

В. Н. ФОМИН, А. Л. ФРАДКОВ, В. А. ЯКУБОВИЧ

# АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1981

32.81

Ф 76

УДК 62-50

Адаптивное управление динамическими объектами. Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.— 448 с.

Книга посвящена одному из новых разделов кибернетики — теории адаптивных систем. Изучаются методы анализа и синтеза адаптивных регуляторов, обеспечивающих достижение цели управления в условиях малой информации об объекте управления и о свойствах внешних воздействий. Основное внимание уделяется подходам, возникшим в последние годы и изложенным лишь в журнальной литературе. Подробно рассмотрены метод рекуррентных целевых неравенств, метод стохастического рекуррентного оценивания и метод скоростного градиента.

Книга предназначена для инженеров, научных работников в области технической кибернетики и математики, преподавателей и студентов старших курсов вузов, интересующихся теорией адаптивных систем и ее применениями.

Илл. 8, библ. 174 назв.

Ф 30501—078  
053 (02)-81 КБ-2-47—81. 1502000000



Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1981

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	8
<b>Г л а в а 1. Постановка задач адаптивного управления . . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1.1. Понятие об адаптивном управлении . . . . .	11
1.1.1°. Содержательное (нестрогое) определение адаптивной системы и адаптивного регулятора (11). 1.1.2°. Задача о «роботе-велосипедисте» (14). 1.1.3°. Задача управления полетом (22). 1.1.4°. О других задачах адаптивного управления (26).	
§ 1.2. Формальное определение адаптивной системы и адаптивного регулятора . . . . .	28
1.2.1°. Формальное определение в простейшем случае для дискретного времени (28). 1.2.2°. Адаптивные системы общего вида (36).	
§ 1.3. Схема решения задач адаптивного управления . . . . .	41
1.3.1°. Общее описание процедуры синтеза адаптивного регулятора (41). 1.3.2°. Сведение задачи синтеза адаптивного регулятора к построению конечно-сходящихся алгоритмов решения рекуррентных целевых неравенств (46).	
<b>Г л а в а 2. Алгоритмы адаптации . . . . .</b>	<b>49</b>
§ 2.1. Конечно-сходящиеся алгоритмы решения рекуррентных неравенств . . . . .	50
2.1.1°. Основные определения. Принцип построения конечно-сходящихся алгоритмов (50). 2.1.2°. Суперпозиция конечно-сходящихся алгоритмов (53). 2.1.3°. Алгоритм «Полоска-1» (56). 2.1.4°. Алгоритм «Полоска-2» (59). 2.1.5°. Некоторые конечно-решающие алгоритмы (62). 2.1.6°. Конечно-сходящиеся алгоритмы решения рекуррентных линейных неравенств (63). 2.1.7°. Общий случай рекуррентных неравенств, выделяющих выпуклые множества (64). 2.1.8°. Векторные варианты алгоритмов «Полоска» (67).	
§ 2.2. Алгоритмы стохастической аппроксимации . . . . .	70
2.2.1°. Основная рекуррентная процедура метода стохастической аппроксимации (70). 2.2.2°. Применение метода стохастической аппроксимации к задаче обучения с «учителем» (71). 2.2.3°. Использование стохастической рекуррентной процедуры в качестве алгоритма идентификации (73). 2.2.4°. Адаптивный оптимальный прогноз, основанный на процедуре стохастической аппроксимации (75).	
§ 2.3. Рекуррентные модификации метода наименьших квадратов . . . . .	79
2.3.1°. Основная рекуррентная процедура метода наименьших квадратов (79). 2.3.2°. Свойства рекуррентной процедуры метода наименьших квадратов (80). 2.3.3°. Информационная матрица (81).	
§ 2.4. Алгоритмы скоростного градиента . . . . .	82
2.4.1°. Условия достижения цели управления (83). 2.4.2°. Сходимость подстраиваемых параметров к «идеальным» зна-	

чениям (88). 2 4.3°. Огрубление алгоритмов скоростного гра-	
диснта (91).	
<b>§ 2.П. Приложение . . . . .</b>	<b>98</b>
2 П.1°. Последовательности случайных величин, близкие к сум-	
пермартингалам (98). 2 П.2°. Закон больших чисел для не-	
зависимых случайных величин (99)	
<b>§ 2.Д. Доказательства лемм и теорем . . . . .</b>	<b>100</b>
2.Д.1°. Доказательство теоремы 2 1.1 (100). 2 Д.2°. Доказа-	
тельство теоремы 2 1.2 (101). 2 Д.3°. Доказательство теоремы	
2 1.1а (102). 2.Д.4°. Доказательство теорем 2 1.3 и 2 1.4	
(102). 2 Д.5°. Доказательство теорем 2 1.5, 2 1.6, 2 1.6а (103)	
2.Д.6°. Доказательство теоремы 2 1.7 (104). 2 Д.7°. Доказа-	
тельство теоремы 2 1.8 (105). 2.Д.8°. Доказательство теорем	
2 1.9 и 2 2.1 (106). 2.Д.9°. Доказательство теоремы 2 2.2	
(106). 2.Д.10°. Доказательство теоремы 2.2.3 (108). 2 Д.11°.	
Доказательство лемм 2 3.1 и 2 3.2 (113). 2 Д.12°. Доказатель-	
ство теорем 2 3.1 (114). 2.Д.13°. Доказательство теоремы	
2 4.1 (114). 2.Д.14°. Доказательство теоремы 2.4.2 (115).	
2 Д.15°. Доказательство теоремы 2.4.3 (117). 2.Д.16°. Доказа-	
тельство теоремы 2 4.4 (118). 2.Д.17°. Доказательство теоре-	
мы 2 4.5 (119). 2 Д.18°. Доказательство теоремы 2.4.6 (120).	
<b>Г л а в а 3. Синтез оптимальных (неадаптивных) регу-</b>	
<b>ляторов . . . . .</b>	<b>121</b>
<b>§ 3.1. Вспомогательные сведения из теории линейных систем</b>	
<b>управления . . . . .</b>	<b>122</b>
3.1.1°. Уравнения дискретных объектов управления в перемен-	
ных «вход — выход» и в стандартной форме (122). 3 1.2°.	
Устойчивые, неустойчивые, минимально-фазовые объекты	
(126). 3 1.3°. Управляемость и наблюдаемость (127). 3.1.4°.	
Линейные непрерывные объекты управления (128). 3 1.5°.	
Синтез стабилизирующих регуляторов (130). 3.1.6°. Пере-	
даточные функции системы управления (134). 3.1.7°.	
Свойства возмущающих воздействий (помех) (137). 3.1.8°.	
Диссипативность замкнутых систем (138). 3.1.9°. Частотные	
теоремы (140).	
<b>§ 3.2. Оптимальное управление в случае ограниченной по-</b>	
<b>мехи . . . . .</b>	<b>144</b>
3.2.1°. Постановка задачи (144). 3.2.2°. Синтез оптимального	
регулятора в простейшем случае (145). 3.2.3°. Синтез опти-	
мального регулятора в общем случае (147). 3.2.4°. Следствие:	
скалярный объект (148). 3.2.5°. Замечания (148). 3.2.6°.	
Синтез оптимального регулятора при помехе с произвольной	
дробно-рациональной спектральной характеристикой (149).	
3.2.7°. Случай объекта, не являющегося минимально-фазо-	
вым (151).	
<b>§ 3.3. Предельно-оптимальное управление в случае стацио-</b>	
<b>нарной помехи . . . . .</b>	<b>153</b>
3 3.1°. Постановка задачи (154). 3 3.2°. Линейность оптималь-	
ной обратной связи (156). 3 3.3°. Общая схема синтеза линей-	
ной оптимальной обратной связи (157). 3 3.4°. Функционал	
качества и передаточные функции системы управления (158).	
3.3.5°. Минимизация квадратичного функционала в классе	
устойчивых дробно-рациональных функций (160). 3 3.6°.	
Процедура синтеза предельно-оптимального управления (162)	
3 3.7°. Синтез оптимального регулятора для функционала каче-	
ства типа предельной дисперсии (164). 3 3.8°. Замечания (166).	
<b>§ 3.П. Приложение . . . . .</b>	<b>167</b>
3 П.1°. Спектральный метод синтеза оптимальных регуляторов	
для многосвязных дискретных объектов управления (167).	
3 П.2°. Синтез оптимальных регуляторов в случае непрерыв-	

ногого времени (176). 3 П 3°. Факторизация дробно-рациональных функций (180). 3.П.4°. Эквивалентные преобразования дробно-рациональных матричных функций (183).	
<b>§ 3.Д. Доказательства лемм и теорем . . . . .</b>	<b>184</b>
3 Д 1°. Доказательство леммы 3 1 1 (184). 3.Д.2°. Доказательство теоремы 3.1.1 (185). 3 Д 3°. Доказательство теоремы 3.2 1 и замечания 3 п. 3 2.5° (185). 3 Д.4°. Доказательство теоремы 3.2.2 (188). 3.Д 5°. Доказательство замечания к теореме 3.2 2 (190). 3 Д 6°. Доказательство теоремы 3 3 1 (191) 3 Д 7°. Доказательство леммы 3 3 1 (194) 3 Д 8°. Доказательство теоремы 3 3.2 (195). 3.Д.9°. Доказательство теоремы 3 3 3 (195). 3.Д.10°. Доказательство теоремы 3 3.4 (197) 3 Д 11°. Доказательство теоремы 3.П.1 (198). 3.Д.12°. Доказательство теоремы 3 П 2 (201). 3.Д.13°. Доказательство теоремы 3 П 3 (202) 3.Д 14°. Доказательство теоремы 3.П 4 (203).	
<b>Г л а в а 4. Адаптивное управление дискретными объектами (метод рекуррентных целевых неравенств) . . . . .</b>	<b>205</b>
<b>§ 4.1. Адаптивное субоптимальное управление линейными динамическими объектами . . . . .</b>	<b>208</b>
4.1.1°. Субоптимальные регуляторы (208). 4 1 2°. Скалярный объект в простейшем случае (210). 4 1 3°. Адаптивное субоптимальное управление в простейшем случае при дополнительном задании ограничения на управление (218). 4 1.4°. Скалярный объект при наличии запаздываний в управлении или в измерении (222).	
<b>§ 4.2. Задачи адаптивного управления дискретным объектом с другими способами составления рекуррентных целевых неравенств . . . . .</b>	<b>235</b>
4.2.1°. Скалярный объект в простейшем случае (235) 4.2 2°. Субоптимальное управление векторным объектом без запаздываний в управлении и в измерении; матрица $b_1$ неизвестна (242). 4.2.3°. Объект первого порядка (244). 4.2 4°. Объект, неустойчивый по управлению (245) 4 2.5°. Синтез адаптивного регулятора с эталонной моделью (247). 4.2.6°. О нелинейных задачах (254). 4.2.7°. Замечание о возможности использования результатов этого и предыдущего параграфов в задачах синтеза адаптивного управления непрерывным объектом (255).	
<b>§ 4.3. Моделирование на ЭВМ процесса самообучения «робота-велосипедиста» езде на велосипеде . . . . .</b>	<b>257</b>
<b>§ 4.П. Приложение . . . . .</b>	<b>268</b>
4.П.1°. Диссипативность дискретных систем (268). 4.П.2°. Доказательство теоремы 4.П.1 (271). 4.П.3°. Теорема о диссипативности для уравнения произвольного порядка (274). 4.П.4°. Доказательство теоремы 4.П.2 (276). 4.П.5°. Теорема о диссипативности объекта, устойчивого по управлению (277).	
<b>§ 4.Д. Доказательства теорем 4.1.1 — 4.1.3 . . . . .</b>	<b>279</b>
4.Д.1°. Доказательство теоремы 4.1.1 (279). 4.Д.2°. Доказательство теоремы 4.1.2 (280). 4 Д 3°. Доказательство теоремы 4.1.3 (282).	
<b>Г л а в а 5. Адаптивное управление дискретными стохастическими объектами . . . . .</b>	<b>285</b>
<b>§ 5.1. Оптимальное адаптивное управление в случае минимально-фазового объекта управления . . . . .</b>	<b>286</b>
5.1.1°. Постановка задачи (286). 5.1.2°. Решение задачи оптимального управления в неадаптивном варианте (289). 5.1.3°.	

Выбор регулятора при неизвестных параметрах объекта управления (290). 5.1.4°. Алгоритм адаптации (292). 5.1.5°. Основное утверждение (292).	
<b>§ 5.2. Синтез адаптивного регулятора в задаче о дисципинативности . . . . .</b>	<b>293</b>
5.2.1°. Постановка задачи (294). 5.2.2°. Синтез регулятора при известном векторе существенных параметров (295). 5.2.3°. Описание класса адаптации (297). 5.2.4°. Алгоритм адаптации (298). 5.2.5°. Состоятельность оценок (300). 5.2.6°. Процедура «встраивания» (301). 5.2.7°. Основное утверждение (302).	
<b>§ 5.3. Синтез адаптивного регулятора в задаче об оптимизации стохастического объекта . . . . .</b>	<b>304</b>
5.3.1°. Постановка задачи (304). 5.3.2°. Синтез субоптимальной управляющей системы (306). 5.3.3°. Идея построения управляющей системы (308). 5.3.4°. Синтез управляющей системы (309). 5.3.5°. Оптимальные свойства адаптивной управляющей системы (311). 5.3.6°. Синтез стабилизирующего регулятора (313).	
<b>§ 5.П. Приложение . . . . .</b>	<b>314</b>
5.П.1°. Синтез адаптивных управляющих систем при коррелированных помехах (315). 5.П.2°. Адаптивное управление многосвязными объектами (318).	
<b>§ 5.Д. Доказательства лемм и теорем . . . . .</b>	<b>319</b>
5.Д.1°. Доказательство леммы 5.1.1 (319). 5.Д.2°. Доказательство теоремы 5.1.1 (320). 5.Д.3°. Доказательство леммы 5.2.1 (323). 5.Д.4°. Доказательство леммы 5.2.2 (324). 5.Д.5°. Доказательство теоремы 5.2.1 (324). 5.Д.6°. Доказательство леммы 5.3.1 (329). 5.Д.7°. Доказательство теоремы 5.3.1 (332).	
<b>Г л а в а 6. Адаптивное управление непрерывными объектами (функции Ляпунова и рекуррентные целевые неравенства) . . . . .</b>	<b>333</b>
<b>§ 6.1. Метод функций Ляпунова в теории адаптивных систем . . . . .</b>	<b>336</b>
6.1.1°. Синтез стабилизирующих регуляторов и функции Ляпунова (337). 6.1.2°. Алгоритм прямой подстройки коэффициентов регулятора (340). 6.1.3°. Алгоритм идентификационной подстройки параметров регулятора (342). 6.1.4°. Метод функций Ляпунова и рекуррентные целевые неравенства (344). 6.1.5°. Непрерывные алгоритмы адаптации «с памятью» (347).	
<b>§ 6.2. Синтез адаптивного регулятора на основе метода эталонного уравнения . . . . .</b>	<b>353</b>
6.2.1°. Постановка задачи и условия ее разрешимости (353). 6.2.2°. Адаптивный вариант задачи управления (354).	
<b>§ 6.3. Синтез управляющей системы с помощью вырожденной функции Ляпунова . . . . .</b>	<b>357</b>
6.3.1°. Постановка задачи (357). 6.3.2°. Синтез обратных связей и разрешимость задачи управления (358). 6.3.3°. Синтез адаптивного регулятора (360).	
<b>§ 6.4. Адаптивное управление линейным объектом в случае, когда производные выхода недоступны измерению . . . . .</b>	<b>362</b>
6.4.1°. Постановка задачи (362). 6.4.2°. Синтез регулятора при известных коэффициентах объекта (363). 6.4.3°. Синтез адаптивной управляющей системы (364). 6.4.4°. Алгоритм адаптации (365).	
<b>§ 6.Д. Доказательства лемм и теорем . . . . .</b>	<b>368</b>
6.Д.1°. Доказательство теоремы 6.2.1 (368). 6.Д.2°. Доказательство теоремы 6.3.1 (371). 6.Д.3°. Доказательство леммы 6.4.1 (372). 6.Д.4°. Доказательство теоремы 6.4.1 (372).	

<i>Г л а в а 7. Адаптивное управление непрерывными объектами (функции Ляпунова и частотная теорема) . . . . .</i>	376
<i>§ 7.1. Адаптивное управление при полном измерении состояния объекта . . . . .</i>	377
7.1.1°. Постановка задачи синтеза адаптивной системы с эталонной моделью (377). 7.1.2°. Решение задачи для простейшего случая (378). 7.1.3°. Фильтрация невязки в алгоритме адаптации (381).	
<i>§ 7.2. Адаптивное управление при неполном измерении состояния объекта . . . . .</i>	384
7.2.1°. Адаптивная стабилизация линейного ОУ (385). 7.2.2°. Адаптивные системы слежения (391). 7.2.3°. Адаптивная стабилизация нелинейного ОУ (396). 7.2.4°. Адаптивная стабилизация многомерного ОУ (398).	
<i>§ 7.3. Грубость адаптивных систем с эталонной моделью . . . . .</i>	401
7.3.1°. Грубость по отношению к ограничительным возмущениям (401). 7.3.2°. Грубость по отношению к динамическим возмущениям (405). 7.3.3°. Грубость по отношению к дискретизации алгоритма адаптации. Метод непрерывных моделей (408).	
<i>§ 7.Д. Доказательства лемм и теорем . . . . .</i>	410
7.Д.1°. Доказательство леммы 7.1.1 (410). 7.Д.2°. Доказательство теоремы 7.1.1 (411). 7.Д.3°. Доказательство леммы 7.1.2 (411). 7.Д.4°. Доказательство теоремы 7.1.2 (412). 7.Д.5°. Доказательство теорем 7.2.1, 7.2.2 (413). 7.Д.6°. Доказательство теоремы 7.2.5 (413). 7.Д.7°. Доказательство теорем 7.2.7, 7.2.8 (414). 7.Д.8°. Доказательство теоремы 7.3.1 (416). 7.Д.9°. Доказательство теоремы 7.3.2 (419).	
<i>Примечания и литературные указания . . . . .</i>	420
<i>Литература . . . . .</i>	429
<i>Список основных обозначений и сокращений . . . . .</i>	443
<i>Предметный указатель . . . . .</i>	444

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

В монографии излагаются методы управления динамическим объектом в условиях, когда неизвестен ряд существенных параметров и факторов, определяющих его поведение. Нужный закон управления отыскивается адаптивным регулятором в процессе функционирования по реакциям объекта на поданные управляющие воздействия. Коль скоро такой регулятор построен, вся система приобретает свойство приспособляемости, адаптивности: если при изменении внешних условий найденный ранее закон управления перестает быть удовлетворительным (это становится известным по поведению объекта), то адаптивный регулятор находит новый закон управления, при котором поведение системы вновь начинает удовлетворять требуемым критериям. (Слова «закон управления» и др. подлежат, конечно, четкому определению.)

Развитие теории адаптивных систем стимулируется потребностями современной техники. Практика в изобилии доставляет задачи управления объектами различных типов при наличии той или иной степени незнания объекта управления, условий его функционирования, возмущающих воздействий. Методы адаптивного управления находят все большее применение при решении ряда проблем авиационной и космической техники, при управлении технологическими процессами, в автоматизированных системах управления в различных отраслях. Широкому внедрению в практику адаптивных методов способствует повсеместное применение средств вычислительной техники, создающее большие возможности для реализации алгоритмов адаптации.

Теория адаптивных систем находится в настоящее время в стадии своего формирования. Здесь много разных точек зрения, направлений и методов. Настоящая монография представляет в основном направление, развиваемое авторами этой книги. Основные оригинальные

результаты, изложенные ниже, оформлялись в процессе совместной работы авторов в рамках семинара на кафедре теоретической кибернетики математико-механического факультета Ленинградского университета и семинара по адаптивным системам при ЛОСНТО. Существующие монографии по теории адаптивных систем мало пересекаются с материалом этой книги \*). Авторы не делали попытки дать исторический обзор специальной литературы. Ряд важных и интересных исследований, стоящих в стороне от основной темы монографии, остался неупомянутым.

Для развития теории адаптивных систем оказался весьма плодотворным анализ разнообразных инженерных методов, разработанных в теории самонастраивающихся систем управления. При современном широком понимании термина «адаптивная система управления» самонастраивающаяся система относится к классу адаптивных. В книге предпринята попытка изложения теории адаптивного управления как последовательной математической теории, начинающейся с формального определения адаптивной системы. В книге не рассматриваются методы проектирования конкретных систем.

Стремясь одновременно к простоте изложения и к математической строгости и ориентируясь в первую очередь на читателя с инженерным образованием, авторы в основном тексте обращали главное внимание на идейную сторону дела, стараясь разъяснить «кухню» конструирования алгоритмов адаптивного управления. Доказательства написаны лаконично; они выделены в отдельные параграфы, и их чтение предполагает наличие некоторой математической подготовки. Необходимые вспомогательные сведения и более сложно формулируемые результаты вынесены в приложения к главам.

Авторы надеются, что книга может представить интерес и для читателя-математика. Задача адаптивного

---

\* ) К тематике этой книги примыкают монографии Д. П. Деревицкого и А. Л. Фрадкова «Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления» и В. Г. Сраговича «Адаптивное управление», выходящие в издательстве «Наука» в 1981 году. Первая из них имеет большую практическую направленность, во второй дается обзор современного состояния теории адаптации, в первую очередь — адаптивного управления марковскими процессами.

управления, как она трактуется в этой книге, является по существу новой математической задачей определения неизвестной функции (ею является неизвестный закон управления) в своеобразной и нестандартной ситуации. В отличие от обычной задачи экстраполяции, когда нужно построить функцию по ее значениям в заданных точках, здесь требуется восстановить функцию по некоторой весьма косвенной информации о «качестве» текущего ее приближения.

С помощью излагаемых в книге методов синтеза адаптивного управления (в частности, с помощью метода рекуррентных целевых неравенств) решен ряд конкретных прикладных задач. К сожалению, изложение этих задач и их решений оказалось невозможным в рамках этой книги, поскольку это потребовало бы значительного увеличения ее объема. Не удалось изложить также решения ряда важных задач адаптации — информацию о них и о некоторых решенных прикладных задачах читатель найдет в комментариях и в литературе в конце книги.

Нумерация формул обычная: например, в пределах главы 5 ссылка (3.12) означает 12-ю формулу из § 5.3.

При ссылках на формулу в других главах используется тройная нумерация: (1.3.14) означает формулу (3.14) из главы 1.

В конце книги помещен список основных сокращений обозначений.

Усилия авторов при изложении материала книги распределялись следующим образом: главы 1, 4 и §§ 2.1, 3.1, 3.2 написаны В. А. Якубовичем; главы 5, 6 и §§ 2.2, 2.3, 3.3, З.П написаны В. Н. Фоминым; гл. 7 и § 2.4 написаны А. Л. Фрадковым. Первые три главы книги писались при тесном взаимодействии авторов.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам книги — А. А. Первозванскому и О. Ю. Кульчицкому, сделавшим многочисленные замечания, учтенные в окончательной редакции рукописи, а также Я. З. Цыпкину, беседы с которым о вопросах адаптации были авторам очень полезны.

## *ГЛАВА 1*

### **ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

#### **§ 1.1. Понятие об адаптивном управлении**

**1.1.1°. Содержательное (нестрогое) определение адаптивной системы и адаптивного регулятора.** Теория адаптивных (в частности, самонастраивающихся) систем возникла из попыток решения прикладных задач, не поддающихся решению традиционными методами. Традиционная теория управления, например, математическая теория оптимального управления, требует знания математической модели объекта и входящих в эту модель параметров. Оптимальный закон управления обычно существенно зависит от этих параметров.

На практике часто трудно обеспечить достаточно точное математическое описание объекта управления и точное знание всех необходимых величин; более того, характеристики объекта в процессе функционирования могут значительно изменяться. Так, например, при разработке автоматических систем управления технологическими процессами в химической промышленности, в металлургии создание адекватной математической модели представляет обычно сложную самостоятельную задачу. Динамические характеристики летательных аппаратов сильно зависят от режима полета и состояния атмосферы. В этих случаях традиционные методы часто оказываются либо неприменимыми, либо дают плохие результаты.

В связи с этим уже на заре развития теории автоматического управления представлялся весьма заманчивым путь построения управляющих систем, не требующих полного априорного знания объекта управления и условий его функционирования. Управляющая система должна автоматически отыскивать нужный закон управления пос-

редством анализа поведения объекта при текущем управлении. К системам подобного типа относятся в первую очередь системы, называемые в технической литературе *самонастраивающимися*. Мы будем называть все управляющие системы с указанными свойствами, как это сейчас принято, *адаптивными*.

Формализованное определение адаптивной системы приведено ниже, в § 1.2. Но сним сейчас содержательный смысл этого определения.

Наше неполное знание объекта управления и условий его функционирования означает, что известна лишь их принадлежность некоторому классу. Обозначим через  $\Xi$  этот класс. Обычно (но не всегда) неопределенность условий функционирования выражается в нашем незнании действующих на объект помех, а сам объект управления, точнее его математическая модель, определяется с точностью до некоторых параметров. В этом случае класс  $\Xi$  — прямое произведение двух множеств: множества в пространстве параметров объекта и множества помех, которые могут действовать на объект.

Предполагается данной некоторая цель управления (ЦУ). Цели управления могут быть весьма разнообразными. Распространено, например, задание ЦУ с помощью функционала, подлежащего минимизации. Рассмотрим часто встречающийся на практике случай, когда ЦУ формулируется в виде неравенств, связывающих переменные системы в каждый момент времени. (Пример: некоторые характеристики продукта на выходе системы должны лежать в заданных границах.)

Задача состоит в построении регулятора, который, будучи присоединен к любому объекту, спустя конечное время обеспечит при любых условиях функционирования выполнение соответствующих неравенств, т. е. цели управления. Объект и условия функционирования должны принадлежать классу  $\Xi$ . Такой регулятор называется *адаптивным в классе  $\Xi$* . Сама система (зависящий от параметров объект и адаптивный регулятор) называется *адаптивной в этом классе*. Время достижения цели управления называется *временем адаптации*.

В период, пока время адаптации не исчерпано, целевые неравенства могут не выполняться. Этот «неприятный» факт — естественная плата за наше незнание объекта

и условий его функционирования. (В общем случае невозможно обеспечить выполнение цели управления для всех моментов времени.)

Из приведенного определения адаптивной системы следует, что она обладает способностью «приспосабливаться» к изменению параметров объекта и условий его функционирования, если только они остаются в классе  $\Xi$ . Действительно, если через интервалы времени, превышающие время адаптации, происходят указанные изменения, то каждый раз адаптивный регулятор будет находить нужный закон управления, при котором выполняется цель управления.

Адаптивные регуляторы обладают большой надежностью и устойчивостью в работе, способностью компенсировать разного рода нарушения. Если адаптивный регулятор построен на основании неточно составленной математической модели объекта, но реальный объект принадлежит классу адаптации регулятора, то адаптивный регулятор (присоединенный к реальному объекту) будет работоспособен.

Согласно сформулированному (пока нестрого) определению, понятие «адаптивная система» имеет смысл лишь при указании цели управления и класса адаптации. Чем шире класс адаптации, тем обычно труднее решить задачу адаптивного управления.

Отметим, что любой регулятор, обеспечивающий устойчивость замкнутой системы, адаптивен в некотором классе объектов для естественно формулируемой цели управления. Этот класс, однако, достаточно узок. Теория адаптивных систем и начинается с изучения случаев, когда не существует единого (стационарного) закона управления, обеспечивающего выполнение цели управления для всевозможных условий, при которых система должна работать.

Можно было бы привести разнообразные примеры задач адаптивного управления технологическими процессами и подвижными объектами. Аккуратная формулировка задач такого рода затруднительна из-за необходимости изложения многих технических деталей, несущественных с теоретической точки зрения. Ниже мы ограничимся лишь двумя примерами постановок задач адаптивного управления: одним умозрительным и одним более реальным

примером, который рассмотрим схематически. Другие примеры задач адаптации будут описаны совсем кратко.

**1.1.2°. Задача о «роботе-велосипедисте».** Поставим мысленно такой эксперимент. Пусть объектом управления является велосипед, движущийся равномерно и прямолинейно (велосипед с мотором), и наша задача состоит в построении регулятора (будем называть его «роботом-велосипедистом»), который должен поддерживать равновесие движущегося велосипеда. Продумаем вопрос о том, как, используя лишь традиционную теорию управления, решить эту задачу и почему получаемые решения в ряде случаев оказываются неудовлетворительными.

Рассмотрим для определенности случай, когда «робот-велосипедист» представляет собой устройство, на вход

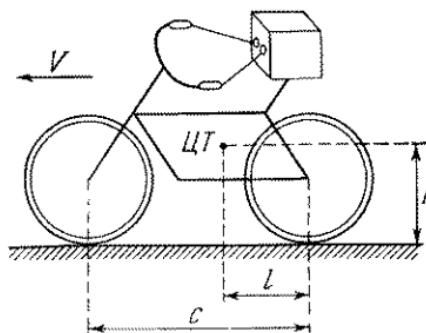


Рис. 1.1.

которого поступает сигнал измерителя отклонения рамы велосипеда от вертикальной плоскости ( $y(t)$ ), а выходом является сигнал, идущий на устройство поворота руля и указывающий нужный угол поворота руля ( $u(t)$ ). Предположим для простоты (это не принципиально), что исполнительное устройство точно отрабатывает этот угол.

Объект управления описывается в разумном приближении линейным дифференциальным уравнением второго порядка [73]

$$\ddot{y}(t) - \alpha_1 y(t) = \alpha_2 u(t - T) + \alpha_3 \dot{u}(t - T) + v(t), \quad (1.1)$$

где  $v(t)$  — внешнее возмущение,

$$\alpha_1 = gh^{-1}, \quad \alpha_2 = V^2 h^{-1} c^{-1}, \quad \alpha_3 = lVh^{-1}c^{-1}, \quad (1.2)$$

$T$  — запаздывание в управлении,  $V$  — скорость велосипеда,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $l$ ,  $h$  — координаты центра тяжести,  $c$  — база велосипеда (рис. 1.1).

Предполагая вначале, что все параметры известны, рассмотрим традиционные методы решения поставленной (пока неформально) задачи.

Уточним вначале цель управления (ЦУ). Пусть в случае ограниченного возмущения  $v(t)$  ЦУ состоит в выпол-

нении неравенства

$$|y(t)| \leq C_y \quad (1.3)$$

(спустя время переходного процесса), а если, например,  $v(t)$  — стационарный случайный процесс, то в выполнении неравенства

$$\mathbf{M}_t |y(t)|^2 \leq C'_y. \quad (1.4)$$

(Знак  $\mathbf{M}_t$  означает условное математическое ожидание при фиксированной предыстории до момента  $t$ .) Значения постоянных  $C_y, C'_y$  заданы.

Если управление  $u(t)$  постоянно на интервалах времени некоторой длины  $\delta$  ( $\delta = T(k-1)^{-1}$  при  $T > 0, k > 1$  — целое), то уравнение (1.1) сводится к дискретному уравнению

$$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = b_1 u_{t-k} + b_2 u_{t-k-1} + v_t, \quad (1.5)$$

где  $t = 0, 1, 2, \dots, k = 1 + T\delta^{-1} \geq 1$  — дискретное запаздывание в управлении,  $v_t$  — дискретная помеха, а параметры  $a_j, b_j$  выражаются через параметры (1.2) и  $\delta$  по формулам

$$\begin{aligned} a_1 &= -2\operatorname{ch}\gamma, \quad a_2 = 1, \\ b_1 &= [\alpha_2(\operatorname{ch}\gamma - 1) + \alpha_3\sqrt{\alpha_1}\operatorname{sh}\gamma] \alpha_1^{-1}, \\ b_2 &= [\alpha_2(\operatorname{ch}\gamma - 1) - \alpha_3\sqrt{\alpha_1}\operatorname{sh}\gamma] \alpha_1^{-1}, \\ \gamma &= \delta\sqrt{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В (1.5) индекс  $t$  — дискретное время; обозначая временно непрерывное время  $t$  в (1.1) через  $t'$ , имеем, что для (1.5)  $t' = \delta t, y_t = y(t\delta)$ . Для дискретного уравнения (1.5) цель управления ставится аналогично в виде

$$|y_t| \leq C_y, \quad (1.7)$$

если возмущение  $v_t$  — ограниченная функция, или в виде

$$\mathbf{M}_t y_t^2 \leq C'_y, \quad (1.8)$$

если  $v_t$  — стационарный случайный процесс. Значения постоянных  $C_y, C'_y$  должны быть согласованы с уровнем дискретной помехи  $v_t$  и должны быть, по возможности, меньше.

Рассмотрим для определенности дискретное уравнение (1.5). (Мы делаем это также и для того, чтобы не загромождать изложение несущественными математическими

деталями.) Пусть, для простоты,  $T = 0$ ,  $k = 1$  и  $v_t$  — дискретный белый шум, т. е.  $v_t$  — последовательность независимых случайных величин,  $Mv_t^2 = \text{const}$ . Задача отыскания наименьшей величины постоянной  $C_y$  в (1.8) и соответствующего оптимального управления — традиционная задача теории управления. (Именно — «управленический» вариант задачи Колмогорова — Винера об оптимальной фильтрации.) В данном случае эта задача решается весьма просто: оптимальное управление имеет вид

$$b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2}. \quad (1.9)$$

(Более подробно и в общем случае эта задача рассмотрена ниже, в § 3.3.) В случае, когда цель управления имеет вид (1.7), задача оптимизации (после соответствующего ее уточнения) также решается просто и оптимальное управление снова имеет вид (1.9). (Эта задача в общем случае рассмотрена в § 3.2.) Заметим, что из (1.5) и (1.9) следует  $y_t = v_t$  — при оптимальном управлении выход «следит» за возмущением.

Итак, в обоих случаях оптимальный регулятор линеен: значение  $u_{t-1}$  линейно выражается через  $u_{t-2}$ ,  $y_{t-1}$ ,  $y_{t-2}$  по формуле (1.9), которая и является решением поставленной задачи.

Мы пришли бы к аналогичному выводу, если бы помеха  $v_t$  была «цветным шумом» (с рациональной спектральной плотностью); см. ниже, гл. 3. В этом случае для оптимального управления значение  $u_{t-1}$  выражалось бы линейно через большее число значений предыдущих значений управления ( $u_{t-2}, \dots$ ) и выхода ( $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots$ ) с коэффициентами, зависящими не только от величин (1.2), но и от коэффициентов спектральной плотности помехи  $v_t$  (см. гл. 3).

Можно рассмотреть и более слабые цели управления: например, для уравнения (1.1) построить обратную связь

$$u(t) = \beta_0 y(t) + \beta_1 \dot{y}(t) \quad (1.10)$$

( $t$  — непрерывное время), подбирая коэффициенты  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  из требования устойчивости, т. е. требуя, чтобы характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \alpha & (\alpha_2 + \alpha_3 \lambda) e^{-\lambda T} \\ \beta_1 + \lambda \beta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

не имело корней в полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda > -\epsilon_0$ ,  $\epsilon_0 > 0$

Совершенно аналогично для уравнения (1.5) можно было бы построить обратную связь

$$u_{t-1} = \tau^{(1)}u_{t-2} + \tau^{(2)}y_{t-1} + \tau^{(3)}y_{t-2}, \quad (1.11)$$

подбирая коэффициенты  $\tau^{(j)}$  из условия устойчивости, т. е. требуя, чтобы все корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 & b_1\lambda + b_2\lambda^2 \\ \tau^{(2)}\lambda + \tau^{(3)}\lambda^2 & \lambda - \tau^{(1)}\lambda^2 \end{vmatrix} = 0,$$

кроме  $\lambda = 0$ , лежали в области  $|\lambda| \geq 1 + \varepsilon_0 > 1$ .

Эти цели управления можно формулировать как требование диссипативности системы (1.1), (1.10) (системы (1.5), (1.11)).

Можно было бы максимизировать значение  $\varepsilon_0$  в двух последних задачах. Можно налагать дополнительные требования на качество переходных процессов, вводить дополнительное условие ограниченности управляющих воздействий и т. д.

Все эти подходы соответствуют традиционным методам теории автоматического управления. Для нас важно сейчас обратить внимание на те обстоятельства, которые иногда делают неприемлемыми все получаемые таким образом решения.

Продолжим наш мысленный эксперимент. Вспомним, что мы рассматриваем задачу построения «робота-велосипедиста». Пусть регулятор описывается формулой (1.9). Для реализации этой формулы необходимо знание коэффициентов  $a_j$ ,  $b_j$ , т. е. (см. (1.6) и (1.2)) параметров  $l$ ,  $h$ , с велосипеда и его скорости  $V$ . Необходим, в частности, измеритель скорости. В случае, когда  $v_t$  — «цветной шум», необходимо еще и знание коэффициентов его спектральной плотности. Для других законов управления дело обстоит точно так же: коэффициенты в законах управления (1.11) зависят от всех перечисленных параметров.

Предположим теперь, что наша задача состоит в построении «робота-велосипедиста», пригодного для управления не одним фиксированным велосипедом, движущимся с одной скоростью при одном типе помех (с фиксированной спектральной плотностью), а для разных велосипедов, движущихся с разными скоростями при помехах разных типов, причем измерители соответствующих параметров отсутствуют.

В этом случае можно было бы построить регулятор для некоторых осредненных («номинальных») значений всех параметров. Благодаря запасу устойчивости построенная таким образом система будет работоспособна и при некотором отклонении параметров от номинальных значений: при малом отклонении истинных значений параметров от номинальных цель управления будет практически выполняться. Так часто и поступают в практике проектирования автоматических систем. Если, однако, диапазоны изменения параметров достаточно широки (а как раз эти случаи нас и интересуют), то формулой (1.9) (и аналогичными решениями) нельзя воспользоваться, — построенный таким образом регулятор оказывается неработоспособным. В этих случаях и применяются адаптивные регуляторы.

Отвлечемся временно от нашей умозрительной задачи о «роботе-велосипедисте». Во многих реальных задачах вопрос о зависимости найденного закона управления от неизвестных параметров стоит более остро: этих параметров намного больше, все их измерять невозможно, адекватность математической модели проблематична, и применение адаптивного регулятора неизбежно.

Рассмотрим опять-таки умозрительно вопрос о том, как же человек учится управлять велосипедом. По-видимому, он также находится в условиях незнания величин  $V$ ,  $c$ ,  $h$ ,  $l$  и параметров спектральной плотности помехи  $v_t$ . Правдоподобно, что единственная (или основная) информация, которой он располагает, — это реакция велосипеда на поданное управление (на поворот руля в рассматриваемом приближении). Посредством «изучения» этих реакций человек учится управлять велосипедом и в конце концов находит нужный закон управления. Аналогично (но пока непонятно как) должен быть построен адаптивный регулятор.

Настоящая книга и посвящена изложению методов решения задач об отыскании законов управления, описывающих работу адаптивных регуляторов.

Поясним, как задача о «роботе-велосипедисте» укладывается в схему задач об адаптации, ограничиваясь, для простоты, детерминированным случаем. (На более формальном уровне этот вопрос рассмотрен ниже, в п. 1.2.1°.) Класс адаптации  $\Xi$  — это, очевидно, множество, ко-

торое пробегает вектор параметров  $V$ ,  $c$ ,  $h$ ,  $l$  и коэффициентов спектральной плотности помехи  $v_t$  — иначе говоря, набор объектов (определеных параметрами  $c$ ,  $h$ ,  $l$ ) и условий их функционирования (определеных параметром  $V$  и помехой  $v_t$ ). Цель управления была описана выше. Регулятор называется *адаптивным в классе  $\Xi$* , если для любого вектора параметров из  $\Xi$  спустя некоторое время  $t_*$  (время адаптации) будет выполнена цель управления. Иначе: адаптивный «робот-велосипедист» спустя время  $t_*$  будет поддерживать равновесие на заданном уровне, и это будет иметь место для любого велосипеда рассматриваемого класса, для любой скорости движения из заданного диапазона скоростей и при любых внешних возмущениях из заданного множества возмущений.

Приведем формулы (они следуют из результатов § 4.1), описывающие работу адаптивного регулятора для простейшего случая, когда в (1.5)  $k = 1$ , а возмущение  $v_t$  — ограниченная функция (именно,  $|v_t| \leq C_v$  для любого  $t \geq 0$  и в остальном значении  $v_t$  произвольны). Выше было указано, что оптимальное управление в этом случае имеет вид (1.9), или, иначе, вид (1.11), где  $\tau^{(1)} = -b_2 b_1^{-1}$ ,  $\tau^{(2)} = a_1 b_1^{-1}$ ,  $\tau^{(3)} = a_2 b_1^{-1}$ . В задаче об адаптивном управлении воспользоваться формулой (1.11), однако, нельзя, так как значения  $\tau^{(j)}$  неизвестны.

Пусть в (1.5)  $|b_1| \leq C_b$ , где  $C_b$  — известное число. Этим условием, а также условием относительно помехи определен класс адаптации. Пусть в целевом условии (1.7)  $C_y > C_v$  и  $\rho = C_v C_y^{-1}$ . (При  $C_y < C_v$  не существует управления, для которого выполнено (1.7).) Адаптивное управление имеет вид, аналогичный (1.11):

$$u_t = \tau_t^{(1)} u_{t-1} + \tau_t^{(2)} y_t + \tau_t^{(3)} y_{t-1}, \quad (1.12)$$

«Подстраиваемые параметры»  $\tau_t^{(j)}$  определяются так:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } |y_{t+1}| \leq C_y, \text{ то } \tau_{t+1}^{(j)} = \tau_t^{(j)}, \\ \text{если } |y_{t+1}| > C_y, \text{ то } \tau_{t+1}^{(1)} = \tau_t^{(1)} - u_{t-1} \xi_t, \\ \tau_{t+1}^{(2)} = \tau_t^{(2)} - y_t \xi_t, \quad \tau_{t+1}^{(3)} = \tau_t^{(3)} - y_{t-1} \xi_t, \end{array} \right\} \quad (1.13)$$

где

$$\xi_t = (1 - \rho) C_v^{-1} (u_{t-1}^2 + y_t^2 + y_{t-1}^2)^{-1} y_{t+1}.$$

(Начальные значения  $\tau_0^{(j)}$  произвольны.) Формулы (1.12), (1.13) наглядно показывают, что при построении адаптивного регулятора не требуется знание неизвестных параметров  $c, h, l, V$ . Оказывается, эти формулы таковы (см. § 4.1), что для любых значений неизвестных параметров существует момент  $t_*$  такой, что при  $t \geq t_*$  выполнено целевое условие (1.7). (Это и означает, что регулятор адаптивен в указанном классе.) Более того (см. § 4.1):

$$\tau_t^{(j)} = \tau_*^{(j)} = \text{const} \text{ при } t \geq t_*.$$

Таким образом, адаптивный регулятор находит за время  $t_*$  закон управления

$$u_{t-1} = \tau_*^{(1)} u_{t-2} + \tau_*^{(2)} y_{t-1} + \tau_*^{(3)} y_{t-2}, \quad (1.14)$$

который используется для управления при  $t \geq t_*$ , являющийся, как и оптимальный закон управления (1.11), линейным и стационарным, и для которого выполнена цель управления.

Аналогичные формулы имеют место и для  $k > 1$ , а также для помех более общих типов (см. ниже, гл. 4, 5).

Важно отметить, что приведенное решение, а также аналогичные решения для более общих случаев, изложенные в § 4.1, обладают следующим свойством: в целевом условии (1.7) значение  $C_y$  может быть взято сколь угодно близким к минимально возможному значению  $C_v$ ; таким образом, спустя время  $t_*$  адаптивный регулятор построит управление, сколь угодно близкое (в смысле выполнения цели управления) к неизвестному оптимальному управлению. (Чем ближе взято  $C_y$  к минимально возможному значению, тем, вообще говоря, будет больше время адаптации  $t_*$ .)

Следует отметить, что далеко не для всех задач адаптации удается построить адаптивный регулятор, обладающий аналогичным свойством близости к оптимальному.

Изложенное показывает, что адаптивный «робот-велосипедист» обладает свойством самообучения. Действительно, за время  $t_*$  он обучается сам ездить (поддерживать равновесие) на любом велосипеде, при любых скоростях и помехах, соответствующих его классу адаптации. (Значение  $t_*$  зависит от велосипеда, скорости и помехи.) Более того, спустя время  $t_*$  найденный им стационарный

закон управления сколь угодно близок (в смысле выполнения целевого условия) к оптимальному. Если затем его «пересадить» на другой велосипед или изменить спектр помехи (или скорость), то в этих новых условиях он спустя новое время адаптации  $t_*$  найдет новый закон, близкий в указанном смысле к другому закону управления, оптимальному в этих новых условиях, и т. д.\*).

Описанный пример задачи адаптивного управления интересен в том отношении, что в рассмотренном случае невозможна идентификация объекта управления (т. е. в нашем случае—сколь угодно точное определение параметров  $a_j$ ,  $b_j$ ). Действительно, нельзя, очевидно, найти (с любой заданной степенью точности) коэффициенты  $a_j$ ,  $b_j$  из уравнений (1.5) (по известным  $y_{t-j}$ ,  $u_{t-j}$ ,  $t = 0, 1, \dots$ ), если относительно  $v_t$  известно лишь, что  $|v_t| \leq C_v$ . Тем не менее адаптивный регулятор (1.12), (1.13) строит управление (1.14), для которого цель управления выполнена с любой, заранее заданной точностью.

\*) Сделаем некоторые замечания относительно возможности падений «робота-велосипедиста» в процессе самообучения. Линеаризованное уравнение (1.1), а значит и (1.5), описывает движение велосипеда лишь для значений  $y_t$ ,  $u_t$ , лежащих в определенных пределах ( $|y_t| \leq Q_y$ ,  $|u_t| \leq Q_u$ ). Приведенные выше решения оптимальной и адаптивной задач управления не учитывают этого обстоятельства. Ограничение  $|u_t| \leq Q_u$  может быть учтено в теории (см. § 4.2). Нарушение ограничения  $|y_t| \leq Q_y$  можно трактовать как падение велосипеда. В эти моменты следует останавливать велосипед, устанавливать его вертикально (задавать малые начальные значения для уравнений (1.1) или (1.5)) и «запускать» его снова, после чего он снова будет описываться уравнениями (1.1) и (1.5). С этим дополнением формулы (1.12), (1.13) будут по-прежнему описывать адаптивный регулятор. (Это показано в § 4.1.) Таким образом, построенный адаптивный «робот-велосипедист» в процессе самообучения будет, вообще, падать. При  $t \geq t_*$  падений, естественно, не будет (если  $Q_y > C_y$ ). Аналогичное обстоятельство имеет место и для ряда других (но не всех) адаптивных систем: необходимо предусматривать наличие «аварийной системы», останавливающей объект, если переменные состояния в процессе самообучения вышли из допустимой области, и переводящей объект в допустимую область. Необходимость таких остановок объекта (и перевода его в допустимую область) — естественная плата за наше незнание объекта и условий его функционирования. Если класс адаптации относительно невелик, то процесс самообучения может происходить и без выхода переменных состояния из допустимой области и, следовательно, без принудительных остановок объекта и без вмешательства аварийной системы. (Адаптивный «робот-велосипедист» может обучаться езде на велосипеде и без падений.)

Отметим, что выше не утверждалась близость коэффициентов в найденном законе управления (1.14) к неизвестным значениям коэффициентов в оптимальном законе управления. На самом деле эта близость может не иметь места.

В ряде случаев идентификация объекта возможна. (Например, в случае, когда  $v_t$  — стационарный процесс.) В этих случаях для синтеза адаптивных регуляторов естественно использовать текущую идентификацию объекта.

**1.1.3°. Задача управления полетом.** Многочисленные задачи адаптации возникают при проектировании систем

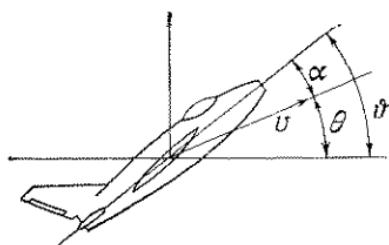


Рис. 1.2.

управления летательными аппаратами (ЛА). Основными источниками неопределенности в этих задачах являются значительные изменения режимов полета (высот, скоростей) современных ЛА, выгорание топлива, изменения загрузки ЛА, изменения конструктивных особенностей ЛА

в процессе полета (например, отделение ступеней космической ракеты), а также ряд других.

Рассмотрим в качестве примера задачу стабилизации продольного движения ЛА (рис. 1.2). Линеаризованные уравнения динамики ЛА возьмем в виде [63, 100]

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= M_{\dot{\vartheta}} \frac{d\vartheta}{dt} + M_{\alpha}\alpha + M_{\dot{\alpha}} \frac{d\alpha}{dt} + M_u u + M_v(t), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= Y_{\alpha}\alpha + Y_u u + Y_v(t), \\ n &= \frac{v}{57,3g} \frac{d\theta}{dt}, \quad \vartheta = \theta + \alpha, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $\vartheta$  — угол тангажа,  $\alpha$  — угол атаки,  $\theta$  — угол наклона траектории,  $n$  — нормальная перегрузка,  $u$  — угол отклонения рулей высоты,  $M_{\dot{\vartheta}}$ ,  $M_{\alpha}$ ,  $M_{\dot{\alpha}}$ ,  $M_u$ ,  $Y_{\alpha}$ ,  $Y_u$  — аэродинамические коэффициенты,  $M_v(t)$ ,  $Y_v(t)$  — приведенные возмущения,  $v$  — скорость полета,  $g$  — ускорение свободного падения. Пренебрегая динамикой рулевого привода, будем считать управляющим воздействием величину  $u$ . Измерению обычно доступны величины  $\vartheta$ ,  $n$  и, возможно, их производные.

Аэродинамические коэффициенты в уравнениях (1.15) зависят от высоты и скорости полета, от конструкции ЛА и его загрузки, от характеристик атмосферы. Все перечисленные величины могут изменяться в течение полета, вследствие чего претерпевают изменения и аэродинамические коэффициенты. Например, коэффициенты  $M_u$  и  $Y_u$ , определяющие эффективность рулей, для современных ЛА могут измениться во время полета в несколько десятков, а то и сотен раз. Часть аэродинамических коэффициентов можно оценить по результатам конструкторских и летных испытаний. Однако эти испытания являются дорогостоящими и, кроме того, получаемые данные часто становятся непригодными при отклонении условий полета от заданной программы. Характеристики возмущающих воздействий  $M_v(t)$ ,  $Y_v(t)$  также зависят от условий полета и состояния атмосферы и могут изменяться в процессе полета в широких пределах.

Таким образом, система управления ЛА должна функционировать в условиях, когда параметры объекта управления могут принимать любые значения в достаточно широких диапазонах. Применяемые обычно регуляторы (автопилоты) с постоянными коэффициентами передачи в ряде случаев не обеспечивают не только заданного качества замкнутой системы, но даже ее устойчивости.

Для решения возникающих задач естественно пытаться применить адаптивный подход. Коэффициенты передачи адаптивного автопилота делаются переменными, их изменение (настройка) осуществляется на основании текущей информации о поведении объекта.

Рассмотрим более подробно, например, задачу стабилизации ЛА по углу тангажа. Пусть измерению доступны угол тангажа  $\theta$  и угловая скорость тангажа  $\dot{\theta}$ . Вводя векторы  $x = \text{col}(\theta, \dot{\theta}, \alpha)$ ,  $f(t) = \text{col}(0, M_v(t), Y_v(t))$ , запишем систему (1.15) в виде векторного уравнения

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad \theta(t) = Cx(t), \quad (1.16)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — постоянные матрицы порядков  $3 \times 3$ ,  $3 \times 1$ ,  $1 \times 3$ . Предположим, что управляющее воздействие вырабатывается линейным регулятором согласно уравнению

$$u(t) = \tau_0 [\theta(t) - \theta_3(t)] + \tau_1 d\theta(t)/dt. \quad (1.17)$$

Цель управления состоит в обеспечении малости отклонения текущего значения  $\vartheta(t)$  от заданного  $\vartheta_3(t)$ . Более точно, цель управления может задаваться, например, функционалом, характеризующим установившееся значение ошибки стабилизации, или так называемым эталонным уравнением (эталонной моделью), характеризующим скорость затухания переходных процессов. Цель управления должна достигаться на всех возможных режимах полета, т. е. для всех объектов и внешних воздействий из заданного класса  $\Xi$ .

При достаточно «обширном» классе  $\Xi$  регулятор (1.17) с постоянными коэффициентами  $\tau_0, \tau_1$  не в состоянии обеспечить достижение цели управления. В этих случаях возникает задача построения адаптивного регулятора.

Регулятор называется *адаптивным в классе  $\Xi$* , если для любого объекта и помехи из класса  $\Xi$  цель управления достигается.

Естественный путь построения адаптивного регулятора состоит в подстройке параметров  $\tau_0, \tau_1$  в (1.17) (по измеренным текущим значениям  $\vartheta, \dot{\vartheta}$ ) так, чтобы достичь цели управления. Однако большинство известных методов такой подстройки теоретически обосновано лишь для случая, когда вектор состояния объекта  $x(t)$ , а возможно, и вектор  $dx/dt$  доступны измерению. Некоторые методы синтеза адаптивных регуляторов для этого случая рассмотрены в гл. 6 и в § 7.1. В данной же постановке измерению считаются доступными только величины  $\vartheta(t), d\vartheta/dt$  и регулятор поэтому имеет достаточно «бедную» структуру.

Приведем решение этой задачи, использующее результаты §§ 7.2, 7.3. Заметим, что из (1.15), (1.17) вытекает следующая зависимость между величинами  $u(t), \vartheta(t)$ :

$$p(p^2 + a_1 p + a_2) \vartheta(t) = -(b_0 + b_1 p) u(t) + v(t), \quad (1.18)$$

где  $p = d/dt$ ,  $b_0 > 0$ ,  $b_1 > 0$ , а приведенное возмущение  $v(t)$  линейно выражается через  $M_v(t), Y_v(t)$  и их производные. Непрерывный адаптивный регулятор можно задать, например, уравнениями

$$\begin{aligned} u(t) &= \tau_0(t) [\vartheta(t) - \vartheta_3(t)] + \tau_1(t) d\vartheta/dt, \\ d\tau_0/dt &= [g(t)]_e [\vartheta(t) - \vartheta_3(t)], \\ d\tau_1/dt &= [g(t)]_e d\vartheta/dt, \\ g(t) &= g_0 [\vartheta(t) - \vartheta_3(t)] + g_1 d\vartheta/dt, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где  $g_0, g_1, \varepsilon$  — положительные числовые параметры и  $[g]_\varepsilon = g$  при  $|g| \geq \varepsilon$ ,  $[g]_\varepsilon = 0$  при  $|g| < \varepsilon$ . В системе (1.8), (1.19) достигается цель управления

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |g(t)| \leq \varepsilon \quad (1.20)$$

для класса объектов и внешних воздействий, определяемого неравенствами  $b_0 > 0$ ,  $b_1 > 0$ ,  $|v(t)| \leq C_v$ ,  $|d\vartheta_3/dt| \leq C_\vartheta$ , где величины  $C_v, C_\vartheta$  определяются некоторым образом по  $\varepsilon$ . Отметим, что из (1.20) следует выполнение цели

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\vartheta(t) - \vartheta_3(t)| \leq (\varepsilon + C_\vartheta g_1)/g_0.$$

Если адаптивный регулятор реализован на бортовой ЦВМ, то управляющее воздействие  $u(t)$  на интервалах  $k\delta \leq t \leq (k+1)\delta$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\delta > 0$ , часто можно считать постоянным:  $u(t) = u(k\delta) = u_k$ . При этом объект можно описывать вместо (1.18) разностным уравнением

$$\vartheta_k + a'_1 \vartheta_{k-1} + a'_2 \vartheta_{k-2} + a'_3 \vartheta_{k-3} = b'_0 u_{k-1} + b'_1 u_{k-2} + b'_2 u_{k-3} + v'_k, \quad (1.21)$$

где  $\vartheta_k = \vartheta(k\delta)$ . Методы синтеза дискретных адаптивных регуляторов для дискретных объектов (1.21) рассмотрены в гл. 4. Для данной задачи адаптивный регулятор имеет вид

$$u_k = \tau_{1,k} u_{k-1} + \tau_{2,k} u_{k-2} + \tau_{3,k} u_{k-3} + \tau_{4,k} \vartheta_k + \tau_{5,k} \vartheta_{k-1} + \tau_{6,k} \vartheta_{k-2} + \tau_{7,k} \vartheta_{k-3}, \quad (1.22)$$

где коэффициенты  $\tau_{j,k}$  определяются по формулам, аналогичным (1.13).

Еще раз подчеркнем, что рассмотренный выше пример весьма схематичен. При проектировании реальных адаптивных автопилотов необходимо учитывать ряд дополнительных факторов: помехи измерения, неточность уравнений (1.15), динамику исполнительных и измерительных устройств и т. д. Эти факторы осложняют практическое решение задач адаптивного управления полетом и требуют подкрепления теоретических выводов результатами моделирования на ЭВМ с учетом особенностей реальной аппаратуры.

В заключение этого пункта отметим, что первые адаптивные автопилоты были разработаны в конце 50-х годов (автопилоты РВ-20, РВ-60 фирмы Бендингс, США, установленные на самолетах Боинг 720, Локхид С-141 и др., автопилот МН-96, установленный на американском ракетоплане X-15 и др.). В этих автопилотах использованы самые простые идеи адаптации.

**1.1.4°. О других задачах адаптивного управления.** Два предыдущих примера задач адаптивного управления подвижными объектами, по-видимому, убедили читателя в том, что подобных примеров можно приводить очень много. По существу любая задача автоматического управления превращается в задачу об адаптивном управлении, если ряд характеристик объекта и условий его функционирования неизвестен. Содержание этих задач весьма разнообразно.

Опишем кратко некоторые другие типичные задачи адаптации. В первую очередь следует упомянуть задачи адаптации, возникающие в робототехнике. Эти задачи ставятся в изобилии при создании автономных подвижных роботов-манипуляторов, если заранее неизвестны точно среда функционирования робота, траектория его движения, предметы манипулирования. Неизвестные параметры характеризуют геометрию внешней среды, параметры грунта в случае подвижного робота, массу, форму, размеры объектов манипулирования в случае робота-манипулятора, предназначенного выполнять достаточно разнообразные и сложные операции. Иногда они являются параметрами, определяющими программу и последовательность выполняемых операций.

Часть этих параметров обычно поддается определению, но оно по каким-либо причинам неделесообразно (требуется дополнительная аппаратура, необходимы затраты времени или вмешательство человека, которые нежелательны, и т. п.). Вся априорная информация о значениях этих параметров определяет класс адаптации.

Задачи распознавания (в частности, задачи распознавания, возникающие в робототехнике) также относятся к теории адаптивных систем. В смысле формальных определений обучаемая опознающая система является, как легко проверить, адаптивной системой. Многие из алгоритмов адаптации, приведенные ниже, в гл. 2, могут

быть использованы в задачах распознавания образов. Задачи распознавания обладают, однако, определенной спецификой; в этой книге они не рассматриваются.

Задачи преследования, игровые задачи с неизвестным противником также обычно естественно укладываются в схему задач адаптации. Пусть, например, рассматривается задача преследования маневрирующей цели, закон функционирования которой неизвестен. Предполагается, что цель может «видеть» преследователя и реагировать на его приближение, но что неизвестный полностью закон движения цели неизменен, т. е. что цель неадаптивна. Пусть преследователь, напротив,— адаптивная система. При решении задач такого типа вся известная информация о характере поведения цели служит для построения многопараметрического закона движения цели; неизвестными остаются лишь параметры этого закона. Класс адаптации — множество, которое пробегает вектор этих параметров. Для того чтобы правильно (или оптимально в каком-либо смысле) организовать свое движение, преследователь должен знать закон движения цели. Неизвестные параметры этого закона (а точнее — необходимые функции от них) определяются по реакциям цели на движение преследователя; соответственно в процессе преследования изменяется и закон движения преследователя. Это изменение строится по алгоритмам адаптации; соответствующие формулы аналогичны формулам (1.13).

Не нужно думать, что в процессе преследования точно определяются неизвестные параметры закона движения цели. При наличии помех это иногда и невозможно, подобно тому, как невозможна идентификация объекта в рассмотренной выше задаче о «роботе-велосипедисте».

В ряде других игровых задач и задач преследования ситуация осложняется тем, что полностью неизвестны среда функционирования и параметры объекта управления (организующего движение преследователя). Чем более разнообразны неизвестные факторы, тем более удивительным становится поведение подобной адаптивной системы: при большом числе разнообразных неизвестных факторов адаптивная система приобретает как бы элементы интеллекта, поскольку она самостоятельно обучается решать разные задачи.

Далеко не все задачи адаптации, которые мы описали лишь бегло и в самых общих чертах, решены в настоящее время. В действительности решены лишь наиболее простые задачи адаптации; основные из них описаны в этой книге. Тем не менее в числе решенных задач находятся задачи из всех перечисленных областей: управление подвижными объектами, технологическими процессами, в частности, химическими, ядерными реакторами, управление робототехническими системами, некоторые задачи преследования, а также задачи из ряда областей, которые остались неупомянутыми.

### §. 1.2. Формальное определение адаптивной системы и адаптивного регулятора

**1.2.1°. Формальные определения в простейшем случае для дискретного времени.** а) *Обозначения и терминология.* Будем предполагать, что время  $t$  дискретно:  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Множество элементов  $z$  будем обозначать через  $\{z\}$ , а индивидуальные элементы этого множества отмечать индексами (но не знаками над буквой!):  $z, z^{(1)}, z', z'', z_0, z_1$  и т. п.

Пусть  $z_0, z_1, \dots, z_t, \dots$  — некоторая последовательность элементов множества  $\{z\}$ . Упорядоченные наборы (конечные и бесконечные) соответствующих элементов обозначаются так ( $0 \leq s \leq t$ ):

$$z_s^t = [z_s, \dots, z_t], \quad z_s^\infty = [z_{s+1}, \dots].$$

Следовательно,  $z_0^0 = z_0$ . Символ  $z_s^t$  с  $s > t$  означает пустое множество.

