

А. И. Рубан

АДАПТИВНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ С
ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ





А. И. Рубан

АДАПТИВНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ
С ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ



ИЗДАТЕЛЬСТВО ТОМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Томск — 1983

УДК 62—50 : 681.513.6

Рубан А. И. Адаптивное управление с идентификацией. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983. — 6,3 л. с ил. — 90 к. 500 экз. 1502000000.

В монографии излагается новый перспективный метод синтеза алгоритмов работы адаптивных динамических нелинейных детерминированных и стохастических систем управления. Требуемые свойства системы введены в заданную траекторию движения и цель управления состоит в обеспечении наилучшего приближения координат системы к заданной траектории. Задача управления решается как задача идентификации и динамических систем. При неизвестных параметрах объекта в контур управления вводится идентификатор. Оценивается ошибка работы системы.

Для специалистов, занимающихся проектированием и внедрением автоматических и автоматизированных систем управления, научных работников, занимающихся теорией управления, а также аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Рецензент — канд. техн. наук В. С. Фофонов

Редактор — доктор техн. наук В. П. Тарабенко.

P 1502000000
177 (012)-83 57-83

(C) Издательство Томского университета, 1983 г.

Введение

ЧТО ТАКОЕ АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ИДЕНТИФИКАТОРОМ

При проектировании математического обеспечения конкретной автоматической или автоматизированной системы управления технологическим процессом (АСУ ТП) возникает две больших проблемы. Первая заключается в выборе и реализации сравнительно простого метода синтеза алгоритмов управления с обратной связью. Алгоритмы должны иметь минимальную сложность реализации их на управляющих вычислительных машинах (УВМ) и должны обеспечивать достаточно эффективное (например, по точностным показателям) управление объектами в реальном масштабе времени. Вторая проблема состоит в выборе и реализации в УВМ эффективных алгоритмов перестройки структуры и параметров модели объекта, т. е. алгоритмов идентификации. Объединение в одной системе управления с обратной связью и процесса идентификации возродило новый класс систем управления, названный адаптивными системами с идентификаторами (АСИ) [14]. Включение идентификатора в цепь обратной связи приводит к тому, что идентификация происходит в реальном масштабе времени в темпе с процессом управления объектом.

Реализация АСИ [14] позволяет осуществлять достаточно эффективное управление малоизученными объектами, для которых не были известны ни структура, ни параметры их моделей. Например, реализация АСИ на одном прокатном стане Первоуральского новотрубного завода [1] обеспечила экономический эффект в 700 тыс. рублей в год только за счет экономии металла. Для данного объекта использованы простейшие линейные статические модели, одношаговые адаптивные алгоритмы идентификации и простейшие алгоритмы

управления. Исследование АСИ для данного объекта показало, что исключение из контура системы управления блока идентификации делает систему полностью неработоспособной.

В процессе реализации АСИ выяснилось также, что одни и те же алгоритмы работы АСИ можно применять для широкого спектра объектов различной природы. Это обстоятельство позволяет ставить задачу автоматизированного проектирования математического обеспечения АСИ. Существенное влияние на этот процесс оказывают методы синтеза алгоритмов управления с обратной связью и алгоритмов идентификации.

В предлагаемой вашему вниманию монографии излагается новый, развивающийся в настоящее время, достаточно простой метод синтеза управлений с обратной связью. Управляющие воздействия отыскиваются по той же схеме, по которой решаются задачи идентификации. Этот путь позволил существенно упростить процесс поиска структуры и параметров управления, упростить саму структуру управляющих устройств и добиться единообразия процессов идентификации и управления в АСИ.

Кратко остановимся на общей схеме синтеза алгоритмов адаптивного управления в АСИ. Рассматриваем дискретную управляемую систему

$$x(t+1) = F(x(t), a, t) + H(u(t), a, t) + \Psi(a, t) + h(t). \\ t \geq 0, x(0) = x_0, \quad (1)$$

где x — n -мерный вектор координат состояния; u — вектор управляющих воздействий; $F(\cdot)$, $H(\cdot)$, $\Psi(\cdot)$ — известные вектор-функции; a — вектор неизвестных параметров объекта; h — случайная помеха. Цель управления объектом состоит в максимально возможном (в пределах имеющейся информации об объекте и об ограничениях на управления) приближении выходной координаты объекта $x(t)$ к желаемой траектории $x^*(t)$ в каждый момент времени t . В идеале это требование состоит в обеспечении равенства $x(t+1) = x^*(t+1)$, $t \geq 0$.

Расчет оценок $a(t)$ вектора параметров a производит идентификатор на основе информации (выборки входов и выходов объекта), поступившей к моменту времени t :

$x(t); x(t-1), u(t-1); x(t-2), u(t-2); \dots$. Модель объекта управления задаем в виде

$$\begin{aligned} y(\kappa) &= F(x(\kappa-1), a(t), \kappa-1) + \\ &+ H(u(\kappa-1), a(t), \kappa-1) + \Psi(a(t), \kappa-1). \end{aligned} \quad (2)$$

Её используем при решении задачи идентификации (расчете $a(t)$) для $\kappa = t, t-1, \dots$ и при решении задачи управления для $\kappa = t+1$.

Получим алгоритм работы идентификатора. На невязках $e_0(t) = x(t) - y(t)$ выходов объекта и моделей $E_0(t) = (e_0(t), e_0(t-1), \dots)$ строим функционал с минимумом $I_0(E_0(t))$ и из решения экстремальной задачи

$$I_0(E_0(t)) = \min$$

находим [12] параметры $a(t)$ модели (2). Здесь можно применять известные алгоритмы идентификации [11, 15], причем не обязательно основанные на экстремальной постановке задачи идентификации, как это сделано выше. Достаточно эффективными в вычислительном отношении, как известно, являются алгоритмы идентификации метода последовательной линеаризации [12].

После получения оценок $a(t)$ с учетом свежей информации о входах и выходах объекта ($x(t); x(t-1), u(t-1); x(t-2), u(t-2); \dots$) и с учетом пока неизвестных $u(t)$ строим невязку $e_1(t+1) = y(t+1) - x^*(t+1)$ между выходом модели (2) при $\kappa = t+1$ и назначаемой траекторией $x^*(t+1)$. Управляющее воздействие рассчитываем по критерию минимума экстремальной функции невязки

$$I(e_1(t+1)) = \min \quad (3)$$

с учетом реальных ограничений (например, по амплитуде) на управления. Из (3) получаем

$$\begin{aligned} u(t) &= G(g(t), t), t \geq 0, \\ g(t) &= x^*(t+1) - F(x(t), a(t), t) - \Psi(a(t), t). \end{aligned} \quad (4)$$

Структурная схема системы управления, работающей по описанному выше алгоритму, представлена на рис. 1. Здесь z^{-1} , z — соответственно операторы запаздывания и опережения на один такт по времени.

Оператор G в нелинейном случае (H в модели (2) нелинейно зависит от u) представляет собой предельное

значение некоторых известных итерационных процедур пересчета искомых управлений. Например, если управление $u(t)$ неограничены, $I(e_1) = e_1^T e_1$ (где T — оператор транспонирования вектора) и имеет единственный отно-

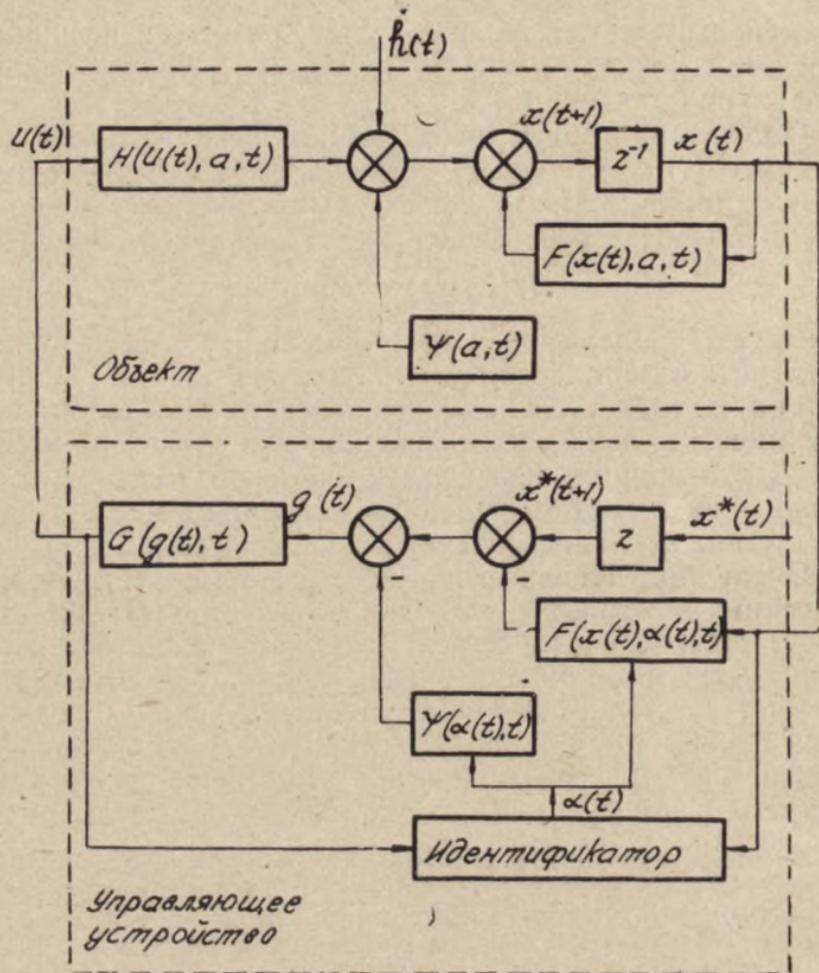


Рис. 1

сительно $u(t)$ минимум, то алгоритм последовательной линеаризации [12]

$$u^{l+1}(t) = u^l(t) + \gamma^l \left[\left(\frac{\partial H(u^l(t), \alpha(t), t)}{\partial u} \right)^T \frac{\partial H}{\partial u} \right]^{-1} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T (x^*(t+1) - F(x(t), \alpha(t), t) - \\ & - H(u^l(t), \alpha(t), t) - \Psi(\alpha(t), t)), \\ & l = 0, 1, 2, \dots, \gamma^l > 0, u^0(t) = u(t-1), \end{aligned}$$

обеспечивает монотонное уменьшение функции качества $I(\cdot)$ на каждой итерации и расчет (при $l \rightarrow \infty$) оператора G . Окончание последовательной перестройки управлений производится после одновременного выполнения условий $I^l - I^{l+1} \leq \varepsilon_1$, $\|u^{l+1}(t) - u^l(t)\| \leq \varepsilon_2$. Здесь $I^l = I$ при $u(t) = u^l(t)$; $\|\cdot\|$ — норма вектора; малые положительные параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ заданы. Нулевое приближение для искомых управлений $u^0(t)$ в момент t целесообразно выбирать равным оптимальному управлению в предыдущий момент времени $u(t-1)$.

Решенная в монографии задача синтеза охватывает важные для практики технические системы управления, например: управление нагревом дуговых сталеплавильных печей, нагревом и охлаждением жидких сред; обеспечение заданных температурных режимов в процессе получения полупроводников; стабилизация температуры, концентрации, тока внутри электролитических ванн гальванопроизводства; максимизация скорости гальванопокрытия; управление техническими объектами с помощью роботов. Во всех указанных примерах уравнение движения содержит недоопределенные параметры, лежащие в известных конечных интервалах. В схему управления встраивается блок идентификации параметров.

Рассмотрим теперь конкретную реализацию описанной выше постановки задачи применительно к стабилизации температуры электроэлемента внутри гальванической ванны. Подогрев ванны осуществляется проходящим по трубе паром, и, следовательно, управляющим воздействием является расход пара. Температура $x(t)$ замеряется в одной из зон ванны с помощью датчика. Необходимо в начале получить уравнение, связывающее температуру с расходом пара.

Процесс теплообмена в гальванование можно описать дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных. При постоянной температуре греющего теплоносителя динамика температуры в любой точке внутри раствора ванны описывается уже

обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с чистым запаздыванием во входном сигнале. Если входной сигнал (расход пара) меняется только в дискретные моменты, а в интервалах между дискретами остается постоянным (этот случай соответствует управлению объектом от цифровой вычислительной машины), то от дифференциального уравнения второго порядка существует однозначный переход к эквивалентному разностному уравнению

$$\begin{aligned} x(t+1) = & a_0 + a_1x(t) + a_2x(t-1) + \\ & + a_3u(t-\tau) + a_4u(t-\tau-1) + h(t), \\ t = & 0, 1, 2, \dots . \end{aligned} \tag{5}$$

Параметры a_i ($i = 0, \overline{4}$) неизвестны. Константа a_0 обусловлена в основном влиянием внешнего теплоносителя — окружающей среды. При идеальном перемешивании электролита величина чистого запаздывания τ входного сигнала равна нулю. Управление $u(t)$ лежит в пределах $[0, u_2]$, где $u_2 > 0$. Нижний уровень соответствует нулевому расходу пара (заслонка полностью закрыта), верхний — максимальному расходу (заслонка на трубопроводе пара полностью открыта). Необходимо найти закон управления, обеспечивающий стабилизацию температуры в ванне на уровне x^* .

Глава 1

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Характерным для современной теории управления является развитие и внедрение теории оптимальных систем управления. Среди многочисленных оптимальных задач применительно к управляемым динамическим системам видное место занимает следующая экстремальная задача: необходимо определить такое управление, которое минимизирует функционал, построенный на траекториях системы. Допустим, движение управляемой системы описывается векторным разностным уравнением

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), t \geq 0, x(0) = x_0. \quad (1.0.1)$$

Здесь x — n -мерный вектор-столбец координат состояния; u — m -мерный вектор-столбец управляющих функций; t —дискретная переменная, принимающая значения 0, 1, 2, ... и имеющая смысл дискретного времени; f — n -мерный вектор-столбец непрерывных и непрерывно дифференцируемых (по x и u) функций. Требуется найти такие управление u , которые переводят систему из точки x_0 в точку $x(t_1) = x_1$ и обеспечивают минимизацию функционала $I(u)$, т. е.

$$I(u) = \sum_{t=0}^{t_1} f_0(x(t), u(t)) = \min, \\ x(0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \quad (1.0.2)$$

Так как часто интервал времени, в течение которого функционирует система, во много раз превышает период свободных движений этой системы, то делают предположение, что $t_1 = \infty$. При этом, если оптимальное управление отыскивается в классе управления с обратной

связью, то оно должно доставлять управляемой системе асимптотическую устойчивость.

Задачи синтеза управлений можно условно разделить на два класса. Для первого из них оптимальное управление ищется как функция времени и начального состояния системы, т. е. в виде оптимального программного управления. Для второго класса оптимальное управление отыскивается в виде функции текущего состояния управляемой системы и времени, т. е. в виде управления с обратной связью. При решении задач первого класса используется принцип максимума Понтрягина, а при решении задач второго класса — принцип Беллмана. Для реальных объектов управления оба вида управлений не являются эквивалентными друг другу. Причиной этому служит реально существующая в системах управления неопределенность. Она имеет место за счет неточного знания характеристик объекта и за счет наличия в системе различных мешающих факторов, не обязательно вероятностной природы. Более узкую область приложения имеют программные управлении, а весьма актуальной является проблема синтеза оптимальных управлений с обратной связью [2, 3, 4, 6, 10]. Именно это обстоятельство побудило автора к написанию данной небольшой книги с изложением в ней новых конструктивных результатов по синтезу управлений с обратной связью. Результаты гл. 1, 2 принадлежат автору, глава 3 написана по результатам работ [5, 8, 9] с некоторыми добавлениями и обобщениями автора.

Внесем в постановку задачи два существенных изменения. Во-первых, вместо минимизации функционала $I(u)$ (конструирование которого является самостоятельной очень сложной задачей) будем требовать обеспечения системой заданного движения, например, движения системы по назначению траектории $x^*(t)$. Тем самым все желаемые свойства замкнутой системы закладываем в $x^*(t)$. Во-вторых, при необходимости процесс решения задачи управления разбиваем на два этапа. На первом этапе отыскиваем обобщенные управляющие силы $\omega(t)$. Например, для системы (1.0.1) ими могут быть правые части уравнения. После их расчета доопределяем управляющие функции $u(t)$, обеспечивающие получения рассчитанных оптимальных обобщенных управляющих сил. Сформулированная таким образом основная зада-

ча теории оптимального управления приобретает качественно новое содержание. По-новому осуществляется синтез систем управления и существенно упрощаются структурные схемы управляющих устройств. Расчет управляющих сил $w(t)$ (так же, как и управляющих функций $u(t)$) проводится в результате решения обратной задачи динамики (эквивалентной по виду задаче идентификации) из условия осуществления движения по предписанной траектории.

Рассмотрим пример. Движение скалярного управляемого объекта подчиняется динамическому разностному уравнению

$$\begin{aligned} x(t+1) &= ax(t) + f(x(t), u(t)), \\ t \geqslant 0, \quad x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (1.0.3)$$

Найдем управляющую функцию $u^*(t)$, при которой движение системы из x_0 осуществляется по траектории $x^*(t)$ ($t > 0$), т. е. выполняется равенство

$$x(t+1) = x^*(t+1), \quad t \geqslant 0. \quad (1.0.4)$$

В (1.0.3) обобщенной силой считаем нелинейную функцию $f(\cdot)$, т. е. $w(t) = f(x(t), u(t))$. Тогда относительно переменных x, w уравнение (1.0.3) становится линейным

$$x(t+1) = ax(t) + w(t), \quad t \geqslant 0, \quad x(0) = x_0 \quad (1.0.5)$$

Подставляем $x(t+1)$ из (1.0.5) в целевое условие (1.0.4) и находим оптимальную обобщенную силу (с обратной связью)

$$w^*(t) = x^*(t+1) - ax(t), \quad t \geqslant 0. \quad (1.0.6)$$

Она связана с заданной траекторией $x^*(t+1)$ и координатой состояния объекта $x(t)$. Затем составляем уравнение для управляющего воздействия $u(t)$

$$f(x(t), u(t)) = w^*(t), \quad t \geqslant 0. \quad (1.0.7)$$

Обобщенное решение этого уравнения записываем в виде функции f^{-1} , обратной к f , т. е.

$$u^*(t) = f^{-1}(x(t), w^*(t)), \quad t \geqslant 0. \quad (1.0.8)$$

Структурная схема системы, работающей по описанному выше алгоритму (1.0.3), (1.0.6), (1.0.8), представлена на рис. 1.0.1. Если желаемая траектория движения системы $x^*(t)$ задана в виде $x^*(t) = x_0 \rho^t$, $t > 0$, $|\rho| < 1$,

то замкнутая система осуществляет движение из точки x_0 к координате $x = 0$ (при $t \rightarrow \infty$). В каждый момент времени t $x(t)$ совпадает с $x^*(t)$.

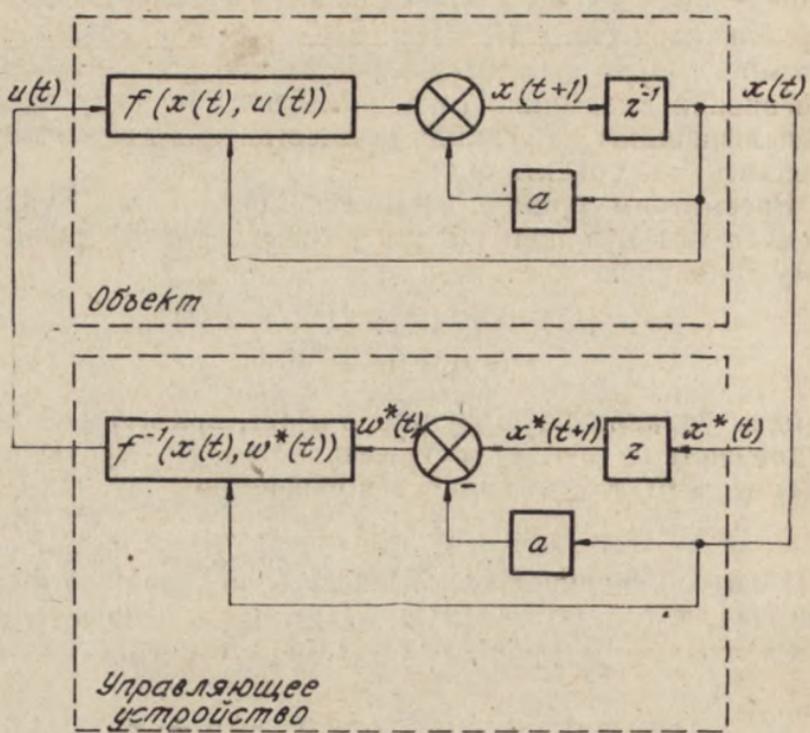


Рис. 1.0.1

§ 1.1. Общий метод синтеза управлений в дискретных системах

Рассматриваем дискретную многомерную систему

$$\begin{aligned} x(t+1) &= F(x(t), t) + H(u(t), t), \\ t &\geq 0, \quad x(0) = x_0. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Считаем вначале, что на управление не наложено ограничений. Его необходимо так выбрать, чтобы система (1.1.1) двигалась по назначеннной траектории $x^*(t)$, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$x(t+1) = x^*(t+1), \quad t \geq 0. \quad (1.1.2)$$

Подстановка $x(t+1)$ из (1.1.1) в целевое равенство (1.1.2) дает уравнение

$$F(x(t), t) + H(u(t), t) = x^*(t+1), \quad t \geq 0, \quad (1.1.3)$$

из которого с учетом существования управления для (1.1.1) следует искомое управление с обратной связью

$$u(t) = H^{-1}(x^*(t+1) - F(x(t), t)), \quad t \geq 0. \quad (1.1.4)$$

Данный метод синтеза управлений обладает свойством симметрии между операциями, переменными и направлением потоков переменных объекта и устройства управления. На рис. 1.1.1 представлена структурная схема

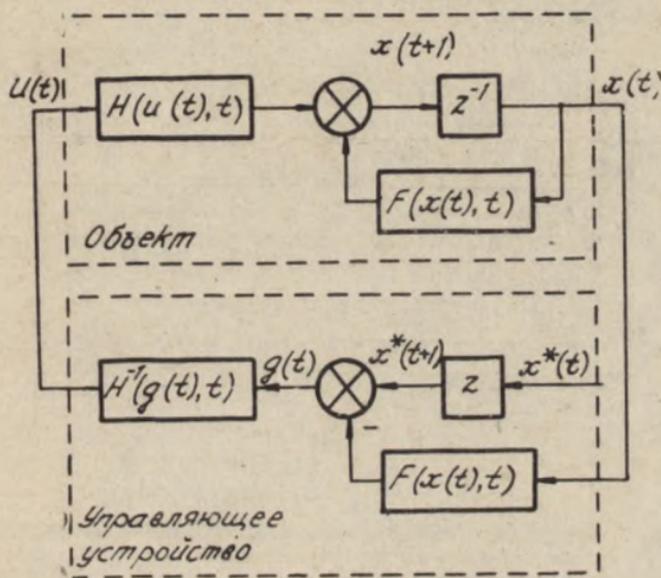


Рис. 1.1.1

ма системы управления объектом (1.1.1) по алгоритму (1.1.4). Здесь z , z^{-1} — операторы упреждения и запаздывания сигналов на один такт во времени. Остальные обозначения очевидны из (1.1.1), (1.1.4). Структура управляющего устройства следует из структуры объекта путем выполнения очевидных из рис. 1.1.1 преобразований. Операция суммирования заменена вычитанием сигнала $F(x(t), t)$, блок задержки — симметричным блоком упреждения, блок прямой операции H — блоком обратной операции H^{-1} . Изменено направление потока

переменных основного канала на противоположное. На вход блока упреждения вместо $x(t)$ подана заданная траектория $x^*(t)$. В результате этих преобразований получена структурная схема управляющего устройства. Если теперь взять за исходную структурную схему устройства управления и выполнить преобразования, симметричные вышеописанным (изменить направление основного потока переменных, блок z заменить на блок z^{-1} , блок вычитания — на блок суммирования, блок H^{-1} — на блок H , переменную $x^*(t)$ — на $x(t)$), то приходим к структурной схеме объекта управления. Данное свойство симметрии оказывает помощь при конструировании управляющих устройств для конкретных линейных и нелинейных объектов управления.

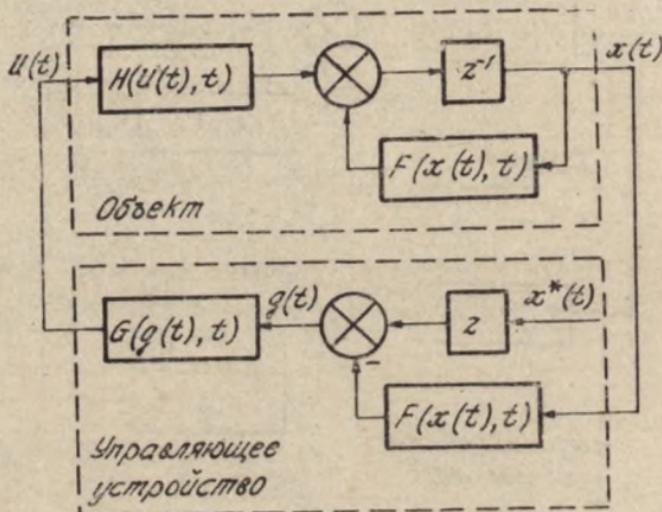


Рис. 1.1.2

Если равенство (1.1.2) в силу объективных причин (например, из-за ограниченности управлений, из-за наличия мешающих факторов и т. д.) в какие-либо моменты времени t не достижимо, то вводим критерий минимума функции невязок

$$I(e(t+1)) = \min, \quad e(t+1) = x(t+1) - x^*(t+1),$$

где $I(\cdot)$ — известная функция с минимумом в точке $e = 0$. Решение этой задачи имеет вид

$$u(t) = G(x^*(t+1) - F(x(t), t), t), \quad t \geq 0. \quad (1.1.5)$$

Оператор G в нелинейном случае представляет собой предельное значение некоторых известных итерационных процедур пересчета искомых управлений, описанных, например, во введении.

После расчета управления (1.1.5) и подстановки его в (1.1.1) получается выход объекта в момент $t + 1$ и соответственно ошибка отслеживания заданной траектории

$$\begin{aligned} e(t+1) &= x(t+1) - x^*(t+1) = \\ &= F(x(t), t) + H(u(t), t) - x^*(t+1). \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Структурная схема, отвечающая алгоритму (1.1.5) управления объектом (1.1.1), представлена на рис. 1.1.2.

Данная схема синтеза управлений сохраняет свою структуру и при рассмотрении стохастических систем с аддитивной помехой в правой части уравнения движения (см. гл. 2).

Наличие в модели объекта неизвестных параметров приводит к дополнительному введению в схему управления идентификатора (см. § 1.2). Данная общая схема кратко рассмотрена во введении монографии.

§ 1.2. Линейные и нелинейные обыкновенные дискретные системы

Схема синтеза алгоритмов управления для линейных систем

Рассматриваем динамический объект, поведение которого определяется дискретным линейным уравнением с заданными начальными условиями

$$\begin{aligned} x(t+1) &= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i) + bu(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \quad x(-1) = x_{-1}, \dots, \quad x(1-n) = x_{1-n}. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Здесь параметры a_i ($i = \overline{0, n}$), b известны. Считаем вначале, что на u не наложено ограничений, а x и u — скалярные переменные.

Форма записи уравнения движения (1.2.1) близка к канонической форме [5] и она включает в себя кано-

ническую форму при $a_0 = 0$ и $b = 1$. Зная параметры уравнения (1.2.1) и переходя к новой переменной $x_1(t) = (x(t) - c)/b$, где $c = (1 - \sum_{i=1}^n a_i)^{-1} a_0$, получаем

относительно $x_1(t)$ уравнение в канонической форме. Если же параметры уравнения движений объекта неизвестны, то их в процессе идентификации необходимо доопределять. За исходное уравнение при этом целесообразно брать уравнение вида (1.2.1), ибо в него входят реально измеряемые вход и выход объекта. Заметим, что в статическом случае (1.2.1) приобретает типичный для идентификации вид $x(t) = a_0 + bu(t-1)$.

Найдем управление, обеспечивающее движение объекта (1.2.1) по заданной траектории x^* , т.е.

$$x(t+1) = x^*(t+1), t \geq 0. \quad (1.2.2)$$

Это условие позволяет на каждом такте рассчитывать управление

$$u(t) = v(t) = b^{-1} (x^*(t+1) - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i)), \\ t \geq 0. \quad (1.2.3)$$

Если для $u(t)$ существует ограничение по амплитуде, то условие (1.2.2) при некоторых t может быть не достигнуто. Потребуем минимального квадратичного рас согласования между выходом объекта x и заданной траекторией x^*

$$I = (x(t+1) - x^*(t+1))^2 = \min, \\ u_1 \leq u(t) \leq u_2, t \geq 0. \quad (1.2.4)$$

Решение имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } v(t) < u_1, \\ v(t), & \text{если } u_1 \leq v(t) \leq u_2, \\ u_2, & \text{если } u_2 < v(t). \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Величина $v(t)$ определена выражением (1.2.3) и обеспечивает нулевое значение (абсолютный минимум) минимизируемой функции. Система при этом в момент $t+1$ находится на заданной траектории. Решение (1.2.5) следует из того, что минимизируемая в (1.2.4) функция относительно $u(t)$ является параболой, выпук-

лой вниз, и минимум параболы достигается в точке $v(t)$.

Схема синтеза не меняется при наличии в уравнении движения более глубокой памяти по u :

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x(t-i) + \sum_{j=1}^m b_j u(t-j) \equiv \\ &\equiv L(a, b, x(t-1), u(t-2)) + b_1 u(t-1), \quad t \geq 1. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

В оптимальном управлении (1.2.5) величина

$$v(t) = b_1^{-1} (x^*(t+1) - L(a, b, x(t), u(t-1))). \quad (1.2.7)$$

Ошибка отслеживания в момент $t+1$ заданной траектории $x^*(t+1)$ вызвана тем, что минимум функции в (1.2.4) не достигается внутри допустимой области для управления $u(t)$, и величина этой ошибки рассчитывается по формуле (для объекта (1.2.1)).

$$e(t+1) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i) + bu(t) - x^*(t+1).$$

Потребуем, чтобы ошибка $x(t) - x^*(t)$ менялась по заданному закону $e^*(t)$. В расчетных формулах (1.2.3) — (1.2.5) следует заменить $x^*(t+1)$ на $x^*(t+1) + e^*(t+1)$. Заметим, что из-за ограниченности управлений желаемая траектория движения системы $x^*(t+1) + e^*(t+1)$ отслеживается с ошибкой, формула расчета которой приведена выше (естественно, с заменой в ней $x^*(t+1)$ на $x^*(t+1) + e^*(t+1)$).

Решим задачу управления, когда характеристики объекта и некоторых воздействий на него неизвестны либо полностью, либо частично. Проследим особенности решения на простейшем примере.

Считаем, что в объекте происходят процессы соответствующие динамическому уравнению

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + u(t) + h(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= u(0) = h(0) = 0. \end{aligned}$$

На вход объекта поступают с регулятора управления $u(t)$ и неизвестные внешние воздействия $h(t)$. С выхода объекта снимается (измеряется) координата $x(t)$,



торая подается на регулятор. Необходимо сконструировать регулятор, обеспечивающий движение объекта $x(t+1)$ по заданной траектории $x^*(t+1)$.

Вводим в регулятор контур идентификации возмущения $h(t)$ объекта. Модель задаем в виде

$$y(t) = x(t-1) + u(t-1) + a(t), \quad t \geq 1,$$

и на основе измерений выхода $x(t)$, $x(t-1)$ и известного управления $u(t-1)$ доопределяем параметр $a(t)$ из условия совпадения выхода модели $y(t)$ с выходом объекта $x(t)$:

$$a(t) = x(t) - x(t-1) - u(t-1), \quad t \geq 1.$$

Параметр $a(t)$ служит оценкой неизвестного возмущения $h(t)$ для момента времени t . Далее рассчитываем прогноз выхода объекта для момента

$$y_1(t+1) = x(t) + u(t) + a(t)$$

и из критерия

$$(y_1(t+1) - x^*(t+1))^2 = \min,$$

$$u_1 \leq u(t) \leq u_2, \quad t \geq 1$$

вычисляем управление $u(t)$. Оно имеет вид (1.2.5), где

$$v(t) = x^*(t+1) - x(t) - a(t), \quad t \geq 1.$$

Если бы h было известно, то здесь вместо $a(t)$ стояло бы $h(t)$. Необходимость оценивания неизвестного воздействия $h(t)$ потребовала введения в регулятор контура идентификации. Схема, реализующая алгоритм управления, представлена на рис. 1.2.1.

На рис. 1.2.2 приведены осциллограммы основных координат описанного регулятора при $x^*(t) = 1$, $x(0) = u(0) = 0$, $-2 \leq u(t) \leq 2$. Информацией об $h(t)$ регулятор не располагает, он лишь строит оценку для нее $a(t)$. Все изменения, произошедшие в $h(t)$, идентификатор рассчитывает только спустя торт во времени, т. е. когда эта информация отразится в измеряемом выходе объекта: $x(t+1) = x(t) + u(t) + h(t)$. Из-за несовпадения $a(t)$ и $h(t)$ на вход объекта подается неправильное управление и $x(t)$ отличается от x^* . Эта ошибка движения по назначенному траектории сводится к нулю после отслеживания идентификатором внешнего воздействия. Ошибка существенно возрастает, если из регулятора убрать идентификатор.

Рассматриваем объект, описываемый линейным разностным уравнением (1.2.1), и считаем параметры a_i ($i = 0, n$), b неизвестными. Расчет оценок

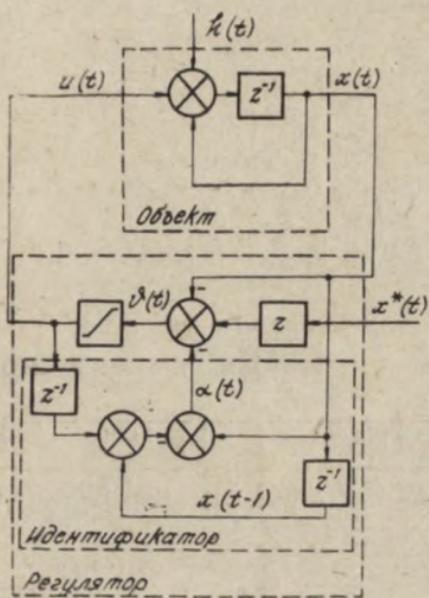


Рис. 1.2.1

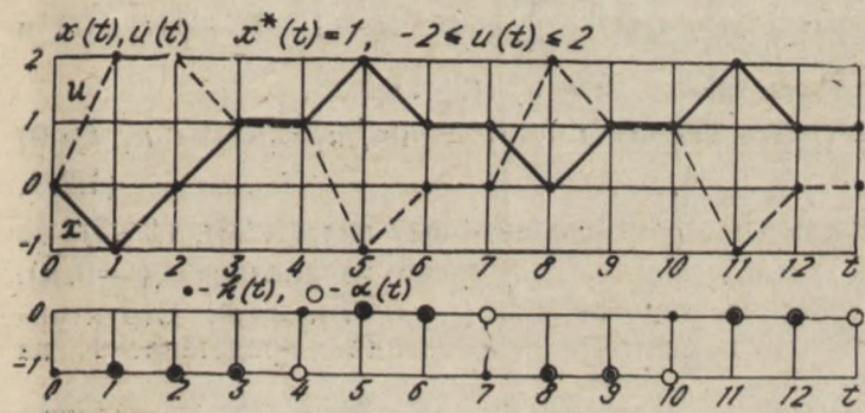


Рис. 1.2.2

$a_i(t)$ ($i = 0, n$), $\beta(t)$ осуществляет идентификатор. Индекс t здесь означает, что оценки получены на основе информации, поступившей к моменту t : $x(t)$; $x(t-1)$, $u(t-1)$; $x(t-2)$, $u(t-2)$; Считаем для конкретно-

сти, что в идентификаторе реализован простейший алгоритм

$$x(t) = \alpha_0(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) x(t-i) + \beta(t) u(t-1); \quad (1.2.8)$$

$$x(t-1) = \alpha_0(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) x(t-1-i) + \beta(t) u(t-2);$$

$$x(t-n-1) = \alpha_0(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) x(t-n-1-i) + \\ + \beta(t) u(t-n-2),$$

в соответствии с которым выходы модели $y(k) = \alpha_0(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)x(k-i) + \beta(t)u(k-1)$ совпадают с выходами объекта $x(k)$ в моменты времени $k = \overline{t-n-1, t}$.

Оптимальное управление в момент t рассчитываем по критерию наименьшего квадратичного рассогласования между прогнозируемым значением выхода объекта $y(t+1) = \alpha_0(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) x(t+1-i) + \beta(t) u(t)$ и заданной траекторией $x^*(t+1)$:

$$I = (y(t+1) - x^*(t+1))^2 = \min, \quad u_1 \leq u(t) \leq u_2, \quad t \geq 0 \quad (1.2.9)$$

Оптимальное управление имеет вид (1.2.3), (1.2.5), но при расчете $v(t)$ в (1.2.3) вместо параметров a_i ($i=0, n$), b стоят их оценки $\alpha_i(t)$ ($i = 0, \overline{n}$), $\beta(t)$. Структурная схема системы управления представлена на рис. 1.2.3.

