.5] *Барабанов А.Е., Первозванский А.А.* Оптимизация по равномерно-частотным показателям (H -теория) // Автоматика и телемеханика. 1992. 9. С. 3—32.
- [5.6] *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М. Наука, 2002.
- [5.7] *Александров А.Г., Честнов В.Н.* Синтез многомерных систем заданной точности II. Применение процедур H_∞ – оптимизации. // Автоматика и телемеханика. 1998. 8. С. 124—138.
- [5.8] *Честнов В.Н.* Синтез регуляторов многомерных систем по заданному радиусу запасов устойчивости на базе процедуры H_∞ – оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1999. 7. С. 101—109.
- [5.9] *Shaked U.* A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: H_∞ –optimal linear control and filtering// IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. 11. P. 1264—1271.
- [5.10] *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 1994. V. 4. P. 421—448.
- [5.11] *Veillette R.J., Medanic J.V. and Perkins W.R.* Robust Control of uncertain systems by decentralised control// Preprints 11 IFAC World Congress, Tallinn, Estonia, USSR, 1990. V. 5. P. 116 – 121.

К главе 6

- [6.1] *Мееров В.М.* Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М., 1959. 284 с.
- [6.2] *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М., 1967. 336 с.
- [6.3] *Кухтенко А.И.* Проблема инвариантности в автоматике. Киев, 1963. 376 с.

- [6.4] Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. / *Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н.* и др. М., 1972. 260 с.
- [6.5] *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М., 1981. 448 с.
- [6.6] *Саридис Дж.* Самоорганизующиеся стохастические системы управления. М., 1980. 400 с.
- [6.7] *Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С.* Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М., 1977. 272 с.
- [6.8] *Растрюгин Л.А.* Системы экстремального управления. М., 1974. 630 с.
- [6.9] *Изерман Р.* Цифровые системы управления. М., 1984. 541 с.
- [6.10] *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М., 1981. 246 с.
- [6.11] *Цыпкин Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М., 1968. 460 с.
- [6.12] *Фельдбаум А.А.* Теория дуального управления I - IV. //Автоматика и телемеханика. 1960. 9, 11; 1961. 1, 2.
- [6.13] *Красовский А.А.* Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. М., Наука, 1963. 468 с.
- [6.14] *Земляков С.Д.* Принципы построения и методы исследования адаптивных САУ. М., 1978. 113 с.
- [6.15] *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. М., 1975. 684 с.
- [6.16] Современные методы идентификации систем. /Под ред. *П.М Эйкхоффа*. 1983. 400 с.

К главе 7

- [7.1] *Нарендра К.С., Валавани Л.С.* Устойчивые адаптивные наблюдения и управления: Пер. с англ. //ТИИЭР. 1976. Т. 64. 8.
- [7.2] *Земляков С.Д., Рутковский В.Ю.* Обобщенные алгоритмы адаптации одного класса беспойсковых самонастраивающихся систем с моделью. //Автоматика и телемеханика. 1967. 6. с 88-94.
- [7.3] *Narendra K.S., Valavani L.S.* Stable Adaptive Controller Desing- Direct Controll. IEEE Trans. of Automat. Control, 1979. Vol. AC- 23, No 4.
- [7.4] *Ichikawa K.* Principle of Luders Narendra's Adaptive Observer. – Int. Jorn. Control, 1980, Vol 31, No 2, p.351 - 365.

- [7.5] *Parks P.S.* Lyapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control System. – IEEE Autom. Control, 1966, Vol. AC- 11, No 3, p.362 - 367.
- [7.6] *Narendra K.C., Annaswamy F.M.* Robust Adaptive Control in the presence of Bounded Disturbance. //IEEE Autom. Control, 1986, vol AC-31, No4.
- [7.7] *Андерсон Б. и др.* Устойчивость адаптивных систем. М. Мир. 1989. 263 с.
- [7.8] *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах. М. Наука. 1990. 296 с.