Задание адаптивной системы предполагает задание некоторых множеств и некоторых соотношений. Именно, предполагаются данными следующие четыре множества, элементы которых называются так:

$$\begin{aligned} \{x\}, \quad x &- \text{состояние}, \\ \{\sigma\}, \quad \sigma &- \text{сенсор}, \\ \{u\}, \quad u &- \text{управление}, \\ \{\xi\}, \quad \xi &- \text{вариант}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Часто все эти множества — подмножества евклидовых

пространств:  $\{x\} \subset \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $\{\sigma\} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $\{u\} \subset \mathbb{R}^{n_3}$ ,  $\{\xi\} \subset \mathbb{R}^{n_4}$ . Тогда

$$x = \text{col} (\hat{x}^{(1)}, \dots, \hat{x}^{(n_1)}), \quad \sigma = \text{col} (\hat{\sigma}^{(1)}, \dots, \hat{\sigma}^{(n_2)}),$$

$$u = \text{col} (\hat{u}^{(1)}, \dots, \hat{u}^{(n_3)}), \quad \xi = \text{col} (\hat{\xi}^{(1)}, \dots, \hat{\xi}^{(n_4)})$$

— векторы соответствующих размерностей; названия компонент векторов  $\sigma$ ,  $u$ ,  $\xi$  следующие:  $\hat{\sigma}^{(j)}$  — сенсоры,  $\hat{u}^{(j)}$  — управления,  $\hat{\xi}^{(j)}$  — варьируемые параметры. В этом случае  $\sigma$ ,  $u$  называются также вектором сенсоров (или вектором сенсором) и вектором управлений (или векторным управлением).

Поясним содержательный смысл всех введенных величин. Состояние  $x$  — вектор переменных, полностью описывающих состояние рассматриваемой системы в фиксированный момент времени. Обычно система состоит из объекта управления и регулятора, и вектор  $x$  описывает их состояние. Если рассматривается система, функционирующая в некоторой переменной среде, то  $x$  — состояние системы и среды. Сенсоры — это выходы «датчиков» или вообще каких-либо измерительных устройств. В моделях биологических систем сенсоры — это «выходы» органов чувств системы. Заметим, что в число сенсоров может входить время  $t$ . Управление — это то, что оказывает непосредственное влияние на изменение состояния системы. Вариант — это набор тех величин, неизменных во времени, от которых зависит система. Обычно  $\xi$  — набор параметров объекта управления и нечто, определяющее условия его функционирования. Это «нечто» может задаваться действующей на объект реализацией помехи. В это «нечто» может включаться и случай; тогда  $\xi = [\xi', \omega]$  — пара элементов  $\xi'$  и  $\omega$ , из которых  $\xi'$  — вектор реальных физических параметров (длины, массы, моменты инерции, емкости, индуктивности и т. п.), выделенных потому, что их численные значения неизвестны конструктору, а  $\omega$  — абстрактный параметр, характеризующий случай \*).

---

\*) Таким образом,  $\{\omega\} = \Omega$  — множество «элементарных событий», фигурирующее в аксиоматике теории вероятностей. Для стохастической теории адаптивных систем характерны задание меры на  $\Omega$  (в соответствии с аксиоматикой Колмогорова) и рассмотрение целей управления, связанных с осреднением по «случаю»  $\omega$ . При этом

«Реализация» помехи  $v_t(\omega)$  означает, что рассматривается конкретный элемент  $\omega$ . Если помеха  $v_t(\omega)$  — «цветной шум», то в набор  $\xi'$  могут входить коэффициенты ее спектральной характеристики. Итак, вариант  $\xi$  — это элемент абстрактного множества, включающий в себя все то, что неизвестно конструктору регулятора. Потенциально вариант  $\xi$  может принимать разные значения.

б) *Эволюционное и сенсорное уравнения, цель управления, регулятор.* Формальное задание адаптивной системы управления предполагает задание нескольких уравнений, из них первые два следующие:

$$\sigma_t = S(x_0^t, u_0^{t-1}, t, \xi) \quad (2.2)$$

(сенсорное уравнение) и

$$x_{t+1} = X(x_0^t, u_0^t, t, \xi) \quad (2.3)$$

(эволюционное уравнение). Запись (2.2) означает, что каждому набору  $x_0, \dots, x_t, u_0, \dots, u_{t-1}, t, \xi$  сопоставлен элемент  $\sigma_t \in \{\sigma\}$ , называемый значением сенсора в момент  $t$ . Аналогичный смысл имеет (2.3). Сенсорное уравнение (2.2) описывает работу измерителей, датчиков, органов чувств (в моделях биологических систем). Эволюционное уравнение описывает изменение состояния системы во времени, при условии задания начального состояния  $x_0$ , варианта  $\xi$  и последовательности управлений  $u_0^\infty = [u_0, u_1, \dots]$ . Из (2.3) следует, что  $x_{t+1}$  зависит лишь от  $x_j, u_j$  с  $j \leq t$ . Иногда правые части (2.2), (2.3) зависят только от  $x_t, u_{t-1}$  и  $x_t, u_t$  соответственно:

$$\sigma_t = \tilde{S}(x_t, u_{t-1}, t, \xi), \quad (2.4)$$

$$x_{t+1} = \tilde{X}(x_t, u_t, t, \xi). \quad (2.5)$$

Часто, однако, уравнения (2.4), (2.5) сопровождаются некоторыми условиями, вместе с которыми они записываются в виде (2.2), (2.3).

о сходимости алгоритмов адаптации приходится говорить о каком-либо вероятностном смысле (см. ниже). В этом и в ряде следующих параграфов рассматривается более простой в идеином и в техническом отношении вариант теории, когда усреднения по  $\omega$  нет. Это позволяет формулировать утверждения, справедливые не «с вероятностью 1» и т. п., а всегда. Помеха может быть случайным процессом  $v_t(\omega)$ . Теперь, однако, случайная величина  $v_t(\omega)$  — произвольная (обычно ограниченная) функция  $\omega$ . (Нет требования ее измеримости.) Относительно спектральной характеристики помехи  $v_t(\omega)$  в случае, когда нет меры на  $\Omega$ , см. ниже, § 3.1.

Содержательный смысл  $x_t$ ,  $\sigma_t$  и уравнений (2.2), (2.3) ((2.4), (2.5)) может быть совсем разным. Обычно  $x_t$  — состояние объекта управления (ОУ) и регулятора, иногда  $x_t$  — состояние ОУ и среды, в некоторых задачах преследования  $x_t$  — состояние ОУ, среды и преследуемого объекта и т. д. В задачах распознавания  $x_t$  — поступающее на вход изображение,  $\sigma_t$  — его название, управление отсутствует ( $\{u\} = \emptyset$  — пустое множество), а уравнения (2.4), (2.5) имеют вид  $x_{t+1} = \bar{X}(t, \xi)$ ,  $\sigma_t = \bar{S}(x_t, \xi)$ . В задачах синтеза адаптивного регулятора (его формальное определение приведено ниже) в качестве (2.2), (2.3) могут выступать реальные датчики и реальный объект, а не их математические модели (для функционирования адаптивного регулятора нужна лишь последовательность  $\sigma_0^\infty = (\sigma_0, \sigma_1, \dots)$ , знание же операторов в правых частях (2.2), (2.3) не необходимо).

Для дальнейшего удобно «включить» начальное значение  $x_0$  в вариант  $\xi$ , что мы и сделаем. (Иначе, положим  $\xi = [\xi, x_0]$ ,  $\{\xi\} = \{\xi\} \times \{x\}$  и «новый» вариант  $\tilde{\xi}$  обозначим снова через  $\xi$ . Такую операцию будем называть *расширением варианта*.) Тогда  $\sigma_t$ ,  $x_t$  определяются из (2.2), (2.3) через  $\xi$  и  $u_0^\infty$ .

Теория управления занимается задачами отыскания законов управления (т. е. правила определения  $u_t$  для всех  $t \geq 0$ ) в соответствии с некоторыми требованиями. Требования эти будем называть *целью управления*. Управление  $u_t$  в момент времени  $t$  должно выражаться лишь через сенсор в момент времени  $t$ . В традиционной теории управления вариант  $\xi$  считается известным,  $u_t$  может зависеть и от  $\xi$ . Итак, закон управления должен иметь вид

$$u_t = \mathcal{U}^0(\sigma_t, \xi), \quad (2.6)$$

где  $\mathcal{U}^0(\sigma, \xi)$  — некоторая функция своих аргументов. Уравнения (2.2), (2.3), (2.6) замкнуты: для заданного  $\xi$  (а значит, и  $x_0$ ) последовательно определяются  $\sigma_t$ ,  $u_t$ ,  $x_t$  во все моменты времени. Уравнение (2.6) будем называть *уравнением регулятора* (неадаптивного). Иногда, для краткости, уравнение (2.6) будем называть *регулятором*. (Более точно, регулятором называется устройство, работа которого описывается уравнением (2.6).)

Цели управления могут быть весьма разнообразными. В теории оптимального управления цель управления (ЦУ) формулируется с помощью некоторого подлежащего минимизации функционала  $J = J(x_0^\infty, u_0^\infty)$ , а (2.6) — управление, для которого этот минимум реализуется. Во многих случаях (а мы сейчас ограничимся лишь этими случаями) цель управления определяется неравенством

$$Q_t(x_0^t, u_0^t, \xi) \leqslant 0 \quad (2.7)$$

и указанием, для каких моментов времени  $t$  оно должно быть выполнено. В (2.7)  $Q_t$  — вещественная функция своих аргументов. Неравенство (2.7) называется *целевым условием*, а функция  $Q_t$  — *целевой функцией*. Индекс  $t$  указывает момент времени, к которому относится целевое условие. Если (2.7) выполнено в момент  $t$ , то говорят, что в момент  $t$  выполнено целевое условие. В идеальном случае ЦУ состоит в выполнении (2.7) для всех  $t$ . Наличие переходных режимов часто приводит к тому, что целью управления считают выполнение (2.7) для всех достаточно больших  $t$ . Иногда ЦУ ставится не для всех  $t$ ; этот случай сводится к рассматриваемому, если положить  $Q_t = -1$  для «лишних»  $t$ . Случай, когда цель управления определяется несколькими неравенствами  $Q_t^{(j)} \geqslant 0$ , сводится к рассматриваемому, если положить  $Q_t = -\min_j Q_t^{(j)}$ .

Пусть (2.6) — регулятор, обеспечивающий выполнение целевого условия (2.7) для всех  $t \geqslant 0$ . Поскольку  $Q_t$  в (2.7) и правые части в (2.2), (2.3) зависят от  $\xi$ , то естественно, что правая часть (2.6) также зависит от  $\xi$ . В традиционной теории управления считается известным все, что нужно. Поэтому зависимость правой части (2.6) от  $\xi$  не вызывает неудобств. Заметим, что для целевых условий вида (2.7) закон управления (2.6), обеспечивающий выполнение соответствующей ЦУ, обычно определяется не единственным образом.

в) *Адаптивная система, адаптивный регулятор.* Теорию адаптивных систем интересуют ситуации, когда вариант  $\xi$  неизвестен и когда, следовательно, регулятором (2.6) воспользоваться нельзя. В этих случаях управление  $u_t$  формируется по-другому. Вводится множество  $\{\tau\} \subset \mathbb{R}^N$ , элемент  $\tau$  которого называется *вектором подстраи-*

ваемых параметров. Управление  $u_t$  определяется соотношениями ( $t \geq 0$ )

$$u_t = \mathcal{U}(\sigma_t, \tau_t), \quad (2.8)$$

$$\tau_{t+1} = \mathcal{T}(\sigma_t, \sigma_{t+1}, \tau_t). \quad (2.9)$$

Здесь  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{T}$  — функции соответственно на  $\{\sigma\} \times \{\tau\}$  и  $\{\sigma\} \times \{\sigma\} \times \{\tau\}$  со значениями в  $\{u\}$  и в  $\{\tau\}$ . При заданных  $\tau_0, \xi$  (а значит, и  $x_0$ ) из (2.2), (2.3), (2.8), (2.9) последовательно определяются  $\sigma_t$ ,  $u_t$ ,  $x_t$ ,  $\tau_t$  для всех  $t \geq 0$ . Подчеркнем, что правые части (2.8), (2.9) не зависят от  $\xi$ .

Поясним формулы (2.8), (2.9). Во многих случаях, анализируя функцию  $\mathcal{U}^0(\sigma, \xi)$  в (2.6), определяющую закон управления, для которого выполнена ЦУ, удается точно или приближенно представить ее в виде

$$\mathcal{U}^0(\sigma, \xi) = \mathcal{U}(\sigma, \tau(\xi)), \quad (2.10)$$

где  $\tau(\xi) \in \mathbb{R}^N$  — конечномерный вектор относительно небольшой размерности  $N$ , а  $\mathcal{U}(\sigma, \tau)$  — некоторая функция на  $\{\sigma\} \times \mathbb{R}^N$ . Компоненты вектора  $\tau(\xi)$  будем называть *существенными параметрами*. В этом случае в качестве  $\{\tau\}$  следует взять  $\{\tau\} = \mathbb{R}^N$ , а функцию  $\mathcal{U}(\sigma, \tau)$  следует взять в качестве правой части в (2.8). Закон (2.9) определения подстраиваемых параметров желательно выбрать так, чтобы  $\tau_t \rightarrow \tau(\xi)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда при больших  $t$  правые части (2.8) и (2.6) будут близкими и, в силу непрерывности, которая также должна иметь место, ЦУ будет выполнена. Разумеется, эти рассуждения весьма неточны, а некоторые из сделанных утверждений часто и неверны. Например, мы увидим ниже, что обычно сходимость  $\tau_t \rightarrow \tau(\xi)$  не имеет места. Тем не менее, если  $\tau_t \rightarrow \tau_\infty$ , где  $\tau_\infty$  — какой-нибудь вектор (не обязательно  $\tau_\infty = \tau(\xi)$ ), и если предельные значения  $\tau_\infty$  для различных  $\xi$  проходят достаточно обширное множество, то достаточно широк класс  $\{\mathcal{U}(\sigma, \tau_\infty)\}$  функций от  $\sigma$ , а значит, и предельных для (2.8), (2.9) законов управления  $u_t = \mathcal{U}(\sigma_t, \tau_\infty)$ . В этом случае есть надежда на то, что среди этого множества имеется нужный нам закон (2.6), а также на то, что можно построить алгоритм (2.9) для отыскания этого закона. Итак, формулы (2.8), (2.9) можно рассматривать как формулы отыскания нужного закона управления в классе законов управления  $u_t = \mathcal{U}(\sigma_t, \tau_\infty)$ ,  $\tau_\infty \in \{\tau\}$ .

Заметим, что если в число сенсоров  $\hat{\sigma}_t^{(j)}$  входит время  $t$ , то предельный закон управления  $u_t = \mathcal{U}(\sigma_t, \tau_\alpha)$  нестационарен (в обычном смысле этого термина).

**Определение 1.2.1.** Пусть  $\Xi \subset \{\xi\}$  — некоторое множество вариантов и  $T_0 = \{\tau_0\} \subset \{\tau\}$  — некоторое множество начальных значений  $\tau_0$  вектора подстраиваемых параметров. Система (2.2), (2.3), (2.8), (2.9) называется *адаптивной в классе*  $\Xi$  по отношению к целевому условию (2.7), если для любого  $\xi \in \Xi$  и для любого  $\tau_0 \in T_0$  найдется такой момент  $t_* = t_*(\xi, \tau_0)$ , что для всех  $t \geq t_*$  выполнено (2.7). Наименьшее из чисел  $t_*$ , удовлетворяющих этому условию, называется *временем адаптации*. Если  $\tau_t = \text{const}$  при всех достаточно больших  $t$ , то адаптивную систему называют *системой со стабилизирующимся законом управления*. Уравнения (2.8), (2.9) адаптивной системы называются *уравнениями адаптивного регулятора*.

Иногда, ради краткости, уравнения (2.8), (2.9) будем называть *адаптивным регулятором*. Уравнение (2.9) называют иногда *законом адаптации*, а устройство, реализующее этот закон, — *адаптором*.

г) *Замечания.* Содержательный смысл определения 1.2.1 был подробно пояснен в § 1.1. Сейчас отметим лишь, что бесконечный промежуток времени на практике обычно заменяется конечным, но достаточно большим. (Аналогичное обстоятельство имеет место, например, и при применении теории устойчивости.) Если через интервалы времени, превышающие время адаптации, происходят изменения варианта (не выводящие из класса адаптации), то каждый раз адаптивный регулятор будет находить закон управления, обеспечивающий выполнение ЦУ. В этом смысле адаптивная система действительно «приспосабливается» к изменению всех условий, характеризуемых вариантом  $\xi \in \Xi$ .

В отличие от примеров § 1.1, приведенное определение охватывает и случаи, когда объект управления зависит от медленно изменяющихся параметров, а цель управления состоит в том, чтобы «приспособиться» к изменению этих параметров. Действительно, изменение параметров  $a_j(t)$  во времени можно описать во многих случаях формулой

$$a_j(t) = a_j^{(1)} \varphi^{(1)}(t) + \dots + a_j^{(N)} \varphi^{(N)}(t),$$

где  $\varphi^{(h)}(t)$  — фиксированные функции,  $a_j^{(h)}$  — варьируемые параметры, часть компонент варианта  $\xi$ . Поэтому задачи с переменными параметрами указанного типа содержатся в рассмотренном классе задач.

Заметим, что при сделанных предположениях не возникает вопроса о существовании адаптивного регулятора (2.8), (2.9), по крайней мере в том обычном случае, когда  $\tau$  — конечномерный вектор,  $Q_t$  в (2.7) — один из сенсоров и когда при малом изменении  $\tau(\xi)$  в (2.10) получаемый закон управления будет по-прежнему обеспечивать выполнение ЦУ. Действительно, один из таких алгоритмов — это алгоритм «полного перебора» векторов  $\tau_t$  из некоторого счетного всюду плотного множества в пространстве  $\{\tau\}$ , например из множества векторов, компоненты которых — рациональные числа. Изменение векторов  $\tau_t$  происходит при нарушении неравенства (2.7). Очевидно, через конечное число шагов будет найден необходимый вектор. Разумеется, такого рода алгоритмы полного перебора не имеют никакого практического значения \*). Задача теории адаптивных систем — создание работоспособных, практически приемлемых алгоритмов (2.8), (2.9).

д) *Пример.* Рассмотрим снова задачу о роботе-велосипедисте (п. 1.1.2°) и поясним, как эта задача укладывается в приведенную выше формальную схему задач адаптации.

Пусть, для простоты, в (1.5)  $k = 1$  и помеха — произвольная ограниченная функция,  $|v_t| \leq C_v$ , где  $C_v$  — фиксированная постоянная. Обозначим через  $\omega$  последовательность  $\omega = v^\infty$  указанного вида. Тогда  $v_t = v_t(\omega)$ ; в этом случае вариантом  $\xi$  является набор  $\xi = [a_1, a_2, b_1, b_2, \omega]$ , где  $a_j, b_j$  — коэффициенты уравнения (1.5). Полагая  $x_t = \text{col}(y_t, y_{t-1})$ ,  $u_t = \text{col}(u_t, u_{t-1})$ , запишем (1.5) в виде (2.3). Полученное уравнение будет эволюционным уравнением для данного случая. Сенсор вообще вы-

\*) Подобным образом алгоритмом полного перебора можно найти сколь угодно точно решение любого уравнения  $f(\tau) = 0$  (с естественными предположениями о функции  $f(\tau)$ ). Теоретически с помощью алгоритма полного перебора можно, например, найти доказательство теоремы Ферма или проблемы Римана (если они существуют), поскольку всевозможных «математических текстов» — счетное множество и есть алгоритм проверки корректности текста. Можно показать, что при естественных весьма широких предположениях любую задачу оптимального управления можно приближенно (сколь угодно точно) «решить» алгоритмом полного перебора.

бирается произвольно в соответствии с требованиями практики или из сравнения с соответствующей неадаптивной задачей оптимизации. В рассматриваемой задаче оптимальным законом управления является (1.9), согласно которому  $u_t$  выражается через  $u_{t-1}$ ,  $y_t$ ,  $y_{t-1}$ . Поэтому в данном случае естественно взять в качестве сенсора  $\sigma_t = \text{col}(u_{t-1}, y_t, y_{t-1})$ . Правая часть этого соотношения — функция  $x_t$  и  $u_t$ , поэтому оно имеет вид (2.2); оно и является в данном случае сенсорным уравнением. Целевое условие (1.7) имеет, очевидно, вид (2.7). Управление (1.9) имеет вид (2.6). Поэтому существенными параметрами являются  $\tau^{(1)} = b_2 b_1^{-1}$ ,  $\tau^{(2)} = a_1 b_1^{-1}$ ,  $\tau^{(3)} = a_2 b_2^{-1}$ , а  $\tau_t = \text{col}(\tau_t^{(1)}, \tau_t^{(2)}, \tau_t^{(3)})$  — вектор подстраиваемых параметров. Уравнения (1.12), (1.14) адаптивного регулятора имеют вид (2.8), (2.9), что и требуется. Классом адаптации  $\Xi = \Xi(C_b)$ , является множество вариантов  $\xi$ , определенное условием  $b_1 \leq C_b$ .

Если бы уравнением объекта было линейное разностное уравнение, но не второго, как (1.5), а произвольного высокого порядка, то эта задача совершенно аналогично уложилась бы в общую схему задач об адаптации.

**1.2.2°. Адаптивные системы общего вида.** Приведенное в предыдущем пункте определение адаптивной системы допускает естественное обобщение на более широкий класс объектов и целей управления. Приведем такое обобщение для случая, когда время  $t$  может изменяться непрерывно ( $t_0 \leq t < \infty$ ) либо, как и в предыдущем пункте, принимать дискретную последовательность значений ( $t = t_0, t_1, \dots$ ).

Пусть  $w(t)$  — произвольная функция со значениями в некотором множестве  $\{w\}$ ; в случае непрерывного времени (как и в случае дискретного времени) символ  $w_{t_1}^{t_2}$ , где  $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \infty$ , означает «резку» функции  $w(t)$  на  $(t_1, t_2)$ , т. е.  $w_{t_1}^{t_2}$  — функция  $w(s)$  при  $t_1 \leq s \leq t_2$ .

а) *Эволюционное и сенсорное уравнения.* Пусть по-прежнему  $\{x\}$ ,  $\{\sigma\}$ ,  $\{u\}$ ,  $\{\xi\}$  — множества, элементы которых называются так, как указано в (2.1), и имеют указанный в п. 1.2.1°а) содержательный смысл. Предположим, что выделено некоторое множество  $\mathbb{U} = \{u_{t_0}^\alpha\}$  последовательностей или функций  $u_{t_0}^\alpha$ , называемых «допустимы-

ми» управлениеми. В дальнейшем всегда  $u_{t_0}^\infty$  — лишь допустимое управление.

Предполагаются данными эволюционное уравнение

$$X(x_{t_0}^t, u_{t_0}^t, t, \xi) = 0 \quad (2.11)$$

и сенсорное уравнение

$$S(\sigma_{t_0}^t, x_{t_0}^t, u_{t_0}^t, t, \xi) = 0. \quad (2.12)$$

Левые части (2.11), (2.12) — некоторые операторы над стоящими в скобках аргументами, причем такие, что для всех  $t \geq t_0$  однозначно находятся  $x(t)$  из (2.11) (при заданных  $u_{t_0}^\infty, \xi$ ) и  $\sigma(t)$  из (2.12) (при заданных  $x_{t_0}^\infty, u_{t_0}^\infty, t, \xi$ ). Необходимые для однозначной разрешимости начальные условия включаются в вариант после соответствующего его расширения. Отметим, что определяемая уравнением (2.11) функция  $x(t)$  называется *управляемым процессом* по отношению к управлению  $u(t)$  (определенная из (2.12) функция  $\sigma(t)$  — управляемый процесс по отношению к «управлению»  $x(t), u(t)$ ).

В приложениях эволюционное и сенсорное уравнения могут быть самыми разными (дифференциальными, интегральными, интегродифференциальными, разностными и др.). Поэтому целесообразно рассматривать абстрактные операторные уравнения вида (2.11), (2.12).

б) *Цель управления, регулятор.* Управление  $u_{t_0}^\infty$  должно быть выбрано так, чтобы обеспечить некоторую цель управления, к формулировке которой и перейдем.

Управляемый процесс  $x(t)$  и его срезка  $x_{t_0}^t = x_{t_0}^t(\xi)$  зависят от варианта  $\xi$ ; совокупность  $x_{t_0}^t(\xi)$  при возможных  $\xi \in \{\xi\}$  обозначим через  $x_{t_0}^t(\cdot)$ . Пусть  $Q(t, \xi) = \tilde{Q}[t, x_{t_0}^\infty(\cdot), u_{t_0}^\infty, \xi]$  — некоторый функционал над  $x_{t_0}^\infty(\cdot), u_{t_0}^\infty$ , обладающий свойством неупреждаемости

$$\tilde{Q}[t, x_{t_0}^\infty(\cdot), u_{t_0}^\infty, \xi] = Q[t, x_{t_0}^t(\cdot), u_{t_0}^t, \xi],$$

т. е.  $Q(t, \xi)$  в каждый момент времени  $t$  не зависит от будущих значений  $x(s), u(s)$  ( $s > t$ ). Такую функцию

$$Q(t, \xi) = Q[t, x_{t_0}^t(\cdot), u_{t_0}^t, \xi] \quad (2.13)$$

будем называть *целевой функцией*.

Запись (2.13) означает, что вычисление значения  $Q(t, \xi)$  может потребовать операций над ансамблем  $x_{t_0}^t(\cdot)$ .

Левые части в (1.4), (1.8) — примеры подобной целевой функции.

*Функционалом качества управления* будем называть функционал от  $u_{t_0}^\infty$  вида

$$J(\xi, u_{t_0}^\infty) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} Q[t, x_{t_0}^t(\cdot), u_{t_0}^t, \xi], \quad (2.14)$$

зависящий от варианта  $\xi$  как от параметра. С помощью функционала (2.14) формулируется цель управления (ЦУ). Типичными являются следующие цели управления:

(А) Диссипативность (по функционалу  $J$ ): требуется, чтобы  $J(\xi, u_{t_0}^\infty) < \infty$ .

(Б) Стабилизация (по функционалу  $J$ ): требуется, чтобы было выполнено

$$J(\xi, u_{t_0}^\infty) \leq C(\xi), \quad (2.15)$$

где  $C(\xi)$  — заданная постоянная.

(С) Оптимизация (по функционалу  $J$ ): неравенство (2.15) должно быть выполнено при минимально возможной постоянной  $C(\xi)$ , т. е., иначе, требуется, чтобы

$$J(\xi, u_{t_0}^\infty) = \inf_{\hat{u}_{t_0}^\infty \in \mathcal{U}} J(\xi, \hat{u}_{t_0}^\infty). \quad (2.16)$$

(Д) Субоптимизация (по функционалу  $J \geq 0$ ) с уровнем оптимальности  $\rho$  ( $0 < \rho \leq 1$ ): должно быть выполнено (2.15) с постоянной

$$C(\xi) = \rho^{-1} \inf_{\hat{u}_{t_0}^\infty \in \mathcal{U}} J(\xi, \hat{u}_{t_0}^\infty). \quad (2.17)$$

В (2.16), (2.17) нижняя грань берется по множеству  $\mathcal{U}$  допустимых управлений.

Наряду с указанными рассматриваются также локальные ЦУ, формулируемые непосредственно через целевую функцию: для всех достаточно больших  $t$  должно быть

$$Q(t, \xi) \leq C(\xi), \quad (2.18)$$

где  $C(\xi)$  — заданная постоянная. ЦУ такого типа (для дискретного времени) была рассмотрена в пункте 1.2.4°.

Аналогично вводится понятие ЦУ в случае нескольких целевых функций. Здесь имеется большое разнообразие. Например, для двух целевых функций  $Q_1, Q_2$  и соответ-

ствующих функционалов  $J_1$  и  $J_2$  целью управления может быть оптимизация по  $J_1$  и диссипативность по  $J_2$  или оптимизация по  $J_1$  и локальная цель  $Q_2 \leq C_2(\xi)$  и т. д.

Особенностью принятых ЦУ является то, что обычно они накладывают ограничения на поведение процессов  $x(t)$ ,  $u(t)$  лишь при  $t \rightarrow \infty$ . Это связано со спецификой задач адаптации: неопределенность знания о варианте  $\xi$  может не позволить обеспечить ЦУ, если ЦУ зависит от поведения  $x(t)$ ,  $u(t)$  на начальном этапе.

Пусть управление  $u(t)$  определяется из операторного уравнения

$$\mathcal{U}^0(u_{t_0}^t, \sigma_{t_0}^t, \xi) = 0. \quad (2.19)$$

Предполагается, что уравнения (2.11), (2.12), (2.19) однозначно разрешимы (при заданном  $\xi$ ) относительно  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $\sigma(t)$ . Уравнение (2.19) будем называть *регулятором* (неадаптивным). (При менее формальном изложении следовало бы называть регулятором устройство, работа которого описывается уравнением (2.19).)

Основная задача традиционной теории управления состоит в построении регулятора такого, что выполнена заданная ЦУ.

Подчеркнем, что регулятор (2.18) зависит от варианта  $\xi$  и что, следовательно, при неизвестном  $\xi$  им нельзя воспользоваться для определения управления  $u(t)$ .

в) *Адаптивный регулятор, адаптивная система.* Пусть  $\{\tau\}$  — некоторое множество. Рассмотрим операторные уравнения

$$\mathcal{U}[u_{t_0}^t, \sigma_{t_0}^t, \tau_{t_0}^t] = 0, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{T}[u_{t_0}^t, \sigma_{t_0}^t, \tau_{t_0}^t] = 0 \quad (2.21)$$

и предположим, что из (2.11), (2.12), (2.20), (2.21) однозначно определяются (при заданном  $\xi$ ) процессы  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $\sigma(t)$ ,  $\tau(t)$  \*). Подчеркнем, что левые части (2.20), (2.21) не зависят от  $\xi$  и, следовательно, уравнениями (2.10), (2.21) можно воспользоваться для определения  $u(t)$  при неизвестном  $\xi$ . Практические требования реализуемости

\*). Необходимые для однозначной разрешимости начальные значения  $\tau_{t_0}^{t_1}$  включаются в вариант после соответствующего его расширения. Иногда такое расширение делать нецелесообразно; тогда  $\tau_{t_0}^{t_1}$  фигурирует наряду с  $\xi$  в приводимом ниже определении 1.2.2.

приводят к тому, что обычно в (2.20), (2.21) вместо  $u_{t_0}^t$ ,  $\sigma_{t_0}^t$  берется  $u_{t-s}^t$ ,  $\sigma_{t-s}^t$  с некоторым  $s > 0$ . (Аналогичное замечание справедливо и в отношении регулятора (2.19).)

Пусть  $\Sigma$  — система уравнений (2.11), (2.12), (2.20), (2.21) и  $\Xi \subset \{\xi\}$  — некоторое множество вариантов.

**Определение 1.2.2.** Предположим, что для любого  $\xi \in \Xi$  и процессов, определяемых из системы  $\Sigma$ , выполнена ЦУ. Тогда  $\Sigma$  называется *адаптивной системой* в классе  $\Xi$  (по отношению к заданной ЦУ), а система (2.20), (2.21) — *адаптивным регулятором*. Множество  $\Xi$  называется *классом адаптации* системы  $\Sigma$ . В случае локальной ЦУ наименьшее значение  $t_* = t_*(\xi)$  такое, что при  $t \geq t_*$  (2.18) выполнено, называется *временем адаптации*.

Адаптивный регулятор называется также *адаптивной управляющей системой*. Обычно  $\{\tau\}$  — евклидово пространство. В этом случае  $\tau(t)$  называется *вектором подстраиваемых параметров*.

Основная задача теории адаптивных систем — построение адаптивного регулятора. (Мы опускаем ряд других неформальных условий и требований.)

Обычно уравнение (2.20) строится относительно просто, если решена соответствующая неадаптивная задача. Именно, обычно регулятор (2.19) удается записать так:

$$\mathcal{U}[u_{t_0}^t, \sigma_{t_0}^t, \tau_*(\xi)] = 0, \quad (2.22)$$

где  $\tau_*(\xi)$  — вектор некоторого евклидова пространства  $\mathbb{R}^N$  (называемый *вектором существенных параметров*), а  $\mathcal{U}$  — некоторый оператор. Этот оператор и берется в качестве оператора  $\mathcal{U}$  в (2.20); в качестве  $\{\tau\}$  принимается  $\{\tau\} = \mathbb{R}^N$ . Таким образом, задача сводится к построению оператора  $\mathcal{T}$  в (2.21), обладающего нужными свойствами. Естественно пытаться определить  $\mathcal{T}$  так, чтобы  $\tau(t) \rightarrow \tau_*(\xi)$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. из условия идентификации существенных параметров, но это, как пояснено выше в п. 1.1.2°, не всегда возможно.

Уравнение (2.21) называется иногда *алгоритмом адаптации*, а устройство, реализующее этот алгоритм, — *адаптором*.

г) *Другие задачи адаптации.* Описанная выше абстрактная схема включает также большое число задач, никак не связанных с процессами управления. В этих случаях со-

держательно  $u(t)$  выступает в другом смысле, например, как «внешняя среда». «Цель управления» в этом случае заменяется «целью функционирования». Абстрактные определения не изменяются, но, учитя содержательный смысл формальных определений, в этих задачах удобно провести указанную замену терминов. К числу таких задач относятся также разные задачи распознавания.

Приведем еще один пример задачи подобного рода: рассмотрим как самостоятельную систему адаптор, т. е. устройство, реализующее алгоритм адаптации (2.20) (например, алгоритм (1.13)). Часто для адаптора можно сформулировать самостоятельную (вторичную) цель функционирования. Например, эта цель может состоять в обеспечении быстродействия, либо эффективности алгоритма адаптации, в требовании сходимости настраиваемых параметров и т. д. (Подразумевается, что исходная ЦУ, поставленная для управляющей системы в целом, обеспечена.) В этих случаях вторичную цель функционирования, поставленную для адаптора, можно назвать *целью адаптации*.

### § 1.3. Схема решения задач адаптивного управления

Несмотря на значительное разнообразие методов адаптивного управления, в основе большинства из них лежит несколько простых идей. В этом параграфе дается краткое описание основных этапов решения задачи синтеза адаптивного регулятора. По ходу описания будут пояснены некоторые из этих идей применительно к задачам и методам, рассматриваемым в книге.

**1.3.1°. Общее описание процедуры синтеза адаптивного регулятора.** Предполагается, что ОУ (точнее, его математическая модель) и условия его функционирования заданы с точностью до некоторых параметров (варианта) и сформулирована цель управления. Решение задачи синтеза адаптивного регулятора удобно разбить на следующие этапы:

*Этап 1. Выбор структуры регулятора.* На первом этапе ищется закон управления  $u_t = \mathcal{U}[\sigma_t, \tau(\xi)]$  (в ситуации п. 1.2.1°) или (2.22) (в общем случае), обеспечивающий ЦУ, т. е. решается соответствующая неадаптивная задача. Предполагается, что об ОУ и действующих на

него помехах известно «все, что необходимо»; вектор  $\tau(\xi)$  предполагается известным.

Синтез регулятора часто удобно осуществлять с помощью задания вспомогательной цели управления, выполнение которой обеспечивает в конечном счете и выполнение исходной ЦУ. Так, например, в задачах стабилизации широко используется метод функций Ляпунова, когда уравнение регулятора выбирается из условия, чтобы заданная функция состояния системы была неотрицательна и убывала на траекториях системы управления. Подробнее этот метод обсуждается в § 6.1. Иногда ЦУ задается при помощи так называемой эталонной модели; при этом регулятор выбирается из условия, чтобы была обеспечена желательная реакция ОУ на задающее воздействие. Применение функций Ляпунова и здесь часто дает возможность выбрать вспомогательные ЦУ, позволяющие осуществлять синтез разнообразных обратных связей.

Во всех случаях на первом этапе оказывается, что выбраны структура регулятора — основного контура системы управления и сенсор — набор необходимых для управления функций состояния ОУ и, возможно, предыдущих значений управления. Эта структура определена с точностью до конечного набора  $\tau(\xi)$  существенных параметров. В некоторых задачах структура регулятора и набор функций, определяющих сенсор, заданы заранее в соответствии с возможностями технической реализации системы (например, не все компоненты вектора состояния доступны измерению). Задачи синтеза регуляторов в этих условиях рассмотрены в гл. 7.

*Этап 2. Выбор подстраиваемых параметров.* На этом этапе неизвестные существенные параметры заменяются подстраиваемыми параметрами (оценками). При этом получается закон управления, не зависящий от  $\tau(\xi)$ , но возникает задача выбора алгоритма получения подстраиваемых параметров (алгоритма адаптации). Укажем на два основных способа введения подстраиваемых параметров, соответствующих прямому и идентификационному подходам. При прямом подходе в качестве подстраиваемых параметров выступают непосредственно коэффициенты синтезированного на первом этапе регулятора, — уравнение (2.22) заменяется на (2.20). Идентификационный подход состоит в оценивании неизвестных

параметров ОУ. Эти оценки подставляются вместо неизвестных существенных параметров в закон управления.

*Этап 3. Выбор алгоритма адаптации.* Существует несколько методов построения алгоритма адаптации, осуществляющих подстройку параметров. Во многих случаях все эти подходы приводят к однотипным алгоритмам адаптации. Приведем эвристическую процедуру, часто позволяющую получать алгоритмы подстройки параметров с точностью до выбора некоторых величин. Обоснование получающихся алгоритмов (при соответствующем выборе этих величин) как правило не просто.

Пусть время  $t$  дискретно и  $Q_t = Q_t(x^t, u^t, \xi)$  или  $Q_t = Q[t, x_{t_0}^t(\cdot), u_{t_0}^t, \xi]$  — целевая функция в (2.7) или в (2.13). Рассмотрим для определенности первый случай. Подставим в  $Q_{t+1}$  значение  $x_{t+1}$ , выраженное через  $\tau_t$  в силу уравнений (2.3) и (2.8); в результате получим некоторую функцию от  $\tau_t$ , которую обозначим через  $Q_{t+1}(\tau_t)$ . В соответствии с заданной ЦУ (2.7) или (2.15) — (2.18) значение  $Q_{t+1}(\tau_t)$  следует, по возможности, уменьшать. Поэтому представляется разумным изменять  $\tau_t$  в направлении, противоположном градиенту функции  $Q_t(\tau_t)$ . Мы приходим к градиентному алгоритму вида

$$\tau_{t+1} = \tau_t - \gamma_t \operatorname{grad} Q_{t+1}(\tau_t), \quad (3.1)$$

где  $\gamma_t$  — скалярные неотрицательные параметры алгоритма, задающие величину шага алгоритма. Аналогом алгоритма (3.1) для непрерывного времени является дискретный алгоритм скоростного градиента

$$\tau_{k+1} = \tau_k - \gamma_k \operatorname{grad}_\tau \dot{Q}[t_k, \tau(t_k)], \quad (3.2)$$

где  $t_k$  — момент  $k$ -й коррекции подстраиваемых параметров. Если требуется, чтобы подстраиваемые параметры изменялись непрерывно во времени, можно воспользоваться непрерывным алгоритмом скоростного градиента

$$\frac{d\tau}{dt} = -\gamma_t \operatorname{grad}_\tau \dot{Q}[t, \tau(t)]. \quad (3.3)$$

Здесь  $\dot{Q}[t, \tau(t)]$  — полная производная по  $t$  целевой функции в (2.13), взятая в силу уравнений объекта и регулятора.

Алгоритмы (3.1) — (3.3) могут быть приняты в качестве алгоритмов адаптации, если правые части в (3.1) — (3.3) выражаются через доступные измерению величины (через  $\sigma_t$ ,  $\sigma_{t+1}$  в (3.1) или через  $\sigma(t)$  ( $t \leq t_k$ ) в (3.2)). Если это условие не выполнено либо если затруднено обоснование этих алгоритмов, то можно попытаться ввести вспомогательную цель управления с функцией  $Q_t(\tau)$  (или  $\dot{Q}(t, \tau)$ ), для которой указанные условия выполнены.

Другие, не эвристические, а точные методы построения алгоритмов адаптации описаны в гл. 2, 4 — 7. Важно отметить, что в случаях, когда правые части в (3.1) — (3.3) выражаются через сенсоры, все эти методы часто приводят к тем же выражениям (3.1) — (3.3), указывая дополнительное значение  $\gamma_t$ .

Получаемые значения  $\gamma_t$  существенно зависят от характера задачи. В условиях случайных стационарных возмущений при использовании метода стохастической аппроксимации в (3.1), (3.2) должно быть (см. § 2.3)

$$\sum_k \gamma_k = \infty, \quad \sum_k \gamma_k^2 < \infty.$$

(Этим условиям удовлетворяет  $\gamma_k = 1/k$ .) В этом же стохастическом случае могут быть получены рекуррентные процедуры для  $\gamma_k$  (см. §§ 2.3, 2.4). В случае, когда помехи ограничены, используется описанный ниже метод рекуррентных целевых неравенств (причем в разных вариантах); для  $\gamma_k$  получаются явные формулы типа (1.13).

Подчеркнем, что эти методы применимы и в случаях, когда указанное эвристическое правило результата не дает, т. е. когда правые части (3.1) — (3.3) выражаются через величины, недоступные измерению в нужный момент.

*Этап 4. Обоснование алгоритма адаптации.* После выбора алгоритма адаптации синтез управляющей системы закончен. Теперь требуется показать, что синтезированная система действительно является адаптивной, т. е. обеспечивает поставленную ЦУ независимо от значения варианта из класса адаптации. Поскольку замкнутая система управления является нелинейной, такое обоснование может представлять значительные трудности. В ряде случаев приходится заново возвращаться к этапам 1 — 3.

Поясним на примере описанную выше эвристическую процедуру. Пусть ОУ описывается уравнением (1.5) с  $k = 1$  и ЦУ имеет вид (1.7). Введем целевую функцию  $Q_t$ , записав (1.7) в виде неравенства

$$Q_t = |y_t|^2 - C_y^2 \leq 0.$$

Используя уравнение (1.5), получаем

$$\begin{aligned} Q_{t+1} &= |y_{t+1}|^2 - C_y^2 = \\ &= |-a_1 y_t - a_2 y_{t-1} + b_1 u_t + b_2 u_{t-1} + v_{t+1}|^2 - C_y^2. \end{aligned}$$

Подставим, следуя процедуре, вместо  $u_t$  его значение в силу (1.42) и найдем производные  $\partial Q_{t+1} / \partial \tau_t^{(j)}$ :

$$\frac{\partial Q_{t+1}}{\partial \tau_t^{(1)}} = \lambda_t u_{t-1}, \quad \frac{\partial Q_{t+1}}{\partial \tau_t^{(2)}} = \lambda_t y_t, \quad \frac{\partial Q_{t+1}}{\partial \tau_t^{(3)}} = \lambda_t y_{t-1},$$

где

$$\lambda_t = 2y_{t+1}b_1.$$

Подставляя в формулу (3.1) эти выражения и выбирая  $\gamma_t = 0$ , если  $|y_{t+1}| \leq C_y$ , и  $\gamma_t = \xi_t \lambda_t^{-1}$ , если  $|y_t| > C_y$ , приходим к алгоритму (1.13). При таком выборе коэффициентов  $\gamma_t$  значения  $\tau_{t+1}^{(j)}$  выражаются через сенсоры, т. е. полученный алгоритм реализуем и может выступать в качестве алгоритма адаптации. Указанный выбор величин  $\gamma_t$  и обоснование алгоритма (1.13) следуют из результатов § 4.1.

При другом выборе коэффициентов  $\gamma_t$  даже для этого простого примера обоснование полученного алгоритма представляется проблематичным.

Приведем пример, когда указанная эвристическая процедура результата не дает, так как приводит к нереализуемому алгоритму. Пусть ОУ описывается уравнением (1.5) с  $k = 2$ ,  $b_1 \neq 0$ . Теперь  $Q_{t+1} = |y_{t+1}|^2$  зависит от  $\tau_{t-1}$  (а также от  $\tau_{t-2}, \dots$ ). Согласно эвристической процедуре приходим к алгоритму

$$\tau_t^{(j)} = \tau_{t-1}^{(j)} - \gamma_t \partial Q_{t+1} / \partial \tau_{t-1}^{(j)}.$$

Правые части зависят от  $y_{t+1}$  (т. е. от  $\sigma_{t+1}$ , а не от  $\sigma_t$ ,  $\sigma_{t-1}$ ), поэтому этот алгоритм нереализуем. В § 4.1 будет получен алгоритм адаптации для этого случая.

**1.3.2°. Сведение задачи синтеза адаптивного регулятора к построению конечно-сходящихся алгоритмов решения рекуррентных целевых неравенств.** Опишем кратко и в общих чертах один из методов синтеза алгоритма адаптации (метод рекуррентных целевых неравенств), который ниже будет часто использоваться. Метод этот обычно приводит также к алгоритмам вида (3.1), (3.2), но с явными значениями постоянных  $\gamma_t$  и с указанием условий сходимости алгоритмов. В случае же нереализуемости алгоритмов (3.1), (3.2) этот метод позволяет получить другие, реализуемые алгоритмы адаптации.

Рассмотрим, для определенности, случай системы (2.2), (2.3). Требуется построить адаптивный регулятор (2.8), (2.9). Как было указано выше, предполагается, что при известном варианте  $\xi$  решение задачи (т. е. управление, обеспечивающее выполнение ЦУ (2.7)) имеет вид  $u_t = \mathcal{U}[\sigma_t, \tau(\xi)]$ , где  $\tau_*(\xi) \in \mathbb{R}^N$ ; при этом  $\{\tau\} = \mathbb{R}^N$  и управление определяется формулой (2.8), получаемой заменой неизвестного  $\tau_*(\xi)$  на вектор  $\tau_t$  подстраиваемых параметров. Требуется найти алгоритм (2.9).

Предположим для простоты рассуждений, что уравнения (2.2), (2.3) имеют вид (2.4), (2.5) и что целевая функция в (2.7) не зависит от  $u_0^t$ :  $Q_t = \tilde{Q}_t(x_0^t)$ . Пусть  $\tau_0, \dots, \tau_{t-1}$  как-то определены. Считая временно  $\tau_t$  также заданным, найдем, как и выше, значение целевой функции в момент  $t+1$ . Обозначая его через  $Q_{t+1}(\tau_t)$ , имеем

$$Q_{t+1}(\tau_t) = \tilde{Q}_{t+1}(x_0^t, x_{t+1}),$$

где

$$x_{t+1} = \tilde{X}[x_t, \mathcal{U}(\sigma_t, \tau_t), t, \xi]. \quad (3.4)$$

Величины  $x_0^t$ ,  $x_t$ ,  $\sigma_t$  от  $\tau_t$  не зависят. Целевое условие в момент  $t$  выполнено, если

$$Q_{t+1}(\tau_t) \leq 0, \quad (3.5)$$

и не выполнено в противном случае. Вспоминая, что вектор  $\tau_t$  неизвестен, получаем, что (3.5) — неравенство для определения  $\tau_t$ . Если при любом  $\xi \in \Xi$  получаемые таким образом целевые неравенства (3.5) выполнены для всех достаточно больших  $t$ , то регулятор адаптивен в классе  $\Xi$ .

Важно отметить, что функции  $Q_{t+1}(\tau)$ , а значит, и неравенства (3.5) заранее не даны — они появляются последовательно, рекуррентно. Именно, неравенство (3.5) для момента  $t$  можно написать лишь после задания  $\tau_0, \dots, \tau_{t-1}$ ; после нахождения с учетом этого неравенства значения  $\tau_t$  получим возможность написать неравенство  $Q_{t+2}(\tau_{t+1}) \leq 0$  для определения  $\tau_{t+1}$  и т. д. Поэтому неравенства (3.5) называются *рекуррентными целевыми неравенствами* (РЦН). Алгоритм (2.9) определения  $\tau_{t+1}$  должен быть выбран таким, чтобы все эти неравенства были выполнены при всех достаточно больших  $t$ .

Оказывается, что если учесть специфику неравенств (3.5), то такие алгоритмы могут быть построены. Они обычно обладают тем свойством, что значение  $|\tau_t - \tau_*(\xi)|$  либо не изменяется, либо убывает при возрастании  $t$  и существует такое  $t_*(\xi)$ , что  $\tau_t$  «замораживается» при  $t \geq t_*(\xi)$  (т. е.  $\tau_t = \text{const}$  и  $Q_t(\tau_t) \leq 0$  при  $t \geq t_*(\xi)$ ). Эти алгоритмы поэтому называются *конечно-сходящимися алгоритмами* (КСА). (Подробнее идея построения КСА описана в § 2.1.) Эти алгоритмы в большинстве случаев имеют вид (3.4), где  $\gamma_t = 0$  при  $Q_{t+1}(\tau_t) \leq 0$  и  $\gamma_t > 0$  при  $Q_{t+1}(\tau_t) > 0$ . Задача построения КСА состоит в определении шага  $\gamma_t$  и условий, обеспечивающих конечную сходимость алгоритма.

Метод рекуррентных целевых неравенств состоит в применении КСА для решения задач адаптации. Последовательность действий обычно следующая. Левая часть (3.1) зависит от  $\xi$ , она должна быть выражена через  $\sigma_t, \sigma_{t+1}$  (см. (2.9)). Если это не удается для заданной ЦУ, то строится вспомогательная ЦУ (обеспечивающая выполнение заданной ЦУ) и соответственно другие РЦН и другой КСА так, чтобы это требование и условия сходимости КСА были выполнены.

Часто допустимым может быть не любое управление, а лишь удовлетворяющее некоторым дополнительным требованиям, например, требование  $|u_t| \leq C_u$  с заданной постоянной  $C_u$ . В этом случае вектор  $\tau_t$  должен удовлетворять (уже для всех  $t$ ) еще одному неравенству

$$\Psi_t(\tau_t) \geq 0. \quad (3.6)$$

(В приведенном примере  $\Psi_t(\tau_t) = C_u - |\mathcal{U}(\sigma_t, \tau_t)|$ .) Неравенства (3.6) также рекуррентны. Чтобы отличить

неравенства (3.5) и (3.6), будем называть (3.5) *условными*, а (3.6) *безусловными* целевыми неравенствами.

Случай нескольких условных и нескольких безусловных целевых неравенств тривиально сводится к рассматриваемому.

Выше были сделаны некоторые упрощающие предположения относительно целевой функции и вида уравнений (1.2), (2.3). В общем случае мы пришли бы к тем же задачам построения КСА для условных и безусловных рекуррентных целевых неравенств.

## ГЛАВА 2

### АЛГОРИТМЫ АДАПТАЦИИ

В соответствии с принятым в гл. 1 подходом к проблеме адаптации закон управления определен с точностью до конечного числа параметров, названных существенными. В качестве существенных параметров могут выступать некоторые из параметров объекта управления, и тогда коэффициенты регулятора предполагаются известными функциями этих параметров, либо непосредственно параметры регулятора. В любом случае значение существенных параметров неизвестно, и в законе управления вместо точных значений существенных параметров используются их «приближенные» значения, получаемые тем или иным способом. При таком подходе к задачам адаптации вопрос о получении «приближенных» значений неизвестных параметров становится центральным в проблеме адаптации. Поэтому процедуры их получения названы ниже алгоритмами адаптации.

В данной главе излагаются различные способы получения рекуррентных алгоритмов адаптации и изучаются условия их сходимости. Результаты этой главы используются при синтезе адаптивных систем.

Замкнутая система (объект, регулятор и адаптор) адаптивна, если выполнены условия сходимости алгоритма адаптации. Если в данной главе условия сходимости выступают как нечто данное извне, то при синтезе адаптивной системы основная задача состоит в таком выборе регулятора и адаптора, чтобы обеспечить условия сходимости. Таким образом, полное обоснование адаптивности замкнутой системы связано с дополнительным исследованием всей системы управления в целом и в первую очередь с анализом свойств адаптивных регуляторов. Методам синтеза оптимальных, неадаптивных регуляторов (при

известных значениях существенных параметров) посвящена гл. 3. И лишь в последующих главах проводимое в единстве исследование объекта, регулятора и адаптора позволит сформулировать окончательные результаты по синтезу адаптивных регуляторов.

### § 2.1. Конечно-сходящиеся алгоритмы решения рекуррентных неравенств

**2.1.1°. Основные определения. Принцип построения конечно-сходящихся алгоритмов.** В § 1.2 было показано, что во многих случаях задача синтеза адаптивного регулятора сводится к задаче построения процедур решения бесконечной системы рекуррентных целевых неравенств. Полезно сформулировать эту задачу независимо от ее происхождения.

Пусть  $\{\tau\}$  — евклидово (либо гильбертово) пространство, вектор  $\tau \in \{\tau\}$  назовем *вектором подстраиваемых параметров*. Пусть  $t = 0, 1, \dots$  — дискретное время,  $\varphi_t(\tau)$ ,  $\psi_t(\tau)$  — вещественные функции. Предположим, что имеется некоторое правило  $\mathfrak{A}$ , сопоставляющее каждому набору векторов  $[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{t-1}] = \tau_0^{t-1}$  две функции от  $\tau$ :

$$\varphi_t(\tau) = \varphi_t(\tau, \tau_0^{t-1}), \quad \psi_t(\tau) = \psi(\tau, \tau_0^{t-1}).$$

(Далее, для краткости, аргументы  $\tau_0^{t-1}$  у этих функций не выписываются.) Рассмотрим неравенства

$$\varphi_t(\tau) \geqslant 0 \quad (>0), \tag{1.1}$$

которые будем называть *условными неравенствами*, и неравенства

$$\psi_t(\tau) \geqslant 0 \quad (>0), \tag{1.2}$$

которые будем называть *безусловными неравенствами*.

В задачах адаптивного управления неравенства (1.1) порождаются целевым условием (целью управления); неравенства (1.2) описывают ограничения на возможные значения вектора  $\tau_t$  подстраиваемых параметров. Знаки  $\geqslant$  или  $>$  в (1.1), (1.2) в каждый момент могут быть любыми. Неравенства (1.2) иногда в дальнейшем будут отсутствовать.

Пусть заданы множество  $\{\tau\}^0$  начальных значений вектора  $\tau_0$  подстраиваемых параметров и правило

$$\tau_{t+1} = T_t(\tau_0^t, \phi_0^t, \psi_0^t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

сопоставляющее набору  $\tau_0^t$  и наборам функций

$$\phi_0^t = \{\phi_0(\tau), \dots, \phi_t(\tau)\}, \quad \psi_0^t = \{\psi_0(\tau), \dots, \psi_t(\tau)\}$$

значение  $\tau_{t+1}$ . Тогда для заданных  $\tau_0 \in \{\tau\}^0$ ,  $\phi_0(\tau)$ ,  $\psi_0(\tau)$  последовательно определяются  $\tau_1, \phi_1(\tau), \psi_1(\tau)$ ,  $\tau_2, \phi_2(\tau)$ ,  $\psi_2(\tau)$  и т. д. Заметим, что неравенства (1.1), (1.2) заранее для всех  $t$  не заданы, они появляются последовательно во времени после очередного «срабатывания» алгоритма (1.3). Подчеркивая это обстоятельство, будем называть (1.1) и (1.2) *рекуррентными неравенствами* (РН). Для разных алгоритмов (1.3) неравенства (1.1) и (1.2) будут, вообще говоря, разными. Отметим еще, что обычно правая часть (1.3) зависит лишь от  $\tau_t, \phi_t, \psi_t$ .

**Определение 2.1.1.** Правило (1.3) называется *конечно-сходящимся алгоритмом* (КСА) *решения рекуррентных неравенств — условных* (1.1) *и безусловных* (1.2), если для всех  $t$  выполнено (1.2) при  $\tau = \tau_t$  и если существует такой момент времени  $t_*$ , что для  $t \geq t_*$  выполняются неравенства (1.1) при  $\tau = \tau_t$  и векторы  $\tau_t$  не изменяются:  $\tau_{t_*} = \tau_{t_*+1} = \dots$ . Если при  $t \geq t_*$  имеет место сформулированное свойство, за возможным исключением постоянства векторов  $\tau_t$ , то (1.3) называется алгоритмом, *конечно-решающим* рекуррентные неравенства — *условные* (1.1) и *безусловные* (1.2). Число  $r$  моментов времени  $t \geq 1$ , для которых при  $\tau = \tau_t$  не выполняется (1.1), называется *числом ошибок (коррекций)* алгоритма.

Итак, КСА — алгоритм, доставляющий решение бесконечного числа заранее незаданных РН, причем на каждом шаге решение должно выбираться из области, определяемой также появляющимся РН.

Заметим, что КСА доставляет решение лишь для бесконечного «хвоста» условных РН — неравенства (1.1) при  $t < t_*$  могут остаться невыполнеными. Важно помнить, что РН (1.1), (1.2) могут зависеть от алгоритма (1.3): для разных алгоритмов они разные.

Может показаться, что задача построения КСА весьма сложна. Требуется за конечное время найти решение бесконечной системы неравенств, заранее неизвестных и

к тому же зависящих от того, какой алгоритм будет предложен для их решения. На самом деле, однако, многие (но далеко не все) задачи адаптации приводят к РН, для которых выполнен ряд дополнительных свойств, что дает возможность строить такие алгоритмы. Именно, в задачах адаптации, упомянутых в гл. 1 (они будут подробно изучаться в гл. 4—7), имеется регулятор, обеспечивающий поставленную ЦУ при некоторых значениях вектора  $\tau = \tau(\xi)$  подстраиваемых параметров. Это означает выполнение неравенств (1.1), (1.2) при всех  $t$  для  $\tau = \tau(\xi)$ . Более того, наличие определенной стабильности, присущей обычно практическим задачам, приводит к тому, что неравенства (1.1), (1.2) выполняются для всех  $t$  при значениях подстраиваемых параметров из некоторой окрестности вектора  $\tau(\xi)$ . Иначе, для  $\tau = \tau(\xi)$  эти неравенства выполнены «с запасом». Второе важное свойство, которое часто (но не всегда) имеет место,— это выпуклость областей в пространстве  $\{\tau\}$ , определяемых РН (1.1), (1.2). Указанные два обстоятельства позволяют осуществить следующую идею построения КСА. Пусть, для упрощения ситуации, безусловные неравенства отсутствуют.

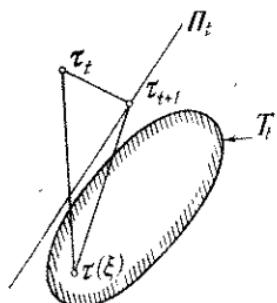


Рис. 2.4.

Обозначим через  $T_t$  выпуклую область, определяемую неравенством (1.1). Если (1.1) выполняется для  $\tau = \tau_t$ , т. е.  $\tau_t \in T_t$ , то полагаем  $\tau_{t+1} = \tau_t$ . Пусть (1.1) не выполнено для  $\tau = \tau_t$ . Тогда существует гиперплоскость  $\Pi_t$  (рис. 2.4), отделяющая вектор  $\tau_t$  от выпуклого множества  $T_t$ . Выберем в качестве  $\tau_{t+1}$  проекцию (ортогональную) вектора  $\tau_t$  на гиперплоскость  $\Pi_t$ . Вектор  $\tau_{t+1}$  будет обладать следующим важным свойством: он будет ближе к неизвестному нам вектору  $\tau(\xi)$ , чем  $\tau_t$ . (Напомним, что по предположению  $\tau(\xi) \in T_t$  при всех  $t$ .) Более того, легко показать, что из сделанных предположений следует существование такого не зависящего от  $t$  числа  $\delta > 0$ , что

$$|\tau_{t+1} - \tau(\xi)|^2 \leq |\tau_t - \tau(\xi)|^2 - \delta. \quad (1.4)$$

Итак, построенный алгоритм будет обладать свойством (1.4). Отсюда немедленно следует его конечная сходимость.

Действительно, каждый раз, когда не выполнено (1.1), справедливо (1.4), т. е. величина  $V(\tau_t) = |\tau_t - \tau(\xi)|^2$  убывает по крайней мере на  $\delta$ . Когда неравенство (1.1) выполнено, то  $V(\tau_t)$  не изменяется. Поэтому число  $r$  ошибок алгоритма конечно и  $r \leq V(\tau_0)\delta^{-1}$ .

Гиперплоскость  $\Pi_t$  можно строить по-разному: при этом получаются различные КСА. Вместо функции  $V(\tau) = |\tau - \tau(\xi)|^2$  можно брать любую неотрицательную функцию; важно лишь, чтобы для некоторого  $\delta > 0$  выполнялось \*)

$$V(\tau_{t+1}) \leq V(\tau_t) - \delta \text{ при } \varphi_t(\tau_t) < 0 \quad (\leq 0). \quad (1.5)$$

**Определение 2.1.2.** Пусть для (1.3) выполнено  $\tau_{t+1} = \tau_t$  при  $\varphi_t(\tau_t) \geq 0$  ( $> 0$ ). Пусть для любых  $\tau_0, \dots, \tau_t$ ,  $\tau_{t+1}$ , определяемого из (1.3), выполнено (1.5), где  $V(\tau) \geq 0$ . Функция  $V(\tau)$  с указанными свойствами называется *функцией Ляпунова конечно-сходящегося алгоритма* (1.3).

Отметим одно важное обстоятельство, связанное с применением КСА. В гл. 1 было показано, что задачи адаптивного управления сводятся к РН (1.1), (1.2), левые части которых зависят от  $\xi \in \{\xi\}$  и для которых в алгоритме (1.3) правая часть может зависеть от сенсоров, но не должна зависеть от  $\xi$ . Это дополнительное требование, означающее возможность реализации КСА, приводит к необходимости иметь разные КСА для одной и той же системы РН (1.1), (1.2) с разными зависимостями  $\varphi_t, \psi_t$  от сенсоров и от  $\xi$ .