Ошибка отслеживания в момент $t + 1$ заданной траектории

$$e(t+1) = x(t+1) - x^*(t+1) = \left[a_0 - \alpha_0(t) + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i(t)) x(t+1-i) + (b - \beta(t)) u(t) \right] + e_1(t+1) \quad (1.2.10)$$

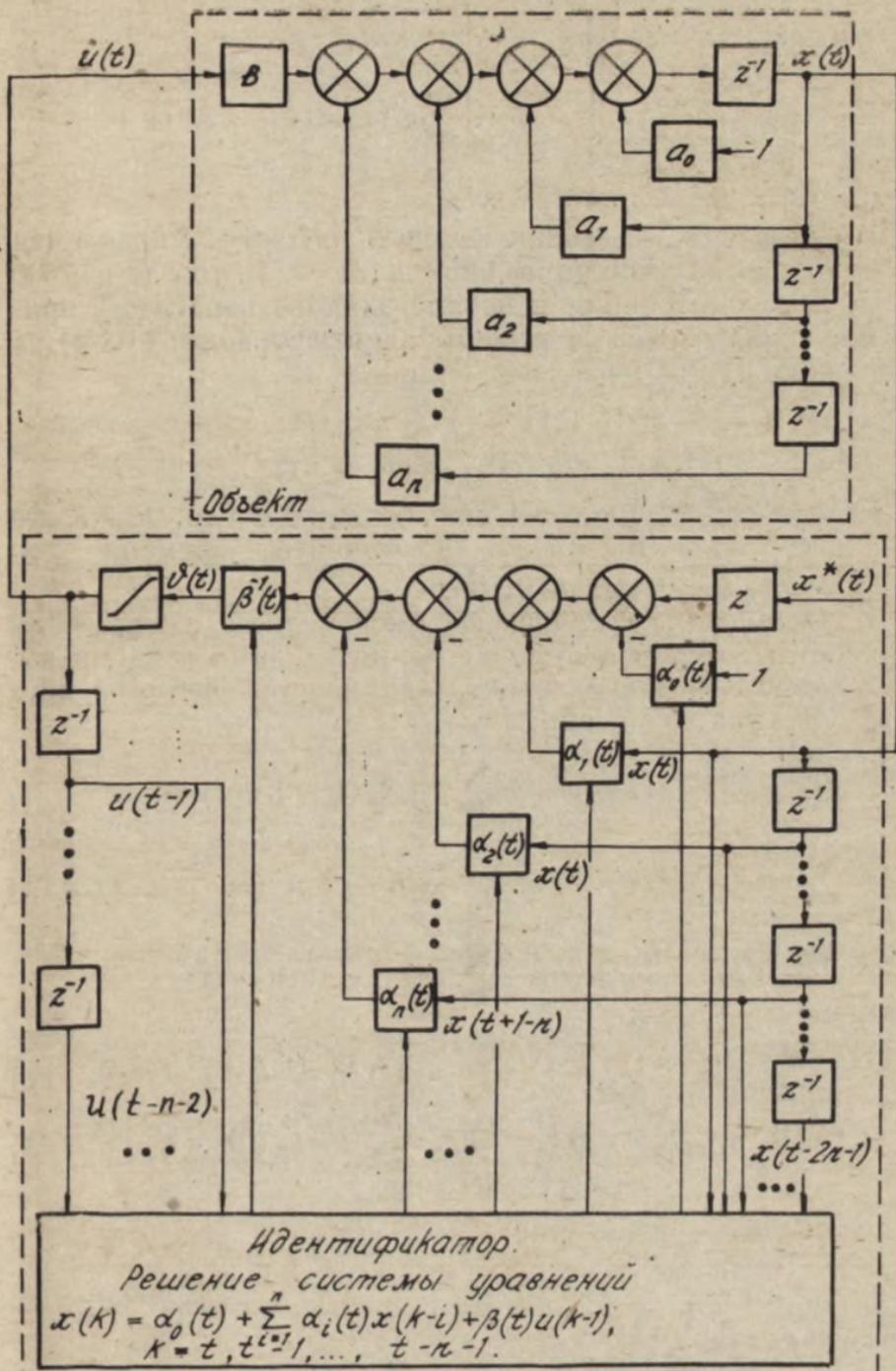


Рис. 4.2.3

складывается из ошибки идентификации, стоящей в квадратных скобках, и ошибки

$$e_1(t+1) = \alpha_0(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) x(t+1-i) + \\ + \beta(t) u(t) - x^*(t+1).$$

обусловленной ограниченностью области управления. Если оптимальное управление $u(t) = v(t)$, то $e_1(t+1) = 0$.

В рассмотренном в начале данного параграфа примере реализован алгоритм идентификации (1.2.8), а ошибка (1.2.10) равна величине

$$x(t+1) - x^*(t+1) = [h(t) - \alpha(t)] + e_1(t+1) \equiv \\ \equiv [h(t) - \alpha(t)] + u(t) - v(t).$$

Если здесь $h(t) = \text{const}$ при $t = \kappa, \kappa+1, \dots, \kappa+l$, то ошибка идентификации в моменты времени $t = \kappa+1, \kappa+l$ равна нулю.

Остановимся теперь на многомерном случае. Для простоты возьмем объект с двумя входами и двумя выходами. Поведение объекта описывается системой двух разностных уравнений:

$$x_1(t+1) = a_{10} + \sum_{i=1}^n a_{11i} x_1(t+1-i) + \\ + \sum_{i=1}^n a_{12i} x_2(t+1-i) + b_{11} u_1(t) + b_{12} u_2(t), \quad (1.2.11) \\ x_2(t+1) = a_{20} + \sum_{i=1}^n a_{21i} x_1(t+1-i) + \\ + \sum_{i=1}^n a_{22i} x_2(t+1-i) + b_{21} u_1(t) + b_{22} u_2(t), \quad t \geq 0, \\ x_1(0) = x_{10}, \dots, x_1(1-n) = x_{1,1-n}, \quad x_2(0) = x_{20}, \dots, \\ x_2(1-n) = x_{2,1-n}.$$

Вводим обозначения:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}; \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}; \quad a_0 = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix}; \\ a_i = \begin{pmatrix} a_{11i} & a_{12i} \\ a_{21i} & a_{22i} \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = (b_1, b_2)$$

и тогда уравнение объекта приобретает вид уравнения (1.2.1), с той лишь разницей, что теперь вместо скалярных переменных стоят векторы и матрицы:

$$x(t+1) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i) + bu(t) = a_0 + \\ + \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i) + b_1 u_1(t) + b_2 u_2(t), \quad x(i) = x_i, \\ i = 0, -1, \dots, 1-n. \quad (1.2.12)$$

Если матрица b невырождена и u не ограничено, то все основные предыдущие результаты сохраняют свой вид, только в них скаляры необходимо заменить соответствующими векторами и матрицами. Например, при известных параметрах в (1.2.11) и отсутствии ограничений на $u(t)$ искомые управления рассчитываются по формуле, эквивалентной (1.2.3), т. е.

$$u(t) = b^{-1}(x^*(t+1) - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i)), \\ t \geq 0. \quad (1.2.13)$$

Наличие для управления $u(t)$ даже простейших ограничений усложняет алгоритм решения по сравнению со скалярным случаем.

Допустим, на каждую составляющую вектора управлений введено ограничение по амплитуде

$$u_{11} \leq u_1(t) \leq u_{12}; \quad u_{21} \leq u_2(t) \leq u_{22}. \quad (1.2.14)$$

Управления отыскиваем из минимизации квадратичной функции невязок

$$I = e^T(t+1) Q e(t+1) = \min, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{10} & \\ 0 & q_{22} \end{pmatrix}, \quad e(t+1) = \\ = x(t+1) - x^*(t+1). \quad (1.2.15)$$

с учетом ограничения (1.2.14). Применяем метод покоординатного спуска

$$u_1^{l+1}(t) = \begin{cases} u_{11}, & \text{если } v_1^l(t) < u_{11}, \\ v_1^l(t), & \text{если } u_{11} \leq v^l(t) \leq u_{12}, \\ u_{12}, & \text{если } u_{12} < v^l(t); \end{cases}$$

$$v_1^l(t) = (b_1^T Q b_1)^{-1} b_1^T Q (x^*(t+1) - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i) - b_2 u_2^l(t)); \quad (1.2.16)$$

$$u_2^{l+1}(t) = \begin{cases} u_{21}, & \text{если } v_2^l(t) < u_{21}, \\ v_2^l(t), & \text{если } u_{21} \leq v_2^l(t) \leq u_{22}, \\ u_{22}, & \text{если } u_{22} < v_2^l(t); \end{cases}$$

$$v_2^l(t) = (b_2^T Q b_2)^{-1} b_2^T Q (x^*(t+1) - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i) - b_1 u_1^{l+1}(t)),$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

Нулевым приближением в этой итерационной процедуре может служить либо оптимальное управление в предыдущий момент времени $u(t-1)$, либо управление

$$u_i^0(t) = \begin{cases} u_{i1}, & \text{если } u_i^*(t) < u_{i1}, \\ u_i^*(t), & \text{если } u_{i1} \leq u_i^*(t) \leq u_{i2}, \\ u_{i2}, & \text{если } u_{i2} < u_i^*(t), i = 1, 2. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u_1^*(t) \\ u_2^*(t) \end{pmatrix} = u^*(t) = b^{-1} (x^*(t+1) - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i)), t \geq 0.$$

Здесь $u^*(t)$ обеспечивает [см. (1.2.11)] абсолютный минимум функции I .

Заметим, что (1.2.15), (1.2.14) представляет собой задачу выпуклого квадратичного программирования и для ее решения можно использовать весь арсенал известных численных методов.

Более общим по сравнению с (1.2.1) и (1.2.6) является n -мерное уравнение движения

$$x(t+1) = a_0 + Ax(t) + bu(t), \quad t \geq 0,$$

$$x(0) = x_0. \quad (1.2.17)$$

Здесь A — матрица; a_0 , b — вектор-столбцы. Уравнение описывает все линейные объекты с одним входом $u(t)$ и одним или несколькими выходами. Уравнения (1.2.1), (1.2.6) приводятся к виду (1.2.17).

Минимизация функционала (1.2.15), в котором Q — n -мерная квадратная положительно определенная матрица, при наличии на скалярное управление $u(t)$ ограничения $u_1 \leq u(t) \leq u_2$ приводит к решению (1.2.5), в котором

$$v(t) = (b^T Q b)^{-1} b^T Q (x^*(t+1) - a_0 - Ax(t)). \quad (1.2.18)$$

Если в уравнении (1.2.17) $u(t)$ — вектор, а b — матрица, то такое уравнение описывает динамические процессы, происходящие в линейных многомерных управляемых объектах. Обобщение схемы синтеза на этот случай производится так же, как и в вышерассмотренных вариантах.

В заключение рассмотрения линейных систем сделаем одно замечание. При записи исходного уравнения движения [см. (1.2.1), (1.2.6), (1.2.12), (1.2.17)] и критерия оптимальности необходимо максимально точно отражать физическую сущность задачи и при переходе к векторным переменным нельзя нарушать физическое содержание задачи. Рассмотрим пример. Объект описывается уравнением (1.2.6)

$$x(t+1) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x(t-1) + \\ + b_1 u(t) + b_2 u(t-1), \quad t \geq 0,$$

$$x(0) = x_0, \quad x(-1) = x_{-1}, \quad u(-1) = u_{-1}.$$

Тогда оптимальное управление имеет вид (1.2.5), (1.2.7). Вводим обозначения

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-1) + \frac{b_2}{a_2} u(t-1) \end{pmatrix}; \\ a_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

и записываем уравнение в векторном виде (1.2.17). Теперь для формирования критерия (1.2.15) необходимо задать $x^*(t+1)$. Задаем структуру вектора x^* совпадающей со структурой вектора x с последующей заменой координат $x(t)$ заданными координатами $x^*(t)$, т. е.

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} x^*(t) \\ x^*(t-1) + \frac{b_2}{a_2} u(t-1) \end{pmatrix}.$$

Заданный вектор $x^*(t+1)$, присутствующий в критерии (1.2.15), оказался связанным с неизвестным управлением $u(t)$. Этот факт не был учтен при получении решения (1.2.18), и он противоречит смысловому содержанию $x^*(t)$ — заданная траектория. Результатом (1.2.18) пользоваться нельзя. Анализ минимизируемой в (1.2.15) функции показывает, что (при $Q = \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}$) она состоит (после возвращения к исходным переменным) из двух квадратичных выражений

$$I = (x^*(t+1) - a_0 - a_1 x(t) - a_2 x(t-1) - b_1 u(t) - b_2 u(t-1))^2 + (x^*(t) - x(t))^2.$$

Второе квадратичное выражение не зависит от искомого управления $u(t)$, а минимизация первого выражения дает известное решение (1.2.5), (1.2.7).

Построение алгоритмов управления для нелинейных систем

Рассмотрим вначале одномерную систему, для которой искомое управление входит линейно в правую часть уравнения движения

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f_1(x(t)) + f_2(x(t))u(t), \quad t \geq 0. \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

Расчет управлений, как и для линейных систем, производится за одну итерацию по формуле (1.2.5), в которой $v(t) = f_2^{-1}(x(t)) \cdot (x^*(t+1) - f_1(x(t)))$.

Схема синтеза управления не меняется, если уравнение движения имеет более глубокую память по x и по u . При этом в (1.2.19)

$$\begin{aligned} f_1(\cdot) &= f_1(x(t), \dots, x(t+1-n)); \\ f_2(\cdot) &= f_2(x(t), \dots, x(t+1-n), u(t), \dots, u(t+1-m)), \\ t &\geq 0; \\ x(i) &= x_i \quad (i = 0, -1, \dots, 1-n), \\ u(j) &= u_j \quad (j = -1, -2, \dots, 1-m). \end{aligned}$$

Рассмотрим существенно нелинейную систему, описываемую уравнением

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0. \quad (1.2.20)$$

Расширение памяти о предыстории процессов $x(t)$ и $u(t)$ в уравнении движения

$$\dot{x}(t+1) = f(x(t), \dots, x(t+1-n), u(t), \dots, u(t+1-m)), \\ t \geq 0;$$

$$x(i) = x_i \quad (i = 0, -1, \dots, 1-n);$$

$$u(j) = u_j \quad (j = -1, -2, \dots, 1-m)$$

не меняет принципа синтеза управлений. По этой причине мы остановимся только на простейшем динамическом уравнении (1.2.20).

Получим управляющее воздействие $u(t)$, обеспечивающее для каждого фиксированного t наименьшую величину рассогласования между выходом объекта $x(t+1)$ и заданной траекторией $x^*(t+1)$, т. е. решим задачу (1.2.4). Считаем, что $v(t)$ есть единственное решение уравнения

$$x^*(t+1) = f(x(t), u(t))$$

и обозначаем

$$v(t) = f^{-1}(x(t), x^*(t+1)).$$

Очевидно, что $v(t)$ соответствует глобальному минимуму функции I в (1.2.4). Для поиска глобального минимума с учетом ограничения $u_1 \leq u(t) \leq u_2$ можно применить известные методы нелинейного программирования. В одном частном случае, для которого при каждом фиксированном $x(t)$ производная $\partial f(x(t), u(t))/\partial u(t)$ как функция от $u(t)$ не меняет знак, экстремум функции I единствен и задача (1.2.4) (в силу линейности ограничения) также имеет единственное решение. Для поиска этого решения можно применять метод последовательной линеаризации (модифицированный метод Гаусса-Ньютона) [12]:

$$u^{l+1}(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } v^l(t) < u_1, \\ v^l(t), & \text{если } u_1 \leq v^l(t) \leq u_2, \\ u_2, & \text{если } u_2 < v^l(t); \end{cases} \quad (1.2.21)$$

$$v^l(t) = u^l(t) + \gamma^l (\partial f(x(t), u^l(t))/\partial u)^{-1} (x^*(t+1) - f(x(t), u^l(t))),$$

$$\gamma^l > 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad u^0(t) = u(t-1).$$

Выбором скалярного параметра γ^l добиваемся монотонной сходимости $I(u^{l+1}(t)) \leq I(u^l(t))$. Простым и удобным

в реализации является способ последовательного дробления единицы пополам. В начале задается $\gamma^l = 1$. Если при этом $I(u^{l+1}(t)) \leq I(u^l(t))$, то полученное управление $u^{l+1}(t)$ берется за новое приближение искомого оптимального управления в момент времени t . Если же $I(u^{l+1}(t)) > I(u^l(t))$, то γ^l берется последовательно равным $2^{-1}, 2^{-2}, \dots$ до выполнения вышеуказанного условия

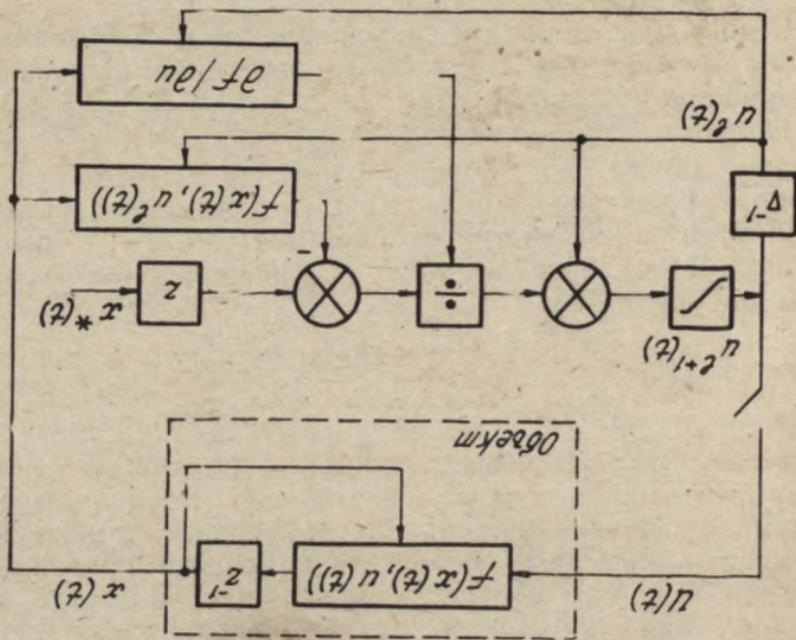


Рис. 1.2.4

многотонной сходимости [12]. Нулевое приближение управления в начальный момент времени $u^0(0)$ задается произвольно из допустимой области управления, а в остальные моменты $u^0(t)$ целесообразно выбирать равными оптимальному управлению в предыдущий момент времени $u(t-1)$. Окончание итерационной перестройки производится при одновременном выполнении условий

$$I(u^l(t)) - I(u^{l+1}(t)) \leq \varepsilon_1, |u^{l+1}(t) - u^l(t)| \leq \varepsilon_2.$$

Схема управления объектом в соответствии с алгоритмом (1.2.21) при $\gamma^l = 1$ представлена на рис. 1.2.4. На нем ∇^{-1} означает запаздывание сигнала на одну итерацию. В схему достаточно просто вводится контур перестройки γ^l .

После определения в момент времени t оптимального управления $u(t)$ рассчитываем ошибку отслеживания в момент $t+1$ заданной траектории $x^*(t+1)$

$$e(t+1) = f(x(t), u(t)) - x^*(t+1).$$

Остановимся теперь на классе нелинейных систем с неизвестными параметрами. Простейшей среди них является система, уравнение движения которой линейно как относительно управления, так и относительно неизвестных параметров

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f_1(x(t))a_1 + f_2(x(t))a_2u(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

В момент времени t после измерения выхода объекта $x(t)$ находим параметры модели

$$y(k) = f_1(x(k-1))a_1(t) + f_2(x(k-1))a_2(t)u(k-1)$$

из условия равенства выходов модели и объекта в моменты времени $k = t, t-1$;

$$x(t) = f_1(x(t-1))a_1(t) + f_2(x(t-1))a_2(t)u(t-1); \quad (1.2.23)$$

$$x(t-1) = f_1(x(t-2))a_1(t) + f_2(x(t-2))a_2(t)u(t-2).$$

Затем, как и для линейных систем, находим управление, удовлетворяющее критерию (1.2.9). Управление имеет вид (1.2.5), в котором

$$v(t) = (f_2(x(t))a_2(t))^{-1} (x^*(t+1) - f_1(x(t))a_1(t)).$$

Структурная схема системы управления представлена на рис. 1.2.5.

Схема синтеза не меняется при увеличении памяти по x и u в модели (1.2.22) и количества параметров a_i .

Численный пример. Объект описывается нелинейным разностным уравнением

$$x(t) = ax(t-1)u(t-1), \quad t \geq 1, \quad x(0) = u(0) = 1,$$

где a — неизвестный параметр, а на управление $u(t)$ не наложено ограничений. На каждом такте t после измерения выхода объекта $x(t)$ идентификатор вычисляет оценку [см. (1.2.23)] неизвестного параметра a :

$$a(t) = x(t)/(x(t-1)u(t-1)),$$

затем управляющее устройство рассчитывает и подает на объект управление

$$u(t) = v(t) = x^*(t+1)/(a(t)x(t)).$$

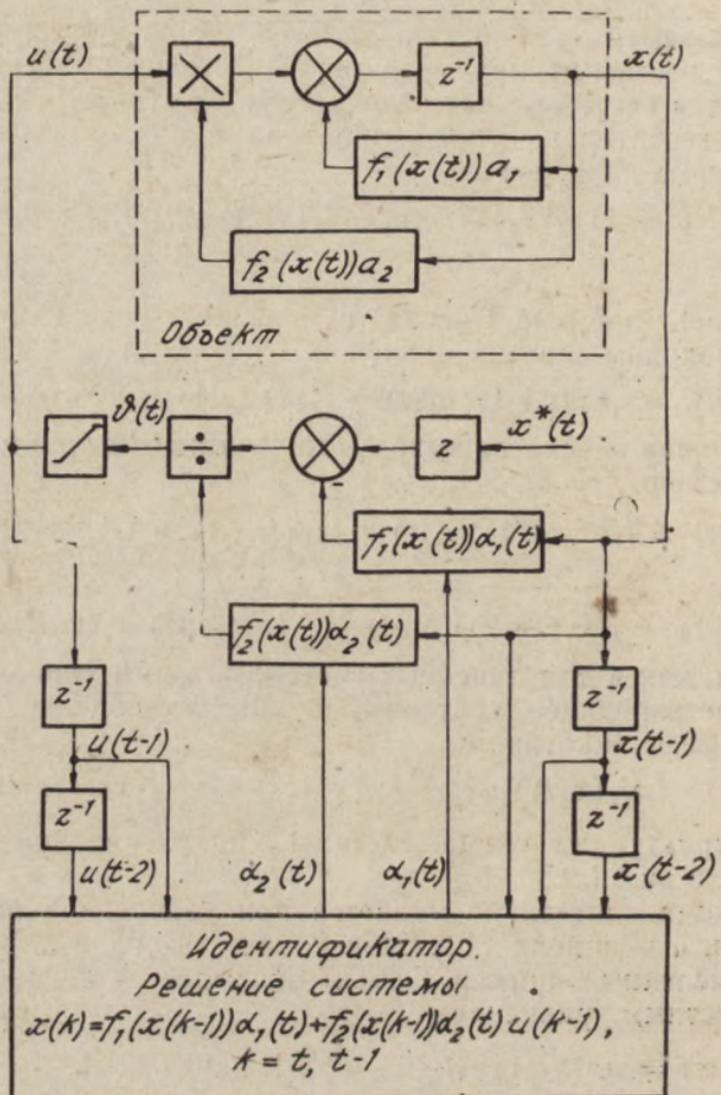


Рис. 1.2.5

Отклонение выхода системы $x(t+1)$ от заданной траектории $x^*(t+1)$ равно ошибке идентификации

$$x(t+1) - x^*(t+1) = (a - a(t))x(t)u(t).$$

Заметим, что если параметр a постоянен в моменты времени $t = k, k+l$, то он точно оценивается идентификатором в моменты $t = k+1, k+l$ и система точно двигается по назначеннй траектории $x^*(t+1)$ ($t = k+1, k+l$). На рис. 1.2.6 представлен отрезок реализаций для x, x^*, a, a .

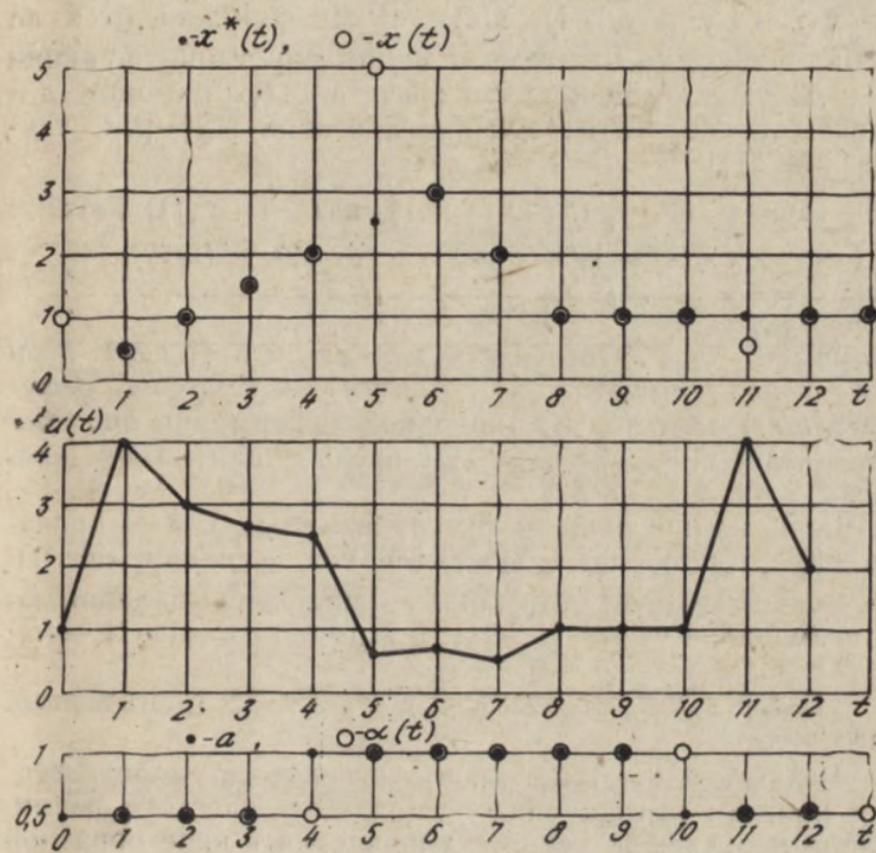


Рис. 1.2.6

В существенно нелинейном случае объект описывается уравнением (1.2.20)

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), a), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \quad (1.2.24)$$

содержащем неизвестный параметр a . В момент времени t после измерения выхода объекта $x(t)$ осуществляется

ся идентификация (расчет оценки $\alpha(t)$) в соответствии с критерием

$$I(\alpha(t)) = (x(t) - f(x(t-1), u(t-1), \alpha(t))^2 = \min \quad (1.2.25)$$

и расчет оптимального управления по критерию (1.2.9), в котором $y(t+1) = f(x(t), u(t), \alpha(t))$. Если при фиксированных $x(t-1), u(t-1)$ производная $\partial f(x(t-1), u(t-1), \alpha(t))/\partial \alpha$ как функция от α не меняет знак, то экстремум минимизируемой функции в (1.2.25) единствен и для расчета $\alpha(t)$ применим алгоритм последовательной линеаризации [12] [см. также (1.2.21)]

$$\begin{aligned} \alpha^{l+1}(t) &= \alpha^l(t) + \gamma^l (\partial f(x(t-1), u(t-1), \alpha^l(t))/\partial \alpha)^{-1} \times \\ &\quad \times (x(t) - f(x(t-1), u(t-1), \alpha^l(t))), \end{aligned}$$

$$l = 0, 1, 2, \dots; \gamma^l > 0.$$

Параметр γ_l выбирается так же, как и в (1.2.21), и он обеспечивает монотонную сходимость к искомому решению. $\alpha^0(t)$ задается по априорной информации либо берется равной оценке $\alpha(t-1)$ в предыдущий момент времени.

Если же при каждом фиксировании $x(t), \alpha(t)$ производная $\partial f(x(t), u(t), \alpha(t))/\partial u(t)$ как функция от $u(t)$ не меняет знак, то оптимальное управление находим по итерационной схеме (1.2.21), в которой $f = f(x(t), u(t), \alpha(t))$.

Все результаты распространяются на многомерные системы.

В заключение отметим, что основными особенностями прямого метода синтеза являются простота реализации получаемых законов управления в виде обратной связи и высокая чувствительность замкнутой системы к различным (в том числе и к случайным) ошибкам. При появлении ошибок движения по заданной траектории производится покачивание управляющего входа объекта, а за счет этого идентификатором из измеряемых входов и выходов объекта извлекается информация и уточняется модель объекта, а управляющее устройство устраняет возникающую ошибку движения по назначеннной траектории. За счет включения в контур управления идентификатора система управления ста-

новится быстроприспособляемой к изменяющимся характеристикам динамического объекта и внешних воздействий. Рассмотренный в данной работе принцип адаптивного управления с идентификацией характеристик реализован в промышленности [14] и в ближайшие годы станет, видимо, одним из основных при управлении сложными динамическими процессами и при создании контуров управления для последнего поколения роботов.

Все рассмотренные в данном параграфе алгоритмы управления с обратной связью полностью применимы к объектам, описываемым уравнениями с переменными параметрами. Упор на модели с постоянными параметрами сделан специально из-за включения в контур управления идентификатора, доопределяющего неизвестные постоянные или слабодрейфующие параметры. Если параметры объекта переменные, то в модели объекта производится их аппроксимация блоками (наборами известных функций, решениями динамических уравнений с постоянными коэффициентами) с недоопределенными постоянными параметрами, корректируемыми идентификаторами в процессе работы системы.

§ 1.3. Синтез управлений в дискретных системах с запаздываниями

Рассмотрим одномерный объект, движение которого соответствует динамическому уравнению

$$x(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n_1} a_i x(t-i) + \sum_{i=n_1+1}^n a_i x(t-\tau_1-i) + \\ + \sum_{j=1}^m a_{n+j} u(t-\tau-j) \equiv L(a, x(t-1), u(t-\tau-2)) + \\ + a_{n+1} u(t-\tau-1), \quad t \geq 1, \quad (1.3.1)$$

с известными начальными значениями фазовых координат и управлений $x(j)$ ($j = \overline{0, 1-n-\tau_1}$), (ui) ($i = \overline{0, 1-m-\tau}$) и известными параметрами a_i ($i = \overline{0, n+m}$).

Здесь τ_1, τ — дискретные чистые запаздывания; $\sum_{t=\kappa+1}^{\kappa} (\cdot) = 0$, управляющее воздействие имеет простейшее ограничение по амплитуде

$$u_1 \leq u(t) \leq u_2. \quad (1.3.2)$$

Необходимо синтезировать закон управления в виде обратной связи, обеспечивающий движение по заданной траектории $x^*(t)$.

Даже если на управление не наложено ограничений (1.3.2), то из-за наличия в канале управления чистого запаздывания на заданную траекторию можно выйти лишь спустя время τ .

Из уравнения (1.3.1) видно, что искомое управление $u(t)$ в момент t оказывает влияние на фазовую координату $x(t+1+\tau)$. Но в момент принятия решения t известны лишь фазовые координаты $x(t)$, $x(t-1)$, ... и управления $u(t-1)$, $u(t-2)$, Следовательно, для расчета оптимального управления $u(t)$ используем прогноз $y(t+1+\tau)$ выхода объекта в момент $t+1+\tau$ и критерий близости прогнозируемой и заданной траекторий

$$(y(t+1+\tau) - x^*(t+1+\tau))^2 = \min, \quad u_1 \leq u(t) \leq u_2, \\ t \geq 1. \quad (1.3.3)$$

Формулу расчета $y(t+1+\tau)$ по имеющейся к моменту t информации ($x(t)$; $x(t-1)$, $u(t-1)$; $x(t-2)$, $u(t-2)$, ...) строим на базе уравнения движения (1.3.1)

$$y(t+1+\tau) = a_0 + \sum_{i=1}^{n_1} a_i y(t+1+\tau-i) + \\ + \sum_{l=n_1+1}^n a_l y(t+1+\tau-\tau_1-i) + \sum_{j=1}^m a_{n+j} u(t+1-j) \equiv \\ \equiv L(a, y(t+\tau), u(t-1)) + a_{n+1} u(t), \quad t \geq 0, \\ y(p) = x(p), \quad p \leq t. \quad (1.3.4)$$

Например, для объекта $n_1 = n = m = 1$, $\tau = 2$, $x(t+1) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 u(t-2)$ ($t \geq 0$), а прогнозируемые величины определяются уравнениями: $y(t+1) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 u(t-2)$, $y(t+2) = a_0 + a_1 y(t+1) + a_2 u(t-1)$, $y(t+1+\tau) \equiv y(t+3) = a_0 + a_1 y(t+2) + a_2 u(t)$.

Критерию (1.3.3) удовлетворяет следующее оптимальное управление в виде обратной связи:

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } v(t) < u_1, \\ v(t), & \text{если } u_1 \leq v(t) \leq u_2, \\ u_2, & \text{если } u_2 \leq v(t); \end{cases} \quad (1.3.5)$$

$$v(t) = a_{n+1}^{-1}(x^*(t+1+\tau) - L(a, y(t+\tau), u(t-1))), \\ t \geq 0.$$

При отсутствии ограничений (1.3.2) $u(t) = v(t)$ и движение объектов по заданной траектории $x^*(t)$ происходит, начиная с момента времени $\tau + 1$. Этот факт нетрудно проверить, и он также следует из приводимой ниже ошибки стабилизации.

Те же результаты можно получить и на основе иного подхода [16, 17]. Вводим операторы сдвига $\nabla x(t) \equiv x(t+1)$, $\nabla^{-1}x(t) \equiv x(t-1)$ и полиномы

$$a(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{n_1} a_i \lambda^{-i} - \sum_{i=n_1+1}^n a_i \lambda^{-\tau_i-i}; \quad b(\lambda) = \sum_{j=1}^m a_{n+j} \lambda^{-\tau-j}.$$

Из решения уравнения (здесь $|\cdot|$ — определитель)

$$\begin{vmatrix} a(\lambda) & 1 \\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^{\tau+1} \quad (1.3.6)$$

находим единственный набор коэффициентов δ_i ($i = \overline{1, \tau}$), γ_j ($j = \overline{1, n}$) полиномов $\delta(\lambda) = \lambda^{\tau+1} + \delta_1 \lambda^{\tau} + \dots + \delta_{\tau} \lambda$, $\gamma(\lambda) = \gamma_1 + \gamma_2 \lambda^{-1} + \dots + \gamma_n \lambda^{-n+1}$. Очевидно, что $\delta(\nabla) a_0 \equiv \equiv \delta(1) a_0$ и оператор сдвига $\nabla^{\tau+1}$ в соответствии с (1.3.6) равен оператору $\delta(\nabla) a(\nabla) - \gamma(\nabla)$.

Рассчитываем прогноз выхода объекта в момент времени $t + 1 + \tau$:

$$y(t+1+\tau) \equiv \nabla^{\tau+1} x(t) = \delta(\nabla) a(\nabla) x(t) - \gamma(\nabla) x(t) = \\ = \delta(\nabla) (a_0 + b(\nabla) u(t)) - \gamma(\nabla) x(t) = \delta(1) a_0 + \\ + \delta(\nabla) b(\nabla) u(t) - \gamma(\nabla) x(t). \quad (1.3.7)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что разные по своей структуре формулы (1.3.4), (1.3.7) обеспечивают получение одного и того же результата. Алгоритм расчета прогнозируемых значений выхода объекта (1.3.4) удобен при расчетах на ЦВМ, а формула (1.3.7) предпочтительна при анализе свойств алгоритмов, ибо в ней отражена явная связь $y(t+1+\tau)$ с имеющимися к моменту времени t входами и выходами объекта: $x(t)$; $x(t-1)$, $u(t-1)$; $x(t-2)$, $u(t-2)$, ... Например, для объекта с $n_1 = n = 2$, $m = 1$, $\tau = 2$ $x(t+1) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x(t-1) + a_3 u(t-2)$ и в соответствии с формулами (1.3.6), (1.3.7) имеем

$$\begin{aligned}\delta_1 &= a_1, \quad \delta_2 = a_2 + a_1^2; \quad \gamma_1 = -a_2\delta_1 - a_1\delta_2 = -2a_1a_2 - a_1^3; \\ \gamma_2 &= -a_2\delta_2 = -a_1^2a_2 - a_2^2; \quad y(t+3) = (1 + a_1 + a_1^2 + \\ &+ a_2)a_0 + a_1(2a_2 + a_1^2)x(t) + a_2(a_1^2 + a_2)x(t-1) + \\ &+ a_3u(t) + a_1a_3u(t-1) + a_3(a_1^2 + a_2)u(t-2).\end{aligned}$$

В правой части уравнения (1.3.7) выделим искомое управление $u(t)$ и представим $y(t+1+\tau)$ в виде

$$y(t+1+\tau) \equiv a_{n+1}u(t) + L_1(b, u(t-1), x(t)), \quad (1.3.8)$$

где b — линейно входящие параметры. Оптимальное управление находим из критерия (1.3.3). Оно имеет

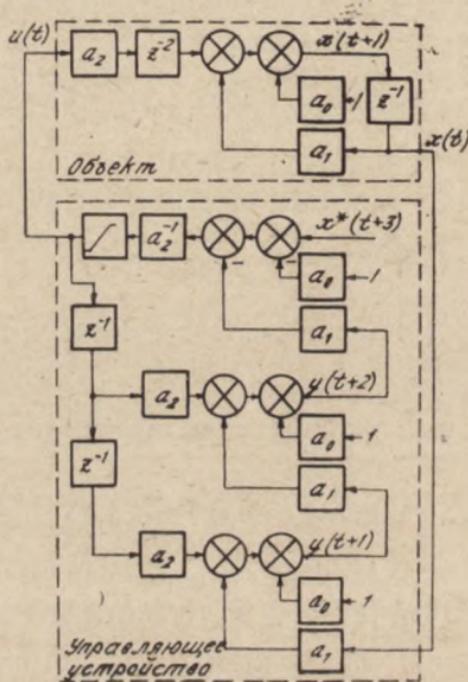


Рис. 1.3.1

вид (1.3.5) и $v(t)$ (представляющее собой оптимальное управление без учета ограничений) равно той же величине $a_{n+1}^{-1}(x^*(t+1+\tau) - L_1(b, u(t-1), x(t)))$. Отличие заключается в различной структуре операторов L и L_1 .