К главе 8

- [8.1] *Саварачи Е., Созда Т., Накамизо Т.* "Классические методы и оценивание временных рядов". //Современные методы идентификации систем. /Под ред. П.Эйкхоффа. М., 1983. 400 с.
- [8.2] *Л.Льюнг* Идентификация систем. Теория для пользователя. М. Наука, 1991.
- [8.3] *Грон Д.* Методы идентификации систем. М., 1979. 302 с.
- [8.4] *Спиди К., Браун Р., Гудвин Дж.* Теория управления (идентификация и оптимальное управление). М., 1973. 248 с.
- [8.5] *Кашьян Р.Л., Рао А.Р.* Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. М., 1983. 384 с.
- [8.6] *Фомин В.Н.* Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М., 1984. 286 с.
- [8.7] *Цыпкин Я.Э.* Основы информационной теории идентификации. М., 1984. 320 с.
- [8.8] *Кардашов А.А., Корнюшин Л.В.* Определение параметров системы по экспериментальным (заданным) частотным характеристикам. //Автоматика и телемеханика. 1958. 4. с 334-345.
- [8-9] *Levi E.C.* Complex curve fitting. IRE Trans. Autom. Control, vol. AC-4, May, 1959, pp. 37-44.
- [8-10] *Pintelon R., P. Guillaume, Y. Rolain, J. Schoukens* Parametric Identification of Transfer Functions in the frequency domain-A survey. IEEE Trans. on Autom. Contr., 1994, vol. 39, N11.
- [8-11] *Александров А.Г.* Адаптивное управление на основе идентификации частотных характеристик. Известия РАН. "Теория и системы управления" 2, 1995, стр. 63 - 71.
- [8-12] *Александров А.Г.* Конечно-частотная идентификация: определение границ испытательных частот. //Автоматика и телемеханика. 2001. №11. С. 3-14.

К главе 9

- [9.1] *Фомин В.Н.* Синтез адаптивного регулятора в случае независимых аддитивных помех. //Синтез регуляторов в некоторых задачах адаптивного управления. Деп. в ВИНТИ, 1977. 1411- 77. с. 51-57.

К главе 10

- [10.1] *Якубович В.А.* Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств. //Докл. АН СССР. 1966. Т.6. с. 1308-1311.
- [10.2] *Якубович В.А.* К теории адаптивных систем. //Докл. АН СССР. 1968. Т.182. 3. с. 518-521.
- [10.3] *Александров А.Г.* Частотное адаптивное управление устойчивым объектом при неизвестном ограниченном возмущении. "Автоматика и телемеханика", РАН, 4, 2000, стр. 106 - 116.

К практикуму

- [пр.1] Диалоговая система проектирования систем автоматического управления ДИСПАС, версия 2. М. МАИ, 1981
- [пр.2] *Андреевский Б.Р., Дерезицкий Д.Р., Спиридонов А.А., Уткин В.И., Фрадков А.Л.* "Принципы построения и входной язык САПР адаптивных систем управления" Вопросы кибернетики. Актуальные задачи адаптивного управления, М. Научный совет АН СССР по комплексной проблематике "Кибернетика", 1982, с. 31-49
- [пр.3] *Дорри М.Х., Климачев С.Н.* "Некоторые проблемы автоматизации проектирования структур систем управления непрерывными объектами" АИТ N3, 1982, с. 10-18
- [пр.4] *Александров А.Г., Небалуев Н.А., Асмолова Л.Я., Крупенина Л.Я.* Математическое обеспечение синтеза и анализа передаточных матриц регуляторов многомерных линейных систем автоматического регулирования. Комплексы программ ГАММА-1, ГАММА-2 для ЭВМ типа М-220, Учебное пособие. Саратов. политех. институт, 1975
- [пр.5] *Александров А.А., Марков А.А., Степанов М.Ф.* Диалоговый пакет прикладных программ "ГАММА-1М" для синтеза и анализа линейных многомерных систем управления по заданной точности и качеству. Межвузовский научный сб. "Аналитические методы синтеза регуляторов", Саратов, СПИ, 1982
- [пр.6] *Александров А.Г., Панин С.Ю.* Система ГАММА-1РС. Руководство пользователя. МИСиС, 1997
- [пр.7] Автоматизированное проектирование систем управления (под. Ред. М. Джамшиди и Ч.Дж. Хергета), М. Машиностроение, 1989

- [пр.8] *Moler, C.* MATLAB - user's Guide', Department of Computer Science, University of New Mexico, Albuquerque, USA, 1980
- [пр.9] MATLAB User's Guide, MathWorks, 2001
- [пр.10] *Александров А.Г., Орлов Ю.Ф.* "Пакет программ АДАПЛАБ: новые возможности для идентификации" Труды международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'2000, М. ИПУ РАН с. 123-131, 2000 (CD-ROM ISBN 5-201-09605-0)
- [пр.11] *Дьяконов В* MATLAB:учебный курс.С.-П.,ПИТЕР,2001.
- [пр.12] *Дьяконов В.,Круглов В.* MATLAB анализ,идентификация и моделирование систем.С.-П.,ПИТЕР,2002.
- [пр.13] *Медведев В.С.,Потемкин В.Г.*Control System Toolbox.MATLAB 5 для студентов.М.ДИАЛОГ-МИФИ,1999.