**2.1.2°. Суперпозиция конечно-сходящихся алгоритмов.** Предположим вначале, что условные РН в момент времени  $t$  имеют вид

$$\varphi_t^{(1)}(\tau) \geq 0 \quad \text{и} \quad \varphi_t^{(2)}(\tau) \geq 0. \quad (1.6)$$

(Они равносильны (1.1) с  $\varphi_t(\tau) = \min[\varphi_t^{(1)}(\tau), \varphi_t^{(2)}(\tau)]$  и со знаком  $\geq$ .) Пусть  $\tau_{t+1} = T^{(1)}(\tau_t)$  — КСА для решения условных неравенств  $\varphi_t^{(1)}(\tau) \geq 0$ , а  $\tau_{t+1} = T^{(2)}(\tau_t)$  — то же для  $\varphi_t^{(2)}(\tau) \geq 0$ . (Для простоты записи опущены

\*) В (1.5) и (1.1) знаки неравенств обратные: если (1.1) есть  $\varphi_t(\tau) > 0$ , то в (1.5) «... при  $\varphi_t(\tau) \leq 0$ ». Вместо (1.5) достаточно, очевидно, чтобы выполнялось  $V(\tau_{t+1}) - V(\tau_t) \leq -\delta_t$  при  $\varphi_t(\tau_t) < 0$  ( $\leq 0$ ),  $\delta_t \geq 0$ , причем ряд  $\sum_t \delta_t$  — расходящийся.

аргументы, означающие зависимости от  $\varphi_0^{(j)}, \dots, \varphi_t^{(j)}$  и  $\tau_0^t$ . Заметим, что в РН  $\varphi_t^{(1)}(\tau) \geq 0$  и в (1.6) функции  $\varphi_t^{(1)}(\tau)$  могут быть разными, поскольку разными могут быть значения  $\tau_0^t$ .) Пусть КСА  $\tau_{t+1} = T^{(1)}(\tau_t)$ ,  $\tau_{t+1} = T^{(2)}(\tau_t)$  имеют одну и ту же функцию Ляпунова  $V(\tau)$ . Построим новый алгоритм вида (1.3) для решения РН (1.6): для заданного  $\tau_t$  определим  $\tau'_t = T^{(1)}(\tau_t)$ , а затем найдем  $\tau_{t+1} = T^{(2)}(\tau'_t)$ . Этот алгоритм называется *суперпозицией* алгоритмов  $T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$  и обозначается так:  $\tau_{t+1} = (T^{(2)} * T^{(1)})(\tau_t)$ . Из определения функции Ляпунова следует, что если хотя бы одно из неравенств (1.6) не выполнено, то  $V(\tau_{t+1}) \leq V(\tau_t) - \delta$ ; если же оба неравенства (1.6) выполнены для  $\tau = \tau_t$ , то  $\tau_{t+1} = \tau_t$ ,  $V(\tau_{t+1}) = V(\tau_t)$ . Следовательно, суперпозиция указанных конечно-сходящихся алгоритмов с общей функцией Ляпунова есть КСА для неравенств (1.6); число ошибок для суперпозиции алгоритмов не превосходит наибольшего из чисел ошибок для каждого из входящих в суперпозицию алгоритмов. Совершенно аналогично рассматривается случай, когда в каждый момент времени имеются не два, а несколько неравенств; суперпозиция соответствующих КСА с общей функцией Ляпунова будет КСА для этих неравенств.

Описанная ситуация имеет место в задачах адаптивного управления с несколькими критериями (например, в случае, когда требуется, чтобы каждая из нескольких выходных переменных «по возможности» меньше отличалась от своего заданного значения).

Заметим, что если имеются два разных КСА для решения РН  $\varphi_t(\tau) \geq 0$  с общей функцией Ляпунова, то их суперпозиция — снова КСА для этих неравенств. (Это следует из изложенного, если принять  $\varphi_t^{(1)}(\tau) = \varphi_t^{(2)}(\tau)$ .) Вместо одного из КСА можно брать любой алгоритм, не увеличивающий значение  $V(\tau_t)$ . В частности, для  $V(\tau) = |\tau - \tau(\xi)|^2$  можно построить суперпозицию какого-либо КСА с алгоритмом проектирования на выпуклое множество, определяемое неравенством  $\varphi_t(\tau) \geq 0$ . Как обычно, *алгоритмом проектирования на выпуклое множество*  $G \subset \{\tau\}$  называется операция  $P = P_G$ , определенная свойством

$$|P_G \tau - \tau| = \inf_{\tau' \in G} |\tau - \tau'|.$$

Из этого свойства и из выпуклости множества  $G$  следует, что для  $\tau(\xi) \in G$  справедливо неравенство

$$|P_G \tau_t - \tau(\xi)| \leq |\tau_t - \tau(\xi)|.$$

Это и означает, что операция проектирования не увеличивает значения функции  $V(\tau) = |\tau - \tau(\xi)|^2$ .

Используя указанный прием, можно строить КСА для решения условных РН (1.1) и безусловных РН (1.2), если только (1.1) и (1.2) порождают выпуклые множества. Именно, пусть известно, что вектор  $\tau(\xi)$  лежит в пересечении множеств, определяемых неравенствами (1.1), (1.2), и имеется КСА для решения неравенств (1.1) с функцией Ляпунова  $V(\tau) = |\tau - \tau(\xi)|^2$ . Тогда суперпозиция этого КСА с алгоритмом проектирования на пересечение множеств, определяемых неравенствами (1.1), (1.2), будет искомым КСА.

Указанный прием позволяет учитывать дополнительную информацию о неизвестном значении  $\tau(\xi)$ .

Так, например, пусть имеются лишь условные неравенства (1.1) и известно, что  $\tau(\xi) \in G$ , где  $G$  — некоторое выпуклое множество. Пусть  $\tau_{t+1} = T_t(\tau_t)$  — КСА, и этот КСА имеет функцию Ляпунова  $V(\tau) = |\tau - \tau(\xi)|^2$ . Тогда  $\tau_{t+1} = (P_G * T_t)(\tau_t)$  — также КСА для решения неравенств (1.1). (Здесь  $P_G$ , как и раньше, — операция проектирования на  $G$ .) Последнее утверждение следует из сказанного ранее — достаточно взять в качестве (1.2) не зависящее от  $t$  неравенство, равносильное условию  $\tau_t \in G$ .

Пусть имеется КСА решения условных РН  $\varphi_t(\tau) \geq 0$ , обладающий свойством  $\tau_{t+1} = \tau_t$ , если  $\varphi_t(\tau_t) \geq 0$ , и имеющий функцию Ляпунова. Произвольный такой алгоритм будем обозначать так:  $\tau_{t+1} = \langle \varphi_t(\tau) \geq 0 \rangle(\tau_t)$ .

Пусть для каждого  $t$  условные РН имеют вид  $\varphi_t^{(1)}(\tau) \geq 0$  и  $\varphi_t^{(2)}(\tau) \geq 0$ . Суперпозицию алгоритмов  $\tau_{t+1} = \langle \varphi_t^{(1)}(\tau) \geq 0 \rangle(\tau_t)$  и  $\tau_{t+1} = \langle \varphi_t^{(2)}(\tau) \geq 0 \rangle(\tau_t)$  будем обозначать

$$\tau_{t+1} = \langle \varphi_t^{(2)}(\tau) \geq 0 \rangle \langle \varphi_t^{(1)}(\tau) \geq 0 \rangle(\tau_t). \quad (1.7)$$

Итак, (1.7) означает алгоритм

$$\tau'_t = \langle \varphi^{(1)}(\tau) \geq 0 \rangle(\tau_t), \quad \tau_{t+1} = \langle \varphi^{(2)}(\tau) \geq 0 \rangle(\tau'_t).$$

Аналогично обозначается суперпозиция трех и более КСА. Будем также использовать знак произведения для

суперпозиции:

$$\tau_{t+1} = \prod_{j=1}^k \langle \varphi_t^{(j)}(\tau) \geq 0 \rangle(\tau_t). \quad (1.8)$$

При этом порядок сомножителей в суперпозиции берется от  $j = 1$  до  $j = k$  справа налево. Так, (1.7) совпадает с (1.8) для  $k = 2$ .

Перейдем к описанию конкретных КСА. Начнем с наиболее употребительных из них, относящихся к случаю, когда неравенства (1.1), (1.2) «вырезают» в пространстве  $\{\tau\}$  «полоски», т. е. области, заключенные между параллельными гиперплоскостями. Такой вид принимают обычно целевые неравенства (см. § 1.4) в случае, когда ЦУ состоит в требовании, чтобы уклонение выходных величин от некоторых номинальных не превосходило заданных пределов.

**2.1.3°. Алгоритм «Полоска-1».** Рассмотрим следующую систему условных РН в евклидовом (либо гильбертовом) пространстве  $\{\tau\}$ :

$$| (a_t, \tau) + \alpha_t | \leq \varepsilon_t \quad (< \varepsilon_t). \quad (1.9)$$

Здесь  $t = 0, 1, 2, \dots$ ;  $a_t \in \{\tau\}$ ;  $(a_t, \tau)$  — скалярное произведение векторов  $a_t$  и  $\tau$ ;  $\alpha_t, \varepsilon_t$  — вещественные числа. Запись  $(< \varepsilon_t)$  в (1.9) означает, что вместо  $| \dots | \leq \varepsilon_t$  для некоторых  $t$  (в частности, для всех  $t$ ) может быть  $| \dots | < \varepsilon_t$ . Относящиеся к этому случаю изменения также будут записаны в скобках (...).

Неравенство (1.9) для фиксированного  $t$  определяет полосу между двумя параллельными плоскостями в пространстве  $\{\tau\}$ . Полосы (1.9) по смыслу решаемой задачи могут быть заранее и неизвестны: предполагается заданным некоторый алгоритм  $\mathfrak{A}$  доставляющий по значениям  $\tau_0, \dots, \tau_t$  вектор  $a_t \in \{\tau\}$  и числа  $\alpha_t, \varepsilon_t$ .

Будем предполагать выполнеными следующие условия (этим условиям должен удовлетворять алгоритм  $\mathfrak{A}$ ):

(а) существует такое  $\varepsilon > 0$ , что для любого  $t \geq 0$

$$\varepsilon_t \geq \varepsilon | a_t |; \quad (1.10)$$

(б) существуют вектор  $\tau_*$  и число  $\rho$  ( $0 \leq \rho < 1$ ), такие, что при всех  $t \geq 0$  выполняется неравенство

$$| (a_t, \tau_*) + \alpha_t | \leq \rho \varepsilon_t. \quad (1.11)$$

Условие (а) означает, что ширина полос (1.9) заведомо не меньше  $2\epsilon$ . Условие (б) означает, что все полосы (1.9) содержат некоторый шар с центром в точке  $\tau_*$ .

**Теорема 2.1.1.** Пусть выполняются условия (а) и (б). Обозначим

$$\eta_t = (a_t, \tau_t) + \alpha_t. \quad (1.12)$$

Пусть  $\kappa$  — произвольное число,  $\kappa > \min(1, 2\rho)$ . Для произвольного  $\tau_0$  следующий алгоритм — конечно-сходящийся алгоритм решения условных неравенств (1.9):

$$\begin{aligned} \tau_{t+1} = \\ = \begin{cases} \tau_t, & \text{если } |\eta_t| \leq \epsilon_t \quad (\|\eta_t\| < \epsilon_t), \\ \tau_t - \eta_t a_t |a_t|^{-2}, & \text{если } |\eta_t| \geq \kappa \epsilon_t, \\ \tau_t - (\eta_t - \rho \epsilon_t \operatorname{sign} \eta_t) a_t |a_t|^{-2}, & \text{если } \epsilon_t < |\eta_t| < \kappa \epsilon_t. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Для числа  $r^0$  ошибок алгоритма справедлива оценка

$$r^0 \leq |\tau_0 - \tau_*|^2 \epsilon^{-2} \delta^{-1}, \text{ где } \delta = \min[\kappa(\kappa - 2\rho), (1 - \rho)^2]. \quad (1.14)$$

Алгоритм имеет функцию Ляпунова  $V(\tau) = |\tau - \tau_*|^2$ .

Заметим, что условие в скобках в (1.13) относится к случаю, когда в (1.9) знак  $<$ .

Геометрическая интерпретация формул (1.13) очень проста (рис. 2.2; на этом рисунке через  $\eta$  обозначено  $\eta = (a_t, \tau) + \alpha_t$ ). Если точка  $\tau_t$  находится в полосе (1.9), то  $\tau_{t+1} = \tau_t$ . Если  $\tau_t$  находится «далеко» от полосы (1.9) (именно, если  $\tau_t$  лежит вне полосы  $|a_t, \tau_t| + \alpha_t| < \kappa \epsilon_t$ ), то точка  $\tau_{t+1}$  получается из  $\tau_t$  проектированием на «среднюю плоскость» полосы (1.9), т. е. на плоскость  $(a_t, \tau) + \alpha_t = 0$ . Если же  $\tau_t$  лежит «близко» к полосе (1.9)

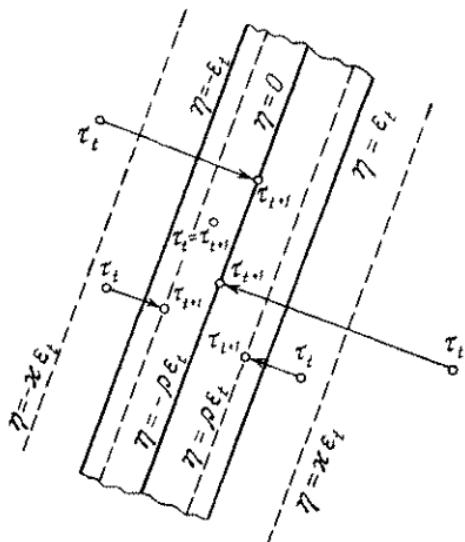


Рис. 2.2.

(именно, если  $\varepsilon_t < |\eta_t| < \kappa \varepsilon_t$ ), то точка  $\tau_{t+1}$  получается проектированием  $\tau_t$  на ближайшую из плоскостей  $(a_t, \tau) + \alpha_t = \pm \rho \varepsilon_t$ .

**З а м е ч а н и я.** 1. В силу алгоритма вектор  $\tau_{t+1}$  всегда лежит в полосе (1.9). Таким образом, алгоритм (1.13) можно применять для решения безусловных РН, если только неравенство (1.9) относится к моменту времени  $t+1$ , т. е. если в соответствии с обозначениями п. 2.1.1° неравенство (1.9) имеет вид  $\Psi_{t+1}(\tau) > 0$ .

2. В теореме 2.1.1 можно взять  $\kappa = \infty$ , тогда второй случай в (1.13) будет всегда отсутствовать и алгоритм (1.13) примет вид

$$\begin{aligned} \tau_{t+1} = \\ = \begin{cases} \tau_t, & \text{если } |\eta_t| \leq \varepsilon_t \quad (< \varepsilon_t), \\ \tau_t - (\eta_t - \rho \varepsilon_t \operatorname{sign} \eta_t) |a_t|^{-2} a_t, & \text{если } |\eta_t| > \varepsilon_t \quad (\geq \varepsilon_t). \end{cases} \end{aligned} \quad (1.15)$$

3. Если  $\rho < 1/2$ , то можно взять  $\kappa < 1$ ; в этом случае алгоритм (1.13) приобретает особенно простой вид

$$\tau_{t+1} = \begin{cases} \tau_t, & \text{если } |\eta_t| \leq \varepsilon_t \quad (< \varepsilon_t), \\ \tau_t - \eta_t |a_t|^{-2} a_t, & \text{если } |\eta_t| > \varepsilon_t \quad (\geq \varepsilon_t). \end{cases} \quad (1.16)$$

Геометрическая интерпретация алгоритма (1.16): значение  $\tau_{t+1}$  совпадает с  $\tau_t$ , если выполнено (1.9), и получается из  $\tau_t$  проектированием на плоскость  $(a_t, \tau) + \alpha_t = 0$  в противном случае.

4. Алгоритм предполагает знание числа  $\rho$ , определяющего «запас» выполнения неравенств для некоторого  $\tau = \tau_*$ . Известны более сложные КСА для случая, когда число  $\rho$  неизвестно (с худшей оценкой для числа ошибок).

5. Напомним, что в соответствии с определением § 1.3 неравенства (1.9) вообще заранее не даны. Тем не менее алгоритм  $\mathcal{A}$ , доставляющий значения  $a_t, \alpha_t, \varepsilon_t$ , может быть и таким, что эти значения зависят лишь от  $t$  — в этом случае неравенства (1.9) по существу заданы заранее; каждый из алгоритмов (1.13), (1.15), (1.16) доставит через конечное число шагов решение всего бесконечного «хвоста» этих неравенств. В особенно простом случае неравенства (1.9) получаются циклическим повторением заданной конечной системы неравенств (т. е.  $a_{t+T} = a_t, \alpha_{t+T} = \alpha_t, \varepsilon_{t+T} = \varepsilon_t$  для некоторого натурального  $T$ ). Таким

образом, каждый из алгоритмов (1.13), (1.15), (1.16) может быть использован для решения конечной заданной системы неравенств (1.9).

Иногда полезно для решения РН (1.9) иметь КСА, содержащий некоторый свободный параметр  $\mu_t$ , который подбирается для каждого  $t$  так, чтобы были удовлетворены некоторые дополнительные условия. Следующая теорема формулирует один из таких алгоритмов.

**Теорема 2.1.1а.** Пусть выполнены условия (а), (б) и  $\mu_t$  — произвольные числа в интервале  $0 < \mu' \leq \mu_t \leq \mu'' < 2$ . Обозначим через  $\eta_t$  величину (1.12). Для произвольного  $\tau_0$  алгоритм

$$\begin{aligned} \tau_{t+1} = & \\ = & \begin{cases} \tau_t, & \text{если } |\eta_t| \leq \varepsilon_t (< \varepsilon_t), \\ \tau_t - \mu_t (\eta_t - \rho \varepsilon_t \operatorname{sign} \eta_t) |a_t|^{-2} a_t, & \text{если } |\eta_t| > \varepsilon_t (\geq \varepsilon_t), \end{cases} \end{aligned} \quad (1.17)$$

является конечно-сходящимся алгоритмом решения условных РН (1.9). Для числа ошибок  $r^0$  алгоритма справедлива оценка

$$r^0 \leq |\tau_0 - \tau_*|^2 \varepsilon^{-2} (1 - \rho)^{-2} [\mu' (2 - \mu'')]^{-1}.$$

Заметим, что для  $\mu' = \mu'' = \mu_t = 1$  алгоритм (1.17) совпадает с (1.15) (и с (1.13) для  $\kappa = \infty$ ).

Каждый из алгоритмов (1.13), (1.15) — (1.17) (они различаются лишь выбором параметров) будем называть алгоритмом «Полоска-1» и в соответствии со сказанным ранее будем обозначать так:

$$\tau_{t+1} = \langle |(a_t, \tau) + \alpha_t| \leq \varepsilon_t \rangle_1(\tau_t).$$

(Здесь для определенности взят случай, когда все РН (1.9) нестрогие. Если все они строгие, то используются аналогичные обозначения со знаком  $<$  вместо  $\leq$ .)

**2.1.4°. Алгоритм «Полоска-2».** Пусть условные РН имеют вид

$$|\beta_t(a_t, \tau) + \alpha_t| \leq \varepsilon_t (< \varepsilon_t), \quad t = 0, 1, \dots \quad (1.18)$$

Здесь  $\beta_t$  — числа, остальные величины (и условие  $< \varepsilon_t$  в скобках) имеют прежний смысл. Неравенства (1.18) можно, конечно, записать в виде (1.9), однако теперь будем предполагать, что числа  $\beta_t$  неизвестны (т. е., точнее,  $\beta_t$  не являются лишь функцией сенсора  $\sigma_t$ , а зависят

еще от  $\xi \in \{\xi\}$ ; см. § 1.2). Поэтому алгоритмы «Полоска-1» нельзя использовать для подстройки параметров. Приведем алгоритм, пригодный для этого случая. Будем предполагать, что

(а) существуют такие числа  $C_\beta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , что

$$0 < |\beta_t| \leq C_\beta, \quad \varepsilon_t \geq \varepsilon |a_t|; \quad (1.19)$$

(б) существуют такие вектор  $\tau_* \in \{\tau\}$  и число  $\rho$  ( $0 \leq \rho < 1$ ), что при  $\tau = \tau_*$  РН (1.18) выполнены «с запасом»:

$$|\beta_t(a_t, \tau_*) + \alpha_t| \leq \rho \varepsilon_t. \quad (1.20)$$

Будем считать известными (лишь после задания  $\tau_0, \dots, \tau_t$ ) величины

$$\begin{aligned} a_t, \operatorname{sign} \beta_t, \eta_t &= \beta_t(a_t, \tau_t) + \alpha_t, \\ v_t &= \operatorname{sign}_t(\varepsilon_t - |\eta_t|), \quad C_\beta, \rho. \end{aligned} \quad (1.21)$$

В (1.21) символ  $\operatorname{sign}_t \zeta$  определяется в соответствии с тем, каким из неравенств, ( $\leq \varepsilon_t$ ) или ( $< \varepsilon_t$ ), является РН (1.18):

$$\operatorname{sign}_t \zeta = \begin{cases} 1, & \text{если } \zeta \geq 0 \quad (\zeta > 0), \\ -1, & \text{если } \zeta < 0 \quad (\zeta \leq 0). \end{cases} \quad (1.22)$$

(Так как знак  $\leq$  или  $<$  в неравенствах может быть различным при различных  $t$ , мы пишем  $\operatorname{sign}_t \zeta$  вместо  $\operatorname{sign} \zeta$ .)

**Теорема 2.1.2.** Пусть выполнены условия (а) и (б). Пусть  $\mu'$ ,  $\mu''$ ,  $\mu_t$  — произвольные числа, удовлетворяющие соотношениям

$$0 < \mu' \leq \mu_t \leq \mu'' < 2(1 - \rho) C_\beta^{-1}. \quad (1.23)$$

Для любого  $\tau_0$  следующий алгоритм — КСА решения РН (1.18):

$$\tau_{t+1} = \begin{cases} \tau_t, & \text{если } v_t = 1, \\ \tau_t - \mu_t \eta_t (\operatorname{sign}_t \beta_t) |a_t|^{-2} a_t, & \text{если } v_t = -1. \end{cases} \quad (1.24)$$

Для числа  $r^0$  ошибок алгоритма справедлива оценка

$$r^0 \leq |\tau_0 - \tau_*|^2 C_\beta \{ \varepsilon^2 \mu' [2(1 - \rho) - C_\beta \mu''] \}^{-1}. \quad (1.25)$$

Алгоритм (1.24) имеет функцию Ляпунова

$$V(\tau) = |\tau - \tau_*|^2.$$

Заметим, что правая часть в (1.25) минимальна при  $\mu' = \mu'' = (1 - \rho)C_\beta^{-1}$ . Таким образом, для  $\mu_t = (1 - \rho)C_\beta^{-1}$  получаем наивыгоднейшую оценку

$$r^0 \leq \{ |\tau_0 - \tau_*| C_\beta (1 - \rho)^{-1} \varepsilon^{-1} \}^2. \quad (1.26)$$

Алгоритм (1.24) будем записывать в виде  $\tau_{t+1} = \langle |\beta_t(a_t, \tau) + \alpha_t| \leq \varepsilon_t \rangle_2(\tau_t)$  и называть *алгоритмом «Полоска-2»* (вместо  $\leq \varepsilon_t$  может быть  $\langle \varepsilon_t \rangle$ ). При этом подразумевается задание значений  $\mu_t$ .

**З а м е ч а н и я.** 1. Пусть  $\mu''C_\beta < 1$  (что может быть лишь для  $\rho < 1/2$ ). Тогда для  $\tau = \tau_{t+1}$  неравенство (1.18) выполнено. Таким образом, если  $\mu''C_\beta < 1$ , то алгоритм (1.24) можно применить для решения безусловных неравенств (1.18). (При этом (1.18) совпадают не с неравенствами  $\psi_t(\tau) \geq 0$  ( $> 0$ ), а с неравенствами  $\psi_{t+1}(\tau) \geq 0$  ( $> 0$ ), для  $\tau_{t+1}$ .)

2. В выше предполагалось, что известны величины  $\text{sign}_t \beta_t$ . Случай, когда эти величины неизвестны, представляет большие трудности. Опишем КСА для случая, когда  $\beta_t = \beta = \text{const} \neq 0$ , знак  $\beta$  неизвестен, но известна ограниченная область  $G$ , содержащая неизвестный вектор  $\tau_*$ . (Последнее предположение практически мало ограничительно.) Следующее предложение легко проверяется: если в (1.24)  $\text{sign}_t \beta_t = \text{sign } \beta$  заменить на  $(-\text{sign } \beta)$ , то при  $v_t = -1$  будет выполнено  $|\tau_{t+1} - \tau_*|^2 \geq |\tau_t - \tau_*|^2 + \delta$ ,  $\delta > 0$ . Пусть выполнены условия теоремы 2.1.2. Искомый алгоритм совпадает с (1.24) с заменой  $\text{sign}_t \beta_t$  параметром  $\gamma_t$ , принимающим значения  $+1$  или  $-1$  и интерпретируемым как гипотеза о знаке  $\beta$ . Для  $t = 0$  берется  $\tau_0 \in G$ ,  $\gamma_0 = 1$  (или  $\gamma_0 = -1$ ). Для  $t = 0$  значение  $\gamma_t$  не изменяется, пока выполнено  $\tau_t \in G$ . Если же в некоторый момент  $\tau_t \notin G$ , то  $\gamma_{t+1} = -\gamma_t$  и затем  $\gamma_t$  не изменяется. Очевидно, этот алгоритм — КСА решения условных РН (1.18) с  $\beta_t = \beta$ . Действительно, если  $\gamma_0 = \text{sign } \beta$  (гипотеза о знаке  $\beta$  верная), то (1.24) — КСА по теореме 2.1.2. Если же  $\gamma_0 = -\text{sign } \beta$ , то величина  $|\tau_t - \tau_*|^2$  возрастает, пока  $\tau_t \in G$ ; в силу ограниченности  $G$  найдется такое  $t_1$ , что  $\tau_{t_1} \notin G$ ,  $\gamma_t = \text{sign } \beta$  при  $t > t_1$ . Для  $t \geq t_1$  мы находимся в условиях теоремы 2.1.2. Итак, описанный алгоритм — КСА. Легко оценить число  $r^0$  ошибок этого алгоритма.

**2.1.5°. Некоторые конечно-решающие алгоритмы.**

В дальнейшем встретятся РН (1.18) и (1.9), для которых не выполнено соответственно последнее соотношение (1.19) или соотношение (1.10). Это означает, что ширина полосок (1.18) (полосок (1.9)) может быть сколь угодно малой. В этом случае может нарушаться конечно-сходимость алгоритмов «Полоска-2» («Полоска-1»). Естественно, однако, ожидать, что эти алгоритмы будут конечно-решающими алгоритмами для РН, полученных из (1.18) (из (1.9)) «расширением», причем таким, что ширина расширенных полосок уже отделена от нуля равномерно по  $t$ . (Напомним, что конечно-решающий алгоритм отличается от конечно-сходящегося алгоритма тем, что не требуется постоянства векторов  $\tau_t$ , начиная с некоторого момента времени; см. определение 2.1.1.) Нижеследующие теоремы показывают, что это действительно так.

**Теорема 2.1.3.** *Рассмотрим условные РН*

$$| (a_t, \tau) + \alpha_t | \leq \varepsilon'_t, \quad (1.27)$$

где  $\varepsilon'_t \geq \varepsilon^0 | a_t |$ ,  $\varepsilon^0 > 0$ . Пусть выполнено предположение (б) п. 2.1.3° и величина  $\eta_t$  определена соотношением (1.12). Для произвольного  $\tau_0$  любой из алгоритмов (1.13) (где  $\kappa > \min(1, 2\rho)$ ), (1.15), (1.16) (при  $\rho < 1/2$ ) и (1.17) (где  $0 < \mu' \leq \mu_t \leq \mu'' < 2$ ) является конечно-решающим алгоритмом для неравенств (1.27), и  $|\tau_{t+1} - \tau_t| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.1.4.** *Рассмотрим условные РН*

$$| \beta_t (a_t, \tau) + \alpha_t | \leq \varepsilon'_t, \quad (1.28)$$

где  $\varepsilon'_t \geq \varepsilon^0 | a_t |$ ,  $\varepsilon^0 > 0$ ,  $0 < |\beta_t| \leq C_\beta$ . Пусть выполнено предположение (б) п. 2.1.4° и величины  $\eta_t$ ,  $v_t$  определены соотношениями (1.21). Алгоритм (1.24) является конечно-решающим алгоритмом для неравенств (1.28), и  $|\tau_{t+1} - \tau_t| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Заметим, что согласно алгоритмам этих теорем значение  $\tau_t$  может изменяться и в том случае, когда в момент времени  $t$  соответствующее неравенство (1.27) или (1.28) (для  $\tau = \tau_t$ ) не нарушается. (В случае же, когда алгоритм (1.24) применяется к (1.18), значение  $\tau_t$  не изменяется, если неравенство (1.18) в момент времени  $t$  не нарушается.)

**З а м е ч а н и е.** Пусть  $\varepsilon_t \geq \varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  — произвольное число. В теоремах 2.1.3, 2.1.4 можно брать  $\varepsilon'_t = \varepsilon_t (1 + \delta |a_t|^2)^{1/2}$  или  $\varepsilon_t = \varepsilon_t (1 + \delta |a_t|)$ .

**2.1.6°.** Конечно-сходящиеся алгоритмы решения рекуррентных линейных неравенств. Рассмотрим условные РН

$$(a_t, \tau) > 0 \quad (\geq 0). \quad (1.29)$$

Предположим, что существует вектор  $\tau_*$ , для которого неравенства (1.29) выполнены «в усиленном смысле»:

$$(a_t, \tau_*) \geq \varepsilon_* > 0. \quad (1.30)$$

**Теорема 2.1.5.** Пусть  $\rho', \rho'', \rho_t, \beta_t$  — произвольные числа, удовлетворяющие соотношениям  $0 < \rho' \leq \rho_t \leq \rho''$ ,  $\rho_t \geq 0$ , и в (1.29)  $|a_t| \leq C_a$ . Для любого  $\tau_0$  следующий алгоритм является КСА решения условных РН (1.29):

$$\tau_{t+1} = \begin{cases} \tau_t, & \text{если } (\tau_t, a_t) > 0 \quad (\geq 0), \\ \tau_t + \zeta_t a_t, & \text{если } (\tau_t, a_t) \leq 0 \quad (< 0). \end{cases} \quad (1.31)$$

Здесь  $\zeta_t = \rho_t - \beta_t (\tau_t, a_t) |a_t|^{-2}$ . При  $\tau_0 = 0$  для числа ошибок алгоритма справедлива оценка  $r^0 \leq |\tau_*|^2 C_a^2 \rho'' \times [\varepsilon_*^2 \rho']^{-1}$ . Алгоритм (1.31) имеет функцию Ляпунова

$$V(\tau) = |\tau - v\tau_*|^2, \text{ где } v > v_0 \stackrel{\text{def}}{=} C_a^2 \rho'' (2\varepsilon_*)^{-1}. \quad (1.32)$$

Предположим теперь, что условные РН имеют вид

$$(a_t, \tau) + \alpha_t > 0 \quad (\geq 0). \quad (1.33)$$

Пусть неравенства (1.33) выполнены в «усиленном смысле»: существуют вектор  $\tau_*$  и число  $\varepsilon_*$  такие, что

$$(a_t, \tau_*) + \alpha_t \geq \varepsilon_* > 0. \quad (1.34)$$

**Теорема 2.1.6.** Предположим, что  $|a_t| \leq C_a$ . Пусть  $\rho_t > 0$ ,  $\beta_t$  — произвольные числа, удовлетворяющие условиям:  $\rho_t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $\rho_1 + \rho_2 + \dots = \infty$ ,  $0 \leq \beta_t \leq 2$ . Пусть  $\eta_t = (a_t, \tau_t) + \alpha_t$ ,  $\zeta_t = \rho_t \eta_t |a_t|^{-2}$ . Для любого  $\tau_0$  и  $r(0) = 0$  следующий алгоритм является КСА решения условных РН (1.33):

$$\begin{aligned} \tau_{t+1} &= \tau_t, \quad r(t+1) = r(t), \quad \text{если } \eta_t > 0 \quad (\geq 0), \\ \tau_{t+1} &= \tau_t + \zeta_t a_t, \quad r(t+1) = r(t) + 1, \quad (1.35) \\ &\quad \text{если } \eta_t \leq 0 \quad (< 0). \end{aligned}$$

Здесь  $r(t)$  — число ошибок алгоритма (1.35) к моменту времени  $t$ .

**Теорема 2.1.6а.** Пусть  $|a_t|^2 + \alpha_t^2 \leq C_{\alpha\alpha}$  и  $\eta_t = (a_t, \tau_t) + \alpha_t$ . Следующий алгоритм является КСА решения условных РН (1.33) для любых  $\tau_0$  и  $\rho_0 > 0$ :

$$\begin{aligned} \rho_{t+1} &= \rho_t, \quad \tau_{t+1} = \tau_t, \text{ если } \eta_t > 0 \quad (> 0), \\ \rho_{t+1} &= |\rho_t + \zeta_t \alpha_t|, \\ \tau_{t+1} &= (\rho_t \tau_t + \zeta_t a_t) \rho_{t+1}^{-1}, \text{ если } \eta_t \leq 0 \quad (< 0). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Здесь  $\zeta_t = \mu_t - \beta_t \rho_t \eta_t (|a_t|^2 + \alpha_t^2)^{-1}$  и  $\mu_t, \beta_t, \rho_{t+1}$  — произвольные числа, удовлетворяющие условиям  $0 < \mu' \leq \zeta_t \leq \mu_t \leq \mu'', 0 \leq \beta \leq 2, \rho_{t+1} \neq 0$ . Число  $r^0$  ошибок алгоритма при  $\tau_0 = 0$  удовлетворяет оценке

$$r^0 \leq |\tau_*| (|\tau_*| + \sqrt{1 + |\tau^*|^2}) C_{\alpha\alpha} \mu'' / (2 \varepsilon_*^2 \mu').$$

Алгоритм имеет функцию Ляпунова

$$V(\tau, \rho) = |\rho \tau - \rho_* \tau_*|^2 + |\rho - \rho_*|^2, \quad (1.37)$$

где  $\rho_* > \rho'' C_{\alpha\alpha} (2 \varepsilon_*)^{-1}$ .

**Замечание.** В алгоритме (1.36) присутствует дополнительный вещественный параметр  $\rho$ , которого не было в неравенстве (1.33). Это не противоречит общему определению: в неравенствах  $\varphi_t(\tau) > 0$ , ( $\geq 0$ ) функция  $\varphi_t(\tau)$  может не зависеть от некоторых компонент вектора  $\tau$ . В нашем случае левые части неравенств (1.33) не зависят от  $\rho$ . Аналогичное верно в отношении алгоритма (1.35): здесь  $r(t)$  — дополнительный параметр.

**2.1.7°.** Общий случай рекуррентных неравенств, выделяющих выпуклые множества. Выше был подробно рассмотрен способ получения конечно-сходящихся алгоритмов в случае, когда РН (1.1) порождаются линейными (1.29), (1.33) либо совокупностями линейных (1.9) РН. Эти случаи характерны тем, что условные РН определяют специальные выпуклые множества (полупространства для неравенств (1.29) и (1.33) и полосы для (1.9)) в пространстве параметров и построенные для решения неравенств КСА допускают функцию Ляпунова  $V(\tau) = |\tau - \tau_*|^2$ . Ниже формулируется общее утверждение подобного типа.

**Теорема 2.1.7.** Предположим, что выполнены условия:

1. Функция  $\varphi_t(\tau)$ , определяющая условные РН (1.1), дифференцируема по векторному параметру  $\tau$ , и

$$|\operatorname{grad}_{\tau} \varphi_t(\tau)|^2 \leq C_{\Phi} \quad (1.38)$$

(постоянная  $C_{\Phi}$  не зависит от  $t$  и  $\tau$ ).

2. Существуют вектор  $\tau_* \in \{\tau\}$  и число  $\varepsilon_* > 0$  такие, что при любом  $t$  неравенства (1.1) при  $\tau = \tau_*$  выполнены в усиленном смысле:

$$\varphi_t(\tau_*) \geq \varepsilon_*. \quad (1.39)$$

3. Функция  $\varphi_t(\tau)$  при каждом  $t$  вогнута по параметру  $\tau$ , т. е. для любых векторов  $\tau'$ ,  $\tau''$  справедливо неравенство

$$(\tau' - \tau'')^* \operatorname{grad}_{\tau} \varphi_t(\tau'') \geq \varphi_t(\tau') - \varphi_t(\tau''). \quad (1.40)$$

4. Числа  $\rho_t$ ,  $\beta_t$  удовлетворяют условиям:

$$\rho_t > 0, \rho_t \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \rho_1 + \rho_2 + \dots = \infty. \quad (1.41)$$

Тогда для любого  $\tau_0$  и  $r(0) = 0$  следующий алгоритм является КСА решения условных РН  $\varphi_t(\tau) > 0$ :

$$\tau_{t+1} = \tau_t, r(t+1) = r(t), \text{ если } \varphi_t(\tau_t) > 0,$$

$$\tau_{t+1} = \tau_t + \zeta_t \operatorname{grad}_{\tau} \varphi_t(\tau_t), \quad (1.42)$$

$$r(t+1) = r(t) + 1, \text{ если } \varphi_t(\tau_t) \leq 0,$$

$$\zeta_t \stackrel{\text{def}}{=} \rho_{r(t)} - \beta_t \varphi_t(\tau_t) |\operatorname{grad}_{\tau} \varphi_t(\tau_t)|^{-2}. \quad (1.43)$$

Для числа ошибок  $r^0$  справедливо неравенство  $r^0 \leq r$ , где  $r$  — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\begin{aligned} \min_{p \geq r} \sum_{k=1}^p \rho_k (2\varepsilon_* - C_{\Phi} \rho_k) - \\ - \sum_s \beta_s [2\varepsilon_* - C_{\Phi} \rho_{r(s)}] \varphi_s(\tau_s) |\operatorname{grad}_{\tau} \varphi_s(\tau_s)|^{-2} \geq |\tau_* - \tau_0|^2. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Здесь  $C_{\Phi}$  и  $\varepsilon_*$  — постоянные из (1.38), (1.39),  $\Sigma'$  — означает, что суммирование ведется лишь по тем слагаемым, для которых  $\varphi_t(\tau_t) \leq 0$ . Алгоритм (1.42) имеет функцию Ляпунова  $V(\tau) = |\tau - \tau_*|^2$ .

З а м е ч а н и я. 1. Вместо (1.40) может выполняться более слабое условие: для любого вектора  $\tau$  и вектора  $\tau_*$  из (1.39) на множестве  $\{\varphi_t(\tau) \leq 0\}$  справедливо неравенство

$$(\operatorname{grad}_{\tau} \varphi_t(\tau), \tau_* - \tau) \geq \varphi_t(\tau_*) - \varphi_t(\tau). \quad (1.45)$$

Очевидно, что (1.45) является следствием (1.40), но (1.45) не означает вогнутости по  $\tau$  функции  $\varphi_t(\tau)$ , поскольку вектор  $\tau_*$  фиксирован, а само неравенство (1.45) предполагается выполненным лишь для векторов  $\tau$  из множества  $\{\varphi_t(\tau) \leq 0\}$ . Более того, дифференцируемость  $\varphi_t(\tau)$  и оценку (1.38) также достаточно требовать лишь на этом множестве, причем на нем в силу (1.45) и (1.34) выполняется неравенство  $\text{grad}_\tau \varphi_t(\tau) \neq 0$ , так что в (1.43) знаменатель в нуль обращаться не может.

2. Выбор чисел  $\rho_t$  в теореме можно сделать более конструктивным, если принять  $\rho_t = C_1(C_2 + r(t))^{-1}$  с произвольными положительными постоянными  $C_1, C_2$ .

3. Предположим, что наряду с (1.1) заданы безусловные РН (1.2). Будем предполагать, что определяемые РН (1.2) множества  $G(t)$  выпуклы и известна операция  $P_{G(t)}$  проектирования на эти множества, причем  $\tau_* \in G(t)$  при всех  $t$ . Запишем алгоритм (1.42) для краткости в виде  $\tau_{t+1} = \langle \varphi_t(\tau) > 0 \rangle(\tau_t)$ . Тогда в соответствии с рассуждениями п. 2.1.2° суперпозиция операции  $P_{G(t)}$  и алгоритма (1.42), т. е.

$$\tau_{t+1} = (P_{G(t)} * \langle \varphi_t(\tau) > 0)(\tau_t), \quad (1.46)$$

является конечно-решающим алгоритмом, а если множества  $G(t)$  не зависят от  $t$ ,  $G(t) \equiv G$ , то (1.46) является КСА для условных РН (1.1) и безусловных РН (1.2). Для числа  $r^0$  ошибок алгоритма по-прежнему справедлива оценка  $r^0 \leq r$ , где  $r$  определяется из (1.44).

4. В ряде задач адаптации время  $t$  непрерывно. Теорему 2.1.7 тогда удобно использовать в таком варианте. Пусть  $\tau_0 = \tau(t_0)$  — начальный вектор и  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \tau_{k+1}, \dots$  — последовательности векторов и моментов времени, определяемые следующим рекуррентным способом: пусть момент времени  $t_k$  и вектор  $\tau_k$  определены. Тогда  $t_{k+1}$  — первый момент времени, следующий за  $t_k$ , отстоящий от  $t_k$  не менее чем на  $\delta > 0$ , при котором впервые нарушается неравенство  $\varphi(t, \tau_k) > 0$ . (Такая запись вместо принятой ранее  $\varphi_t(\tau) > 0$  подчеркивает, что время  $t$  изменяется непрерывно.) Вектор  $\tau_{k+1}$  определяется согласно алгоритму:

$$\tau_{k+1} = \tau_k + \zeta_k \text{grad}_\tau \varphi(t_{k+1}, \tau_k). \quad (1.47)$$

Здесь  $\zeta_k = \rho_k = \beta_k \varphi(t_{k+1}, \tau_k) / |\text{grad}_\tau \varphi(t_{k+1}, \tau_k)|^{-2}$ ,  $k =$

$= 1, 2, \dots$ . Остальные обозначения те же, что и в алгоритме (1.42). В результате применения описанной конструкции можно построить кусочно-постоянную вектор-функцию  $\tau(t)$ :  $\tau(t) = \tau_k$  при  $t_k \leq t < t_{k+1}$ , которая в условиях теоремы 2.1.7 обладает следующим свойством: стабилизируется (принимает постоянное значение) через конечное время и с этого момента времени обеспечивает выполнение условных РН  $\varphi[t, \tau(t)] > 0$ . При наличии безусловных неравенств  $\psi(t, \tau) > 0$ , порождающих выпуклые области  $G(t)$ , можно взять суперпозицию операции проектирования  $P_{G(t)}$  с алгоритмом (1.47) в соответствии с замечанием 3. В результате получится конечно-решающий алгоритм для условных и безусловных РН, который будет КСА, если области  $G(t)$  не зависят от  $t$ ,  $G(t) = G(t_0)$ .

### 2.1.8°. Векторные варианты алгоритмов «Полоска».

a) *Алгоритм «Модифицированная полоска».* Приведем важный для дальнейшего пример функции  $\varphi_t(\tau)$ , для которой выполнены условия теоремы 2.1.7. Пусть

$$\varphi_t(\tau) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |a_t| - |\alpha_t - a_t \tau|. \quad (1.48)$$

Здесь  $\tau$  —  $N$ -вектор;  $\alpha_t$  —  $L$ -вектор-функция;  $a_t$  —  $L \times N$ -матричная функция;  $|a_t| = \sqrt{\operatorname{Sp} a_t a_t^*}$  — евклидова норма прямоугольной матрицы  $a_t$ ;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — неотрицательные числа. Числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , вещественные векторы  $\alpha_t$  и матрицы  $a_t$  предполагаются известными в момент времени  $t$ . Закон изменения во времени  $\alpha_t$  и  $a_t$  несуществен, но предполагается, что существуют вектор  $\tau_*$  и числа  $\varepsilon_{1*}, \varepsilon_{2*} > 0$ , такие, что выполнены неравенства

$$|\alpha_t - a_t \tau_*| < \varepsilon_{1*} + \varepsilon_{2*} |a_t|. \quad (1.49)$$

Функция (1.48) непрерывно дифференцируема при всех  $\tau$ , для которых  $|\alpha_t - a_t \tau| \neq 0$ . Предполагая это условие выполненным и учитывая, что

$$\operatorname{grad} \varphi_t(\tau) = a_t^* (\alpha_t - a_t \tau) |\alpha_t - a_t \tau|^{-1}, \quad (1.50)$$

нетрудно убедиться, что для функции (1.48) выполнено неравенство (1.45). Если  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 |a_t| > 0$ , то на множестве  $\{\varphi_t(\tau) \leq 0\}$ , как это следует из (1.48), выполняется  $|\alpha_t - a_t \tau| > 0$ , так что на этом множестве функция  $\varphi_t(\tau)$  дифференцируема и выполняется (1.38), если

справедлива оценка

$$|a_t| \leq C_a \quad (1.51)$$

при  $C_a = C_\Phi$ . Условие (1.39) для функции (1.48) будет выполнено, если в (1.49) числа  $\varepsilon_{1*}$ ,  $\varepsilon_{2*}$  удовлетворяют неравенствам  $\varepsilon_{1*} < \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_{2*} \leq \varepsilon_2$ . При этих условиях можно воспользоваться КСА (1.42) для решения РН

$$|\alpha_t - a_t \tau| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |a_t|. \quad (1.52)$$

Не будем выписывать более подробно алгоритм (1.42), который в данном случае представляет собой некоторый аналог алгоритма «Полоска». Приведем более тонкий результат, связанный с учетом специфики функции (1.48).

**Теорема 2.1.8.** Пусть выполнены условия:

1. Существуют вектор  $\tau_*$  и неотрицательные числа  $\varepsilon_{1*}$ ,  $\varepsilon_{2*}$ , для которых выполняется (1.49).
2. Для положительных чисел  $\kappa$ ,  $2 > \kappa > 0$ ,  $\varepsilon_{1*}$ ,  $\varepsilon_{2*}$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  выполняются либо неравенства

$$2\varepsilon_{1*} \leq \varepsilon_1(2 - \kappa), \quad 2\varepsilon_{2*} < \varepsilon_2(2 - \kappa), \quad (1.53)$$

либо неравенства

$$2\varepsilon_{1*} < \varepsilon_1(2 - \kappa), \quad 2\varepsilon_{2*} \leq \varepsilon_2(2 - \kappa). \quad (1.54)$$

В последнем случае предположим дополнительно, что справедливо неравенство (1.51).

Тогда для любого  $\tau_0$  следующий алгоритм является КСА для решения РН (1.52):

$$\tau_{t+1} = \begin{cases} \tau_t, & \text{если } |\eta_t| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |a_t|, \\ \tau_t - \kappa a_t^* \eta_t |a_t|^{-2}, & \text{если } |\eta_t| \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |a_t|. \end{cases} \quad (1.55)$$

Здесь  $\eta_t = -\alpha_t + a_t \tau_t$ . Для числа  $r^0$  ошибок алгоритма (1.55) справедливо неравенство

$$r^0 \leq |\tau_* - \tau_0|^2 \varepsilon^{-1}, \quad (1.56)$$

где

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_2 \kappa [(2 - \kappa) \varepsilon_2 - 2\varepsilon_{2*}] \quad (1.57)$$

при выполнении (1.53), и  $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_1 [(2 - \kappa) \varepsilon_1 - 2\varepsilon_{1*}] C_a^{-2}$  при выполнении условия (1.54). Алгоритм (1.55) имеет функцию Ляпунова  $V(\tau) = |\tau - \tau_*|^2$ .

Если безусловные РН (1.2) порождают выпуклые множества  $G(t)$ , то по отношению к алгоритму (1.55) остается справедливым замечание 3 п. 2.1.8°.

Отметим, что условия (1.54) допускают  $\varepsilon_2 = 0$ , но в этом случае обоснование конечной сходимости алгоритма (1.55) требует предположения (1.51), что в ряде задач адаптивного управления представляется весьма ограничительным условием. Алгоритм (1.55) решения РН (1.52) назовем «*Модифицированной полоской*». Этот алгоритм является естественным векторным аналогом алгоритма теоремы 2.1.3.

б) *Векторный вариант алгоритма «Полоска-2».* Пусть  $\tau$  — неизвестная  $M \times M$ -матрица,  $a_t$  —  $L$ -векторы,  $\alpha_t$  —  $M$ -векторы и РН относительно  $\tau$  имеют вид

$$|\beta\tau a_t + \alpha_t| \leq \varepsilon_t \quad (< \varepsilon_t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1.58)$$

где  $|\cdot|$  — евклидова норма. РН (1.9) и (1.18) с  $\beta_t \equiv \beta$  — частный случай РН (1.58) для  $M = 1$ .

**Теорема 2.1.9.** Предположим, что  $\beta$  — диагональная матрица с диагональными элементами  $\beta_j \neq 0$ , выполнены условия

$$|a_t| \leq C_a, \quad |\beta_j| \leq C_\beta, \quad \varepsilon_t \geq \varepsilon > 0, \quad (1.59)$$

$$\exists \tau_* \text{, } \rho: 0 < \rho < 1, \quad |\beta\tau_* a_t + \alpha_t| \leq \rho\varepsilon_t \quad (1.60)$$

и в момент  $t$  для заданного  $\tau_t$  известны величины

$$\eta_t = \beta\tau_t a_t + \alpha_t, \quad a, \quad v_t = \text{sign}_t(\varepsilon_t - |\eta_t|), \quad (1.61)$$

где  $\text{sign}_t \zeta$  — функция (1.22). Пусть  $\beta$  — диагональная матрица с диагональными элементами  $\text{sign} \beta_j$ .

Для произвольного  $\tau_0$  следующий алгоритм является КСА решения РН (1.58):

$$\begin{aligned} \tau_{t+1} &= \tau_t, \quad \text{если } v_t = 1, \\ \tau_{t+1} &= \tau_t - (1 - \rho)^{-1} \eta_t \text{ sign } \beta a_t^* |a_t|^{-2}, \quad \text{если } v_t = -1. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Для числа  $r^0$  ошибок алгоритма справедлива оценка

$$r^0 \leq (1 - \rho)^{-2} C_\beta C_A^2 \sum_{j=1}^M |\beta_j| |\tau_0^{(j)} - \tau_*^{(j)}|^2, \quad (1.63)$$

где  $\tau_0^{(j)}$ ,  $\tau_*^{(j)}$  — строки матриц  $\tau_0$ ,  $\tau_*$  соответственно.

Алгоритм (1.62) ниже будем называть «*Векторной полоской*».

## § 2.2. Алгоритмы стохастической аппроксимации

Простота вычислительной процедуры и в определенном смысле универсальность метода стохастической аппроксимации принесли ему широкую известность. В основе метода лежат рекуррентные процедуры, позволяющие определять минимум функции по наблюдаемым в условиях случайных помех значениям функции и, возможно, ее производных. Ниже этот метод и некоторые его модификации излагаются в форме, позволяющей обоснованно его применять к задачам идентификации.

**2.2.1°. Основная рекуррентная процедура метода стохастической аппроксимации.** Примем следующий подход к задаче стохастической аппроксимации, удобный для наших целей,— решению задач адаптации. Предположим, что имеется функционал

$$J(\tau) = \int Q(x, \tau) F(dx), \quad (2.1)$$

оценочная функция  $Q(x, \tau)$  которого зависит от вектора параметров  $\tau$ . Здесь  $F$ — некоторое распределение вероятностей в пространстве  $X = \{x\}$  векторных величин  $x$ , роль которых могут играть данные наблюдений (измерений) над состоянием некоторой системы. Требуется найти вектор  $\tau$ , доставляющий экстремум функционалу (2.1). Если оценочная функция  $Q(x, \tau)$  достаточно гладкая по  $\tau$  и на множество параметров не наложено никаких ограничений, то нужный вектор  $\tau$  следует искать среди решений уравнения

$$\text{grad}_\tau J(\tau) = \int \text{grad}_\tau Q(x, \tau) F(dx) = 0, \quad (2.2)$$

которое является уравнением «регрессии». Если распределение  $F(dx)$  и функция  $Q(x, \tau)$  известны, то уравнение (2.2) представляет собой систему уравнений, решение которой позволяет в принципе выделить экстремизирующие значения вектора  $\tau$ . Ситуация усложняется, если распределение  $F$  неизвестно, но имеется определяемая этим распределением последовательность  $x_0, x_1, \dots$ , на которой значения  $\text{grad}_\tau Q$  известны как функции  $\tau$ . Функция  $\text{grad}_\tau Q$  играет роль оценки градиента функционала (2.1) и может быть использована при построении стохастически градиентной процедуры вида

$$\tau_{t+1} = \tau_t - \gamma_t [\text{grad}_\tau Q(x_t, \tau_t) + w_t] \quad (2.3)$$

для приближенного нахождения решений уравнения (2.2). Здесь  $w_t$  — случайные помехи измерения градиента функции  $Q$  в точке  $x_t, \tau_t$ . Обычно  $w_t$  предполагаются центрированными, стохастически независимыми между собой и от  $x_t, \tau_t$  (векторными) с.в. Само выражение

$$\Psi_t = \text{grad}_\tau Q(x_t, \tau_t) + w_t \quad (2.4)$$

можно назвать в этом случае *стохастическим градиентом*, поскольку

$$M(\Psi_t | x_t, \tau_t) = \text{grad}_\tau Q(x_t, \tau_t). \quad (2.5)$$

Числа  $\gamma_t$  в процедуре (2.3) определяют величину *шага алгоритма*; они выбираются положительными либо отрицательными в зависимости от того, решается задача максимизации или минимизации функционала (2.1). В ряде случаев  $\gamma_t$  выбираются как функции предыстории  $\gamma_t = \gamma_t(x_0^{t-1}, \tau_0^{t-1})$ . Процедура (2.3) называется *процедурой Роббинса—Монро*. Обоснование ее применимости в существенной степени зависит от вида оценочной функции  $Q(x, \tau)$ .

В случае, если значения  $\text{grad}_\tau Q$  неизвестны, но имеется возможность наблюдать в точках  $x_t$  саму функцию  $Q(x, \tau)$ , вместо (2.3) применяется процедура Кифера—Вольфовица, в которой вместо градиента  $\text{grad}_\tau Q$  используется его разностная аппроксимация. Процедуры Роббинса — Монро и Кифера — Вольфовица являются основными процедурами метода стохастической аппроксимации (МСА). В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь процедуры (2.3).

**2.2.2°. Применение метода стохастической аппроксимации к задаче обучения с «учителем».** В задаче обучения векторы  $x_t$  являются элементами *обучающей последовательности* и называются *изображениями*. Если векторы  $x_t$  предъявляются случайно и независимо в соответствии с распределением  $F$ , а задача состоит в классификации множества  $X$  на два непересекающихся класса  $X_1, X_2$ , то при выборе оценочной функции  $Q(x, \tau)$  в виде

$$Q(x, \tau) = \frac{1}{2} |s(x) - (\tau, a(x))|^2 \quad (2.6)$$

приходим к частному варианту процедуры (2.3):

$$\tau_{t+1} = \tau_t + \gamma_t \{[s(x_t) - (a(x_t), \tau_t)]a(x_t) + w_t\}. \quad (2.7)$$

Необходимость минимизации функционала (2.1), (2.6) возникает в задаче обучения с «учителем» \*). Компоненты вектора  $a(x_t)$  играют роль признаков векторных величин  $x_t$ , а функция  $s(x_t)$  — роль указаний «учителя» о принадлежности элементов обучающей последовательности  $x_0, x_1, \dots$  одному из двух классов. Параметр  $\tau_t$  определяет линейную в пространстве признаков *дискриминантную (разделяющую) функцию*; процедура (2.7) подстройки вектора параметров может быть названа *алгоритмом адаптации (обучения)*. Возможность алгоритма (2.7) доставить наилучшую оценку  $\tau_t$  определяет способность системы «обучаться» правильной классификации, опираясь лишь на указания «учителя». В данном случае такое обоснование может быть достигнуто при весьма общих предположениях.

**Теорема 2.2.1.** Предположим, что выполнены условия:

1. Изображения  $x_0, x_1, \dots$  — случайные и независимые величины с одинаковым распределением  $F$ .
2. Матрица  $A = \int a(x)a(x)^*F(dx)$  — невырожденная.
3. Выполняются неравенства

$$\sup_{x \in X} |a(x)| = C_a < \infty, \quad \sup_{x \in X} |s(x)| \leq C_s.$$

4. Числа  $\gamma_t$  неотрицательны, и  $\gamma_0 + \gamma_1 + \dots = \infty$ ,  $\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \dots < \infty$ .

5. Помехи  $w_t$  в (2.7) стохастически независимы между собой и с изображениями  $x_0, \dots, x_t$ , причем  $Mw_t = 0$ ,  $M|w_t|^2 = \sigma_w^2$ .

Тогда процедура (2.7) сходится к минимуму функционала (2.1), (2.6) с вероятностью 1 и в среднеквадратичном смысле.

Отметим, что при невырожденной матрице  $A$  из второго условия теоремы следует, что функционал (2.1), (2.6) имеет единственное решение  $\tau_*$ , которое удовлетворяет уравнению

$$A\tau_* = f, \quad f \stackrel{\text{def}}{=} \int s(x)a(x)F(dx). \quad (2.8)$$

\*) Подробное описание задачи об обучении имеется, например, в [1136].

**Теорема 2.2.1** — типичное утверждение о сходимости псевдоградиентных процедур и, в частности, процедуры Роббинса — Монро, и ее доказательство несущественно отличается от известных утверждений в более общей ситуации произвольной выпуклой по  $\tau$  функции  $Q(x, \tau)$ . Во всех таких утверждениях характерны первое и четвертое условия теоремы.

**2.2.3°. Использование стохастической рекуррентной процедуры в качестве алгоритма идентификации.** Предположим, что ОУ зависит от неизвестного вектора параметров  $\tau$  так, что скалярный выход  $y_t$  имеет вид

$$y_{t+1} = \Phi_t^* \tau + \varphi_t + v_{t+1}(\xi), \quad (2.9)$$

где скалярная функция  $\varphi_t$  и вектор-функция  $\Phi_t$  доступны наблюдению (измерению) в каждый момент времени  $t$ ;  $v_{t+1}$  — случайная помеха, стохастические свойства которой определяются вариантом  $\xi \in \Xi$ . Далее, ограничимся рассмотрением белошумных помех. Введем функционал

$$J_t(\tau') = M(y_{t+1} - \varphi_t - \Phi_t^* \tau')^2, \quad (2.10)$$

который при белошумных помехах преобразуется к виду

$$J_t(\tau') = M[\Phi_t^*(\tau' - \tau)]^2 + \sigma_v^2, \quad \sigma_v^2 = Mv_t^2. \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что наименьшее значение этого функционала достигается на векторе  $\tau$  из (2.9). Стохастически градиентная для функционала (2.10) процедура принимает вид

$$\tau_{t+1} = \tau_t + \gamma_t [\Phi_t(y_{t+1} - \varphi_t - \Phi_t^* \tau_t) + w_t]. \quad (2.12)$$

Здесь  $w_t$  — белошумная помеха.

Стандартное обоснование процедуры (2.12) проводится в предположении, что с.в.  $\Phi_t$  стохастически независимы между собой (см. теорему 2.2.1). В данном случае  $\Phi_t$  — функция выходов динамического объекта, что не позволяет непосредственно воспользоваться теоремой типа 2.2.1. Вместе с тем, если динамический объект стационарен и линеен, то процесс  $\Phi_t$  обладает некоторыми специальными свойствами, учет которых позволяет обосновать состоятельность оценок, доставляемых процедурой (2.12). Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Предположим, что ОУ со скалярными входом и выходом описывается линейным разностным уравнением,

которое в переменных «вход — выход» имеет вид

$$a(\nabla, \tau)y_t = b(\nabla, \tau)u_t + v_t(\xi). \quad (2.13)$$

Здесь  $\nabla$  — операция сдвига во времени на тakt назад,

$$\begin{aligned} a(\lambda, \tau) &= 1 + \lambda a_1(\tau) + \dots + \lambda^r a_r(\tau), \\ b(\lambda, \tau) &= \lambda b_1(\tau) + \dots + \lambda^r b_r(\tau). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Более подробно смысл разностного уравнения (2.13) пояснен в § 3.1. Зависимость скалярных функций  $a_i(\tau)$ ,  $b_i(\tau)$  от вектора  $\tau$  предполагается линейной и известной. (Значение вектора  $\tau$ , как уже говорилось, неизвестно.) Введем скалярную функцию  $\varphi_t$  и вектор-функцию  $\Phi_t$  соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi_t &= [1 - a(\nabla, 0)]y_{t+1} + b(\nabla, 0)u_{t+1}, \\ \Phi_t^*\tau &= [a(\nabla, 0) - a(\nabla, \tau)]y_{t+1} - [b(\nabla, 0) - b(\nabla, \tau)]u_{t+1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Функция  $\varphi_t$  порождается коэффициентами уравнения (2.13), не зависящими от  $\tau$ . Таким образом, допускается случай, когда некоторые коэффициенты уравнения (2.13) от  $\tau$  не зависят, т. е. являются известными величинами. В обозначениях (2.15) уравнение (2.13) может быть записано в виде

$$y_{t+1} = \Phi_t^*\tau + \varphi_t + v_{t+1}(\xi), \quad (2.16)$$

и неизвестный параметр  $\tau$  можно определить из условия минимизации функционала (2.10). Так приходим к процедуре (2.12). До сих пор управления  $u_t$  были произвольными функциями времени, и поэтому ничего нельзя было сказать о поведении функций  $\Phi_t$ ,  $\varphi_t$ . Предположим, теперь, что управлания  $u_t$  формируются с помощью линейного регулятора

$$\alpha(\nabla)u_t = \beta(\nabla)y_t \quad (2.17)$$

с известными коэффициентами

$$\alpha(\lambda) = 1 + \lambda\alpha_1 + \dots + \lambda^p\alpha_p, \quad \beta(\lambda) = \lambda\beta_1 + \dots + \lambda^p\beta_p. \quad (2.18)$$

Будем предполагать, что регулятор (2.17) — стабилизирующий для ОУ (2.13) (см. определение 3.1.5). Систему управления (2.13), (2.17) можно записать в виде уравнения

$$x_{t+1} = A(\tau)x_t + B(\tau)v_{t+1}(\xi), \quad (2.19)$$

где  $x_t = \text{col}(y_t, \dots, y_{t-s+1}, u_t, \dots, u_{t-s+1})$ ;  $s = \max(r, p)$ ; матрицы  $A(\tau)$  и  $B(\tau)$  записываются стандартным образом (см. § 3.1). Для дальнейшего существенно, что матрица  $A(\tau)$  не имеет собственных значений при  $|\lambda| \geq 1$  — следствие стабилизирующего свойства регулятора (2.17), а компоненты вектора  $\Phi_t$  являются компонентами вектора  $x_t$ . Сделаем также предположение, что пара  $(A(\tau), B(\tau))$  — управляемая (см. определение 3.1.4). В принятых предположениях имеет место следующее утверждение о состоятельности оценок  $\tau_t$ , доставляемых процедурой (2.12).