На рис. 1.3.1, 1.3.2 представлены две эквивалентные формы описания объекта (для $n_1 = n = m = 1, \tau = 2$)

и два соответствующих им (тоже эквивалентных) регулятора.

Рассмотрим теперь нелинейный объект, движение которого подчиняется разностному уравнению, линейно зависящему от $u(t-\tau)$:

$$x(t+1) = f_1(x(t)) + f_2(x(t))u(t-\tau), \quad t \geq 0. \quad (1.3.9)$$

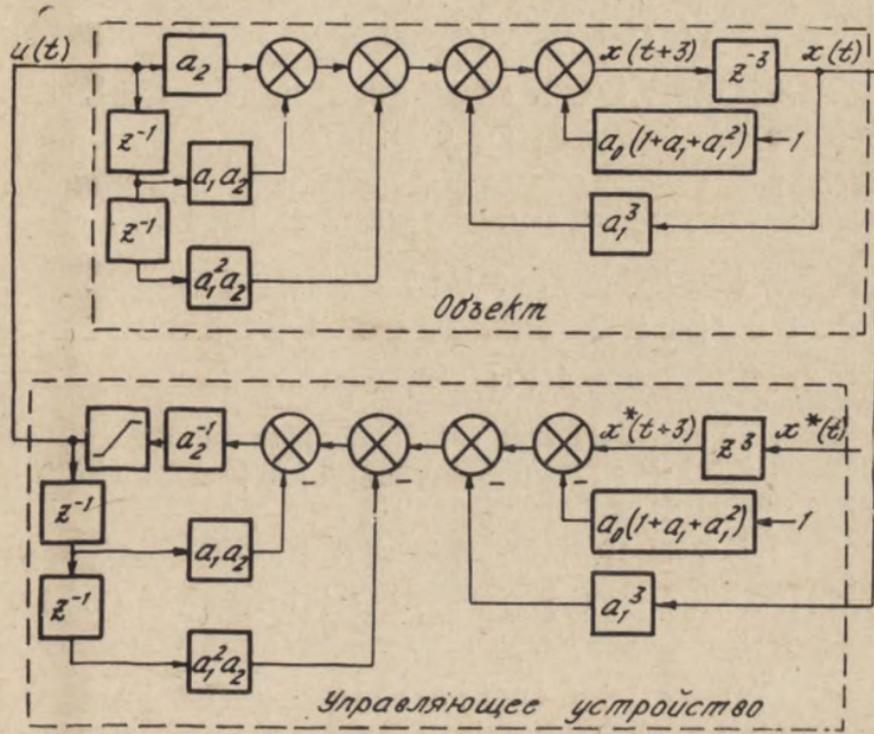


Рис. 1.3.2

Управление без учета ограничений $v(t)$ определяется уравнением

$$v(t) = f_2^{-1}(y(t+\tau))(x^*(t+1+\tau) - f_1(y(t+\tau))),$$

$$\begin{aligned} y(p+1) &= f_1(y(p)) + f_2(y(p))u(p-\tau), \quad p = \overline{t, t+\tau-1} \\ y(t) &\equiv x(t), \end{aligned}$$

а затем $v(t)$ подается на пороговое устройство (1.3.5), с выхода которого снимается $u(t)$.

Для существенно нелинейных объектов

$$x(t+1) = f(x(t), u(t-\tau)), \quad t \geq 0, \quad (1.3.10)$$

расчет управлений при каждом фиксированном t производится по рекуррентной формуле

$$u^{l+1}(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } v^l(t) < u_1, \\ v^l(t), & \text{если } u_1 \leq v^l(t) \leq u_2, \\ u_2, & \text{если } u_2 < v^l(t), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v^l(t) &= u^l(t) + \gamma^l(\partial f(y(t+\tau), u^l(t))/\partial u)^{-1}(x^*(t+ \\ &+ 1 + \tau) - f(y(t+\tau), u^l(t))), \quad l \geq 0, \quad u^0(t) = u(t-1), \\ y(p+1) &= f(y(p), u(p-\tau)), \quad p = t, \overline{t+\tau-1}, \\ y(t) &= x(t). \end{aligned}$$

Перестройка управлений по итерациям производится до выполнения условия (см. введение и §§ 1.1, 1.2).

$$\begin{aligned} I^l - I^{l+1} &\leq \varepsilon_1, \quad \|u^{l+1}(t) - u^l(t)\| \leq \varepsilon_2; \\ I^l &= I|_{u=u^l}, \quad I = e_1^T e_1, \quad e_1 = x^*(t+1+\tau) - \\ &- f(y(t+\tau), u(t)). \end{aligned}$$

Ошибка отслеживания заданной траектории в момент времени $t+1+\tau$ для объектов (1.3.1), (1.3.9), (1.3.10) равна соответственно величинам:

$$e(t+1+\tau) \equiv x(t+1+\tau) - x^*(t+1+\tau) = \delta(1)a_0 + \delta(\nabla)b(\nabla)u(t) - \gamma(\nabla)x(t) - x^*(t+1+\tau), \quad (1.3.11)$$

$$\begin{aligned} e(t+1+\tau) &\equiv x(t+1+\tau) - x^*(t+1+\tau) = \\ &= f_1(x(t+\tau)) + f_2(x(t+\tau))u(t) - x^*(t+1+\tau), \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

$$\begin{aligned} e(t+1+\tau) &\equiv x(t+1+\tau) - x^*(t+1+\tau) = \\ &= f(x(t+\tau), u(t)) - x^*(t+1+\tau). \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Если в уравнении движения объекта присутствуют неизвестные параметры, то в контур управления дополнительно встраивается блок идентификации этих параметров. Расчетные формулы для этого случая будут приведены при рассмотрении стохастических систем с запаздываниями в § 2.2.

Приведенный в данном параграфе метод синтеза управления полностью применим и к многомерным линейным и нелинейным системам с запаздываниями.

§ 1.4. Распространение метода на непрерывные системы

Новый метод синтеза алгоритмов управления для линейных и нелинейных объектов, описанный в предыдущих разделах, разработан применительно к использованию дискретных моделей объектов. К сожалению, пока не найдено прямого аналога метода для непрерывных моделей объектов. В данном параграфе приведен вариант метода, основанный на замене непрерывной модели дискретной с последующим использованием нового метода.

Считаем для конкретности, что движение объекта с одним входом и одним выходом подчиняется дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0, \\ \dot{x}(t) &\equiv \frac{dx(t)}{dt}.\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

Переходим к дискретному уравнению, заменяя производную конечной разностью

$$\begin{aligned}x(t + \Delta t) &= x(t) + \Delta t f(x(t), u(t)), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= x_0,\end{aligned}\tag{1.4.2}$$

и применяем вышеописанный метод синтеза управлений (см. § 1.1):

$$I(e(t + \Delta t)) = \min, \quad e(t + \Delta t) = x(t + \Delta t) - x^*(t + \Delta t),\tag{1.4.3}$$

$$u(t) = G \left(\frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad x(t) \right), \quad t \geq 0.$$

Структурная схема системы управления представлена на рис. 1.4.1.

При отсутствии ограничений на управление требуем точного совпадения выхода системы (1.4.2) с заданной траекторией $x^*(t + \Delta t)$:

$$x^*(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t), u(t)), \quad t \geq 0.\tag{1.4.4}$$

Из этого уравнения определяем управление

$$f(x(t), u(t)) = \frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t};\tag{1.4.5}$$

$$u(t) = f^{-1} \left(\frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, x(t) \right), \quad t \geq 0.$$

Подставляем $u(t)$ в (1.4.1) и получим уравнение замкнутой системы

$$\dot{x}(t) = \frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad t > 0, \quad x(0) = x_0. \quad (1.4.6)$$

Отсюда следует, что $x(t) \rightarrow x^*(t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$, если $|\dot{x}(t)| < \infty$.

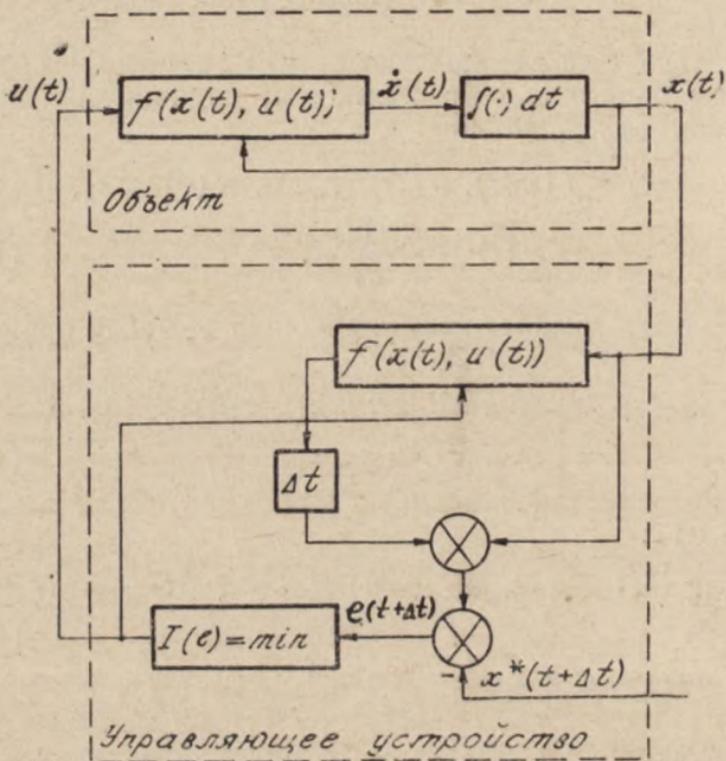


Рис. 1.4.1

Рассмотрим пример. Цель управления линейным объектом

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 \quad (1.4.7)$$

заключается в обеспечении движения по заданной траектории $x^*(t) = x_0 \exp(\lambda t)$ ($\lambda < 0$, $t \geq 0$), начинающейся в точке $x^*(0) = x_0$. По вышеописанной схеме оптималь-

ное управление (если на него не наложено ограничений) удовлетворяет уравнению

$$x^*(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t[-x(t) + u(t)], \quad t \geq 0,$$

то есть

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + x(t) = \\ &= \frac{x_0 \exp(\lambda t) \exp(\lambda \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + x(t). \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Это оптимальное управление с обратной связью. Подставляем его в уравнение движения (1.4.7) и получаем уравнение замкнутой системы управления

$$\dot{x}(t) = \frac{x_0 \exp(\lambda t) \exp(\lambda \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad t > 0, \quad x(0) = x_0.$$

Решение его при $\Delta t = 0$ совпадает с заданной траекторией, то есть $x(t) \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{} x_0 \exp(\lambda t)$. При $\Delta t \rightarrow 0$ цель управления достигается.

Теперь предположим, что заданная траектория $x^*(t) = c \exp(\lambda t)$ в начальный момент времени $t = 0$ не совпадает с начальным положением объекта x_0 . Оптимальное управление

$$u(t) = \frac{c \exp(\lambda t) \exp(\lambda \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + x(t)$$

обеспечивает движение замкнутой системы, подчиняющееся дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = \frac{c \exp(\lambda t) \exp(\lambda \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad x(0) = x_0, \quad t > 0,$$

либо

$$\Delta t \dot{x}(t) = c \exp(\lambda t) \exp(\lambda \Delta t) - x(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с малым параметром Δt при старшей производной. При $\Delta t = 0$ порядок дифференциального уравнения понижается, оно превращается в алгебраическое уравнение, решение которого имеет вид

$$x(t) = c \exp(\lambda t), \quad t > 0,$$

и совпадает с заданной траекторией. При $\Delta t = 0$ $x(t)$ в момент $t = 0$ совершает скачок от x_0 до c и затем

движение замкнутой системы управления происходит по траектории $x^*(t)$. При малых Δt в течение интервала времени длительности Δt происходит переход системы из точки x_0 на траекторию, близкую (с точностью до величины порядка Δt) к заданной траектории $x^*(t)$, с последующим движением (при $t > \Delta t$) по этой траектории.

Если объект управления содержит неизвестный параметр

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), a), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0, \quad (1.4.9)$$

то после дискретизации уравнения

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + \Delta t f(x(t), u(t), a), \\ t &\geq 0, \quad x(0) = x_0, \end{aligned}$$

в модель объекта

$$y(p + \Delta t) = x(p) + \Delta t f(x(p), u(p), a(t)) \quad (1.4.10)$$

вводим параметр $a(t)$, доопределяемый идентификатором по информации о входе и выходе, поступившей к моменту времени t : $(x(t); x(p), u(p), p < t)$. Расчет управлений проводим по алгоритму (1.4.3)

$$I(e_1(t + \Delta t)) = \min; \quad e_1(t + \Delta t) = y(t + \Delta t) - x^*(t + \Delta t); \quad (1.4.11)$$

$$u(t) = G\left(\frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, x(t), a(t)\right), \quad t \geq 0.$$

При отсутствии ограничений на управление получаем [см. (1.4.5)] уравнение для $u(t)$:

$$f(x(t), u(t), a(t)) = \frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

и само управление

$$u(t) = f^{-1}\left(\frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, x(t), a(t)\right), \quad t \geq 0. \quad (1.4.12)$$

Уравнение замкнутой системы управления принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [f(x(t), u(t), a) - f(x(t), u(t), a(t))] + \\ &+ \frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad t > 0, \quad x(0) = x_0. \quad (1.4.13) \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках связано с ошибками идентификации и это выражение равно нулю, если параметр \underline{a} оценен точно (т. е., если $\underline{a}(t) = a$). Если $|\dot{x}(t)| < \infty$ и $|[\cdot]| < \infty$, то при $\Delta t \rightarrow 0$ $x(t) \rightarrow x^*(t)$. При малых Δt за время Δt система осуществляет переход из начального состояния $x(0) = x_0$ на траекторию $x^*(t) + 0(\Delta t)$, близкую к $x^*(t)$.

Пример. Производится управление линейным объектом с аддитивным неизвестным параметром в правой части уравнения движения

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) + a, \quad t > 0, \quad x(0) = x_0.$$

Параметр a соответствует неизвестному постоянному внешнему воздействию. Производим дискретизацию уравнения движения

$$x(t + \Delta t) = x(t) - \Delta t x(t) + \Delta t u(t) + \Delta t a$$

и составляем модель объекта

$$y(p + \Delta t) = x(p) - \Delta t x(p) + \Delta t u(p) + \Delta t \alpha(t).$$

Модель используем для идентификации (при $p = t - \Delta t$), приравнивая выход модели $y(t)$ и выход объекта $x(t)$

$x(t) = x(t - \Delta t) - \Delta t x(t - \Delta t) + \Delta t u(t - \Delta t) + \Delta t \alpha(t)$,
и для управления, приравнивая $y(t + \Delta t)$ и $x^*(t + \Delta t)$

$$x^*(t + \Delta t) = x(t) - \Delta t x(t) + \Delta t u(t) + \Delta t \alpha(t).$$

В результате получаем, что блок идентификации вычисляет параметр

$$\alpha(t) = \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} + x(t - \Delta t) - u(t - \Delta t),$$

а блок управления формирует $u(t)$

$$u(t) = \frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + x(t) - \alpha(t).$$

Уравнение замкнутой системы управления имеет вид

$$\dot{x}(t) = \frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + a - \alpha(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0.$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ имеем $\alpha(t) \rightarrow a$, $x(t) \rightarrow x^*(t)$.

Пример. В линейном объекте управления

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0$$

неизвестный параметр α характеризует собственное движение объекта. По аналогии с вышеописанным получаем алгоритм работы идентификатора

$$\alpha(t) = \frac{x(t - \Delta t) - x(t)}{\Delta t x(t - \Delta t)} + \frac{u(t - \Delta t)}{x(t - \Delta t)},$$

алгоритм блока формирования управления с обратной связью

$$u(t) = \frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + \alpha(t) x(t)$$

и уравнение замкнутой системы

$$\dot{x}(t) = \frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + (\alpha(t) - a) x(t).$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ $\alpha(t) \rightarrow a$, $x(t) \rightarrow x^*(t)$.

Рассмотрим теперь объекты с запаздыванием. Они описываются дифференциальными-разностными уравнениями с запаздывающим аргументом:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), x(t - \tau), u(t - \tau), a), \quad t > 0; \\ x(t) &= \psi_1(t), \quad t \in [-\tau, 0]; \quad u(t) = \psi_2(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \end{aligned} \tag{1.4.14}$$

Здесь a — неизвестный параметр. Производим дискретизацию уравнения

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + \Delta t f(x(t), x(t - \tau), u(t - \tau), a), \\ t &\geq 0; \end{aligned} \tag{1.4.15}$$

$$x(t) = \psi_1(t), \quad t \in [-\tau, 0]; \quad u(t) = \psi_2(t), \quad t \in [-\tau, 0].$$

Считаем, что τ кратно Δt , т. е. $\tau = m\Delta t$. Составляем модель объекта

$$\begin{aligned} y(p + \Delta t) &= y(p) + \Delta t f(y(p), y(p - \tau), u(p - \tau), \\ &\quad \alpha(t)), \quad t \geq 0; \\ y(\kappa) &= x(\kappa), \quad \kappa \leq t. \end{aligned} \tag{1.4.16}$$

При $p = t - \Delta t$ выход модели (1.4.16) имеет вид

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t - \Delta t) + \Delta t f(x(t - \Delta t), x(t - \Delta t - \tau), \\ &\quad u(t - \Delta t - \tau), \alpha(t)), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

Приравниваем $y(t)$ и измеренный выход объекта $x(t)$ и получаем уравнение для расчета параметра модели $a(t)$, оценивающего параметр объекта a :

$$x(t) = x(t - \Delta t) + \Delta t f(x(t - \Delta t), x(t - \Delta t - \tau), u(t - \Delta t - \tau), \alpha(t)), \quad t \geq 0. \quad (1.4.17)$$

Затем, полагая в (1.4.16) аргумент p последовательно равным $t, t + \Delta t, \dots, t + m\Delta t + \Delta t$, рекуррентно вычисляем прогноз выхода объекта в момент $t + \tau + \Delta t$ и из критерия

$$\begin{aligned} I(e_1(t + \tau + \Delta t)) &= \min, \quad e_1(t + \tau + \Delta t) = \\ &= y(t + \tau + \Delta t) - x^*(t + \tau + \Delta t) \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

находим оптимальное управление

$$u(t) = G \left(\frac{x^*(t + \tau + \Delta t) - y(t + \tau)}{\Delta t}, y(t + \tau), \right. \\ \left. x(t), \alpha(t) \right). \quad (1.4.19)$$

Например, если на $u(t)$ не накладывается ограничений, то $u(t)$ находим, приравнивая $y(t + \tau + \Delta t)$ и $x^*(t + \tau + \Delta t)$:

$$x^*(t + \tau + \Delta t) = y(t + \tau) + \Delta t f(y(t + \tau), x(t), u(t), \alpha(t)), \quad t \geq 0,$$

т. е.

$$u(t) = f^{-1} \left(\frac{x^*(t + \tau + \Delta t) - y(t + \tau)}{\Delta t}, y(t + \tau), \right. \\ \left. x(t), \alpha(t) \right), \quad t \geq 0. \quad (1.4.20)$$

Пример. Уравнение движения управляемого объекта имеет вид

$$x(t) = ax(t - \tau) + u(t - \tau), \quad t > 0,$$

$$x(t) = \psi_1(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad u(t) = \psi_2(\tau), \quad t \in [-\tau, 0].$$

Здесь все переменные и параметры — скаляры. Переходим к дискретной форме уравнения движения

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t a x(t - \tau) + \Delta t u(t - \tau), \quad t \geq 0,$$

$$x(t) = \psi_1(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad u(t) = \psi_2(t), \quad t \in [-\tau, 0];$$

$$\tau = m\Delta t,$$

и составляем модель объекта

$$y(p + \Delta t) = y(p) + \Delta t \alpha(t) x(p - \tau) + \Delta t u(p - \tau), \\ 0 \leq p \leq t + \tau; \quad y(p) = x(p), \quad p \leq t.$$

Полагаем $p = t - \Delta t$ и, приравнивая выход модели и выход объекта в момент времени t

$$x(t) = x(t - \Delta t) + \Delta t \alpha(t) x(t - \tau - \Delta t) + \Delta t u(t - \tau - \Delta t),$$

получаем оценку $\alpha(t)$ параметра a

$$\alpha(t) = \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t x(t - \tau - \Delta t)} - \frac{u(t - \tau - \Delta t)}{x(t - \tau - \Delta t)}, \quad t \geq 0.$$

Рекуррентно рассчитываем $y(t + \tau + \Delta t)$, последовательно полагая в модели $p = t, t + \Delta t, \dots, t + \tau$, и, приравнивая $y(t + \tau + \Delta t)$ и $x^*(t + \tau + \Delta t)$

$$x^*(t + \tau + \Delta t) = y(t + \tau) + \Delta t \alpha(t) x(t) + \Delta t u(t),$$

находим управление

$$u(t) = \frac{x^*(t + \tau + \Delta t) - y(t + \tau)}{\Delta t} - \alpha(t) x(t), \quad t \geq 0.$$

Теперь можно найти и предельные соотношения при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\alpha(t) \rightarrow a, \quad y(t + \tau) \rightarrow x^*(t + \tau + \Delta t)$$

где $y(t + \tau)$ является решением уравнения прогноза выходной координаты объекта

$$\frac{dy(\gamma)}{d\gamma} = \alpha(t) x(\gamma - \tau) + u(\gamma - \tau), \quad t < \gamma \leq t + \tau,$$

$$y(t) = x(t).$$

При $\alpha(t) = a$, очевидно, $y(t + \tau) = x(t + \tau)$.

Глава 2

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Рассмотрим общую процедуру синтеза алгоритмов управления с обратной связью для линейных и нелинейных обыкновенных дискретных систем с аддитивной стохастической помехой в правой части уравнения движения (§ 2.1). Для оценки неизвестных параметров уравнений движения в управляющее устройство встроим блок текущей идентификации. Оценим ошибку отслеживания назначаемой траектории в каждый момент времени. Изложенную процедуру применим также к решению задач управления дискретными системами с запаздываниями (§ 2.2) и непрерывными системами (§ 2.3) и рассмотрим примеры (§§ 2.4, 2.5).

§ 2.1. Обыкновенные линейные и нелинейные системы

Уравнение движения системы задаем векторным уравнением с аддитивной помехой в правой части

$$\begin{aligned}x(t+1) &= F(x(t), t) + H(u(t), t) + \xi(t), \\t &\geq 0, \quad x(0) = x_0.\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

Прогноз выхода системы определим основной компонентой (без помехи) правой части уравнения (2.1.1)

$$y(t+1) = F(x(t), t) + H(u(t), t), \quad t \geq 0.\tag{2.1.2}$$

Управляющее воздействие $u(t)$ рассчитываем из критерия минимума экстремальной функции невязки

$$\begin{aligned}I(e_1(t+1)) &= \min, \\e_1(t+1) &= y(t+1) - x^*(t+1).\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

Из (2.1.3) получаем (см. § 1.1)

$$u(t) = G(x^*(t+1) - F(x(t), t), t), \quad t \geq 0. \quad (2.1.4)$$

Ошибка отслеживания заданной траектории складывается из невязки $e_1(t+1)$ при оптимальном управлении (2.1.4) и помехи $\xi(t)$:

$$e(t+1) \equiv x(t+1) - x^*(t+1) = e_1(t+1) + \xi(t).$$

Если на управление $u(t)$ не наложено ограничений, то $e_1(t+1) = 0$ и ошибка отслеживания траектории $x^*(t+1)$ равна помехе $\xi(t)$. Ограниченнность амплитуды помехи $\|\xi(t)\| \leq \xi_1$ позволяет рассчитать верхнюю границу для ошибки работы системы

$$\|x(t+1) - x^*(t+1)\| \leq \|e_1(t+1)\| + \xi_1.$$

Таким образом, в описанной системе управления стохастическим объектом (2.1.1) на сумматор объекта управления (см. рис. 1.1.1) подается помеха $\xi(t)$, а управляющее устройство не меняет своей структуры. Ошибка работы системы возрастает на величину помехи $\xi(t)$. Данный вывод освобождает нас от дополнительного подробного рассмотрения важных для практики линейных систем и нелинейных систем с линейными относительно u правыми частями уравнений движения (см. § 1.2). Если в этих системах в правые части уравнений движения аддитивно входит помеха $\xi(t)$ и алгоритмы управления реализуются по описанным выше формулам (1.2.1)–(1.2.5), то приведенные в § 1.2 схемы управления сохраняют свой вид.

Рассмотрим теперь решение задачи управления объектами с неизвестными параметрами в уравнениях движения (1)

$$\begin{aligned} x(t+1) &= F(x(t), a, t) + \\ &+ H(u(t), a, t) + \Psi(a, t) + h(t), \\ t &\geq 0, \quad x(0) = x_0. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Здесь в отличие от (2.1.1) введены неизвестные параметры a и помеха $\xi(t)$ представлена в виде суммы регулярной $\Psi(a, t)$ и случайной $h(t)$ составляющих. Отслеживание в процессе работы системы вектора параметров a позволяет отследить регулярную составляющую $\Psi(a, t)$ помехи $\xi(t)$ и тем самым уменьшить влияние помехи $\xi(t)$ до случайной составляющей $h(t)$,

ибо очевидно, что если $\|\Psi\| \leq \Psi_1$, $\|h\| \leq h_1$, то $\|\xi\| \leq \leq \Psi_1 + h_1$.

Расчет оценок $a(t)$ вектора параметров a производит идентификатор на основе информации, поступившей к моменту времени t : $x(t)$, $x(t-1)$, $u(t-1)$, Модель объекта управления задаем в виде (2)

$$y(\kappa) = F(x(\kappa-1), a(t), \kappa-1) + \\ + H(u(\kappa-1), a(t), \kappa-1) + \Psi(a(t), \kappa-1). \quad (2.1.6)$$

Ее используем для целей идентификации, полагая $\kappa = t$, $t-1, \dots$, и управления при $\kappa = t+1$.

На невязках $e_0(t) = x(t) - y(t)$ выходов объекта и модели $E_0(t) = (e_0(t), e_0(t-1), \dots)$ строим функционал с минимумом $I_0(E_0(t))$ и из решения экстремальной задачи

$$I_0(E_0(t)) = \min$$

находим [12] параметры $a(t)$ модели (2.1.6).

После получения оценок $a(t)$ с учетом свежей информации о входах и выходах объекта строим невязку [см. (2.1.3)] между выходом модели (2.1.6) при $\kappa = t+1$ и назначаемой траекторией $x^*(t+1)$ и управляющее воздействие рассчитываем по критерию (2.1.3). Получаем

$$u(t) = G(x^*(t+1) - F(x(t), a(t), t) - \\ - \Psi(a(t), t), t) \geq 0. \quad (2.1.7)$$

С учетом этого управления находим ошибку отслеживания назначеннной траектории

$$e(t+1) = x(t+1) - x^*(t+1) = \delta(t) + \\ + e_1(t+1) + h(t), \quad \delta(t) = F(x(t), a, t) + \\ + H(u(t), a, t) + \Psi(a, t) - F(x(t), a(t), t) - \\ - H(u(t), a(t), t) - \Psi(a(t), t), \quad e_1(t+1) = \\ = F(x(t), a(t), t) + H(u(t), a(t), t) + \\ + \Psi(a(t), t) - x^*(t+1). \quad (2.1.8)$$

Она складывается из ошибки идентификации $\delta(t)$, ошибки $e_1(t+1)$, обусловленной ограниченностью управляющих воздействий, и случайной помехи $h(t)$. Ошибку идентификации точно рассчитывать нельзя, но для конкретных систем можно найти ее верхнюю оценку

ку, если известна верхняя граница для помехи $\|\hat{h}(t)\| \leq h_1$. Ошибка $e_1(t+1)$ вычисляется точно.

Рассмотрим одномерную линейную систему, описываемую уравнением типа (1.2.1)

$$x(t+1) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i) + bu(t) + h(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1.9)$$

$$x(i) = x_i, \quad i = 0, -1, \dots, 1-n; \quad |h(t)| \leq h_1.$$

Параметры $a_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$), $\beta(t)$ модели $y(\kappa) = a_0(t) + \sum_{i=1}^n a_i(t)x(\kappa-i) + \beta(t)u(\kappa-1)$ рассчитываются из условия совпадения выхода модели с выходом объекта в моменты времени $\kappa = \overline{t-n-1, t}$ [см. (1.2.8)]:

$$x(\kappa) = a_0(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)x(\kappa-i) + \beta(t)u(\kappa-1), \quad (2.1.10)$$

$$\kappa = t, t-1, \dots, t-n-1.$$

С учетом ограниченности управления по амплитуде $u_1 \leq u(t) \leq u_1$ из квадратичного критерия $e_1^2(t+1) = \min$, где $e_1(t+1) = y(t+1) - x^*(t+1)$, получаем оптимальное управление

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } v(t) < u_1, \\ v(t), & \text{если } u_1 < v(t) \leq u_2, \\ u_2, & \text{если } u_2 < v(t); \end{cases} \quad (2.1.11)$$

$$v(t) = \beta^{-1}(t)(x^*(t+1) - a_0(t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)x(t+1-i)), \quad t \geq 0.$$

Структурная схема системы управления представлена на рис. 1.2.3, только дополнительно на объект необходимо подать помеху $h(t)$.

Ошибка идентификации

$$\delta(t) = a_0 - \alpha_0(t) + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i(t))x(t+1-i) + (b - \beta(t))u(t)$$

линейно зависит от ошибок оценивания параметров $a_i - \alpha_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$), $b - \beta(t)$, которые из системы линейных уравнений, получаемой из (2.1.9), (2.1.10):

$$\begin{aligned} -h(\kappa-1) &= a_0 - \alpha_0(t) + \sum_{i=1}^n (a_i - \alpha_i(t)) x(\kappa-i) + \\ &\quad + (b - \beta(t)) u(\kappa-1), \\ \kappa &= t, t-1, \dots, t-n-1, \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

также линейно выражаются через помеху $h(\kappa-1)$ ($\kappa = t, t-1, \dots, t-n-1$). Системы уравнений (2.1.10), (2.1.12) имеют одинаковые матрицы коэффициентов перед неизвестными и отличаются только правыми частями, поэтому, получая оценки параметров, можно сразу отыскивать линейную зависимость ошибок оценивания параметров от помехи. Получаемое в итоге линейное уравнение связи ошибки идентификации с помехой

$$\delta(t) = \sum_{\kappa=t-n-1}^t r(\kappa) h(\kappa-1)$$

позволяет с учетом ограниченности помехи $|h(t)| \leq h_1$ найти ограничение для ошибки идентификации

$$|\delta(t)| \leq h_1 \sum_{\kappa=t-n-1}^t |r(\kappa)|.$$

При отсутствии помехи $h_1 = 0$ и ошибка идентификации равна нулю.

Ошибка идентификации стремится к нулю, если $a_i(t)$ ($i = \overline{0, n}$), $\beta(t)$ сходятся к истинным параметрам a_i ($i = \overline{0, n}$), b . Это будет при $h(t) \rightarrow 0$ либо при использовании алгоритмов типа стохастической аппроксимации. На основе этих алгоритмов в контуре идентификации со временем отфильтровываются центрированные помехи и $a_i(t) \rightarrow a_i$ ($i = \overline{0, n}$), $\beta(t) \rightarrow b$ при $t \rightarrow \infty$. Если же параметры меняются по неизвестным законам, то для идентификации надо применять алгоритмы, обрабатывающие информацию «скользящего окна» [см., например, (2.1.10)], но ошибка идентификации при этом асимптотически не уменьшается.

Пример 1. Уравнение движения одномерной линейной системы имеет вид

$$x(t+1) = x(t) + u(t) + a + h(t), \\ t \geq 0, \quad x(0) = x_0.$$

Здесь a — неизвестный параметр; h — случайная помеха; $|h(t)| \leq h_1$. Идентификацию осуществляем по алгоритму (2.1.10)

$$a(t) = x(t) - x(t-1) - u(t-1),$$

а оптимальное управление — по алгоритму (2.1.11), в котором

$$v(t) = x^*(t+1) - x(t) - a(t) = \\ = x^*(t+1) - 2x(t) + x(t-1) + u(t-1).$$

Ошибка отслеживания траектории равна величине

$$x(t+1) - x^*(t+1) = [a - a(t)] + e_1(t+1) + \\ + h(t) = [-h(t-1)] + u(t) - v(t) + h(t),$$

то есть

$$|x(t+1) - x^*(t+1)| \leq 2h_1 + |u(t) - v(t)|.$$

Заметим, если параметр a известен и идентификация не проводится ($\delta(t) = a(t) - a = 0$), то верхняя граница ошибки меньше

$$|x(t+1) - x^*(t+1)| \leq h_1 + |u(t) - v(t)|.$$

Эта же предельная граница достигается, если параметр a постоянен и алгоритм идентификации обеспечивает асимптотическое стремление к нему $a(t)$.

На рис. 2.1.1 представлена структурная схема системы управления, а на рис. 2.1.2 приведены графики изменения во времени основных переменных (x^* , x , a , a , h , u) системы при наличии помехи h , принимающей значения из интервала $[-0,5; 0,5]$, и при отсутствии ограничений на управление. В моменты $t = 0, 1, 2$ помеха равна нулю, идентификатор при $t = 1, 2, 3$ точно отслеживает неизвестный параметр $a = 1$ и при $t = 2, 3$ система точно двигается по назначеннной траектории. Далее при $t = 3, 7$ помеха $h(t)$ совершает колебания на предельно возможных уровнях и ошибка отслеживания назначеннной траектории достигает максимального значения $|x(t) - x^*(t)| \leq 2h_1 = 1$. При $t = 7, 12$ помеха

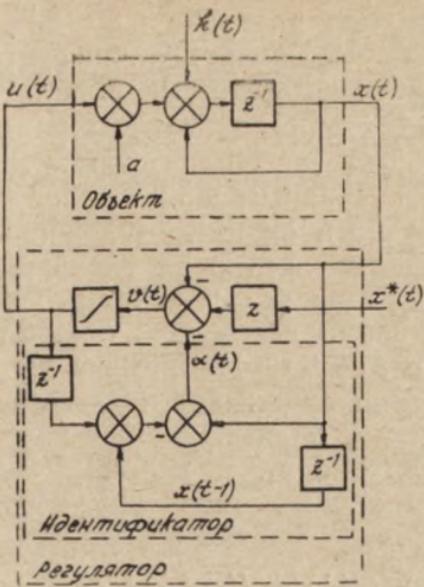


Рис. 2.1.1

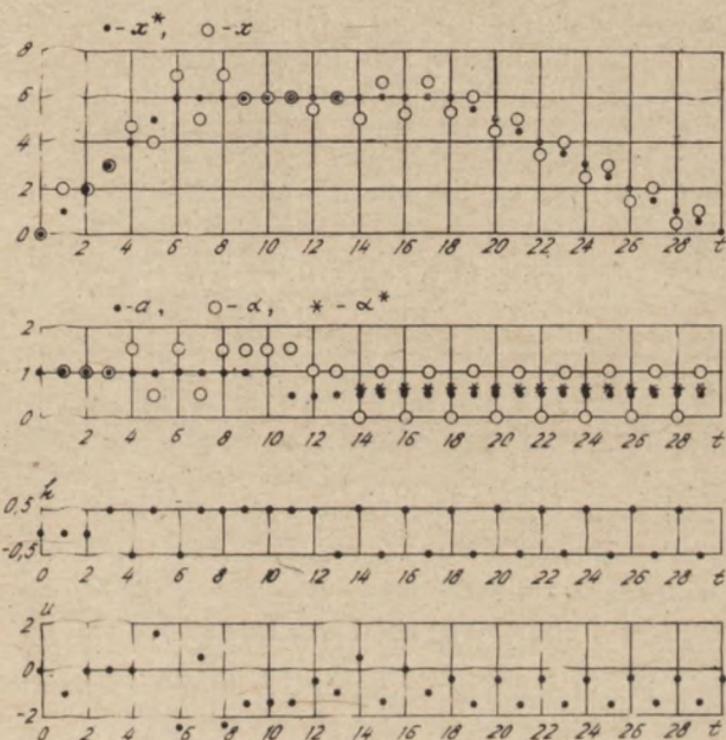


Рис. 2.1.2

ха принимает постоянное значение 0,5, идентификатор отслеживает суммарную величину $(a + h)$ и точно восстанавливает модель объекта. За счет этого при $t = 9, 11$ ошибка работы системы равна нулю. В момент $t = 11$ неизвестный параметр меняет свое значение и становится равным 0,5. Это непредвиденное возмущение приводит к ошибке отслеживания траектории при $t = 12$. Идентификатор на следующем такте после изменения параметра отслеживает это изменение и приводит к ликвидации возникшей ошибки работы системы. Начиная с $t = t_0 = 12$ помеха вновь на каждом такте попеременно принимает предельные значения. За счет этого ошибка идентификации равна максимально возможной величине h_1 . В целях уменьшения ошибки идентификации вводим оператор усреднения текущих оценок $a(t)$

$$a^*(t) = a^*(t-1) + (t-t_0)^{-1}(a(t) - a^*(t-1)), \\ t > t_0 = 12, \quad a^*(t_0) = a(t_0)$$

и при расчете $u(t)$ вместо $a(t)$ используем $a^*(t)$. На рис. 2.1.2 хорошо видно, что $a^*(t) \rightarrow a$ при $t \rightarrow \infty$. Ошибка идентификации уменьшается до нуля, а максимальная ошибка отслеживания траектории уменьшается в два раза: $|x(t) - x^*(t)| \rightarrow h_1$ при $t \rightarrow \infty$.

Пример 2. Одномерная простейшая нелинейная система описывается разностным уравнением

$$x(t+1) = ax(t)u(t) + h(t), \\ t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \quad |h(t)| \leq h_1,$$

а управление $u(t)$ не ограничено. В каждый момент времени t после измерения выхода объекта $x(t)$ идентификатор рассчитывает оценку $a(t)$ неизвестного параметра a

$$a(t) = x(t)/(x(t-1)u(t-1)),$$

а затем управляющее устройство рассчитывает и подает на объект управление

$$u(t) = x^*(t+1)/(a(t)x(t)).$$

Ошибка работы системы $e(t+1)$ равна сумме ошибки идентификации

$$\delta(t) = (a - a(t))x(t)u(t) = \\ = -x(t)u(t)/(x(t-1)u(t-1)) h(t-1)$$

и помехи $h(t)$. Учитывая ограничение на амплитуду помехи, получаем ограничение на амплитуду ошибки отслеживания называемой траектории

$$|e(t+1)| \leq ((|(x(t)u(t))/(x(t-1)u(t-1))| + 1)h_1.$$

На рис. 2.1.3 представлена схема замкнутой системы управления. Основные свойства данной системы совпадают со свойствами линейной системы, рассмотренной в примере 1.

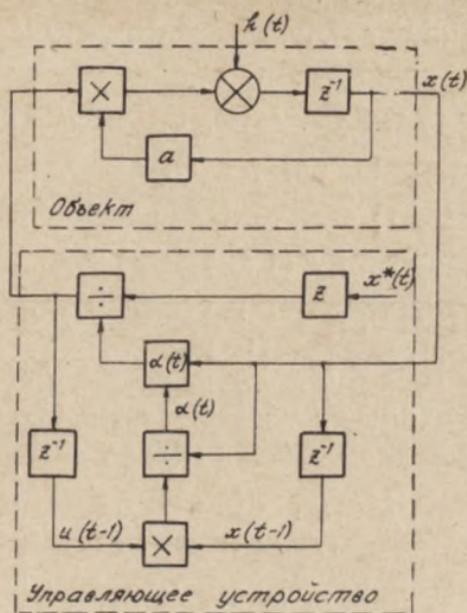


Рис. 2.1.3

Таким образом, изложенная процедура синтеза алгоритмов управления дискретных стохастических систем позволяет достаточно просто находить управляющие функции с обратной связью. Для систем с неизвестными параметрами в уравнениях движения в управляющее устройство вводится идентификатор, обеспечивающий адаптивное оценивание неизвестных параметров. Ошибка отслеживания системой заданной траектории складывается из ошибки идентификации, ошибки, обусловленной ограниченностью управляющего воздействия, и аддитивной помехи, стоящей в уравнениях движения. Ограниченность помехи позволяет рассчитывать верхнюю грань ошибки работы системы.

Целесообразно провести детальное сравнение основных свойств полученных алгоритмов (начиная с линейных систем) и известных алгоритмов управления с обратной связью.

§ 2.2. Системы с запаздываниями

Рассмотрим вначале линейные одномерные стохастические объекты, описываемые уравнением (1.3.1) с дополнительной аддитивной стохастической составляющей $\xi(t)$ в правой части

$$x(t+1) = L(a, x(t), u(t-\tau-1)) + \\ + a_{n+1}u(t-\tau) + \xi(t), \quad t \geq 0, \quad (2.2.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(-1) = x_{-1}, \dots, \quad x(1-\tau_1-n) = x_{1-\tau_1-n}, \\ u(0) = u_0, \dots, \quad u(1-\tau-m) = u_{1-\tau-m}.$$

Параметры $a_i (i = 0, \overline{n+m})$ известны, а помеха ограничена по амплитуде $|\xi(t)| \leq \xi_1$.

Критерий минимума условного математического ожидания квадратичного рассогласования выхода объекта и заданной траектории (если

$$M\{\xi(t) | x(t), x(t-1), \dots\} = 0 \\ M\{(x(t+1+\tau) - x^*(t+1+\tau))^2 | x(t), x(t-1)\dots\} = \\ = \min, \quad u_1 \leq u(t) \leq u_2$$

дает управление (1.3.5). Ошибка отслеживания заданной траектории в момент $t+1+\tau$ равна сумме помехи $h(t+\tau) \equiv \delta(\nabla) \xi(t)$ и ошибки $e_1(t+1+\tau) = \delta(1) a_0 + \delta(\nabla) b(\nabla) u(t) - \gamma(\nabla) x(t) - x^*(t+1+\tau)$, появляющейся за счет ограниченности по амплитуде реализуемых управлений. Величина ошибки $e_1(t+1+\tau)$ в момент t (после расчета оптимального управления $u(t)$) рассчитывается по указанной выше формуле и она равна нулю, если $v(t)$ не выходит за пределы допустимой области $[u_1, u_2]$. Таким образом

$$|e(t+1+\tau)| = |x(t+1+\tau) - x^*(t+1+\tau)| \leq |e_1(t+1+\tau)| + |h(t+\tau)| \leq |e_1(t+1+\tau)| + \\ + \left(1 + \sum_{i=1}^{\tau} |\delta_i|\right) \xi_1.$$

Допустим теперь, что параметры a_i ($i = \overline{0, n+m}$) в уравнении (2.2.1) неизвестны. Для их оценки в регулятор дополнительно встраиваем идентификатор. Он на основе имеющейся к моменту времени t выборки входов и выходов объекта: $x(t)$; $x(t-1)$, $u(t-1)$; $x(t-2)$, $u(t-2)$; ... вчисляет оценки параметров $a_i(t)$ ($i = \overline{0, n+m}$).

Берем модель объекта

$$\begin{aligned} y_0(\kappa) &= L(\alpha(t), \alpha(t-1), u(t-\tau-2)) + \\ &+ \alpha_{n+1}(t) u(t-\tau-1), \quad (2.2.2) \\ \kappa &= t, t-1, t-2, \dots, \end{aligned}$$

на невязках $e_0(t) = x(t) - y_0(t)$ выходов объекта и модели $E_0(t) = (e_0(t), e_0(t-1), \dots)$ строим функционал $I_0(E_0(t))$ с минимумом и в результате решения экстремальной задачи

$$I_0(E_0(t)) = \min$$

находим искомые параметры $\alpha(t)$ модели в момент времени t .

Управление $u(t)$ находим также из простейшего квадратичного критерия

$$(y(t+\tau+1) - x^*(t+\tau+1))^2 = \min, \quad u_1 \leq u(t) \leq u_2, \quad (2.2.4)$$

где

$y(t+\tau+1) = L(\alpha(t), y(t+\tau), u(t-1)) + \alpha_{n+1}(t) u(t)$, а компоненты вектора $y(t+\alpha) \equiv (y(t+\tau), y(t+\tau-1), \dots, y(t+1+\tau-n))$ определяем из рекуррентного уравнения

$$\begin{aligned} y(p) &= L(\alpha(t), y(p-1), u(p-\tau-2)) + \\ &+ \alpha_{n+1}(t) u(p-\tau-1), \quad (2.2.5) \end{aligned}$$

$$p = \overline{t+1, t+\tau}; \quad y(p) \equiv x(p), \quad p \leq t.$$

В результате получаем [см. также (1.3.5)]

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } v(t) < u_1 \\ v(t), & \text{если } u_1 \leq v(t) \leq u_2, \\ u_2, & \text{если } v(t) > u_2, \end{cases} \quad (2.2.6)$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \alpha_{n+1}^{-1}(t) (x^*(t+\tau+1) - L(\alpha(t), y(t+\tau), \\ &u(t-1))), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что вместо (2.2.1) за основу можно взять эквивалентное ему уравнение [см. обозначения в (1.3.7) (1.3.8)]

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \alpha_{n+1} u(t-\tau) + L_1(\mathbf{b}, \mathbf{u}(t-1-\tau), \\ &\quad x(t-\tau)) + h(t) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

и искать оценки $\alpha_{n+1}(t)$, $\beta(t)$ параметров в модели

$$y(t+1) = \alpha_{n+1}(t) u(t-\tau) + L_1(\beta(t), \mathbf{u}(t-1-\tau), x(t-\tau)).$$

Параметры в модель входят линейно и для идентификации можно применять многие известные методы, например, метод наименьших квадратов. Оптимальное управление теперь также рассчитывается по формуле (2.2.6), в которой

$$v(t) = \alpha_{n+1}^{-1}(t) (x^*(t+1+\tau) - L_1(\beta(t), \mathbf{u}(t-1), x(t))).$$

Ошибку отслеживания заданной траектории дополнительно включает ошибку идентификации, т. е.

$$\begin{aligned} e(t+1+\tau) &= x(t+1+\tau) - x^*(t+1+\tau) = \\ &= [(a_{n+1} - \alpha_{n+1}(t)) u(t) + L_1(\mathbf{b} - \beta(t), \mathbf{u}(t-1), \\ &\quad x(t))] + e_1(t+1+\tau) + h(t+\tau), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} e_1(t+1+\tau) &= \alpha_{n+1}(t) u(t) + L_1(\beta(t), \mathbf{u}(t-1), \\ &\quad x(t)) - x^*(t+1+\tau). \end{aligned}$$

Рассмотрим простейший пример, когда объект описывается уравнением

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + u(t-2) + a + \xi(t), \\ t \geqslant 0, |\xi(t)| &\leqslant \xi_1. \end{aligned}$$

Эквивалентным ему является уравнение (2.2.2)

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t-2) + u(t-2) + u(t-3) + u(t-4) + b + h(t), \\ b &\equiv 3a, h(t) \equiv \xi(t) + \xi(t-1) + \xi(t-2). \end{aligned}$$

Блок идентификации обеспечивает адаптивный расчет оценки $\beta(t)$ параметров b

$$\beta(t) = x(t) - x(t-3) - u(t-3) - u(t-4) - u(t-5),$$

а в оптимальном управлении (2.2.6)

$$v(t) = x^*(t+3) - x(t) - u(t-1) - u(t-2) - \beta(t), \quad t \geqslant 0.$$

Ошибка движения по заданной траектории в момент $t+3$ равна сумме ошибки идентификации $[b-\beta(t) = -[\xi(t-1) + \xi(t-2) + \xi(t-3)]]$, ошибки за счет ограниченности допустимых управлений по амплитуде $[u(t)-v(t)]$ и помехи $h(t+2)=\xi(t+2)+\xi(t+1)+\xi(t)$, то есть

$$|\dot{x}(t+3)-x^*(t+3)| \leq |u(t)-v(t)| + 6\xi_1, \quad t \geq 0.$$

Остановимся еще на одном примере. Считаем, что управляемый объект описывается стохастическим уравнением

$$\begin{aligned} x(t+1) &= a_0 + a_1 x(t) + a_2 x(t-1) + a_3 u(t-2) + \\ &\quad + \xi(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \quad x(-1) = x_{-1}, \quad u(-1) = u_{-1}, \\ u(-2) &= u_{-2}, \quad |\xi(t)| < \xi_1. \end{aligned}$$

Записываем модель объекта в форме

$$\begin{aligned} y(\kappa) &= a_0(t) + a_1(t)x(\kappa-1) + a_2(t)x(\kappa-2) + \\ &\quad + a_3(t)u(\kappa-3) \end{aligned}$$

и, полагая $\kappa = t, t-1, t-2, t-3$, составляем 4 уравнения с четырьмя неизвестными параметрами $a_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, 3$): $y(\kappa) = x(\kappa)$, $\kappa = t, t-1, t-2, t-3$. В результате решения этой системы получаем искомые параметры модели в момент времени t . С учетом этих параметров прогнозируем выход объекта в момент $t+1+\tau \equiv t+3$:

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)x(t-1) + \\ &\quad + \alpha_3(t)u(t-2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t+2) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)y(t+1) + \alpha_2(t)x(t) + \\ &\quad + \alpha_3(t)u(t-1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t+3) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)y(t+2) + \alpha_2(t)y(t+1) + \\ &\quad + \alpha_3(t)u(t). \end{aligned}$$

Затем из критерия $(y(t+3)-x^*(t+3))^2 = \min$, $u_1 \leq u(t) \leq u_2$ находим оптимальное управление для момента времени t

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } v(t) < u_1, \\ v(t), & \text{если } u_1 \leq v(t) \leq u_2, \\ u_2, & \text{если } u_2 < v(t), \end{cases}$$

$$v(t) = \alpha_3^{-1}(t) (x^*(t+3) - \alpha_0(t) - \alpha_1(t)y(t+2) - \alpha_2(t)y(t+1)).$$

Структурная схема системы управления, работающей по описанному алгоритму, представлена на рис. 2.2.1.

Представим теперь исходное уравнение объекта в форме (2.2.7)

$$x(t+1) = a_3 u(t-2) + b_0 + b_1 x(t-2) + b_2 x(t-3) + b_3 u(t-3) + b_4 u(t-4) + h(t),$$

$$\text{где } b_0 = a_0(1 + a_1 + a_1^2 + a_2); \quad b_1 = a_1(a_1^2 + 2a_2);$$

$$b_2 = a_2(a_1^2 + a_2);$$

$$b_3 = a_1 a_3; \quad b_4 = a_3(a_1^2 + a_2); \quad h(t) = \xi(t) + a_1 \xi(t-1) + (a_1^2 + a_2) \xi(t-2).$$

Моделью объекта теперь будет следующее уравнение:

$$y(\kappa) = \beta_0(t) + \beta_1(t)x(\kappa-3) + \beta_2(t)x(\kappa-4) + \alpha_3(t)u(\kappa-3) + \beta_3(t)u(\kappa-4) + \beta_4(t)u(\kappa-5).$$

Задаем в нем $\kappa = t, t-1, \dots, t-5$ и, приравнивая выход модели и выход объекта, составляем 6 линейных уравнений с 6 неизвестными параметрами

$$x(\kappa) = y(\kappa), \quad \kappa = t, t-1, \dots, t-5.$$

Получим алгоритм работы идентификатора. Если использовать более глубокую память по входам и выходам объекта, то указанная выше система линейных уравнений будет переопределена и для расчета единственного набора параметров модели необходимо применить метод наименьших квадратов.

В заключение по критерию $(y(\kappa+3) - x^*(\kappa+3))^2 = \min$, $u_1 \leq u(t) \leq u^2$ находим оптимальное управление

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } v(t) < u_1, \\ v(t), & \text{если } u_1 \leq v(t) \leq u_2, \\ u_2, & \text{если } u_2 < v(t), \end{cases}$$

$$v(t) = \alpha_3^{-1}(t)(x^*(t+3) - \beta_0(t) - \beta_1(t)x(t) - \beta_2(t)x(t-1) - \beta_3(t)u(t-1) - \beta_4(t)u(t-2)).$$

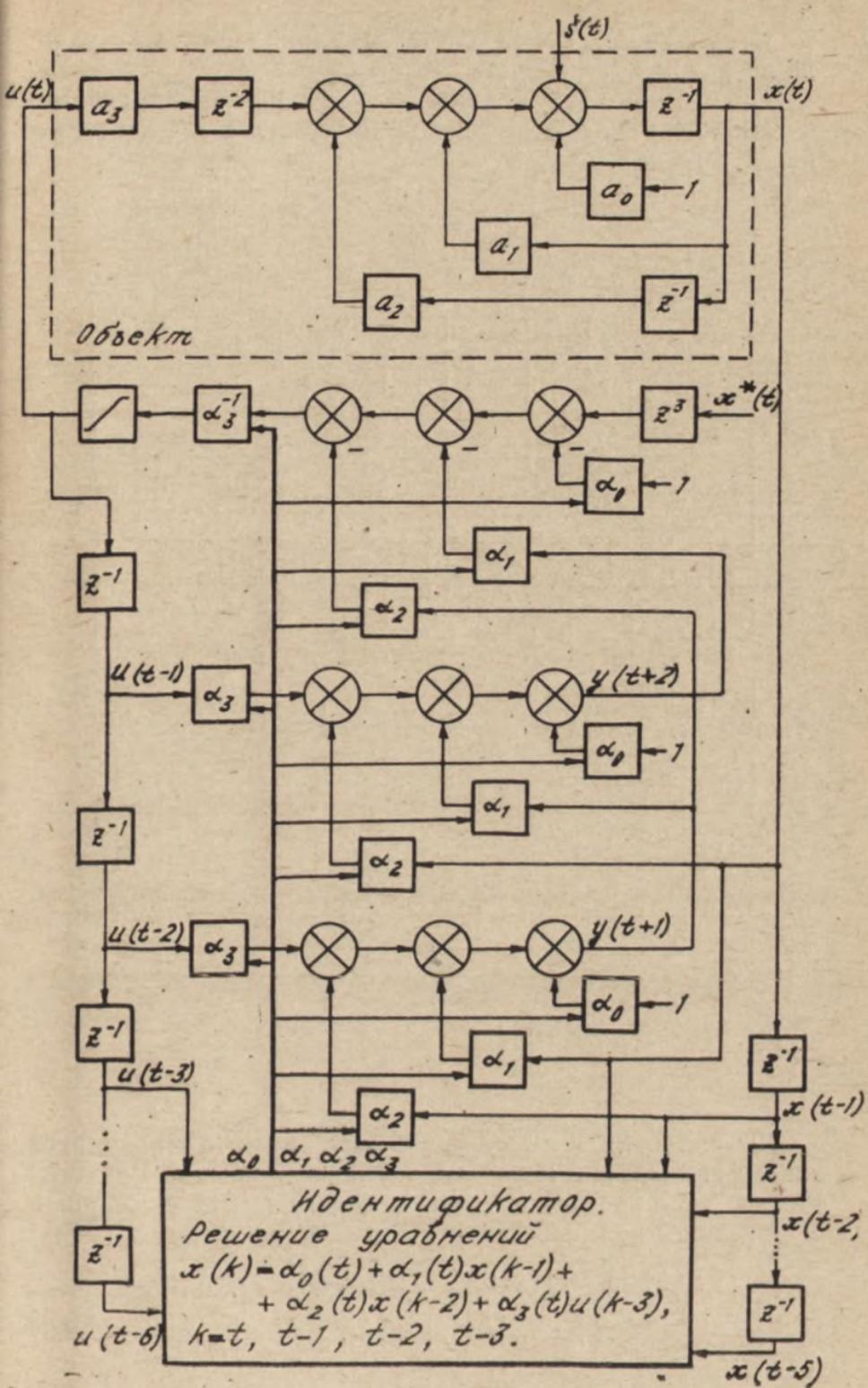


Рис. 2.2.1

Структурная схема системы управления изображена на рис. 2.2.2.

Сравнение двух различных схем управления одним и тем же объектом выявит преимущества и недостатки каждой из них.

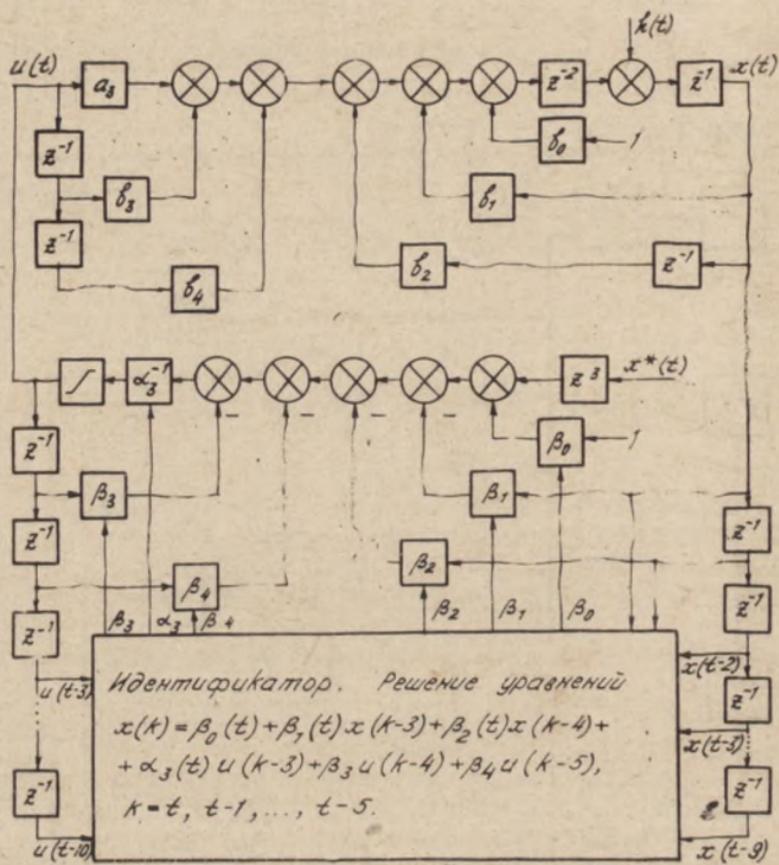


Рис. 2.2.2

По аналогии с линейными системами производится синтез управлений и для нелинейных объектов. Рассмотрим для конкретности объект, описываемый скалярным простейшим нелинейным разностным уравнением

$$x(t+1) = f(x(t-\tau), u(t-\tau), a) + h(t),$$

$$t \geq 0, |h(t)| \leq h_1. \quad (2.2.8)$$

В момент t после получения нового измерения выхода объекта $x(t)$ осуществляется идентификация скалярного параметра $\alpha(t)$ из условия равенства выходов объекта и модели

$$x(t) = f(x(t-1-\tau), u(t-1-\tau), \alpha(t)),$$

т. е. производится итерационная настройка параметра $\alpha(t)$ модели

$$\alpha^{l+1}(t) = \alpha^l(t) + \left(\frac{\partial f(\cdot)}{\partial \alpha} \right)^{-1} (x(t) - f(\cdot)),$$

$$f(\cdot) \equiv f(x(t-1-\tau), u(t-1-\tau), \alpha^l(t)), \\ l = 0, 1, 2, \dots$$

до выполнения вышеуказанного равенства с заданной точностью. Расчет управлений ведется по формуле

$$u^{l+1}(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } v^l(t) < u_1, \\ v^l(t), & \text{если } u_1 \leq v^l(t) \leq u_2, \\ u_2, & \text{если } u_2 < v^l(t), \end{cases}$$

$$v^l(t) = u^l(t) + \left(\frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} \right)^{-1} (x^*(t+1+\tau) - f(\cdot)),$$

$$f(\cdot) = f(x(t), u^l(t), \alpha(t)), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \\ u^0(t) = u(t-1).$$

Итерационная коррекция искомого управляющего воздействия производится до выполнения, например, такого условия:

$$|f(x(t), u^{l+1}(t), \alpha(t)) - f(x(t), u^l(t), \alpha(t))| \leq \varepsilon.$$

Ошибка отслеживания траектории $x^*(t+1+\tau)$ ($t \geq 0$) равна величине

$$e(t+1+\tau) = x(t+1+\tau) - x^*(t+1+\tau) = \\ = [f(x(t), u(t), \alpha) - f(x(t), u(t), \alpha(t))] + \\ + e_1(t+1+\tau) + h(t+\tau),$$

$$e_1(t+1+\tau) = f(x(t), u(t), \alpha(t)) - x^*(t+1+\tau)$$

и также складывается из ошибки идентификации $[\cdot]$, ошибки $e_1(t+1+\tau)$, вызванной ограниченностью управления по амплитуде, и помехи $h(t+\tau)$. Первый член можно оценить по результатам работы блока иденти-

ификации, второй рассчитывается точно после вычисления оптимального управления $u(t)$ в момент t . Последнее слагаемое $h(t+\tau)$ также имеет верхнюю оценку $|h(t+\tau)| \leq h_1$.

Более сложными по сравнению с (2.2.8) являются нелинейные системы, описываемые уравнениями:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t-\tau), a) + h(t), \\ t &\geq 0, \quad x(0) = x_0, \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

где x, u, a, h — векторы координат состояния, управляющих воздействий, неизвестных параметров и случайных помех. Цель управления также состоит в максимально возможном приближении выходной координаты объекта к желаемой траектории x^* . В момент t на основе имеющейся информации о входах и выходах объекта $(x(t); x(t-1), u(t-1); x(t-2), u(t-2) \dots)$ по адаптивным алгоритмам с памятью [см., например, (2.2.3)] находим оценку $a(t)$ вектора параметров a . Затем строим модель прогноза выхода объекта

$$\begin{aligned} y(k+1) &= f(y(k), u(k-\tau), a(t)), \quad k = t, \\ &\quad t+1, \dots, t+\tau, \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

и по критерию минимума экстремальной функции невязки

$$\begin{aligned} I(e_1(t+\tau+1)) &= \min, \quad u_1 \leq u(t) \leq u_2, \\ e_1(t+\tau+1) &= x^*(t+\tau+1) - f(y(t+\tau), \\ &\quad u(t), a(t)), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

находим оптимальное управление $u(t)$. Ошибку работы данной нелинейной системы удается оценить пока только для конкретных классов объектов.

Рассмотрим пример. Управляемый объект

$$\begin{aligned} x(t+1) &= ax(t)u(t-1) + h(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \quad |h(t)| < h_1, \quad u(-1) = u_{-1} \end{aligned}$$

имеет неизвестный постоянный параметр a и чистое запаздывание по $u(t)$ на один такт. Устройство управления с идентификатором работает по следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} a(t) &= x(t)/(x(t-1)u(t-2)); \\ u(t) &= x^*(t+2)/(a^2(t)x(t)u(t-1)), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Алгоритм синтезирован по описанной выше схеме с учетом неограниченности управлений по амплитуде. Ошибка работы системы имеет вид

$$e(t+2) = x(t+2) - x^*(t+2) = \left[\left(2\alpha(t) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{h(t-1)}{x(t-1)u(t-2)} \right) \cdot \left(- \frac{h(t-1)}{x(t-1)u(t-2)} \right) \times \right. \\ \left. \times x(t)u(t)u(t-1) \right] + \left(\alpha(t) - \frac{h(t-1)}{x(t-1)u(t-2)} \right) \times \\ \times h(t)u(t) + h(t+1)$$

и она выражена через известные переменные ($\alpha(t)$, $x(t)$, $u(t)$, $x(t-1)$, $u(t-1)$, $u(t-2)$) и помеху ($h(t+1)$, $h(t)$, $h(t-1)$).

Описанные алгоритмы переносятся на многомерные системы, а для класса линейных стохастических объектов алгоритмы реализованы в системе управления (с помощью цифровой вычислительной машины) внутриванными гальванопроцессами [13].

§ 2.3. Непрерывные системы

Рассматриваем управляемый объект (1.4.1) с аддитивной случайной помехой в правой части уравнения движения

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + h(t), \\ t > 0, x(0) = x_0. \quad (2.3.1)$$

Схема расчета управления не отличается от детерминированного случая, только в (1.4.3) вместо $e(t + \Delta t)$ будет стоять отклонение выхода модели и $x^*(t + \Delta t)$, т. е. $e_1(t + \Delta t) = y(t + \Delta t) - x^*(t + \Delta t)$, где $y(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t), u(t))$. Алгоритм расчета управления сохраняет вид (1.4.3)

$$u(t) = G \left(\frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, x(t) \right), \quad t \geq 0. \quad (2.3.2)$$

При отсутствии ограничений на управление

$$u(t) = f^{-1} \left(\frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, x(t) \right), \quad t \geq 0,$$

и уравнение замкнутой системы в отличие от (1.4.6) содержит аддитивную помеху $h(t)$:

$$\dot{x}(t) = \frac{x^*(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + h(t), \quad t > 0.$$

При $|\dot{x}(t)| < \infty$ и при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем, что $x(t) \rightarrow x^*(t + \Delta t) + \Delta t h(t)$ и предельные статистические свойства системы определяются свойствами помехи $\Delta t h(t)$.

Наличие в других более сложных уравнениях движения объектов (рассмотренных, например, в §1.4) аддитивной помехи по сравнению со случаем без помех также не меняет основных расчетных формул для управлений, но в ошибке отслеживания заданной траектории появляется аддитивная помеха $\Delta t h(t)$.

§ 2.4. Стабилизация двухколесного экипажа

Динамические свойства управляемого двухколесного экипажа (велосипеда), движущегося с постоянной

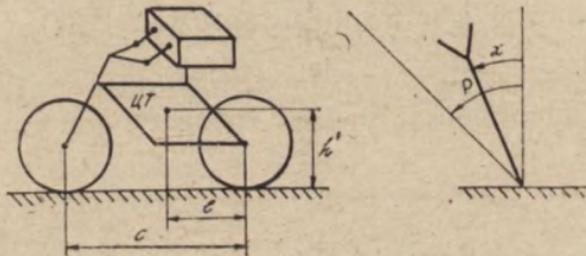


Рис. 2.4.1

скоростью, описываются обычным линейным дифференциальным уравнением [7]

$$\ddot{x}(t') - a'_1 \dot{x}(t') = a'_2 u(t') + a'_3 \dot{u}(t') + \xi(t'), \quad (2.4.1)$$

$$t' > 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x'_0.$$

Здесь c, l, h' — конструктивные параметры (см. рис. 2.4.1), измеряемые в метрах; $x(t')$ — угол (град.) отклонения рамы от вертикали; $u(t)$ — угол поворота руля; t' — непрерывное время (с); $a'_1 = g/h'$, $a'_2 = V^2/(h'c)$, $a'_3 = lV/h'c$, V — скорость (м/с) движения экипажа; g — ускорение ($\text{м}/\text{с}^2$) свободного

падения; $\xi(t')$ — возмущения, вызванные неровностями дороги, ветром и др. Уравнение (2.4.1) справедливо только для $|x(t')| \leq p$. При превышении отклонения $x(t')$ величины p экипаж совершает падение и его необходимо вновь устанавливать в исходное состояние и отпускать. Считаем, что $t' = 0$ соответствует начальному запуску объекта, а также запуску после каждого падения или вынужденной остановки. Экипаж устанавливают почти вертикально и отпускают, при этом $|x(0)| \leq \varepsilon_0$, $\dot{x}(0) = 0$, и он движется с постоянной скоростью V . Заметим, что при $u(t') = 0$ объект неустойчивый (ибо $a'_1 > 0$), экипаж падает.

Рулевой механизм по сигналам от устройства управления в моменты времени $t' = 0, \delta, 2\delta, \dots, t\delta, \dots$ быстро поворачивает руль в заданные положения и оставляет руль в этих положениях в течение интервала времени между указанными дискретами, т. е. управление является кусочно-постоянной функцией времени:

$$u(t') = u(t), \quad t\delta \leq t' < (t+1)\delta, \\ t = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.4.2)$$

Измерительный механизм также фиксирует величины $x(t')$ в дискретные моменты $t' = t\delta$ ($t = 0, 1, 2, \dots$).

С учетом дискретности управления (2.4.2) переходим от непрерывного уравнения управляемого объекта (2.4.1) к дискретному

$$x(1) = (a_1/2)x(0) + \xi(0); \\ (2.4.3)$$

$$x(t+1) = a_1x(t) + a_2x(t-1) + a_3u(t) + \\ + a_4u(t-1) + \xi(t), \\ t = 1, 2, \dots,$$

где $u(0) = 0$; $a_1 = 2 \operatorname{ch} \gamma$; $a_2 = -1$; $a_3 = [a'_2(\operatorname{ch} \gamma - 1) + a'_3 V \overline{a'_1} \operatorname{sh} \gamma]/a'_1$; $a_4 = [a'_2(\operatorname{ch} \gamma - 1) - a'_3 V \overline{a'_1} \operatorname{sh} \gamma]/a'_1$; $\gamma = \delta \sqrt{\overline{a'_1}}$; $\xi(t)$ — „дискретное“ возмущение, порожденное возмущением $\xi'(t')$.

Необходимо стабилизировать движение двухколесного экипажа в положении $x^*(t) = 0$ при неизвестных параметрах c, h, l, V (либо параметрах $a_1 \div a_4$), при наличии неизвестной ограниченной по амплитуде поме-

хи $\xi(t)$ (т. е. $|\xi(t)| < \xi_1$) и с учетом ограниченности управляющего воздействия, т. е. $|u(t)| \leq u_1$.

Опишем алгоритм управления (см. § 2.1). В момент времени t снимается информация о положении объекта $x(t)$, производится перестройка параметров модели, рассчитывается и поддается на рулевой механизм управляющее воздействие $u(t)$. В следующий дискретный момент времени $t+1$, соответствующий реальному времени $t' = (t+1)\delta$, все операции повторяются.

В идентификаторе реализуем простейший одношаговый (с минимальной памятью) алгоритм коррекции параметров модели. Модель объекта (2.4.3) имеет вид

$$\begin{aligned} y(\kappa, \alpha(t)) &= \alpha_1(t)x(\kappa-1) + \alpha_2(t)x(\kappa-2) + \\ &+ \alpha_3(t)u(\kappa-1) + \alpha_4(t)u(\kappa-2) = \alpha^T(t)z(\kappa-1) \equiv \\ &\equiv z^T(\kappa-1)\alpha(t). \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

При $\kappa = t$ приравниваем выход модели $y(t, \alpha(t))$ и измеренный выход объекта $x(t)$

$$x(t) = y(t, \alpha(t)). \quad (2.4.5)$$

Это уравнение относительно $\alpha(t)$ имеет бесчисленное множество решений. Для получения единственного решения применим оператор псевдообращения и будем отыскивать вначале не сами параметры, а их коррекцию $\Delta\alpha(t)$. Обозначим $\alpha(t) = \alpha(t-1) + \Delta\alpha(t)$ и тогда равенство (2.4.5) приобретет вид

$$x(t) - y(t, \alpha(t-1)) = y(t, \Delta\alpha(t)) \equiv z^T(t-1)\Delta\alpha(t) \quad (2.4.6)$$

Теперь находим вектор $\Delta\alpha(t)$, удовлетворяющий этому уравнению и имеющий минимальный квадрат нормы

$$\|\Delta\alpha(t)\|^2 = \min, \quad (2.4.7)$$

то есть

$$\Delta\alpha(t) = (z^T(t-1))^+ (x(t) - y(t, \alpha(t-1))), \quad (2.4.8)$$

$$(z^T(t-1))^+ = \frac{z(t-1)}{z^T(t-1)z(t-1)} =$$

$$= \frac{z(t-1)}{x^2(t-1) + x^2(t-2) + u^2(t-1) + u^2(t-2)} \quad (2.4.8)$$

Здесь $+$ — операция псевдообращения прямоугольных матриц. После расчета приращения находим сами параметры

$$a(t) = a(t-1) + \Delta a(t). \quad (2.4.9)$$

Скорректировав параметры модели, вычисляем прогноз выхода объекта для момента времени $t+1$:

$$\begin{aligned} y(t+1, a(t)) = & a_1(t)x(t) + a_2(t)x(t-1) + \\ & + a_3(t)u(t) + a_4(t)u(t-1) \end{aligned}$$

и из условия минимума рассогласования прогнозируемого значения и назначаемой траектории $x^*(t+1) = 0$ находим управляющее воздействие

$$\begin{aligned} u(t) = & -\alpha_3^+(t)(\alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)x(t-1) + \\ & + \alpha_4(t)u(t-1)), \\ \alpha_3^+ = & \begin{cases} \alpha_3^{-1}, & \text{если } |\alpha_3| \geq \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |\alpha_3| < \varepsilon. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Считаем, что переход управления $u(t)$ за допустимый интервал $(-u_1, u_1)$ равносителен падению экипажа.

Проведем исследование работы полученной замкнутой системы управления, состоящей из велосипеда и робот-велосипедиста, в котором реализованы указанные выше алгоритмы идентификаций и управления. Вначале имитация объекта (2.4.3) была проведена при следующих значениях параметров: $c = 1,1$; $l = 0,7$; $h' = 0,6$; $V = 6$; $g = 9,81$; $\delta = 0,2$. Параметры объекта оказались равными величинам: $a_1 = 2,69$; $a_2 = -1$; $a_3 = 2,42$; $a_4 = -0,12$. Были заданы также параметры, характеризующие начальное положение объекта $\varepsilon_0 = 0,1^\circ$ (т. е. $|x(0)| \leq \varepsilon_0$, $x(0) = 0$), допустимую область для $x(t)$ и $u(t)$, $p = u_1 = 45^\circ$ (т. е. $|x(t)| \leq p$, $|u(t)| \leq u_1$) и уровень помех ξ_1 (т. е. $|\xi(t)| \leq \xi_1$). Последний параметр является варьируемым и его значения будут приведены на графиках. Длительность разового экспериментирования на объекте (длительность игры) была принята равной 60 с, что при длительности одной дискреты, равной $\sigma = 0,2$ с, соответствует 300 тактам для дискретного уравнения объекта (2.4.3).

Основными выходными характеристиками замкнутой системы управления (робот-велосипедист — велосипед) были приняты: T_0 — время обучения, за которое

условно было принято время последнего падения, N — число падений за время обучения.

В модели объекта (2.4.4) в начале каждой игры исходные приближения параметров $a_1(0)$, $a_2(0)$, $a_4(0)$ были приняты нулевыми, а параметр $a_3(0)$ варьировался. Такая стратегия обусловлена тем, что наибольшее влияние на процесс обучения оказывает $a_3(0)$.

На рис. 2.4.2. отражено типичное поведение выходной координаты объекта $x(t)$ при различных уровнях помех $\xi_1 = 7,5^\circ; 13^\circ; 36^\circ$ и при $a_4(0) = 2$. При малом уровне помех $|\xi(t)| \leq 7,5^\circ$ процесс обучения происходит без падений. С течением времени параметры модели существенно перестраиваются, а затем совершают колебания (вызванные помехами) в стационарной области. Выходная координата объекта лежит внутри области $|x(t)| \leq 10^\circ$, которая несколько шире (за счет ошибки идентификации) области действия помехи $\xi(t)$. С увеличением интенсивности помехи $|\xi(t)| \leq 13^\circ$ в период обучения робота-велосипедиста экипаж совершает падения. После окончания процесса обучения координата состояния объекта лежит в пределах $|x(t)| \leq 18^\circ$. При большом уровне помех $|\xi(t)| \leq 36^\circ$ падения происходят до самого конца игры и в среднем не удается после обучения обеспечить стабилизацию объекта: $|x(t)| \leq 45^\circ$.