**Теорема 2.2.2.** *Предположим, что выполнены условия:*

1. Система управления (2.13), (2.17) — управляемая в указанном выше смысле.

2. Регулятор (2.17) — стабилизирующий для ОУ (2.13).

3. Помехи  $v_t$  в уравнении (2.13) и  $w_t$  в процедуре (2.12) — независимые, белошумные и ограниченные:

$$\begin{aligned} Mv_t &= 0, \quad Mw_t = 0, \quad Mv_tw_t^* = 0, \\ Mv_tv_t^* &\leq C_v^2 I_l, \quad |v_t| \leq C_v, \quad M|w_t|^2 \leq C_w^2. \end{aligned}$$

4. Неотрицательные числа  $\gamma_t$  в процедуре (2.12) удовлетворяют условиям  $\gamma_0 + \gamma_1 + \dots = \infty$ ,  $\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \dots < \infty$ .

Тогда  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_t = \tau$  с вероятностью 1 и в среднеквадратичном смысле.

**2.2.4°.** Адаптивный оптимальный прогноз, основанный на процедуре стохастической аппроксимации. а). Постановка задачи адаптивного прогноза. Рассмотрим процесс  $y_t$ , имеющий следующую структуру:

$$y_{t+1} = \Psi_t \xi + \psi_t + v_{t+1}. \quad (2.20)$$

Здесь  $\Psi_t$  — вектор-строка и  $\psi_t$  — скалярная величина, известные в момент времени  $t$  и в предшествующие моменты времени,  $\xi$  — вектор неизвестных параметров,  $v_{t+1}$  — стационарный процесс вида

$$v_{t+1} = C(\nabla, \xi) w_{t+1}, \quad (2.21)$$

где  $C(\lambda, \xi) = 1 + \lambda C_1(\xi) + \dots + \lambda^p C_p(\xi)$  — полином, коэффициенты которого могут зависеть от параметра  $\xi$  и потому не предполагаются известными,  $w_t$  — белошумный процесс с независимыми значениями, удовлетворяю-

щими условиям

$$\mathbf{M}w_t = 0, \quad \mathbf{M}w_t^2 = \sigma_w^2, \quad \sup_t |w_t| \leq C_w < \infty. \quad (2.22)$$

Предполагается, что при каждом  $\xi$  полином  $C(\lambda, \xi)$  устойчив, т. е. не имеет корней в замкнутом единичном круге.

Примем, что задача прогноза в момент времени  $t$  состоит в получении оценки  $\hat{y}_{t+1}$  величины  $y_{t+1}$  как измеримой функции данных наблюдений  $\Psi_0^t = (\Psi_0, \dots, \Psi_t)$ ,  $\Psi_0^t = (\Psi_0, \dots, \Psi_t)$ ,  $y_0^t = (y_0, \dots, y_t)$ . Оценки  $\hat{y}_{t+1}$  должны минимизировать следующий функционал:

$$J = \overline{\lim_{T \rightarrow \infty}} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{M}\{(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1})^2 \mid \Psi_0^t, \Psi_0^t, y_0^t\}, \quad (2.23)$$

характеризующий качество прогноза. Здесь под знаком суммирования стоит условное математическое ожидание с.в.  $(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1})^2$  при фиксированной предыстории процесса \*).

При известном параметре  $\xi$  сформулированная задача оптимальной фильтрации хорошо известна и ее решение легко получить. Покажем это. Пусть в момент времени  $t$  известны величины  $\Psi_0^t, \Psi_0^t, y_0^t$  и сформированы прогнозы  $\hat{y}_0^t = (\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_t)$ . Обозначив через  $\hat{y}_{t+1}$  пока произвольную функцию величин  $\sigma_0^t = \{\Psi_0^t, \Psi_0^t, y_0^t, \hat{y}_0^t\}$ , убеждаемся, что величина  $C(\nabla, \xi) [y_{t+1} - \hat{y}_{t+1} - w_{t+1}] + \hat{y}_{t+1}$  в силу уравнений (2.20), (2.21) линейно зависит от данных наблюдения  $\sigma_0^t$ . Пусть  $\tau = \text{col}(\xi, C_{i_1+1}(\xi), \dots, C_{i_k+1}(\xi))$  — вектор коэффициентов этой линейной зависимости. Введем обозначения  $\Phi_t^* = (\Psi_t, y_{t-i_1}, \dots, y_{t-i_k}, \hat{y}_{t-i_1}, \dots, \hat{y}_{t-i_k})$ ,  $\varphi_t = \Psi_t + \Sigma' C_{i+1} (y_{t-i} - \hat{y}_{t-i})$ , где штрих означает, что при суммировании учитываются лишь те коэффициенты полинома  $C(\lambda, \xi)$ , которые не зависят от  $\xi$ , а потому известны (остальные коэффициенты предполагаются неизвестными и при суммировании не учитываются).

\*). Точнее, условное математическое ожидание определяется с-алгеброй, порождаемой случайными величинами  $\Psi_0^t, \Psi_0^t, y_0^t$ .

Тогда уравнение (2.20) запишется в виде

$$C(\nabla, \xi) [y_{t+1} - \hat{y}_{t+1} - w_{t+1}] = \Phi_t^* \tau - \varphi_t - \hat{y}_{t+1}. \quad (2.24)$$

Будем вычислять прогноз  $\hat{y}_{t+1}$  по формуле

$$\hat{y}_{t+1} = \Phi_t^* \tau + \varphi_t. \quad (2.25)$$

В силу предположения о корнях полинома  $C(\lambda, \xi)$  из (2.24), (2.25) следует, что  $(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1} - w_{t+1}) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , а потому  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \sum_{s=1}^t (y_{s+1} - \hat{y}_{s+1} - w_{s+1})^2 = 0$ . Но в силу (2.24) величина  $y_{t+1} - \hat{y}_{t+1} - w_{t+1}$  является функцией данных наблюдения  $\sigma_0^t$ . Поэтому

$$(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1} - w_{t+1})^2 = M\{(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1} - w_{t+1})^2 | \sigma_0^t\} = \\ = M\{(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1})^2 | \sigma_0^t\} - \sigma_w^2.$$

Таким образом, прогноз (2.25) является оптимальным в смысле критерия (2.23) и  $\min J = \sigma_w^2$ .

б) *Алгоритм адаптивного прогнозирования.* В случае неизвестного параметра  $\tau$  воспользоваться формулой (2.25) для получения оптимального прогноза нельзя, поэтому прибегнем к методу адаптивной фильтрации, в основе которого лежит идея использования данных наблюдения  $\sigma_0^t$  для получения оценок  $\tau_t$  неизвестного параметра  $\tau$  с последующим вычислением прогноза  $\hat{y}_{t+1}$  по формуле

$$\hat{y}_{t+1} = \Phi_t^* \tau_t + \varphi_t. \quad (2.26)$$

При таком подходе центральное место занимает вопрос о получении оценок  $\tau_t$ . Воспользуемся для этой цели процедурой стохастической аппроксимации:

$$\tau_t = \tau_{t-1} + \delta r_{t-1}^{-1} \Phi_{t-1}^* (y_t - \Phi_{t-1}^* \tau_{t-1} - \varphi_{t-1}), \quad (2.27)$$

где  $r_{t-1}$  — неотрицательные величины, определяемые рекуррентным соотношением

$$r_t = r_{t-1} + |\Phi_t|^2, \quad r_0 = 1, \quad (2.28)$$

и  $\delta$  — положительное число. Процедура (2.27) имеет вид (2.12), в которой  $w_t \equiv 0$  и  $\gamma_t = \delta r_t^{-1}$ , т. е. числа  $\gamma_t$  зависят от предыстории процесса наблюдений.

При фиксированной оценке  $\tau_0$  соотношения (2.26) — (2.28) полностью определяют структуру прогнозирующего устройства.

Если рассмотреть систему, состояние которой в момент времени  $t$  описывается набором  $\{\tau_t, \gamma_t\}$ , входные воздействия — совокупностью величин  $y_t, \Phi_{t-1}, \Psi_{t-1}$ , а выход — величиной  $\hat{y}_{t+1}$ , то (2.27), (2.28) можно интерпретировать как уравнения изменения состояния такой системы, а (2.26) — как правило формирования выхода.

Цель функционирования описанной системы — минимизация функционала (2.23). Неопределенность условий функционирования системы состоит в «незнании» параметра  $\xi$  (точнее, вектора  $\tau = \tau(\xi)$ , определяющего статистические свойства входных воздействий). Если цель обеспечивается для каждого  $\xi$  из некоторого множества  $\Xi$ , то в соответствии с определением 1.2.1 рассматриваемая система является адаптивной в классе  $\Xi$  по отношению к выбранной ЦУ — условию минимизации функционала (2.23).

**Теорема 2.2.3.** Предположим, что выполнены условия:

1. Данные наблюдения  $\{y_t, \Psi_t, \Phi_t\}$  связаны соотношением (2.20), и для них справедливы неравенства

$$\sup_t |y_t| \leq C_y, \quad \sup_t |\Psi_t| + \sup_t |\Phi_t| \leq C_\Phi \quad (2.29)$$

с некоторыми постоянными  $C_y, C_\Phi$ .

2. Входящая в (2.20) помеха  $v_t$  имеет вид (2.21), где  $w_t$  — белошумный процесс с независимыми значениями, обладающий свойствами (2.22).

3. Полином  $C(\lambda, \xi)$  не имеет корней в замкнутом единичном круге и обладает свойством

$$\operatorname{Re} C(\lambda, \xi) > \delta \text{ при } |\lambda| = 1, \delta > 0. \quad (2.30)$$

Тогда прогноз  $\hat{y}_{t+1}$  определяемый соотношениями (2.26) — (2.28), независимо от выбора начальной оценки  $\tau_0$  в алгоритме прогнозирования (2.27) является оптимальным.

Условия теоремы определяют ограничения на множество  $\Xi$ , для которого прогнозирующее устройство (2.26) — (2.28) является адаптивным по отношению к функционалу (2.23).

**З а м е ч а н и я.** 1. Теорема не утверждает, что имеет место сходимость  $\tau_t \rightarrow \tau(\xi)$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. алгоритм (2.27), (2.28) не является, вообще говоря, идентифицирующим. Состоятельность оценок  $\tau_t$  обеспечивается при дополнительных предположениях о свойствах процесса  $\Phi_t$ .

2. В условиях теоремы 2.2.3 можно отказаться от стационарности процесса  $w_t$ , заменив второе соотношение в (2.22) предположением о существовании предела

$$\sigma_w^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \sum_{s=1}^t M w_s^2.$$

3. Теорема остается справедливой и для случая векторных величин  $y_t$ ,  $v_t$ ,  $\varphi_t$ . В этом случае полином  $C(\lambda, \xi)$  имеет матричные коэффициенты,  $C(0, \xi) = I$  — единичная квадратная матрица и  $\Phi_t$  — прямоугольная матрица-функция соответствующих размерностей. Условие 3 теоремы заменяется на требование, чтобы полином  $\det C(\lambda, \xi)$  не имел корней в замкнутом единичном круге и для любого вектора  $h \neq 0$  выполнялось неравенство  $\operatorname{Re} h^* [C(\lambda, \xi) - I\delta]h > 0$  при всех  $|\lambda| = 1$ .

### § 2.3. Рекуррентные модификации метода наименьших квадратов

Обоснованное применение МСА к задачам адаптации накладывает, как было показано в § 2.2, значительные ограничения на матрицу  $\Phi_t$ , зависящую от компонент вектора состояния системы управления. Значительно более гибким является метод наименьших квадратов (МНК), позволяющий гарантировать состоятельность оценок  $\tau_t$  при меньших ограничениях на вектор состояния  $x_t$ . Переидем к изучению этого вопроса.

**2.3.1°. Основная рекуррентная процедура метода наименьших квадратов.** К рекуррентным вариантам МНК естественнее всего можно прийти, рассматривая эмпирический функционал

$$J_t(\tau') = \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t (y_{s+1} - \varphi_s - \Phi_s^* \tau')^* R^{-1} (y_{s+1} - \varphi_s - \Phi_s^* \tau') \quad (3.1)$$

вместо функционала (2.10). Здесь  $R$  — произвольная симметрическая положительная весовая матрица. Предполагается такая зависимость от вектора существенных параметров  $\tau$ , что ОУ допускает представление (2.9), в котором  $y_t, v_t$  — не обязательно скалярные величины, а могут быть векторными. В этом случае  $\Phi$  будет прямоугольной матрицей соответствующей размерности. Обозначим через  $\tau_{t+1}$  вектор, минимизирующий функционал (3.1).

**Лемма 2.3.1.** *Вектор  $\tau_{t+1} = \arg \min_{\tau} J_t(\tau)$  удовлетворяет рекуррентным соотношениям*

$$\tau_{t+1} = \tau_t + \gamma_t \Phi_t L_t \eta_{t+1}, \quad \eta_{t+1} = y_{t+1} - \Phi_t - \Phi_t^* \tau_t, \quad (3.2)$$

где  $L_t = (R + \Phi_t^* \gamma_t \Phi_t)^{-1}$ ,  $\eta_{t+1} = y_{t+1} - \Phi_t - \Phi_t^* \tau_t$ .

Процедуру (3.2) называют также *рекуррентной процедурой МНК*.

Если считать помехи  $v_t$  белошумными с матрицей ковариаций  $R = M v_t v_t^*$ , а  $\Phi_t, \varphi_t$  — детерминированными функциями времени, то соотношения (3.3) превращаются в частный вариант уравнений фильтра Калмана—Бьюси. В этом случае  $\gamma_t$  совпадает с ковариационной матрицей с.в. ( $\tau_t - \tau$ ). Для случайных  $\Phi_t, \varphi_t$  это, как правило, не так.

**2.3.2°. Свойства рекуррентной процедуры метода наименьших квадратов.** Рекуррентная процедура (3.2) требует задания начальных данных — вектора  $\tau_0$  и матрицы  $\gamma_0$ . Обычно их приходится задавать произвольно, но при этом определяемые процедурой (3.2) векторы  $\tau_{t+1}$  могут уже не доставлять минимума функционалу (3.1), и требуется исследовать поведение траекторий (3.2) при произвольных начальных данных. Основным пунктом такого исследования является следующее утверждение.

**Лемма 2.3.2.** *Для произвольной траектории  $\{\tau_t, \gamma_t\}$  системы (3.2) в силу (2.9) справедливо представление*

$$\begin{aligned} \gamma_{t+1}^{-1} (\tau_{t+1} - \tau) &= \gamma_t^{-1} (\tau_t - \tau) + \Phi_t R^{-1} v_{t+1}, \\ \gamma_{t+1}^{-1} &= \gamma_t^{-1} + \Phi_t R^{-1} \Phi_t^*. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Формулы (3.3) позволяют получить «явную» зависимость векторов  $\tau_t$  и матриц  $\gamma_t$  от начальных данных. Так, из второго соотношения (3.3) следует формула

$\gamma_{t+1}^{-1} = \gamma_0^{-1} + \sum_{s=0}^t \Phi_s R^{-1} \Phi_s^*$ , которая показывает, что матрица  $\gamma_t$  при всех  $t$  симметрична и положительна, если  $\gamma_0^* = \gamma_0 > 0$ .

**2.3.3°. Информационная матрица.** Для исследования свойств процедуры (3.2) важным является понятие информационной матрицы.

**Определение 2.3.1.** Информационной называется матрица

$$J_t = t^{-1} \sum_{s=1}^t \Phi_s R^{-1} \Phi_s^*. \quad (3.4)$$

Матрица  $J_t$  называется предельно невырожденной, если  $\lim_{t \rightarrow \infty} |J_t| < \infty$ .

**Теорема 2.3.1.** Предположим, что выполнены условия:

1. Помехи  $v_t$  в (2.9) стохастически независимы, и  $Mv_t = 0$ ,  $Mv_t v_t^* = R_v$ .

2. Выполнено неравенство  $\lim_{t \rightarrow \infty} |M\Phi_s R^{-1} R_v R^{-1} \Phi_s^*| < C_\Phi^2$ .

3. Информационная матрица (3.4) предельно невырождена.

Тогда оценки  $\tau_t$ , доставляемые процедурой (3.2) при произвольных начальных данных  $\tau_0$ ,  $\gamma_0 > 0$ , сильно состоятельны, т. е.  $\tau_t \rightarrow \tau$  при  $t \rightarrow \infty$  с вероятностью 1.

Предположение о предельной невырожденности информационной матрицы является существенно более слабым ограничением по сравнению с предположением о сведении системы управления к уравнению (2.19) с полностью управляемыми матрицами  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$ . В последнем случае нетрудно установить предельную невырожденность информационной матрицы (3.4). Вместе с тем установление предельной невырожденности информационной матрицы управляемого процесса удается установить и для регуляторов с настраиваемыми коэффициентами, что предопределяет возможность обоснованного использования процедуры (3.2) в качестве алгоритма адаптации. Предельная невырожденность информационной матрицы в задачах адаптации существенно зависит от выбора регулятора в цепи обратной связи и характера действующих на ОУ помех.

### § 2.4. Алгоритмы скоростного градиента

Предыдущие параграфы этой главы были посвящены дискретным алгоритмам адаптации, описываемым разностными уравнениями. Рассмотренные алгоритмы являлись процедурами градиентного типа: направление изменения вектора подстраиваемых параметров на каждом шаге противоположно градиенту (оценке градиента) целевой функции.

Для доказательства сходимости алгоритмов адаптации был использован метод функций Ляпунова.

Непрерывными аналогами градиентных алгоритмов в задачах адаптивного управления динамическими объектами являются так называемые *алгоритмы скоростного градиента*, рассматриваемые в настоящем параграфе. В алгоритмах этого типа направление изменения вектора подстраиваемых параметров в каждый момент времени противоположно градиенту от скорости изменения целевой функции в силу уравнения объекта. Доказательство сходимости алгоритмов также основано на методе функций Ляпунова.

Для перехода от градиентных алгоритмов к алгоритмам скоростного градиента можно использовать следующие эвристические рассуждения. Пусть качество работы системы оценивается функцией  $Q(x, t)$ , где  $x$  — вектор состояния ОУ, а  $t$  — вектор подстраиваемых параметров, изменяемый дискретно в моменты  $t_k = k\delta$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, \dots, \delta > 0$ . В градиентных алгоритмах приращение подстраиваемых параметров  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$  выбирается пропорциональным антиградиенту  $[-\text{grad}_t Q(x_{k+1}, t)]$  функции  $Q(x_{k+1}, t)$ , вычисленному в точке  $t = t_k$ . Но градиент функции  $Q(x_{k+1}, t)$  совпадает с градиентом величины  $\Delta Q(x_{k+1}, t) = Q(x_{k+1}, t) - Q(x_k, t_k)$ . Если теперь устремить к нулю шаг дискретизации  $\delta = t_{k+1} - t_k$ , то разности окажутся пропорциональными соответствующим производным. При этом скорость изменения подстраиваемых параметров  $\dot{t} = dt/dt$  окажется пропорциональной антиградиенту от величины  $\dot{Q}_t = dQ(x(t), t)/dt$  — скорости изменения  $Q(x, t)$  в силу уравнения ОУ. В настоящем параграфе дается строгое обоснование сходимости алгоритмов скоростного градиента, а также исследуются некоторые их общие свойства. В дальнейшем, в гл. 6, 7,

будут приведены решения некоторых задач адаптивного управления на основе алгоритмов скоростного градиента.

**2.4.1°. Условия достижения цели управления.** Как уже говорилось в гл. 1, рассматриваемые в книге адаптивные системы управления описываются тремя уравнениями, описывающими объект управления, регулятор с подстраиваемыми коэффициентами и адаптор. Для изложения схемы скоростного градиента удобно объединить уравнения ОУ и регулятора в одно векторное уравнение, которое принято называть уравнением *обобщенного настраиваемого объекта* (ОНО). Будем считать, что ОНО описывается уравнением состояния

$$dx/dt = F(x, \tau, t, \xi), \quad (4.1)$$

где  $x$  —  $n$ -вектор состояния ОНО,  $\tau$  —  $N$ -вектор подстраиваемых параметров,  $\xi$  — вариант. Вектор-функцию  $F$  будем считать непрерывной по  $x$  и непрерывно дифференцируемой по  $\tau$ . По аргументу  $t$  функцию  $F(\cdot)$  достаточно считать кусочно-непрерывной с множеством разрывов, не имеющим конечных точек сгущения, так, чтобы была справедлива локальная теорема существования и единственности решений (4.1) при любых  $\tau \in \mathbb{R}^N$ ,  $\xi \in \Sigma$ . В число компонент вектора  $x$  кроме переменных состояния ОУ могут входить переменные состояния регулятора, измерительных и исполнительных устройств и т. д. Еще раз подчеркнем, что для получения уравнения (4.1) объединяются уравнения ОУ и регулятора; при этом подстраиваемые параметры считаются фиксированными. Если же для синтеза адаптивной системы управления принят идентификационный подход, то вектор состояния ОНО включает состояние подстраиваемой модели, объекта, а подстраиваемыми являются не параметры регулятора, а коэффициенты модели. Поясним сказанное на примере.

Пусть ОУ и регулятор линейны и описываются уравнениями  $dx/dt = Ax + bu + v(t)$ ,  $u = \tau^*x$ , в которых  $x$  — вектор состояния ОУ,  $u$  — скалярное управление,  $\tau$  — вектор подстраиваемых параметров. В этом случае уравнение ОНО получается при подстановке управления в уравнение ОУ и имеет вид  $dx/dt = (A + bt^*)x + v(t)$ . При идентификационном подходе подстраиваемая модель ОУ может, например, иметь вид  $dx_m/dt = A_m x_m + b_m u$ . При этом в вектор состояния ОНО входят переменные

состояния ОУ и переменные состояния подстраиваемой модели, а подстраиваемыми параметрами независимо от вида регулятора являются коэффициенты модели  $A_m$ ,  $b_m$ . Управление  $u(t)$  рассматривается как внешнее воздействие. В обоих случаях от варианта  $\xi$  зависят коэффициенты ОУ: матрица  $A$  и вектор  $b$ , а также возмущение  $v(t)$ .

Пусть задана неотрицательная непрерывно дифференцируемая оценочная (целевая) функция  $Q(x, t)^*$ . Алгоритмом скоростного градиента будем называть правило изменения вектора  $\tau$ , задаваемое дифференциальным уравнением (уравнением адаптора)

$$\frac{d\tau}{dt} = -\Gamma \operatorname{grad}_\tau \Phi(x, \tau, t, \xi), \quad (4.2)$$

где  $\Phi(x, \tau, t, \xi) = \partial Q(x, t)/\partial t + [\operatorname{grad}_x Q(x, t)]^* F(x, \tau, t, \xi)$  — производная функции  $Q(x, t)$  в силу уравнения ОНО (4.1), а  $\Gamma = \Gamma^* > 0$  — положительно определенная  $N \times N$ -матрица (матрица коэффициентов усиления алгоритма). Матрицу  $\Gamma$  часто выбирают диагональной ( $\Gamma = \operatorname{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ ,  $\gamma_j > 0$ ) или даже скалярной ( $\Gamma = \gamma I_N$ ,  $\gamma > 0$ ,  $I_N$  — единичная  $N \times N$ -матрица). Предположим, что целью управления является выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) = 0. \quad (4.3)$$

Оказывается, при достаточно общих предположениях алгоритм (4.2) обеспечивает достижение в системе (4.1), (4.2) цели (4.3). Точная формулировка содержится в следующей теореме.

**Теорема 2.4.1.** Пусть правые части системы (4.1), (4.2) локально ограничены равномерно по  $t \geq 0$ , т. е. для любых  $\beta > 0$ ,  $\xi \in \Xi$  существует константа  $C(\beta, \xi)$  такая, что

$$|F(x, \tau, t, \xi)| + |\operatorname{grad}_\tau \Phi(x, \tau, t, \xi)| \leq C(\beta, \xi) \quad (4.4)$$

при  $|x| \leq \beta$ ,  $|\tau| \leq \beta$ ,  $t \geq 0$ . Пусть функция  $Q(x, t)$  при любом  $\beta > 0$  равномерно непрерывна в области

\*) Дальнейшие результаты останутся справедливыми (с очевидными изменениями), если оценочная функция будет зависеть еще и от  $\xi$ .

$\{(x, t): |x| \leq \beta, t \geq 0\}$  и удовлетворяет условию роста

$$\inf_{t \geq 0} Q(x, t) \rightarrow \infty \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \quad (4.5)$$

а функция  $\varphi(x, \tau, t, \xi)$  выпукла по  $\tau$ , т. е. удовлетворяет неравенству

$$\varphi(x, \tau', t, \xi) - \varphi(x, \tau, t, \xi) \geq (\tau' - \tau)^* \operatorname{grad}_\tau \varphi(x, \tau, t, \xi). \quad (4.6)$$

Пусть, наконец, для любого  $\xi \in \Xi$  существуют вектор  $\tau_* = \tau_*(\xi) \in \mathbb{R}^N$  и число  $\rho = \rho(\xi) > 0$ , удовлетворяющие условию достижимости ЦУ

$$\varphi(x, \tau_*, t, \xi) \leq -\rho Q(x, t). \quad (4.7)$$

Тогда в системе (4.1), (4.2) достигается цель управления (4.3). Все траектории  $\{x(t), \tau(t)\}$  системы (4.1), (4.2) определены при  $t \geq 0$ , ограничены и удовлетворяют оценке \*)

$$\begin{aligned} Q(x(t), t) + \frac{1}{2} |\tau(t) - \tau_*|^2_{\Gamma^{-1}} &\leq \\ &\leq Q(x(0), 0) + \frac{1}{2} |\tau(0) - \tau_*|^2_{\Gamma^{-1}} - \rho \int_0^t Q(x(s), s) ds. \end{aligned} \quad (4.8)$$

**З а м е ч а н и я.** 1. Условие роста (4.5) можно ослабить, заменив его требованием: из ограниченности  $Q(x(t), t)$  на решениях системы (4.1), (4.2) следует ограниченность вектора  $x(t)$ .

2. Условие выпуклости (4.6) также допускает ослабление. Достаточно требовать выполнения (4.6) при  $\tau' = \tau_*$  и любых  $\tau$ .

3. Можно, наконец, ослабить условие достижимости (4.7). Теорема останется справедливой, если вместо (4.7) выполняется неравенство

$$\varphi(x, \tau_*, t, \xi) \leq -\rho Q(x, t) + \mu(x, \tau, t, \xi), \quad (4.7a)$$

где  $\int_0^\infty \mu(x(t), \tau(t), t, \xi) dt < +\infty$ .

\*) Через  $|\tau|_{\Gamma^{-1}}^2$  обозначено  $\tau^* \Gamma^{-1} \tau$ .

Поясним смысл условий теоремы. Условия (4.4), (4.5) носят общий характер и мало ограничительны. Условие выпуклости (4.6) требуется для установления глобальных свойств решений системы (4.1), (4.2). Оно выполнено, например, если функция  $\varphi(x, \tau, t, \xi)$  линейна по  $\tau$ . Можно показать, что если отбросить условие выпуклости, то утверждение теоремы будет справедливым «локально»: при достаточно малых начальных отклонениях  $Q(x(0), 0)$ ,  $|\tau(0) - \tau_*|$ . Основным в теореме является условие (4.7), которое можно записать в виде  $dQ(x(t), t)/dt \leqslant -\rho Q(x(t), t)$ . Оно означает, что уравнение ОНО при  $\tau = \tau_*$  (при «идеальной» настройке) обладает свойством экспоненциальной устойчивости, а функция  $Q(x, t)$  является функцией Ляпунова, гарантирующей экспоненциальную устойчивость (4.1). Для устойчивого ОНО соотношение (4.3) при  $\tau = \tau_*$  выполнено, поэтому условие (4.7) выражает принципиальную достижимость цели управления (в несколько усиленной форме). Таким образом, теорема 2.4.1 говорит о том, что если цель управления (4.3) достижима при каком-то значении  $\tau = \tau_*(\xi)$ , то ее достижение можно обеспечить при произвольном начальном значении  $\tau = \tau(0)$ , подстраивая  $\tau$  по алгоритму (4.2).

Доказательство теоремы основано на построении для системы (4.1), (4.2) функции Ляпунова вида

$$V(x, \tau, t) = Q(x, t) + \frac{1}{2} |\tau - \tau_*|^2_{F^{-1}}. \quad (4.9)$$

Функция (4.9) формируется из функции Ляпунова «идеально настроенного» ОНО (4.1) и включает слагаемое, характеризующее отклонения подстраиваемых параметров от «идеальных» значений.

Из теоремы 2.4.1 вытекает следующая методика синтеза адаптивных систем на основе алгоритмов скоростного градиента. Вначале в соответствии с заданной ЦУ выбирается оценочная функция  $Q(x, t)$  так, чтобы ЦУ можно было записать в виде (4.3). Затем ищется структура регулятора, которая обеспечивает (при известных параметрах объекта) выполнение условия достижимости (4.7). Наконец, выписывается алгоритм адаптации (4.2), проверяются вспомогательные условия (4.4) — (4.6) и делается окончательное суждение о свойствах синтезированной системы.

Продемонстрируем описанную методику на рассмотренном выше примере для  $n = 1$ . Пренебрегая возмущением, запишем уравнение ОНО в виде  $dx/dt = (A + b\tau)x$ , где все величины скалярны. Пусть ОУ неустойчив ( $A > 0$ ) и ставится задача стабилизации с целью управления  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Выберем оценочную функцию  $Q(x) = 0,5 x^2$ ; тогда ЦУ примет вид (4.3). Вычисляя производную  $\phi(x, \tau, \xi)$ , получим  $\phi(x, \tau, \xi) = -x(A + b\tau)x$ . Очевидно, при любых  $b \neq 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $A \in \mathbb{R}^1$  существует число  $\tau_* \in \mathbb{R}^1$  такое, что  $A + b\tau_* = -\rho$  и, следовательно,  $\phi(x, \tau_*, \xi) = -\rho Q(x)$ . Это значит, что условие достижимости (4.7) выполнено и структура регулятора  $u = \tau x$  выбрана правильно. Чтобы выписать алгоритм адаптации, вычислим  $d\phi(x, \tau, \xi)/d\tau = -bx^2$ . Поскольку коэффициент усиления  $\Gamma > 0$  в алгоритме (4.2) произволен, можно разделить  $\Gamma$  на  $|b|$  и записать алгоритм адаптации в виде  $dt/dt = -\gamma(\text{sign } b)x^2$ , где  $\gamma > 0$ . Таким образом, построенная на основе принципа скоростного градиента система управления описывается уравнениями

$$\begin{aligned} dx/dt &= Ax + bu, \quad u = \tau x, \\ dt/dt &= -\gamma(\text{sign } b)x^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Условия (4.4), (4.5) теоремы 2.4.1 здесь выполнены в силу гладкости и независимости от времени правых частей системы. Условие (4.6) выполнено в силу линейности по  $\tau$  функции  $\phi(x, \tau, \xi)$ . По теореме 2.4.1 достигается ЦУ  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , причем классом адаптации является множество пар  $(A, b)$  с заданным  $\text{sign } b$ . Сенсором в системе является величина  $x(t)$ .

Еще раз подчеркнем, что правая часть алгоритма адаптации не должна зависеть от неизвестных параметров (варианта  $\xi$ ) и является функцией сенсора  $\sigma(t)$ . Необходимость учета этого обстоятельства осложняет задачу синтеза адаптивной системы (см. ниже, гл. 6, 7).

Отметим также, что при действии на ОУ неизмеряемых (неконтролируемых) возмущений ЦУ (4.3), как правило, недостижима. Такую ЦУ целесообразно ставить лишь в случаях, когда действием неизмеряемых возмущений можно пренебречь, что сужает сферу применимости алгоритмов скоростного градиента. Некоторые

способы обеспечения работоспособности \*) алгоритмов в условиях возмущений будут рассмотрены в п. 2.4.3°.

**2.4.2°. Сходимость подстраиваемых параметров к «идеальным» значениям.** Важным для приложений является вопрос о сходимости вектора подстраиваемых параметров  $\tau(t)$  к вектору  $\tau_* = \tau_*(\xi)$ . В задачах идентификации сходимость  $\tau(t) \rightarrow \tau_*$  означает, что точность оценки параметров ОУ неограниченно растет с ростом  $t$ . Кроме того, при наличии сходимости  $\tau(t) \rightarrow \tau_*$  адаптивная система может обладать дополнительными полезными свойствами (см. п. 2.4.3°). В общем случае будем называть алгоритм адаптации *идентифицирующим*, если  $\tau(t) \rightarrow \tau_*$  при  $t \rightarrow \infty$  (введенное определение предполагает, очевидно, единственность вектора  $\tau_*$ ). Ниже для случая линейной зависимости правой части уравнения ОНО от подстраиваемых параметров устанавливаются условия, при которых алгоритмы скоростного градиента являются идентифицирующими.

Пусть уравнение ОНО (4.1) имеет вид

$$dx/dt = f_0(x, q(t)) + (\tau - \tau_*(\xi))f_1(x, q(t)), \quad (4.11)$$

где  $\tau$  —  $l \times n$ -матрица подстраиваемых параметров,  $q(t)$  —  $n_q$ -вектор внешних воздействий. Пусть задана гладкая оценочная функция  $Q(x)$  со свойством

$$Q(x) > 0 \text{ при } x \neq 0, \quad Q(0) = 0. \quad (4.12)$$

Нетрудно видеть, что алгоритм адаптации (4.2) в данном случае принимает вид

$$d\tau/dt = -\Gamma \operatorname{grad} Q(x)f_1(x, q(t)) *, \quad (4.13)$$

где  $\Gamma = \Gamma^* > 0$ . Строго говоря, запись (4.2) требует «вытягивания» элементов матрицы  $\tau$  в столбец длины  $l \cdot n$ . Однако дальнейшие выводы не изменятся, если рассматривать частный случай алгоритма, описываемый более

\*) Понятие работоспособности системы управления не является строго формализованным. Оно означает наличие у системы свойств, важных для ее практической применимости. Как правило, работоспособной мы будем называть систему, достигающую исходной или близкой к ней цели управления. Кроме того, от работоспособной системы может требоваться наличие таких свойств, как ограниченность траекторий, грубость по отношению к вариациям параметров уравнения ОУ и т. д. (см. ниже).

компактной формулой (4.13), в которой матрица  $\Gamma$  имеет порядок  $n \times n$ . Введем определение, аналогичное определению 2.3.1.

**Определение 2.4.1.** Измеримая и ограниченная при  $t \geq 0$  вектор-функция  $f(t) \in \mathbb{R}^N$  называется строго предельно невырожденной, если существуют положительные числа  $L, \alpha, t_0$  такие, что для любого  $t > t_0$

$$\int_{t_0}^{t+L} f(s) f(s)^* ds \geq \alpha I_N. \quad (4.14)$$

Строгая предельная невырожденность вектор-функции означает, грубо говоря, что вектор  $f(t)$  не приближается при  $t \rightarrow \infty$  ни к какой гиперплоскости в пространстве  $\mathbb{R}^N$ . Можно показать, что гладкая функция  $f(t)$  строго предельно невырождена, если ее производная  $df(t)/dt$  ограничена и существуют положительные числа  $L, t_0, C$ , такие, что для любого  $t > t_0$   $|F_t^{-1}| \leq C_f$ , где  $F_t = N \times N$ -матрица со столбцами  $f(t_1), \dots, f(t_N)$ , а  $t_i, i = 1, \dots, N$ , — некоторые числа из отрезка  $[t, t + L]$ . Очевидно, для строго предельно невырожденной функции  $f(t)$  матрица

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(s) f(s)^* ds$$

будет предельно невырожденной в смысле

определения 2.3.1.

Пусть  $q(t): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$  — кусочно-непрерывная и кусочно-гладкая вектор-функция. Обозначим через  $D_q$  множество разрывов функций  $q(t)$ ,  $dq(t)/dt$ . Будем писать  $q(t) \in \mathcal{B}$ , если а) функции  $q(t)$ ,  $dq(t)/dt$  ограничены и обладают конечными пределами при  $t \rightarrow t'$  для любого  $t' \in D_q$  и б) существует  $\delta_q > 0$  такое, что  $|t' - t''| \geq \delta_q$  для любых  $t' \in D_q$ ,  $t'' \in D_q$ ,  $t' \neq t''$ .

**Теорема 2.4.2.** Пусть выполнены условия теоремы 2.4.1, причем уравнение ОНО имеет вид (4.11), функция  $Q(x)$  обладает свойством (4.12), а функции  $f_i$ ,  $\partial f_i / \partial t$ ,  $\text{grad}_x f_i$ ,  $\text{grad } Q$  непрерывны. Если  $q(t) \in \mathcal{B}$ ,  $f_0(0, q(t)) = 0$  и функция  $f_1(0, q(t))$  строго предельно невырождена, то алгоритм (4.13) является идентифицирующим при любых начальных условиях  $x(0)$ ,  $\tau(0)$ . Кроме того, решение  $\{0, \tau_*(\xi)\}$  системы (4.11), (4.13) асимптотически устойчиво в целом равномерно по ограниченному множеству начальных условий  $x(t_0)$ ,  $\tau(t_0)$  и по моменту  $t_0 \geq 0$ .

Теорему 2.4.2 можно применять к разнообразным задачам идентификации и адаптивного управления. Рассмотрим, например, одну из постановок задачи адаптивного управления с эталонной моделью. Пусть ОУ описывается уравнением

$$dx_0/dt = [A(\xi) + \tau_A]x_0 + [b(\xi) + \tau_b]r(t), \quad (4.15)$$

где  $A(\xi)$ ,  $b(\xi)$  —  $n \times n$ -матрица и  $n$ -вектор существенных параметров,  $\tau_A$ ,  $\tau_b$  —  $n \times n$ -матрица и  $n$ -вектор подстраиваемых параметров,  $r(t)$  — скалярное задающее воздействие, причем  $r(t) \in \mathcal{B}$ . Рассмотрим вспомогательное уравнение эталонной модели

$$dx_m/dt = A_*x_m + b_*r(t), \quad (4.16)$$

задающее желаемое поведение ОУ. Здесь  $A_*$  — заданная гурвицева  $n \times n$ -матрица,  $b_*$  — заданный  $n$ -вектор. Требуется определить закон подстройки параметров  $\tau_A$ ,  $\tau_b$ , использующий измерения вектора сенсоров  $\sigma(t) = \text{col}(x_0(t), x_m(t), r(t))$  и обеспечивающий цели управления  $|x_0(t) - x_m(t)| \rightarrow 0$ ,  $A(\xi) + \tau_A \rightarrow A_*$ ,  $b(\xi) + \tau_b \rightarrow b_*$  при  $t \rightarrow \infty$ . Для решения задачи воспользуемся теоремой 2.4.2. Положим  $x = x_0 - x_m$  и в качестве уравнения ОНО рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} dx/dt = & A_*x + [A(\xi) + \tau_A - A_*](x + x_m(t)) + \\ & + [b(\xi) + \tau_b - b_*]r(t), \end{aligned} \quad (4.17)$$

получаемое при вычитании (4.16) из (4.15). Уравнение (4.17) является частным случаем (4.11); внешним воздействием в (4.17) является  $q(t) = \text{col}(x_m(t), r(t))$ . Очевидно,  $q(t) \in \mathcal{B}$ , поскольку  $r(t) \in \mathcal{B}$  и матрица  $A_*$  гурвицева. Выберем оценочную функцию  $Q(x) = x^*Hx$ , где  $H = H^* > 0$  —  $n \times n$ -матрица, удовлетворяющая неравенству  $HA_* + A_*^*H < 0$  (существование такой матрицы  $H$  следует из гурвицевости  $A_*$ ). Легко проверяется выполнение всех необходимых условий гладкости, выпуклости, роста и достижимости теорем 2.4.1, 2.4.2. При этом идеальные значения подстраиваемых параметров определяются равенствами  $(\tau_A)_* = A_* - A(\xi)$ ,  $(\tau_b)_* = b_* - b(\xi)$ . Полагая для простоты  $\Gamma = \gamma I$ ,  $\gamma > 0$ ,

перепишем алгоритм скоростного градиента (4.13) в виде

$$\begin{aligned} d\tau_A/dt &= -\gamma H x(t)x_0(t)^*, \\ d\tau_b/dt &= -\gamma H x(t)r(t). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Применяя теорему 2.4.2, получаем, что поставленные цели будут достигаться, если функция  $f_1(0, q(t)) = \text{col}(x_m(t), r(t))$  строго предельно невырождена.

Следующая теорема показывает, что для строгой предельной невырожденности функции  $\text{col}(x_m(t), r(t))$  достаточно, чтобы модель (4.16) была устойчивой и управляемой, а функция  $r(t)$  была достаточно «разнообразной»: ее спектр содержал не менее  $n$  различных частот.

**Теорема 2.4.3.** Пусть в уравнении (4.16) матрица  $A_*$  гурвицева, а пара  $(A_*, b_*)$  управляема. Пусть функция  $r(t)$  представима абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом

$$r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos \omega_k t, \quad (4.19)$$

где  $\omega_k > 0$ ,  $\inf_{k \neq l} |\omega_k - \omega_l| > 0$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} |\rho_k| < \infty$  и среди чисел  $\rho_k$  не менее  $n$  отличны от нуля. Тогда вектор-функция  $\text{col}(x_m(t), r(t))$  строго предельно невырождена.

Отметим, что к классу (4.19) относятся, в частности, тригонометрические полиномы, почти-периодические функции, кусочно-непрерывные и кусочно-гладкие периодические функции и т. д. Примером функции  $r(t)$ , удовлетворяющей условиям теоремы 2.4.3 для любого  $n$ , является прямоугольная волна (меандр)  $r(t) = a \operatorname{sign} \sin(\omega t + \varphi)$ .

Можно показать, что результат, аналогичный теореме 2.4.3, верен, если внешнее воздействие  $r(t)$  является стационарным случайным процессом, спектральная функция которого имеет не менее  $n$  ненулевых точек роста (например, если процесс  $r(t)$  имеет спектральную плотность). В этом случае вектор-функция  $\text{col}(x_m(t), r(t))$  будет строго предельно невырожденной для почти всякой реализации процесса  $r(t)$  и, следовательно, алгоритм (4.18) будет идентифицирующим с вероятностью единица (т. е. оценки  $\tau(t)$  будут сильно состоятельными).

**2.4.3°. Огрубление алгоритмов скоростного градиента.** Установленные в п. 2.4.1° условия достижения ЦУ (услов-

вия работоспособности алгоритмов адаптации) в практических задачах могут оказаться частично нарушенными. Например, может оказаться существенным действие неизмеряемых возмущений (помех), непредвиденных изменений (дрейфа) параметров ОУ. Могут проявиться неточности математического описания ОУ (неучтенные нелинейности, инерционности) и т. д. У практически работоспособной адаптивной системы свойство адаптивности должно сохраняться хотя бы при малых воздействиях указанных факторов. Такие свойства принято называть *грубыми* по отношению к данным факторам. Грубость свойства адаптивности системы является, таким образом, важным условием ее практической применимости.

Простые примеры показывают, что алгоритмы скоростного градиента могут не обеспечивать грубысти системы по отношению к возмущениям. Действительно, пусть ОНО описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = (a + \tau) x + v, \quad (4.20)$$

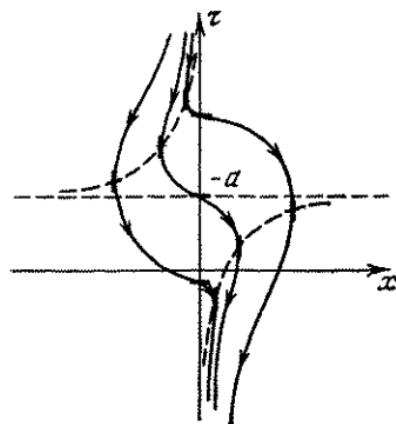
в котором все величины скалярны,  $v$  — постоянное (но неизвестное) возмущение. Если для построения алгоритма скоростного градиента с целью стабилизации объекта

(4.20) взять  $Q(x) = x^2$ , придем к соотношению

$$\frac{d\tau}{dt} = -\gamma x^2, \quad (4.21)$$

где  $\gamma > 0$ . Из теоремы 2.4.1 следует, что при  $v = 0$  траектории системы (4.20), (4.21) ограничены и  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Построение фазового портрета системы (4.20), (4.21) при  $v \neq 0$  показывает (рис. 2.3), что  $\tau(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Рис. 2.3.



Рассмотрим некоторые способы огрубления алгорит-

мов скоростного градиента, позволяющие обеспечить ограниченность траекторий системы управления при действии возмущений. Это требование вынуждает отказаться от ЦУ (4.3), обеспечение которой при наличии возмущений требует неограниченности коэффициентов обратной связи.

Возможные формулировки ЦУ зависят от априорной информации о возмущениях. Мы рассмотрим три варианта ЦУ, достижимые соответственно при «сильном», «среднем» и «слабом» огрублении алгоритма. ОНО будем описывать уравнением

$$dx/dt = F(x, \tau, t, \xi) + v(t, \xi), \quad (4.22)$$

где  $v(t, \xi)$  — вектор возмущений. В уравнение адаптора (4.2) также введем аддитивные возмущения  $w(t, \xi)$ . (Они могут быть обусловлены, например, помехами измерений или погрешностями реализации алгоритма. Кроме того, при наличии дрейфа параметров объекта «идеальный» вектор  $\tau_*$  изменяется во времени ( $\tau_* = \tau_*(t)$ ), что эквивалентно действию возмущения  $w(t, \xi)$ , пропорционального  $d\tau_*(t)/dt$  — скорости дрейфа.) Функции  $v(t, \xi)$ ,  $w(t, \xi)$  будем считать ограниченными:

$$|v(t, \xi)| \leq C_v(\xi), \quad |w(t, \xi)| \leq C_w(\xi). \quad (4.23)$$

Первый способ огрубления относится к случаю, когда априорная информация об уровнях возмущений отсутствует. В этом случае поведение ОНО может быть весьма разнообразным и, по-видимому, единственное разумное требование, которое можно предъявлять к работоспособной системе, — это ограниченность в каком-то смысле ее траекторий. Мы будем считать целью управления теперь *диссипативность* системы — сходимость всех ее траекторий в некоторую ограниченную область, не зависящую от начальных условий. Как показывает приведенный пример, диссипативность в системе (4.22), (4.2) нарушается по причине стремления  $\tau(t) \rightarrow \infty$ . Поэтому для огрубления алгоритма введем в правую часть (4.2) «штрафную» добавку, мешающую неограниченному увеличению подстраиваемых коэффициентов. Пусть  $\omega(\tau)$  — гладкая выпуклая «штрафная» функция, растущая при  $|\tau| \rightarrow \infty$  быстрее, чем линейно, т. е.

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \omega(\tau)/|\tau| = +\infty. \quad (4.24)$$

Огрубленный алгоритм скоростного градиента имеет вид

$$d\tau/dt = -\Gamma \text{grad}_\tau [\varphi(x, \tau, t, \xi) + \omega(\tau)] + w(t, \xi), \quad (4.25)$$

где, как и раньше,

$$\varphi(x, \tau, t, \xi) = \partial Q(x, t)/\partial t + [\text{grad}_x Q(x, t)]^* F(x, \tau, t, \xi). \quad (4.26)$$

В частности, если  $\omega(\tau) = \mu |\tau|^2$ ,  $\mu > 0$ , то  $\text{grad } \omega(\tau) = 2\mu t$  и огрубление состоит во введении в алгоритм адаптации отрицательной обратной связи. На практике удобно не «портить» алгоритм при небольших значениях  $\tau$ , положив, например,  $\omega(\tau) = \mu(|\tau| - d)^2$  при  $|\tau| \geq d$  и  $\omega(\tau) = 0$  при  $|\tau| < d$ , где  $\mu > 0$ ,  $d > 0$ . Условия работоспособности системы (4.22), (4.25) даются следующей теоремой.

**Теорема 2.4.4.** Пусть выполнены условия теоремы 2.4.1, соотношения (4.23), (4.24), и пусть

$$\sup_{t \geq 0} \|\text{grad}_x Q(x, t)\|Q(x, t)^{-1} \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (4.27)$$

Тогда система (4.22), (4.25) диссипативна.

Следующий способ огрубления применяется, когда верхние границы уровней возмущений известны, т. е.  $C_v(\xi) = C_v$ ,  $C_w(\xi) = C_w$ . При этом ЦУ можно задать соотношением

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) \leq \varepsilon, \quad (4.28)$$

в котором величина  $\varepsilon$  (порог) определяется уровнями возмущений. Для определения возможных значений  $\varepsilon$  предположим, что параметры ОУ (вариант  $\xi$ ) известны. Тогда, если параметры  $\tau$  «идеально» настроены (т. е.  $\tau = \tau_*(\xi)$ ) и при  $v(x, \tau, t) \equiv 0$  выполнено условие достижимости (4.7), то производная функции  $Q(x, t)$  в силу уравнения (4.22) удовлетворяет неравенству  $\dot{Q}(x, t) \leq -\rho Q(x, t) + C_v \|\text{grad}_x Q(x, t)\|$ . Если, кроме того, функция  $Q(x, t)$  удовлетворяет условию

$$|\text{grad}_x Q(x, t)| \leq C_Q \|Q(x, t)\|^\mu, \quad 0 \leq \mu < 1, \quad (4.29)$$

то из леммы п. 3.1.8° следует справедливость (4.28) при  $\varepsilon = \varepsilon_* = (C_Q C_v / \rho)^{1/(1-\mu)}$ , причем при соблюдении перечисленных условий величину  $\varepsilon$  в (4.28) нельзя уменьшить. Предлагаемый ниже способ огрубления позволяет достичь ЦУ (4.28) при неизвестном  $\xi$  и произвольном  $\varepsilon > \varepsilon_*$ . Этот способ состоит во введении в алгоритм зоны нечувствительности по величине  $Q(x(t), t)$ . Считая для простоты

$w(x, \tau, t) \equiv 0$ , зададим алгоритм адаптации соотношениями

$$\frac{d\tau}{dt} = \begin{cases} -\Gamma \operatorname{grad}_x \varphi(x, \tau, t, \xi), & \text{если } Q(x(t), t) > \varepsilon, \\ 0, & \text{если } Q(x(t), t) \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (4.30)$$

Алгоритм (4.30) можно рассматривать как непрерывный аналог конечно-сходящихся алгоритмов решения РН (см. § 2.1). При этом неравенство  $Q(x(t), t) \leq \varepsilon$  трактуется как целевое: изменение  $\tau(t)$  происходит только при его нарушении.

**Теорема 2.4.5.** Пусть выполнены условия теоремы 2.4.1 и, кроме того, условие (4.29). Если порог  $\varepsilon$  в алгоритме (4.30) удовлетворяет неравенству  $\varepsilon > \varepsilon_*$ , где  $\varepsilon_* = (C_Q C_v / \rho)^{1/(1-\mu)}$ , то все траектории системы (4.22), (4.30) ограничены, существует конечный  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t)$  и цель управления (4.28) достигается.

**З а м е ч а н и е.** Алгоритм (4.30) описывается дифференциальным уравнением с разрывной правой частью. Поэтому на поверхности разрыва  $Q(x, t) = \varepsilon$  правую часть (4.30) необходимо доопределить из условия существования решения системы (4.22), (4.30). Такое доопределение не отражается на работе алгоритма и может быть сделано стандартными способами.

Отметим также, что требуемое в теореме неравенство (4.29) ограничивает скорость роста величины  $|\operatorname{grad}_x Q(x, t)|$  сильнее, чем условие (4.27). Легко видеть, что (4.29) выполнено для функций  $Q(x, t)$ , имеющих степенной порядок роста. Например, для квадратичных функций  $Q(x, t) = x^* H x$ , где  $H > 0$  —  $n \times n$ -матрица, условие (4.29) выполнено при  $\mu = 1/2$ . Если  $Q(x, t) = (x^* H x)^v$ ,  $H > 0$ ,  $v \geq 1/2$ , то (4.29) выполнено при  $\mu = 1 - (2v)^{-1}$ .

Можно вводить зону нечувствительности в алгоритм адаптации иначе, учитывая значения производной функции  $Q(x(t), t)$ . Целевое неравенство при этом берется в виде

$$dQ(x(t), t)/dt + \rho' Q(x(t), t) < \rho' \varepsilon \quad (\rho' > 0, \varepsilon > 0) \quad (4.31)$$

и является дифференциальным. Выполнение (4.31) обеспечивает убывание  $Q(x(t), t)$  в области  $Q(x, t) > \varepsilon$ , что в конечном итоге также приводит к достижению ЦУ (4.28).

**Теорема 2.4.6.** Пусть выполнены условия теоремы 2.4.1 и условие (4.29), а алгоритм адаптации имеет вид

$$d\tau/dt = \begin{cases} -\Gamma \operatorname{grad}_\tau \varphi(x, \tau, t, \xi), & \text{если } dQ/dt + \rho' Q > \rho'e, \\ 0, & \text{если } dQ/dt + \rho' Q < \rho'e, \end{cases} \quad (4.32)$$

где  $e \geq e_0 = (1 - \mu) [\mu (\rho - \rho')^{-1}]^{\mu(1-\mu)^{-1}} (C_v C_Q)^{(1-\mu)^{-1}} (\rho')^{-1}$ ,  $0 < \rho' < \rho$ .

Тогда в системе (4.22), (4.32) все траектории ограничены и достигается ЦУ (4.28). Наименьшая допустимая величина  $e$  получается при выборе  $\rho' = \rho (1 - \mu)$  и определяется неравенством  $e \geq e_*$ , где  $e_* = (C_v C_Q \rho^{-1})^{(1-\mu)^{-1}}$ .

Теорема 2.4.6 показывает, что алгоритм (4.32), как и алгоритм (4.30), позволяет достичь ЦУ (4.28) с величиной  $e$ , сколь угодно близкой к  $e_*$ , где  $e_*$  — минимально возможный уровень в (4.28), достижимый при известном  $\tau_*$ .

Последний вариант огрубления алгоритмов скоростного градиента относится к случаю, когда действующие на систему возмущения достаточно малы. В этом случае целью управления считается устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

**Определение 2.4.2.** Траектория  $z_*(t)$  системы  $dz/dt = \Phi(z, t)$  называется *устойчивой при постоянно действующих возмущениях*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для решения  $z(t)$  возмущенной системы  $dz(t)/dt = \Phi(z, t) + f(z, t)$  из неравенств  $|z(0) - z_*(0)| < \delta$ ,  $|f(z, t)| < \delta$  следует, что  $\sup_{t \geq 0} |z(t) - z_*(t)| < \varepsilon$ .

Нетрудно видеть, что устойчивая при постоянно действующих возмущениях адаптивная система сохраняет работоспособность в условиях малых ограниченных помех, с заменой ЦУ (4.3) на (4.28) при достаточно малом  $\varepsilon > 0$ . Однако при этом предполагаются малыми начальные отклонения от возмущенной траектории, в частности начальные отклонения подстраиваемых параметров от «идеальных» значений, что означает узость класса адаптации. Тем не менее такая постановка представляет интерес, например, для задач отслеживания дрейфа параметров ОУ, в которых вариант  $\xi$  предполагается вначале известным, но медленно изменяющимся неизвестным заранее образом.

Рассмотрим подробнее случай линейно параметризованного ОНО вида (4.11). Пусть в (4.11)  $\xi = \xi(t)$ , т. е. ОНО описывается уравнением

$$dx/dt = f_0(x, t) + \tau' f_1(x, t),$$

где  $\tau' = \tau - \tau_*(\xi(t))$  — отклонение подстраиваемых параметров от «идеальной» траектории. Закон изменения  $\tau'(t)$  в силу (4.13) имеет вид

$$d\tau'/dt = -\Gamma \operatorname{grad} Q(x) f_1(x, t)^* - d\tau_*(\xi(t))/dt.$$

Мы получили возмущенную систему, в которой в качестве возмущения выступает скорость дрейфа  $d\tau_*(\xi(t))/dt$ . Для практически работоспособных адаптивных систем медленный дрейф параметров ОУ должен приводить к малым отклонениям траекторий системы, что как раз и означает устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

Оказывается, адаптивная система может приобрести свойство устойчивости при постоянно действующих возмущениях без какой-либо модификации адаптивного регулятора. Необходимую грубость системе придает разнообразие внешних воздействий, вследствие которого алгоритм адаптации становится идентифицирующим. Сформулируем точное утверждение для системы (4.11), (4.13).

**Теорема 2.4.7.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.4.2. Тогда решение  $(0, \tau_*)$  системы (4.11), (4.13) устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

Теорема 2.4.7 сразу следует из теоремы 2.4.2, если учесть, что равномерно асимптотически устойчивая система устойчива при постоянно действующих возмущениях (см., например, [56a]).

Из теорем 2.4.3, 2.4.7 следует, что в системе (4.15) — (4.18) малые начальные отклонения состояния ОУ (4.15) и модели (4.16) остаются малыми при наличии малых координатных и медленных параметрических возмущений, если модель (4.16) устойчива и управляема, а спектр внешнего воздействия  $r(t)$  содержит не менее  $n$  различных частот.

Подводя итог, можно сказать, что мы рассмотрели три способа огрубления алгоритма адаптации: «сильное» огрубление (введение в алгоритм отрицательной обратной связи), «среднее» огрубление (введение в алгоритм зоны

нечувствительности), наконец, «слабое» огрубление, достигаемое за счет разнообразия внешних воздействий. Выбор того или иного способа определяется априорной информацией об уровне возмущений и спецификой конкретной задачи.

## § 2.П. Приложение

**2.П.1°. Последовательности случайных величин, близкие к суперmartингалам.** При изучении случайных процессов широкое распространение получил вероятностный аналог прямого метода Ляпунова. Так, при исследовании сходимости процедур метода стохастической аппроксимации § 2.2 или установлении различных вариантов закона больших чисел, на которых основаны результаты § 2.3, изучаются неотрицательные функции, которые убывают в среднем на последовательности с.в. Введение таких вероятностных аналогов функций Ляпунова позволяет установить эффективные условия сходимости (в том или ином вероятностном смысле) случайного процесса. Удобный метод получения таких условий основан на понятии суперmartингала.

**Определение 2.П.1.** Последовательность скалярных с.в.  $\xi_t$  называется *суперmartингалом* по отношению к монотонной последовательности  $\sigma$ -алгебр  $G_t$ ,  $G_t \leq G_{t+1}$ , если при каждом  $t$  существует  $M |\xi_t|$  и

$$M(\xi_{t+1} | G_t) \leq \xi_t. \quad (\text{П.1})$$

Используемое в (П.1) понятие условного математического ожидания  $M(\xi_{t+1} | G_t)$  с.в.  $\xi_{t+1}$  при условии  $G_t$  подробно объясняется в [66]. Само неравенство (П.1) предполагается выполненным с вероятностью 1.

Обычно  $\sigma$ -алгебра  $G_t$  порождается набором с.в.  $\xi_0^t$ ; в этом случае неравенство (П.1) записывают в виде  $M(\xi_{t+1} | \xi_0^t) \leq \xi_t$  и можно говорить о суперmartингале без упоминания  $\sigma$ -алгебр  $\{G_t\}$ .

Фундаментальный результат по сходимости суперmartингалов принадлежит Дж. Дубу ([66], с. 414). В приложениях обычно используется следствие из теоремы Дж. Дуба, которое приведем в следующей редакции.

**Теорема 2.П.1.** Если последовательность с.в.  $\{\xi_t\}$  удовлетворяет условиям

$$\mathbf{M}(\xi_{t+1} | \xi_0^t) \leq (1 + \mu_t) \xi_t + v_t, \quad (\text{П.2})$$

$\mathbf{M}|\xi_0| < \infty$ , где  $\mu_t$  — неотрицательные числа и  $v_t = v_t(\xi_0^t)$  — неотрицательные функции такие, что  $\sum_{t=0}^{\infty} \mu_t < \infty$ ,  $\sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{M}v_t < \infty$ , то с вероятностью 1 последовательность  $\xi_t$  сходится к некоторой с.в.  $\xi$ , причем  $\mathbf{M}|\xi| < \infty$ .

Доказательство теоремы 2.П.1 хорошо известно и может быть найдено, например, в [113б], с. 83. Напомним, что сходимость с вероятностью 1 означает сходимость на почти каждой реализации процесса  $\xi_0^{\infty}$ .

Теорема 2.П.1 является основным инструментом при доказательстве сходимости стохастических алгоритмов адаптации и идентификации, изучаемых в этой книге.

**2.П.2°.** Закон больших чисел для независимых случайных величин. Приведем следствие теоремы 2.П.1, на которое в дальнейшем придется неоднократно ссылаться.