Получены графики зависимостей числа падений за период обучения N и времени обучения T_0 от интенсивности помехи ξ_1 . Каждая точка графика представляет собой результат усреднения данных двадцати реализаций. Лучшие результаты получены при исходном приближении параметра $a_3(0)$, близком к истинному $a_3 = 2,42$, (см. рис. 2.4.3 при $a_3(0) = 2$) и при достаточно больших положительных значениях $a_3(0)$ (см. рис. 2.4.3 при $a_3(0) = 50$ и при $a_3(0) = 100$). Задание $a_3(0)$ близким к нулю и равным отрицательным величинам дает существенно худшие результаты (см. рис. 2.4.4 при $a_3(0) = 0,01$ и при $a_3(0) = -10$). Ограничение графика $T_0(\xi_1)$ уровнем 60 с обусловлено принятой длительностью игры (равной 60 с).

Синтезированный алгоритм работы робота-велосипедиста позволяет приспосабливаться к изменению параметров объекта. Изменение параметров велосипеда равносильно перестановке робота-велосипедиста с одного велосипеда на другой, отличающейся размерами и ско-

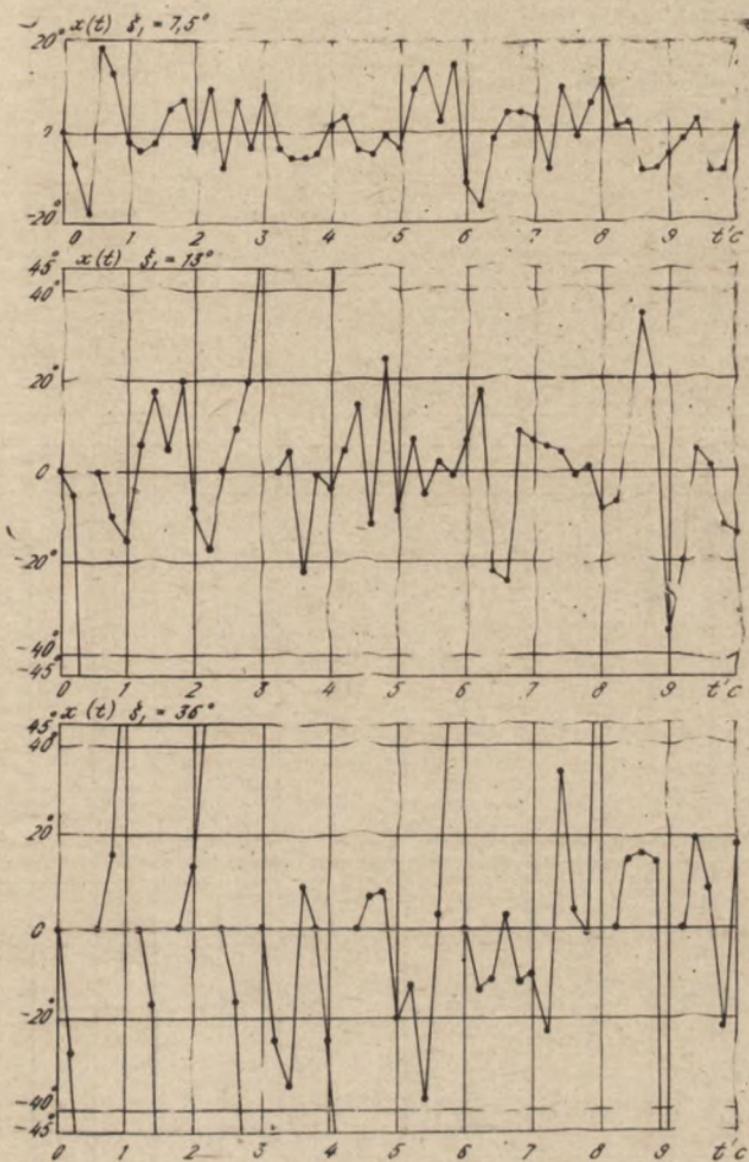


Рис. 2.4.2

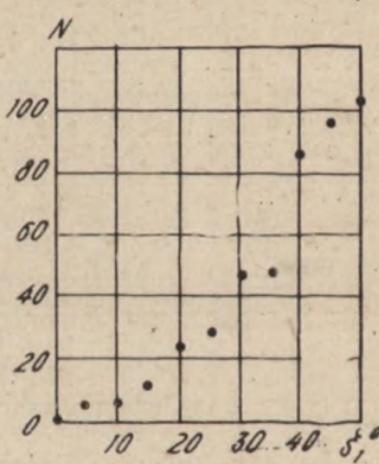
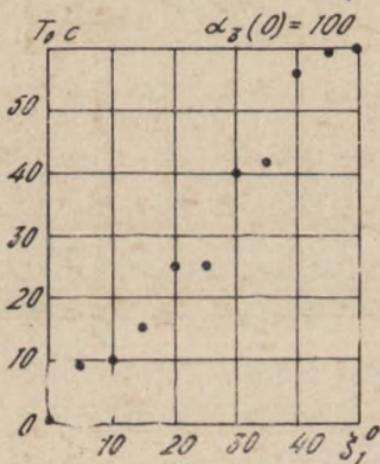
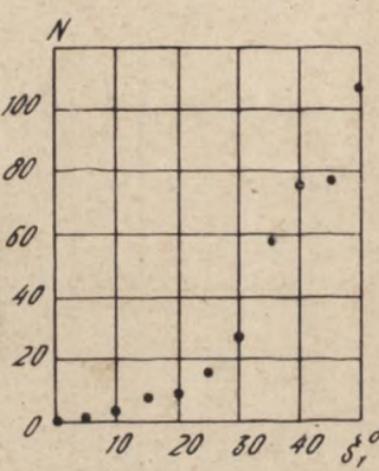
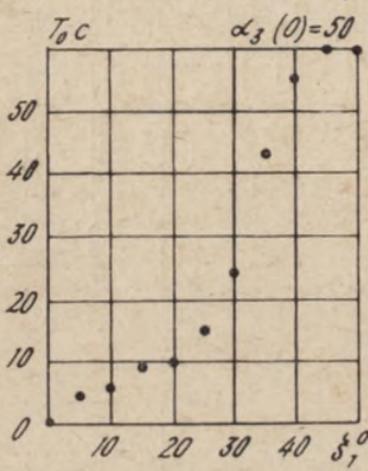
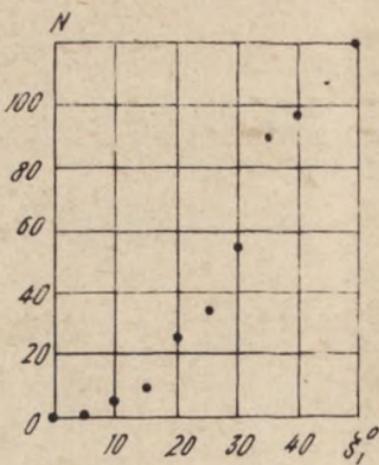
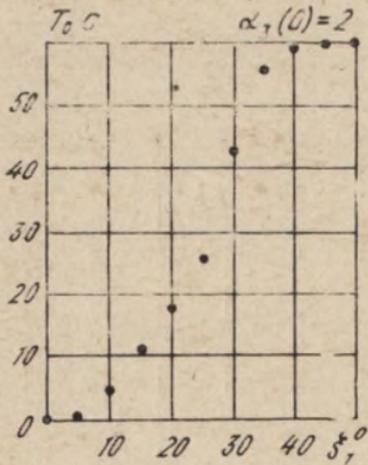


Рис. 2.4.3

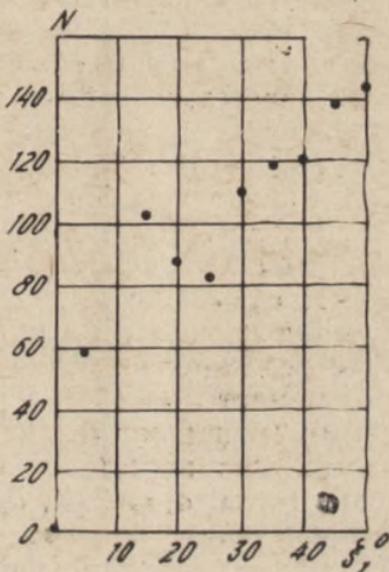
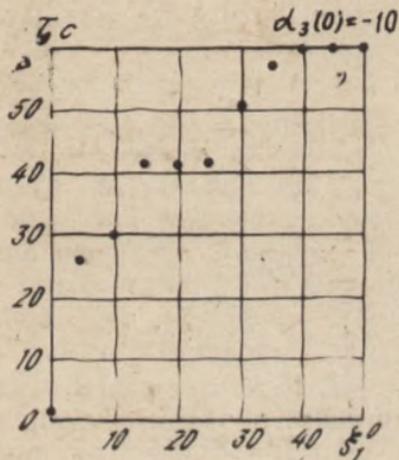
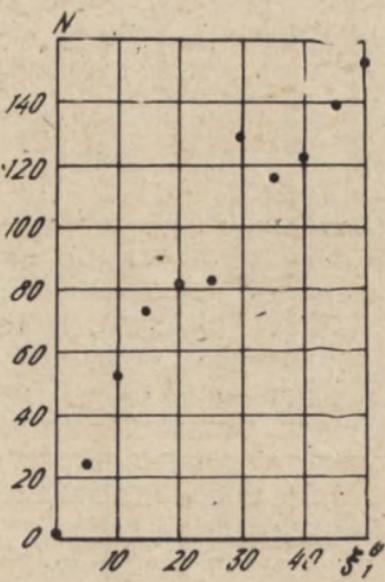
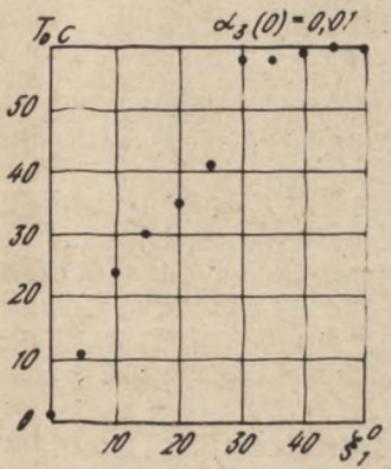


Рис. 2.4.4

ростью движения. Графики, иллюстрирующие качество работы системы, приведены на рис. 2.4.5. На первом графике показано изменение во времени координаты $x(t')$ объекта, а на втором графике — величины

$$S(t') = \frac{1}{a_3} \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{\alpha_1(t')}{\alpha_3(t')}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a_3} - \frac{\alpha_2(t')}{\alpha_3(t')}\right)^2 + \left(\frac{a_4}{a_3} - \frac{\alpha_4(t')}{\alpha_3(t')}\right)^2},$$

характеризующей качество работы идентификатора (ибо при $\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_2, \alpha_3 = a_3, \alpha_4 = a_4, S = 0$) и стабилизируемость системы (если $S(t' = t^*) < S_1$, то при $t' > t^* |x(t)| < x_1$). В период $0 \leq t' < 5$ с производится управление объектом с параметрами, указанными выше, при $a_3(0) = 0,01$ и $\xi_1 = 2$. На начальной стадии обучения экипаж совершает два падения. Величина S вначале резко нарастает из-за резкой перестройки параметров модели, а затем совершает колебания у границы зоны стабилизации S_1 .

В момент $t' = 5$ с меняется высота велосипеда $h' = 10$ (в предыдущем случае было $h' = 0,6$). Параметры объекта (2.4.3) принимают значения $a_1 = 2,04; a_2 = -1; a_3 = 4,0; a_4 = -3,87$. Величина S резко увеличивается, велосипед раскачивается, идентификатор корректирует параметры модели и со временем (при $5 \text{ с} < t < 10 \text{ с}$) стабилизация улучшается.

В момент времени $t' = 10$ с уменьшается скорость велосипеда до величины $V = 0,5$ (ранее было $V = 6$). Параметры объекта принимают значения $a_1 = 2,04; a_2 = -1; a_3 = 0,33; a_4 = -0,33$. На начальной стадии обучения происходит одно падение, а затем после установки велосипеда наблюдается хорошая стабилизация.

В момент $t' = 15$ с параметры c и l полагаются нулевыми (ранее они были $c = 1,1, l = 0,7$), т. е. робот-велосипедист переставляется на велосипед с одним колесом. Тогда $a_1 = 2,04, a_2 = -1, a_3 = a_4 = 0,72$. Сразу же происходит падение экипажа, а затем в процессе обучения — еще два падения. При $18 \text{ с} < t' < 30 \text{ с}$ робот осуществляет хорошую ($|x(t)| \leq 2,5^\circ$) стабилизацию велосипеда.

В момент $t' = 30$ с вновь задаются исходные параметры $c = 1,1; l = 0,7; h' = 0,6; V = 6$ ($a_1 = 2,69;$

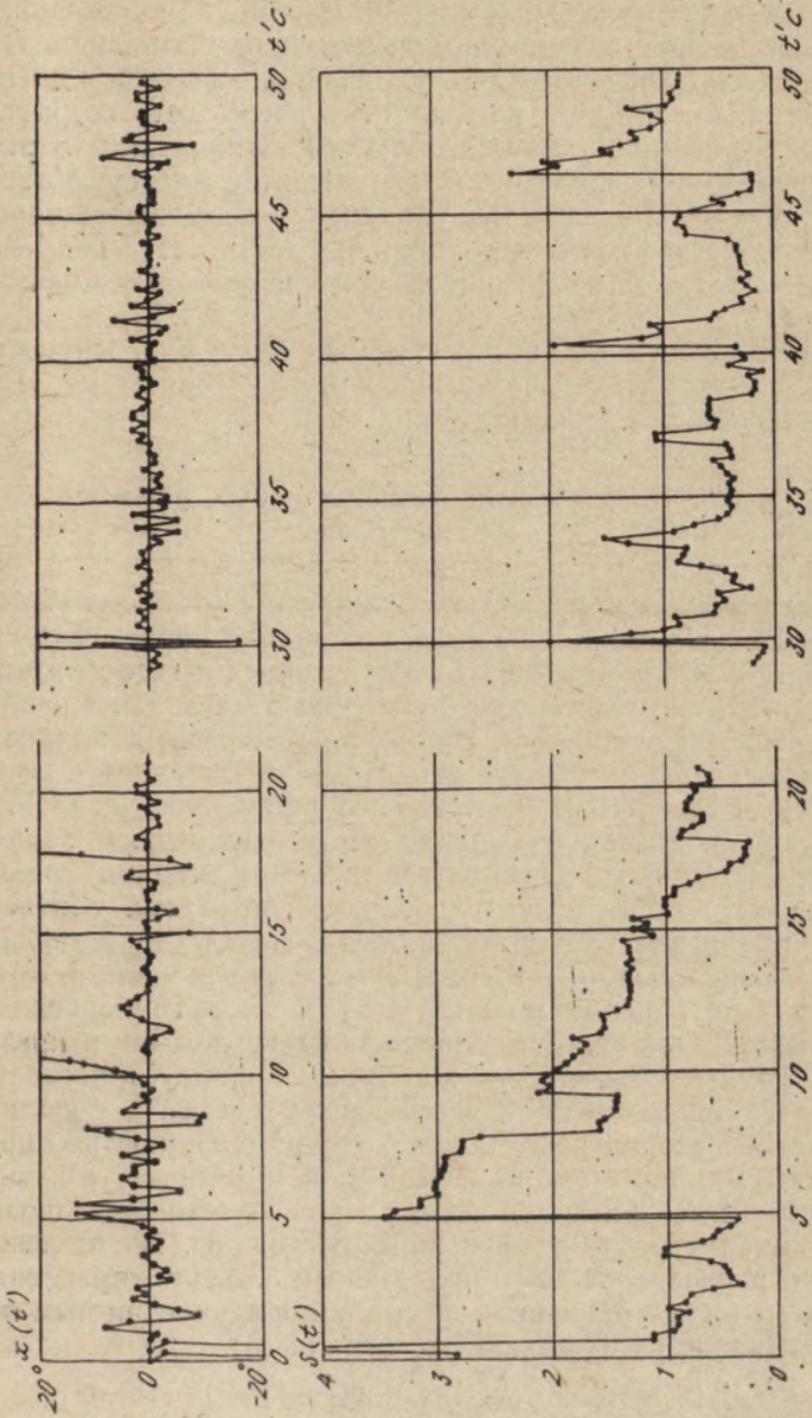


Рис. 2.4.5

$a_2 = -1$; $a_3 = 2,42$; $a_4 = -0,12$). Экипаж совершает одно падение, а затем наблюдается стабилизация. Периодически (видимо из-за ухудшения качества идентификации) возрастает величина S и после этого возрастает раскачивание экипажа. По мере уменьшения S раскачивание уменьшается. Следовательно, для существенного улучшения качества управления необходимо повышать качество идентификации. Это достигается применением более эффективных алгоритмов идентификации (12).

В заключение автор выражает благодарность В. М. Френкелю, реализовавшему алгоритм на ЭВМ и выполнившему ряд расчетов.

§ 2.5. Поддержание температурных режимов жидкых сред

Одними из наиболее распространенных задач управления в технике и быту являются задачи управления нагревом и охлаждением жидких, твердых и газообразных сред. Для автоматического решения этих задач в реальном масштабе времени с помощью цифровых вычислительных машин можно использовать описанные выше метод и алгоритмы адаптивного управления с идентификацией. В подтверждение этого рассмотрим задачу поддержания температурного режима жидкой среды, например, электролита гальванической ванны. Считаем, что измерение температуры жидкости $x(t)$ производится в фиксированной точке ванны, а управление ведется за счет изменения расхода $u(t)$ пара в трубопроводе, греющем ванну. Управление $u(t)$ лежит в пределах $[0, u_2]$. Охлаждение жидкости в ванне происходит за счет теплообмена с окружающей средой и дополнительного теплоотвода более холодной жидкостью, проходящей, например, по змеевику, помещенному в ванну. Считаем, что расход и температура холодной жидкости и температура греющего пара постоянны. Во введении монографии показано, что данный объект управления описывается уравнением второго порядка с чистым запаздыванием управляющего сигнала (5)

$$x(t+1) = a_0 + a_1 \dot{x}(t) + a_2 x(t-1) + a_3 u(t-\tau) + \\ + a_4 u(t-\tau-1) + h(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5.1)$$

Здесь t — номер дискреты; a_i ($i = \overline{0, 4}$) — неизвестные параметры; $h(t)$ — случайная помеха, $|h(t)| \leq h_1$. В дискретные моменты реального времени $t' = t\delta$, где δ — интервал дискретизации, производится измерение температуры $x(t)$, ввод этой информации в вычислительную машину (управляющее устройство) и выдача с вычислительной машины на управляющие механизмы рассчитанного оптимального управляющего воздействия $u(t)$. Необходимо синтезировать закон управления, обеспечивающий изменение температуры жидкости в ванне по заданному закону $x^*(t + 1 + \tau)$ ($t \geq 0$). При $x^*(t + 1 + \tau) = x^* = \text{const}$ цель управления заключается в стабилизации температуры на уровне x^* .

На каждом такте выработки оптимального управления строится математическая модель прогноза температуры (решается задача идентификации), а по ней рассчитывается оптимальное управление (см. § 2.2). Принципиально алгоритмы отличаются по способу построения модели. Ниже будет рассмотрено три варианта расчета модели.

Модель задаем в виде детерминированной части уравнения объекта (2.5.1)

$$\begin{aligned} y(x) = & \alpha_0(t) + \alpha_1(t)x(\kappa - 1) + \alpha_2(t)x(\kappa - 2) + \\ & + \alpha_3(t)u(\kappa - \tau - 1) + \alpha_4(t)u(\kappa - \tau - 2) \equiv \alpha_0(t) + \\ & + \alpha^T(t)X(\kappa - 1), \quad \kappa \leq t. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Отсюда получаем модель в приращениях

$$\begin{aligned} \delta y(\kappa) \equiv & y(\kappa) - y(\kappa - 1) = \alpha_1(t)\delta x(\kappa - 1) + \\ & + \alpha_2(t)\delta x(\kappa - 2) + \alpha_3(t)\delta u(\kappa - \tau - 1) + \\ & + \alpha_4(t)\delta u(\kappa - \tau - 2) \equiv \alpha^T(t)\delta X(\kappa - 1), \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

где $\delta x(\kappa - 1) \equiv x(\kappa - 1) - x(\kappa - 2), \dots, \kappa \leq t$. Модели (2.5.2), (2.5.3) используем при идентификации.

Оптимальное управление имеет вид (2.2.6)

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } v(t) < 0, \\ v(t), & \text{если } 0 \leq v(t) \leq u_2, \\ u_2, & \text{если } u_2 < v(t), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v(t) = & \alpha_3^{-1}(t)(x^*(t + \tau + 1) - \alpha_0(t) - \alpha_1(t)y(t + \tau) - \\ & - \alpha_2(t)y(t + \tau - 1) - \alpha_4(t)u(t - 1)), \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

$$y(\kappa) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)y(\kappa-1) + \alpha_2(t)y(\kappa-2) + \\ + \alpha_3(t)u(\kappa-\tau-1) + \alpha_4(t)u(\kappa-\tau-2), \\ \kappa = \overline{t+1, t+\tau}, \quad y(\kappa) = x(\kappa), \quad \kappa \leq t.$$

Качество управления существенно зависит от качества идентификации параметров, причем с ростом величины запаздывания τ ошибка прогноза выхода объекта ($x(t+\tau+1)-y(t+\tau+1)$) нарастает, а это, в свою очередь приводит к увеличению ошибки отслеживания заданной траектории ($x(t+\tau+1)-x^*(t+\tau+1)$).

Идентификацию параметров модели осуществляем по трем алгоритмам. В первом из них за основу взята модель в приращениях (2.5.3) и перестройка параметров ведется по простейшему адаптивному двухшаговому алгоритму

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \alpha^l + \frac{\Delta_2(\alpha^l, t) - h_1 \operatorname{sign} \Delta_2}{\delta X^T(t-1) \delta X(t-1)} \delta X(t-1); \\ \alpha^{l+1} &= \hat{\alpha} + \frac{\Delta_2(\hat{\alpha}, t) - h_1 \operatorname{sign} \Delta_2}{\delta X^T(t-1) \delta X(t-1)} \delta X(t-1); \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, l_1, \quad \alpha^0 \equiv \alpha(t-1), \quad \alpha^{l_1+1} \equiv \alpha(t);$$

$$\Delta_2(\alpha, t) = (x(t) - x(t-1) - \alpha^T(t) \delta X(t-1)),$$

$$\alpha_0(t) = \alpha_0(t-1) + \gamma (\hat{\alpha}_0(t) - \alpha_0(t-1)), \quad \hat{\alpha}_0(t) = x(t) - \alpha^T(t) \delta X(t-1), \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad \gamma \rightarrow 1 \text{ при } h_1 \rightarrow 0.$$

Здесь I_1 — количество шагов, при котором первый раз выполнено условие для невязки Δ_2

$$|\Delta_2(\alpha^{l_1+1}, t)| < 2h_1. \quad (2.5.6)$$

После прихода в каждый момент времени t нового измерения выхода объекта $x(t)$ производится рекуррентная коррекция (2.5.5) параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ до выполнения условия (2.5.6), расчет свободного члена $\hat{\alpha}_0(t)$ уравнения модели и сглаживание этого параметра.

На рис. 2.5.1 на примере гальванической ванны при уровне помехи $h_1 = 0,1^\circ$ приведены входная и выходная переменные замкнутой системы управления, когда в управляющем устройстве реализованы алгоритмы (2.5.4) — (2.5.6), а заданный температурный режим $x^*(t)$ является кусочно-постоянной функцией. В начальный момент

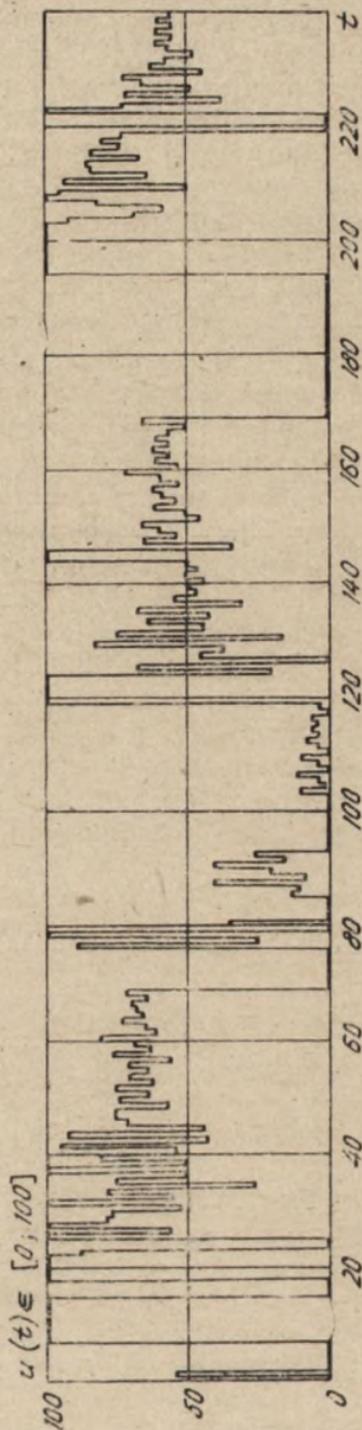
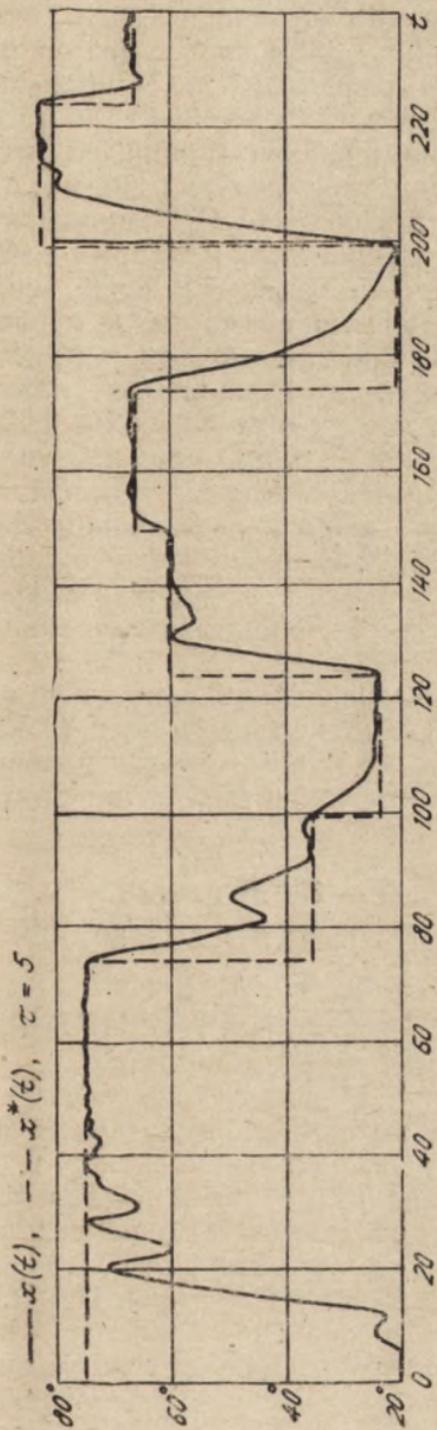


FIG. 2.5.1

времени температура ванны равна 20° . Требуется ее нагреть до температуры 75° и поддерживать эту температуру в течение 73 дискретных интервалов, что соответствует $73 \times 48 \text{ с} = 3504 \text{ с} = 58,4 \text{ мин}$ реального времени. В дискретный момент времени $t = 74$ происходит смена температурного режима до $35,81^\circ$ и т. д. (см. рис. 2.5.1). В период нагрева ванны производится интенсивная коррекция параметров модели. Норма отклонения параметров модели и объекта Q уменьшается от величины 1,75 при $t = 0$ до величины 0,11 при $t = 25$ и остается примерно на этом же уровне в течение всего последующего времени управления объектом. В период основной перестройки коэффициентов модели параметр l_1 многократности коррекции коэффициентов лежит в пределах $[0; 20]$ и чаще всего он был равен $[0; 2; 3]$. При $t > 25$ почти всегда $l_1 = 0$, т. е. по мере поступления новой информации осуществляется однократная перестройка коэффициентов модели, достаточная для выполнения неравенства (2.5.6). Существующая ошибка идентификации $Q \approx 0,11$ приводит к дополнительной ошибке отслеживания заданной траектории (сравните рис. 2.5.1 с рис. 2.5.2).

Во втором алгоритме идентификации в каждый момент времени t в начале коэффициенты α модели (2.5.3) корректируются по формуле (2.5.5) (этот этап назовем этапом грубой оценки коэффициентов), а затем они однократно уточняются по формуле

$$\alpha(t) = \alpha^{l_1+1} + \frac{\Delta_1(\alpha^{l_1+1}, t) - h_1 \operatorname{sign} \Delta_1}{1 + X^T(t-1) X(t-1)} X(t-1);$$

$$\alpha_0(t) = \alpha_0(t-1) + \frac{\Delta_1(\alpha^{l_1+1}, t) - h_1 \operatorname{sign} \Delta_1}{1 + X^T(t-1) X(t-1)},$$

$$\Delta_1(\alpha^{l_1+1}, t) = x(t) - \alpha_0(t-1) - (\alpha^{l_1+1})^T X(t-1),$$

в которой за основу взята модель (2.5.2). Данный алгоритм идентификации обеспечивает более точную и более быструю перестройку параметров модели. Для того же самого примера при $t = 11$ достигнута ошибка идентификации $Q = 0,09$, которая была наименьшей для алгоритма (2.5.5) за все время работы системы. При $t = 20$ ошибка Q принимает значение 0,0001, а при $t > 20$ она не превосходит этой величины. Построенная модель обеспечивает хорошее качество управления.

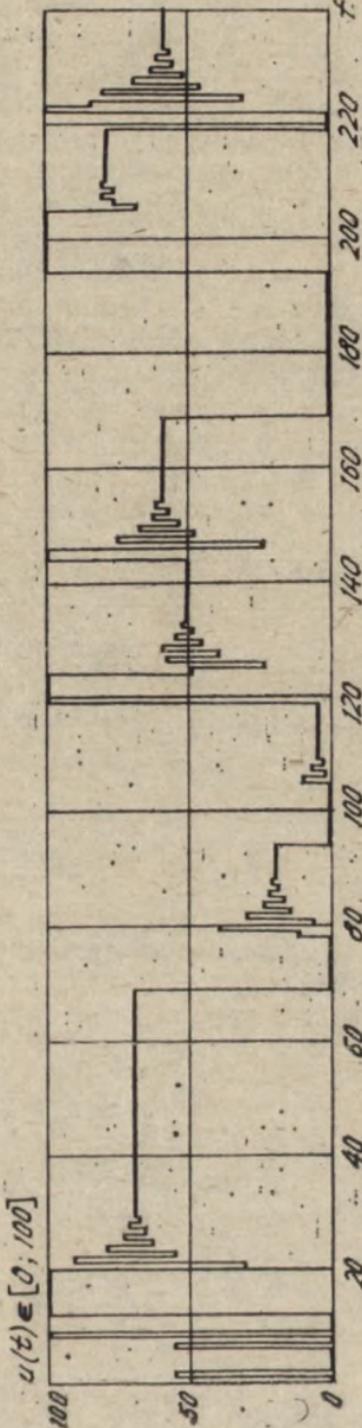
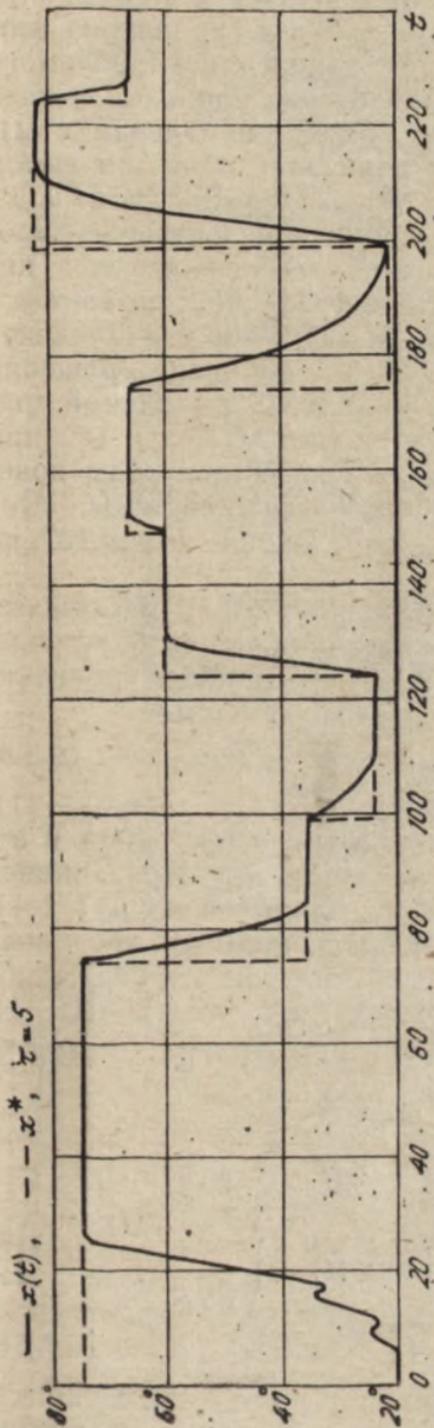


FIG. 2.5.2

Переходные процессы для входа $u(t)$ и выхода $x(t)$ объекта при работе замкнутой системы управления изображены на рис. 2.5.2. При изменении требуемого уровня температуры $x^*(t)$ управление начинает менять свое значение за τ тактов до момента изменения $x^*(t)$. В момент смены уровня x^* начинает меняться выход системы x и переход системы на новый уровень x^* происходит за минимальное время и без перерегулирования. При расчете управления $u(t)$ используется информация о желаемой траектории движения через $\tau+1$ такт вперед, т. е. $x^*(t+\tau+1)$. Если же управляющее устройство располагает в момент принятия решения (в момент расчета $u(t)$) информацией о заданной траектории в этот же момент времени $x(t)$, а $x^*(\kappa)$ при $t+1 \leq \kappa \leq t+\tau+1$ остаются неизвестными, то появляется дополнительная ошибка работы системы. Этот вариант работы системы управления отражен на рис. 2.5.3.

Третий алгоритм идентификации назван многошаговым и, он появился в результате обобщения более простых алгоритмов (2.5.5), (2.5.7). Запишем уравнение модели (2.5.2) в компактной векторной форме

$$y(\kappa) = z(\kappa-1)\alpha(t), \quad \kappa \leq t, \quad (2.5.8)$$

где $z(\kappa) = (1, x(\kappa), x(\kappa-1), u(\kappa-\tau), u(\kappa-\tau-1))$, в вектор $\alpha^T(t) = (a_0(t), a_1(t), a_2(t), a_3(t), a_4(t))$ в отличие от (2.5.2) включен параметр a_0 . Приравнивая выход объекта и модели в моменты времени $\kappa = t, t-1, \dots, t-p+1$, где $1 \leq p \leq 5$, получаем p уравнений с 5 неизвестными параметрами. Запишем эти уравнения, выделяя приращения параметров $\Delta\alpha(t) = \alpha(t) - \alpha(t-1)$:

$$\begin{aligned} z(\kappa-1)\Delta\alpha(t) &= x(\kappa) - z(\kappa-1)\alpha(t-1), \\ \kappa &= t, t-1, \dots, t-p+1, \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

или

$$\begin{aligned} Z(t-1)\Delta\alpha(t) &= x(t) - Z(t-1)\alpha(t-1); \\ Z(t-1) = \begin{pmatrix} z(t-1) \\ \vdots \\ z(t-p+1) \end{pmatrix}; \quad x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \vdots \\ x(t-p+1) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

При $p = 5$ количество уравнений совпадет с количеством неизвестных параметров, хотя система уравнений

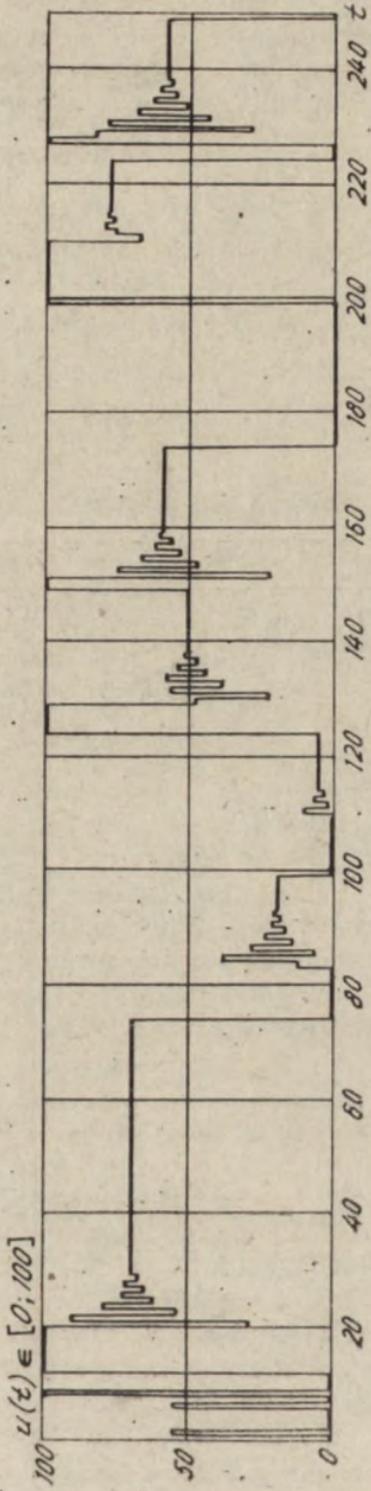
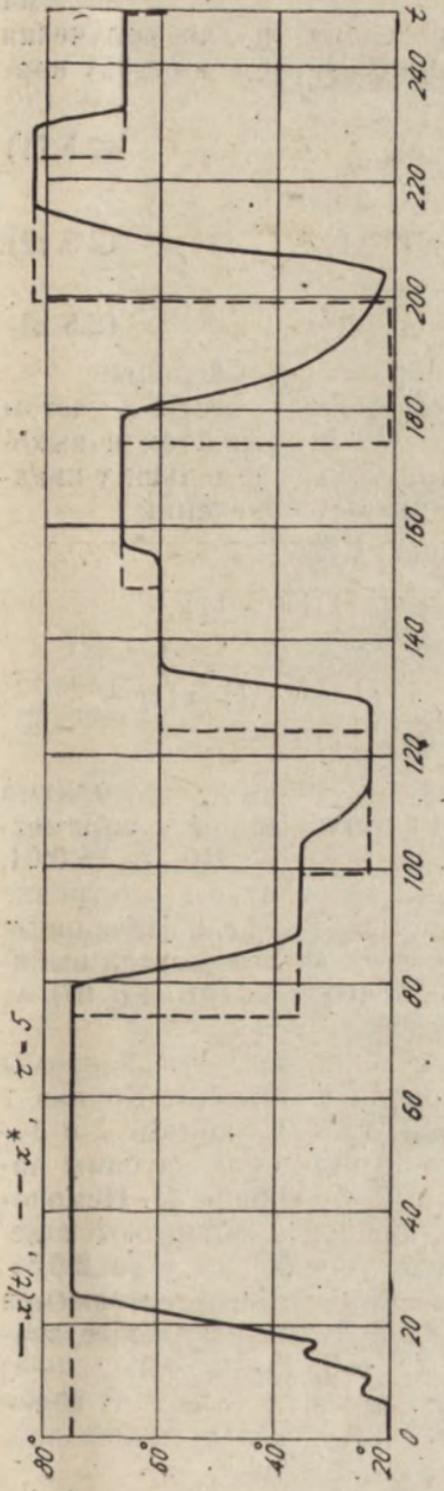


Fig. 2.5.2

может быть и вырожденной. При $1 \leq p < 5$ система уравнений (2.5.10) недоопределена и для получения единственного его решения минимизируем квадрат нормы приращения параметров

$$\|\Delta a(t)\|^2 = \min. \quad (2.5.11)$$

Решение задачи (2.5.10), (2.5.11) имеет вид

$$\Delta a(t) = Z^+(t-1) (x(t) - Z(t-1)a(t-1)) \quad (2.5.12)$$

и тогда

$$a(t) = a(t-1) + \Delta a(t). \quad (2.5.13)$$

Здесь $+$ — операция псевдообращения матрицы.

Заметим, что расчет $\Delta a(t)$ можно вести с учетом более глубокой памяти (при $p > 5$) о входах и выходах объекта. При $p > 5$ по критерию наименьших квадратов получаем систему нормальных уравнений

$$(Z^T(t-1)Z(t-1))\Delta a(t) = \\ = Z^T(t-1)(x(t) - Z(t-1)a(t-1)),$$

решение которой имеет вид

$$\Delta a(t) = (Z^T(t-1)Z(t-1))^{-1}Z^T(t-1)(x(t) - \\ - Z(t-1)a(t-1)).$$

Графики, иллюстрирующие работу алгоритма (2.5.12), (2.5.13) для гальванической ванны с параметрами $a_0 = 0,084$, $a_1 = 1,235$, $a_2 = -0,319$, $a_3 = 0,04$, $a_4 = 0,027$ при стабилизации температуры на уровне $x^*(t) = 75^\circ$, приведены на рис. 2.5.4 — 2.5.9. Начальные оценки параметров модели во всех экспериментах выбирались равными $a_0(0) = 0$, $a_1(0) = a_2(0) = a_3(0) = a_4(0) = 1$.

На рис. 2.5.4 показано поведение евклидовой нормы Q отклонения параметров модели и объекта. Кривая 1 соответствует алгоритму (2.5.5), (2.5.7), кривые 2 и 3 — алгоритму (2.5.12), (2.5.13) при значениях глубины памяти p , равной 1 (кривая 2) и 2—6 (кривая 3). Немонотонный характер изменения кривой 1 объясняется неудачным выбором параметра усреднения γ (в 2.5.5). При $t = 2—6$ скорость сходимости для всех алгоритмов мала. Причиной этому служат нулевые начальные значения по управлению ($u(t) = 0$, $t = 0, -1, \dots, -\tau$; $\tau = 5$) в уравнении движения объекта (2.5.1). В связи с этим на первых тактах отсутствует в измерениях вход-

да и выхода объекта информация о параметрах a_3 и a_4 объекта.

На рис. 2.5.5 представлены графики, иллюстрирующие процесс оценивания параметра a_0 с помощью алгоритмов (2.5.5), (2.5.7) (кривая 1) и (2.5.12), (2.5.13) (кривая 2 при глубине памяти $p = 3$).

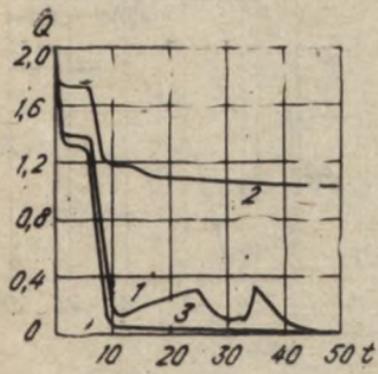


Рис. 2.5.4

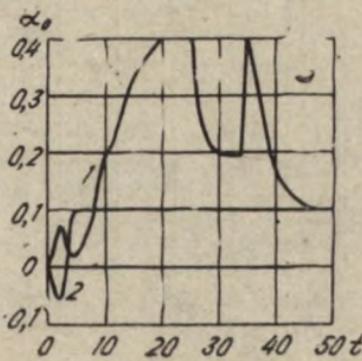


Рис. 2.5.5

Процесс изменения входной и выходной координат объекта при работе замкнутой системы управления представлен на рис. 2.5.6—2.5.9. Рис. 2.5.6 соответствует

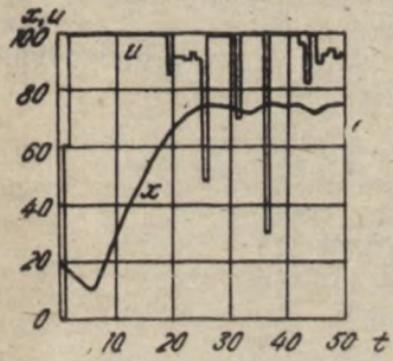


Рис. 2.5.6

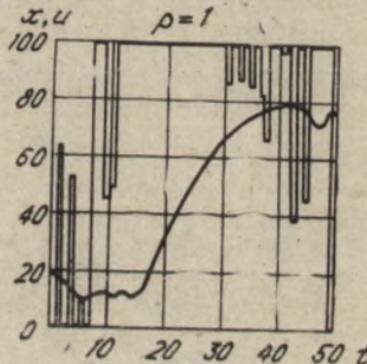


Рис. 2.5.7

оценке параметров в устройстве управления по алгоритму (2.5.5), (2.5.7), а рис. 2.5.7—2.5.9 — по алгоритму (2.5.12), (2.5.13) соответственно при $p = 1, 3, 5$. Результаты стабилизации температуры на уровне 75°, представленные на рис. 2.5.6, 2.5.8, 2.5.9, примерно одинаковые из-за хорошего качества работы идентифи-

катора. Одношаговый (при $p = 1$) адаптивный алгоритм не обеспечивает нужное качество идентификации и система не обеспечивает хорошего качества стабилизации (см. рис. 2.5.7) температуры.

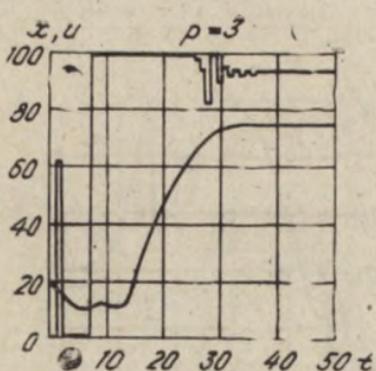


Рис. 2.5.8

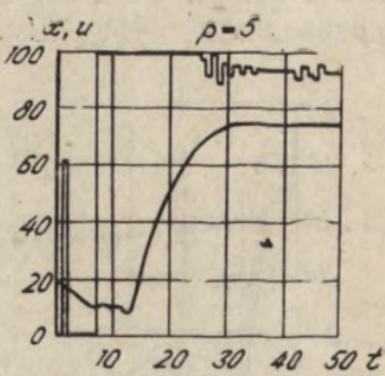


Рис. 2.5.9

Автор выражает благодарность А. А. Светлакову и В. М. Френкелю, выполнившим численные расчеты на ЭВМ.

В заключение отметим, что разработанный в данной главе подход к синтезу адаптивных систем управления может быть применен и к решению других конкретных задач поддерживания заданных температурных режимов жидких, твердых и газообразных сред.

Глава 3

СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ПРИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВИДАХ ЗАДАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ

Если желаемая траектория движения системы $x^*(t)$ задана в виде линейного набора известных функций (т. е. $x^*(t) = \sum_{v=1}^n c_v \phi_v(t)$), в начальный момент t_0 работы системы $x^*(t_0)$ совпадает с начальным положением объекта $x(t_0)$, на управление не накладываются ограничений и отсутствуют помехи, то синтезировать алгоритмы управления можно по методу, предложенному П. Д. Крутько, Е. П. Поповым, Б. Н. Петровым и описанному в работах [5, 8, 9].

Данный метод максимально близок к вышерассмотренному в гл. 1, 2 методу, ибо в основе обоих методов лежит решение обратной задачи динамики. Указанные выше ограничения на $x^*(t)$ и на $u(t)$ естественно сужают область применения метода. При одинаковых условиях метод, описанный в гл. 1, 2, требует меньших вычислительных затрат. Другие же свойства алгоритмов управления, синтезированных обоими методами, еще не исследованы. Ниже мы поясним общую идею излагаемого в данной главе метода [5, 8, 9] синтеза управлений с обратной связью.

Для дискретного многомерного нелинейного объекта

$$x(t+1) = L(x(t), t) + f(x(t), u(t), t), \\ t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \quad (3.0.1)$$

где L, f — линейная и нелинейная вектор-функции, необходимо найти управление $u(t)$, обеспечивающее движение объекта по заданной траектории, то есть

$$x(t+1) = x^*(t+1), \quad t \geq 0. \quad (3.0.2)$$

Вводим обобщенную управляющую силу

$$w(t) = f(x(t), u(t), t), t \geq 0, \quad (3.0.3)$$

и находим ее оптимальную величину

$$w^*(t) = x^*(t+1) - L(x^*(t), t), t \geq 0. \quad (3.0.4)$$

Это разомкнутое управление. С учетом специального вида заданной траектории $x^*(t)$ находим уравнения связи $x^*(t+1)$ и $x^*(t)$ с координатой объекта $x(t)$

$$x^*(t+1) = E_1(x(t), t), x^*(t) = E_2(x(t), t), \quad (3.0.5)$$

подставляем (3.0.5) в (3.0.4) и получаем обобщенную управляющую силу с обратной связью

$$w^*(t) = E_1(x(t), t) - L(E_2(x(t), t), t), t \geq 0. \quad (3.0.6)$$

В конце из уравнения связи (3.0.3) $w(t)$ с $u(t)$ находим управляющую функцию

$$u^*(t) = f^{-1}(x(t), w^*(t), t), t \geq 0. \quad (3.0.7)$$

Заметим, что если в качестве обобщенной функции взять всю правую часть уравнения движения (3.0.1)

$$w(t) = L(x(t), t) + f(x(t), u(t), t), t \geq 0, \quad (3.0.8)$$

то из цели управления (3.0.2) следует оптимальная управляющая сила

$$w^*(t) = x^*(t+1), t \geq 0, \quad (3.0.9)$$

а оптимальная управляющая функция удовлетворяет уравнению (3.0.8)

$$\begin{aligned} L(x(t), t) + f(x(t), u(t), t) = \\ = x^*(t+1), t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.0.10)$$

Очевидно, что при таком способе расчета управлений отпадает необходимость поиска преобразований (3.0.5) и снимаются ограничения на $x^*(t)$. Заданная траектория $x^*(t)$ может быть произвольной. Алгоритм (3.0.10) совпадает с алгоритмом, вытекающим из метода, описанного в гл. 1, 2 при отсутствии ограничений на управление, при отсутствии случайных помех и при точно известном уравнении движения объекта.

Рассмотрим теперь многомерный непрерывный объект

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = L(x(t), t) + f(x(t), u(t), t), \\ t > 0, x(0) = x_0. \end{aligned} \quad (3.0.11)$$

Целью управления является движение объекта по заданной траектории

$$\dot{x}(t) = x^*(t), \quad t > 0, \quad (3.0.12)$$

где $x^*(t) = \sum_{v=1}^n c_v \psi_v(t)$, $x^*(0) = x(0) = x_0$. Вводим обобщенную управляющую силу

$$w(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t > 0, \quad (3.0.13)$$

и для линейного объекта

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= L(x(t), t) + w(t), \\ t > 0, \quad x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (3.0.14)$$

находим разомкнутую обобщенную силу

$$w^*(t) = \dot{x}^*(t) - L(x^*(t), t), \quad t > 0, \quad (3.0.15)$$

уравнения связи $\dot{x}^*(t)$, $x^*(t)$ с $x(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= E_1(x(t), t), \quad x^*(t) = \\ &= E_2(x(t), t), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (3.0.16)$$

обобщенную управляющую силу с обратной связью

$$w^*(t) = E_1(x(t), t) - L(E_2(x(t), t), t), \quad t > 0, \quad (3.0.17)$$

и управляющую функцию с обратной связью

$$u^*(t) = f^{-1}(x(t), w^*(t), t), \quad t > 0. \quad (3.0.18)$$

Пример. Имеется одномерный управляемый объект

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0.$$

Обобщенной силой считаем правую часть уравнения, то есть

$$w(t) = f(x(t), u(t)), \quad t > 0.$$

Тогда уравнение движения приобретает простейший линейный вид

$$\dot{x}(t) = w(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0.$$

Синтезируем алгоритм формирования обобщенной управляющей силы, при котором движение системы из точки x_0 к координате $x(t) = 0$ осуществляется по траектории

$$x^*(t) = c \exp \lambda t, \quad \lambda < 0, \quad t > 0,$$

т. е. цель управления состоит в обеспечении выполнения равенства

$$x(t) = x^*(t), \quad t \geq 0.$$

Условие совпадения в начальный момент работы системы координаты объекта и заданной траектории

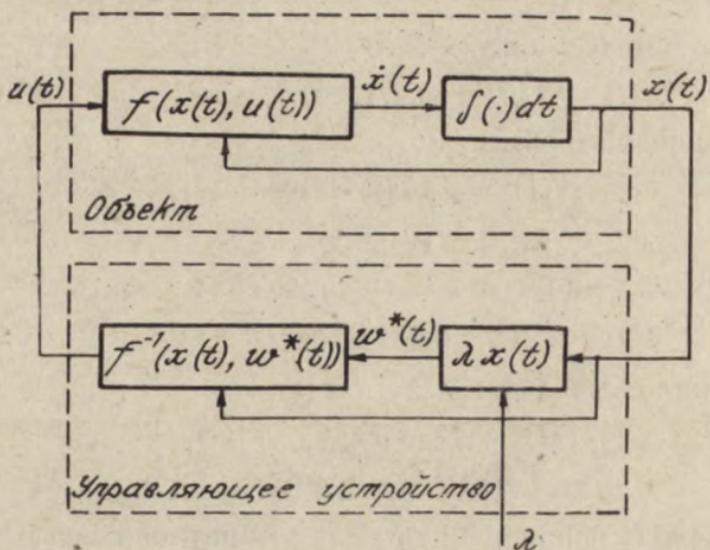


Рис. 3.0.1

$(x(0) = x^*(0) = x_0)$ позволяет определить константу $c = x_0$. Тогда целевое условие приобретает вид

$$x(t) = x^*(t) = x_0 \exp \lambda t, \quad t \geq 0.$$

Отсюда имеем равенство для первой производной

$$\dot{x}(t) = \lambda x_0 \exp \lambda t = \lambda x(t) = \dot{x}^*(t).$$

Подставляем $\dot{x}(t)$ в уравнение движения и получаем оптимальную управляющую силу с обратной связью

$$w^*(t) = \lambda x(t), \quad t > 0.$$

Учитывая введенное обозначение для обобщенной силы, составляем уравнение для управляющей функции

$$w^*(t) \equiv \lambda x(t) = f(x(t), u^*(t)), \quad t > 0,$$

и из решения его находим $u^*(t)$:

$$u(t)^* = f^{-1}(x(t), w^*(t)) = f^{-1}(x(t), \lambda x(t)), \quad t > 0.$$

После реализации полученной оптимальной функции уравнение замкнутой системы приобретает вид

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t), t > 0, x(0) = x_0,$$

и, очевидно, что решение его совпадает с заданной траекторией $x^*(t)$. Цель управления достигнута.

Структурная схема системы, работающей по описанному выше алгоритму, представлена на рис. 3.0.1.

§ 3.1. Непрерывные системы

Рассмотрим особенности формирования законов управления для непрерывных линейных и нелинейных обыкновенных систем без запаздываний.

Линейные системы

Считаем, что движение линейного управляемого одномерного объекта при $t \geq 0$ подчиняется дифференциальному скалярному уравнению

$$A(p)x(t) = bu(t), A(p) = \sum_{\kappa=0}^n a_\kappa p^\kappa, p \equiv \frac{d}{dt}, t > 0, \quad (3.1.1)$$

$$x^{(i)}(0) = \overline{x_{0,i}} (i = 0, n - 1), a_n = 1,$$

где x — выходная переменная; u — управляющая функция; коэффициенты a_κ , b известны. Требуется построить управление u^* , обеспечивающее движение объекта по траектории $x^*(t)$, $0 < t < T \leq \infty$.

Пусть $x^*(t)$ — осуществимая траектория, дифференцируемая по t n раз. Тогда искомое управление $u^*(t)$ формально определяется следующим образом:

$$u^*(t) = b^{-1}A(p)x^*(t). \quad (3.1.2)$$

Покажем, что структурная схема устройства управления, реализованного по алгоритму (3.1.2), обладает симметрией по отношению к структурной схеме модели управляемого объекта (3.1.1). Соответствующие схемы представлены на рис. 3.1.1—3.1.3 для случая $n = 1$.

Операции преобразования в управляющем устройстве $x^*(t)$ в $u^*(t)$ обратны соответствующим операциям преобразования $u(t)$ в $x(t)$ в объекте. Интегрированию,

вычитанию, усиление (с коэффициентом b) в объекте соответствует дифференцирование, суммирование, ослабление (усиление с коэффициентом b^{-1}) в управляемом

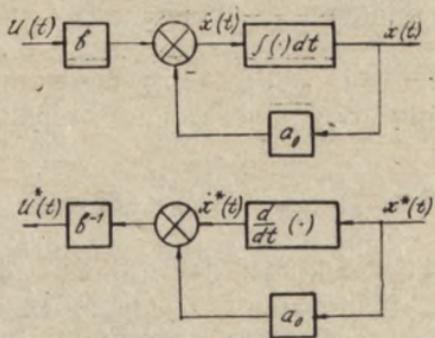


Рис. 3.1.1

устройстве. Входной $u(t)$ и выходной $x(t)$ переменным объекта соответствуют входная $x^*(t)$ и выходная $u^*(t)$ переменные управляемого устройства. Структурная

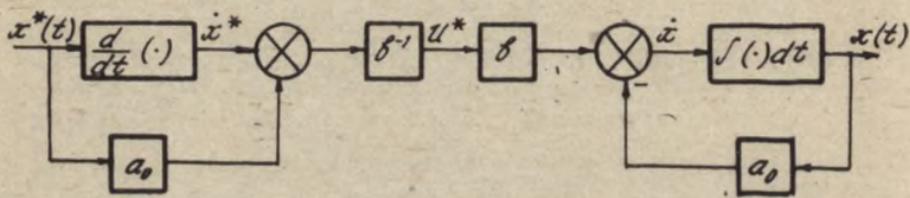


Рис. 3.1.2

схема устройства управления (см. рис. 3.1.1) может быть получена из структурной схемы объекта в результате обращения соответствующих операций и переменных.

На рис. 3.1.2 представлена общая структурная схема системы. Входом ее является заданная траектория $x^*(t)$, выходом — реальный выход объекта $x(t)$. В данной системе можно выполнить обращение соответствующих операций и переменных и убедиться, что общая схема системы не изменится (см. рис. 3.1.3). Меняется лишь направленность схемы.

Те же закономерности справедливы и при $n > 1$.

Следовательно, указанные выше свойства симметрии для объекта и устройства управления однозначно

определяют структуру и параметры алгоритма формирования управляющего воздействия. Очевидно, что изменение цели управления приведет к изменению свойств симметрии. Выше было рассмотрено свойство симметрии при разомкнутом управлении линейным объектом.

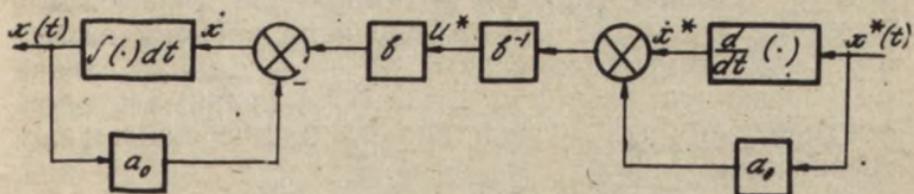


Рис. 3.1.3

Особую ценность представляет выявление свойств симметрии при управлении с обратной связью как для линейных, так и для нелинейных объектов управления. Некоторые из этих свойств выявлены, и они рассмотрены в предыдущих разделах монографии.

Указанным выше способом можно строить алгоритмы управления, которые обеспечивают динамической системе наперед заданные динамические свойства. Остановимся на этом вопросе подробней.

Допустим, что траектория $x^*(t)$ задана в виде линейного набора известных n функций $\psi_v(t)$ ($v = \overline{1, n}$):

$$x^*(t) = \sum_{v=1}^n c_v \psi_v(t). \quad (3.1.3)$$

Коэффициенты c_v ($v = \overline{1, n}$) определяются из условия, что траектория начинается в заданной начальной точке системы (3.1.1)

$$\sum_{v=1}^n c_v \psi_v^{(i)}(0) = x_{0,i} (i = \overline{0, n-1}). \quad (3.1.4)$$

В результате формальной подстановки (3.1.3) и (3.1.2) получаем программное управление

$$u^*(t) = b^{-1} \sum_{v=1}^n c_v \sum_{k=0}^n a_k \psi_v^{(k)}(t). \quad (3.1.5)$$

Это управление реализует только такие траектории движения, структура которых (как функций времени)

отвечает структуре решения уравнения (3.1.1) при $u = 0$. В остальных случаях можно лишь ставить и решать задачу наилучшего приближения выхода системы $x(t)$ к желаемой траектории $x^*(t)$.

На базе программных управлений (3.1.5) синтезируются законы управлений с обратной связью. Для этого необходимо выразить функции времени $c_v \psi_v(t)$ через измеряемые переменные объекта. Данная задача легко решается, если в качестве $\psi_v(t)$ принимать такие функции, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^\kappa \psi_v(t)}{dt^\kappa} = \rho_{v\kappa} \psi_v(t) \quad (\kappa = \overline{0, n}); \quad \rho_{v0} \equiv 1. \quad (3.1.6)$$

Коэффициенты $\rho_{v\kappa}$ в (3.1.6) могут быть либо постоянными, либо функциями времени. Возможны и другие способы задания функции $\psi_v(t)$ ($v = 1, n$).

Считаем, что $\psi_v(t)$ в (3.1.3) обладают свойствами (3.1.6). Тогда программное управление (3.1.5) принимает вид.

$$u^*(t) = b^{-1} \sum_{v=1}^n c_v \gamma_v \psi_v(t), \quad \gamma_v = \sum_{\kappa=0}^n a_\kappa \rho_{v\kappa} \quad (v = \overline{1, n}). \quad (3.1.7)$$

Из (3.1.7) строим управление в виде обратной связи. Из условия $x^{(i)}(t) = x^{*(i)}(t)$ ($i = \overline{0, n-1}$) получаем систему линейных уравнений для $c_v \psi_v(t)$ ($v = \overline{1, n}$):

$$\sum_{v=1}^n c_v \rho_{vj} \psi_v(t) = x^{(j)}(t) \quad (j = \overline{0, n-1}). \quad (3.1.8)$$

Решая ее, находим

$$c_v \psi_v(t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} r_{v\mu} x^{(\mu)}(t) \quad (v = \overline{1, n}). \quad (3.1.9)$$

Здесь $r_{v\mu}$ — постоянные числа (либо функции времени, если $\rho_{v\kappa}$ зависят от времени), однозначно определяемые в процессе решения системы линейных уравнений (3.1.8). В результате получено управление с обратной связью

$$u^*(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) = b^{-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} p_\mu x^{(\mu)}(t),$$

$$p_{\mu} = \sum_{v=1}^n \gamma_v r_{v\mu} (\mu = \overline{0, n-1}). \quad (3.1.10)$$

В этом управлении использованы все координаты состояния (фазовые координаты) объекта. По той же схеме отыскиваются управления при неполной степени наблюдаемости координат объекта.

Считаем, что для формирования управлений можно использовать только m координат $x^{(l_j)}(t)$ ($j = \overline{1, m}$, $l_j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$) состояния. Тогда траекторию $x^*(t)$ необходимо задать в виде линейной комбинации m известных функций, то есть

$$x^*(t) = \sum_{j=1}^m c_j \psi_j(t). \quad (3.1.11)$$

Если $\psi_j(t)$ удовлетворяют уравнениям (3.1.6), тогда

$$u^*(t) = b^{-1} \sum_{j=1}^m p_j x^{(l_j)}(t), \quad (3.1.12)$$

где

$$p_j = \sum_{v=1}^n \gamma_v r_{vj} (j = \overline{1, m}), \quad \gamma_v = \sum_{k=0}^n p_{vk},$$

r_{vj} — коэффициенты линейно связывающие $c_v \psi_v(t)$ с $x^{(l_j)}(t)$ ($j = \overline{1, m}$)

$$c_v \psi_v(t) = \sum_{j=1}^m r_{vj} x^{(l_j)}(t)$$

в результате решения системы линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\sum_{v=1}^m c_v p_{vj} \psi_v(t) = x^{(l_j)}(t) (j = \overline{1, m}).$$

Пример. Рассматриваем объект второго порядка
 $\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = u(t),$

$$t > 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (3.1.13)$$

и построим управление, которое обеспечивает отработку постоянного уровня \bar{x} по заданной траектории, то есть

$$x(t) = x^*(t) = \bar{x} - c_1 \exp(\lambda_1 t) - \\ - c_2 \exp(\lambda_2 t), \quad t \geq 0, \\ \operatorname{Re} \lambda_1 < 0, \operatorname{Re} \lambda_2 < 0, \lambda_1 \neq \lambda_2. \quad (3.1.14)$$

В отличие от рассмотренной выше общей теории в назначеннной траектории $x^*(t)$ присутствует дополнительная постоянная составляющая \bar{x} , но схема синтеза от этого не меняется.

Постоянные c_1 и c_2 находим из начальных условий:

$$c_1 + c_2 = \bar{x} - x_0; \quad \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = -\dot{x}_0.$$

Искомое разомкнутое управление $u^*(t)$ определяем в результате подстановки $x^*(t)$ из (3.1.14) в (3.1.13)

$$u^*(t) = a_0 \bar{x} - a(\lambda_1) c_1 \exp(\lambda_1 t) - a(\lambda_2) c_2 \exp(\lambda_2 t), \\ a(\lambda_\kappa) = \lambda_\kappa^2 + a_1 \lambda_\kappa + a_0, \quad \kappa = 1, 2. \quad (3.1.15)$$

Выразим теперь в (3.1.15) функции $c_1 \exp(\lambda_1 t)$, $c_2 \exp(\lambda_2 t)$ через измеряемые координаты $x(t)$, $\dot{x}(t)$. Для этого составляем два уравнения:

$$c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t) = \bar{x} - x(t); \\ \lambda_1 c_1 \exp(\lambda_1 t) + \lambda_2 c_2 \exp(\lambda_2 t) = -\dot{x}(t)$$

и находим

$$c_1 \exp(\lambda_1 t) = [\lambda_2 (\bar{x} - x(t)) + \dot{x}(t)] / [\lambda_2 - \lambda_1], \\ c_2 \exp(\lambda_2 t) = -[\lambda_1 (\bar{x} - x(t)) + \dot{x}(t)] / [\lambda_2 - \lambda_1].$$

Подставляем эти выражения в (3.1.15) и получаем закон управления с обратной связью

$$u^*(t) = a_0 \bar{x} + (\lambda_1 \lambda_2 - a_0) (\bar{x} - x(t)) + \\ + (\lambda_1 + \lambda_2 + a_1) \dot{x}(t), \quad t \geq 0. \quad (3.1.16)$$

Движение замкнутой системы подчиняется динамическому уравнению

$$\ddot{x}(t) - (\lambda_1 + \lambda_2) \dot{x}(t) + \lambda_1 \lambda_2 x(t) = \lambda_1 \lambda_2 \bar{x}, \quad t > 0, \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

решение которого в пределе стремится к \bar{x} , т. е.
 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$.

Описанным выше способом для системы произвольного порядка можно аналитически построить закон управления, обеспечивающий стабилизацию объекта на постоянном уровне \bar{x} при $\bar{x} - x(t) = x^*(t) = c \exp \lambda t$, $\lambda < 0$ и при наблюдении только одной из координат $x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$.

Пример. Для объекта (3.1.13) построим управление, при котором $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и

$$x^*(t) = c_1/(1+t) + c_2/(1+t)^2.$$

Постоянные c_1, c_2 определяем, как и ранее, из условия $x^*(0) = x_0, \dot{x}^*(0) = \dot{x}_0$. Подставляем $x^*(t)$ в уравнение (3.1.13) и получаем разомкнутое управление

$$u^*(t) = \gamma_1(t)c_1/(1+t) + \gamma_2(t)c_2/(1+t)^2, \quad (3.1.17)$$

где переменные коэффициенты

$$\gamma_1(t) = a_0 - a_1/(1+t) + 2/(1+t)^2;$$

$$\gamma_2(t) = a_0 - 2a_1/(1+t) + 6/(1+t)^2.$$

Синтезируем теперь управление с обратной связью, выразив в (3.1.17) $c_1/(1+t)$, $c_2/(1+t)^2$ через измеряемые координатные функции $x(t), \dot{x}(t)$. Из условий $x^*(t) = x(t), \dot{x}^*(t) = \dot{x}(t)$ находим

$$c_1/(1+t) = 2x + (1+t)\dot{x};$$

$$c_2/(1+t)^2 = -x - (1+t)\dot{x}$$

и получаем управление с обратной связью

$$u^*(t) = [a_0 - 2/(1+t)^2]x(t) + [a_1 - 4/(1+t)]\dot{x}(t).$$

Из-за специфичного вида заданной траектории $x^*(t)$ (функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ в нем не являются решением дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (3.1.6)) закон управления получился не стационарным.

Можно убедиться (в качестве проверки), что синтезированное управление действительно реализует назначенную траекторию $x^*(t)$. Для этого записываем дифференциальное уравнение замкнутой системы

$$\ddot{x}(t) + [4/(1+t)]\dot{x}(t) + [2/(1+t)^2]x(t) = 0, \quad t > 0,$$

с помощью введения новой переменной τ (за счет подстановки Эйлера $e^\tau = 1 + t$) переходим к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x}(\tau) + 3\dot{x}(\tau) + 2x(\tau) = 0,$$

находим его общее решение

$$x(\tau) = c_1 e^{-\tau} + c_2 e^{-2\tau}$$

и, возвращаясь к прежней переменной t , получаем, что $x(t) = x^*(t)$, $t \geq 0$.

Обобщим вышеизложенный метод. Рассматриваем заданную траекторию

$$x^*(t) = \bar{x}(t) + \sum_{v=1}^m c_v \psi_v(t), \quad m \leq n.$$

Здесь в дополнение к (3.1.3) введена заданная n раз дифференцируемая функция времени $\bar{x}(t)$. $\bar{x}(t)$ можно мыслить себе как основную предельную (при $t \rightarrow \infty$) требуемую траекторию движения, а остальные слагаемые — как переходный процесс выхода на траекторию $\bar{x}(t)$.

Параметры c_v ($v = \overline{1, m}$), как и ранее, определяем из m начальных условий. m' функций ψ_{vj} ($j = \overline{1, m'}$, $l_j \in \overline{(1, m)}$) из m функций ψ_v ($v = \overline{1, m}$) выражаем через координатные функции $x^{(kj)}(t)$ ($j = \overline{1, m'$, $k_j \in \overline{(1, n)}$) по описанной выше схеме. В итоге получаем оптимальное управление, в которое входят и программные составляющие и обратные связи. Из построенного обобщенного управления следует и полное программное оптимальное управление (при $m' = 0$) и оптимальное управление с полной обратной связью (при $m' = m = n$).

Пример. Рассматриваем объект (3.1.13), а траекторию $x^*(t)$ задаем в виде (3.1.14). Константы c_1 , c_2 находим из начальных условий

$$c_1 = \frac{\lambda_2(\bar{x} - x_0) + \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad c_2 = -\frac{\lambda_1(\bar{x} - x_0) + \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

В заданной траектории $x^*(t)$ выразим одну программную составляющую через координату $x(t)$, приравнивая $x(t)$ и $x^*(t)$

$$c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t) = \bar{x} - x(t)$$

и получаем

$$c_2 \exp(\lambda_2 t) = \bar{x} - x(t) - c_1 \exp(\lambda_1 t).$$

Подставляем это выражение в (3.1.15) и находим оптимальное управление

$$u^*(t) = a_0 \bar{x} + (\lambda_1 + \lambda_2 + a_1) (\lambda_2 (\bar{x} - x_0) + \dot{x}_0) \exp(\lambda_1 t) - (\lambda_2^2 + a_1 \lambda_2 + a_0) (\bar{x} - x(t)).$$

Если же выразить вторую программную составляющую через первую и через $x(t)$, то есть

$$c_1 \exp(\lambda_1 t) = \bar{x} - x(t) - c_2 \exp(\lambda_2 t),$$

и подставить ее в (3.1.15), то получим симметричную форму оптимального управления $u^*(t) = a_0 \bar{x} + (\lambda_1 + \lambda_2 + a_1) (\lambda_1 (\bar{x} - x_0) + \dot{x}_0) \exp(\lambda_2 t) - (\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_0) \times \times (x - x(t))$.

Таким образом, рассмотренная схема построения алгоритмов управления для линейных непрерывных динамических систем с позиции обратных задач динамики позволяет синтезировать системы с назначеными динамическими свойствами. Параметры законов управления связаны с параметрами математических моделей управляемых процессов конечными соотношениями.

Нелинейные системы

Как было отмечено во введении параграфа для нелинейных систем вначале находим оптимальную управляющую силу $w^*(t)$, а затем оптимальное управляющее воздействие $u^*(t)$. При расчете $w^*(t)$ полностью применим метод синтеза управлений для линейных систем.

Рассмотрим нелинейный скалярный управляемый объект, описываемый дифференциальным уравнением [см. (3.0.1), (3.1.1.)]

$$A(p)x(t) = f(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t), u(t)), \quad t > 0, \quad (3.1.18)$$

$$x^{(i)}(0) = x_{0,i} (i = \overline{0, n-1}); \quad A(p) = \sum_{\kappa=0}^n a_\kappa p^\kappa,$$
$$p \equiv d/dt, \quad a_n = 1.$$

Цель управления та же, что и для системы (3.1.1). Обобщенной силой в (3.1.18) считаем правую часть уравне-

ния, т. е. $w(t) = f(\cdot)$. Тогда (3.1.18) приобретает вид уравнения (3.1.1) для линейной системы

$$A(p)x(t) = w(t), \quad t > 0, \quad x^{(i)}(0) = x_{0,i} \quad (i = \overline{0, n-1}). \quad (3.1.19)$$

Применяем описанную схему синтеза для линейных систем и получаем оптимальную управляющую силу $w^*(t)$ либо в разомкнутой форме, либо в виде обратной связи.

В заключение из нелинейного уравнения

$$f(x(t), \dots, x^{(n-1)}(t), u(t)) = w^*(t), \quad t > 0, \quad (3.1.20)$$

определяем оптимальную управляющую функцию

$$u^*(t) = f^{-1}(x(t), \dots, x^{(n-1)}(t), w^*(t)), \quad t > 0. \quad (3.1.21)$$

Решение уравнения (3.1.20) производится либо аналитически (если, конечно, это возможно), либо алгоритмически. В последнем случае строится итерационный процесс в непрерывной либо дискретной форме. Например, пусть функция $f(x, \dots, u)$ такова, что при всех возможных значениях ее аргументов частная производная по u не меняет знака. Тогда решение уравнения (3.1.21) для каждого фиксированного t можно получить с помощью непрерывного

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, \tau)}{\partial \tau} &= \rho \frac{\partial f(x(t), \dots, x^{(n-1)}(t), u(t, \tau))}{\partial u} \times \\ &\times [w^*(t) - f(x(t), \dots, u(t, \tau))], \\ \rho > 0, \quad \tau > 0, \quad u(t, 0) &= \text{const}, \end{aligned}$$

либо дискретного

$$\begin{aligned} u^{l+1}(t) &= u^l(t) + \rho \frac{\partial f(x(t), \dots, x^{(n-1)}(t), u^l(t))}{\partial u} \times \\ &\times [w^*(t) - f(x(t), \dots, u^l(t))], \quad \rho > 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \\ u^0(t) &= \text{const} \end{aligned}$$

алгоритмов, то есть

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} u(t, \tau) = u^*(t), \quad \lim_{l \rightarrow \infty} u^l(t) = u^*(t).$$

Структурная схема алгоритма управления представлена на рис. 3.1.4. Управляющие функции определены соотношением (3.1.21).