**Теорема 2.П.2.** Пусть  $\xi_t^t$  — последовательность стохастически независимых (векторных) с.в. со свойствами

$$\mathbf{M}\xi_t = 0, \quad \mathbf{M}|\xi_t|^2 \leq C_{\xi} < \infty \quad (\text{П.3})$$

и  $\{v_t\}$  — последовательность функций  $v_t = v_t(\xi_0^{t-1})$ , удовлетворяющая при некотором  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1/2$ ) условию

$$\sum_{t=0}^{\infty} t^{-2(1-\varepsilon)} \mathbf{M}v_t^2 < \infty. \quad (\text{П.4})$$

Тогда с вероятностью 1 и в среднеквадратичном

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-(1-\varepsilon)} \sum_{s=1}^t v_s \xi_s = 0. \quad (\text{П.5})$$

Доказательство теоремы 2.П.2 основано на рассмотрении функции Ляпунова  $V_t = \left(t^{-(1-\varepsilon)} \sum_{s=0}^t v_s \xi_s\right)^2$ , для которой легко устанавливается неравенство  $\mathbf{M}(V_{t+1} | \xi^t) \leq V_t - [(1 + t^{-1})^{2(1-\varepsilon)} - 1] V_t + (t + 1)^{-2(1-\varepsilon)} C_{\xi}^2 v_{t+1}^2$ , что позволяет применить теорему 2.П.1. Поэтому с вероятностью 1 существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_t = V_*$ . Из полученного неравенства

также следует сходимость ряда  $\sum_{t=1}^{\infty} t^{-1} \mathbf{M} V_t$ , а потому на подпоследовательности  $V_{t_k} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , т. е.  $V_* \equiv 0$ ; это доказывает (П.5) с вероятностью 1. Существование  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{M} V_t$  устанавливается теперь элементарно, что и завершает доказательство теоремы 2.П.2.

### § 2.Д. Доказательства лемм и теорем

**2.Д.1°. Доказательство теоремы 2.1.1.** Положим  $V_t = |\tau_t - \tau_*|^2$ ,  $\Delta V_t = V_{t+1} - V_t$ . Имеем из (1.13)

$$\Delta V_t = 0, \text{ если } |\eta_t| \leq \varepsilon_t (< \varepsilon_t). \quad (\text{Д.1})$$

Скажем, что в момент  $t$  имеет место случай (I), если  $|\eta_t| \leq \varepsilon_t (< \varepsilon_t)$ . Пусть  $|\eta_t| > \varepsilon_t (\geq \varepsilon_t)$ . Из (1.11) следует, что  $|a_t| \neq 0$ . Соотношение (1.13) запишем в виде  $\tau_{t+1} = \tau_t - \zeta_t a_t |a_t|^{-2}$ , где  $\zeta_t = \eta_t$ , если  $|\eta_t| \geq \kappa \varepsilon_t$ , и  $\zeta_t = (\eta_t - \rho \varepsilon_t \operatorname{sign} \eta_t)$ , если  $\varepsilon_t < |\eta_t| < \kappa \varepsilon_t$  ( $\varepsilon_t \leq \eta_t < \kappa \varepsilon_t$ ). Найдем  $\Delta V_t$ . Имеем

$$\begin{aligned} -\Delta V_t &= (\tau_t - \tau_{t+1}, \tau_t + \tau_{t+1} - 2\tau_*) = \\ &= \zeta_t |a_t|^{-2} [2(a_t, \tau_t) - 2(a_t, \tau_*) - \zeta_t]. \end{aligned} \quad (\text{Д.2})$$

Добавляя и вычитая в квадратной скобке величину  $2a_t$  и обозначая  $\eta_t^* = (a_t, \tau_*) + a_t$ , получим

$$-\Delta V_t = (2\eta_t - 2\eta_t^* - \zeta_t) \zeta_t |a_t|^{-2}. \quad (\text{Д.3})$$

Согласно (1.11),  $|\eta_t^*| \leq \rho \varepsilon_t$ .

Пусть  $\eta_t \geq \kappa \varepsilon_t$  (случай (II)). Тогда  $-\Delta V_t = (|\eta_t|^2 - 2\eta_t \eta_t^*) |a_t|^{-2}$ . Имеем  $|\eta_t|^2 - 2\eta_t \eta_t^* \geq |\eta_t| \times \times (|\eta_t| - 2|\eta_t^*|)$ . По условию  $\kappa \geq 2\rho$ ,  $\varepsilon_t \geq \varepsilon > 0$ . Поэтому  $|\eta_t| - 2|\eta_t^*| \geq \kappa \varepsilon_t - 2\rho \varepsilon_t > 0$  и, следовательно,  $-\Delta V_t \geq |\eta_t| \cdot (\kappa - 2\rho) \varepsilon_t |a_t|^{-2}$ , т. е. (см. (1.10))

$$-\Delta V_t \geq \kappa(\kappa - 2\rho) \varepsilon_t^2 |a_t|^{-2} \geq \delta_1, \text{ где } \delta_1 = \kappa(\kappa - 2\rho) \varepsilon^2. \quad (\text{Д.4})$$

Пусть  $\varepsilon_t < |\eta_t| < \kappa \varepsilon_t$ , или  $\varepsilon_t \leq |\eta_t| < \kappa \varepsilon_t$  (случай (III)). Тогда  $\zeta_t = \eta_t - \rho \varepsilon_t \operatorname{sign} \eta_t$  и, следовательно,  $\zeta_t \eta_t \geq 0$ ,  $|\zeta_t| = |\eta_t| - \rho \varepsilon_t$ . Из (Д.3) получаем

$$\begin{aligned} -\Delta V_t &= (2|\zeta_t \eta_t| - 2\zeta_t \eta_t^* - |\zeta_t|^2) |a_t|^{-2} \geq \\ &\geq |\zeta_t| (2|\eta_t| - 2|\eta_t^*| - |\zeta_t|) |a_t|^{-2}. \end{aligned}$$

Так как здесь

$$\begin{aligned} (\dots) &= |\eta_t| - 2|\eta_t^*| + \rho\varepsilon_t \geq \varepsilon_t - 2\rho\varepsilon_t + \rho\varepsilon_t = \\ &= (1-\rho)\varepsilon_t, \quad |\zeta_t| \geq (1-\rho)\varepsilon_t, \quad \text{то} \quad -\Delta V_t \geq \delta_2, \\ &\quad \text{где } \delta_2 = \varepsilon^2(1-\rho)^2. \end{aligned} \quad (\text{Д.5})$$

Поскольку  $V_t \geq 0$ , то

$$V_0 \geq V_0 - V_{T+1} = \sum_{t=0}^T (-\Delta V_t) = \sum_{(\text{I})} + \sum_{(\text{II})} + \sum_{(\text{III})},$$

где в правой части сумма разбита на три слагаемых, соответствующих случаям (I), (II), (III). Число  $r_T^0$  ошибок для моментов  $0, 1, \dots$  равно числу случаев (II) и (III) в сумме. Так как  $\Delta V_j = 0$ ,  $\Delta V_j \geq \delta_1$ ,  $-\Delta V_j \geq \delta_2$  для случаев (I), (II), (III) соответственно (см. (Д.1), (Д.4), (Д.5)), то общее число  $r^0$  ошибок конечно и  $V_0 \geq r^0 \min(\delta_1, \delta_2)$ , т. е.

$$r^0 \leq V_0 [\min(\delta_1, \delta_2)]^{-1} = |\tau_0 - \tau_*|^2 [\min(\delta_1, \delta_2)]^{-1}.$$

Отсюда и из (Д.4), (Д.5) следует оценка (1.14).

**2.Д.2°. Доказательство теоремы 2.1.2.** Положим снова  $V_t = |\tau_t - \tau_*|^2$ ,  $\Delta V_t = V_{t+1} - V_t$ . При  $v_t = 1$  имеем из (1.24)  $\tau_{t+1} = \tau_t$ ,  $\Delta V_t = 0$ . Пусть  $v_t = -1$ . Обозначим

$$\eta_t^* = \beta_t(a_t, \tau_*) + \alpha_t, \quad \zeta_t = \mu_t \eta_t \operatorname{sign}_t \beta_t. \quad (\text{Д.6})$$

Тогда равно (Д.2). Из (Д.2)  $(-\Delta V_t) = \zeta_t \beta_t^{-1} |a_t|^{-2} \times (2\eta_t - 2\eta_t^* - \beta_t \zeta_t)$ , т. е.  $(-\Delta V_t) = \mu_t |\beta_t|^{-1} |a_t|^{-2} \times (2\eta_t - 2\eta_t \eta_t^* - |\beta_t| \mu_t \eta_t^2)$ . Так как  $|\beta_t| \leq C_\beta$ ,  $0 < \mu' \leq \mu_t \leq \mu''$ ,  $|\eta_t| \geq \varepsilon_t$ ,  $|\eta_t^*| \leq \rho \varepsilon_t \leq \rho |\eta_t|$ , то  $(-\Delta V_t) \geq \geq \mu_t |\beta_t|^{-1} |a_t|^{-2} \eta_t^2 (2 - 2\rho - C_\beta \mu'')$ . По предположению  $(\dots) > 0$ . Поэтому при  $v_t = -1$

$$(-\Delta V_t) \geq \mu' C_\beta^{-1} [2(1-\rho) - C_\beta \mu''] |a_t|^{-2} \eta_t^2. \quad (\text{Д.7})$$

Из второго неравенства (1.19) следует, что  $|a_t|^{-2} \eta_t^2 \geq \geq |a_t|^{-2} \varepsilon_t^2 \geq \varepsilon^2$ . Итак,  $(-\Delta V_t) \geq \delta = \mu' C_\beta^{-1} [2(1-\rho) - C_\beta \mu''] \varepsilon^2 > 0$  при  $v_t = -1$ . Как и выше, имеем для любого  $T \geq 0$

$$V_0 \geq V_0 - V_{T+1} = \sum_{t=0}^T (-\Delta V_t) = \sum_{v_t=-1, t < T} (-\Delta V_t) \geq r_T \delta,$$

где  $r_T$  — число ошибок в интервале  $0 \leq t < T + 1$ . Поэтому  $r_T \leq V_0 \delta^{-1} = |\tau_0 - \tau_*|^2 \delta^{-1}$ . Отсюда следует конечность числа  $r_\infty = r^0$  и оценка  $r^0 \leq |\tau_0 - \tau_*|^2 \delta^{-1}$ , указанная в теореме 2.1.2.

**2.Д.3°. Доказательство теоремы 2.1.1а.** Пусть выполнено условие (а) и  $|\eta_t| \geq \varepsilon_t (\geq \varepsilon_t)$  для некоторого  $t$ . Положим  $\zeta_{t+1} = \tau_t - \zeta_t a_t |a_t|^{-2}$ ,  $\eta_t = (a_t, \tau_t) + \alpha_t$ . Тогда (см. п. 2.Д.1°) справедливо (Д.3). Пусть  $\eta_t \zeta_t \geq 0$ . Так как  $|\eta_t^*| \leq \rho \varepsilon_t$ , то

$$\begin{aligned} (-\Delta V_t) &\geq 2 |\zeta_t| |\eta_t| - 2 |\zeta_t| |\eta_t^*| - |\zeta_t|^2 |a_t|^2 \geq \\ &\geq 2 |\zeta_t| (|\eta_t| - \rho \varepsilon_t) - |\zeta_t|^2 |a_t|^2. \end{aligned} \quad (\text{Д.8})$$

В (1.47)  $\zeta_t = \mu_t [\eta_t - \rho (\operatorname{sign} \eta_t) \varepsilon_t] |a_t|^{-2}$ , где  $\mu_t \geq 0$ ; следовательно, условие  $\eta_t \zeta_t \geq 0$  выполнено и  $|\zeta_t| = |\eta_t| - \rho \varepsilon_t$ . Поэтому

$$(-\Delta V_t) \geq (2\mu_t - \mu_t^2) |a_t|^{-2} (|\eta_t| - \rho \varepsilon_t)^2. \quad (\text{Д.9})$$

Так как  $|\eta_t| \geq \varepsilon_t$ ,  $0 < \mu' \leq \mu_t \leq \mu'' < 2$ ,  $|a_t|^{-1} \varepsilon_t \geq \varepsilon > 0$ , то

$$(-\Delta V_t) \geq \mu' (2 - \mu'') (1 - \rho)^2 \varepsilon^2. \quad (\text{Д.10})$$

Из этого неравенства, как и выше, следует конечная сходимость алгоритма (1.47) и оценка  $r^0 \leq |\tau_0 - \tau_*|^2 [\mu' \times \times (2 - \mu'')]^{-1} (1 - \rho)^{-2} \varepsilon^{-2}$  для числа  $r^0$ , указанная в теореме.

**2.Д.4°. Доказательство теорем 2.1.3 и 2.1.4.** Рассмотрим для определенности алгоритм (1.47). Другие варианты алгоритма «Полоска-1» (т. е. алгоритмы (1.13), (1.15), (1.16)) рассматриваются аналогично.

Пусть  $\tau_t$  изменяется по алгоритму (1.47). Пусть  $|\eta_t| > \varepsilon'_t$  в некоторый момент  $t$  и  $\varepsilon'_t \leq \varepsilon_t$ . Таких моментов не может быть бесконечно много: для них  $\varepsilon_t \geq \varepsilon |a_t|$ , где  $\varepsilon = \varepsilon^0 > 0$ ; поэтому для них справедливо неравенство (Д.10), откуда следует, что их конечное число (см. доказательство теоремы 2.1.1а). Пусть  $|\eta_t| > \varepsilon'_t$ ,  $\varepsilon'_t > \varepsilon_t$ , в некоторый момент  $t$ . Из (Д.9) имеем

$$\begin{aligned} (-\Delta V_t) &\geq \mu' (2 - \mu'') (1 - \rho)^{-2} |a_t|^{-2} (\varepsilon'_t)^2 \geq \\ &\geq \mu' (2 - \mu'') (1 - \rho)^2 (\varepsilon^0)^2 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, и таких моментов может быть лишь не

более чем конечное число. Итак, существует такое  $t_*$ , что  $|\eta_t| \leq \varepsilon'_t$  при  $t \geq t_*$ . Это означает, что (1.17) — конечно-решающий алгоритм условных РН (1.27), что и утверждает теорема 2.1.3.

В качестве  $\varepsilon'_t$  можно взять  $\varepsilon'_t = \varepsilon_t(1 + \delta |a_t|)$ ; условие  $\varepsilon'_t \geq \varepsilon^0 |a_t|$ ,  $\varepsilon^0 \leq 0$ , очевидно, выполнено. Таким образом, справедливо утверждение в замечании 1 к теореме 2.1.3. Покажем, что  $|\tau_{t+1} - \tau_t| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . При  $|\eta_t| \leq \varepsilon_t (< \varepsilon'_t)$  имеем  $|\tau_{t+1} - \tau_t| = 0$ . Пусть  $|\eta_t| > \varepsilon_t (> \varepsilon'_t)$ . Тогда  $|\zeta_t| = |\eta_t| - \rho \varepsilon_t \leq |\eta_t|$ ,  $|\tau_{t+1} - \tau_t| = |\zeta_t| |a_t|^{-1} \leq |\eta_t| |a_t|^{-1}$ . Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $\varepsilon'_t = \varepsilon |a_t|$ . По доказанному существует лишь конечное число моментов, для которых  $|\eta_t| \geq \varepsilon'_t$ , т. е.  $|\eta_t| |a_t|^{-1} \geq \varepsilon$ . Итак, существует такое  $T(\varepsilon)$ , что  $|\eta_t| |a_t|^{-1} \leq \varepsilon$  при  $t \geq T(\varepsilon)$ . Следовательно,  $|\eta_t| |a_t|^{-1} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , а значит, и  $|\tau_{t+1} - \tau_t| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Теорема 2.1.3 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.1.4. В отличие от теоремы 2.1.2 теперь не выполнено второе соотношение (1.19), т. е. неравенство  $\varepsilon_t \geq \varepsilon |a_t|$ . Это неравенство не использовалось при выводе условия (Д.7). Итак, (Д.7) справедливо. Пусть  $|\eta_t| \geq \varepsilon'_t$  в некоторый момент и, значит,  $|\eta_t| > \varepsilon^0 |a_t|$ . Из (Д.7) имеем  $(-\Delta V_t) \geq \delta > 0$ , т. е. таких моментов лишь конечное число: алгоритм (1.24) — конечно-решающий алгоритм РН (1.27).

Покажем, что  $|\tau_{t+1} - \tau_t| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . При  $v_t = 1$  имеем  $|\tau_{t+1} - \tau_t| = 0$ . Пусть  $v_t = -1$ . Из (1.24)  $|\tau_{t+1} - \tau_t| \leq \mu_t |\eta_t| |a_t|^{-1} \leq \mu'' |\eta_t| |a_t|^{-1}$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  — произвольное число. По доказанному для  $\varepsilon'_t = \varepsilon (\mu'')^{-1} |a_t|$  существует лишь конечное число моментов  $t$ , для которых  $|\eta_t| \geq \varepsilon (\mu'')^{-1} |a_t|$ , т. е. существует такое  $T(\varepsilon)$ , что  $|\tau_{t+1} - \tau_t| \leq \varepsilon$  при  $t \geq T(\varepsilon)$ . Это и означает, что  $|\tau_{t+1} - \tau_t| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**2.Д.5°. Доказательство теорем 2.1.5, 2.1.6, 2.1.6а.** В условиях теоремы 2.1.5 для функции (1.32) при  $(a_t, \tau_t) \leq 0$  имеем  $(-\Delta V_t) = V(\tau_t) - V(\tau_{t+1}) = -\zeta_t (a_t, 2\tau_t + \zeta_t a_t - 2v\tau_*) \geq \delta(v) = 2\varepsilon_* \rho' (v - v_0) > 0$ , где  $v_0 = C_{a_0}^2 \rho'' (2\varepsilon_*)^{-1}$ . Следовательно, алгоритм — конечно-сходящийся. Оценка для  $r^0$  следует из соотношения  $r^0 \leq V(\tau_0) \delta(v)^{-1}$ , если взять (при  $\tau_0 = 0$ ) минимум правой части по  $v > v_0$ .

В условиях теоремы 2.1.6 для  $V(\tau) = |\tau - \tau_*|^2$  в момент нарушения условного неравенства имеем  $\zeta_t \geq \rho_{r(t)}, \eta_t \leq 0$ ,

$$-\Delta V_t = \zeta_t \{-\zeta_t(2 - \beta_t) \eta_t + [(a_t, \tau_*) + \alpha_t] - \\ - \rho_{r(t)} |a_t|^2\} \geq \rho_{r(t)} [\varepsilon_* - \rho_{r(t)} C_a^2].$$

Пусть заключение теоремы неверно:  $r(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда  $\rho_{r(t)} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $\exists t_0: \varepsilon_* - \rho_{r(t)} C_a^2 \geq 2^{-1} \varepsilon_*$  при  $t \geq t_0$ . Суммируя значения  $(-\Delta V_t)$  для моментов нарушения условных неравенств в интервале  $t_0 \leq t \leq T$ , получаем  $\varepsilon_* (\rho_{r_0} + \rho_{r_0+1} + \dots + \rho_{r(T)}) \leq -V(\tau_{T+1}) + V(\tau_0) \leq V(\tau_0)$ , где  $r_0 = r(t_0)$ . Следовательно, ряд  $\rho_1 + \rho_2 + \dots$  сходится, что противоречит предположению теоремы. Итак,  $r(t) \leq \text{const}$ , т. е. (1.36) — КСА.

**З а м е ч а н и е.** Пусть  $\beta, \delta$  — произвольные числа такие, что  $0 < \beta \leq 2, \delta > 0$ . В теореме 2.1.6 для значений  $t$ , при которых  $(-\eta_t) \geq \delta |a_t|^2$ , можно брать  $\rho_t = 0$ ,  $\beta \leq \beta_t \leq 2$ . Действительно, в этом случае

$$(-\Delta V_t) \geq \varepsilon_* \beta \delta > 0.$$

В условиях теоремы 2.1.6а для функции  $V(\tau, \rho)$  имеем

$$V(\tau_t, \rho_t) - V(\tau_{t+1}, \rho_{t+1}) = 2\rho_t \eta_t \zeta_t - \zeta_t^2 [|a_t|^2 + \alpha_t^2] + \\ + 2\rho_* \zeta_t [(a_t, \tau_*) + \alpha_t] + 2\rho_* (\rho_{t+1} - \rho_t - \alpha_t \rho_t) \geq \\ \geq \delta (\rho_*) = 2\varepsilon_* \rho' [\rho_* - \rho'' C_a^2 (2\varepsilon_*)^{-1}] > 0. \quad (\text{Д.11})$$

Отсюда немедленно следует заключение теоремы.

Оценка для  $r^0$  получается так же, как и при доказательстве теоремы 2.1.5.

**2.Д.6°. Доказательство теоремы 2.1.7.** В основе доказательства лежит следующее простое утверждение.

**Лемма 2.Д.1.** *Предположим, что в условиях теоремы при  $t \geq 0$  для функции  $V(\tau) = |\tau - \tau_*|^2$  выполняются соотношения*

$$V(\tau_t) - V(\tau_{t+1}) \geq \varepsilon_{r(t)} \theta_t, \quad (\text{Д.12})$$

$$\theta_t = 1, \text{ если } \varphi_t(\tau_t) \leq 0; \theta_t = 0, \text{ если } \varphi_t(\tau_t) > 0, \quad (\text{Д.13})$$

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots = \infty, \quad \delta_0 \theta_0 + \delta_1 \theta_1 + \dots > -\infty. \quad (\text{Д.14})$$

Тогда неравенства  $\varphi_t(\tau_t) > 0$  могут быть нарушены не более чем для конечного числа моментов времени  $t$ , причем для числа  $r^0$  этих нарушений справедлива оценка

$r^0 \leqslant r$ , где  $r$  — наименьшее натуральное число, для которого справедливо неравенство

$$\min_{p \geqslant r} \sum_{s=0}^p \varepsilon_s + \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s \theta_s \geqslant V(\tau_0).$$

Доказательство. Суммируя неравенства (Д.12), найдем  $V(\tau_0) - V(\tau_{t+1}) \geqslant \varepsilon_{r(0)} + \dots + \varepsilon_{r(t)} + \delta_0 \theta_0 + \dots + \delta_t \theta_t$ . При  $t \rightarrow \infty$  получим  $\varepsilon_{r(0)} + \dots + \varepsilon_{r(\infty)} + \delta_0 \theta_0 + \dots \leqslant V(\tau_0) = |\tau_0 - \tau_*|^2$ . В силу (Д.14) из полученного неравенства следует конечность числа  $r(\infty) = r^0$  и оценка  $r^0 \leqslant r$ . Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Для функции  $V(\tau_t) = |\tau_t - \tau_*|^2$  из (1.42) в силу (1.40) получаем

$$V(\tau_t) - V(\tau_{t+1}) \geqslant \zeta_t \theta_t [2\varphi_t(\tau_*) - 2\varphi_t(\tau_t) - |\operatorname{grad}_{\tau} \varphi_t(\tau_t)|^2 \rho_{r(t)} + \beta_t \varphi_t(\tau_t)].$$

Так как  $0 \leqslant \beta_t \leqslant 2$  и  $\theta_t \varphi_t(\tau_t) \leqslant 0$ , то

$$V(\tau_t) - V(\tau_{t+1}) \geqslant \zeta_t \theta_t [2\varepsilon_* - |\operatorname{grad}_{\tau} \varphi_t(\tau_t)|^2 \rho_{r(t)}] \geqslant (\varepsilon_{r(t)} + \delta_t) \theta_t.$$

Здесь использовались условия (1.38), (1.39) и введены обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r(t)} &= \rho_{r(t)} [2\varepsilon_* - C_{\varphi} \rho_{r(t)}], \\ \delta_t &= -\beta_t \theta_t \varphi_t(\tau_t) [2\varepsilon_* - C_{\varphi} \rho_{r(t)}] |\operatorname{grad}_{\tau} \varphi_t(\tau_t)|^{-2}. \end{aligned}$$

Очевидно, величины  $\varepsilon_t$ ,  $\delta_t$  удовлетворяют условиям (Д.14) (напомним, что  $\theta_t \varphi_t(\tau_t) \geqslant 0$ ). В силу леммы отсюда следует конечная сходимость алгоритма (1.42) и оценка (1.44) для числа  $r^0$ . Теорема 2.1.7 доказана

2.Д.7°. Доказательство теоремы 2.1.8. Убедимся прежде всего, что  $|a_t| \neq 0$  при  $\theta_t = 1$ , где

$$\theta_t = \begin{cases} 1, & \text{если } |\alpha_t - a_t \tau_t| \geqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |a_t|, \\ 0, & \text{если } |\alpha_t - a_t \tau_t| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |a_t|. \end{cases}$$

Действительно, из (1.49) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1*} + \varepsilon_{2*} |a_t| &> |\alpha_t - a_t \tau_t + a_t (\tau_t - \tau_*)| \geqslant \\ &\geqslant |\alpha_t - a_t \tau_t| - |a_t (\tau_t - \tau_*)| \geqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |a_t| - \\ &\quad - |a_t (\tau_t - \tau_*)|. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом  $\kappa > 0$  и (1.53) (либо (1.54)) находим

$$|a_t(\tau_t - \tau_*)| \geq (\varepsilon_1 - \varepsilon_{1*}) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_{2*}) |a_t| > 0,$$

т. е.  $|a_t| \neq 0$ .

Предполагая, что выполнено условие (1.53), из (1.55) получим

$$\begin{aligned} V(\tau_{t+1}) - V(\tau_t) &\leq \\ &\leq \kappa \theta_t [2(a_t(\tau_t - \tau_*), \eta_t) + \kappa |\eta_t|^2] |a_t|^{-2} = \\ &= \kappa \theta_t [-2|\eta_t|^2 + 2(a_t - a_t \tau_*, \eta_t) + \kappa |\eta_t|^2] |a_t|^{-2} \leq \\ &\leq -\kappa \theta_t |\eta_t| [(2 - \kappa) |\eta_t| - 2 |a_t - a_t \tau_*|] |a_t|^{-2} \leq \\ &\leq -\kappa \theta_t |\eta_t| [\varepsilon_2 (2 - \kappa) - 2 \varepsilon_{2*}] |a_t|^{-1} \leq \\ &\leq -\kappa \theta_t \varepsilon_2 [\varepsilon_2 (2 - \kappa) - 2 \varepsilon_{2*}] = -\varepsilon \theta_t. \quad (\text{Д.15}) \end{aligned}$$

Теперь пусть выполняются условия (1.54), (1.54). Повторяя выкладки (Д.15) с учетом этих условий, получим

$$\begin{aligned} V(\tau_{t+1}) - V(\tau_t) &\leq -\kappa \theta_t |\eta_t| [\varepsilon_1 (2 - \kappa) - 2 \varepsilon_{1*}] |a_t|^{-2} \leq \\ &\leq -\kappa \varepsilon_1 \theta_t [\varepsilon_1 (2 - \kappa) - 2 \varepsilon_{1*}] C_a^{-2} = -\varepsilon \theta_t. \end{aligned}$$

В обоих случаях оказались выполненными условия леммы 2.Д.1, причем в данном случае  $\varepsilon_{r(t)} = \varepsilon_1$ ,  $\delta_t = 0$ , что приводит к оценке (1.15). Теорема 2.1.8 доказана

**2.Д.8°. Доказательство теорем 2.1.9 и 2.2.1.** Доказательство теоремы 2.1.9 приведено в [91], с. 25, 26. Теорема 2.2.1 приводится во многих работах, связанных с методом стохастической аппроксимации. Современный способ ее доказательства основан на теореме типа 2.Н.1 и может быть найден, например, в [143б], с. 144–146. Более общее утверждение доказывается в [89а].

**2.Д.9°. Доказательство теоремы 2.2.2.** С.в.  $|\Delta_t|^2 = |\tau_t - \tau|^2$  в силу процедуры (2.12) сходятся с вероятностью 1 и в среднеквадратичном к некоторой с.в.  $\theta_*$ :  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta_t|^2 = \theta_*$ . Это доказывается точно теми же средст-

вами, что и теорема 2.2.1, и учитывается равенство  $y_{t+1} - \varphi_t \Phi_t^* \tau_t = \Phi_t^*(\tau - \tau_t) + v_{t+1}$ , следующее из (2.9). При этом в силу алгоритма (2.12) элементарно устанавливается неравенство

$$M |\Delta_{t+1}|^2 \leq M |\Delta_t|^2 - \gamma_t M |\Phi_t^* \Delta_t|^2 (2 - \gamma_t C_\Phi^2) + \gamma_t^2 C, \quad (\text{Д.16})$$

где  $C_\Phi = \sup_t |\Phi_t|$ ,  $C = C_\Phi^2 C_v^2 + C_w^2$ . Конечность  $C_\Phi$  следует из устойчивости характеристического полинома  $g(\lambda)$  системы (3.17), (3.21) и ограниченности помехи  $v_t$ . Предположим, что справедлива оценка

$$\mathbb{M} (\Phi_t^* \Delta_t)^2 \geq \rho \mathbb{M} |\Delta_t|^2 \quad (\text{Д.17})$$

с некоторым  $\rho > 0$ . Тогда из (Д.16) следует неравенство  $\sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t \mathbb{M} |\Delta_t|^2 < \infty$ , откуда в силу  $\sum_{t=0}^{\infty} \gamma_t = \infty$  устанавливается, что  $\theta_* = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta_t|^2 = 0$  с вероятностью 1 и в среднеквадратичном. Таким образом, для завершения доказательства теоремы 2.2.2 осталось установить неравенство (Д.17). Из соотношения (2.19) имеем  $x_t = A^n x_{t-n} + \sum_{s=0}^{n-1} A^s B v_{t-s}$ , откуда в силу независимости с.в.  $v_t$  получим

$$\mathbb{M} (x_t x_t^* | x_0^{t-n}) \geq \sigma_v^2 \sum_{s=0}^{n-1} A^s B B^* (A^*)^s \geq \sigma_v \lambda_{\min} I_n > 0,$$

где через  $\lambda_{\min}$  обозначено наименьшее собственное значение матрицы  $\sum_{s=0}^{n-1} A^s B B^* (A^*)^s$ , которое положительно в силу управляемости пары  $(A(\tau), B(\tau))$ . Поскольку компоненты вектора  $\Phi_t$  являются компонентами вектора  $x_t$ , то справедливо также неравенство  $\mathbb{M} (\Phi_t \Phi_t^* | x_0^{t-n}) \geq \sigma_v^2 I_N$ , где  $N$  — размерность вектора  $\Phi_t$ . Из (2.12) имеем

$$\Delta_{t+1} = \Delta_{t-n+1} + \sum_{s=0}^{n-1} \gamma_{t-s} [\Phi_{t-s} (\Phi_{t-s}^* \Delta_{t-s} + v_{t-s+1} + w_{t-s+1})];$$

$$\begin{aligned} \text{отсюда, используя белошумность помех } v_t, w_t, \text{ получим} \\ \mathbb{M} [(\Phi_{t+1}^* \Delta_{t+1})^2 | x_0^{t-n+1}, w_0^{t-n+1}] = \\ = \mathbb{M} [(\Phi_{t+1}^* \Delta_{t-n+1})^2 | x_0^{t-n+1}, w_0^{t-n+1}] + \\ + 2 \mathbb{M} \left\{ \Phi_{t+1}^* \Delta_{t-n+1} \sum_{s=0}^{n-1} \gamma_{t-s} \Phi_{t+1}^* \Phi_{t-s} \Phi_{t-s}^* \Delta_{t-s} | x_0^{t-n+1}, w_0^{t-n+1} \right\} + \\ + \mathbb{M} \left[ \left| \sum_{s=0}^{n-1} \gamma_{t-s} \Phi_{t+1}^* \Phi_{t-s} \Phi_{t-s}^* \Delta_{t-s} \right|^2 | x_0^{t-n+1}, w_0^{t-n+1} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{s=0}^{n-1} \gamma_{t-s}^2 M [\sigma_v^2 |\Phi_{t+1}^* \Phi_{t-s}|^2 + C_w^2 |\Phi_{t+1}|^2 |x_0^{t-n+1}, w_0^{t-n+1}] \geq \\
 & \geq \Delta_{t-n+1}^* M [\Phi_{t+1}^* \Phi_{t+1} |x_0^{t-n+1}, w_0^{t-n+1}] \Delta_{t-n+1} - C' \max_{0 \leq s \leq n-1} \gamma_{t-s} \geq \\
 & \geq \rho |\Delta_{t-n+1}|^2 - C' \max_{0 \leq s \leq n-1} \gamma_{t-s}
 \end{aligned}$$

с некоторой постоянной  $C' > 0$ . Таким образом,  $M (\Phi_{t+1}^* \Delta_{t+1})^2 \geq \rho M |\Delta_{t-n+1}|^2 - C' \max_{0 \leq s \leq n-1} \gamma_{t-s}$ . Аналогично находим  $|\Delta_{t-n+1}|^2 \geq |\Delta_{t+1}|^2 - C'' \max_{0 \leq s \leq n-1} |\gamma_{t-s}|$  с некоторой постоянной  $C'' > 0$ . Собирая полученные оценки и учитывая, что  $\gamma_t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , убеждаемся в справедливости неравенства (Д.17) с некоторым  $\rho > 0$ . Теорема доказана.

**2.Д.10°. Доказательство теоремы 2.2.3.** Введем обозначение  $\Delta_t = \tau_t - \tau(\xi)$  и оценим приращения величин  $|\Delta_t|^2$  в силу (2.27):

$$\begin{aligned}
 |\Delta_{t+1}|^2 &= |\Delta_t|^2 + 2\delta \Phi_t^* \Delta_t r_t^{-1} (y_{t+1} - \hat{y}_{t+1}) + \\
 &\quad + \delta^2 |\Phi_t|^2 r_t^{-2} (y_{t+1} - \hat{y}_{t+1})^2. \quad (\text{Д.18})
 \end{aligned}$$

Так как величина  $g_t = y_{t+1} - \hat{y}_{t+1} - w_{t+1}$  в силу (2.24) зависит лишь от предыстории, из (Д.18) с учетом (2.22), (2.24) и (2.26) получаем

$$\begin{aligned}
 M |\Delta_{t+1}|^2 &\leq M |\Delta_t|^2 - 2\delta M r_t^{-1} g_t C(\nabla, \xi) g_t + \\
 &\quad + \delta M r_t^{-2} g_t^2 |\Phi_t|^2 + \delta^2 \sigma_w^2 M r_t^{-2} |\Phi_t|^2. \quad (\text{Д.19})
 \end{aligned}$$

Из (2.28) следует, что

$$r_t = 1 + \sum_{s=1}^t |\Phi_s|^2, \quad |\Phi_t|^2 \leq r_t, \quad \sum_{t=1}^{\infty} r_t^{-2} |\Phi_t|^2 < 1. \quad (\text{Д.20})$$

Равенство в (Д.20) выводится непосредственно из (2.28); из него очевидным образом следует первое неравенство (Д.20). Далее,

$$r_t^{-2} |\Phi_t|^2 \leq r_t^{-1} r_{t-1}^{-1} |\Phi_t|^2 = r_t^{-1} r_{t-1}^{-1} (r_t - r_{t-1}) = r_{t-1}^{-1} - r_t^{-1} \quad (\text{Д.21})$$

и, следовательно, выполняется второе неравенство (Д.20)

С учетом (Д.20) преобразуем (Д.19) к виду

$$M|\Delta_{t+1}|^2 \leq M|\Delta_t|^2 - \delta_1 Mr_t^{-2}g_t^2 - 2\delta Mr_t^{-1}g_t h_t + \delta^2 \sigma_w^2 Mr_t^{-2}|\Phi_t|^2,$$

где обозначено

$$h_t = [C(\nabla, \xi) - (\delta + \delta_1)/2]g_t. \quad (\text{Д.22})$$

В силу условия (2.30) и компактности множества  $\{\lambda : |\lambda| = 1\}$  существует такое достаточно малое  $\delta_1 > 0$ , что  $\operatorname{Re} C(\lambda) > \delta + \delta_1$  при  $|\lambda| = 1$ . Обозначим  $\bar{C}(\lambda, \xi) = C(\lambda, \xi) - \delta - \delta_1$ . Тогда в силу выбора  $\delta_1$  выполнено  $\operatorname{Re} \bar{C}(\lambda, \xi) > 0$  при любом  $|\lambda| = 1$  и полином  $\bar{C}(\lambda, \xi)$  не имеет корней в замкнутом единичном круге. Важное свойство соотношения (Д.21) приводится в следующем утверждении.

**Лемма 2.Д.2.** *Если полином  $\bar{C}(\lambda) = C(\lambda) - (\delta_1 + \delta)/2$  не имеет корней при  $|\lambda| \leq 1$  и при  $|\lambda| = 1$  выполнено  $\operatorname{Re} C(\lambda) > (\delta_1 + \delta_2)/2$ , то для произвольных последовательностей  $h_t, g_t$ , связанных соотношением (Д.22), справедливо неравенство*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^t Mh_s g_s > -\infty. \quad (\text{Д.23})$$

**Доказательство.** С помощью векторов

$$x_t = \operatorname{col}(g_t, g_{t-1}, \dots, g_{t-p}), \quad B = \operatorname{col}(1, 0, \dots, 0)$$

запишем соотношение (Д.22) в виде уравнения в стандартной форме

$$x_{t+1} = Ax_t + Bh_t, \quad g_t = B^*x_t. \quad (\text{Д.24})$$

Матрица  $A$  оказывается устойчивой в силу предположения о корнях полинома  $\bar{C}(\lambda)$ , причем пара  $\{A, B\}$  — управляемая. Согласно частотной теореме 3.1.2, для существования симметричной квадратичной формы  $V(x) = x^*Hx$ , удовлетворяющей неравенству

$$V(x_{t+1}) - V(x_t) \leq g_t h_t \quad (\text{Д.25})$$

при любых  $g_t, h_t$ , связанных соотношением (Д.24), необходимо и достаточно выполнение следующего условия: для любых комплексных величин  $\tilde{g}, \tilde{h}(\lambda)$ , связанных соотношением  $\tilde{h}(\lambda) = W(\lambda)\tilde{g}$ ,  $W(\lambda)$  — передаточная функция от  $g_t$  к  $h_t$  в системе (Д.24), справедливо неравенство

$\operatorname{Re} \tilde{g}^* h(\lambda) \geq 0$  при всех  $|\lambda| = 1$ . Передаточная функция  $W(\lambda)$  от  $g_t$  к  $h_t$  системы (Д.24) совпадает, как следует из (Д.22), с полиномом  $C(\lambda) = (\delta + \delta_1)/2$ , так что в силу условий леммы частотное неравенство выполнено и нужная квадратичная форма существует. В силу предположения о корнях полинома  $C(\lambda) = (\delta + \delta_1)/2$  эта форма неотрицательна. Суммируя неравенства (Д.25), убеждаемся, что

$$\sum_{s=1}^t g_s h_s \geq V(x_{t+1}) - V(x_0) \geq -V(x_0) > -\infty$$

в силу неотрицательности формы  $V(x)$ ; полученное неравенство доказывает лемму.

Продолжим доказательство теоремы. Неравенство (Д.23) означает, что существует постоянная  $R > 0$  такая, что при всех  $t$  неотрицательны величины  $\rho_t = 2\delta \sum_{s=1}^t g_s h_s + R$ .

Тогда для неотрицательной величины  $\Gamma_t = \Delta_t^2 + \rho_{t-1} r_{t-1}^{-1}$  получим, в силу (Д.21),

$$\begin{aligned} M\Gamma_{t+1} &= M |\Delta_{t+1}|^2 + Mr_t^{-1}\rho_t \leq \\ &\leq M |\Delta_t|^2 - \delta_1 Mr_t^{-1}g_t^2 + \delta^2 \sigma_w^2 Mr_t^{-2} |\Phi_t|^2 + 2Mr_t^{-1}\rho_{t-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что в силу  $\rho_{t-1} \geq 0$  и  $r_t \geq r_{t-1}$  выполнено  $r_t^{-1}\rho_{t-1} \leq r_{t-1}^{-1}\rho_{t-1}$ , найдем  $M\Gamma_{t+1} \leq M\Gamma_t - \delta_1 Mr_t^{-1}g_t^2 + \delta^2 \sigma_w^2 Mr_t^{-2} |\Phi_t|^2$ , откуда  $\delta_1 \sum_{s=1}^{\infty} Mr_s^{-1}g_s^2 \leq M\Gamma_0 - M\Gamma_{t+1} +$

$+ \delta^2 \sigma_w^2 \sum_{s=1}^t Mr_s^{-2} |\Phi_t|^2$ . Учитывая (Д.20), убеждаемся, что

$\sum_{t=1}^{\infty} Mr_t^{-1}g_t^2 < \infty$  или в силу теоремы о монотонной сходимости с вероятностью 1 выполняется

$$\sum_{t=1}^{\infty} r_t^{-1}g_t^2 < \infty. \quad (\text{Д.26})$$

**Лемма 2.Д.3.** С вероятностью 1 на событии  $\{\lim_{t \rightarrow \infty} r_t = \infty\}$  справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_t^{-1} \sum_{s=1}^t g_s^2 = 0. \quad (\text{Д.27})$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $V_t = r_t^{-1} \sum_{s=1}^t g_s^2$ . В силу (Д.26) легко убеждаемся в существовании конечного предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_t = \lim_{t \rightarrow \infty} r_t^{-1} \sum_{s=0}^t g_s^2 = V_*$$

и сходимости ряда

$$\sum_{t=1}^{\infty} r_{t+1}^{-1} (r_{t+1} - r_t) V_t = \sum_{t=1}^{\infty} r_{t+1}^{-1} |\Phi_{t+1}|^2 V_t. \quad (\text{Д.28})$$

Предположим, что  $V_* \neq 0$ . Тогда из сходимости ряда (Д.28) следует сходимость ряда

$$\sum_{t=1}^{\infty} |\Phi_{t+1}|^2 r_{t+1}^{-1}.$$

Этот вывод противоречив в силу следующего утверждения.

**Лемма 2.Д.4.** Пусть  $a_i$  — произвольные неотрицательные числа, для которых  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$ . Тогда  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^t a_i \left( \sum_{s=1}^i a_s \right)^{-1} = \infty$ .

**Доказательство.** Вводя кусочно-постоянную функцию  $f(t)$ , значения которой в точках  $t = t_i$  равны  $a_i$ , замечаем, что расходимость рассматриваемого ряда эквивалентна расходимости интеграла  $\int_1^T f(t) \left[ \int_1^t f(s) ds \right]^{-1} dt$  при  $T \rightarrow \infty$ . Но

$$\int_1^T \frac{f(t)}{\int_1^t f(s) ds} dt = \ln \int_1^T f(s) ds \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty,$$

$$\text{поскольку} \int_1^T f(s) ds = \sum_{k=1}^T f(k) = \sum_{k=1}^T a_k \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty.$$

Лемма 2.Д.4 доказана. Из сходимости ряда (Д.28) и расходимости ряда  $\sum_{t=1}^{\infty} |\Phi_{t+1}|^2 r_{t+1}^{-1}$  следует, что  $V_* = 0$ , т. е. приходим к утверждению леммы 2.Д.3.

Покажем, что с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \sum_{s=1}^t g_s^2 = 0. \quad (\text{Д.29})$$

Выполнение (Д.29) на событии  $\{\lim_{t \rightarrow \infty} r_t < \infty\}$  очевидно. Рассмотрим поэтому событие  $\{\lim_{t \rightarrow \infty} r_t = \infty\}$ , на котором в силу леммы 2.Д.3 имеет место равенство (Д.27). В силу равенства (Д.20), первой формулы (2.25) и первого условия теоремы 2.2.3 с вероятностью 1 справедливо неравенство  $t^{-1}r_t \leq C_1 + C_2 t^{-1}y_s^2$  для некоторых положительных постоянных  $C_1, C_2$ . В силу (2.22) отсюда с той же вероятностью выполняется неравенство

$$r_t t^{-1} \leq C_3 + C_4 G_t, \quad (\text{Д.30})$$

где, краткости ради, обозначено  $G_t = t^{-1} \sum_{s=1}^t g_s^2$  и  $C_3, C_4$  — некоторые положительные постоянные. Покажем, что событие  $\{\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \sum_{s=1}^t \hat{y}_s^2 = \infty\}$  имеет нулевую вероятность. Из (2.25), (2.29) и (Д.20) следует, что на этом событии  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1}r_t = \infty$ . С учетом вида  $g_t$  и в силу (2.29) и (2.30) отсюда следует, что на некоторой подпоследовательности  $G_{t_k} \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . Но в силу (Д.30) справедливо неравенство  $(tr_t^{-1})G_t \geq G_t (C_3 G_t + C_4)^{-1}$ , откуда  $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k r_{t_k}^{-1})G_{t_k} > 0$  в противоречие с (Д.27). Следовательно, рассматриваемое событие имеет нулевую вероятность и величины  $t^{-1} \sum_{s=1}^t \hat{y}_s^2$  ограничены равномерно по  $t$  на почти всех реализациях из события  $\{\lim_{t \rightarrow \infty} r_t = \infty\}$ . Из (Д.27) следует, что в том же смысле ограничены величины  $(t^{-1}r_t)$ , т. е. на событии  $\{\lim_{t \rightarrow \infty} r_t = \infty\}$  с точностью до события нулевой вероятности выполняется неравенство  $\lim_{t \rightarrow \infty} (tr_t^{-1}) > 0$ . В силу (Д.27) это означает справедливость (Д.29) с вероятностью 1. Из (Д.29) легко следует утверждение теоремы.

Действительно, из вида величины  $g_t$  и (2.24) следует, что  
 $g_t = M(g_t | \Phi_0^t, \Psi_0^t, \hat{y}_0^{t+1}) = M(g_t | \Phi_0^t, \Psi_0^t, y_0^t) =$   
 $= M(g_t | \Psi_0^t, \Psi_0^t, y_0^t),$

т. е.

$$g_t = M((y_{t+1} - \hat{y}_{t+1})^2 | \Psi_0^t, \Psi_0^t, y_0^t) = \sigma_w^2.$$

Предельное равенство (Д.29) принимает тогда вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \sum_{s=1}^t M[(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1})^2 | \Psi_0^t, \Psi_0^t, y_0^t] = \sigma_w^2,$$

т. е. функционал (2.23) принимает на построенном прогнозе наименьшее значение. Теорема 2.2.3 доказана полностью.

**2.Д.11°. Доказательство лемм 2.3.1 и 2.3.2.** Минимум функционала (3.1) достигается на векторе  $\tau_{t+1}$ , удовлетворяющем уравнению  $\text{grad } J(\tau) = 0$ . Вычисляя градиент, получим  $A_{t+1}\tau_{t+1} = f_{t+1}$ , где  $A_{t+1} = \sum_{s=0}^t \Phi_s R^{-1} \Phi_s^*, f_{t+1} = \sum_{s=0}^t \Phi_s R^{-1} (y_{s+1} - \varphi_s)$ . Предполагая для простоты, что матрица  $A_{t+1}$  неособая, находим, что  $\tau_{t+1} = A_{t+1}^{-1} f_{t+1}$ . Представим  $A_{t+1}$  в виде  $A_t + \Phi_t R^{-1} \Phi_t^*$ ; для вычисления  $A_{t+1}^{-1}$  воспользуемся матричным тождеством

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}. \quad (\text{Д.34})$$

Соотношение (Д.34) справедливо для произвольных матриц  $A, B, C, D$ , для которых вошедшие в (Д.34) операции имеют смысл. Устанавливается (Д.34) умножением на  $(A + BCD)$  с последующими элементарными преобразованиями. Применим (Д.34) к матрице  $A_t + \Phi_t R^{-1} \Phi_t^*$ ; получим

$$(A_t + \Phi_t R^{-1} \Phi_t^*)^{-1} = A_t^{-1} - A_t^{-1} \Phi_t L_t \Phi_t^* A_t^{-1},$$

т. е. приходим ко второму соотношению (3.3). Используя равенство  $f_{t+1} = f_t + \Phi_t R^{-1} (g_{t+1} - \varphi_t)$  и второе соотношение (3.3), с помощью элементарных преобразований приходим к первому соотношению (3.3). Лемма 2.3.1 доказана. Вновь воспользовавшись тождеством (Д.34), из

второго соотношения (3.2) получим  $\gamma_{t+1}^{-1} = \gamma_t^{-1} + \Phi_t R^{-1} \Phi_t^*$ , т. е. второе соотношение (3.3). Из первого уравнения (3.2) тогда найдем

$$\begin{aligned}\gamma_{t+1}^{-1}(\tau_{t+1} - \tau) &= (\gamma_t^{-1} + \Phi_t R^{-1} \Phi_t^*)(\tau_t - \tau + \gamma_t \Phi_t L_t \eta_{t+1}) = \\ &= \gamma_t^{-1}(\tau_t - \tau) + \Phi_t L_t \eta_{t+1} + \Phi_t R^{-1} \Phi_t^*(\tau_t - \tau) + \\ &\quad + \Phi_t R^{-1} [\Phi_t^* \gamma_t \Phi_t + R - R] L_t \eta_{t+1} = \\ &= \gamma_t^{-1}(\tau_t - \tau) + \Phi_t R^{-1} v_{t+1},\end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма 2.3.2 доказана.

**2.Д.12°. Доказательство теоремы 2.3.1.** Из первого равенства (3.3) получаем

$$\tau_{t+1} = \tau + \gamma_{t+1} \gamma_0^{-1}(\tau_0 - \tau) + t \tau_{t+1} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t \Phi_s R^{-1} v_{s+1}, \quad (\text{Д.32})$$

тогда как второе равенство может быть преобразовано к виду  $\gamma_{t+1}^{-1} = \gamma_0^{-1} + t J_t$ . В силу предельной невырожденности матрицы (3.4) отсюда имеем  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_t = 0$ ,  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t |\gamma_{t+1}| < \infty$ . Поэтому утверждения теоремы следуют из (Д.32), если показать, что с вероятностью 1 выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \sum_{s=0}^t \Phi_s R^{-1} v_{s+1} = 0. \quad (\text{Д.33})$$

Это равенство является следствием закона больших чисел (теорема 2.П.2), поскольку величины  $\{\Phi_s R^{-1} v_{s+1}\}$  некоррелированы,  $M(\Phi_s R^{-1} v_{s+1})^* \Phi_t R^{-1} v_{t+1} = 0$  при  $s \neq t$  (в силу независимости и центрированности с.в.  $v_{t+1}$ ) и выполняется условие 2 теоремы 2.3.1. Теорема доказана.

**2.Д.13°. Доказательство теоремы 2.4.1.** Установим ограниченность траекторий системы (4.1), (4.2) и оценку (4.8). Для этого вычислим производную функции (4.9) в силу системы (4.1), (4.2). Обозначая  $V(t) = V(x(t), \tau(t), t)$ ,  $W(t) = dV(t)/dt$ , имеем

$$\varphi(x(t), \tau(t), t) + [\tau(t) - \tau_*]^* \operatorname{grad}_\tau \varphi(x(t), \tau(t), t) = W(t). \quad (\text{Д.34})$$

Пользуясь условием выпуклости (4.6) при  $\tau' = \tau_*$ ,  $\tau = \tau(t)$ , затем условием достижимости (4.7), получаем  $W(t) \leq -\rho Q(x(t), t) \leq 0$ , откуда  $V(t) \leq V(0) = -\rho \int_0^t Q(x(s), s) ds$ , т. е. неравенство (4.8) справедливо.

Вследствие (4.8) фазовые координаты  $x(t)$ ,  $\tau(t)$  системы (4.1), (4.2) лежат в области  $\Omega_t = \{V(x, \tau, t) \leq V_0\}$ . В силу условия роста (4.5)  $\Omega_t$  ограничены равномерно по  $t \geq 0$ , что влечет за собой продолжимость при  $t \geq 0$  и ограниченность всех траекторий системы. Из (4.8) следует, что

$\rho \int_0^t Q(x(s), s) ds \leq V(0) - V(t) \leq V(0)$  и, значит, функция  $Q(x(t), t)$  суммируема на  $[0, \infty)$ . Выполнение ЦУ (4.3) вдоль любой траектории (4.1), (4.2) вытекает теперь из следующей несложной леммы.

**Лемма 2.Д.5.** Рассмотрим систему  $dz/dt = F(z, t)$ , правая часть которой локально ограничена равномерно по  $t \geq 0$ , т. е. для любого  $\beta > 0$   $|F(z, t)| \leq C_\beta < \infty$  при  $|z| \leq \beta$ . Пусть  $z(t)$  — ограниченное решение системы, а функция  $Q(z, t) \geq 0$  равномерно непрерывна по  $z, t$  при

$|z| \leq \beta$  для любого  $\beta > 0$  и такова, что  $\int_0^\infty Q(z(t), t) dt < \infty$ .

Тогда  $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(z(t), t) = 0$ .

**2.Д.14°. Доказательство теоремы 2.4.2.** Для доказательства нам понадобятся две леммы.

**Лемма 2.Д.6.** Пусть функция  $f(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$  строго предельно невырождена, а непрерывная и кусочно-гладкая функция  $g(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$  удовлетворяет соотношениям  $dg(t)/dt \rightarrow 0$ ,  $f(t)^* g(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда  $g(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Пусть  $L$  — величина из определения строгой предельной невырожденности. Обозначим  $\psi(t) = \int_t^{t+L} |f(s)^* g(s)|^2 ds$ . Очевидно,  $\psi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Далее, из условия  $dg(t)/dt \rightarrow 0$  следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $t_\varepsilon > 0$  такое, что  $|g(t) - g(s)| \leq \varepsilon |t - s|$  при  $t > t_\varepsilon$ ,  $s > t_\varepsilon$ . Оценим при  $t > t_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
 & \text{величину } \mu(t) = \int_t^{t+L} |f(s)^* g(t)|^2 ds. \quad \text{Имеем} \\
 & \mu(t) = \int_t^{t+L} |f(s)^* g(s) + f(s)^* (g(t) - g(s))|^2 ds \leq \\
 & \leq 2\psi(t) + 2e^2 L^2 \int_t^{t+L} |f(s)|^2 ds. \quad (\text{Д.35})
 \end{aligned}$$

Так как  $f(t)$  ограничена и  $\psi(t) \rightarrow 0$ , правая часть полученного неравенства может быть сделана сколь угодно малой и, значит,  $\mu(t) \rightarrow 0$ . Но из (4.14) следует, что  $|g(t)|^2 \leq \mu(t)/\alpha$ , откуда  $g(t) \rightarrow 0$ . Лемма доказана.

Следующее утверждение, доказательство которого можно найти в [157], представляет собой вариант леммы Барбалата [92].

**Лемма 2.Д.7.** *Пусть  $f(t)$  — кусочно-гладкая вектор-функция. Если  $df(t)/dt \in \mathcal{B}$  и  $f(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то  $df(t)/dt \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .*

Перейдем к доказательству теоремы. По теореме 2.4.1 все траектории системы (4.11), (4.13) ограничены, поэтому ограничена правая часть (4.11), а значит, и функция  $dx/dt$ . Дифференцируя (4.11) и пользуясь условием  $q(t) \in \mathcal{B}$ , убеждаемся в ограниченности  $d^2x/dt^2$ . Итак,  $dx/dt \in \mathcal{B}$ . По теореме 2.4.1  $Q(x(t)) \rightarrow 0$  и, значит,  $x(t) \rightarrow 0$ ,  $f_0(x(t), q(t)) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Из (4.11) и леммы 2.Д.7 теперь следует, что  $[\tau(t) - \tau_*]f_1(x(t), q(t)) \rightarrow 0$ . В силу ограниченности  $\tau(t)$  и равномерной непрерывности по  $x$  функции  $f_1(x, q)$  получим, что  $[\tau(t) - \tau_*]f_1(0, q(t)) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Заметим, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{grad} Q(x(t)) = \operatorname{grad} Q(0) = 0$ . Следовательно, правая часть (4.13), равная  $d(\tau(t) - \tau_*)/dt$ , стремится к нулю и первое утверждение теоремы вытекает из леммы 2.Д.6, в которой следует положить  $f(t) = f_1(0, q(t))$ , а  $g(t)$  — равной произвольной строке матрицы  $\tau(t) - \tau_*$ . Из доказательства легко усмотреть, что стремление к нулю величин  $x(t)$ ,  $dx/dt$ ,  $d\tau/dt$ ,  $(\tau(t) - \tau_*)f_1(0, q(t))$  равномерно по начальному моменту  $t_0$  и ограниченному множеству начальных условий  $x(t_0)$ ,  $\tau(t_0)$ . Поскольку функция  $V(\cdot)$  вида (4.9) вдоль траекторий системы (4.11), (4.13) не возрастает и стремится к нулю, отсюда вытекает равномерная асимптотическая устойчивость системы. Теорема доказана.

**2.Д.15°.** Доказательство теоремы 2.4.3. Запишем (4.19) в виде

$$r(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \exp(i\omega_k t). \quad (\text{Д.36})$$

Реакция модели (4.16) на воздействие (Д.36) имеет вид

$$x_m(t) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k W(i\omega_k) \exp(i\omega_k t) \right] + (\exp A_* t) d, \quad (\text{Д.37})$$

где  $W(\lambda) = (\lambda I_n - A_*)^{-1} b_*$  — передаточная функция модели, а вектор  $d \in \mathbb{R}^n$  зависит от начальных условий. Предположим, что  $d = 0$ , т. е. переходный процесс в модели отсутствует. Пусть  $\operatorname{col}(W(i\omega_k), 1) = \xi_k + i\eta_k$ , где  $\xi_k, \eta_k \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Тогда функция  $f(t) = \operatorname{col}(x_m(t), r(t))$  представима абсолютно сходящимся рядом

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k (\xi_k \cos \omega_k t + \eta_k \sin \omega_k t).$$

В силу условия  $\sum_{k=1}^{\infty} |\rho_k| < \infty$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_t^{t+L} f(s) f(s)^* ds &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \rho_k \rho_l \left( \xi_k \xi_l^* + \int_t^{t+L} \cos \omega_k s \cos \omega_l s ds + \right. \\ &\quad + \xi_k \eta_l^* \int_t^{t+L} \cos \omega_k s \sin \omega_l s ds + \eta_k \xi_l^* \int_t^{t+L} \sin \omega_k s \cos \omega_l s ds + \\ &\quad \left. + \eta_k \eta_l^* \int_t^{t+L} \sin \omega_k s \sin \omega_l s ds \right). \end{aligned}$$

Выполнив интегрирование, убеждаемся в том, что для любых  $t, L$

$$\int_t^{t+L} f(s) f(s)^* ds = \frac{L}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 (\xi_k \xi_k^* + \eta_k \eta_k^*) + R_t,$$

где  $|R_t| \leq C_R \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\rho_k| \right)^2 (\inf_{k \neq l} |\omega_k - \omega_l|)^{-1}$ . Так как величину  $L$  можно выбирать сколь угодно большой, для доказательства строгой предельной невырожденности функции  $f(t)$  достаточно доказать, что матрица  $S = \sum_{k=1}^n \rho_k^2 (\xi_k \xi_k^* + \eta_k \eta_k^*)$  положительно определена (для определенности считаем, что  $\rho_k \neq 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ ). Этот же факт достаточно установить и при  $d \neq 0$ , так как  $(\exp A_* t) d \rightarrow 0$ . Таким образом, достаточно показать, что для произвольного  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  из  $a^* S a = 0$  следует  $a = 0$ . Если  $a^* S a = 0$ , то

$$a^* \xi_k = a^* \eta_k = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (\text{Д.38})$$

$$\bar{a}^* (i\omega_k I - A_*)^{-1} b_* + \alpha = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (\text{Д.39})$$

где  $a = \text{col}(\bar{a}, \alpha)$ ,  $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^1$ . Достаточно показать, что  $\bar{a} = 0$ . Вычисляя мнимую часть (Д.39) с учетом вещественности  $\bar{a}$ ,  $\alpha$ , получим

$$\omega_k \bar{a}^* (\omega_k^2 I + A_*^2)^{-1} b_* = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Очевидно,  $\bar{a} = 0$ , если векторы  $d_k = (\omega_k^2 I + A_*^2)^{-1} b_*$ ,  $k = 1, \dots, n$ , линейно независимы. Но линейная независимость векторов  $d_k$  означает (см. [92]) управляемость пары  $(A_*^2, b_*)$ . Утверждение теоремы вытекает теперь из следующей леммы [157].

**Лемма 2.Д.8.** Пусть пара  $(A, b)$  управляема и матрицы  $A, -A$  не имеют общих собственных чисел. Тогда пара  $(A^2, b)$  управляема.

**2.Д.16°. Доказательство теоремы 2.4.4.** Положим  $V(t) = V(x(t), \tau(t), t)$ , где  $V(x, \tau, t)$  имеет вид (4.9), и оценим скорость изменения  $V(t)$  в силу системы (4.22), (4.25). Обозначая  $Q_t = Q(x(t), t)$ ,  $R_t = \text{grad}_x Q(x(t), t)$ , имеем

$$\begin{aligned} dV(t)/dt &= \varphi(x, \tau, t) + R_t^* v(t) + \\ &+ (\tau - \tau_*)^* [-\text{grad}_\tau \varphi(x, \tau, t) - \text{grad} \omega(\tau) + \omega(t)]. \end{aligned}$$

Пользуясь (4.7), (4.23) и выпуклостью  $\varphi(x, \tau, t)$ ,  $\omega(\tau)$ , получим

$$\begin{aligned} dV(t)/dt &\leq -\rho Q_t/2 - \omega(\tau)/2 + (C_v |R_t| - \rho Q_t/2) + \\ &+ (C_w |\tau| - \omega(\tau)/2) + C_0, \end{aligned}$$

где  $C_0 = \omega(\tau_*) + |\tau_*| C_w > 0$ . Заметим, что из (4.24), (4.27) для некоторых  $C_1 > 0, C_2 > 0$  следует

$$C_w |\tau| - \omega(\tau)/2 \leq C_1, C_v |\operatorname{grad}_x Q(x, t)| - \rho Q(x, t)/2 \leq C_2.$$

Поэтому величина  $dV(t)/dt$  удовлетворяет оценке

$$dV(t)/dt \leq -[\rho Q_t + \omega(\tau(t))] / 2 + C_0 + C_1 + C_2.$$

В силу (4.5), (4.24),  $dV(t)/dt \leq -\delta$  для некоторых  $D > 0, \delta > 0$  в области  $|x| + |\tau| > D$ , откуда следует диссипативность системы (4.22), (4.25). Теорема доказана.

**2.Д.17°. Доказательство теоремы 2.4.5.** Пользуясь обозначениями 2.Д.16°, при  $Q_t > \varepsilon$  из (4.7) получим

$$\begin{aligned} dV(t)/dt &\leq -\rho Q_t + R_t^* v(t, \xi) \leq \\ &\leq -\rho Q_t + C_Q C_v Q_t^\mu \leq -\rho \varepsilon^\mu (\varepsilon^{1-\mu} - C_Q C_v / \rho) \stackrel{\text{def}}{=} -\delta < 0. \end{aligned} \quad (\text{Д.40})$$

Пусть  $T(\varepsilon)$  — множество моментов времени  $t \geq 0$ , когда  $Q_t > \varepsilon$ . В силу непрерывности функций  $Q_t, x(t)$  множество  $T(\varepsilon)$  есть счетное объединение интервалов  $T_j = (t'_j, t''_j), j = 1, 2, \dots$ . Если  $l_j$  — длина  $T_j$ , то  $V(t''_j) - V(t'_j) \leq \delta l_j < 0$ , т. е. на интервалах  $T_j$  функция  $V(t)$  убывает. Вне интервалов  $T_j$  функция  $V(t)$  не может возрасти, поскольку  $Q_{t'_{j+1}} = Q_{t''_j} = \varepsilon, \tau(t'_{j+1}) = \tau(t''_j)$ . В итоге для любого  $t > 0$

$$V(t) - V(0) \leq -\delta \sum_{t_j \leq t} l_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} l_j < \infty, \quad (\text{Д.41})$$

и, вследствие (4.4), (4.5), функции  $x(t), \tau(t), dx(t)/dt, d\tau(t)/dt$  ограничены. При  $\bar{\varepsilon} > \varepsilon$  множество  $T(\bar{\varepsilon})$  распадается на непересекающиеся интервалы  $\bar{T}_k$ , каждый из которых содержитя в каком-то интервале  $T_{j_k}$ . Ввиду ограниченности  $dx/dt, d\tau/dt$  существует  $l_* > 0$  такое, что если  $\bar{T}_k$  непуст, то  $l_{j_k} > l_*$ . Из (Д.41) следует, что  $\bar{T}_k$  может быть непустым не более чем конечное число раз, откуда  $Q_t < \bar{\varepsilon}$  для любого  $\bar{\varepsilon} > \varepsilon$  при достаточно больших  $t > 0$ , т. е. ЦУ (4.28) достигается. В силу (Д.41) и ограниченности  $d\tau/dt$  существует конечный  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t)$ . Теорема доказана.

**2.Д.18°.** Доказательство теоремы 2.4.6. Допустим, что  $V_0(t) = 0,5 |\tau(t) - \tau_*|_{\Gamma^{-1}}^2$ ,  $Q_t = Q(x(t), t)$ ,  $R_t = \text{grad}_x Q(x(t), t)$ . Оценим  $dV_0/dt$  при  $dQ_t/dt + \rho'Q_t \geq \rho'\epsilon$ . В силу выпуклости функции  $|\tau - \tau_*|_{\Gamma^{-1}}^2$ ,

$$\begin{aligned} dV_0(t)/dt &= (\tau - \tau_*)^* \text{grad}_{\tau} \varphi(x(t), \tau(t), t) \leq \\ &\leq \varphi(x(t), \tau_*, t) - \varphi(x(t), \tau(t), t). \end{aligned}$$

Но  $\varphi(x, \tau, t) = dQ_t/dt - R_t^* v(t)$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} dV_0(t)/dt &\leq \varphi(x(t), \tau_*, t) - dQ_t/dt + R_t^* v(t) \leq \\ &\leq \varphi(x(t), \tau_*, t) + \rho'Q_t - \rho'\epsilon + |R_t| \cdot C_v \leq \\ &\leq -(\rho - \rho')Q_t + C_Q C_v Q_t^\mu - \rho'\epsilon. \quad (\text{Д.42}) \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь следующей легко проверяемой леммой.

**Лемма 2.Д.9.** Пусть  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $0 < \mu < 1$ . Тогда

$$\sup_{Q \geq 0} (\bar{\alpha}Q + \beta Q^\mu) = \alpha \frac{1-\mu}{\mu} \left( \frac{\mu \beta}{\alpha} \right)^{1/(1-\mu)}. \quad (\text{Д.43})$$

Из (Д.42), (Д.43) при  $\alpha = \rho - \rho'$ ,  $\beta = C_v C_Q$ ,  $Q = Q_t$ , получаем, что  $dV_0(t)/dt \leq -\delta < 0$  при  $dQ_t/dt + \rho'Q_t \leq \rho'\epsilon$ . Как и при доказательстве теоремы 2.4.5, устанавливаем, что траектории системы (4.22), (4.32) ограничены и для любого  $\bar{\epsilon} > \epsilon$  существует момент  $\bar{t}$  такой, что  $dQ_t/dt + \rho'Q_t < \rho'\bar{\epsilon}$  при  $t > \bar{t}$ . Поэтому  $\lim_{t \rightarrow \infty} Q_t \leq \bar{\epsilon}$  для любого  $\bar{\epsilon} > \epsilon$ , т. е. выполнено (4.28). Наилучший выбор  $\rho'$  определяется минимизацией по  $\rho'$  величины  $\epsilon_0$ .

## **ГЛАВА 3**

### **СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ (НЕАДАПТИВНЫХ) РЕГУЛЯТОРОВ**

Прежде чем переходить к решению задач адаптации, естественно рассмотреть и решить «оптимальным образом» задачу управления в неадаптивном варианте, т. е. в предположении, что об объекте и о возмущающих воздействиях известно все, что необходимо для оптимального управления. Этим задачам оптимизации и посвящена данная глава.

Предварительное рассмотрение задач оптимизации в неадаптивной постановке полезно также и в том отношении, что оно позволяет для каждой задачи определить набор данных измерения (сенсоры), необходимый для синтеза оптимальных связей, и подсказывает закон адаптивного управления. Кроме того, сравнение решений задачи адаптации и соответствующей оптимальной задачи позволяет оценить «качество» решения задачи адаптации.

Постановка и решение оптимальной задачи управления определяются, в частности, свойствами помехи, которые могут быть использованы при синтезе обратных связей, а также выбранным функционалом качества управления. Ниже относительно помехи предполагается, что либо она ограничена (и, может быть, нестационарна), либо она — стационарный случайный процесс с дробно-рациональной спектральной плотностью. (Подробнее о свойствах помехи сказано ниже.) Естественными выбираются функционалы качества: модуль отклонения выходной переменной от заданного значения в первом случае и квадратичный функционал — во втором. Второй случай — хорошо изученный вариант классической задачи Винера — Колмогорова; приводимое в § 3.3 ее решение в методическом отношении, по-видимому, отличается от известных. Решения задач

с модульным критерием (§ 3.2) получены относительно недавно; они изложены лишь в журнальной литературе. В § 3.4 приводятся основные определения и необходимые сведения; они используются и в последующих главах.

### § 3.1. Вспомогательные сведения из теории линейных систем управления

**3.1.1°. Уравнения дискретных объектов управления в переменных «вход — выход» и в стандартной форме.** В наиболее простом и часто встречающемся случае линейный дискретный объект управления (ДОУ) описывается скалярным уравнением

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_r y_{t-r} = b_1 u_{t-1} + \dots + b_r u_{t-r} + v_t. \quad (1.1)$$

Здесь  $t = 0, 1, \dots$  — дискретное время;  $a_i, b_j$  — заданные вещественные числа — коэффициенты уравнения;  $a_0 \neq 0$ ;  $y_t$  — выходная переменная ДОУ;  $u_t$  и  $v_t$  — входные переменные ДОУ. Обычно в роли  $u_t$  выступает *управляющее воздействие* (называемое также *управлением*) или *задающее воздействие*, а в роли  $v_t$  — *возмущающее воздействие (помеха)*. При заданных  $(u_0, u_1, \dots) = u_0^\sim$ ,  $(v_0, v_1, \dots) = v_0^\sim$  и заданных начальных значениях  $(y_0, \dots, y_{r-1}) = y_0^{r-1}$  из (1.1) находятся значения  $y_t$  при всех  $t \geq r$ . При этом  $y_t$  выражается через  $y_0^{t-1}$  и  $u_0^{t-1}$ . Если в (1.1) выполнено  $b_1 = b_r = \dots = b_{k-1} = 0$ ,  $b_k \neq 0$ , то  $y_t$  выражается через  $y_0^{t-1}, u_0^{t-k}$ , число  $k$  называется *запаздыванием в управлении*. В записи (1.1) предполагается, что  $|a_r| + |b_r| \neq 0$ , число  $r$  называется *разностным порядком ДОУ*.

Введем оператор  $\nabla$  сдвига во времени назад, определенный формулой

$$\nabla y_t = y_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

(вместо  $y_t$  может быть любая последовательность). Естественно определяются положительные и отрицательные степени оператора  $\nabla$  и полиномы от  $\nabla$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2 y_t &= \nabla (\nabla y_t) = y_{t-2}, \dots, \nabla^j y_t = y_{t-j}, \\ \nabla^{-1} y_t &= y_{t+1}, \dots, \nabla^{-j} y_t = y_{t+j}, \\ (a_0 + \dots + a_r \nabla^r) y_t &= a_0 y_t + \dots + a_r y_{t-r}. \end{aligned}$$

Вводя полиномы относительно комплексной переменной  $\lambda$ :

$$a(\lambda) = a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda^r a_r, \quad b(\lambda) = \lambda b_1 + \dots + \lambda^r b_r, \quad (1.3)$$

перепишем уравнение (1.1) в операторной форме в виде

$$a(\nabla) y_t = b(\nabla) u_t + v_t. \quad (1.4)$$

Дискретный объект управления с векторными входами и выходами (или, иначе, ДОУ с несколькими скалярными входами и выходами, или многосвязный ДОУ) также описывается уравнением (1.1) или (1.4), где теперь  $u_t$  и  $y_t$  — векторные величины, вообще говоря, разной размерности. При этом  $a_i$ ,  $b_j$  суть матрицы соответствующих размерностей, квадратная матрица  $a_0$  предполагается неособой. Векторная помеха  $v_t$  имеет ту же размерность, что и  $y_t$ . В дальнейшем, говоря о скалярном объекте, описывающем уравнением (1.1) или (1.4), будем иметь в виду, что  $y_t$ ,  $u_t$  — скалярные величины. Для векторного ДОУ по крайней мере одна из величин  $y_t$ ,  $u_t$  — вектор.

Во многих задачах вместо (1.1) исходным является уравнение объекта вида

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + f_{t+1}, \quad y_t = Cx_t + \varphi_t. \quad (1.5)$$

Здесь  $x_t$  —  $n$ -вектор \*), называемый *состоянием* ДОУ;  $f_t$ ,  $\varphi_t$  — помехи (возмущающие воздействия) в объекте управления (ОУ) и в канале наблюдения и по-прежнему  $u_t$  — управляющее воздействие (вход),  $y_t$  — выход ОУ;  $\varphi_t$ ,  $u_t$ ,  $y_t$  могут быть как векторными, так и скалярными величинами;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — постоянные вещественные матрицы соответствующих размерностей ( $A$  —  $n \times n$ -матрица). Уравнения (1.5) называются *уравнениями ДОУ в стандартной форме* (иногда их называют *уравнениями в пространстве состояний объекта*), а уравнение (1.1) (или (1.4)) — *уравнением в переменных «вход — выход»*. Чтобы подчеркнуть, что в (1.4), (1.5)  $v_t$ ,  $f_{t+1}$ ,  $\varphi_t$  — внешние воздействия (помехи), их называют также *уравнениями с выделенными внешними воздействиями*.

\*) Условимся, что все векторы рассматриваются как одностолбцовые матрицы.

В (1.5) состояние  $x_t$  определяется для всех  $t = 1, 2, \dots$  после задания начального состояния  $x_0$ , а также управления  $u_t$  и возмущающих воздействий  $f_{t+1}, \Phi_t$  при  $t \geq 0$ .

Величины  $u_t, y_t$  в (1.5) удовлетворяют некоторому уравнению вида (1.4). Это уравнение легко получить, используя формальные операции с оператором  $\nabla$ . Подставляя во второе уравнение (1.5) выражение  $x_t = (I_n \nabla^{-1} - A)^{-1} (Bu_t + \nabla f_t)$  и умножая полученное соотношение на  $\det(I_n - \nabla A)$ , получим (1.4), где

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \det(I_n - \lambda A), \quad Q(\lambda) = a(\lambda)(I_n - \lambda A)^{-1}, \\ b(\lambda) &= \lambda CQ(\lambda), \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$v_t = CQ(\nabla)f_t + a(\nabla)\Phi_t. \quad (1.7)$$

(Здесь  $I_n$  — единичная  $n \times n$ -матрица, выражения (1.6) — полиномы по  $\lambda$ , и поэтому (1.7) имеет смысл). Такой переход к уравнению в переменных «вход — выход» носит формальный характер, поскольку не определена дробно-рациональная функция оператора  $\nabla$  и поэтому, например, неясно, что такое  $(I_n \nabla^{-1} - A)^{-1}$ . Выкладки эти можно оправдать с помощью дискретного преобразования Лапласа ( $D$ -преобразования). Проще такое оправдание получить, если заметить, что из тождества  $A(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$  (где  $A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda)$  — матричные полиномы) следует, что для любой последовательности векторов  $y_t$  соответствующей размерности выполнено  $A(\nabla)[B(\nabla)y_t] = C(\nabla)y_t$ , т. е. что указанное тождество влечет операторное равенство  $A(\nabla)B(\nabla) = C(\nabla)$ . Действительно, тогда  $Q(\nabla) \times (I - \nabla A) = a(\nabla)I_n$  и из (1.5) получаем  $a(\nabla)x_t = Q(\nabla)(I_n - \nabla A)x_t = Q(\nabla)[\nabla Bu_t + f_t]$ , что с учетом второго равенства (1.5) приводит к (1.4), где  $a(\lambda), b(\lambda)$  определяются формулами (1.6), (1.7).

Итак, мы установили, что из (1.5) следует (1.4), где  $a(\lambda), b(\lambda)$  имеют вид (1.6).

Уравнение (1.4) в переменных «вход — выход» можно также привести к стандартной форме. Существует много способов такого приведения. Опишем один из них, ограничиваясь скалярным ДОУ (1.4). Пусть  $a_0 = 1$ . Уравнение в переменных состояния будем искать в форме

$$\begin{aligned} x_t^{(r)} &= y_t, \quad \nabla^{-1}x_t^{(r)} = x_t^{(r-1)} + k_1 u_t, \dots, \\ \nabla^{-1}x_t^{(r)} &= x_t^{(1)} + k_{r-1} u_t, \\ \nabla^{-1}x_t^{(1)} &= -a_1 x_t^{(1)} - \dots - a_r x_t^{(r)} + k_r u_t + v_{t+r}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $k_i$  — неизвестные коэффициенты. Если из соотношений (1.8) последовательно исключить переменные  $x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(r-1)}$ , то для  $y_t$  получится разностное уравнение. Сравнение полученного уравнения с (1.1) позволяет написать рекуррентные формулы для коэффициентов  $k_i$ :

$$k_1 = b_1, \quad k_{s+1} = b_{s+1} - \sum_{i=1}^s k_{s-i+1} a_i, \quad s = 1, \dots, r-1. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.1) в переменных состояния  $x_t = \text{col}(x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(r)})$  запишется в виде

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + f_{t+1}, \quad y_t = Cx_t, \quad (1.10)$$

где

$$A = \begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{r-1} & -a_r \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} k_r \\ k_{r-1} \\ \vdots \\ k_1 \end{vmatrix}, \quad (1.11)$$

$$C = (0, 0, \dots, 0, 1), \quad f_t = \text{col}(v_{t+r-1}, 0, \dots, 0).$$

Уравнение (1.10) имеет стандартную форму. Уравнения (1.1) и (1.10) (с матрицами (1.11)) будем называть *эквивалентными*. Описанный переход к уравнению в стандартной форме с естественными изменениями осуществляется и в случае векторных ДОУ. Теперь  $k_i$  — матрицы, размерность которых совпадает с размерностью матриц  $b_i$ .

Выше входные воздействия разделялись на управляющие ( $u_t$ ) и возмущающие ( $v_t$ ). Иногда такое разделение проводить нецелесообразно.

**Определение 3.1.1.** Пусть  $\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{Y}$  — конечномерные пространства (возможно, различных размерностей),  $t = 0, 1, \dots, x_t \in \mathbf{X}, u_t \in \mathbf{U}, y_t \in \mathbf{Y}$ . Уравнениями линейного стационарного ДОУ в стандартной форме называются уравнения

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad y_t = Cx_t + Du_t, \quad (1.12)$$

где  $A, B, C, D$  — постоянные матрицы соответствующих размерностей; векторы  $x_t, u_t, y_t$  называются соответственно состоянием, входом и выходом ДОУ в момент времени  $t$ .

Уравнение (1.5) (и (1.10)) можно записать в виде (1.12), если в качестве входа взять вектор  $\text{col}(u_t, f_{t+1}, \Phi_t)$  (вектор  $\text{col}(u_t, f_{t+1})$ ).

Для нестационарного линейного ДОУ в (1.12) матрицы  $A = A_t$ ,  $B = B_t$ ,  $C = C_t$ ,  $D = D_t$  зависят от времени. Ниже будут в основном рассматриваться стационарные ДОУ.

**3.1.2°. Устойчивые, неустойчивые, минимально-фазовые объекты.** Хорошо известно определение асимптотической устойчивости по Ляпунову. Нам удобно принять в качестве определения устойчивости некоторое эквивалентное свойство и ввести понятие устойчивости по выходу.

**Определение 3.1.2.** ДОУ, описываемый (векторным либо скалярным) уравнением (1.4), называется *устойчивым по выходу*  $y_t$ , если существуют такие постоянные  $C_u$ ,  $C_v$ , что при произвольных последовательностях  $y_t$ ,  $u_t$ ,  $v_t$ , связанных соотношением (1.4), выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y_t| \leq C_u \sup_{t \geq 0} |u_t| + C_v \sup_{t \geq 0} |v_t|. \quad (1.13)$$

В противном случае ДОУ *неустойчив по выходу*  $y_t$ .

ДОУ (1.4) называется *устойчивым по входу*  $u_t$ , если существуют постоянные  $C_y$ ,  $C_v$  такие, что в тех же условиях выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |u_t| \leq C_y \sup_{t \geq 0} |y_t| + C_v \sup_{t \geq 0} |v_t|. \quad (1.14)$$

В противном случае объект *неустойчив по входу*  $u_t$ .

Если входом  $u_t$  являются управляющие воздействия, то устойчивый (неустойчивый) по входу  $u_t$  объект называется *устойчивым (неустойчивым) по управлению*. (Заметим, во избежание недоразумений, что для неустойчивого по управлению объекта может быть построена обратная связь такая, что замкнутый объект устойчив по  $(y_t, u_t)$ .)

Устойчивый по управлению  $u_t$  скалярный объект (1.4) называется также *минимально-фазовым*.

**Определение 3.1.3.** Для объекта (1.4) полином  $\det a(\lambda)$  (полином  $a(\lambda)$  в скалярном случае) называется *характеристическим*.

Для стационарных объектов могут быть легко получены эффективные условия устойчивости по входу и выходу. Приведем эти условия.

а) Для устойчивости по выходу  $y_t$  ДОУ (1.4) необходимо и достаточно, чтобы его характеристический полином не имел корней в круге  $|\lambda| \leqslant 1$ .

В дальнейшем полиномы с таким свойством будем называть *устойчивыми*. (Напомним, что  $\det a_0 \neq 0$ .)

б) Если размерности векторов  $y_t$  и  $u_t$  совпадают и  $\det b_k \neq 0$ , то для устойчивости по входу  $u_t$  ДОУ (1.4) необходимо и достаточно, чтобы полином  $\det [\lambda^{-k} b(\lambda)]$  был устойчивым. Здесь  $k$  — запаздывание по управлению.

Рассмотрим теперь ДОУ в стандартной форме (1.5), считая временно, что выходом  $y_t$  является состояние:  $y_t = x_t$ . Это уравнение можно записать в виде  $a(\nabla)y_t = -b(\nabla)u_t + v_t$ , где  $a(\lambda) = (I_n - \lambda A)$ ,  $b(\lambda) = \lambda B$ ,  $v_t = f_t$ . Устойчивость по выходу  $y_t$  этого объекта называется *устойчивостью уравнения (1.5) по состоянию*. Поскольку в данном случае  $\det a(\lambda) = \det(I_n - \lambda A)$ , то из сказанного выше следует, что устойчивость по состоянию объекта равносильна тому, что матрица  $A$  не имеет собственных значений при  $|\lambda| \geqslant 1$ . Заметим, что если  $\det B^*B \neq 0$ , то непосредственно из определения следует, что объект (1.5) устойчив по управлению  $u_t$ . Подчеркнем, что это совсем не означает устойчивости по управлению  $u_t$  эквивалентного уравнения (1.4) в переменных «вход — выход». (Ибо выходы  $x_t$  и  $y_t$  этих объектов различные.)

**3.1.3°. Управляемость и наблюдаемость.** Понятия управляемости и наблюдаемости подробно описаны и разъяснены во многих монографиях. Ограничимся поэтому формальным определением. Построим матрицы

$$\begin{aligned} R_u &= \|B, AB, \dots, A^{n-1}B\|, \\ R_y &= \|C^*, A^*C^*, \dots (A^*)^{n-1}C^*\|, \end{aligned} \quad (1.15)$$

называемые соответственно *матрицами управляемости и наблюдаемости*. Их размерности равны  $n \times (n_u n)$  и  $n \times (n_y n)$ , где  $n_y$ ,  $n_u$  — размерности векторов  $y_t$ ,  $u_t$ .

**Определение 3.1.4.** Объект (1.5) (а также (1.12)) называется *управляемым (наблюдаемым)*, если матрица  $R_u$  (матрица  $R_y$ ) имеет ранг  $n$ . В случае одновременно управляемости и наблюдаемости стандартная форма (1.5) и (1.12) называется *минимальной*.

Поскольку свойство управляемости (наблюдаемости) формулируется в терминах пары матриц  $\{A, B\}$  (пары  $\{A, C\}$ ), будем, как принято, говорить об *управляемости*

пары  $\{A, B\}$  (о наблюдаемости пары  $\{A, C\}$ ). Заметим, что понятия управляемости и наблюдаемости относятся к уравнению (1.5) в стандартной форме, т. е. к «внутреннему» состоянию ОУ. Одному и тому же объекту, описываемому уравнением (1.4), могут отвечать разные (эквивалентные в указанном выше смысле) стандартные формы (1.5), как обладающие, так и не обладающие свойствами управляемости и наблюдаемости. Известно, что среди этих систем непременно имеются минимальные, что все они имеют один и тот же порядок  $n$  вектора состояния системы и переходят одна в другую посредством неособой замены  $x'_t = Sx_t$ . Если объект (1.10) получен из скалярного объекта (1.4) посредством преобразования (1.8), (1.9), то он наблюдаем. Его управляемость, как можно показать, эквивалентна условию несократимости полиномов  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$ . Таким образом, при выполнении этого условия преобразование (1.8), (1.9) приводит к минимальной форме (1.10) уравнения в переменных состояния.

**3.1.4°. Линейные непрерывные объекты управления.** Линейный непрерывный объект управления (НОУ) описывается уравнением

$$a(p)y(t) = b(p)u(t) + v(t), \quad (1.16)$$

где  $t$  — непрерывное время,  $t \in [t_0, \infty)$ ;  $p = d/dt$  — операция дифференцирования по  $t$ ;  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  — матричные (или скалярные) полиномы,

$$a(\lambda) = \lambda^r a_0 + \lambda^{r-1} a_1 + \dots + a_r, \quad b(\lambda) = \lambda^{r-1} b_1 + \dots + b_r, \quad (1.17)$$

$\det a_0 \neq 0$ ;  $y(t)$  — выход,  $u(t)$  — управляющее воздействие,  $v(t)$  — возмущение (помеха). Объект называется *скалярным*, если  $y(t)$ ,  $u(t)$ ,  $v(t)$  — скалярные величины. Иногда нецелесообразно разделять внешние воздействия на управляющие и помехи; тогда компоненты вектор-функции  $v(t)$  присоединяются к  $u(t)$  и уравнение (1.16) за счет изменения  $b(\lambda)$  принимает вид  $a(p)y(t) = b(p)u(t) + f(t)$ . Уравнение (1.16) записано в переменных «вход — выход». В стандартной форме НОУ имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad y(t) = Cx(t) + \varphi(t) \quad (1.18)$$

( $x(t)$  — состояние;  $f(t)$ ,  $\varphi(t)$  — возмущающие воздействия, или помехи).

Операция  $p = d/dt$  дифференцирования для НОУ играет ту же роль, что и операция  $\nabla^{-1}$  сдвига на тakt вперед для ДОУ. Так, замена операции  $\nabla^{-1}$  в уравнении (1.5) на  $p$  приводит к (1.16). Замена  $\nabla^{-1}$  на  $p$  в формулах (1.8) определяет преобразование, приводящее уравнение (1.16) к уравнению в переменных состояния НОУ. На случай НОУ с учетом указанного соответствия переносятся понятия устойчивости по входу и выходу, аналогично вводится характеристический полином. Устойчивость по выходу  $y(t)$  объекта (1.16) равносильна теперь гурвицевости характеристического полинома  $\det a(\lambda)$ . (Напомним, что гурвицевым называют полином, не имеющий корней при  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ .) Устойчивость по состоянию объекта (1.18) равносильна гурвицевости полинома  $\det(\lambda I_n - A)$ . Для НОУ тот же смысл имеют понятия управляемости и наблюдаемости.

Остановимся кратко на возможности сведения НОУ к ДОУ. В прикладных задачах дискретное управляющее воздействие часто формулируется для НОУ (это связано с применением ЦВМ в контуре управления). Для управлений такого класса НОУ эквивалентен некоторому ДОУ. Пусть управляющее воздействие постоянно на интервалах  $t_0 + j\delta \leq t < t_0 + (j+1)\delta$ ,  $j = 0, 1, \dots, \delta$  — положительный параметр (шаг дискретизации);  $u(t) = u_j$  при  $t \in [t_0 + j\delta, t_0 + (j+1)\delta]$ . Вводя обозначения

$$\begin{aligned} x_j &= x(t_0 + j\delta), \quad y_j = y(t_0 + j\delta), \\ A_\delta &= e^{A\delta}, \quad B_\delta = A^{-1}(e^{A\delta} - I), \\ \varphi_j &= \varphi(t_0 + j\delta), \quad f_{j+1} = \int_{t_0 + j\delta}^{t_0 + (j+1)\delta} e^{A[(j+1)\delta-s]} f(s) ds, \end{aligned} \quad (1.19)$$

интегрированием уравнения (1.18) по интервалам  $(t_0 + j\delta, t_0 + (j+1)\delta)$  получим уравнение

$$x_{j+1} = A_\delta x_j + B_\delta u_j + f_{j+1}, \quad y_j = Cx_j + \varphi_j. \quad (1.20)$$

Итак, мы пришли к ДОУ, вектор состояния которого  $x_j$  совпадает с вектором состояния НОУ в моменты времени  $t_0 + j\delta$ . В формулах (1.19) матрица  $A$  может быть особой: в этом случае  $B_\delta$  получается из указанного выражения, если предварительно правую часть разложить в ряд по степеням  $A$ .

Даваемое формулами (1.19) соответствие между ДОУ и НОУ позволяет с учетом формул (1.8) получить также соответствие между объектами (1.4) и (1.16).

**3.1.5°. Синтез стабилизирующих регуляторов.** Задача синтеза стабилизирующего регулятора состоит в построении регулятора, т. е. непрерывного (дискретного) ОУ со входом  $y(t)$  и выходом  $u(t)$  (со входом  $y_t$  и выходом  $u_t$ ), такого, что замкнутая система устойчива по выходу  $\{u(t), y(t)\}$  (по  $\{u_t, y_t\}$ ). Обычно решается более сложная задача, называемая задачей *модального управления* — строится такой регулятор, что характеристический полином замкнутой системы имеет заданное расположение корней в комплексной плоскости.

**Определение 3.1.5.** Непрерывный (дискретный) ОУ в стандартной форме называется *стабилизируемым*, если существует обратная связь вида

$$u(t) = Lx(t), \quad (1.21)$$

$$u_t = Lx_t \quad (1.21')$$

такая, что замкнутая система (1.18), (1.21) (система (1.5), (1.21')) устойчива по состоянию  $x(t)$  (по состоянию  $x_t$ ), т. е. такая, что полином  $\det[\lambda I_n - (A + BL)]$  гурвицев (полином  $\det[I_n - \lambda(A + BL)]$ ) — устойчивый.

**Теорема о стабилизации.** Пусть пара  $\{A, B\}$  управляема. Тогда ОУ в стандартной форме — стабилизируемый. Более того, для любого полинома  $g(\lambda) = \lambda^n + g_1\lambda^{n-1} + \dots + g_n$  существует такая матрица  $L$  (вещественная, если  $A, B$  и  $g_j$  вещественны), что характеристический полином  $\det(\lambda I_n - A - BL)$  замкнутой системы совпадает с  $g(\lambda)$ .

Известны разные доказательства этой теоремы и разные способы определения матрицы  $L$ . Поскольку некоторые из них описаны в литературе (см., например, [21, 24, 92]), остановимся лишь на случае скалярного объекта, когда задача модального управления решается достаточно просто. В этом случае  $B$  и  $L$  — матрица-столбец и матрица-строка; запишем их в виде  $B = b$ ,  $L = l^*$ . Требуется найти вектор  $l$  из тождества  $\det(\lambda I_n - A - bl^*) = g(\lambda)$ . Пусть  $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ ,  $q(\lambda)$  — одностолбцовая матрица — решение уравнения

$$(\lambda I - A) q(\lambda) = b \det(\lambda I - A). \quad (1.22)$$

Отсюда с использованием формулы \*)  $\det(I_n + bl^*) = 1 + l^*b$  имеем

$$l^*q(\lambda) = \det(M - A) - g(\lambda). \quad (1.23)$$

Из (1.22) следует, что  $q(\lambda) = q_1\lambda^{n-1} + \dots + q_n$  — векторный полином степени  $(n - 1)$ . Поэтому для определения вектора  $l$  после приравнивания в (1.23) коэффициентов при одинаковых степенях  $\lambda$  получается система  $l^*q_j = -a_j - g_j, j = 1, \dots, n$ . Из управляемости пары  $\{A, b\}$  легко следует, что векторы  $q_j$  линейно независимы. Поэтому указанная система однозначно разрешима относительно искомого вектора  $l$ .

Часто желательно осуществлять стабилизацию выхода  $y_t$ , отличного от состояния  $x_t$ . Рассмотрим, например, дискретный ОУ (1.4). Желаемая обратная связь должна иметь вид

$$\alpha(\nabla) u_t = \beta(\nabla) y_t. \quad (1.24)$$

Здесь  $\alpha(\lambda), \beta(\lambda)$  — матричные или скалярные полиномы,

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \alpha_0 + \lambda\alpha_1 + \dots + \lambda^p\alpha_p, \\ \beta(\lambda) &= \beta_0 + \lambda\beta_1 + \dots + \lambda^p\beta_p, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$\det \alpha_0 \neq 0$ . Уравнение (1.24) описывает регулятор, в котором  $u_t$  выражается через  $u_{t-p}^{t-1}, y_{t-p}^t$ . Систему (1.4), (1.24) можно записать в виде  $a'(\nabla) y_t' = v_t'$ , где  $y_t' = \text{col}(y_t, u_t)$ ,  $v_t' = \text{col}(v_t, 0)$ . Характеристический полином  $g(\lambda) = \det a'(\lambda)$  полученного уравнения (характеристический полином замкнутой системы) есть

$$g(\lambda) = \det \begin{vmatrix} a(\lambda) & -b(\lambda) \\ -\beta(\lambda) & \alpha(\lambda) \end{vmatrix}. \quad (1.26)$$

Устойчивость по выходу  $y_t'$  системы (1.4), (1.24) равносильна устойчивости полинома (1.26). Задача модального управления состоит в определении полиномов  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$ , удовлетворяющих соотношению (1.26) с заданным полиномом  $g(\lambda)$ .

В случае скалярного объекта полином (1.26) принимает вид

$$g(\lambda) = a(\lambda)\alpha(\lambda) - b(\lambda)\beta(\lambda) \quad (1.27)$$

\*) Вывод этой формулы можно найти, например, в [24], с. 65.

и задача модального управления становится элементарной. Решение этой задачи основано на следующем простом утверждении.

**Лемма 3.1.1.** Для существования полиномов  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$ , удовлетворяющих соотношению (1.27) с заданными полиномами  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$ ,  $g(\lambda)$ , необходимо и достаточно, чтобы полином  $g(\lambda)$  делился нацело на наибольший общий делитель  $v(\lambda) = \langle a(\lambda), b(\lambda) \rangle$  полиномов  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$ .

При разрешимости соотношения (1.27) полиномы  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  определяются однозначно при любом из следующих двух условий:

$$\deg \alpha(\lambda) < \deg [b(\lambda)v(\lambda)^{-1}], \quad (1.28)$$

$$\deg \beta(\lambda) < \deg [a(\lambda)v(\lambda)^{-1}]. \quad (1.29)$$

Если выполнено неравенство  $\deg g(\lambda) < \deg a(\lambda) + \deg b(\lambda) - \deg v(\lambda)$ , то каждое из условий (1.28), (1.29) приводит к одной и той же паре полиномов  $\{\alpha(\lambda), \beta(\lambda)\}$ . ( $\deg \alpha(\lambda)$  означает степень полинома  $\alpha(\lambda)$ .)

В процессе доказательства леммы формулируется алгоритм определения требуемых  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$ , использующий операции деления полиномов. Впрочем, при выполнении (1.28) либо (1.29) можно найти полиномы  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$ , приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в тождестве (1.27).

**Определение 3.1.6.** Скалярный ОУ (1.4) назовем *стабилизируемым*, если существует обратная связь вида (1.24) такая, что замкнутая система (1.4), (1.24) устойчива по выходу  $(y_t, u_t)$ . Регулятор (1.24) с таким свойством назовем *стабилизирующим* для ОУ (1.4). Совокупность ОУ (1.4) и регулятора (1.24) назовем *системой управления*.

Характеристический полином системы управления (1.4), (1.24) равен  $g(\lambda) = \gamma(\lambda)v(\lambda)$ , где  $\gamma(\lambda)$  — некоторый полином, который может быть сделан любым за счет выбора регулятора (1.24). Поэтому стабилизируемость ОУ (1.4) эквивалентна устойчивости полинома  $v(\lambda) = \langle a(\lambda), b(\lambda) \rangle$ . При выполнении этого условия стабилизирующий регулятор может быть найден из уравнения (1.27), если выбрать  $g(\lambda) = \gamma(\lambda)v(\lambda)$  с произвольным устойчивым полиномом  $\gamma(\lambda)$ .

Приведем используемый в дальнейшем другой способ синтеза стабилизирующих регуляторов, также основан-

ный на лемме 3.1.1. В ряде случаев этот способ приводит, как выяснится позднее, к оптимальным регуляторам.

Для общности предположим, что помеха  $v_t$  в уравнении (1.4) формируется с помощью фильтра

$$d(\nabla) v_t = e(\nabla) w_t, \quad (1.30)$$

в котором полиномы  $d(\lambda)$ ,  $e(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} d(\lambda) &= d_0 + \lambda d_1 + \dots + \lambda^q d_q, \\ e(\lambda) &= e_0 + \lambda e_1 + \dots + \lambda^q e_q \end{aligned} \quad (1.31)$$

не имеют корней при  $0 < |\lambda| < 1$ ,  $d_0 \neq 0$ , и  $w_t$  — «стандартная» помеха, свойства которой будут описаны в п. 3.1.7°. Далее, поставим задачу определения стабилизирующих регуляторов (1.24), у которых  $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \dots = \beta_{s-1} = 0$ ,  $\beta_s \neq 0$ . Число  $s$  называется *запаздыванием в измерении*. Представим полином  $b(\lambda)$  в виде

$$b(\lambda) = b_+(\lambda) b_-(\lambda), \quad (1.32)$$

где  $b_+(\lambda)$  — устойчивый полином, полином  $b_-(\lambda)$  может содержать как «устойчивые», так и «неустойчивые» корни. Пусть  $\langle a(\lambda)d(\lambda), b_-(\lambda) \rangle = 1$ . Рассмотрим уравнение

$$a(\lambda) d(\lambda) F(\lambda) - \lambda^s b_-(\lambda) G(\lambda) = 1 \quad (1.33)$$

относительно полиномов  $F(\lambda)$ ,  $G(\lambda)$ . В соответствии с леммой 3.1.1 соотношение (1.33) однозначно определяет эти полиномы, если принять условие  $\deg F(\lambda) < s + \deg b_-(\lambda)$ . Соотношение (1.33) означает, в частности, что для любой последовательности  $y_0^\infty$  при  $t \geq r + q + s$  справедливо равенство

$$a(\nabla) d(\nabla) F(\nabla) y_t - \nabla^s b_-(\nabla) G(\nabla) y_t = y_t.$$

Применяя к уравнению (1.4) операцию  $d(\nabla) F(\nabla)$ , используя предыдущее равенство и формулу (1.32), получим

$$\begin{aligned} y_t &= b_-(\nabla) [b_+(\nabla) d(\nabla) F(\nabla) u_t - \nabla^s G(\nabla) y_t] + \\ &\quad + d(\nabla) F(\nabla) v_t. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Выбирая обратную связь из условия  $[...] = 0$ , т. е.

$$b_+(\nabla) d(\nabla) F(\nabla) u_t = \nabla^s G(\nabla) y_t, \quad (1.35)$$

перепишем (1.34) в виде

$$y_t = d(\nabla) F(\nabla) v_t = F(\nabla) e(\nabla) w_t. \quad (1.36)$$

Условие  $b_+(0) d(0) F(0) \neq 0$  обеспечивает неупреждаемость управляющих воздействий  $u_t$  — в силу (1.35) они определяются лишь выходами  $y_{t-s}, y_{t-s-1}, \dots$  и предшествующими управляющими воздействиями.

Характеристический полином замкнутой системы (1.4), (1.35) имеет вид

$$g(\lambda) = a(\lambda) b_+(\lambda) d(\lambda) F(\lambda) - b(\lambda) \lambda^s G(\lambda) = b_+(\lambda), \quad (1.37)$$

т. е. является устойчивым полиномом. Таким образом, регулятор (1.35) — стабилизирующий для скалярного ОУ (1.4), причем выполняется соотношение (1.36).

**3.1.6°. Передаточные функции системы управления.** Производя формальные операции в уравнении (1.12), можно выразить  $y_t$  через  $u_t$ . Мы получим

$$\begin{aligned} y_t &= W_{y/u}(\nabla) u_t, \\ W_{y/u}(\lambda) &= D + \lambda C (I_n - \lambda A)^{-1} B. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Равенство  $y_t = W_{y/u}(\nabla) u_t$ , строго говоря, смысла не имеет. Ему можно придать точный смысл, если от  $y_t, u_t, x_t$  перейти к их  $D$ -преобразованиям \*)  $\tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{x}$ . Именно, из (1.12) имеем  $\lambda^{-1} \tilde{x} = A \tilde{x} + B \tilde{u}$ ,  $\tilde{y} = C \tilde{x} + D \tilde{u}$ , откуда  $\tilde{y} = W_{y/u}(\lambda) \tilde{u}$ .

Совершенно аналогично, для векторного объекта (1.4) имеем формальное равенство  $y_t = W_{y/u}(\nabla) u_t + \dots$  или (для  $D$ -преобразований) точное равенство  $\tilde{y} = W_{y/u}(\lambda) \tilde{u} + \dots$ , где точки означают не зависящее от  $u_t$  (от  $\tilde{u}$ ) слагаемое и

$$W_{y/u}(\lambda) = a(\lambda)^{-1} b(\lambda). \quad (1.39)$$

\*) Напомним основные сведения из теории  $D$ -преобразования [120a]. Пусть  $t = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , а  $x_t$  — произвольная последовательность векторов (или матриц) одинакового порядка такая, что  $x_t = 0$  при  $t \leq t_0$  и  $|x_t| \leq MN^t$ . (Числа  $t_0, M, N$  различны у разных последовательностей  $x_t$ .) Функция  $\tilde{x}(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda^t x_t$  называется  $D$ -преобразованием последовательности  $x_t$ . (Пишут  $\tilde{x}(\lambda) = D x_t$ , ряд для  $\tilde{x}(\lambda)$  сходится заведомо при  $|\lambda| < N^{-1}$ .) Очевидно, что  $\lambda \tilde{x}(\lambda) = D(\nabla x_t)$ ,  $a(\lambda) \tilde{x} = D[a(\nabla) x_t]$ , где  $a(\lambda)$  — полином. Если  $y_t = \sum_{-\infty}^{\infty} K_{t-s} x_s$ ,  $K(\lambda)$  — матрица и  $K_t = 0$  при  $t \leq t_k$ , то  $\tilde{y}(\lambda) = K(\lambda) \tilde{x}(\lambda)$ .

**Определение 3.1.7.** Матричные функции (1.38), (1.39) называются *передаточными матрицами* (*передаточными функциями*) при скалярных  $y_t$ ,  $u_t$  от входа  $v_t$  к выходу  $y_t$  соответственно для ОУ (1.12) и ОУ (1.4).

Если систему управления (1.4), (1.24) записать в виде

$$\begin{pmatrix} a(\nabla) & -b(\nabla) \\ -\beta(\nabla) & \alpha(\nabla) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} v_t,$$

то передаточную матрицу  $W(\lambda)$  от входа  $v_t$  к выходу  $z_t = \text{col}(y_t, u_t)$  в соответствии с определением 3.1.7 можно найти по формуле

$$W(\lambda) = \begin{vmatrix} W_y(\lambda) \\ W_u(\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(\lambda) & -b(\lambda) \\ -\beta(\lambda) & \alpha(\lambda) \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} I \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (1.40)$$

Здесь  $W_y(\lambda) = W_{y/v}(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda) = W_{u/v}(\lambda)$  — передаточные матрицы (*передаточные функции* в скалярном случае) системы управления (1.4), (1.24) от входа  $v_t$  к  $y_t$  и от  $v_t$  к  $u_t$ : они определяют зависимости

$$y_t = W_y(\nabla) v_t, \quad u_t = W_u(\nabla) v_t. \quad (1.41)$$

(Соотношения (1.41) написаны формально, поскольку операторы  $W_y(\nabla)$ ,  $W_u(\nabla)$  не определены, если  $W_y(\lambda)$  и  $W_u(\lambda)$  не являются полиномиальными матрицами.) Для стабилизирующего регулятора (1.24) полюсы передаточных матриц  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$  лежат в области  $|\lambda| > 1$ . Такие дробно-рациональные функции (д.-р.ф.) будем для краткости называть *устойчивыми*\*).

Как следует из (1.40), передаточные матрицы  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$  удовлетворяют тождеству

$$a(\lambda) W_y(\lambda) - b(\lambda) W_u(\lambda) = I, \quad (1.42)$$

где  $I$  — единичная матрица соответствующей размерности.

В скалярном случае формула (1.40) принимает вид

$$W_y(\lambda) = \alpha(\lambda)/g(\lambda), \quad W_u(\lambda) = \beta(\lambda)/g(\lambda), \quad (1.43)$$

\*). Отметим различие в словоупотреблении «устойчивый полином» и «устойчивая д.-р.ф.»: всякий полином может рассматриваться как д.-р.ф. (со знаменателем, равным 1) и в этом смысле он является устойчивой д.-р.ф., хотя он может и не быть устойчивым полиномом.

где  $g(\lambda)$  — характеристический полином (1.27) системы управления (1.4), (1.24).

Для системы управления (1.4), (1.35) имеем

$$W_y(\lambda) = F(\lambda)d(\lambda), \quad W_u(\lambda) = \lambda^s G(\lambda)b_+(\lambda)^{-1}. \quad (1.44)$$

В скалярном случае произвольная пара д.-р.ф.  $W_1(\lambda)$ ,  $W_2(\lambda)$ , связанная соотношением

$$a(\lambda)W_1(\lambda) - b(\lambda)W_2(\lambda) = 1, \quad (1.45)$$

однозначного определяет несократимые полиномы  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  регулятора (1.24) по формуле

$$\beta(\lambda)\alpha(\lambda)^{-1} = W_2(\lambda)W_1(\lambda)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} W(\lambda), \quad (1.46)$$

причем для так полученной замкнутой системы выполняется  $W_1(\lambda) = W_y(\lambda)$ ,  $W_2(\lambda) = W_u(\lambda)$ , т. е. эти д.-р.ф. являются для полученной системы управления передаточными функциями. Это довольно тривиальное для скалярного случая утверждение становится нетривиальным для векторных объектов. Относящиеся сюда результаты приведены в § 3.П.

Структуру множества устойчивых д.-р.ф.  $\{W_1(\lambda)$ ,  $W_2(\lambda)\}$ , связанных соотношением (1.45), вскрывает следующее простое, но важное для дальнейшего утверждение.

**Теорема 3.1.1.** Пусть  $W_1 = W_y^0(\lambda)$ ,  $W_2 = W_u^0(\lambda)$  — какая-либо пара устойчивых д.-р.ф., удовлетворяющая соотношению (1.45). Тогда множество всех передаточных функций, отвечающих стабилизирующему для ОУ (1.4) регуляторам (1.24), определяется соотношениями

$$\begin{aligned} W_y(\lambda) &= W_y^0(\lambda) + b(\lambda)v(\lambda)^{-1}\Psi(\lambda), \\ W_u(\lambda) &= W_u^0(\lambda) + a(\lambda)v(\lambda)^{-1}\Psi(\lambda), \end{aligned} \quad (1.47)$$

где  $v(\lambda) = \langle a(\lambda), b(\lambda) \rangle$  — наибольший общий делитель полиномов  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  и  $\Psi(\lambda)$  — произвольная устойчивая д.-р.ф.

Отметим, что предположение о существовании пары  $W_y^0(\lambda)$ ,  $W_u^0(\lambda)$  означает устойчивость полинома  $v(\lambda)$  (в противном случае, как отмечалось ранее, стабилизирующего регулятора не существует). В качестве  $W_y^0(\lambda)$ ,  $W_u^0(\lambda)$  можно принять, например, передаточные функции (1.44).

Теорема 3.1.1 «параметризует» множество всех пар  $\{W_y(\lambda), W_u(\lambda)\}$  устойчивых передаточных функций с помощью д.-р.ф.  $\Psi(\lambda)$ . Такая параметризация является важным этапом предлагаемого в § 3.3 способа синтеза оптимальных регуляторов. Аналог теоремы 3.1.1 для векторных объектов приведен в § 3.П.

**3.1.7°. Свойства возмущающих воздействий (помех).** В дальнейшем предполагается, что помехи  $v_t$  формируются фильтром (1.30), (1.31), на вход которого поступает «стандартная» помеха  $w_t$ . В роли «стандартной» помехи будут выступать нерегулярные и белошумные помехи. Переходим к их формальному описанию.

a) *Нерегулярные помехи.* Удобно предполагать, что последовательность  $w_0^\infty$  определяется некоторым абстрактным параметром  $\xi^B$ ,  $w_t = w_t(\xi^B)$ . Так, для случайных процессов роль параметра  $\xi^B$  играет «случай» — элементарное событие. Однако в данном пункте, в отличие от колмогоровской аксиоматики теории вероятностей, не предполагается задания меры на множестве  $\{\xi^B\}$  и  $\sigma$ -алгебры измеримых подмножеств этого множества.

**Определение 3.1.8.** Функция  $w_t = w_t(\xi^B)$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , со значениями в множестве  $W_0$  называется *нерегулярной на множестве значений*  $W \subseteq W_0$ , если для любого натурального числа  $T$  и любых векторов  $w^{(1)}, \dots, w^{(T)}$  из  $W$  найдется такой параметр  $\xi^B \in \{\xi^B\}$ , что

$$w_1(\xi^B) = w^{(1)}, \dots, w_T(\xi^B) = w^{(T)}.$$

Таким образом, нерегулярная функция «абсолютно непредсказуема»: по значениям  $w_1(\xi^B), \dots, w_T(\xi^B)$  ничего нельзя сказать о значении  $w_{T+1}(\xi^B)$ : оно может быть любым из множества  $W$ .

Ниже предполагается, что  $W_0 = W$ , т. е. что

$$w_t \in W. \quad (1.48)$$

В дальнейшем будем считать, что возмущение  $v_t = v_t(\xi^B)$  в уравнении (1.4) удовлетворяет соотношению (1.30) с полиномиальными матрицами (1.31), где  $w_t = w_t(\xi^B)$  — функция, нерегулярная на множестве значений  $W$ . Матрица  $d(\lambda)^{-1} e(\lambda)$  (д.-р. ф.  $e(\lambda)/d(\lambda)$  в скалярном случае) называется *спектральной характеристикой* возмущения  $v_t$ . Если полином  $\det d(\lambda)$  устойчив и  $W$  — ограниченное множество, то  $|v_t| \leq \text{const}$ .

б) *Стационарные помехи.* Пусть по-прежнему  $w_t = w_t(\xi^b)$ , где  $\{\xi^b\}$  — множество элементарных событий с выделенной  $\sigma$ -алгеброй подмножеств (событий) и определенной на этих событиях вероятностной мерой, т. е.  $w_t$  — случайная величина.

**Определение 3.1.9.** Последовательность  $\{w_t\}$  случайных величин (с.в.) называется *белошумной*, если эти с.в. стохастически независимы и обладают свойствами

$$\mathbb{M}w_t = 0, \quad \mathbb{M}w_tw_s^* = R\delta_{ts}. \quad (1.49)$$

Первое соотношение (1.49) определяет свойство центрированности с.в., второе означает, что матрица ковариации не зависит от  $t$ , т. е. случайный процесс  $w_0^\infty$  является стационарным.

Уравнением (1.31) с белошумным входом  $w_t$  при условии устойчивости полинома  $\det d(\lambda)$  определяют *стационарный процесс  $v_t$  с дробно-рациональной матрицей спектральных плотностей*

$$p(\lambda) = d(\lambda)^{-1} e(\lambda) R e(\lambda)^* [d(\lambda)^*]^{-1}. \quad (1.50)$$

Равномерной по  $t$  ограниченности реализации  $v_t$  может и не быть. Обычно предполагается, что полином  $\det e(\lambda)$  в уравнении (1.31) не имеет корней в множестве  $0 < |\lambda| < 1$ . Значения белошумного процесса  $w_t$  также «абсолютно непредсказуемы»: наблюдение его реализаций на произвольном конечном промежутке не позволяет предсказать значение процесса в последующие моменты времени. Тем не менее по закону больших чисел  $S_t = t^{-1}(w_1 + \dots + w_t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  с вероятностью 1. Таким образом, при больших  $t$  «предсказуемы» средние значения  $S_t$ :  $S_t \approx 0$ . На этом свойстве основан индентификационный подход в задачах адаптации для стационарной помехи. В случае нерегулярной помехи  $w_t$  (на выпуклом множестве значений  $W$ ) имеем  $S_t \in W$ , но ничего, кроме этого соотношения, о  $S_t$  сказать нельзя. В этом смысле нерегулярная помеха  $w_t$  «более непредсказуема», чем белошумная.

**3.1.8°. Диссилиативность замкнутых систем.** Разнообразные требования, предъявляемые к системам управления, приводят к разнообразным регуляторам. Замкнутая система может оказаться нелинейной, даже если ОУ линеен. Систему управления (объект и регулятор) можно,

как правило, записать в виде

$$\frac{dz(t)}{dt} = Z[t, z(t)], \quad y(t) = Y[t, z(t)] \quad (1.51)$$

для непрерывного случая и в виде

$$z_{t+1} = Z_t(z_t), \quad y_t = Y_t(z_t) \quad (1.52)$$

для дискретного случая. Здесь  $z(t)$  ( $z_t$ ) — вектор состояния системы управления,  $y(t)$  ( $y_t$ ) — вектор выходных переменных. Одно из самых слабых требований, предъявляемых к регулятору, состоит в обеспечении диссипативности системы управления. (Иногда его называют условием устойчивости; оно в самом деле переходит в условие устойчивости, если не учитываются помехи и внешние возмущения.)

**Определение 3.1.10.** Непрерывный объект (1.51) (дискретный объект (1.52)) называется *диссипативным по выходу*  $y(t)$  (по  $y_t$ ), если в пространстве выходных переменных существует ограниченная область  $D$  такая, что для любого решения  $z(t)$  уравнения (1.51) (решения  $z_t$  системы (1.52)) найдется такой момент  $t_*$ , что  $y(t) \in D$  ( $y_t \in D$ ) при всех  $t \geq t_*$ . Область  $D$  называется *областью диссипативности выхода*  $y(t)$  (выхода  $y_t$ ). Систему, диссипативную по состоянию  $z(t)$  (по  $z_t$ ), будем, для краткости, называть *диссипативной*.

Достаточные условия диссипативности можно получать на основе метода функций Ляпунова. Ограничимся обсуждением непрерывного случая. Хорошо известно, что система (1.51) диссипативна, если существует непрерывно дифференцируемая скалярная функция  $V(z, t)$ , удовлетворяющая условиям

$$0 \leq V_1(z) \leq V(z, t) \leq V_2(z), \quad (1.53)$$

$$\frac{dV(z, t)}{dt} \leq -V_3(z), \quad (1.54)$$

где  $dV(z, t)/dt$  — производная функция  $V(z, t)$  в силу системы (1.51),  $V_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , — непрерывные скалярные функции, причем  $V_1(z) \rightarrow \infty$  при  $|z| \rightarrow \infty$  и для некоторого  $R > 0$  в области  $|z| > R$  выполнено  $V_3(z) > 0$ . Конкретизируя условие (1.54), можно получать различные оценки области диссипативности. В качестве примера приведем следующее простое утверждение.

**Лемма 3.1.2 (о диссипативности).** Пусть для системы (1.51) существует гладкая функция  $V(z, t)$ , удовлетворяющая неравенствам (1.53) (где  $V_i(z) \rightarrow \infty$  при  $|z| \rightarrow \infty$ ) и неравенству

$$\frac{dV(z, t)}{dt} \leq -\rho V(z, t) + \beta V^\mu(z, t), \quad (1.55)$$

в котором  $\rho > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $0 \leq \mu < 1$ . Тогда система (1.51) диссипативна с областью диссипативности

$$D = \{z: V_1(z) \leq C\} \text{ при } C > (\beta/\rho)^{1/(1-\mu)}.$$

Доказательство леммы достаточно просто и основано на том, что в силу (1.55) выполняется неравенство

$$\frac{d}{dt} e^{\rho(1-\mu)t} V^{1-\mu}(z, t) \leq e^{\rho(1-\mu)t} \beta (1 - \mu),$$

откуда  $\lim_{t \rightarrow \infty} V^{1-\mu}(z, t) \leq \beta/\rho$ , что с учетом первого неравенства (1.53) приводит к утверждению леммы.

**3.1.9°. Частотные теоремы.** При установлении факта существования функции  $V(z, t)$ , гарантирующей диссипативность системы, а также при решении задач синтеза оптимального и адаптивного управления широко используются так называемые частотные теоремы. Приведем варианты этих теорем в форме, удобной для дальнейших ссылок.

а) *Дискретный объект управления.* Рассмотрим ДОУ с уравнением в стандартной форме (1.12) (матрицы  $A, B, C, D$  могут быть комплексными). Пусть задана некоторая эрмитова форма комплексных векторов  $y$  и  $u$ :

$$\mathfrak{G}(y, u) = y^* Q_{11} y + 2\operatorname{Re}(y^* Q_{12} u) + u^* Q_{22} u. \quad (1.56)$$

Предположим, что требуется найти такую матрицу  $H = -H^*$ , что для функции  $V(x) = x^* H x$  вдоль любых решений системы (1.12) выполнено  $V(x_{t+1}) - V(x_t) \leq \mathfrak{G}(x_t, u_t)$ , или, иначе, для любых векторов  $x, u$  справедливо неравенство

$$(Ax + Bu)^* H (Ax + Bu) - x^* H x \leq \mathfrak{G}(y, u), \quad (1.57)$$

$$y = Cx + Du.$$

Для комплексных  $\lambda$  таких, что  $|\lambda| = 1$  и  $\det(I_n - \lambda A) \neq 0$ , определим форму вектора  $u$ , зависящую от параметра  $\lambda$ :

$$\tilde{\mathfrak{G}}(\lambda, u) = \mathfrak{G}(y_\lambda, u), \quad (1.58)$$

где

$$y_\lambda = W(\lambda)u, \quad W(\lambda) = D + \lambda C(I_n - \lambda A)^{-1}B, \quad (1.59)$$

$W(\lambda)$  — передаточная матрица от  $u_t$  к  $y_t$  в системе (1.12).

**Теорема 3.1.2.** Пусть дискретный объект  $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t$  — стабилизируемый. Для существования такой матрицы  $H = H^*$ , что для всех  $x, u$  выполнено (1.57), необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{\mathfrak{G}}(\lambda, u) \geq \varepsilon \| (I_n - \lambda A)^{-1}Bu \|^2 + \| u \|^2 \quad (1.60)$$

для некоторого  $\varepsilon > 0$ , всех значений  $\lambda$ :  $|\lambda| = 1$  и всех  $u$ . При выполнении (1.60) существуют такие матрицы  $H = H^*$ ,  $h$ ,  $\kappa = \kappa^*$ , что справедливо тождество

$$(Ax + Bu)^*H(Ax + Bu) - x^*Hx = \mathfrak{G}(y, u) - \| \kappa(h^*x - u) \|^2 \quad (1.61)$$

и матрица  $A + Bh^*$  не имеет собственных значений при  $|\lambda| \geq 1$ . Если матрицы  $A, B, C, D$  и коэффициенты формы  $\mathfrak{G}(y, u)$  вещественны, то указанные матрицы  $H, h, \kappa$  можно выбрать вещественными.

**З а м е ч а н и е.** Если  $\det(I_n - \lambda A) \neq 0$  при  $|\lambda| = 1$ , то неравенство (1.60) эквивалентно неравенству

$$\tilde{\mathfrak{G}}(\lambda, u) > 0, \quad (1.62)$$

которое должно выполняться при всех  $|\lambda| = 1$  и всех  $u \neq 0$ .

Существуют разнообразные алгоритмы определения матриц  $H, h, \kappa$  в соотношении (1.61); они сводятся к определению корней полинома степени  $2n$  и решению линейных уравнений.

Условия (1.60), (1.62) называются *частотными условиями*.

Отметим, что если форма  $\mathfrak{G}(y, u)$  задается для вещественных векторов  $y$  и  $u$ , то она должна быть распространена до эрмитовой на комплексные значения  $y$  и  $u$ . Пусть, например, для ДОУ в дискретном скалярном случае  $\mathfrak{G}(y, u) = yu$  (где  $y, u$  — вещественные). Тогда для комплексных  $y, u$  имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(y, u) &= \operatorname{Re}(yu), & \tilde{\mathfrak{G}}(\lambda, u) &= \operatorname{Re} u^*W(\lambda)u = \\ & & &= \operatorname{Re}[W(\lambda)^T]u\|^2 \end{aligned}$$

и частотное условие (1.62) принимает вид  $\operatorname{Re} W(\lambda) > 0$  при  $|\lambda| = 1$ .

б) *Непрерывный объект управления.* Рассмотрим НОУ с уравнением в стандартной форме

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (1.63)$$

Здесь  $u(t)$  — векторное (или скалярное) управление; элементы матриц  $A, B, C, D$  — вещественные или комплексные числа. Пусть задана эрмитова форма (1.56) комплексных векторов  $y$  и  $u$ . Предположим, что требуется найти такую матрицу  $H = H^*$ , что для функции  $V(x) = x^*Hx$  вдоль любых решений системы (1.63) выполнено неравенство  $(d/dt)V[x(t)] \leq \mathfrak{G}[x(t), u(t)]$ , или, иначе, для любых векторов  $x$  и  $u$  справедливо соотношение

$$2 \operatorname{Re} x^*H(Ax + Bu) \leq \mathfrak{G}(y, u), \quad \text{где } y = Cx + Du. \quad (1.64)$$

Для вещественных чисел  $\omega$ , для которых  $\det(i\omega I - A) \neq 0$ , определим следующую функцию:

$$\tilde{\mathfrak{G}}(\omega, u) = \mathfrak{G}(y_\omega, u), \quad (1.65)$$

где

$$y_\omega = W(i\omega)u, \quad W(\lambda) = D + C(M - A)^{-1}B. \quad (1.66)$$

**Теорема 3.1.3.** *Пусть пара  $(A, B)$  управляема. Для существования матрицы  $H = H^*$ , удовлетворяющей соотношению (1.64), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\tilde{\mathfrak{G}}(\omega, u) \geq 0. \quad (1.67)$$

*При выполнении (1.67) существуют такие матрицы  $H, h, \chi$ , что для всех (комплексных)  $x$  и  $u$  справедливо тождество*

$$2 \operatorname{Re} x^*H(Ax + Bu) = \mathfrak{G}(y, u) - |h^*x - \chi u|^2. \quad (1.68)$$

*Если  $A, B, C, D$  и коэффициенты  $Q_{ij}$  формы  $\mathfrak{G}(y, u)$  вещественны, то существуют вещественные матрицы  $H, h, \chi$ , удовлетворяющие (1.68).*

Следующий специальный вариант частотной теоремы для случая, когда  $\mathfrak{G}(y, u) = y^*u$ , систематически используется в гл. 7.