Пример. Рассматриваем управляемый объект, описываемый уравнением

$$\dot{x}(t) - r(x)\dot{x}(t) + h(x)x(t) = f(x, \dot{x}, u), \quad t > 0, \quad (3.1.22)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

где x — координата, характеризующая положение системы; u — управляющая функция; f — обобщенная сила;

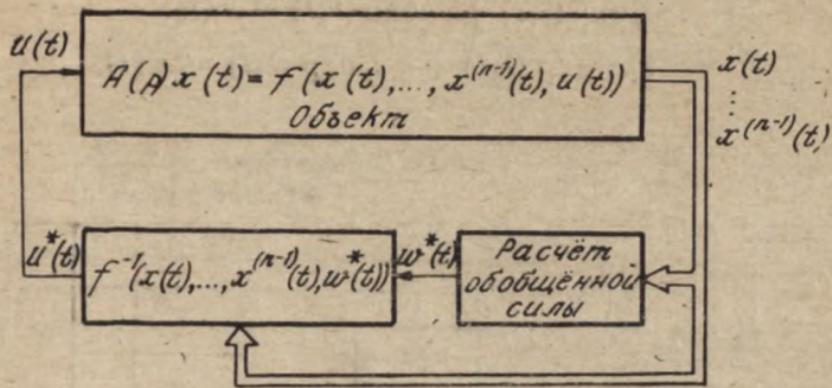


Рис. 3.1.4

$r(x)$ — коэффициент трения; $h(x)$ — коэффициент упругости. Синтезируем алгоритм расчета управляющей функции $u^*(t)$, при которой движение системы из начальной точки (x_0, \dot{x}_0) в начало координат осуществляется по траектории

$$x^*(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t),$$

где λ_1, λ_2 — различные действительные и комплексно-сопряженные числа, такие, что $\operatorname{Re} \lambda_\kappa < 0$, $\kappa = 1, 2$.

Находим вначале оптимальную разомкнутую обобщенную силу $w^*(t) \equiv f$ путем подстановки в (3.1.22) $x^*(t)$ вместо $x(t)$:

$$w^*(t) = a(\lambda_1)c_1 \exp(\lambda_1 t) + a(\lambda_2)c_2 \exp(\lambda_2 t), \quad t > 0, \quad (3.1.23)$$

$$a(\lambda_i) = \lambda_i^2 + r(x^*(t))\lambda_i + h(x^*(t)), \quad i = 1, 2.$$

Чтобы назначенная траектория начиналась в точке (x_0, \dot{x}_0) , постоянные c_1, c_2 необходимо определить из условий $x^*(0) = x_0, \dot{x}^*(t) = \dot{x}_0$:

$$c_1 = \frac{\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad c_2 = -\frac{\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Закон управления с обратной связью получаем из (3.1.23), выразив $c_i \exp\{\lambda_i t\}$ через координаты состояния $x(t), \dot{x}(t)$ из условий $x^*(t) = x(t), \dot{x}^*(t) = \dot{x}(t)$:

$$c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t) = x(t);$$

$$\lambda_1 c_1 \exp(\lambda_1 t) + \lambda_2 c_2 \exp(\lambda_2 t) = \dot{x}(t),$$

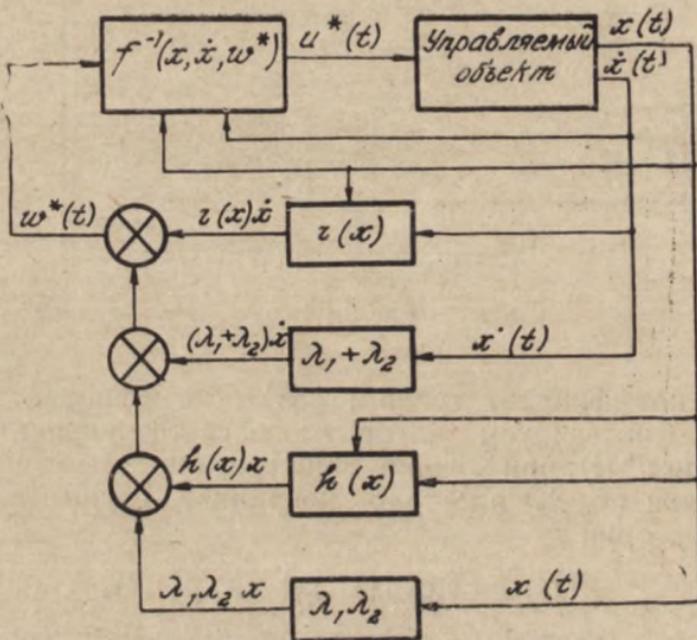


Рис. 3.1.5

то есть

$$c_1 \exp(\lambda_1 t) = \frac{\lambda_2 x - \dot{x}}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad c_2 \exp(\lambda_2 t) = -\frac{\lambda_1 x - \dot{x}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

и тогда

$$w^*(t) = (h(x) - \lambda_1 \lambda_2) x(t) + (r(x) + \lambda_1 + \lambda_2) \dot{x}(t), \quad t > 0. \quad (3.1.24)$$

Оптимальную управляющую функцию

$$u^*(t) = f^{-1}(x(t), \dot{x}(t), w^*(t)), \quad t > 0, \quad (3.1.25)$$

находим из уравнения

$$w^*(t) = f(x(t), \dot{x}(t), u(t)), \quad t > 0.$$

Структурная схема алгоритма управления (3.1.24), (3.1.25) с обратной связью представлена на рис. 3.1.5.

§ 3.2. Дискретные системы

Основные положения по синтезу управлений, сформулированные в предыдущем параграфе для непрерывных систем, полностью переносятся и на дискретные системы. Эти вопросы кратко рассмотрены ниже.

Вначале остановимся на свойствах симметрии в дискретных автоматических системах. Рассматриваем дискретную управляемую систему, состояние которой в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \dots$ определяется разностным уравнением

$$\begin{aligned} x(t+1) &= F(x(t), t) + H(u(t), t), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Все переменные здесь те же, что в (1).

Построим управление, обеспечивающее движение системы (3.2.1) по назначенному траектории $x^*(t)$, т. е. обеспечивающее выполнение равенства

$$x^*(t+1) = x(t+1), \quad t \geq 0.$$

Подставляем x^* в (3.2.1) вместо x

$$x^*(t+1) = F(x^*(t), t) + H(u(t), t), \quad t \geq 0, \quad (3.2.2)$$

и, при условии существования управления, и при $x^*(0) = x(0)$ получаем

$$u^*(t) = H^{-1}(x^*(t+1) - F(x^*(t), t), t), \quad t \geq 0, \quad (3.2.3)$$

где H^{-1} — оператор, обратный по отношению к оператору H . Получено оптимальное разомкнутое управление. Оно, как и в непрерывном случае, полностью определяется структурой и параметрами математической модели объекта управления (3.2.1).

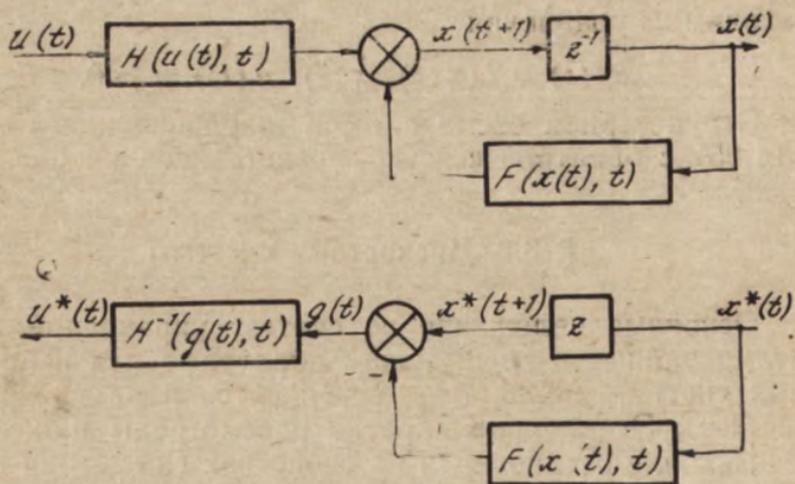


Рис. 3.2.1

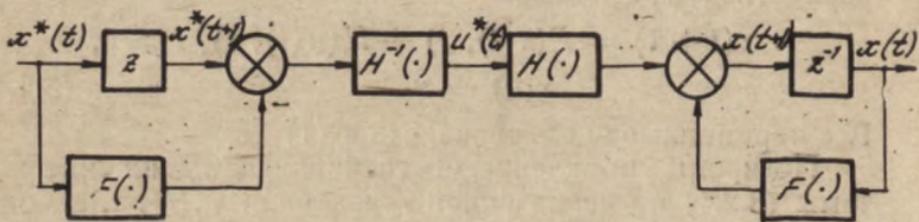


Рис. 3.2.2

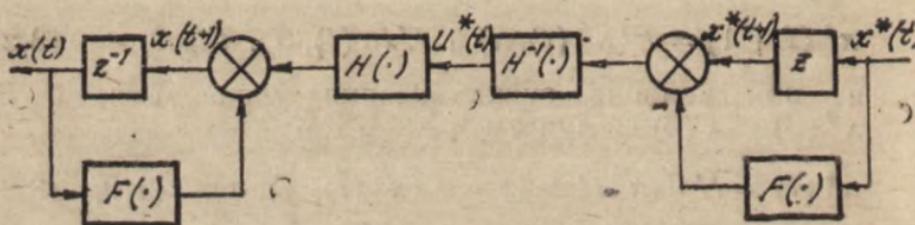


Рис. 3.2.3

На рис. 3.2.1 представлены структурные схемы объекта и устройства управления, отвечающие уравнениям (3.2.1) и (3.2.3).

В объекте и в управляющем устройстве соответствующие операции симметричны: задержка и упреждение, суммирование и вычитание, прямое $H(\cdot)$ и обратное ему преобразование $H^{-1}(\cdot)$. Входная и выходная переменные управляющего устройства представляют собой соответствующие обращенные переменные объекта управления.

На рис. 3.2.2. представлена структурная схема системы управления. Обращение системы с учетом указанных выше операций симметрии, обращение переменных и изменение направления потока переменных дает систему, представленную на рис. 3.2.3 и эквивалентную исходной системе (см. рис. 3.2.2).

Линейные системы

Для данного класса сравнительно просто удается построить оптимальные управляющие функции в виде обратной связи, а полученные результаты служат основой синтеза оптимальных управляющих сил в нелинейных системах.

Рассматриваем управляемый объект, описываемый скалярным разностным уравнением

$$x(t+1) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i) + bu(t), \quad t \geq 0, \quad (3.2.4)$$

$$x(i) = x_i, \quad i = 0, -1, \dots, 1-n.$$

Цель управления заключается в обеспечении движения объекта по назначеннной траектории x^* , т. е. в выполнении равенства

$$x^*(t+1) = x(t+1), \quad t \geq 0. \quad (3.2.5)$$

Оптимальное разомкнутое управление следует из (3.2.4) после подстановки в него вместо $x(t)$ заданных координат $x^*(t)$

$$u^*(t) = b^{-1}(x^*(t+1) - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i x^*(t+1-i)), \quad t \geq 0. \quad (3.2.6)$$

При этом, естественно, предполагаем, что заданная траектория совпадает с начальным положением объекта, т. е. $x^*(i) = x_i$, $i = 0, -1, \dots, 1-n$, и что заданная траектория полностью воспроизводима объектом. В противном случае равенство (3.2.5) недостижимо.

Считаем, что траектория $x^*(t)$ задана в виде линейного набора известных m функций $\psi_v(t)$ ($v = \overline{1, m}$, $m \leq n$) плюс постоянная составляющая

$$x^*(t) = \sum_{v=1}^m c_v \psi_v(t) + \bar{x}, \quad t \geq 0. \quad (3.2.7)$$

Постоянные коэффициенты c_v ($v = \overline{1, m}$) при $m = n$ находим из начальных условий движения объекта (3.2.4)

$$\rightarrow x^*(i) = \sum_{v=1}^m c_v \psi_v(i) + \bar{x} = x_i, \quad i = 0, -1, \dots, 1-n. \quad (3.2.8)$$

Если $m < n$, то $n-m$ условий по x^* должны совпадать с x_i . Тогда заданная траектория будет начинаться в той же точке, из которой движется объект. Подставляем $x^*(t)$ из (3.2.7) в (3.2.6) и получаем программное оптимальное управление

$$u^*(t) = b^{-1} \left[\sum_{v=1}^m c_v (\psi_v(t+1) - \sum_{i=1}^n a_i \psi_v(t+1-i)) + \right. \\ \left. + \bar{x} \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \right) - a_0 \right], \quad t \geq 0. \quad (3.2.9)$$

Полученное управление в ряде случаев удается представить как функцию только фазовых координат $x(t)$, $x(t-1)$, ..., т. е. в виде обратной связи. Для этого необходимо в (3.2.9) выразить функции $c_v \psi_v(t)$ через координаты объекта. Эта задача просто решается, если $\psi_v(t)$ удовлетворяют разностным уравнениям:

$$\psi_v(t) = \rho_{v\kappa}^{-1} \psi_v(t-\kappa), \quad t \geq 1, \quad \kappa = \overline{1, n-1}, \quad \psi_v(0) = \psi_{v0}. \quad (3.2.10)$$

С учетом (3.2.10) все входящие в (3.2.9) функции $\psi_v(t+1)$, $\psi_v(t-1)$, ..., $\psi_v(t+1-n)$ выражаются через $\psi_v(t)$:

$$\begin{aligned}\psi_v(t+1) &= \rho_{v1}^{-1} \psi_v(t); \quad \psi_v(t-1) = \rho_{v1} \psi_v(t); \quad \psi_v(t-2) = \\ &= \rho_{v2} \psi_v(t); \dots; \quad \psi_v(t+1-n) = \rho_{vn-1} \psi_v(t)\end{aligned}$$

и тогда (3.2.9) приобретает вид

$$u^*(t) = b^{-1} \left[\sum_{v=1}^m c_v \gamma_v \psi_v(t) + \bar{x} \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \right) - a_0 \right], \quad t \geq 0, \quad (3.2.11)$$

$$\gamma_v = \rho_{v1}^{-1} - a_1 - a_2 \rho_{v1} - a_3 \rho_{v2} - \dots - a_n \rho_{vn-1}.$$

Входящие в это уравнение функции $c_v \psi_v(t)$ ($v = \overline{1, m}$) находим из m уравнений $[x(\kappa) = x^*(\kappa), \kappa = t, t-1, \dots, t+1-m]$ совпадения текущих координат объекта с заданной траекторией в m моментов времени:

$$\begin{aligned}x(t) - \bar{x} &= \sum_{v=1}^m c_v \psi_v(t); \\ x(t-1) - \bar{x} &= \sum_{v=1}^m c_v \rho_{v1} \psi_v(t); \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x(t+1-m) - \bar{x} &= \sum_{v=1}^m c_v \rho_{vm-1} \psi_v(t).\end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Решая эту систему линейных неоднородных алгебраических уравнений (естественно при условии ее разрешимости), находим

$$c_v \psi_v(t) = \sum_{i=1}^m r_{vi} (x(t+1-i) - \bar{x}), \quad v = \overline{1, m}. \quad (3.2.13)$$

Подставляем эти функции в (3.2.11) и получаем оптимальное управление с обратной связью

$$\begin{aligned}u^*(t) &= b^{-1} \left[\sum_{i=1}^m p_i (x(t+1-i) - \bar{x}) + \bar{x} \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \right) - \right. \\ &\quad \left. - a_0 \right], \quad t \geq 0, \quad p_i = \sum_{v=1}^m \gamma_v r_{vi}.\end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Проведем обобщение этого метода. Рассматриваем заданную траекторию в виде (3.2.7), но \bar{x} берем как известную функцию времени, то есть

$$x^*(t) = \sum_{v=1}^m c_v \psi_v(t) + \bar{x}(t), \quad t \geq 0.$$

Заметим, что при $m = 0$ $\sum_{v=1}^0 (\cdot) = 0$ и $x^*(t) \equiv \bar{x}(t)$. Уравнение (3.2.11) приобретает вид

$$\begin{aligned} u^*(t) = b^{-1} & \left[\sum_{v=1}^m c_v \gamma_v \psi_v(t) + \bar{x}(t+1) - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^n a_i \bar{x}(t+1-i) - a_0 \right]. \end{aligned}$$

Теперь только часть функций m' из m $c_v \psi_v(t)$ ($v = \overline{1, m}$) выразим через фазовые координаты $x(t)$ [см. (3.2.12)].

$$\begin{aligned} x(t-i) - \bar{x}(t-i) - \sum_{v=m'+1}^m c_v \psi_v(t) &= \sum_{v=1}^{m'} c_v \rho_{v,i} \psi_v(t), \\ i = \overline{0, m'-1}, \quad \rho_{v0} &= 1. \end{aligned}$$

Решая данную линейную систему, получаем

$$\begin{aligned} c_v \psi_v(t) &= \sum_{i=1}^{m'} r_{vi} \left[x(t+1-i) - \bar{x}(t+1-i) - \right. \\ & \left. - \sum_{v=m'+1}^{m'} c_v \psi_v(t+1-i) \right], \quad v = \overline{1, m'}, \end{aligned}$$

и, после подстановки $c_v \psi_v(t)$ ($v = \overline{1, m'}$) в $u^*(t)$, оптимальное управление. При $m' = 0$ это будет полностью разомкнутое управление, а при $m' = m$ — замкнутое управление типа (3.2.14). В остальных случаях имеем комбинированное управление.

Ждет своего решения задача исследования свойств замкнутых систем с этим типом комбинированных управлений.

Пример. Объект описывается разностным уравнением первого ($n = 1$) порядка

$$x(t+1) = 0,5x(t) + 0,5u(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0.$$

Ставя в соответствие данное конкретное уравнение общей структуре (3.2.4) этого типа моделей, убеждаемся, что $a_0 = 0$, $a_1 = 0,5$, $b = 0,5$. Назначенная траектория задана разностным уравнением

$$x^*(t+1) = 0,8x^*(t), \quad t \geq 0, \quad x^*(0) = x_0,$$

т. е. $x^*(t) = c_1\psi_1(t)$, причем $c_1 = 1$, ибо заданная траектория при $t = 0$ совпадает с начальным положением объекта. В асимптотике (при $t \rightarrow \infty$) $x^*(t) = (0,8)^t x_0$ стремится к нулю, т. е. объект необходимо перевести из точки x_0 в начало координат по траектории $x^*(t)$. Очевидно, что $\psi_1(t) \equiv x^*(t)$ удовлетворяет уравнению вида (3.2.10). Разомкнутое оптимальное управление определяется уравнением (3.2.11), в котором $a_1 = b = 0,5$, $n = 1$, $c_1 = 1$, $\rho_{11}^{-1} = 0,8$, $\bar{x} = a_0 = 0$, то есть

$$u^*(t) = 0,6\psi_1(t) = 0,6x^*(t), \quad t \geq 0.$$

Из (3.2.12) следует, что $\psi_1(t) = x(t)$ и в итоге получаем оптимальное управление с обратной связью (3.2.14)

$$u^*(t) = 0,6x(t), \quad t \geq 0.$$

Данный пример иным способом был решен в [4, с. 197]. Заметим, что сложность решения и данного примера и более общей задачи управления для объекта (3.2.4) обоими способами примерно одинакова.

При рассмотрении вместо (3.2.4) уравнения более общего вида, например,

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i) + \sum_{j=0}^{\kappa} b_j u(t-j), \quad t \geq 0, \quad (3.2.15)$$

$$\kappa < n, \quad x(i) = x_i, \quad i = 0, -1, -2, \dots, 1-n,$$

необходимо перейти к векторным разностным уравнениям вида

$$\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad t \geq 0, \quad (3.2.16)$$

где $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$ — вектор состояния; $u(t)$ управляющая скалярная функция; \mathbf{A} — матрица коэффициентов;

B — вектор-столбец коэффициентов. Учет в уравнении (3.2.15) постоянной составляющей a_0 проводится так же, как и в предыдущем случае, и на этом варианте мы здесь останавливаться не будем.

Вначале уравнение (3.2.16) необходимо привести к каноническому виду [5]

$$\tilde{\mathbf{X}}(t+1) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{e}_n u(t), \quad \tilde{\mathbf{X}}(0) = \tilde{\mathbf{X}}_0, \quad t \geq 0, \quad (3.2.17)$$

где матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ и вектор \mathbf{e}_n имеет форму

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\tilde{a}_n - \tilde{a}_{n-1} - \tilde{a}_{n-2} & \dots & -\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1 & & & \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнению (3.2.17) соответствует система разностных уравнений

$$\tilde{x}_1(t+1) = \tilde{x}_2(t), \quad \tilde{x}_1(0) = \tilde{x}_{10}, \quad (3.2.18)$$

$$\tilde{x}_2(t+1) = \tilde{x}_3(t), \quad \tilde{x}_2(0) = \tilde{x}_{20},$$

$$\tilde{x}_n(t+1) = -\tilde{a}_n \tilde{x}_1(t) - \tilde{a}_{n-1} \tilde{x}_2(t) - \dots -$$

$$-\tilde{a}_1 \tilde{x}_n(t) + u(t), \quad \tilde{x}_n(0) = \tilde{x}_{n0}, \quad t \geq 0.$$

Процедура канонического преобразования основана на замене переменной

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{K}\tilde{\mathbf{X}}(t), \quad (3.2.19)$$

где K — неособая матрица канонического преобразования. Подставляем (3.2.19) в (3.2.16) и приходим к уравнению (3.2.17)

$$\tilde{X}(t+1) = K^{-1}AK\tilde{X}(t) + K^{-1}Bu(t), \quad \tilde{X}(0) = \tilde{X}, \quad t \geq 0. \quad (3.2.20)$$

Сравнивая (3.2.20) с (3.2.17), получаем, что матрица K должна удовлетворять соотношениям:

$$K^{-1}AK = \tilde{A}; \quad K^{-1}B = e_n$$

или

$$AK - K\tilde{A} = 0; \quad B = Ke_n. \quad (3.2.21)$$

Решение матричного уравнения (3.2.21) имеет вид

$$\begin{aligned} K &= (\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_n), \quad \kappa_n = B, \quad \kappa_{n-1} = AB + a_1 B, \\ \kappa_{n-2} &= A^2 B + a_1 A B + a_2 B, \dots, \\ \kappa_1 &= A^{n-1} B + a_1 A^{n-2} B + \dots + a_{n-1} B. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Итак, считаем, что матрица K вычислена и получено уравнение в канонической форме (3.2.17). Требуется для системы (3.2.17) построить скалярное оптимальное уравнение $u^*(t)$, при котором движение системы из точки $\tilde{X}(0) = \tilde{X}_0$ осуществляется таким образом, что координата $\tilde{x}_1(t)$ совпадает с заданной траекторией

$x_1^*(t) = \sum_{i=1}^n c_i \rho_i^t$, то есть

$$\tilde{x}_1(t) = \tilde{x}_1^*(t) \equiv \sum_{i=1}^n c_i \rho_i^t, \quad t \geq 0, \quad (3.2.23)$$

где $\rho_i (i = \overline{1, n})$ — различные действительные или комплексно-сопряженные числа такие, что $|\rho_i| < 1$. Константы $c_i (i = \overline{1, n})$ однозначно определяются начальными значениями координат состояния $\tilde{X}^*(0) = \tilde{X}(0) = \tilde{X}_0$.

Требование обеспечения движения по заданной траектории можно накладывать на любую из координат вектора $X(t)$. Здесь же для конкретности рассматривается первая координата $\tilde{x}_1(t)$.

Траектория $\tilde{x}_1^*(t)$ [см. (3.2.23)] является асимптотически устойчивой (т. е. $x_1^*(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$), ибо $|\rho_i| < 1$, $i = \overline{1, n}$.

Как и для системы (3.2.4), задачу решаем в два этапа: находим разомкнутое управление, а затем управление с обратной связью.

По координате (3.2.23) построим вектор $\tilde{X}^*(t)$, соответствующий $\tilde{X}(t)$:

$$\tilde{x}_2^*(t) = \tilde{x}_1^*(t+1) = \sum_{i=1}^n \rho_i c_i \rho_i^t;$$

$$\tilde{x}_3^*(t) = \tilde{x}_2^*(t+1) = \sum_{i=1}^n \rho_i^2 c_i \rho_i^t;$$

$$\tilde{x}_n^*(t) = \tilde{x}_{n-1}^*(t+1) = \sum_{i=1}^n \rho_i^{n-1} c_i \rho_i^t;$$

$$\tilde{x}^*(t) = R_{n-1} \rho^t c,$$

$$R_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \dots & \dots & \rho_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_1^{n-1} & \rho_2^{n-1} & \dots & \dots & \rho_n^{n-1} \end{pmatrix}; \quad \rho^t =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2^t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_n^t \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\tilde{X}^*(t+1) = R_{n-1} \rho^{t+1} c = R_n \rho^t c, \quad R_n = R_{n-1} \rho.$$

Подставляем \tilde{X}^* в (3.2.17) вместо \tilde{X} и получаем разомкнутое управление

$$\begin{aligned} u^*(t) = e_n^T (\tilde{X}^*(t+1) - \tilde{A} \tilde{X}^*(t)) &= e_n^T (R_n - \\ &- \tilde{A} R_{n-1}) \rho^t c_* \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Константу c находим из условия начала траектории $\tilde{X}^*(0)$ в точке \tilde{X}_0 :

$$\tilde{X}^*(0) = R_{n-1}c = \tilde{X}_0, \quad c = R_{n-1}^{-1}\tilde{X}_0.$$

Для получения из (3.2.24) управления с обратной связью находим из условия $\tilde{X}^*(t) = \tilde{X}(t)$ вектор $\rho^t c$

$$R_{n-1}\rho^t c = \tilde{X}(t), \quad \rho^t c = R_{n-1}^{-1}\tilde{X}(t)$$

и подставляем его в (3.2.24). Тогда

$$u^*(t) = e_n^T(R_n - \tilde{A}R_{n-1})R_{n-1}^{-1}\tilde{X}(t) \equiv p^T\tilde{X}(t). \quad (3.2.25)$$

Оптимальное управление для системы (3.2.16) получается из (3.2.24) и (3.2.25) с учетом взаимосвязи между координатами (3.2.19)

$$u^*(t) = e_n^T(R_n - K^{-1}AKR_{n-1})\rho^t R_{n-1}^{-1}KX_0; \quad (3.2.26)$$

$$u^*(t) = p^T K X(t), \quad p^T = e_n^T(R_n - K^{-1}AKR_{n-1})R_{n-1}^{-1}. \quad (3.2.27)$$

Полученное разомкнутое управление (3.2.26) и управление с обратной связью (3.2.27) реализуют движение системы (3.2.16) по назначенн^{ой} траектории $X^*(t) = -K^{-1}\tilde{X}^*(t) = K^{-1}R_{n-1}\rho^t c = K^{-1}R_{n-1}\rho^t R_{n-1}^{-1}\tilde{X}_0$.

Нелинейные системы

Рассмотрим вначале простейшую нелинейную систему, состоящую из линейного [типа (3.2.4)] и нелинейного блоков

$$\begin{aligned} x(t+1) &= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i) + f(x(t), \dots, \\ &\quad x(t-n), u(t)), \quad t \geq 0, \\ x(i) &= x_i, \quad i = 0, -1, \dots, 1-n. \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Цель управления та же, что и для системы (3.2.4). Вводим обобщенную силу

$$w(t) \equiv f(x(t), \dots, x(t+1-n), u(t)), \quad t \geq 0, \quad (3.2.29)$$

и находим оптимальную ее величину $w^*(t)$ по описанной выше теории для линейных систем. Затем подстав-

ляем $w^*(t)$ в (3.2.29) и, решая его относительно $u(t)$, находим оптимальную управляющую функцию

$$u^*(t) = f^{-1}(x(t), \dots, x(t+1-n), w^*(t)), \\ t \geq 0. \quad (3.2.30)$$

Для более общего класса нелинейных многомерных систем, эквивалентных (3.2.16)

$$X(t+1) = AX(t) + f(X(t), u(t)), \\ t \geq 0, X(0) = X_0 \quad (3.2.31)$$

также вводим обобщенную силу $w(t)$

$$Bw(t) = f(X(t), u(t)), t \geq 0, \quad (3.2.32)$$

где B — известный вектор-столбец, по описанной выше схеме для линейной системы (3.2.16) находим оптимальную обобщенную силу $w^*(t)$ и из решения экстремальной задачи

$$\|Bw^*(t) - f(X(t), u(t))\|^2 = \min \quad (3.2.33)$$

вычисляем оптимальную управляющую функцию $u^*(t)$. В (3.2.33) $\|\cdot\|$ — норма вектора.

В заключение проведем кратное сравнение сложности реализации алгоритмов, рассмотренных в данном параграфе (по второму методу), и алгоритмов, описанных в §§ 1.1—1.3, 2.1, 2.2 (по первому методу). Рассмотрим для конкретности линейную одномерную систему, движение которой задано уравнением в канонической форме.

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i) + u(t), t \geq 0. \\ x(i) = x_i, i = 0, -1, \dots, 1-n.$$

Управляющее воздействие с обратной связью, рассчитанное по первому методу, имеет вид

$$u(t) = x^*(t+1) - \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i), t \geq 0. \quad (3.2.34)$$

Для получения окончательного результата

$$u(t) = \sum_{i=1}^n p_i x(t+1-i) (t \geq 0)$$

по второму методу траектория $x^*(t)$ задается в виде линейного набора известных функций

$$x^*(t) = \sum_{k=1}^n c_k p_k^t \quad (|p_k| < 1, p_i \neq p_j),$$

при $i \neq j$

и эти функции выражаются через $x(t+1-i)$ ($i = \overline{1, n}$). Указанные операции при изменении свойств траектории (чисел p_k , $k = \overline{1, n}$), начального положения объекта (чисел c_k , $k = \overline{1, n}$) либо того и другого вместе необходимо дополнительно выполнить по сравнению с реализацией алгоритма (3.2.34). Дополнительные вычислительные затраты следующие: $(\frac{1}{3}n^3 + n^2)$ — количество операций умножения (сложения), $(n^2 - 1)$ — количество ячеек памяти.

Усложнение уравнения движения по сравнению с каноническим видом, например

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i) + \sum_{j=1}^m b_j u(t+1-j), \\ m \leq n, t \geq 0, \quad (3.2.35)$$

$$x(i) = x_i (i = 0, -1, \dots, 1-n), \quad u(j) = u_j (j = -1, \\ -2, \dots, 1-m),$$

приводит по второму методу к дополнительным вычислительным затратам, связанным с преобразованием уравнения движения (3.2.35) к канонической форме. Оптимальное управление, рассчитанное по первому методу, для системы (3.2.35) имеет вид

$$u(t) = b_1^{-1} (x^*(t+1) - \sum_{i=1}^n a_i x(t+1-i) - \\ - \sum_{j=2}^m b_j u(t+1-j)), \quad t \geq 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный в монографии метод синтеза алгоритмов адаптивного управления с идентификацией обладает достаточной общностью. Синтезированные алгоритмы имеют простую структуру и в основе их лежит использование математической модели объекта. Качество адаптивного управления однозначно определяется качеством идентификации динамических свойств объекта управления. Метод позволяет исследователю не только вручную осуществлять синтез устройств управления, но также ставить и решать задачу автоматического проектирования систем управления с помощью ЭВМ. Это наиболее перспективный путь внедрения теоретических результатов в практику.

Метод нуждается в дальнейшем развитии и обобщении на новые классы объектов. Примерами их могут служить распределенные объекты, объекты с упруговязкими элементами, процессы, описываемые разрывными динамическими моделями. Важны для практики классы систем с неполной наблюдаемостью фазовых координат, с помехами, содержащими выбросы. Необходимо осуществить детальный сравнительный анализ основных свойств синтезированных алгоритмов и лучших известных алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилов Ф. А. и др. Адаптивное управление точностью прокатки труб.—М.: Металлургия, 1973.—224 с.
2. Красовский А. А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование.—М.: Наука, 1973.—560 с.
3. Красовский А. А., Буков В. Н., Шендрек В. С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами.—М.: Наука, 1977.—271 с.
4. Крутъко П. Д. Вариационные методы синтеза систем с цифровыми регуляторами.—М.: Сов. радио, 1967.—439 с.
5. Крутъко П. Д., Попов Е. П. Построение алгоритмов управления движением дискретных систем.—Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1979, № 3, с. 159—167.
6. Кунцевич В. М., Лычак М. М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова.—М.: Наука, 1977.—400 с.
7. Неймарк Ю. Н., Фуфаев М. А. Динамика неголономных систем.—М.: Наука, 1967.—519 с.
8. Петров Б. Н., Крутъко П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели.—Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1980, № 4, с. 147—156.
9. Петров Б. Н., Крутъко П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели.—Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1980, № 5, с. 149—155.
10. Петров Б. Н., Рутковский В. Ю., Земляков С. Д. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами.—М.: Наука, 1980.—244 с.
11. Райбман Н. С., Чадеев В. М. Построение моделей процессов производства.—М.: Энергия, 1975.—375 с.
12. Рубан А. И. Идентификация нелинейных динамических объектов на основе алгоритма чувствительности.—Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1975.—270 с.
13. Рубан А. И., Светлаков А. А. Адаптивное управление внутриванными процессами гальванопроизводства.—В кн.: Системы управления и их элементы. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1980, с. 112—141.
14. Трапезников В. А., Райбман Н. С., Чадеев В. М. и др. АСИ — адаптивная система с идентификатором.—М.: Институт проблем управления, 1980.—67 с.
15. Эйхофф П. Основы идентификации систем управления.—М.: Мир, 1975.—683 с.
16. Якубович В. А. Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем.—В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы.—М.: АН СССР. Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1976, с. 32—64.
17. Якубович В. А. Адаптивное субоптимальное управление линейным динамическим объектом при наличии запаздывания в управлении.—Кибернетика, 1976, № 1, с. 26—43.

Приложение

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Приложение написано в виде самостоятельной работы с собственной литературой и одноиндексной нумерацией формул.

Метод последовательной линеаризации (МПЛ) применительно к решению параметрических задач идентификации и управления изложен в работах автора [1, 2] и использован в данной монографии. Идею метода продемонстрируем на примере экстремальной задачи без ограничений

$$I(z) = \min_{\alpha} \quad (1)$$

Здесь $z(t) \equiv z(t, \alpha)$ — переменные динамической модели являются функциями (явными или неявными) вектора неизвестных параметров α ; непрерывный функционал $I(z)$ построен на функциях $z(t)$ при непрерывных (или дискретных) значениях t , изменяющихся внутри области Ω .

Берем квадратичную аппроксимацию функционала

$$I(z + \varepsilon v) \approx I(z) + \delta I(z, v) \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta^2 I(z, v, v), \quad (2)$$

которая представляет собой отрезок ряд Вольтерра с учетом квадратичных членов. Здесь

$$\begin{aligned} \delta I(z, v) &= \int \limits_{\Omega} L(s) v(s) ds, \quad \delta^2 I(z, v, v) = \\ &= \int \limits_{\Omega} \int \limits_{\Omega} v^T(s_1) L(s_1, s_2) v(s_2) ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Вектор-строка $L(s)$ и матрица $L(s_1, s_2)$ ядер Вольтерра зависят только от функции z . Разложение (2) остается

в силе при векторном параметре t . При дискретных значениях t из некоторого множества T в (3) вместо интегралов будут стоять суммы.

Обозначаем через a^l — параметры, полученные на l -й итерации. Тогда $z^l(t) \equiv z(t, a^l)$. Считаем, что входящая в (2), (3) переменная $z^l(t) + \varepsilon v^l(t)$ представляет собой линейную аппроксимацию функции $z(t)$ в точке a^l

$$\begin{aligned} z(t) &\approx z^l(t) + (dz^l(t)/da)\Delta a^{l+1}, \\ \Delta a^{l+1} &= a - a^l, \end{aligned} \quad (4)$$

т. е. в (2), (3) вместо $z(t)$ следует ставить $z^l(t)$, а вместо $\varepsilon v(t)$ — величину $\varepsilon v^l(t) = (dz^l(t)/da)\Delta a^{l+1}$:

$$\begin{aligned} I(z^l + \varepsilon v^l) &\approx \bar{I}^{l+1} = I(z^l) + \int_{\Omega} L^l(s) (dz^l(s)/da) ds \Delta a^{l+1} + \\ &+ \frac{1}{2} (\Delta a^{l+1})^T \int_{\Omega} \int_{\Omega} (dz^l(s_1)/da)^T L^l(s_1, s_2) (dz^l(s_2)/da) \times \\ &\times ds_1 ds_2 \Delta a^{l+1} \equiv I(z^l) + (\nabla_a I^l)^T \Delta a^{l+1} + \\ &+ \frac{1}{2} (\Delta a^{l+1})^T B^l \Delta a^{l+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Эта аппроксимация позволяет на каждой итерации экстремальную задачу заменить простой квадратичной задачей

$$\begin{aligned} \bar{I}^{l+1} &= I(z^l) + (\nabla_a I^l)^T \Delta a^{l+1} + \\ &+ \frac{1}{2} (\Delta a^{l+1})^T B^l \Delta a^{l+1} = \min_{\Delta a^{l+1}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если бы в (1) присутствовали ограничения, то в задаче квадратичного программирования (6) они были бы представлены в линеаризованном виде (см. [2]). Если матрица L — положительно определена, то положительно определена и матрица B и единственное решение задачи (6) запишется в виде

$$\Delta a^{l+1} = -(B^l)^{-1} \nabla_a I^l. \quad (7)$$

По приращениям Δa^{l+1} находим следующее приближение параметров:

$$a^{l+1} = a^l + \gamma^l \Delta a^{l+1}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \gamma^l > 0. \quad (8)$$

Выбором скалярного параметра γ^l (например, $\gamma^l = 2^{-i}$, $i = 0, 1, 2, \dots$) добиваемся монотонной сходимости

$$I(a^{l+1}) \leq I(a^l). \quad (9)$$

По описанной схеме в [2] решены более сложные по сравнению с (1) задачи ретроспективной и адаптивной перестройки постоянных и переменных параметров.