**Теорема 3.1.4.** *Пусть в системе (1.63) размерности  $n_y, n_u$  векторов  $y, u$  совпадают и  $D = 0$ . Для существова-*

ния матрицы  $H = H^* > 0$ , удовлетворяющей соотношениям

$$HA + A^*H < 0, \quad HB = C^*, \quad (1.69)$$

достаточно, а если  $\text{rank } B = n_u$ , то и необходимо, чтобы полином  $\det(M - A)$  был гурвицевым и для всех вещественных  $\omega$  и  $\zeta \neq 0$  выполнялись частотные неравенства

$$\operatorname{Re} u^\omega W(i\omega)u > 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re} u^* W(i\omega)u > 0. \quad (1.70)$$

Частотная теорема 3.1.4 решает, таким образом, специальную алгебраическую задачу (1.69). Приведем используемое в дальнейшем решение следующей алгебраической задачи. Пусть дана  $n_y \times n_u$ -матрица  $G$ . Требуется найти условия существования  $n \times n$ -матрицы  $H = H^* > 0$  и  $n_y \times n_u$ -матрицы  $L$ , удовлетворяющих соотношениям

$$H[A + BL^*C] + [A + BL^*C]^*H < 0, \quad HB = C^*G. \quad (1.71)$$

Введем обозначения

$$R = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda G^* W(\lambda), \quad \delta(\lambda) = \det(M_n - A), \quad (1.72)$$

$$W(\lambda) = C(M - A)^{-1}B, \quad \varphi(\lambda) = \delta(\lambda) \det G^* W(\lambda).$$

Можно показать, что  $\varphi(\lambda)$  — полином степени не выше  $n - n_u$  со старшим коэффициентом  $R$ .

**Теорема 3.1.5.** Для существования матриц  $H = H^* > 0$ ,  $L$ , удовлетворяющих (1.71) и вещественных в вещественном случае, достаточно, а если  $\text{rank } B = n_u$ , то и необходимо, чтобы полином  $\varphi(\lambda)$  был гурвицевым, а матрица  $R$  — эрмитовой и положительно определенной.

**Следствие.** Рассмотрим систему (1.63) с вещественными коэффициентами при  $n_u = 1$ ,  $B \neq 0$ ,  $D = 0$ , и пусть  $G \in \mathbb{R}^n$  и  $L$  — вектор порядка  $n_y$ . Для существования  $n \times n$ -матрицы  $H = H^* > 0$  и вектора  $L \in \mathbb{R}^{n_u}$ , удовлетворяющих (1.71), необходимо и достаточно, чтобы полином  $\delta(\lambda)G^*W(\lambda)$  был гурвицевым степени  $(n - 1)$  с положительными коэффициентами.

Доказательства частотных теорем 3.1.2—3.1.5 в близких формулировках имеются в [127к, 117г], и здесь эти теоремы приводятся без доказательств.

### § 3.2. Оптимальное управление в случае ограниченной помехи

**3.2.1°. Постановка задачи.** В этом параграфе рассматривается задача оптимальной стабилизации дискретного объекта, описываемого уравнением (1.1) (или (1.4)). Векторы выходных переменных  $y_t$  и управляющих воздействий  $u_t$  имеют одинаковую размерность  $l$ . Принимается, что ЦУ состоит в поддержании на выходе заданных значений, т. е. в том, чтобы выбором управлений  $u_t$  сделать выход  $y_t$  «по возможности» ближе к заданному значению  $y^0$  (при любых помехах из фиксированного класса).

Перейдем к точным формулировкам. Положим  $y^0 = 0$ , поскольку случай  $y^0 \neq 0$  сразу сводится к случаю  $y^0 = 0$  заменой  $y'_t = y_t - y^0$ . Будем считать, что измеряется лишь выход  $y_t$  (но не возмущение  $v_t$ ). Управление  $u_t$  в момент времени  $t$  должно выражаться через предыдущие значения управления, а также через  $y_{t-s}, y_{t-s-1}, \dots$ , где  $s$  — запаздывание в измерении. При этом  $u_t$  может быть произвольной (нелинейной) функцией указанных величин и времени  $t$ . Иначе, классом  $\mathcal{U}_s$  допустимых управлений является множество управлений вида

$$u_t = \mathcal{U}(t, y_0^{t-s}, u_0^{t-1}), \quad t = s, s+1, \dots \quad (2.1)$$

(Напомним, что  $y_0^{t-s}, u_0^{t-1}$  — соответственно наборы  $\{y_0, \dots, y_{t-s}\}, \{u_0, \dots, u_{t-1}\}$ .)

Уравнение (2.1) описывает обратную связь; из (1.1) и (2.1) после задания начальных значений  $u_0, \dots, u_{r-1}, y_0, \dots, y_{r-1}$  последовательно определяются  $y_t, u_t$  для всех  $t \geq r$ . Будем предполагать, что помеха  $v_t$  удовлетворяет уравнению (1.30) при  $e(\lambda) = I_l$ , где  $I_l$  — единичная  $l \times l$ -матрица и для  $w_t$  выполнено условие (1.48). Таким образом,

$$d(\nabla)v_t = w_t. \quad (2.2)$$

Кроме того, предполагается, что  $w_t = w_t(\xi^B)$  — нерегулярная функция в множестве значений  $W$ , причем  $W$  — ограниченное симметричное множество. Симметрия множества означает, что из  $w \in W$  следует  $(-w) \in W$ . Класс всех возмущений  $v_t = v_t(\xi^B)$  указанного вида обозначим через  $\mathfrak{V}$ . Подчеркнем, что полином в уравнении (2.2) предполагается фиксированным и известным.

Отметим, что условию (2.2) с подходящим выбранным полиномом  $d(\lambda)$  удовлетворяет произвольное гармоническое возмущение

$$v_t = \operatorname{Re} \left( \sum_{h=1}^N A_h e^{i\omega_h t} \right),$$

где  $A_h$  — комплексные векторы (или числа для скалярного возмущения),  $\omega_h$  — вещественные числа. В этом случае  $w_t \equiv 0$ ,  $W = \{0\}$ , матричный полином  $d(\lambda)$  строится по  $A_h$  и  $\omega_h$ . Например, для скалярного возмущения

$$d(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda - e^{i\omega_j}) (\lambda - e^{-i\omega_j}).$$

Заметим еще, что, хотя нас в основном интересует случай ограниченного возмущения  $v_t$ , классу  $\mathfrak{V}$  могут принадлежать и неограниченные возмущения. Если  $\det d(\lambda)$  — устойчивый полином, то возмущение  $v_t$  ограничено.

Целью управления объектом (1.1) является нахождение минимума функционала

$$J^{(T)}[u_0^\infty] = \sup_{t \geq T} \sup_{v_0^\infty \in \mathfrak{V}} |y_t| \quad (2.3)$$

на множестве управлений  $u_0^\infty \in \mathfrak{U}_s$ . Как обычно, назовем управление (2.1) *оптимальным* в классе  $\mathfrak{U}_s$ , если для этого управления функционал (2.3) принимает наименьшее в классе значение.

**3.2.2°. Синтез оптимального регулятора в простейшем случае.** Рассмотрим скалярный ОУ (1.1), в котором  $v_t$  — нерегулярное в интервале значений  $W = [-C_v, C_v]$  возмущение (т. е. в (2.2)  $d(\lambda) \equiv 1$ ). Предположим, что  $a_0 = 1$  и что запаздывание в управлении  $k$  и в измерении  $s$  минимальны:  $k = 1$ ,  $s = 0$ . При этом уравнение объекта (1.1) имеет вид

$$y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_r y_{t-r} = b_1 u_{t-1} + \dots + b_r u_{t-r} + v_t, \quad (2.4)$$

где все величины — скалярные. Относительно помехи  $v_t$  известно лишь, что  $|v_t| \leq C_v$ . В этом максимально упрощенном случае решение поставленной задачи получается немедленно. Именно, перепишем (2.4) в виде  $y_t =$

$= h_t + v_t$ . Пусть  $u_t$  как-то выбрано; оно, по условию, зависит лишь от  $y_t, y_{t-1}, \dots, u_{t-1}, \dots$ , но не от  $v_t$ . Итак,  $h_t$  определилось, а  $v_t$  может быть любым в интервале  $[-C_v, C_v]$ . Если  $h_t \neq 0$ , то наихудшим значением (при котором величина  $|y_t|$  максимальна) является  $v_t = -C_v \operatorname{sign} h_t$ ; тогда  $|y_t| = C_v + |h_t|$ . Если же  $u_t$  выбрано из условия  $h_t = 0$ , то  $|y_t| = C_v$ . Итак, ясно, что оптимальное  $u_t$  определяется из условия  $h_t = 0$  или

$$b_1 u_1 + \dots + b_r u_{t-r+1} = a_1 y_t + \dots + a_r y_{t-r+1}. \quad (2.5)$$

При этом  $y_t = v_t$ , т. е. выход «следит» за помехой. Соотношение (2.5) и определяет оптимальное управление в рассматриваемом случае. Формулу (2.5) можно переписать в виде

---


$$b(\nabla) u_t = [a(\nabla) - 1] y_t. \quad (2.6)$$


---

Заметим, что при  $s \geq 1$  управление (2.5) недопустимо, а при  $b_1 = 0$ , т. е. при  $k \geq 2$ , оно нереализуемо, т. е. также недопустимо; ниже будет получено решение и для этих случаев.

Рассмотрим теперь случай ограниченной нерегулярной помехи:  $d(\lambda) \neq 1$ . Из (1.1), (2.1) имеем

$$d(\nabla) a(\nabla) y_t = d(\nabla) b(\nabla) u_t + w_t.$$

Рассуждая аналогично, запишем это уравнение в виде  $y_t = h_t + w_t$ , где  $h_t = d(\nabla)[b(\nabla)u_t - a(\nabla)y_t] - y_t$ , откуда находим для оптимального управления  $h_t = 0$ . Итак, уравнение оптимального регулятора для случая  $s = 0, k = 1$  при помехе  $v_t$ , определяемой уравнением (2.2) и условием  $w_t \in [-C_v, C_v]$ , имеет вид

---


$$d(\nabla) b(\nabla) u_t = [d(\nabla) a(\nabla) - 1] y_t. \quad (2.7)$$


---

Отметим одно важное свойство найденного решения. Характеристический полином замкнутой системы (1.4), (2.6) (а также системы (1.4), (2.7)) равен  $b(\lambda)$ . Таким образом, если объект (1.4) не является минимально-фазовым (т. е. если он неустойчив по управлению  $u_t$ ), то оптимальный регулятор не является стабилизирующим. Оптимальный регулятор в этом случае хотя и поддерживает

минимально возможное значение выхода  $y_t$ , но ценой неограниченно возрастающих во времени управляющих воздействий. С такими «скверными» свойствами объектов, неустойчивых по управлению, нам часто придется сталкиваться в дальнейшем при построении адаптивных регуляторов.

Итак, найденные решения задач оптимального управления оказываются практически пригодными лишь для устойчивого по управлению объекта. Для неустойчивого по управлению объекта задача должна быть видоизменена: класс допустимых управлений нужно сузить, введя дополнительное требование устойчивости замкнутой системы управления. Отметим, что в общем случае эта последняя задача остается нерешенной. Ее частный вариант будет рассмотрен ниже, в п. 3.2.7°.

Перейдем к решению задачи в общем случае пока без дополнительного требования устойчивости замкнутой системы управления.

**3.2.3°. Синтез оптимального регулятора в общем случае.** Предположим вначале, что векторы  $y_t$ ,  $u_t$ ,  $v_t$  имеют одинаковую размерность  $l$ , т. е. коэффициенты полиномов (1.3) суть матрицы порядка  $l \times l$  и  $\det b_k \neq 0$ , где  $k$  — запаздывание в управлении. Рассмотрим задачу минимизации функционала (2.3) на множества  $U_s$  допустимых управлений в предположениях п. 3.2.1°.

**Теорема 3.2.1.** Пусть число  $T$  в функционале (2.3) удовлетворяет неравенству  $T \geq r + k + s + p - 1$ , где  $k$  — запаздывание в управлении,  $s$  — запаздывание в измерении,  $r, p$  — степени полиномов  $a(\lambda)$  и  $d(\lambda)$ ,  $d(0) = I_l$ ,  $a(0) = I_l$ . Обозначим  $n = k + s - 1$ .

Задача минимизации функционала (2.3) в классе  $U_s$  имеет решение. Оптимальное управление определяется линейной обратной связью

$$\underline{\underline{F(\nabla)d(\nabla)b(\nabla)u_t = \nabla^{k+s}G(\nabla)y_t}}, \quad (2.8)$$

где  $l \times l$ -матричные полиномы

$$F(\lambda) = I_l + \lambda F_1 + \dots + \lambda^n F_n,$$

$$G(\lambda) = G_0 + \lambda G_1 + \dots + \lambda^{r+p-1} G_{r+p-1} \quad (2.9)$$

однозначно определяются из тождества

$$F(\lambda)d(\lambda)a(\lambda) - \lambda^{n+1}G(\lambda) \equiv I_l. \quad (2.10)$$

Значение функционала (2.3) на оптимальном управлении (2.8) равно

$$J^{(T)}[u_0^\infty] = \sup_{w_i \in W} |w_0 + F_1 w_1 + \dots + F_n w_n|. \quad (2.11)$$

(В (2.11) верхняя грань берется по всевозможным векторам  $w_i$ , пробегающим независимо множество  $W$ .)

Отметим, что для  $F_j$  и  $G_j$  из (2.10) получается линейная система уравнений, из которой они однозначно определяются. Полиномы  $F(\lambda)$  и  $G(\lambda)$  могут быть также найдены из (2.10) с использованием алгоритма левого деления матричных полиномов (см. доказательство теоремы 3.2.1).

**3.2.4°. Следствие: скалярный объект.** Рассмотрим скалярный ОУ для  $n = k + s - 1 > 1$  (случай, не разобранный в предыдущем пункте), считая, что  $w_t$  — нерегулярный в интервале значений  $[-C_w, C_w]$  процесс. (Таким образом,  $|w_t| \leq C_w$ , а в остальном значения  $w_t$  произвольны.) Сами помехи  $v_t$  при этом определяются из (2.2). Оптимальное управление по-прежнему формируется уравнением (2.8), в котором скалярные полиномы  $F(\lambda)$ ,  $G(\lambda)$  определяются из (2.10) (где теперь  $I_l = 1$ ). Значение функционала (2.3) на оптимальном управлении есть

$$J^{(T)}(u_0^\infty) = C_w [1 + |F_1| + \dots + |F_n|]. \quad (2.12)$$

Отметим, что в случае гармонического возмущения  $v_t$  имеем  $w_t \equiv 0$ ,  $C_w = 0$  и оптимальное управление таково, что

$$J^{(T)}(u_0^\infty) = 0.$$

Для случая  $s = 0$ ,  $k = 1$  имеем  $n = 0$ , и из (2.9), (2.10) получаем  $F(\lambda) = 1$ ,  $\lambda G(\lambda) = 1 - d(\lambda)a(\lambda)$ , и оптимальный регулятор (2.8), как и должно быть, совпадает с (2.7).

**3.2.5°. Замечания.** 1. Как и в случае, рассмотренном в п. 3.2.2°, оптимальный регулятор (2.8) является стабилизирующим только для объекта (1.1), устойчивого по управлению. Действительно, из (2.10) следует, что характеристический полином системы управления (1.4), (2.8)

равен

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ \lambda^s G(\lambda) & F(\lambda) d(\lambda) b(\lambda) \lambda^{-k} \end{vmatrix} &= \\ = \det a(\lambda) \det [F(\lambda) d(\lambda) b(\lambda) \lambda^{-k} - \lambda^s G(\lambda) a^{-1}(\lambda) b(\lambda)] &= \\ = \det a(\lambda) \det (F(\lambda) d(\lambda) - \lambda^{k+s} G(\lambda) a^{-1}(\lambda)) \det [b(\lambda) \lambda^{-k}] &= \\ = \det (F(\lambda) d(\lambda) a(\lambda) - \lambda^{k+s} G(\lambda)) \det [b(\lambda) \lambda^{-k}] &= \\ = \det [\lambda^{-k} b(\lambda)]. & \end{aligned}$$

Здесь на первом этапе использовалось тождество Шура

$$\det \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det A \det (D - CA^{-1}B) \quad (2.13)$$

(см. [24], с. 63), а на последнем — соотношение (2.10).

Поэтому, если полином  $\det [\lambda^{-k} b(\lambda)]$  не является устойчивым, то регулятор (2.8) не будет стабилизирующим по отношению к ОУ (1.1).

2. Пусть размерность  $l'$  векторов  $u_t$  отлична от размерности  $l$  векторов  $y_t, v_t$ . (Таким образом, размерности матриц  $a_j, b_j$  в (2.4) суть  $l \times l$  и  $l \times l'$ .) Оптимальное управление, если оно существует, должно удовлетворять уравнению (2.8). В случае  $l' > l$ ,  $\text{rank } B_k = l$  из (2.8) может быть найдено  $u_t$  (неоднозначно) так, что  $u_0^\infty \in \mathfrak{U}_s$  и любое такое управление оптимально. Если  $l' = l$ ,  $\det B_k = 0$  или если  $l' < l$ , то уравнение (2.8) может быть неразрешимо относительно  $u_t$ , а оптимальное управление зависит как от коэффициентов матричных полиномов  $a(\lambda), b(\lambda), d(\lambda)$ , так и от формы симметричного множества  $W$  значений помех.

3. Выше рассматривался функционал (2.3). Теорема 3.2.1 остается справедливой, если вместо (2.3) взять функционал

$$J(u_0^\infty) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_{v_0^\infty \in \mathfrak{V}} |y_t|, \quad (2.14)$$

где берется верхняя грань по всем помехам из класса  $\mathfrak{V}$  (см. п. 3.Д.3°).

**3.2.6°. Синтез оптимального регулятора при помехе с произвольной дробно-рациональной спектральной характеристикой.** Выше был рассмотрен случай, когда помеха удовлетворяет уравнению  $d(\nabla)v_t = e(\nabla)w_t$  с  $e(\lambda) = I_l$ , а минимизируемый функционал есть (2.3). Пред-

положим теперь, что  $e(\lambda)$  — произвольный устойчивый полином (т. е. уравнение  $\det e(\lambda) = 0$  не имеет корней в круге  $|\lambda| \leq 1$ ), а в качестве минимизируемого взят функционал (2.14). По-прежнему считаем, что  $y_t$ ,  $u_t$  имеют одинаковую размерность  $l$ , что  $\det b_k \neq 0$ ,  $a(0) = -I_l$ , что  $\mathfrak{U}_0$  — множество допустимых управлений, а также что  $w_t = w_t(\xi)$  — нерегулярный процесс на множестве значений  $W$ , где  $W$  — ограниченное симметричное множество и  $d(0) = e(0) = I_l$ . Последними условиями определен класс  $\mathfrak{V}$  помех с дробно-рациональной спектральной  $l \times l$ -матричной характеристикой  $d(\lambda)^{-1}e(\lambda)$ .

Рассмотрим для простоты случай минимальных запаздываний  $s = 0, k = 1$ . Из (1.1) и (1.3) имеем  $d(\nabla)a(\nabla)y_t = d(\nabla)b(\nabla)u_t + e(\nabla)w_t$ . Преобразуем это уравнение к виду  $e(\nabla)[y_t - h_t - w_t] = 0$ , где последовательность  $h_t$  определяется из уравнения  $e(\nabla)h_t = d(\nabla)b(\nabla)u_t + [e(\nabla) - d(\nabla)a(\nabla)]y_t$  с нулевыми начальными данными. Так как  $e(\lambda)$  — устойчивый полином, то  $y_t - h_t - w_t = z_t$ , где  $z_t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Поскольку  $d(0)b'(0) = -b_1$ ,  $\det b_1 \neq 0$ ,  $e(0) = d(0)a(0)$ , то  $h_t$  зависит лишь от  $u_0^{t-1}$ ,  $y_0^{t-1}$ . Повторяя рассуждение п. 3.2.2°, приходим к выводу, что при условии  $h_t = 0$  достигается минимум функционала (2.14). (Условие  $h_t = 0$  равносильно уравнению  $d(\nabla)b(\nabla)u_t = [d(\nabla)a(\nabla) - e(\nabla)]y_t$ .) Управление, определяемое этим уравнением, допустимо, а значит, и оптимально. При этом  $\inf_{u_0^{\infty} \in \mathfrak{U}_0} J(u_0^{\infty}) = C_w$ . Итак, спра-

ведливо следующее утверждение:

*При сформулированных условиях задача минимизации функционала (2.14) в классе  $\mathfrak{U}_0$  имеет решение и оптимальное управление определяется линейной обратной связью*

$$\boxed{d(\nabla)b(\nabla)u_t = [d(\nabla)a(\nabla) - e(\nabla)]y_t.}$$

Применяя тождество Шура (2.13), получаем, что определитель замкнутой системы (1.4), (2.8) равен

$$\det \begin{vmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ d(\lambda)a(\lambda) - e(\lambda) & d(\lambda)b(\lambda) \end{vmatrix} = \det e(\lambda) \det b(\lambda).$$

Устойчивость замкнутой системы равносильна поэтому

минимальной фазовости (устойчивости по управлению) объекта (1.4).

Сформулированные утверждения легко распространяются на случай произвольных запаздываний в управлении и измерении:  $k \geq 1$  и  $s \geq 0$ . (Аналогично доказательству теоремы 3.2.1.) При  $e(\lambda) \equiv I_1$  оптимальный регулятор совпадает с (2.7), как и следовало ожидать.

**3.2.7°. Случай объекта, не являющегося минимально-фазовым.** Рассмотрим специальный случай скалярного объекта, который не является минимально-фазовым. Поскольку для оптимального регулятора замкнутая система неустойчива, сужим класс допустимых управлений. Именно, рассмотрим лишь *стабилизирующие* линейные обратные связи. Для простоты ограничимся случаем  $s = 0$  и случаем, когда процесс  $v_t$  удовлетворяет условию  $|v_t| \leq C_v$ , и в остальном произволен, т. е. когда  $v_t$  — нерегулярный в интервале значений  $[-C_v, C_v]$  процесс  $(d(\lambda) \equiv e(\lambda) \equiv 1, v_t = w_t)$ . Будем считать, не ограничивая общности, что  $v_t = 0$  при  $t \leq -r$ .

Итак, уравнения объекта и регулятора имеют вид

$$a(\nabla)y_t = b(\nabla)u_t + v_t, \quad \alpha(\nabla)u_t = \beta(\nabla)y_t, \quad (2.15)$$

причем без ограничения общности  $\alpha(0) = 1$  (число  $\beta(0) = \beta_0$  может быть нулем). Полиномы  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  таковы, что характеристический полином системы (2.15)  $g(\lambda) = a(\lambda)\alpha(\lambda) - b(\lambda)\beta(\lambda)$  не имеет корней в замкнутом единичном круге. Требуется найти полиномы  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  из условия минимизации функционала (2.14).

Представим полином  $b(\lambda)$  в виде

$$b(\lambda) = b_+(\lambda)b_-(\lambda), \quad b_+(0) \neq 0, \quad (2.16)$$

где  $b_+(\lambda)$  — устойчивый полином, а полином  $b_-(\lambda)$  не имеет корней вне открытого единичного круга. Рассматриваемый ОУ не является минимально-фазовым, если  $b_-(\lambda) \not\equiv \lambda^k$ . Пусть

$$b_-(\lambda) = b'_0 + \lambda b'_1 + \dots + \lambda^{m-1} b'_m, \quad b'_m \neq 0. \quad (2.17)$$

Ниже будет рассмотрен случай, когда выполняется неравенство

$$|b'_m| \geq \sum_{j=0}^{m-1} |b'_j|. \quad (2.18)$$

Из условия (2.18) следует, что полином (2.17) не имеет корней вне открытого единичного круга. Покажем это. Пусть в (2.18) имеет место строгое неравенство. Тогда при  $|\lambda| = 1$  имеем  $|b_-(\lambda)| \geq |b'_m| - \left| \sum_{j=0}^{m-1} b'_j \lambda^j \right| > 0$ , т. е. определен  $\text{Arg } b_-(\lambda)$ . Пусть  $b_-(\lambda) = \lambda^m b^{(-1)}(\lambda)$  и  $\lambda$  делает один оборот по единичной окружности в положительном направлении. Для приращения аргумента имеем

$$\Delta \text{Arg } b_-(\lambda) = 2\pi m + \Delta \text{Arg } b^{(-1)}(\lambda).$$

Так как

$$|b^{(-1)}(\lambda) - b'_m| = |\lambda^{-m} b'_0 + \dots + \lambda^{-1} b'_{m-1}| < |b'_m|,$$

то  $\Delta \text{Arg } b^{(-1)}(\lambda) = 0$ . Итак,  $\Delta \text{Arg } b_-(\lambda) = 2\pi m$ , а это означает, что все корни полинома  $b_-(\lambda)$  расположены в открытом единичном круге. Если в (2.18) знак неравенства нестрогий, то по непрерывности получаем, что все корни полинома расположены в замкнутом единичном круге. Мы доказали высказанное утверждение. Итак, условие (2.18) выделяет некоторое подмножество «сильно неустойчивых» полиномов в множестве всех неустойчивых полиномов.

Определим по  $a(\lambda)$ ,  $b_-(\lambda)$  полиномы  $\alpha_-(\lambda)$ ,  $\beta_-(\lambda)$  из условий

$$a(\lambda)\alpha_-(\lambda) - b_-(\lambda)\beta_-(\lambda) \equiv 1, \quad \deg \alpha_-(\lambda) < m. \quad (2.19)$$

Соотношениями (2.19) полиномы  $\alpha_-(\lambda)$ ,  $\beta_-(\lambda)$  определяются однозначно (см. лемму 3.1.1).

**Теорема 3.2.2.** *Пусть  $\langle a(\lambda), b(\lambda) \rangle = 1$  и выполнено (2.18). Задача минимизации функционала (2.14) в классе всевозможных линейных стабилизирующих связей имеет решение, и оптимальный регулятор определяется полиномами*

$$\alpha(\lambda) = \alpha_-(\lambda)b_+(\lambda), \quad \beta(\lambda) = \beta_-(\lambda). \quad (2.20)$$

*Значение функционала (2.14) на оптимальном управлении равно*

$$J[u_0^\infty] = \sum_{j=1}^{k-1} |\alpha_j^{(-)}|, \quad \text{где} \quad \alpha_-(\lambda) = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j^{(-)} \lambda^j. \quad (2.21)$$

Из (2.15), (2.20) находим, что характеристический полином и передаточные функции системы управления (2.15)

имеют вид

$$a(\lambda)\alpha(\lambda) - b(\lambda)\beta(\lambda) = b_+(\lambda), \quad (2.22)$$

$$W_v(\lambda) = \alpha_-(\lambda), \quad W_u(\lambda) = \beta_-(\lambda)b_+(\lambda)^{-1}. \quad (2.23)$$

Заметим, что если  $b_-(\lambda) = \lambda^k$  (т. е. если ОУ минимально-фазовый), то оптимальная обратная связь, как и должно быть, совпадает с (2.8) при  $d(\lambda) \equiv 1$ .

В случае, когда не выполнено условие (2.18), решение сформулированной задачи оптимизации неизвестно.

**З а м е ч а н и е.** Рассмотрим скалярный объект  $a(\nabla)u_t = b(\nabla)u_t + v_t$  с произвольной помехой  $v_t$ , удовлетворяющей уравнению  $d(\nabla)v_t = e(\nabla)w_t$ , где  $w_t$  — нерегулярный в интервале  $[-C_w, C_w]$  процесс, а  $e(\lambda)$ ,  $d(\lambda)$  — устойчивые полиномы. Теорема 3.2.2 остается справедливой, если условия (2.19) и формулы (2.20) заменить следующими:

$$d(\lambda)a(\lambda)\alpha_-(\lambda) - b_-(\lambda)\beta_-(\lambda) = e(\lambda), \quad \deg \alpha_-(\lambda) < m, \quad (2.24)$$

$$\alpha(\lambda) = \alpha_-(\lambda)b_+(\lambda)d(\lambda), \quad \beta(\lambda) = \beta_-(\lambda). \quad (2.25)$$

### § 3.3. Предельно-оптимальное управление в случае стационарной помехи

Задача оптимального управления при стационарных помехах изучена значительно более полно, чем рассмотренная в предыдущем параграфе задача оптимизации при нерегулярных помехах. Законченные результаты при стационарных помехах получены для квадратичных функционалов качества, минимизация которых осуществляется в классе линейных обратных связей. Такая постановка задачи управления позволяет эффективно использовать аппарат передаточных матриц. Именно, в этом случае функционал качества преобразуется к квадратичному функционалу относительно передаточных матриц системы управления. Поэтому оказывается возможным использовать хорошо развитый метод минимизации таких функционалов в классе стабилизирующих линейных регуляторов. Этот метод связан с именами Н. Винера и А. Н. Колмогорова, исследования которых по оптимальной фильтрации стационарных процессов стали классическими. «Управленческий» вариант метода Винера — Колмогорова имеет свои особенности; минимизируемый функционал

зависит от пары передаточных матриц, связанных в силу уравнения объекта линейным соотношением. Стандартные способы учета этой линейной связи могут привести к упреждающим, нереализуемым управлению.

В данном параграфе приводится решение задачи оптимального управления для скалярного ДОУ. Результаты для многосвязных ОУ формулируются более громоздко; они вынесены в § 3.Д. Предположение о линейности обратной связи не представляет собой существенного ограничения; в рассматриваемых ниже случаях оптимальные управление в классе произвольных неупреждающих управлений, как оказывается, порождаются линейными обратными связями.

**3.3.1°. Постановка задачи.** Как и в § 3.1, примем, что уравнение ОУ в переменных «вход — выход» имеет вид

$$a(\nabla)y_t = b(\nabla)u_t + v_t, \quad (3.1)$$

где выход  $y_t$ , управляющее воздействие  $u_t$  и помеха  $v_t$  — скалярные величины. Относительно помехи  $v_t$  предполагается, что  $v_0^\infty$  — стационарный процесс, порождаемый фильтром (1.30), где на вход поступает белошумный процесс  $w_0^\infty$  со свойствами (1.49),  $R = \sigma_w^2$ .

Для ОУ (3.1) требуется определить последовательность управляющих воздействий, минимизирующих в множестве допустимых управлений функционал качества

$$J = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{j=0}^t M Q(y_j, u_j), \quad (3.2)$$

где

$$Q(y, u) = Q_{11}y^2 + 2Q_{12}yu + Q_{22}u^2 \quad (3.3)$$

— квадратичная функция с коэффициентами  $Q_{ij}$ , неотрицательная при всех значениях  $y$  и  $u$ \*). Уточним, что понимается под допустимыми управлениями.

**Определение 3.3.1.** Будем говорить, что управление  $u_0^\infty = (u_0, u_1, \dots)$  — допустимое, если выполняются условия:

1) В каждый момент времени  $t$  управляющее воздействие  $u_t$  может быть представлено в виде (2.1), где  $\mathcal{U}$  — не-

\*) Это означает, что  $Q_{11} \geq 0$ ,  $Q_{22} \geq 0$ ,  $Q_{11}Q_{22} \geq Q_{12}$ .

которая детерминированная функция своих аргументов,  $s$  — натуральное число, называемое *запаздыванием в измерении*.

2) Выполняется неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{j=0}^t M[(y_j)^2 + (u_j)^2] < \infty.$$

Множество всевозможных допустимых управлений обозначим через  $\mathcal{U}_s$ .

Таким образом, допустимыми являются неупреждающие управления, ограниченные в среднеквадратичном и обеспечивающие среднеквадратичную ограниченность выходов ОУ.

Управление  $u_0^\infty$ , обеспечивающее минимум функционала качества (3.2) в множестве  $\mathcal{U}_s$ , будем называть *предельно-оптимальным*. Зависимость (2.1) иногда называют *обратной связью*, или *уравнением регулятора*. Итак, задача состоит в синтезе обратных связей, реализующих предельно-оптимальное управление.

Если обратная связь описывается линейным уравнением (1.24), (1.25) при  $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_{s-1} = 0$  и такой регулятор — стабилизирующий для ОУ (3.1), то порожданное этим регулятором управление  $u_0^\infty$  — допустимое.

К сформулированной выше задаче оптимального управления в ряде случаев могут быть сведены более сложные задачи.

Допустим, например, что задано «программное движение»  $y_{*t}$  и требуется синтезировать обратную связь, минимизирующую функционал качества

$$J = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{j=0}^t M Q(y_j - y_{*j}, u_j - u_{*j}),$$

где  $Q$  имеет прежний вид и  $u_{*0}^\infty$  — некоторое программное управление. Таким образом, ставится задача оптимального отслеживания заданного движения  $y_{*t}$ . Предположим, что программное управление обеспечивает выполнение соотношения

$$a(\nabla)y_{*t} = b(\nabla)u_{*t}.$$

Обозначая через  $\Delta y_t$  уклонение  $y_t$  от программного движения  $y_{*t}$ ,  $\Delta y_t = y_t - y_{*t}$ , аналогично  $\Delta u_t = u_t - u_{*t}$ , получим  $a(\nabla)\Delta y_t = b(\nabla)\Delta u_t + v_t$ . Функционал качества  $J$  принимает в переменных  $\Delta y_t$ ,  $\Delta u_t$  вид, аналогичный (3.2). Следовательно, в переменных  $\Delta y_t$ ,  $\Delta u_t$  приходим к прежней задаче. Если предельно-оптимальное управление в последней задаче обозначить через  $u_t^{\text{opt}}$ , то управляющие воздействия в задаче оптимального отслеживания формируются по правилу  $u_t = u_t^{\text{opt}} + u_{*t}$ . При этом, разумеется, предполагается, что так получаемое управление допустимо.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь задачи оптимизации (3.1), (3.2).

**3.3.2°. Линейность оптимальной обратной связи.** При достаточно широких предположениях оптимальная обратная связь является линейной и определяет стабилизирующий регулятор.

**Теорема 3.3.1.** *Пусть на стабилизируемый ОУ (3.1) действует помеха  $v_t$ , порождаемая фильтром (1.30) с устойчивыми полиномами (1.31), на вход которого поступают с.в.  $w_t$  с независимыми значениями и свойствами (1.49). Тогда задача минимизации функционала (3.2) в множестве  $\mathcal{U}_s$  допустимых управлений имеет решение и предельно-оптимальное управление удовлетворяет линейному уравнению (1.24), в котором полиномы  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  имеют вид (1.25) при некотором натуральном  $p$ .*

Таким образом, для синтеза оптимальной обратной связи достаточно ограничиться линейными обратными связями. Последняя задача хорошо изучена и ее решение может быть получено достаточно просто при использовании спектральных методов, развитых для стационарных процессов. Сделаем замечание по поводу теоремы 3.3.1.

Класс допустимых управлений можно расширить, вводя рандомизированные управление, т. е. допуская, что в каждый момент времени  $t$  функция  $\mathcal{U}(t, y_0^{t-s}, u_0^{t-1})$  — случайная величина, зависящая от  $y_0^{t-s}$ ,  $u_0^{t-1}$  как от параметров, т. е.  $u_t$  является с. в., имеющей условное распределение, и это распределение определяется величинами  $y_0^{t-s}$ ,  $u_0^{t-1}$ . При этом предполагается, что соотношение (2.1) реализуемо, т. е. в каждый момент времени оно позволяет «вычислить» управляющее воздействие  $u_t$ . Вве-

дение рандомизированных управлений полезно в ряде задач, связанных с идентификацией параметров ОУ. Важный пример рандомизированной обратной связи имеет вид

$$\alpha(\nabla) u_t = \beta(\nabla) y_t + \eta_t, \quad (3.4)$$

где  $\eta_t$  — белошумная последовательность с. в. Использование регулятора (3.4) для формирования  $u_t$  подразумевает, что в каждый момент времени  $t$  значение с. в.  $\eta_t$  известно, т. е. помеха  $\eta_t$  доступна «измерению». Если помеха  $v_t$  в (1.1) недоступна измерению, то, например, регулятор (3.4) при  $\eta_t = v_t$  не может быть использован для формирования управлений. Можно сказать, что в таком случае формируемые им управления — *нереализуемые*.

Введение рандомизированных управлений не усложняет задачи предельно-оптимального управления: из доказательства теоремы 3.3.1 следует, что она остается справедливой и в этом случае.

**3.3.3°. Общая схема синтеза линейной оптимальной обратной связи.** Ограничиваюсь допустимыми управлениями, порождаемыми линейными обратными связями, синтез оптимального регулятора можно осуществить достаточно просто, если воспользоваться спектральными свойствами рассматриваемых процессов. Если ввести передаточные функции  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$  от  $v$  к  $y$  и от  $v$  к  $u$ , определяемые замкнутой системой управления, то в предположении, что регулятор стабилизирующий, можно записать функционал качества (3.2) как квадратичную функцию передаточных функций  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$ . Задача синтеза оптимального регулятора, таким образом, сводится к определению пары устойчивых д.-р. ф.  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$ , минимизирующих полученный функционал. Эти функции зависят; они связаны линейным соотношением (1.42). Исключение одной из функций  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$  в силу соотношения (1.42) приводит к классической задаче нахождения д.-р. ф., минимизирующей квадратичный функционал в классе устойчивых д.-р. ф.

Решение последней задачи получено Н. Винером при исследовании задачи оптимальной фильтрации стационарных процессов. Такой прямой подход к задаче предельно-оптимального управления хорошо известен, но приводит к цели лишь в частных случаях, именно, когда исключен-

ная передаточная функция также оказывается устойчивой д.-р.ф. Такое положение имеет место лишь для ОУ, устойчивых по выходу (из соотношения (1.42) следует устойчивость д.-р.ф.  $W_y(\lambda)$ , если устойчива д.-р.ф.  $W_u(\lambda)$ ), или ОУ, устойчивых по управлению (из соотношения (1.42) следует устойчивость д.-р. ф.  $W_u(\lambda)$ , если устойчива д.-р.ф.  $W_y(\lambda)$ ), и эти задачи подробно изучены в литературе. Общий случай требует особого учета линейной связи функций  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$ . Ниже с этой целью используется «параметризация» множества устойчивых передаточных функций, определяемая теоремой 3.1.1. Теорема 3.1.1 позволяет упомянутым выше методом Н. Винера определить оптимальную функцию  $\Psi(\lambda)$  в классе устойчивых д.-р.ф., а тем самым по формулам (1.47) найти оптимальные передаточные функции  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$  и по ним осуществить синтез оптимального регулятора. Описанная программа реализуется в последующих пунктах этого параграфа.

**3.3.4°. Функционал качества и передаточные функции системы управления.** Примем, что функционал качества имеет вид

$$J = \overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} MQ(y_t, u_t), \quad (3.5)$$

где неотрицательная функция  $Q(y, u)$  определяется формулой (3.3). Ясно, что предельно-оптимальное по отношению к функционалу (3.5) управление  $u_0^\infty$  будет обладать этим свойством и по отношению к функционалу (3.2). Это связано с тем, что при стабилизирующих обратных связях процессы  $y_0^\infty$ ,  $u_0^\infty$  отличаются от стационарных экспоненциально убывающими слагаемыми, учет которых не влияет на значения функционалов (3.5) и (3.2). Если же  $y_0^\infty$ ,  $u_0^\infty$  — стационарные составляющие этих процессов, то величина  $MQ(y_t, u_t)$  от  $t$  не зависит, а тогда (3.2) и (3.5) совпадают.

Предполагая, что ОУ (3.1) замкнут стабилизирующей обратной связью

$$\alpha(\nabla)u_t = \beta(\nabla)y_t, \quad \alpha(0) \neq 0, \quad (3.6)$$

введем по формулам (1.43), (1.27) передаточные функции  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$ .

**Лемма 3.3.1.** Для стабилизирующей обратной связи (3.6) функционал (3.5) принимает вид

$$J = (2\pi i)^{-1} \oint p(\lambda) \tilde{Q}[W_y(\lambda), W_u(\lambda)] \lambda^{-1} d\lambda. \quad (3.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{Q}[W_y(\lambda), W_u(\lambda)] &= W_y(\lambda^{-1}) Q_{11} W_y(\lambda) + \\ &+ [W_y(\lambda^{-1}) W_u(\lambda) + W_u(\lambda^{-1}) W_y(\lambda)] Q_{12} + \\ &+ W_u(\lambda^{-1}) Q_{22} W_u(\lambda), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$Q_{ij}$  — коэффициенты квадратичной формы (3.3),  $\oint$  — интеграл по единичной окружности в комплексной плоскости ( $\oint \lambda^{-1} d\lambda = 2\pi i$ ),  $p(\lambda)$  — спектральная плоскость стационарного процесса  $v_t$ , определяемая по формуле (1.50).

Согласно теореме 3.1.1 произвольная пара устойчивых д.-р.ф.  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$ , связанная соотношением (1.42), допускает представление (1.47) с некоторой устойчивой д.-р. ф.  $\Psi(\lambda)$ . Напомним, что в (1.47)  $W_y^0(\lambda)$ ,  $W_u^0(\lambda)$  — какая-либо пара устойчивых д.-р.ф., связанная соотношением (1.42). В частности, в качестве последних могут быть взяты функции (1.44), порождаемые стабилизирующим регулятором (1.35).

Исключая в (3.7) функции  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$  с помощью формул (1.47), придем к квадратичному относительно  $\Psi(\lambda)$  функционалу. Винером был предложен метод решения (в классе устойчивых д.-р.ф.) такой задачи, основанный на переходе к уравнению Винера—Хопфа с последующим решением уравнения путем факторизации входящих в него д.-р.ф. Ниже приводится другой способ минимизации полученного функционала, не связанный с переходом к уравнению типа Винера—Хопфа и основанный на выделении «полного квадрата» в квадратичном функционале.

Отметим, что если запаздывание в измерении отлично от нуля, то, как следует из формул (1.43), функция  $W_u(\lambda)$  должна при  $\lambda = 0$  иметь корень кратности, не меньшей  $s$ . Из второй формулы (1.47) теперь следует, что функция  $\Psi(\lambda)$  также должна иметь при  $\lambda = 0$  корень кратности  $s$ . Это дополнительное ограничение должно быть учтено при нахождении функции  $\Psi(\lambda)$ , минимизирующей квадратичный функционал.

**3.3.5°. Минимизация квадратичного функционала в классе устойчивых дробно-рациональных функций.** Пусть  $v(\lambda) = \langle a(\lambda), b(\lambda) \rangle$ . Запишем функцию (3.7) в виде

$$\tilde{Q}[W_y(\lambda), W_u(\lambda)] = \Psi(\lambda^{-1})N_1(\lambda)\Psi(\lambda) + \\ + 2\operatorname{Re}[N_2(\lambda)\Psi(\lambda)] + N_3(\lambda), \quad (3.9)$$

где

$$N_1(\lambda) = [v(\lambda)v(\lambda^{-1})]^{-1}\{b(\lambda^{-1})b(\lambda)Q_{11} + \\ + [b(\lambda^{-1})a(\lambda) + b(\lambda)a(\lambda^{-1})]Q_{12} + a(\lambda)a(\lambda^{-1})Q_{22}\}, \\ N_2(\lambda) = [v(\lambda)]^{-1}\{W_y^0(\lambda)b(\lambda)Q_{11} + \\ + [W_y^0(\lambda^{-1})a(\lambda) + W_u^0(\lambda)b(\lambda)]Q_{12} + W_u^0(\lambda^{-1})a(\lambda)Q_{22}\}, \\ N_3(\lambda) = W_y^0(\lambda^{-1})W_y^0(\lambda)Q_{11} + [W_y^0(\lambda^{-1})W_u^0(\lambda) + \\ + W_u^0(\lambda^{-1})W_y^0(\lambda)]Q_{12} + W_u^0(\lambda^{-1})W_u^0(\lambda)Q_{22}. \quad (3.10)$$

Поскольку  $Q[y, u] \geq 0$ , то  $\tilde{Q}[W_y(\lambda), W_u(\lambda)] \geq 0$  при  $|\lambda| = 1$ . Отсюда, в частности, следует, что  $N_1 \geq 0$  при  $|\lambda| = 1$ . Согласно теореме 3.П.6, для функции  $N_1(\lambda)$  справедливо представление (факторизация)

$$N_1(\lambda) = \Pi(\lambda)\Pi(\lambda^{-1}), \quad (3.11)$$

где полином  $\Pi(\lambda)$  не имеет корней при  $|\lambda| < 1$ . В дальнейшем будем предполагать, что в действительности полином  $\Pi(\lambda)$  не имеет корней на единичной окружности, так что  $\Pi(\lambda)$  — устойчивый полином. Факторизация (3.11) позволяет с учетом (3.9), (1.50) переписать подынтегральное выражение в (3.7) в виде

$$p(\lambda)\tilde{Q}[W_y(\lambda), W_u(\lambda)] = |\sigma_w\Pi(\lambda)\Psi(\lambda)e(\lambda)d(\lambda)^{-1} - \\ - R(\lambda)|^2 + S(\lambda), \quad (3.12)$$

где

$$R(\lambda) = -\sigma_w \frac{N_2(\lambda^{-1})}{\Pi(\lambda^{-1})} \frac{e(\lambda)}{d(\lambda)}, \quad (3.13)$$

$$S(\lambda) = p(\lambda)N_3(\lambda) - R(\lambda)R(\lambda^{-1}). \quad (3.14)$$

Отметим, что формулами (3.13), (3.14) функции  $R(\lambda)$ ,  $S(\lambda)$  определены как д.-р. ф. при произвольных значениях комплексного аргумента  $\lambda$ . При вычислении интеграла (3.7) достаточно знать эти функции лишь при  $|\lambda| = 1$ .

Поскольку  $S(\lambda)$  не зависит от выбора функции  $\Psi(\lambda)$ , то наименьшее значение функционала (3.7) в классе произвольных функций достигается при  $\Psi(\lambda) = [\sigma_w e(\lambda)\Pi(\lambda)]^{-1}d(\lambda)\bar{R}(\lambda)$ , однако эта д.-р.ф. не является устойчивой и не имеет, вообще говоря, корня кратности  $s$  при  $\lambda = 0$ . Поэтому формулы (1.46), (1.47) для такой функции определяют регулятор, который формирует недопустимое управление.

Произведем *сепарацию* функции  $\lambda^{-s}R(\lambda)$ , т. е. представим ее в виде

$$\lambda^{-s}R(\lambda) = R_+(\lambda) + R_-(\lambda), \quad (3.15)$$

где  $R_+(\lambda)$ ,  $R_-(\lambda^{-1})$  — устойчивые д.-р.ф., причем  $R_-(\infty) = 0$  (т. е.  $R_-(\lambda)$  — правильная д.-р.ф.).

**Теорема 3.3.2.** *Минимум функционала (3.7) в классе устойчивых д.-р.ф., имеющих при  $\lambda = 0$  корень кратности не ниже  $s$ , достигается при*

$$\Psi(\lambda) = \frac{\lambda^s}{\sigma_w} \Pi(\lambda)^{-1} R_+(\lambda) \frac{d(\lambda)}{e(\lambda)}, \quad (3.16)$$

где устойчивая д.-р.ф.  $R_+(\lambda)$  определена выше соотношениями (3.15). При этом

$$\min_{\Psi} J = (2\pi i)^{-1} \oint [S(\lambda) + |R_-(\lambda)|^2] \lambda^{-1} d\lambda, \quad (3.17)$$

где  $S(\lambda)$  определяется формулой (3.14).

Отметим, что «абсолютный» минимум функционала  $J$  в классе произвольных  $\Psi(\lambda)$  равен  $(2\pi i)^{-1} \oint S(\lambda) \lambda^{-1} d\lambda$ , так что положительную величину  $(2\pi i)^{-1} \oint |R(\lambda)|^2 \lambda^{-1} d\lambda$  можно интерпретировать как «плату» за сужение множества оптимизации, когда ограничиваемся лишь устойчивыми д.-р.ф., имеющими при  $\lambda = 0$  корень кратности не ниже  $s$ .

Формулы (3.16), (1.46), (1.47) определяют теперь передаточную функцию оптимального стабилизирующего регулятора. Полиномы  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  этого регулятора находятся соответственно как взаимно несократимые знаменатель и числитель д.-р.ф.  $W(\lambda)$ , полином  $\beta(\lambda)$  имеет при  $\lambda = 0$  корень кратности не ниже  $s$ . Так построенный регулятор формирует допустимое управление.

**3.3.6°.** Процедура синтеза предельно-оптимального управления. Приведенный в предыдущих пунктах способ синтеза оптимального регулятора зависит от пары передаточных функций  $W_y^0(\lambda)$ ,  $W_u^0(\lambda)$ , которые на вид оптимального регулятора и наименьшее значение функционала качества не влияют (в силу теорем 3.2.2 и 3.1.1 указанные величины определяются классом всех линейных стабилизирующих обратных связей), но могут значительно усложнить процедуру синтеза оптимального регулятора. Приведем основанную на теореме 3.3.2 процедуру синтеза оптимального регулятора, в которой нет необходимости знать какие-либо «затравочные»  $W_y^0(\lambda)$ ,  $W_u^0(\lambda)$  и, следовательно, имеющую более конструктивную форму.

Проделаем следующую последовательность операций:

а) Определим устойчивый полином  $\Pi(\lambda)$  из условия факторизации (3.11), где  $N_1(\lambda)$  определяется формулой (3.10).

б) Определим полиномы

$$a_*(\lambda) = \frac{\lambda^r a(\lambda^{-1})}{v(\lambda^{-1})}, \quad b_*(\lambda) = \frac{\lambda^r b(\lambda^{-1})}{v(\lambda^{-1})}, \quad \Pi_*(\lambda) = N\Pi(\lambda^{-1}), \quad (3.18)$$

$$K_1(\lambda) = \sigma_w e(\lambda)[Q_{22}a_*(\lambda) + Q_{12}b_*(\lambda)],$$

$$K_2(\lambda) = -\sigma_u e(\lambda)[Q_{11}b_*(\lambda) + Q_{12}a_*(\lambda)]. \quad (3.19)$$

в) Обозначим через  $K(\lambda)$ ,  $\alpha(\lambda)$ ,  $\tilde{\beta}(\lambda)$  полиномы, определяемые из линейных соотношений

$$\sigma_w \Pi_*(\lambda) \alpha(\lambda) + \frac{b(\lambda) d(\lambda) K(\lambda)}{v(\lambda)} = K_1(\lambda), \quad (3.20)$$

$$\lambda^s \sigma_w \Pi_*(\lambda) \tilde{\beta}(\lambda) + \frac{a(\lambda) d(\lambda) K(\lambda)}{v(\lambda)} = K_2(\lambda) \quad (3.21)$$

при условии  $\deg K(\lambda) < r + s$ .

**Теорема 3.3.3.** Полиномы  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda) = \lambda^s \tilde{\beta}(\lambda)$ , полученные в результате описанных выше операций а) — в), определяют регулятор (3.6), который при произвольных начальных данных в системе управления (3.1), (3.6) формирует допустимые управляющие воздействия, доставляющие минимум функционалу (3.2) в множестве  $U_s$ .

Отметим, что полином  $\Pi_*(\lambda)$  не имеет корней вне замкнутого единичного круга и не может иметь общих корней одновременно с полиномами  $a(\lambda)v(\lambda)^{-1}$  и  $b(\lambda)v(\lambda)^{-1}$ . Поэтому по крайней мере одно из уравнений (3.20), (3.21)

в силу леммы 3.1.1 однозначно разрешимо. Предположим, например, что полиномы  $\Pi_*(\lambda)$  и  $b(\lambda)v(\lambda)^{-1}$  не имеют общих корней. Тогда из уравнения (3.20) определяются полиномы  $\alpha(\lambda)$ ,  $K(\lambda)$ . Поскольку полином  $K(\lambda)$  в уравнениях (3.20), (3.21) один и тот же, то  $\beta(\lambda)$  находится из уравнения (3.21) делением полиномов.

Умножая соотношения (3.20), (3.21) соответственно на  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$ , а затем вычитая их и учитывая равенства (3.19), (3.18), (3.11), (3.10), найдем, что характеристический полином оптимальной системы (3.1), (3.6) равен

$$g(\lambda) = a(\lambda)\alpha(\lambda) - b(\lambda)\beta(\lambda) = e(\lambda)v(\lambda)\Pi(\lambda), \quad (3.22)$$

где, напомним,  $v(\lambda) = \langle a(\lambda), b(\lambda) \rangle$ . Поскольку ОУ (3.1) предполагается стабилизируемым, полином  $v(\lambda)$  устойчив, а с ним устойчив и полином  $g(\lambda)$ , т. е. оптимальный регулятор — стабилизирующий для ОУ (3.1).

Соотношение (3.22) определяет систему линейных уравнений относительно коэффициентов полиномов  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$ . Поэтому, определив в результате факторизации (3.11) полином  $\Pi(\lambda)$ , можно было бы пытаться найти полиномы  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  непосредственно из соотношения (3.22), которое заведомо разрешимо, поскольку полиномы  $a(\lambda)v(\lambda)^{-1}$  и  $b(\lambda)v(\lambda)^{-1}$  взаимно несократимы. «Общее решение» уравнения (3.22) имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \alpha_0(\lambda) + \lambda^s b(\lambda)v(\lambda)^{-1}\gamma(\lambda), \\ \beta(\lambda) &= \beta_0(\lambda) + \lambda^s a(\lambda)v(\lambda)^{-1}\gamma(\lambda), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где  $\{\alpha_0(\lambda), \beta_0(\lambda)\}$  — частное решение уравнения (3.22), которое однозначно в силу леммы 3.1.1 определяется условием  $\deg \alpha_0(\lambda) < r - \deg v(\lambda)$  либо  $\deg \beta_0(\lambda) < r - \deg v(\lambda)$ , и  $\gamma(\lambda)$  — произвольный полином. Лишь при некотором полиноме  $\gamma(\lambda)$  функции  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  удовлетворяют системе (3.20), (3.21),  $\beta(\lambda) = \lambda^s \tilde{\beta}(\lambda)$ . Таким образом, использование соотношения (3.22) определяет оптимальный регулятор с точностью до некоторого полинома  $\gamma(\lambda)$ , для определения которого приходится по существу решать систему (3.20), (3.21). Подставляя (3.23) в (3.20), (3.21), найдем

$$\begin{aligned} \frac{b(\lambda)}{v(\lambda)} [\lambda^s \sigma_w \Pi_*(\lambda) \gamma(\lambda) + d(\lambda) K(\lambda)] &= K_1(\lambda) - \sigma_w \Pi_*(\lambda) \alpha_0(\lambda), \\ \frac{a(\lambda)}{v(\lambda)} [\lambda^s \sigma_w \Pi_*(\lambda) \gamma(\lambda) + d(\lambda) K(\lambda)] &= K_2(\lambda) - \sigma_w \Pi_*(\lambda) \beta_0(\lambda). \end{aligned}$$

Обозначим через  $K_3(\lambda)$  полином

$$\begin{aligned} K_3(\lambda) &= [K_1(\lambda) - \sigma_w \Pi_*(\lambda) \alpha_0(\lambda)] v(\lambda) b(\lambda)^{-1} = \\ &= [K_2(\lambda) - \sigma_w \Pi_*(\lambda) \beta_0(\lambda)] v(\lambda) a(\lambda)^{-1}. \end{aligned}$$

Тогда для определения полинома  $\gamma(\lambda)$  получим уравнение

$$\lambda^s \sigma_w \Pi_*(\lambda) \gamma(\lambda) + d(\lambda) K(\lambda) = K_3(\lambda), \quad (3.24)$$

причем полином  $K(\lambda)$  также неизвестен и должен удовлетворять условию  $\deg K(\lambda) < r + s$ . Так как полином  $d(\lambda)$  устойчив, а полином  $\lambda^s \Pi_*(\lambda)$  не имеет корней при  $|\lambda| > 1$ , то в силу леммы 3.1.1 полиномы  $\gamma(\lambda)$ ,  $K(\lambda)$  соотношением (3.24) и условием  $\deg K(\lambda) < r + s$  определяются однозначно. Использование так найденного полинома  $\gamma(\lambda)$  позволяет теперь по формулам (3.23) определить коэффициенты оптимального регулятора. Описанная процедура последовательного решения уравнений (3.22), (3.24) эквивалентна по существу процедуре теоремы 3.3.3.

**3.3.7°. Синтез оптимального регулятора для функционала качества типа предельной дисперсии.** Интересно проследить связь между задачами синтеза оптимальных регуляторов, рассматриваемых в § 3.2 и настоящем параграфе. В § 3.2 синтез был осуществлен с помощью простых алгебраических операций, но для специального функционала качества, целевая функция в котором не зависела от управлений. В данном параграфе целевая функция может зависеть от управлений, но синтез оптимального регулятора использует сложную процедуру факторизации, связанную с нахождением корней полинома  $N_1(\lambda)$  (см. (3.11)).

Оказывается, что если в уравнении (1.3) принять  $e(\lambda) = 1$ , а функционал качества имеет вид

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} M y_t^2, \quad (3.25)$$

то процедура теоремы 3.3.3 упрощается и для минимально-фазового ОУ приводит к регулятору, синтезированному в § 3.2.

Итак, перейдем к задаче синтеза предельно-оптимальных управлений при функционале качества (3.25). Представим полином  $b(\lambda)$  в виде (1.32), где по-прежнему полином  $b_+(\lambda)$  — устойчивый, а полином  $b_-(\lambda)$  не имеет корней при  $|\lambda| > 1$  (т. е.  $b_+(\lambda)$  теперь представляет макси-

мальную устойчивую часть полинома  $b(\lambda)$ ). Этим условием полиномы  $b_+(\lambda)$ ,  $b_-(\lambda)$  определены однозначно, если принять  $b_+(0) = 1$ .

Без ограничения общности будем полагать полиномы  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  несократимыми,  $\langle a(\lambda), b(\lambda) \rangle = 1$ . Факторизация (3.11) в данном случае осуществляется просто, и ее результат имеет вид

$$\Pi(\lambda) = b_+(\lambda)b_*^{(-)}(\lambda), \quad (3.26)$$

где  $b_*^{(-)}(\lambda) = \lambda^l b_-(\lambda^{-1})$ ,  $l = \deg b_-(\lambda)$ .

Указанное обстоятельство позволяет упростить процедуру теоремы 3.3.3. Окончательную процедуру приведем в виде следующего утверждения.

**Теорема 3.3.4.** *Предположим, что функционал качества  $J$  имеет вид (3.25) и полином  $b(\lambda)$  представлен в виде (1.13) с максимальной устойчивой частью  $b_+(\lambda)$ .*

а) *Определим полином  $F(\lambda)$  степени не выше ( $l + s - 1$ ), где  $l = \deg b_-(\lambda)$ , такой, что полином  $[a(\lambda)d(\lambda)F(\lambda) - e(\lambda)]$  делится нацело на  $\lambda^s b_-(\lambda)$ ; результат этого деления обозначим через  $G(\lambda)$ , т. е. полиномы  $F(\lambda)$ ,  $G(\lambda)$  определяются соотношением*

$$a(\lambda)d(\lambda)F(\lambda) - e(\lambda) = \lambda^s b_-(\lambda)G(\lambda). \quad (3.27)$$

б) *Выделим в д.-р. ф:  $\lambda^{-s} F(\lambda)b_*^{(-)}(\lambda)[b_-(\lambda)]^{-1}$  целую часть  $\pi(\lambda)$ , т. е. определим полиномы  $\pi(\lambda)$  и  $\kappa(\lambda)$  из условия*

$$F(\lambda)b_*^{(-)}(\lambda) = \lambda^s b_-(\lambda)\pi(\lambda) + \kappa(\lambda), \quad (3.28)$$

где  $b_*^{(-)}(\lambda)$  определяется формулой (3.26) и  $\deg \kappa(\lambda) < \deg b_-(\lambda) + s = l + s$ . Тогда регулятор

$$\begin{aligned} b_+(\nabla)d(\nabla)\kappa(\nabla)u_t = \\ = \nabla^s [b_*^{(-)}(\nabla)G(\nabla) - a(\nabla)d(\nabla)\pi(\nabla)]y_t \end{aligned} \quad (3.29)$$

определяет по отношению к функционалу (3.25) предельно-оптимальное в множестве  $\mathcal{U}_s$  управление.

Простой подсчет показывает, что характеристический полином системы управления (3.1), (3.29), имеет вид

$$g(\lambda) = b_+(\lambda)b_*^{(-)}(\lambda)e(\lambda), \quad (3.30)$$

т. е. регулятор (3.29) является стабилизирующим для ОУ (3.1).

При управлении (3.29) ОУ (3.1) может быть записан в виде

$$b_*^{(-)}(\nabla) y_t = \kappa(\nabla) w_t. \quad (3.31)$$

**3.3.8°. Замечания.** 1. Если полином  $b_*^{(-)}(\lambda)$  нулевой степени, т. е.

$$b_*^{(-)}(\lambda) = \text{const}, \quad (3.32)$$

то из (3.28) следует  $\pi(\lambda) \equiv 0$ ,  $\kappa(\lambda) = F(\lambda) b_*^{(-)}(\lambda)$  и регулятор (3.29) принимает форму

$$b_+(\nabla) d(\nabla) F(\nabla) u_t = \nabla^s G(\nabla) y_t, \quad (3.33)$$

т. е. совпадает с (2.8). В силу (3.33) уравнение (3.31) принимает вид

$$y_t = F(\nabla) w_t. \quad (3.34)$$

Теперь не представляет труда вычислить значение функционала (3.25) для предельно-оптимального управления. Действительно, из (3.34) в силу независимости и центрированности с.в.  $w_t$  получим

$$M y_t^2 = \sigma_w^2 \sum_{n=0}^{l+s-1} F_n^2, \quad t > r + s,$$

где  $F_n$  — коэффициенты полинома  $F(\lambda)$ ,  $F(\lambda) = F_0 + \dots + \lambda F_1 + \dots + \lambda^{l+s-1} F_{l+s-1}$ . Таким образом,

$$\min_{u_s} J = \sigma_w^2 \sum_{n=0}^{l+s-1} F_n^2. \quad (3.35)$$

Условие (3.32) выполнено для минимально-фазовых ОУ. Действительно, в этом случае  $b_-(\lambda) = \lambda^k b_k$  и  $b_*^{(-)}(\lambda) = b_k$ . Для неминимально-фазового ОУ вычисление значения функционала на предельно-оптимальном управлении требует больших усилий.