В данном приложении разработан обобщенный вариант МПЛ, который структурно включает в себя известный МПЛ [1, 2], метод линеаризации [3], метод Ньютона [3], методы переменной метрики [3] и растяжения пространства [4] и др. Доказательство сходимости проводится по той же схеме, что и для метода линеаризации [3].

1. Рассмотрим вначале МПЛ при решении экстремальной задачи без ограничений

$$f(a) = \min_{\alpha} \quad (10)$$

Заметим, что (10) является более общей экстремальной задачей по сравнению с (1), ибо минимизируемая в (1) функция $f(a) = I(z(t, a))$ имеет специальный, хотя и типичный для идентификации и управления, вид. Конкретная структура минимизируемой в (1) функции позволила получить структуру матрицы B^l [см. (7)].

В отличие от (6)–(8) направление перемещения параметров Δa^{l+1} будем обозначать через p^l . Такая форма записи более типична для методов нелинейного программирования.

Алгоритм поитерационного изменения параметров по МПЛ (8) имеет вид

$$a^{l+1} = a^l + \gamma^l p^l, \quad 0 < \gamma^l \leq 1, \quad l = 0, 1, 2, \dots. \quad (11)$$

Направление p^l перемещения параметров находим из решения квадратичной задачи (6)

$$\psi(p^l) = \frac{1}{2} (p^l, B^l p^l) + (f'(a^l), p^l) = \min. \quad (12)$$

Здесь $(p, Bp) \equiv p^T B p$; $f' \equiv \nabla f$; B — симметричная, невырожденная матрица. Задача (12) эквивалентна системе уравнений

$$B^l p^l = -f'(a^l). \quad (13)$$

Формально решение (13) записывается в виде

$$p^l = -(B^l)^{-1} f'(a^l). \quad (14)$$

Решать же систему линейных алгебраических уравнений можно различными методами, в том числе устойчивыми к вырождению матрицы B^l . В дальнейшем любое решение системы (13), удовлетворяющее (13) с заданной точностью, будем обозначать через

$$(p^l)^+ = -(B^l)^+ f'(a^l). \quad (15)$$

Например, итерационная последовательность

$$p_{k+1}^l = p_k^l - \delta_k c_k \psi'(p_k^l), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

$$\psi'(p^l) \equiv B^l p^l + f'(a^l), \quad \delta_k > 0$$

где c_k — неотрицательно определенная весовая матрица, дает решение (при $k \rightarrow \infty$) (15) системы (13) и обеспечивает минимум функции $\psi(p)$.

Матрица B^l существенно влияет на скорость сходимости алгоритма (11).

В силу положительной определенности матрицы B^l имеем

$$m(y, y) \leq (y, B^l y) \leq M(y, y), \quad M > m > 0. \quad (17)$$

и (см. лемму 1.2.9 из [3])

$$m_1(y, y) \leq (y, (B^l)^{-1} y) \leq M_1(y, y), \quad m_1 = \frac{m}{M^2},$$

$$M_1 = \frac{1}{m}. \quad (18)$$

За основу расчета p^l возьмем решение (14). Тогда

$$(f'(a^l), p^l) = -(f'(a^l), (B^l)^{-1} f'(a^l)) \leq -m_1(f'(a^l), f'(a^l)) < 0. \quad (19)$$

Дополнительно считаем, что

$$m''(y, y) \leq (y, f''y) \leq M''(y, y), \quad M'' > m'' > 0, \quad (20)$$

$$(y, y) \equiv \|y\|^2, \quad (y, By) \equiv \|y\|_B^2, \quad (21)$$

Теорема. При любом начальном значении a^0 и при выборе γ^l из последовательности $(2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, \dots)$ до выполнения условия

$$f(a^{l+1}) \leq f(a^l) - \gamma^l \varepsilon (p^l, B^l p^l), \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (22)$$

имеет место сходимость a^l к a^* и $f(a^l)$ к $f(a^*)$, где a^* — точка ближайшего к a^0 минимума функции $f(a)$. Для скорости сходимости имеют место соотношения:

$$f(\alpha^l) - f(\alpha^*) \leq q^l (f(\alpha^0) - f(\alpha^*)), \quad \|\alpha^l - \alpha^*\| \leq cq^{l/2}, \quad (23)$$

$$0 < q < 1, \quad c < \infty, \quad q = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{m''}{M''} \left(1 + \frac{m''}{M''} \right).$$

Доказательство. Находим верхнюю оценку для приращения целевой функции [см. (11), (20)]

$$\begin{aligned} f(\alpha^{l+1}) - f(\alpha^l) &= \gamma^l (f'(\alpha^l), p^l) + \frac{(\gamma^l)^2}{2} (p^l, f''(\theta) p^l) \leq \\ &\leq \gamma^l (f'(\alpha^l), p^l) \left(1 + \frac{\gamma^l M'' \|p^l\|^2}{2(f'(\alpha^l), p^l)} \right), \quad \theta \in [x^l, x^{l+1}]. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (13), (17) имеем

$$(f'(\alpha^l), p^l) = -(p^l, B^l p^l) \leq -m(p^l, p^l) < 0. \quad (25)$$

Тогда (24) приобретает вид

$$\begin{aligned} f(\alpha^{l+1}) - f(\alpha^l) &\leq \gamma^l (f'(\alpha^l), p^l) \left(1 - \frac{\gamma^l M''}{2m} \right) = \\ &= -\gamma^l \left(1 - \frac{\gamma^l M''}{2m} \right) (p^l, B^l p^l) \leq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Очевидно, что (26) совпадает с условием выбора параметра γ^l (22) при $\gamma^l < \bar{\gamma}^l = [(1 - \varepsilon) 2m]/M''$. Отсюда следует, что условие (22) достигается при конечных i_0 ($\gamma^l = 2^{-t_0}$). Итак

$$\begin{aligned} f(\alpha^{l+1}) - f(\alpha^l) &\leq \gamma^{l_0} (f'(\alpha^l), p^l) = -\gamma^{l_0} (f'(\alpha^l), \\ &(B^l)^{-1} f'(\alpha^l)) \leq -\gamma^{l_0} m_1 \|f'(\alpha^l)\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Находим верхнюю оценку для $\|f'(\alpha^l)\|^2$:

$$-\|f'(\alpha^l)\|^2 \leq -m'' \left(1 - \frac{m''}{M''} \right) (f(\alpha^l) - f(\alpha^*)). \quad (28)$$

Для этого записываем ряд Тейлора

$$\begin{aligned} f(\alpha^*) &= f(\alpha^l) + (f'(\alpha^l), \alpha^* - \alpha^l) + \frac{1}{2} (\alpha^* - \alpha^l, \\ &f''(\theta_1) (\alpha^* - \alpha^l)), \end{aligned}$$

$$f(\alpha^l) = f(\alpha^*) + \frac{1}{2} (\alpha^l - \alpha^*, f''(\theta_2) (\alpha^l - \alpha^*)),$$

из (20) получаем оценки для приращений

$$\begin{aligned} f(\alpha^l) - f(\alpha^*) &\leq (f'(\alpha^l), \alpha^l - \alpha^*) - \frac{m''}{2} \|\alpha^l - \alpha^*\|^2 \leq \\ &\leq \|f'(\alpha^l)\| \|\alpha^l - \alpha^*\| - \frac{m''}{2} \|\alpha^l - \alpha^*\|^2, \\ \frac{m''}{2} \|\alpha^l - \alpha^*\|^2 &\leq f(\alpha^l) - f(\alpha^*) \leq \frac{M''}{2} \|\alpha^l - \alpha^*\|^2, \end{aligned} \quad (29)$$

используем второе неравенство в (29)

$$-\frac{1}{2} \|\alpha^l - \alpha^*\| \leq -\frac{1}{M''} (f(\alpha^l) - f(\alpha^*)),$$

подставляем его в первое неравенство в (29)

$$f(\alpha^l) - f(\alpha^*) \leq \|f'(\alpha^l)\| \|\alpha^l - \alpha^*\| - \frac{m''}{M''} (f(\alpha^l) - f(\alpha^*)),$$

учитываем здесь неравенства, вытекающие из (29):

$$m'' \|\alpha^l - \alpha^*\|^2 \leq \|f'(\alpha^l)\| \|\alpha^l - \alpha^*\|, \quad m'' \|\alpha^l - \alpha^*\| \leq \|f'(\alpha^l)\|$$

и в итоге вычисляем оценку (28).

С учетом (28) неравенство (27) приводит к конечному результату (23)

$$f(\alpha^{l+1}) - f(\alpha^*) \leq q (f(\alpha^l) - f(\alpha^*)), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (30)$$

$$q = 1 - \gamma^l \varepsilon m_1 m'' \left(1 + \frac{m''}{M''} \right), \quad m_1 = \frac{m}{M^2}.$$

При $\gamma^l = \bar{\gamma}^l$

$$q = 1 - \frac{\varepsilon (1 - \varepsilon) 2 m m_1 m''}{M''} \left(1 + \frac{m''}{M''} \right), \quad 0 < q < 1.$$

Минимальное значение величина q принимает при $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то есть

$$q = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{m''}{M''} \left(1 + \frac{m''}{M''} \right). \quad (31)$$

В то же время из (29) и (30) следует второе неравенство в (23)

$$\|x^l - x^*\| \leq \left(\frac{2}{m''} \right)^{1/2} (f(x^l) - f(x^*))^{1/2} \leq \\ \leq \left(\frac{2}{m''} \right)^{1/2} q^{l/2} (f(x^0) - f(x^*))^{1/2} \leq cq^{l/2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Если $f''(x) = 0$, то $m'' = M'' = 0$, $\frac{m''}{M''} = 1$ и из (31)

$q = 1 - (m/M)^2$. В этом случае в отличие от метода Ньютона МПЛ обеспечивает поиск локального минимума функции $f(x)$.

В вышеуказанной теореме выбор скалярного параметра γ^l можно осуществлять из более простого [по сравнению с (22)] условия

$$f(a^{l+1}) < f(a^l). \quad (32)$$

Условие сходимости (23) при этом в основе сохраняется.

$$f(x^l) - f(x^*) \leq \prod_{i=1}^l q_i (f(x^0) - f(x^*)), \\ \|x^l - x^*\| \leq c \left(\prod_{i=1}^l q_i \right)^{1/2}, \quad (33) \\ c < \infty, \quad 0 < q < 1.$$

Действительно, (32) эквивалентно неравенству

$$f(a^{l+1}) - f(a^*) < f(a^l) - f(a^*)$$

или

$$f(a^{l+1}) - f(a^*) \leq q_l (f(a^l) - f(a^*)), \quad 0 < q_l < 1.$$

Отсюда следует первое неравенство в (33). Второе неравенство (33) получаем так же, как в (23). Заметим, что если $f(a_l) - f(a^{l+1}) = \Delta_l > 0$, то чем больше Δ_l , тем q_l ближе к 0 и тем выше скорость сходимости.

Рассмотрим примеры минимизации функционалов (1), возникающих при идентификации систем. Для некоторых функционалов матрица ядер Вольтерра $L(s_1, s_2)$ второго порядка равна нулю и тогда в ноль обращается матрица B^l в обычном методе [см. (6)] МПЛ. В этом случае для обобщенного МПЛ строятся оценки матрицы \tilde{B}^l . Эти матрицы для обеспечения сходимости должны быть положительно определены. Более подробно данный вопрос рассмотрен автором в [2].

Пример 1. Минимизируемый функционал задан в виде

$$f(z) \equiv I(z) = \sum_{t \in T} p(t) |z(t)|^\mu, \mu > 0, z(t) \neq 0, \\ z(t) = \eta^*(t) - \eta(t). \quad (34)$$

Здесь $p(t)$ — заданные весовые коэффициенты; $\eta^*(t)$ — измеренный скалярный выход объекта; $\eta(t)$ — зависящий от вектора параметров a выход модели объекта. При $\mu = 1$ вторая вариация функционала равна нулю. В этом случае надо видоизменять матрицу B . Задаем матрицу B в виде

$$B^l = \kappa \sum_{t \in T} p(t) |\eta^*(t) - \eta^l(t)|^{\mu-2} \nabla_a \eta^l(t) (\nabla_a \eta^l(t))^T, \kappa > 0. \quad (35)$$

Получаем сходящийся алгоритм (11), (14), в котором

$$-f'(z^l) \equiv -\nabla f(z^l) = \mu \sum_{t \in T} p(t) |\eta^*(t) - \eta^l(t)|^{\mu-2} \times \\ \times (\eta^*(t) - \eta^l(t)) \nabla \eta^l(t). \quad (36)$$

Пример 2. Считаем, что

$$f(z) = I(z) = \sum_{t \in T} p(t) Z(t), Z(t) = \\ = \begin{cases} |z(t)|, & |z(t)| > a, \\ \frac{a}{2} + \frac{1}{2a} z^2(t), & |z(t)| \leq a, \end{cases} \quad (37)$$

$$z(t) = \eta^*(t) - \eta(t).$$

Тогда в алгоритме (11), (14)

$$B^l = \sum_{t \in T} B^l(t), B^l(t) = \\ = \begin{cases} \kappa p(t) |z^l(t)|^{-1} \nabla \eta^l(t) (\nabla \eta^l(t))^T, & |z^l(t)| > a, \\ a^{-1} p(t) \nabla \eta^l(t) (\nabla \eta^l(t))^T, & |z^l(t)| \leq a, \end{cases} \quad (38)$$

$$-f'(z^l) = \sum_{t \in T} (-f'_t(z^l)), -f'_t(z^l) = \\ = \begin{cases} p(t) \operatorname{sign}[z^l(t)] \nabla \eta^l(t), & |z^l(t)| > a, \\ a^{-1} p(t) z^l(t) \nabla \eta^l(t), & |z^l(t)| \leq a. \end{cases}$$

Пример 3. Более устойчивым к выбросам случайных помех является функционал

$$f(\alpha) = I(z) = \frac{1}{2} \sum_{t \in T} [1 - \exp \{-p(t) z^2(t)\}],$$

$$z(t) = \eta^*(t) - \eta(t). \quad (39)$$

Для него

$$B^l = \sum_{t \in T} p(t) \exp \{-p(t) (z^l(t))^2\} \nabla \eta^l(t) (\nabla \eta^l(t))^T,$$

$$-f'(\alpha^l) = \sum_{t \in T} p(t) z^l(t) \exp \{-p(t) (z^l(t))^2\} \nabla \eta^l(t).$$
(40)

В примерах приведен один из вариантов задания матрицы B . Структура ее задается как в обычном МПЛ [1, 2] и корректируются лишь коэффициенты (или функции), делающие матрицу положительно определенной. В примерах функционалы в окрестностях экстремума имеют вид, близкий квадратичному. Для этих функционалов можно дать общую рекомендацию по заданию структуры матрицы B . Вычисляется градиент α и ему придается следующая структура:

$$-\nabla f = \sum_{t \in T} \kappa(t) z(t) \nabla \eta(t).$$

Здесь $\kappa(t)$ — весовая функция, которая положительна для функционалов с минимумом (относительно z). Структура матрицы B имеет вид

$$B = \sum_{t \in T} \kappa(t) \nabla \eta(t) \nabla^T \eta(t) \text{ либо } B = \sum_{t \in T} \nabla \eta(t) \nabla^T \eta(t).$$

Эта матрица положительно определена, если функции чувствительности $\partial \eta(t) / \partial a_j$ линейно-независимы. Положительная определенность следует из того, что B является матрицей Грамма.

2. Применим МПЛ к решению экстремальных задач с ограничениями

$$f_0(\alpha) = \min; f_i(\alpha) \leq 0, i \in J_1; f_i(\alpha) = 0, i \in J_2. \quad (41)$$

Ограничения типа неравенства $f_i(\alpha) \leq 0, i \in J_1$, имеют следующую особенность. Если при некотором $\alpha = a^l$ $f_i(a^l) < 0$ и точка a^l достаточно удалена от границы

$f_i(\alpha^l) = 0$, то это ограничение можно не учитывать. Ограничения $f_i(\alpha) \leq 0$ ($i \in J_1$) необходимо учитывать при их нарушении ($f_i(\alpha) > 0$) и при подходе внутри допустимой области к границе $f_i(\alpha) = 0$, т. е. при

$$-\delta \leq f_i(\alpha) \quad (i \in J_1), \quad \delta > 0.$$

Обозначим

$$J^\delta(\alpha) = \{i \in J_1 : -\delta \leq f_i(\alpha)\}. \quad (42)$$

Вводим штрафную функцию $F(\alpha)$

$$F(\alpha) = \max \{F_1(\alpha), 0\}, \quad F_1(\alpha) = \max_{i \in J^\delta(\alpha)} \{f_i(\alpha)\}. \quad (43)$$

Алгоритм перестройки параметров имеет вид

$$\alpha^{l+1} = \alpha^l + \gamma^l p^l, \quad \gamma^l = 2^{-i_0}, \quad (44)$$

где i_0 первое из натуральных чисел $(0, 1, 2, \dots)$, при котором выполнено неравенство

$$f_0(\alpha^{l+1}) + NF(\alpha^{l+1}) \leq f_0(\alpha^l) + NF(\alpha^l) - \gamma^l \varepsilon (p^l, B^l p^l), \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (45)$$

Здесь p^l удовлетворяет задаче выпуклого (B^l — положительно-определенная матрица) квадратичного программирования

$$(f'_0(\alpha^l), p^l) + \frac{1}{2} (p^l, B^l p^l) = \min_{p^l},$$

$$(f'_i(\alpha^l), p^l) + f_i(\alpha^l) \leq 0, \quad i \in J^\delta(\alpha^l), \quad (46)$$

$$(f'_i(\alpha^l), p^l) + f_i(\alpha^l) = 0, \quad i \in J_2.$$

Получим вначале решение задачи (46), а затем докажем сходимость $(\alpha^l \rightarrow \alpha^*, f_0(\alpha^l) \rightarrow f(\alpha^*))$ для алгоритма (44) — (46). Обозначим множители Лагранжа (или так называемые двойственные переменные) через $y_l(\alpha)$, $i \in J_3(\alpha)$, где $J_3(\alpha) = J^\delta(\alpha) \cup J_2$, $\alpha \equiv \alpha^l$, $p \equiv p^l$. Составим целевую функцию двойственной задачи

$$\varphi(y) = \min_{p \in E^n} \left\{ (f'_0(\alpha), p) + \frac{1}{2} (p, Bp) + \sum_{i \in J_3(\alpha)} y_i [(f'_i(\alpha), p) + f_i(\alpha)] \right\},$$

найдем

$$p = -B^{-1} \left[f'_0(\alpha) + \sum_{i \in J_3} y_i f'_i(\alpha) \right], \quad (47)$$

подставим p в функцию качества $\varphi(y)$ и получим

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= -\frac{1}{2} (f'_0(\alpha') + \sum_{i \in J_3} y_i f'_i(\alpha)), \\ B^{-1} \left(f'_i(\alpha) + \sum_{i \in J_3} y_i f'_i(\alpha) \right) &+ \sum_{i \in J_3} y_i f_i(\alpha).\end{aligned}\quad (48)$$

Необходимо теперь решить простейшую двойственную задачу выпуклого квадратичного программирования

$$\varphi(y) = \max_y, \quad y_i \geq 0, \quad i \in J^{\delta}(\alpha). \quad (49)$$

Компоненты $y_i (i \in J_2)$ вектора y не ограничены.

Квадратичную функцию $\varphi(y)$ запишем в стандартном виде

$$\varphi(y) = -\frac{1}{2} (f'_0(\alpha), B^{-1} f_0(\alpha)) - \frac{1}{2} y^T D y + y^T d,$$

$$D = ((f'_i(\alpha), B^{-1} f'_j(\alpha)))_{i,j=1}^{J_3, J_2},$$

$$d = (- (f'_0(\alpha), B^{-1} f'_i(\alpha)) + f_i(\alpha))_{i=1}^{J_3}.$$

Градиент от $\varphi(y)$ по y равен величине

$$\nabla \varphi \equiv \varphi'(y) = -Dy + d. \quad (50)$$

Матрица D неотрицательно определена, ибо положительно определены B и B^{-1} , а D имеет структуру матрицы Грамма.

Решение задачи (49) находим за конечное число шагов следующим методом. Вычисляем точку абсолютного максимума функции $\varphi(y)$ без учета ограничений

$$y^* = -D^+ d, \quad (51)$$

где $-$ — оператор псевдообращения матрицы. На базе этих координат построим допустимую точку для задачи (49)

$$y^0_i = \max\{y^*_i, 0\}, \quad i \in J^{\delta}; \quad y^0_i = y^*_i, \quad i \in J_2$$

и вычислим составляющие градиента $\varphi'_i(y^0), \quad i \in J_3$. Обозначим через $J = \{i : y^0_i = 0, \quad i \in J^{\delta}\}$.

Решение задачи (49) отыскивается последовательными шагами, а каждый шаг состоит из двух этапов.

1) Проверяем условие. Если $\varphi'_i(y^0) \leq 0, \quad i \in J$ и $\varphi'_i(y^0) = 0, \quad i \in J_3/J$, то y^0 является оптимальным реше-

нием задачи (49). Если это условие не выполняется, то переходим ко второму этапу.

2) Находим множество $J_4 = \{i : \varphi'_i(y^0) < 0, i \in J\}$. Компоненты $y_i^0 = 0, i \in J_4$ являются оптимальными компонентами вектора y . Подставляем их в функцию $\varphi(y)$ и получаем квадратичную функцию $\varphi_1(z)$ меньшего числа переменных

$$\varphi_1(z) = d_0 - \frac{1}{2}(z, D_1, z) + (d_1, z).$$

Здесь D_1 — неотрицательно определенная матрица (матрица Грамма), получаемая из матрицы D исключением строк и столбцов с номерами $i \in I_4$. Вектор d_1 также получен из вектора d исключением элементов с номерами $i \in J_4$.

По той же схеме исследуем на экстремум функцию $\varphi_1(z)$. Заметим, что вектор z состоит из компонент $y_i, i \in I^0 \setminus I_4$ и $y_i, i \in J_2$. Оптимальное решение задачи (49) находится по описанной выше схеме за конечное число шагов, не превышающее мощности множества J_1 .

Дадим пояснение вышеописанному алгоритму. Вычислим значение функции φ на варьируемой траектории

$$\begin{aligned} \varphi(y^* + \varepsilon(y - y^*)) = & -\frac{1}{2}\varepsilon^2(y - y^*)^T D(y - y^*) + \\ & + \varphi(y^*), \quad \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

и производную по ε

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon} = -\varepsilon(y - y^*)^T D(y - y^*).$$

В силу неотрицательной определенности матрицы D $d\varphi/d\varepsilon \leq 0$ при $y \neq y^*$ и любых $\varepsilon > 0$. Возьмем для конкретности $\varepsilon = 1$. Тогда $\varphi(y^* + \varepsilon(y - y^*)) = \varphi(y)$. Положим $y = y^*$. Из условия выбора координат y_i^0 следует, что $y_i^0 = y_i^*, i \in J_2 \cup (J^0 \setminus J)$; $y_i^0 = 0, i \in J$. Среди последней группы координат может оказаться, что $y_i^0 = y_i^* = 0$. Но это равенство имеет место не для всех $i \in J$, ибо в противном случае $y^0 = y^*$ и оптимальная точка y^* находится внутри допустимой области.

$$\begin{aligned} \text{С учетом значений координат вектора } y^0 \text{ получаем} \\ \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=1} = \frac{d\varphi}{dy} \Big|_{y^0} (y^0 - y^*) = \sum_{i \in J} \varphi'_i(y^0) (y_i^0 - y_i^*) = \\ = \sum_{i \in J} \varphi'_i(y^0) (-y_i^*) \leq 0. \end{aligned}$$

Неположительность этой производной была показана выше. Так как $y_i^0 - y_i^* \equiv -y_i^* > 0$ для некоторых $i \in J$, то для выполнения неравенства $d\varphi/d\varepsilon < 0$ необходимо, чтобы соответствующие $\varphi'_i(y^0)$ при $i \in J$ были неположительны, т. е. множество J_4 не пустое. Неположительность $\varphi_i(y^0)$ ($i \in J$) влечет за собой оптимальность соответствующих по номеру i координат $y_i^0 = 0$, ибо увеличение этих координат приводит к уменьшению целевой функции $\varphi(y)$.

Пример 4. Решим следующую задачу [см. (49)]

$$\begin{aligned} \varphi(y) = -(y_1 + 1)^2 - (y_2 + 1)^2 - y_3^2 + y_1 y_2 = \max, \\ y_1 \geq 0, \end{aligned}$$

то есть $J^c = (1)$, $J_2 = (2, 3)$, $J_3 = (1, 2, 3)$.

Вычислим y^* из условия $\varphi'(y) = 0$: $y_1^* = y_2^* = -2$, $y_3^* = 0$. Тогда $y_1^0 = 0$, $y_2^0 = y_2^* = -2$, $y_3^0 = y_3^* = 0$ и $\varphi'_1(y^0) = -4 < 0$, $\varphi'_2(y^0) = 2 > 0$, $\varphi'_3(y^0) = 0$, $J = (1)$.

Условие оптимальности в точке y^0 не выполняется, ибо $\varphi'_2(y^0) > 0$.

Вычислим множество $J_4 = (1) = \{i : \varphi'_i(y^0) \leq 0, i = J\}$. Тогда $y_1^0 = 0$ является оптимальной координатой исходной задачи. Подставим $y_1^0 = 0$ в $\varphi(y)$ и получим экстремальную задачу без ограничений

$$\varphi(0, y_2, y_3) = -1 - (y_2 + 1)^2 - y_3^2 = \max_{y_2, y_3}$$

Решение ее $y_2^* = -1$, $y_3^* = 0$. В итоге получено решение исходной задачи $y_1 = 0$, $y_2 = -1$, $y_3 = 0$. В этой точке выполняется условие максимума функции $\varphi(y)$: $\varphi'_1(y) = -3 < 0$, $\varphi'_2(y) = \varphi'_3(y) = 0$.

Докажем сходимость последовательности a^0, a^1, \dots , получаемой по алгоритму (44)–(46), к решению a^* исходной задачи (41).

$p(\alpha)$ есть решение задачи (46), если существуют двойственные переменные ($y_i(\alpha) \geq 0$, $i \in J^\delta$; $-\infty < y_i < \infty$, $y_i \neq 0$, $i \in J_2$), что

$$f'_0(\alpha) + Bp + \sum_{i \in J_3} y_i f'_i(\alpha) = 0, \quad (52)$$

$$y_i(\alpha)((f'_i(\alpha), p) + f_i(\alpha)) = 0, \quad i \in J_3.$$

Причем при $i \in J_2$ ($f'_i(\alpha), p(\alpha)) + f_i(\alpha) = 0$ в силу произвольности переменных $y_i(\alpha)$, $i \in J_2$. Из (52) получаем, что

$$(f'_0(\alpha), p(\alpha)) = - (p, Bp) + \sum_{i \in J_3} y_i f_i(\alpha). \quad (53)$$

В оптимальной точке $p(\alpha^*) = 0$. Убедимся в этом. Если α^* является решением задачи (41), то существуют $y_i^* \geq 0$, $i \in J_1$, $y_i^* \neq 0$, $i \in J_2$ такие, что

$$f'_0(\alpha^*) + \sum_{i \in J_1 \cup J_2} y_i^* f'_i(\alpha^*) = 0; \quad (54)$$

$$y_i^* f_i(\alpha^*) = 0, \quad i \in J_1; \quad f_i(\alpha^*) = 0, \quad i \in J_2.$$

Из (54) следует, что если $f_i < -\delta < 0$, $i \in J_1$ (см. определение множества индексов J^δ), то $y_i^* = 0$. Эти компоненты из (54) исключим и получим уравнение

$$f'_0(\alpha) + \sum_{i \in J_3} y_i^* f'_i(\alpha^*) = 0; \quad (55)$$

$$y_i^* f_i(\alpha^*) = 0, \quad i \in J^\delta; \quad f_i(\alpha) = 0, \quad i \in J_2,$$

совпадающее с (52) при $p = p^* = 0$. Здесь можно применять эквивалентную запись $y_i^* f_i(\alpha^*) = 0$, $y_i^* \neq 0$ и $f_i(\alpha^*) = 0$ при $i \in J_2$.

Предельное значение α^* последовательности a^0, a^1, a^2, \dots является искомым.

Поясним теперь появление условия (45) для выбора скаляра в алгоритм (44). Рассмотрим функции f_i , $i \in I^\delta(a^l)$ и запишем ряд

$$\begin{aligned} f_i(\alpha^l + \gamma^l p^l) &= f_i(\alpha^l) + \gamma^l (f'_i(\alpha^l), p^l) + \\ &+ \gamma^l (f'_i(\theta) - f'_i(\alpha^l), p^l), \quad \theta \in [\alpha^l, \alpha^l + \gamma^l p^l]. \end{aligned} \quad (56)$$

Считаем, что $\bar{f}_i(z) (i = 0, i \in J_1 \cup J_2)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|f_i'(\theta) - f_i'(z)\| \leq L\|\theta - z\|.$$

В (56) в качестве θ можно взять величину $\theta = a^l + \xi \gamma^l p^l$, $0 < \xi < 1$ и тогда (56) приобретает вид [см. также (46)]

$$f_i(x^l + \gamma^l p^l) \leq (1 - \gamma^l) f_i(x^l) + (\gamma^l)^2 \xi \|p^l\|_B^2 L, \quad i \in J^{\tilde{\alpha}}(x^l). \quad (57)$$

При $i \in J_1 \setminus J^{\tilde{\alpha}}$ с учетом, что $\|f_i(z)\| \leq K$ имеем

$$f_i(x^l + \gamma^l p^l) = f_i'(x^l) + \gamma^l (f_i'(\theta), p^l) \leq F(x^l) - \delta + \gamma^l K \|p^l\|. \quad (58)$$

Выберем γ^l

$$0 \leq \gamma^l \leq \delta / (F(a^l) + K \|p^l\|) \quad (59)$$

из условия выполнения неравенства

$$F(a^l) - \delta + \gamma^l K \|p^l\| \leq (1 - \gamma^l) F(a^l). \quad (60)$$

Объединяя (57) и (58) с учетом (59), (60), (43), получаем

$$\begin{aligned} f_i(x^l) + \gamma^l p^l &\leq (1 - \gamma^l) F(x^l) + \\ &+ (\gamma^l)^2 \xi \frac{L}{m} \|p^l\|_B^2; \quad \|p^l\|_B^2 \equiv (Bp, p), \end{aligned} \quad (61)$$

$$i \in J_1.$$

Отсюда следует неравенство для F :

$$\begin{aligned} F(x^l + \gamma^l p^l) &\leq (1 - \gamma^l) F(x^l) + \\ &+ (\gamma^l)^2 \xi \frac{L}{m} \|p^l\|_B^2. \end{aligned} \quad (62)$$

Рассмотрим $f_0(a)$ (по аналогии с $f_i(a)$) с учетом (56) и (53)

$$\begin{aligned} f_0(x^l + \gamma^l p^l) &= f_0(x^l) + \gamma^l (f'_0(x^l), p^l) + \\ &+ \gamma^l (f'_0(\theta) - f'_0(x^l), p^l) \leq f_0(x^l) - \gamma^l \|p^l\|_B + \\ &+ \gamma^l \sum_{i \in J_2} y_i(x^l) f_i(x^l) + (\gamma^l)^2 \xi \frac{L}{m} \|p^l\|_B. \end{aligned} \quad (63)$$

Умножаем (62) на $N \equiv \sum_{l \in J_3} y_l(\alpha^l)$, добавляем к (63) и получаем (45)

$$f_0(\alpha^l + \gamma^l p^l) + NF(\alpha^l + \gamma^l p^l) \leq f_0(\alpha^l) + \\ + NF(\alpha^l) - \gamma^l \varepsilon (p^l, B^l p^l), \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Здесь через ε обозначена величина

$$\varepsilon = 1 - \gamma^l (N + 1) \frac{L \xi}{m}.$$

Она находится в интервале $[0, 1]$, если

$$0 \leq \gamma^l \leq \frac{(1 - \varepsilon) m}{L(N + 1)\xi}.$$

Итак

$$0 \leq \gamma^l \leq \bar{\gamma}^l, \quad \bar{\gamma}^l = \min \left\{ 1, \frac{\delta}{F(\alpha^l) + K(p^l, p^l)}, \frac{(1 - \varepsilon) m}{L(N + 1)\xi} \right\}.$$

Если $\bar{\gamma}^l \neq 0$, то за конечное число шагов находится γ^l , удовлетворяющее неравенству (45).

При $l \rightarrow \infty$ ограничения исходной задачи удовлетворяются точно. Покажем, что $F(\alpha^l) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Действительно, из (46) вытекает, что

$$f_i(\alpha^l) \leq -(f'_i(\alpha^l), p^l) \leq K \|p^l\|, \quad i \in J^{\circledast}(\alpha^l).$$

Отсюда и в силу определения $F(\alpha^l)$ следует, что

$$0 \leq F(\alpha^l) \leq K \|p^l\|, \quad i \in J^{\circledast}(\alpha^l).$$

Так как $p^l \rightarrow p(\alpha^*) = 0$, то $F(\alpha^l) \rightarrow 0$ и [см. (46)] $(f'_i(\alpha^l), p^l) + f_i(\alpha^l) \rightarrow f_i(\alpha^*), \quad i \in J_2$, а также $f_i(\alpha^*) \leq 0, \quad i \in J_1$.

Алгоритм метода последовательной линеаризации обеспечивает локальный спуск в ближайший к α^0 минимум функции $f_0(a)$ при наличии ограничений (41).

Условие (45) выбора постоянного положительного скалярного параметра γ^l в алгоритме (44) можно упростить и заменить неравенствами

$$f_0(\alpha^{l+1}) + NF(\alpha^{l+1}) \leq f_0(\alpha^l) + NF(\alpha^l), \quad \text{либо} \quad f_0(\alpha^{l+1}) \leq \\ \leq f_0(\alpha^l). \quad (64)$$

Сходимость при этом не нарушается, но, естественно, меняется скорость сходимости. Причем скорость сходи-

мости, видимо как и при отсутствии ограничений, уменьшается.

Заметим, что в алгоритме (44) при расчете p^l производится вычисление двойственных переменных y и величины $N = \sum_{i \in J_3} y_i$, которая затем используется в (45) при расчете скалярного параметра γ^l .

Возможно дальнейшее развитие МПЛ применительно к решению экстремальных задач с негладкими функциями. При этом необходимо использовать понятие субдифференциала и квазидифференциала [5] вместо обычного понятия градиента для гладких функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубан А. И. Идентификация нелинейных динамических объектов на основе алгоритма чувствительности.— Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1975.— 270 с.
 2. Рубан А. И. Идентификация и чувствительность сложных систем.— Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1982.— 302 с.
 3. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах.— М.: Наука, 1975.— 319 с.
 4. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения.— Киев: Наукова думка, 1979.— 199 с.
 5. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. О некоторых подходах к задаче негладкой оптимизации.— Экономика и математические методы, 1981, т. XVII, вып. 6, с. 1153—1174.
-

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. Что такое адаптивные системы управления с идентификатором?	3
Глава 1. Управление динамическими сосредоточенными детерминированными объектами	9
§ 1.1. Общий метод синтеза управлений в дискретных системах	12
§ 1.2. Линейные и нелинейные обыкновенные дискретные системы	15
§ 1.3. Синтез управлений в дискретных системах с запаздываниями	33
§ 1.4. Распространение метода на непрерывные системы	39
Глава 2. Управление динамическими сосредоточенными стохастическими объектами	47
§ 2.1. Обыкновенные линейные и нелинейные системы	47
§ 2.2. Системы с запаздываниями	56
§ 2.3. Непрерывные системы	65
§ 2.4. Стабилизация двухколесного экипажа	66
§ 2.5. Поддержание температурных режимов жидких сред	76
Глава 3. Синтез алгоритмов при специальных видах задания траекторий движения	87
§ 3.1. Непрерывные системы	91
§ 3.2. Дискретные системы	103
Заключение	116
Литература	117
Приложение. Метод последовательной линеаризации	118
Литература приложения	134

Анатолий Иванович РУБАН

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ

Редактор Л. И. Дюканова

Технический редактор Р. М. Подгорбунская

Корректор И. И. Глазкова

ИБ 1212. Сдано в набор 10.04.82 г. Подписано к печати 24.03.83 г.
КЗ06078. Формат 84×108¹/₃₂, бумага типографская № 3. Гарни-
тура литературная. Высокая печать. П. л. 4,25; уч.-изд. л. 6,3;
 усл. п. л. 7,14. Заказ 4727. Тираж 500. Цена 90 к.

Издательство ТГУ, 634010, г. Томск, пр. Ленина, 36.
Типография издательства «Красное знамя»,
 634029, г. Томск, ул. Советская, 47

90 коп.