2. Для задачи, рассмотренной в § 3.2, полиномы  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  оптимального регулятора могут определяться из соотношения

$$a(\lambda) \alpha(\lambda) - b(\lambda) \beta(\lambda) = b_+(\lambda), \quad (3.36)$$

как это следует из теорем 3.2.1 и 3.2.2, причем во втором случае ОУ не был минимально-фазовым. Формула (3.30)

показывает, что оптимальные регуляторы для рассмотренного в п. 3.2.6° ОУ для функционалов (2.14) (случай нерегулярных помех) и (3.25) (случай стационарных помех) различны.

### § 3.П. Приложение

[3.П.1°. Спектральный метод синтеза оптимальных регуляторов для многосвязных дискретных объектов управления. Изложенный в § 3.3 способ синтеза оптимальных регуляторов естественным образом переносится на случай ОУ со многими входами и выходами, хотя обоснование его связано с большими техническими трудностями.

Примем, что ОУ описывается уравнением

$$a(\nabla)y_t = b(\nabla)u_t + v_t, \quad (\text{П.1})$$

где  $y_t$  —  $n$ -вектор выходов ОУ;  $u_t$  —  $m$ -вектор управляющих воздействий;  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  — полиномиальные матрицы соответственно размерностей  $n \times n$  и  $n \times m$ ,  $n \geq m$  \*),

$$a(\lambda) = I_n + \lambda a_1 + \dots + \lambda^r a_r, \quad b(\lambda) = \lambda b_1 + \dots + \lambda^r b_r; \quad (\text{П.2})$$

$I_n$  — единичная  $n \times n$ -матрица;  $v_t$  — стационарная векторная помеха, формируемая фильтром

$$d(\nabla)v_t = e(\nabla)w_t, \quad (\text{П.3})$$

где  $d(\lambda) = I_n + \lambda d_1 + \dots + \lambda^p d_p$ ,  $e(\lambda) = I_n + \dots + \lambda^p d_p$ ;  $w_t$  — векторные с.в. с независимыми значениями, удовлетворяющие условиям

$$Mw_t = 0, \quad Mw_tw_s^* = R_w \delta_{ts}; \quad (\text{П.4})$$

$R_w$  — не зависящая от  $t$  положительная матрица ковариаций с.в.  $w_t$ . Матричные полиномы  $a(\lambda)$ ,  $e(\lambda)$  предполагаются устойчивыми, т. е. полиномы  $\det a(\lambda)$ ,  $\det e(\lambda)$  не имеют корней в замкнутом единичном круге комплексной плоскости.

\*) Предположение  $n \geq m$  делается для простоты последующих выкладок. Читатель может провести выкладки, которые необходимо проделать при  $n < m$ .

Управления  $u_t$  формируются с помощью линейных обратных связей вида

$$\alpha(\nabla)u_t = \beta(\nabla)y_t, \quad (\text{П.5})$$

где  $\alpha(\lambda) = I_m + \lambda\alpha_1 + \dots + \lambda^q\alpha_q$ ,  $\beta(\lambda) = \beta_0 + \lambda\beta_1 + \dots + \lambda^q\beta_q$ ,  $\alpha_i - m \times m$ -матрицы,  $\beta_i - m \times n$ -матрицы. Регулятор (П.5) называется *стабилизирующими для ОУ* (П.1), если полином

$$g(\lambda) = \det \begin{vmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ \beta(\lambda) & \beta(\lambda) \end{vmatrix} \quad (\text{П.6})$$

устойчив. Далее рассматриваются стабилизирующие регуляторы.

Функционал качества имеет вид

$$J = \overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} M Q(y_t, u_t). \quad (\text{П.7})$$

Здесь  $Q$  — положительная квадратичная форма переменных  $y, u$ , т. е.  $Q(y, u) > 0$  при  $|y| + |u| \neq 0$  и

$$Q(y, u) = y^*Q_{11}y + 2y^*Q_{12}u + u^*Q_{22}u, \quad (\text{П.8})$$

$Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}$  — вещественные матрицы соответствующих размерностей.

Требуется синтезировать регулятор (П.5), минимизирующий функционал качества (П.7) — (П.8) в классе стабилизирующих регуляторов. Разностный порядок  $q$  регулятора (П.5) заранее не фиксируется, т. е. минимизация функционала (П.7) производится в классе всех линейных стабилизирующих обратных связей.

Как и в § 3.3, фундаментальную роль играют (матричные) передаточные функции

$$W_y(\lambda) = [a(\lambda) - b(\lambda)\alpha^{-1}(\lambda)\beta(\lambda)]^{-1},$$

$$W_u(\lambda) = [\alpha(\lambda) - \beta(\lambda)a^{-1}(\lambda)b(\lambda)]^{-1}\beta(\lambda)a^{-1}(\lambda), \quad (\text{П.9})$$

которые, как нетрудно убедиться, удовлетворяют соотношению

$$a(\lambda)W_y(\lambda) - b(\lambda)W_u(\lambda) = I_n \quad (\text{П.10})$$

и однозначно определяют (матричную) передаточную функцию регулятора (П.5):

$$\alpha^{-1}(\lambda)\beta(\lambda) = W_u(\lambda)W_y^{-1}(\lambda). \quad (\text{П.11})$$

Соотношения (П.9) определяют матричные функции с

дробно-рациональными элементами. Далее такие функции будем называть *дробно-рациональными*, опуская слово «матричные». Д.-р.ф. называется *устойчивой*, если ни один из ее элементов не имеет особенностей в замкнутом единичном круге.

Следующее утверждение дает условия проверки стабилизирующих свойств регулятора (П.5), которое оказывается достаточно эффективным.

**Теорема 3.П.1.** Пусть  $W_1(\lambda)$ ,  $W_2(\lambda)$  — произвольные дробно-рациональные (матричные) функции, удовлетворяющие тождеству

$$a(\lambda)W_1(\lambda) - b(\lambda)W_2(\lambda) = I_n, \quad (\text{П.12})$$

и  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  — полиномиальные матрицы, удовлетворяющие соотношению (П.11).

Для того чтобы определяемый полиномами  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  регулятор (П.5) был стабилизирующим для ОУ (П.1), достаточно устойчивости следующих д.-р.ф.:

$$W_1(\lambda), W_2(\lambda), W_1(\lambda)b(\lambda)\alpha^{-1}(\lambda), (W_2(\lambda)b(\lambda)+I_m)\alpha^{-1}(\lambda). \quad (\text{П.13})$$

Из доказательства теоремы 3.П.1 следует, что условия (П.13) близки к необходимым для устойчивости полинома (П.6).

Таким образом, стабилизирующий регулятор определяет устойчивые передаточные функции (П.9). С другой стороны, устойчивые передаточные функции могут определять регулятор, который не является стабилизирующим. Например, пусть  $n = m = 2$  и

$$a(\lambda) = (1 + \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad b(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Выберем функции

$$W_v(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+2\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad W_u(\lambda) = \begin{vmatrix} 3+2\lambda & 0 \\ -(3+2\lambda) & 1 \end{vmatrix},$$

которые, очевидно, удовлетворяют (П.10) и являются устойчивыми д.-р. ф. (матричные элементы этих функций вообще не имеют особенностей). Соотношению (П.11) удовлетворяют полиномы

$$\alpha(\lambda) = (1 + 2\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta(\lambda) = \begin{pmatrix} 3 + 2\lambda & 0 \\ -(3 + 2\lambda) & 1 + 2\lambda \end{pmatrix}, \quad (\text{П.14})$$

для которых полином (П.6) имеет вид

$$g(\lambda) = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+2\lambda \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda$$

и имеет корень  $\lambda = -1/2$ , т. е. регулятор (П.5), (П.14) не является стабилизирующим. Это не означает, конечно, что не существует стабилизирующего регулятора, полиномы  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  которого удовлетворяют соотношению (П.11). Например, при

$$\alpha(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+2\lambda & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \beta(\lambda) = \begin{vmatrix} 3+2\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{П.15})$$

тождество (П.11) выполняется и  $g(\lambda) = 1$ , т. е. регулятор (П.5), (П.15) — стабилизирующий.

**Теорема 3.П.2.** Для того чтобы для ОУ существовал стабилизирующий регулятор (П.5), необходимо и достаточно, чтобы уравнение (П.12) было разрешимо в классе устойчивых д.-р. ф.  $\{W_1(\lambda), W_2(\lambda)\}$ . Если при этом полиномы  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  удовлетворяют соотношению  $\alpha^{-1}(\lambda)\beta(\lambda) = W_2(\lambda)W_1^{-1}(\lambda)$  и определяют стабилизирующий регулятор (П.5), то  $W_1(\lambda) = W_y(\lambda)$ ,  $W_2(\lambda) = W_u(\lambda)$ , где  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$  определяются формулами (П.9).

Доказательство существования стабилизирующего регулятора носит конструктивный характер. Приведем процедуру его построения. Согласно теореме 3.П.7 дробно-рациональная функция  $W_2(\lambda)W_1^{-1}(\lambda)$  с помощью элементарных операций может быть приведена к диагональному виду

$$P_1(\lambda)W_2(\lambda)W_1^{-1}(\lambda)Q_1(\lambda) = \delta(\lambda), \quad (\text{П.16})$$

где  $P_1(\lambda)$ ,  $Q_1(\lambda)$  — полиномиальные неособые матрицы соответственно размерностей  $m \times m$  и  $n \times n$ , определители которых не зависят от  $\lambda$ ;  $\delta(\lambda)$  — диагональная прямоугольная  $m \times n$ -матрица, т. е. матрица, все элементы которой нулевые, за возможным исключением элементов с одинаковыми индексами. Диагональные элементы  $\delta(\lambda)$  суть д.-р. ф. Представим  $\delta(\lambda)$  в виде

$$\delta(\lambda) = \delta_1^{-1}(\lambda)\delta_2(\lambda), \quad (\text{П.17})$$

где  $\delta_1(\lambda)$  —  $m \times m$ - и  $\delta_2(\lambda)$  —  $m \times n$ -полиномиальные матрицы, соответствующие диагональные элементы кото-

рых взаимно несократимы \*). Определим полиномиальные матрицы \*\*)

$$\alpha(\lambda) = \delta_1(\lambda)P_1(\lambda), \quad \beta(\lambda) = \delta_2(\lambda)Q_1^{-1}(\lambda). \quad (\text{П.18})$$

В силу (П.17), (П.16) эти полиномы удовлетворяют соотношению (П.10) при  $W_1 = W_y$ ,  $W_2 = W_r$ . Более того, регулятор (П.5), (П.18) оказывается стабилизирующим для ОУ (П.1). Как и в § 3.3, множество всех устойчивых д.-р. ф.  $\{W_1(\lambda), W_2(\lambda)\}$ , удовлетворяющих соотношению (П.12), допускает «параметризацию» с помощью произвольной устойчивой д.-р. ф.  $\Psi(\lambda)$ .

Пусть для ОУ (П.1) существует стабилизирующий регулятор (П.5) и, следовательно, соотношение (П.12) разрешимо относительно устойчивых д.-р. ф.  $W_1(\lambda)$ ,  $W_2(\lambda)$ . Пусть  $W_1^0(\lambda)$ ,  $W_2^0(\lambda)$  — некоторая пара таких функций и  $R_1(\lambda)$ ,  $R_2(\lambda)$  — устойчивые д.-р. ф., удовлетворяющие соотношению

$$a(\lambda)R_1(\lambda) - b(\lambda)R_2(\lambda) = 0. \quad (\text{П.19})$$

Тогда формулы

$$\begin{aligned} W_1(\lambda) &= W_1^0(\lambda) + R_1(\lambda)\Psi(\lambda), \\ W_2(\lambda) &= W_2^0(\lambda) + R_2(\lambda)\Psi(\lambda) \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

очевидным образом определяют отображение множества устойчивых д.-р. ф. в множество пар  $\{W_1(\lambda), W_2(\lambda)\}$  устойчивых д.-р. ф., удовлетворяющих соотношению (П.12).

Соотношение (П.19) разрешимо относительно указанных функций  $R_1(\lambda)$ ,  $R_2(\lambda)$ . Действительно, такими функциями являются  $R_1(\lambda) = W_1^0(\lambda)b(\lambda)$ ,  $R_2(\lambda) = I_m + W_2^0(\lambda)b(\lambda)$ . Однако такой выбор  $R_1(\lambda)$ ,  $R_2(\lambda)$  не гарантирует, что формулы (П.20) описывают все пары устойчивых передаточных функций. Поэтому осуществим специальный выбор  $R_1(\lambda)$ ,  $R_2(\lambda)$ , обеспечивающий это свойство.

С помощью элементарных операций д.-р. ф.  $a^{-1}(\lambda)b(\lambda)$  можно привести к диагональному виду

$$P_2(\lambda)a^{-1}(\lambda)b(\lambda)Q_2(\lambda) = D(\lambda), \quad (\text{П.21})$$

\* ) Если у  $\delta(\lambda)$  некоторый диагональный элемент равен нулю, то у  $\delta_1(\lambda)$  соответствующий диагональный элемент выбран равным единице.

\*\*) Так как  $\det Q_1(\lambda) = \text{const} \neq 0$  то  $Q_1^{-1}(\lambda)$  — полиномиальная матрица.

где  $P_2(\lambda)$ ,  $Q_2(\lambda)$  — соответственно  $n \times n$ - и  $m \times m$ -полиномиальные неособые матрицы с независящими от  $\lambda$  определителями,  $D(\lambda)$  —  $n \times m$ -диагональная матрица с дробно-рациональными элементами. Представим  $D(\lambda)$  в виде

$$D(\lambda) = D_1(\lambda) D_2(\lambda), \quad (\text{П.22})$$

где  $D_1(\lambda)$ ,  $D_2(\lambda)$  — соответственно  $n \times n$ - и  $n \times m$ -диагональные матрицы. При этом матрица  $D_1(\lambda)$  — полиномиальная, а диагональные элементы матрицы  $D_2(\lambda)$  — д.-р. ф., числители которых равны единице. (Если у матрицы  $D(\lambda)$  имеются нулевые диагональные элементы, то соответствующие диагональные элементы матрицы  $D_2(\lambda)$  полагаем равными единице.) В силу принятого условия  $m \leq n$  квадратная  $m \times m$ -матрица  $D_2^T(\lambda) D_2(\lambda)$  — неособая и обратная к ней диагональная матрица  $[D_2^T(\lambda) D_2(\lambda)]^{-1}$  — полиномиальная \*). Предполагается, что стоящие на соответствующих местах диагонали полиномиальные элементы матриц  $D_1(\lambda)$  и  $[D_2^T(\lambda) D_2(\lambda)]^{-1}$  взаимно несократимы. В силу принятых соотношений выполняется тождество

$$D_1(\lambda) - D_1(\lambda) D_2(\lambda) [D_2(\lambda)^T D_2(\lambda)]^{-1} D_2^T(\lambda) \equiv 0. \quad (\text{П.23})$$

Из (П.23) в силу (П.21) непосредственно убеждаемся, что полиномиальные матрицы

$$\begin{aligned} R_1(\lambda) &= P_2^{-1}(\lambda) D_1(\lambda), \\ R_2(\lambda) &= Q_2(\lambda) [D_2^T(\lambda) D_2(\lambda)]^{-1} D_2^T(\lambda) \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

удовлетворяют тождеству (П.19) \*\*.

**Теорема 3.П.3.** Формулы (П.20) определяют множество всех устойчивых д.-р. ф.  $\{W_1(\lambda), W_2(\lambda)\}$ , связанных соотношением (П.10), когда  $\Psi(\lambda)$  пробегает все множество устойчивых дробно-рациональных  $n \times n$ -матричных функций, а  $R_1(\lambda), R_2(\lambda)$  выбраны в соответствии с (П.24).

Теоремы 3.П.2 и 3.П.3 составляют основу для решения задачи о синтезе оптимального регулятора. Действитель-

\* ) Здесь, как обычно,  $D_2^T$  —  $m \times n$ -матрица, транспонированная матрице  $D_2$ .

\*\*) Матрица  $P_2^{-1}(\lambda)$  — полиномиальная, поскольку  $\det P_2(\lambda) = \text{const} \neq 0$ ,

но, функционал качества (П.7), как и в скалярном случае, записывается как квадратичная функция передаточных матриц  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$ , а в силу формул (П.20) — как квадратичная функция от  $\Psi(\lambda)$ . Минимизация квадратичного функционала в классе устойчивых д.-р. ф. производится точно так же, как и в скалярном случае. Если оптимальная  $\Psi(\lambda)$  найдена, то формулы (П.20) определяют оптимальные передаточные функции  $W_y(\lambda)$ ,  $W_2(\lambda)$ . Формулы (П.16) — (П.18) определяют теперь оптимальный регулятор (П.5). Приведем окончательный результат. Для произвольных полиномиальных матриц  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$ ,  $D(\lambda)$  введем обозначения

$$N(A, B, C, D; \lambda) = A^T(\lambda^{-1})Q_{11}C(\lambda) + A^T(\lambda^{-1})Q_{12}D(\lambda) + B^T(\lambda^{-1})Q_{12}^*C(\lambda) + B^T(\lambda^{-1})Q_{22}D(\lambda), \quad (\text{П.25})$$

где  $Q_{ij}$  — матрицы из (П.8), т — символ транспонирования.

**Теорема 3.П.4.** Пусть полиномиальные матрицы  $R_1(\lambda)$ ,  $R_2(\lambda)$  определяются формулами (П.24) и  $W_1^0(\lambda)$ ,  $W_2^0(\lambda)$  — какая-либо пара устойчивых д.-р. ф., удовлетворяющая соотношению (П.12). Пусть  $\Pi(\lambda)$  — устойчивая д.-р. ф., для которой д.-р. ф.  $\Pi^{-1}(\lambda)$  также устойчива и которая в обозначениях (П.25) определяется соотношениями факторизации

$$N(R_1, R_2, R_1, R_2; \lambda) = \Pi^T(\lambda^{-1})\Pi(\lambda). \quad (\text{П.26})$$

Обозначим через  $R(\lambda)$  д.-р. ф.

$$R(\lambda) = -[\Pi^T(\lambda^{-1})]^{-1}N(R_1, R_2, W_1^0, W_2^0; \lambda)\Gamma(\lambda), \quad (\text{П.27})$$

где  $\Gamma(\lambda) = d^{-1}(\lambda)e(\lambda)R_w^{1/2}$ ,  $R_w^{1/2}$  — положительный корень из матрицы  $R_w$  ( $R_w^{1/2} \cdot R_w^{1/2} = R_w$ ),  $d(\lambda)$ ,  $e(\lambda)$  — полиномы из (П.3),  $R_w$  — матрица ковариации белошумного процесса  $w_t$  из (П.4).

Пусть

$$R(\lambda) = R_+(\lambda) + R_-(\lambda), \quad (\text{П.28})$$

где  $R_+(\lambda)$  — устойчивая д.-р. ф. и  $R_-(\lambda)$  — д.-р. ф. такая, что  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} R_-(\lambda) = 0$  и  $R_-(\lambda^{-1})$  — устойчивая д.-р. ф.

Тогда функция  $\Psi(\lambda)$ , определяющая по формулам (П.20) оптимальные передаточные функции  $W_1(\lambda)$ ,  $W_2(\lambda)$ , имеет

вид

$$\Psi(\lambda) = \Pi^{-1}(\lambda) R_+(\lambda) \Gamma^{-1}(\lambda). \quad (\text{П.29})$$

При этом

$$\begin{aligned} \min_{\{\Psi(\lambda)\}} J(\Psi) = & \frac{1}{2\pi} \oint \text{Sp} \{ \Gamma^*(\lambda) N(W_1^0, W_2^0, W_1^0, W_2^0; \lambda) \Gamma(\lambda) - \\ & - R^*(\lambda) R(\lambda) + R_-^*(\lambda) R_-(\lambda) \} \frac{d\lambda}{\lambda}, \end{aligned} \quad (\text{П.30})$$

где  $\oint$  означает интегрирование по единичной окружности в положительном направлении,  $R^*(\lambda) = R^T(\lambda^{-1})$ .

Иногда помехи  $w_t$  вырождены: матрица  $R_w$  ковариаций не является положительно определенной. Пусть  $P$  — проекционная матрица в пространство значений матрицы  $R_w$ ,

$$PR_w = R_w P, \quad (I - P)R_w = 0.$$

Тогда вместо (П.29) следует писать

$$\Psi(\lambda) = \Pi^{-1}(\lambda) R_+(\lambda) \Gamma^{-1}(\lambda) P, \quad (\text{П.31})$$

где  $\Gamma^{-1}(\lambda)P$  означает обращение матрицы  $\Gamma(\lambda)$  в пространстве значений матрицы  $R_w$ .

*Пример. Объект, устойчивый по управлению.* «Параметризация» (П.20) не является единственной возможной. В ряде случаев можно добиться упрощения представления множества пар устойчивых передаточных матриц. В качестве примера рассмотрим ОУ (П.1) при  $n = m$ , устойчивый по управлению. Напомним, последнее означает, что

$$b(\lambda) = \lambda^k b_+(\lambda), \quad (\text{П.32})$$

где  $k$  — запаздывание по управлению,  $k \geq 1$ ;  $b_+(\lambda)$  — устойчивая полиномиальная матрица. В данном случае полином  $\lambda^{-k} P_2^{-1}(\lambda) D_1(\lambda)$  — устойчивый полином. Действительно, д.-р. ф.  $R'_1(\lambda) = \lambda^k I_n$ ,  $R'_2(\lambda) = b_+^{-1} a(\lambda)$  устойчивы и удовлетворяют уравнению (П.19). Следовательно, существует устойчивая д.-р. ф.  $\Psi'_0(\lambda)$  такая, что

$$\lambda^k I = R_1(\lambda) \Psi'(\lambda), \quad b_+^{-1}(\lambda) a(\lambda) = R_1(\lambda) \Psi'(\lambda).$$

При этом  $\Psi'(0) \neq 0$ , так как из второго соотношения следовало бы, что  $a(0) = 0$ . Поэтому полином  $R_1(\lambda)$  делится нацело на  $\lambda^k$ . Пусть  $\Psi_1(\lambda) = \lambda^{-k} R_1(\lambda) \Psi'(\lambda)$ . Тогда  $\Psi_1(\lambda)$  — устойчивая д.-р. ф., если этим свойством облада-

ет  $\Psi(\lambda)$ . Учитывая, что  $[D_2^T(\lambda)D_2(\lambda)]^{-1}D_2^T(\lambda) = D_2^{-1}(\lambda)$ , получим

$$\begin{aligned} R_2(\lambda)\Psi(\lambda) &= Q_2(\lambda)D_2^{-1}(\lambda)\lambda^kR_1^{-1}(\lambda)\Psi_1(\lambda) = \\ &= \lambda^kQ_2(\lambda)D_2^{-1}(\lambda)D_1^{-1}(\lambda)P_2(\lambda)\Psi_1(\lambda) = \\ &= \lambda^k[P_2^{-1}(\lambda)D_1(\lambda)D_2(\lambda)Q_2^{-1}(\lambda)]^{-1}\Psi_1(\lambda) = \\ &= \lambda^k[P_2^{-1}(\lambda)D(\lambda)Q_2^{-1}(\lambda)]^{-1}\Psi_1(\lambda) = \\ &= \lambda^k(a^{-1}(\lambda)b(\lambda)^{-1}\Psi_1(\lambda)) = b_+^{-1}(\lambda)a(\lambda)\Psi_1(\lambda). \end{aligned}$$

Здесь учтены соотношения (П.24), (П.22) и (П.21). Формулы (П.20) принимают в терминах функции  $\Psi_1(\lambda)$  вид

$$\begin{aligned} W_1(\lambda) &= W_1^0(\lambda) + \lambda^k\Psi_1(\lambda), \\ W_2(\lambda) &= W_2^0(\lambda) + b_+^{-1}(\lambda)a(\lambda)\Psi_1(\lambda). \end{aligned} \quad (\text{П.33})$$

В формулах (П.33) нет необходимости преобразовывать  $a^{-1}(\lambda)b(\lambda)$  к диагональному виду с помощью элементарных преобразований, чтобы находить по формулам (П.24) функции  $R_1(\lambda)$ ,  $R_2(\lambda)$ . Для объектов, устойчивых по управлению, передаточные функции  $W_1^0(\lambda)$ ,  $W_2^0(\lambda)$  в формулах (П.33) можно выбрать следующим образом.  $W_1^0(\lambda)$  определим как полином степени ( $k - 1$ ), матричные коэффициенты которого находятся из соотношений

$$W_1^0(0) = I_n, \quad \left. \frac{d^s a(\lambda) W_1^0(\lambda)}{d\lambda^s} \right|_{\lambda=0} = 0, \quad s = 1, \dots, k - 1. \quad (\text{П.34})$$

Тогда матрица

$$\gamma(\lambda) = \lambda^{-k}[a(\lambda)W_1^0(\lambda) - I_n] \quad (\text{П.35})$$

будет полиномиальной. В качестве  $W_2^0(\lambda)$  можно взять

$$W_2^0(\lambda) = b_+^{-1}(\lambda)\gamma(\lambda). \quad (\text{П.36})$$

Очевидно, д.-р. ф.  $W_1^0(\lambda)$ ,  $W_2^0(\lambda)$  устойчивы и удовлетворяют соотношению (П.12). Как и в скалярном случае, так найденные передаточные матрицы  $W_1^0(\lambda)$ ,  $W_2^0(\lambda)$  отвечают оптимальным управлениям, если в (П.1)  $v_t \equiv w_t$  — белошумный процесс и  $Q(y, u) = y^*Q_{yy}$ . При оптимальном регуляторе в этих условиях уравнение (П.1) принимает вид

$$y_t = W_1^0(\nabla)v_t.$$

**3.П.2°.** Синтез оптимальных регуляторов в случае непрерывного времени. Если время  $t$  изменяется непрерывно, то уравнение ОУ примем в виде

$$a(p)y = b(p)u + v(t), \quad (\text{П.37})$$

где  $p = d/dt$  — производная по времени  $t$ ;  $y = y(t)$  — выход ОУ;  $u = u(t)$  — управляющее воздействие;  $v(t)$  — помеха. Полиномы  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  имеют вид

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \lambda^r + a_1\lambda^{r-1} + \dots + a_r, \\ b(\lambda) &= b_{r-s}\lambda^s + \dots + b_r, \end{aligned} \quad (\text{П.38})$$

$s < r$ ,  $b_{r-s} \neq 0$ . Для простоты изложения предположим, что  $y(t)$ ,  $u(t)$  и  $v(t)$  — скалярные функции времени  $t$ , так что коэффициенты полиномов (П.38) — вещественные числа.

Относительно помехи предполагается, что  $v(t)$  является центрированным стационарным процессом с дробнорациональной спектральной плотностью. Поясним это понятие подробнее. Пусть

$$R_v(T) = Mv(t)v(t-T) \quad (\text{П.39})$$

— корреляционная функция процесса  $v(t)$ . Предполагается, что у  $R(T)$  существует преобразование Фурье

$$p(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_v(t) e^{i\lambda t} dt; \quad (\text{П.40})$$

функция  $p(\lambda)$  и называется *спектральной плотностью процесса  $v(t)$* . Далее предполагается, что  $p(\lambda)$  — правильная д.-р. ф., т. е. представляет собой отношение двух полиномов, причем степень знаменателя выше степени числителя. Последнее предположение делается для того, чтобы иметь дело с непрерывными реализациями процесса  $v(t)$ .

Если процесс  $v(t)$  к тому же и эргодический, то с вероятностью 1 для него справедливы соотношения

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v(t) dt = 0, \quad (\text{П.41})$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v(s)v(s-t) ds = R_v(t).$$

В дальнейшем только эти два условия достаточно предполагать выполненными. При этом процесс  $v(t)$  может и не иметь стохастической природы, все равно по отношению к нему будет употребляться термин «стационарный центрированный процесс с дробно-рациональной спектральной плотностью».

Цель управления состоит в минимизации функционала

$$J = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Q(y(t), u(t)) dt,$$

где  $Q(y, u)$  — положительная квадратичная функция переменных  $y$  и  $u$  имеет вид (П.8).

Допустимыми предполагаются управление, формируемые с помощью неупреждающих устойчивых линейных связей; точнее, допустимы управление, формируемые стабилизирующим регулятором:

$$\alpha(p)u = \beta(p)y, \quad (\text{П.42})$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \lambda^p + d_1\lambda^{p-1} + \dots + a_p, \\ \beta(\lambda) &= b_{p-q}\lambda^q + \dots + \beta_p. \end{aligned} \quad (\text{П.43})$$

Естественно потребовать, чтобы и порядки  $p, q$  полиномов  $\alpha(\lambda), \beta(\lambda)$  были связаны соотношениям

$$q \leq r, \quad r - s > q - p; \quad (\text{П.44})$$

в остальном  $p$  и  $q$  могут быть произвольными натуральными числами. Регулятор (П.42) называется *стабилизирующим для ОУ* (П.37), если характеристический полином

$$g(\lambda) = a(\lambda)\alpha(\lambda) - b(\lambda)\beta(\lambda) \quad (\text{П.45})$$

системы управления (П.37), (П.42) гурвицев.

Введем передаточные функции

$$W_y(\lambda) = \alpha(\lambda)/g(\lambda), \quad W_u(\lambda) = \beta(\lambda)/g(\lambda), \quad (\text{П.46})$$

удовлетворяющие тождеству (П.10), которое является следствием соотношения (П.45). Теперь *устойчивой д.-р. ф.* следует называть такую, которая не имеет особенностей (полюсов) вне открытой левой полуплоскости. «Параметризация» множества устойчивых передаточных функций производится точно так же, как и в дискретном варианте.

В результате приходим к задаче минимизации квадратичного функционала в классе д.-р. ф., не имеющих особенностей вне открытой левой полуплоскости. С этими очевидными изменениями процедура нахождения оптимальной функции  $\Psi(\lambda)$ , изложенная для дискретного времени, переносится на рассматриваемый случай непрерывного времени.

Приведем окончательный результат. Для скалярных функций  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$ ,  $D(\lambda)$  введем обозначение  $N(A, B, C, D; \lambda) = A(-\lambda)Q_{11}C(\lambda) + A(-\lambda)Q_{12}D(\lambda) + B(-\lambda)Q_{12}C(\lambda) + B(-\lambda)Q_{22}D(\lambda)$ , (П.47)

где  $Q_{ij}$  — коэффициенты квадратичной формы (П.8) (напомним, что рассматривается случай скалярных  $y$  и  $u$ ). Факторизуем функцию

$$N(R_1, R_2, R_1, R_2; \lambda) = \Pi(-\lambda)\Pi(\lambda), \quad (\text{П.48})$$

где  $\Pi(\lambda)$  — д.-р. ф., не имеющая особенностей и корней вне открытой левой полуплоскости,  $R_1, R_2$  — устойчивые д.-р. ф. из представления (П.20). Пусть  $\Gamma(\lambda)$  — устойчивая (вместе с  $\Gamma^{-1}(\lambda)$ ) д.-р. ф., определяемая соотношением

$$p(\lambda) = \Gamma(\lambda)\Gamma(-\lambda); \quad (\text{П.49})$$

$p(\lambda)$  — спектральная плотность процесса  $v(t)$ , определяемая формулами (П.40) и (П.39) (либо (П.41)). Введем функцию

$$R(\lambda) = -\frac{N(R_1, R_2, W_1^0, W_2^0; \lambda)\Gamma(\lambda)}{\Pi(-\lambda)} \quad (\text{П.50})$$

и произведем ее сепарацию: представим в виде

$$R(\lambda) = R_+(\lambda) + R_-(\lambda), \quad (\text{П.51})$$

где  $R_+(\lambda)$  — д.-р. ф., не имеющая особенностей в правой замкнутой полуплоскости;  $R_-(\lambda)$  — правильная д.-р. ф., не имеющая особенностей в левой замкнутой полуплоскости;  $R_-(\lambda) \rightarrow 0$  при  $|\lambda| \rightarrow -\infty$ .

Оптимальная  $\Psi(\lambda)$  находится теперь по формуле (П.29) и определяет оптимальные передаточные функции по формулам (П.20).

Доказательство законности проделанной процедуры почти дословно повторяет обоснование для дискретного

случая, если в последнем вместо «единичного круга» понимать «правую полуплоскость».

Отметим особенность, которой нет в дискретном случае. В приведенном выводе никак не учитывались требования (П.44) на разностные порядки регулятора (П.42), (П.43). Поэтому может оказаться, что, например,  $p = r$ , т. е. в обратных связях используются старшие производные. При этом может оказаться, что в полиномах  $a(\lambda)\alpha(\lambda)$  и  $b(\lambda)\beta(\lambda)$  старшие степени имеют одинаковые коэффициенты; тогда характеристический полином (П.45) будет иметь меньший порядок, чем порядок системы управления (П.37), (П.42). Нетрудно привести примеры, когда для оптимального регулятора указанное обстоятельство действительно имеет место (и этот случай совсем не особенный). Использование таких оптимальных регуляторов недопустимо: несмотря на гурвицевость полинома  $g(\lambda)$ , регулятор оказывается критическим к сколь угодно малым изменениям коэффициентов ОУ — при изменении этих коэффициентов «вырождение» в полиноме (П.45) снимается и он может перестать быть гурвицевым; система управления перестает быть устойчивой.

Эта особенность оптимальных регуляторов в непрерывном времени указывает на некоторую некорректность постановки задачи оптимального управления. Известны различные способы, предназначенные для того, чтобы обойти трудности с «вырождением» системы управления (например, введение искусственных помех в цепях обратной связи), но каждый из них обладает определенными недостатками.

В дискретном варианте вырождение характеристического полинома системы управления не приводит к такого рода неприятностям, если задача оптимального управления решается для уравнений объекта, записанных в обратных разностях. Для непрерывного времени такой возможности записывать уравнения объекта «в обратном времени» нет, и, как уже пояснялось выше, оптимальная система может вырождаться. Построение адаптивных вариантов оптимальных систем в этом случае теряет смысл (сколь угодно точная оценка коэффициентов ОУ не позволяет сделать систему управления устойчивой, если используется «вырожденная» обратная связь). Поэтому в дальнейшем задача адаптивного оптимального управле-

ния будет рассматриваться лишь для дискретных систем управления.

Непрерывную систему можно в соответствии с § 3.4 рассматривать как дискретную, если использовать кусочно-постоянные управлений. Для последней можно построить дискретный оптимальный регулятор, однако при стремлении величины интервала постоянства управляющих воздействий к нулю коэффициенты оптимального дискретного регулятора не сходятся, вообще говоря, к соответствующим коэффициентам непрерывного оптимального регулятора.

**3.П.3°. Факторизация дробно-рациональных функций.** Спектральный метод синтеза оптимальных регуляторов существенно опирается на следующую теорему о факторизации.

**Теорема 3.П.5** ([92], с. 292). *Пусть  $N(\lambda)$  —  $m \times m$ -матрица со свойствами:*

а) *Существует такое натуральное число  $l$ , что элементы матрицы  $\lambda^l N(\lambda)$  являются полиномами с вещественными коэффициентами.*

б) *Матрица  $N(\lambda)$  неотрицательна на единичной окружности, т. е. для произвольного  $m$ -вектора  $d$  и комплексного числа  $\lambda$ ,  $|\lambda| = 1$ , выполняется неравенство  $d^* N(\lambda) d \geq 0$ .*

*Тогда существует по крайней мере один полином  $n(\lambda)$  с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий при всех  $\lambda \neq 0$  равенству*

$$\det N(\lambda) = n(\lambda^{-1})n(\lambda), \quad (\text{П.52})$$

*и для любого полинома  $n(\lambda)$  с этим свойством существует такая полиномиальная матрица  $L(\lambda)$  с вещественными коэффициентами, что имеют место соотношения*

$$N(\lambda) = L^T(\lambda^{-1})L(\lambda), \quad \det L(\lambda) = n(\lambda).$$

*Если  $n(0) \neq 0$ , то степень полиномиальной матрицы  $L(\lambda)$  не может быть больше  $l$ .*

Если  $m = 1$ , т. е.  $\lambda^l N(\lambda)$  — скалярный полином, то факторизация (П.52) полностью прозрачна и построение полинома  $n(\lambda)$  достаточно конструктивно. Действительно, из положительности  $N(\lambda)$  при  $|\lambda| = 1$  следует, что отличные от нуля корни полинома  $N(\lambda)$  расположены симметрично относительно единичной окружности, т. е.

если  $\lambda$  — корень полинома  $\lambda^l N(\lambda)$ , то  $\lambda^{-1}$  — также его корень (если  $\lambda = \pm 1$  — корень, то он обязательно имеет четную кратность, так что и такие корни можно считать расположеными симметрично относительно единичной окружности). Без ограничения общности будем считать, что  $\lambda^l N(\lambda) \neq 0$  при  $\lambda = 0$  и старший коэффициент полинома равен единице. Таким образом, все корни полинома  $\lambda^l N(\lambda)$  отличны от нуля и он имеет четную степень  $2l$ . Выберем по одному представителю из каждой пары симметричных корней и образуем набор  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$  из таких представителей (корни подсчитываются с учетом их кратности). Тогда  $\{\mu_1^{-1}, \dots, \lambda_l^{-1}\}$  — также набор корней полинома  $\lambda^l N(\lambda)$ , дополняющий набор  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ . Поэтому имеем

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \lambda^{-l} \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i) \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i^{-1}) = \\ &= \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i) \prod_{i=1}^l (\lambda^{-1} - \lambda_i) (-1)^l \prod_{i=1}^l \lambda_i^{-1} = \\ &= \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i) \prod_{i=1}^l (\lambda^{-1} - \lambda_i). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что в силу указанного выше свойства возвратности корней полинома  $\lambda^l N(\lambda)$  свободный коэффициент полинома  $N_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^l N(\lambda) = (-1)^l \prod_{i=1}^l \lambda_i^{-1}$  совпадает со старшим коэффициентом, который принят равным единице. Таким образом, полином  $n(\lambda) = \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i)$  удовлетворяет условию (П.52). Итак, факторизация скалярной функции  $N(\lambda)$  сводится по существу к задаче нахождения ее отличных от нуля корней. Отметим, что если функция  $N(\lambda)$  положительна на единичной окружности, то полином  $n(\lambda)$  может быть выбран устойчивым — для этого достаточно в набор  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$  корней функции  $N(\lambda)$  отобрать лишь те, что расположены вне единичного круга,

Факторизация матричных функций  $N(\lambda)$  — задача более сложная и не столь конструктивная. Известные процедуры основаны на теореме 3.П.7 о приведении полиномиальных матриц к диагональному виду с помощью элементарных операций.

Пусть теперь  $N(\lambda)$  — матричная функция, матричные элементы которой — д.-р.ф. с вещественными коэффициентами, и предположим, что при каждом  $\lambda$ ,  $|\lambda| = 1$ , функция  $N(\lambda)$  определена и является положительной матрицей. Обозначим через  $\{\lambda'_1, \dots, \lambda'_l\}$  набор всех полюсов (с учетом кратности) матрицы  $N(\lambda)$ , расположенных вне единичного круга, и образуем устойчивый полином

$$n(\lambda) = \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda'_i). \quad \text{Тогда матрица } \lambda^l N(\lambda) n(\lambda) n(\lambda^{-1}) —$$

полиномиальная, причем при  $|\lambda| = 1$  матрица  $M(\lambda) = N(\lambda) n(\lambda) n(\lambda^{-1})$  положительна, поскольку в этом случае  $n(\lambda) n(\lambda^{-1}) = |n(\lambda)|^2$ . Следовательно, функция  $\det M(\lambda)$  также положительна на единичной окружности. Обозначим через  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  все корни функции  $\det M(\lambda)$ , расположенные вне единичного круга, и

образуем устойчивый полином  $m(\lambda) = C_M \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)$ ,

где

$$C_M^2 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^k \det M(\lambda) = (-1)^k \prod_{i=1}^k \lambda_i, \quad C_M > 0.$$

Тогда  $\det M(\lambda) = m(\lambda)m(\lambda^{-1})$  и, следовательно, в соответствии с теоремой 3.П.5 существует полиномиальная матрица  $L(\lambda)$  такая, что

$$M(\lambda) = L^T(\lambda^{-1})L(\lambda), \quad \det L(\lambda) = m(\lambda).$$

При этом в силу устойчивости полинома  $m(\lambda)$  д.-р.ф.  $L^{-1}(\lambda)$  не имеет полюсов вне единичного круга. Таким образом, приходим к утверждению.

**Теорема 3.П.6.** Пусть  $N(\lambda)$  — дробно-рациональная (матричная) функция с вещественными коэффициентами в матричных элементах, определенная и неотрицательная при всех  $|\lambda| = 1$ . Тогда существует устойчивая д.-р.ф.  $\Pi(\lambda)$  такая, что справедливо представление  $N(\lambda) = \Pi^T(\lambda^{-1})\Pi(\lambda)$  при всех комплексных значениях  $\lambda$ .

При этом, если  $\det N(\lambda) \neq 0$  при  $|\lambda| = 1$ , то  $\Pi^{-1}(\lambda)$  — устойчивая д.-р.ф.

Действительно, в качестве  $\Pi(\lambda)$  достаточно выбрать функцию  $\Pi(\lambda) = L(\lambda) n(\lambda)^{-1}$ , где полиномиальная функция  $L(\lambda)$  и устойчивый полином  $n(\lambda)$  были введены выше. Если  $\det N(\lambda) \neq 0$  при  $|\lambda| = 1$ , то  $\det M(\lambda) \neq 0$  и полином  $m(\lambda) = \det L(\lambda)$  — устойчивый. Поэтому д.-р.ф.  $L(\lambda)^{-1}$ , а с ней и  $\Pi(\lambda)^{-1}$  — устойчивые.

**3.П.4°. Эквивалентные преобразования дробно-рациональных матричных функций.** Полиномиальную квадратную матрицу  $P(\lambda)$ , у которой определитель  $\det P(\lambda)$  не зависит от  $\lambda$  и отличен от нуля, назовем *элементарной матричной функцией*. Для элементарной матричной функции  $P(\lambda)$  обратная матрица  $P(\lambda)^{-1}$  существует и также является элементарной матричной функцией. Пусть  $a(\lambda)$  — произвольная прямоугольная матрица, элементы которой — полиномы по  $\lambda$ . В соответствии с § 2 [23] существуют элементарные матричные функции  $P(\lambda)$ ,  $Q(\lambda)$  соответствующих размерностей такие, что матрица  $P(\lambda) a(\lambda) Q(\lambda)$  — диагональная, т. е. отличными от нулевых могут быть лишь элементы главной диагонали. Из этого утверждения элементарно следует аналогичное утверждение для д.-р.ф. Для удобства ссылок приведем это утверждение в следующей редакции.

**Теорема 3.П.7.** Пусть  $a(\lambda)$  — произвольная дробно-рациональная матричная функция размерности  $m \times n$ . Тогда существуют элементарные матричные функции  $P(\lambda)$ ,  $Q(\lambda)$  соответственно размерностей  $m \times m$  и  $n \times n$  такие, что  $P(\lambda) \cdot a(\lambda) Q(\lambda)$  — диагональная д.-р.ф.

Действительно, матрица  $a'(\lambda) = a(\lambda) g(\lambda)$ , где  $g(\lambda)$  — произведение знаменателей всех элементов матрицы  $a(\lambda)$ , — полиномиальная. Тогда в соответствии со сказанным выше существуют элементарные матричные функции  $P(\lambda)$ ,  $Q(\lambda)$  размерностей  $m \times m$  и  $n \times n$  такие, что матрица  $\tilde{a}'(\lambda) = P(\lambda) a(\lambda) Q(\lambda) g(\lambda)$  — полиномиальная диагональная, т. е. матрица  $\tilde{a}'(\lambda) g(\lambda)^{-1}$  — диагональная дробно-рациональная, что и утверждается в теореме 3.П.7. Разумеется, если матрица  $a(\lambda)$  — полиномиальная, то  $g(\lambda) \equiv 1$  и матрица  $\tilde{a}'(\lambda)$  — также полиномиальная. Отметим, что в [23] приведен алгоритм получения элементарных матричных функций  $P(\lambda)$ ,  $Q(\lambda)$ .

### § 3.Д. Доказательства лемм и теорем

**3.Д.1°. Доказательство леммы 3.1.1.** Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть  $a_0(\lambda) = a(\lambda)/v(\lambda)$ ,  $b_0(\lambda) = b(\lambda)/v(\lambda)$ ,  $g(\lambda) = \gamma(\lambda) \cdot v(\lambda)$ , где  $\gamma(\lambda)$  — полином. Тогда  $\langle a_0, b_0 \rangle = 1$  и (1.27) равносильно соотношению

$$a_0(\lambda) \alpha(\lambda) - b_0(\lambda) \beta(\lambda) = \gamma(\lambda). \quad (\text{Д.1})$$

По теореме о линейном представлении наибольшего общего делителя \*) существуют такие полиномы  $\alpha_0(\lambda)$  и  $\beta_0(\lambda)$ , что

$$a_0(\lambda) \alpha_0(\lambda) - b_0(\lambda) \beta_0(\lambda) = 1. \quad (\text{Д.2})$$

Они могут быть найдены с помощью алгоритма Евклида \*\*). Домножая (Д.2) на  $\gamma(\lambda)$  и полагая  $\alpha_1(\lambda) = \alpha_0(\lambda) \gamma(\lambda)$ ,  $\beta_1(\lambda) = \beta_0(\lambda) \gamma(\lambda)$ , получаем одно из решений уравнения (Д.1):

$$a_0(\lambda) \alpha_1(\lambda) - b_0(\lambda) \beta_1(\lambda) = \gamma(\lambda). \quad (\text{Д.3})$$

Тем самым доказано, что оно существует. Пусть  $(\alpha(\lambda),$

\*) См. стр. 174 книги: Окунев Л. Я. Высшая алгебра.—М.: Учпедгиз, 1958.—335 с.

\*\*) Приведем алгоритм определения  $\alpha_0, \beta_0$  из (Д.2). Посредством деления полиномов находим последовательно полиномы  $r_i(\lambda)$ ,  $h_i(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} a_0(\lambda) &= h_1(\lambda) b_0(\lambda) + r_1(\lambda), & \deg r_1(\lambda) &< \deg b_0(\lambda), \\ b_0(\lambda) &= h_2(\lambda) r_1(\lambda) + r_2(\lambda), & \deg r_2(\lambda) &< \deg r_1(\lambda), \\ r_1(\lambda) &= h_3(\lambda) r_2(\lambda) + r_3(\lambda), & \deg r_3(\lambda) &< \deg r_2(\lambda), \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} r_{\mu-2}(\lambda) &= h_{\mu}(\lambda) r_{\mu-1}(\lambda) + r_{\mu}(\lambda), & \deg r_{\mu}(\lambda) &< \deg r_{\mu-1}(\lambda), \\ r_{\mu-1}(\lambda) &= h_{\mu+1}(\lambda) r_{\mu}(\lambda). \end{aligned}$$

Как известно,  $r_{\mu}(\lambda) = C \langle a_0, b_0 \rangle$ , т. е.  $r_{\mu}(\lambda) = C$ , где  $C = \text{const}$ . Затем определяются полиномы  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = -h_{\mu}(\lambda)$ ,  $m_{j+2} = m_j - h_{s-j} m_{j+1}$  вплоть до  $m_{\mu+1}$ . При этом  $\alpha_0 = m_s C^{-1}$ ,  $\beta_0 = -m_{s+1} C^{-1}$ .

Действительно, последовательно подставляя значения  $r_j(\lambda)$  из правых частей формул (\*), получаем  $C = r_{\mu} = r_{\mu-2} - h_{\mu} r_{\mu-1} = r_{\mu-2} - h_{\mu}(r_{\mu-3} - h_{\mu-1} r_{\mu-2}) = \dots = m_j r_{\mu-1-j} + m_{j+1} r_{m-j} = \dots = m_{\mu} a_0 + m_{\mu+1} b_0$ . Рекуррентная формула для  $m_j$  следует из сравнения равенств

$$C = m_j r_{\mu-1-j} + m_{j+1} r_{\mu-j} = m_j r_{\mu-1-j} + m_{j+1} (r_{\mu-2-j} - h_{\mu-j} p_{\mu-1-j}) = m_{j+1} p_{\mu-2-j} + (m_j - h_{\mu-j} m_{j+1}) r_{\mu-1-j}$$

и

$$C = m_{j+1} r_{\mu-2-j} + m_{j+2} r_{\mu-j-1}.$$

$\beta(\lambda)$ ) — произвольное решение (Д.1). Тогда, вычитая (Д.3) из (Д.1), получаем

$$a_0(\lambda)[\alpha(\lambda) - \alpha_1(\lambda)] = b_0(\lambda)[\beta(\lambda) - \beta_1(\lambda)]. \quad (\text{Д.4})$$

Так как  $\langle a_0(\lambda), b_0(\lambda) \rangle = 1$ , то  $\alpha(\lambda) - \alpha_1(\lambda) = k(\lambda) b_0(\lambda)$ , где  $k(\lambda)$  — полином. Отсюда, используя (Д.4), получаем для общего решения (Д.1) формулы

$$\alpha(\lambda) = \alpha_1(\lambda) + k(\lambda) b_0(\lambda), \quad \beta(\lambda) = \beta_1(\lambda) + k(\lambda) a_0(\lambda). \quad (\text{Д.5})$$

При условии (1.28), т. е.  $\deg \alpha(\lambda) < \deg b_0(\lambda)$  (или (1.29), т. е.  $\deg \beta < \deg a_0$ ), полином  $k(\lambda)$  однозначно находится из (Д.5), и, следовательно, уравнение (Д.1) при этом условии имеет единственное решение.

Пусть  $\deg g < \deg a + \deg b - \deg v$  и выполнено (1.28), т. е.  $\deg \gamma < \deg a_0 + \deg b_0$  и  $\deg \alpha < \deg b_0$ . В этом случае из (Д.1)  $b_0(\lambda)\beta(\lambda) = a_0(\lambda)\alpha(\lambda) - \gamma(\lambda)$ ,  $\deg b_0 + \deg \beta = \deg(b_0\beta) \leq \max[\deg(a_0\alpha), \deg \gamma] < \deg a_0 + \deg b_0$ . Значит,  $\deg \beta < \deg a_0$  и выполнено (1.29). Поэтому условия (1.28) и (1.29) приводят к одной и той же паре  $\alpha, \beta$ .

**3.Д.2°. Доказательство теоремы 3.1.1.** Пусть  $W_1 = W_y(\lambda)$ ,  $W_2 = W_u(\lambda)$  — произвольная пара устойчивых дробно-рациональных функций (д.-р.ф.), удовлетворяющая соотношению (1.45). Тогда функции  $\Delta W_y(\lambda) = W_y(\lambda) - W_y^0(\lambda)$ ,  $\Delta W_u(\lambda) = W_u(\lambda) - W_u^0(\lambda)$  удовлетворяют соотношению  $a(\lambda)\Delta W_y(\lambda) = b(\lambda)\Delta W_u(\lambda)$ , откуда  $\Delta W_y(\lambda)[\Delta W_u(\lambda)]^{-1} = b(\lambda)[a(\lambda)]^{-1}$ , т. е.  $\Delta W_y(\lambda) = \Psi(\lambda)b(\lambda)v(\lambda)^{-1}$ ,  $\Delta W_u(\lambda) = \Psi(\lambda)a(\lambda)v(\lambda)^{-1}$ , где  $\Psi(\lambda)$  — д.-р.ф. Отсюда немедленно следуют представления (1.47). Так как полиномы  $a(\lambda)v(\lambda)^{-1}$  и  $b(\lambda)v(\lambda)^{-1}$  взаимно несократимы, а д.-р.ф.  $W_y(\lambda)$ ,  $W_y^0(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$ ,  $W_u^0(\lambda)$  устойчивы, то из (1.47) следует устойчивость д.-р.ф.  $\Psi(\lambda)$ .

Пусть теперь пара  $W_1 = W_y(\lambda)$ ,  $W_2 = W_u(\lambda)$  удовлетворяет соотношению (1.47) с устойчивой д.-р.ф.  $\Psi(\lambda)$ . Из (1.47) непосредственно следует устойчивость д.-р.ф.  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$  и выполнение для них соотношения (1.45). Теорема 3.1.1. доказана.

**3.Д.3°. Доказательство теоремы 3.2.1 и замечания 3 п. 3.2.5°.** Докажем предварительно вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.Д.1.** Пусть  $X$  — ограниченное множество в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^m$ , симметричное относительно начала координат;  $z$  — произвольный вектор порядка  $l$ ;  $H$  — матрица порядка  $l \times m$ . Тогда

$$\sup_{x \in X} |z + Hx|^2 \geq |z|^2 + \sup_{x \in X} |Hx|^2.$$

**Доказательство.** Разобьем множество  $X$  на два подмножества:  $X^{(+)} = \{x: (Hx, z) \geq 0\}$  и  $X^{(-)} = \{x: (Hx, z) \leq 0\}$ . Имеем  $|z + Hx|^2 = |z|^2 + 2(Hx, z) + |Hx|^2$ . Из симметричности множества  $X$  следует, что каждому вектору  $x \in X^{(-)}$  соответствует вектор  $(-x) \in X^{(+)}$ ; поэтому  $\sup_{x \in X} |z + Hx|^2$  достигается на множестве  $X^{(+)}$ . Следовательно,  $\sup_{x \in X} |z + Hx|^2 = \sup_{x \in X^{(+)}} |z + Hx|^2 \geq \sup_{x \in X^{(+)}} (|z|^2 + |Hx|^2) = |z|^2 + \sup_{x \in X} |Hx|^2$ . Последнее равенство имеет место снова в силу симметрии множества  $X$ . Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3.2.1. Пусть  $D(\lambda) = d(\lambda) a(\lambda)$ . Покажем, что  $F(\lambda)$ ,  $G(\lambda)$  однозначно определяются из (2.10). Полиному  $F(\lambda) = I_l + \dots + \lambda^n F_n$  (см. (2.9)) сопоставим полином  $F_*(\lambda) = \lambda^n F(\lambda^{-1}) = \lambda^n I_l + \dots + F_n$ . Из тождества (2.10) после замены  $\lambda$  на  $\lambda^{-1}$  и умножения его на  $\lambda^{n+p+r}$  получим равносильное тождество  $F_*(\lambda) D_*(\lambda) - G_*(\lambda) = \lambda^{n+p+r} I_l$ . Здесь  $D_*(\lambda)$ ,  $G_*(\lambda)$  — полиномы, соответствующие  $D(\lambda)$  и  $G(\lambda)$ . Последнее тождество показывает, что  $F_*(\lambda)$  и  $-G_*(\lambda)$  суть левое частное и остаток от деления  $\lambda^{n+p+r}$  на полином  $D_*(\lambda)$  (см. [23], гл. 4, § 2). Следовательно, они, а значит, и  $F(\lambda)$ ,  $G(\lambda)$  определяются и притом однозначно.

Пусть в уравнении (1.1)  $u_t$  — произвольное допустимое управление. Применим к уравнению (1.1) слева оператор  $F(\nabla) d(\nabla)$ :

$$F(\nabla) d(\nabla) a(\nabla) y_t = F(\nabla) d(\nabla) b(\nabla) u_t + F(\nabla) d(\nabla) v_t.$$

Из (2.10)  $F(\nabla) d(\nabla) a(\nabla) = G(\nabla) \nabla^{n+1} + I_l$ . Поэтому с учетом равенства (2.2) имеем

$$y_t = z_t + F(\nabla) w_t, \quad (\text{Д.6})$$

$$z_t = F(\nabla) d(\nabla) b(\nabla) u_t - \nabla^{n+1} G(\nabla) y_t. \quad (\text{Д.7})$$

Покажем, что равенство  $z_t = 0$  определяет некоторое допустимое управление  $u_{(\cdot)} \in \mathfrak{U}_s$ . Перепишем подробнее равенство  $z_t = 0$ :

$$b_k u_{t-k} + \dots + F_n d_p b_r u_{t-n-p-r} = \\ = G_0 y_{t-n-1} + \dots + G_{r+p-1} y_{t-n-r-p}.$$

Так как  $\det b_k \neq 0$ , то это уравнение разрешимо относительно  $u_{t-k}$ . Поскольку  $(t - k) - (t - n - 1) = s$ , то полученнное управление принадлежит классу  $\mathfrak{U}_s$ .

Покажем теперь, что управление, определяемое равенством  $z_t = 0$  и совпадающее с (2.8), является оптимальным. Пусть  $u_{(\cdot)} \in \mathfrak{U}_s$  — произвольное управление. Рассмотрим сначала второе слагаемое правой части (Д.6). Имеем  $F(\nabla) w_t = H w_{t-n}^t$ , где  $w_{t-n}^t$  — вектор порядка  $l(n+1)$ ,  $H$  — матрица  $l \times l(n+1)$ , составленная из матриц  $F_i$ :  $H = (F_n, \dots, F_1, I_0)$ . Когда  $v_{(\cdot)}$  пробегает множество  $\mathfrak{W}$ , вектор  $w_{t-n}^t$  пробегает множество  $W \times W \times \dots \times W = X$ . Множество  $X$  симметрично и ограничено, поскольку этими свойствами обладает множество  $W$ . Вектор  $H w_{t-n}^t$  пробегает, очевидно, также симметричное ограниченное множество в  $\mathbb{R}^l$ . Из (Д.6) имеем

$$\sup_{v_{(\cdot)} \in \mathfrak{W}} |y_t|^2 = \sup_{w_{t-n}^t \in X} |z_t + H w_{t-n}^t|^2. \quad (\text{Д.8})$$

Покажем, что слагаемые  $z_t$  и  $H w_{t-n}^t$  независимы, т. е. что они зависят от векторов  $w_i$  с непересекающимися множествами индексов. Второе слагаемое в (Д.7) зависит только от  $y_i$  с  $i \leq t - n - 1$ . Первое слагаемое в (Д.7) (см. (2.9)) зависит от  $u_{t-k-n-r}^{t-k}$ .

Каждый вектор  $u_t$  в силу допустимости зависит от  $y_0^{t-s}$ , т. е.  $u_{t-k-n-r}^{t-k}$  зависит от  $y_0^{t-s-k} = y_0^{t-n-1}$ . Итак, вектор  $z_t$  зависит только от  $y_0^{t-n-1}$ . Наконец, вектор  $y_0^{t-n-1}$  зависит от  $v_0^{t-n-1}$ ,  $w_0^{t-n-1}$ . Отсюда следует, что слагаемые  $z_t$  и  $H w_{t-n}^t$  независимы. Поэтому (Д.8) можно переписать с использованием леммы в виде

$$\begin{aligned} \sup |y_t|^2 &= \sup |y_t|^2 = \sup |z_t + H w_{t-n}^t|^2 \geq \\ &\geq \sup_{w_{t-n}^t \in X} |z_t|^2 + \sup_{w_{t-n}^t \in X} |H w_{t-n}^t|^2 \geq \sup_{w_{t-n}^t \in X} |H w_{t-n}^t|^2 = \\ &= \sup_{w_i \in W} |w_0 + F_1 w_1 + \dots + F_n w_n|^2. \end{aligned} \quad (\text{Д.9})$$

Здесь неравенство переходит в равенство при  $z_t = 0$ . Вернемся к функционалу (2.3). Для  $T \geq r + p + n$  из (Д.9) имеем

$$J^T [u_0^\infty] = \sup_{t \geq T} \sup_{v(\cdot, t) \in \mathfrak{W}} |y_t|^2 \geq \sup_{w_i \in W} |w_0 + F_1 w_1 + \dots + F_n w_n|^2.$$

Правая часть последнего неравенства есть значение функционала (2.3) на управлении, определяемом равенством  $z_t = 0$ , т. е. на управлении (2.8). Это управление допустимо. Поэтому оно и оптимально. Наконец, как и утверждается в теореме, значение  $J^T [u_0^\infty]$  на оптимальном управлении определяется равенством (2.14).

Докажем замечание 3 п. 3.2.5°. Так как  $J(u_0^\infty) \leq J^T(u_0^\infty)$ , то  $\inf J(u_0^\infty) \leq \inf J^T(u_0^\infty)$ . Здесь и ниже  $\inf$  берется по всем  $u_0^\infty \in \mathfrak{U}_s$ . Для произвольного  $u_0^\infty \in \mathfrak{U}_s$  выполнено (Д.9), причем правая часть (Д.9) совпадает с  $\inf J^T(u_0^\infty)$ . Из (Д.9) имеем  $J(u_0^\infty) \geq \inf J^T(u_0^\infty)$ ,  $J(\hat{u}_0^\infty) = \inf J^T(u_0^\infty)$ , где  $\hat{u}_0^\infty$  — управление (2.8), для которого  $z_t = 0$ . Поэтому  $\inf J(u_0^\infty) \geq \inf J^T(u_0^\infty)$ , т. е.  $\inf J(u_0^\infty) = \inf J^T(u_0^\infty) = J(\hat{u}_0^\infty)$ . Эти равенства и означают справедливость теоремы 3.2.1. для функционала (2.14).

### 3.Д.4°. Доказательство теоремы 3.2.2.

**Лемма 3.Д.2.** Пусть

$$W_v = \frac{\alpha(\lambda)}{g(\lambda)}, \quad W_u = \frac{\beta(\lambda)}{g(\lambda)}, \quad g(\lambda) = a(\lambda) - b(\lambda) \bar{b}(\lambda) \quad (\text{Д.10})$$

— передаточные функции от  $v_t$  к  $y_t$  и  $u_t$  и  $g(\lambda)$  — характеристический полином устойчивого объекта (2.15). Пусть

$$W_v = \sum_{k=0}^{\infty} W^{(k)} \lambda^k \quad (\text{Д.11})$$

— разложение в ряд по степеням  $\lambda$ . Значение функционала (2.14) равно

$$J(u_0^\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} |W^{(k)}|. \quad (\text{Д.12})$$

**Доказательство.** Предположим, что (2.15) выполнено для всех  $t$  и что  $y_t = u_t = 0$  для всех доста-

точно больших  $t < 0$ . (Для  $v_t$  это свойство, по предположению, выполнено.) Тогда из (2.15) для  $D$ -преобразований  $\tilde{y} = Dy_t$ ,  $\tilde{u} = Du_t$ ,  $\tilde{v} = Dv_t$  получаем

$$\tilde{y} = W_y \tilde{v}, \quad \tilde{u} = W_u \tilde{v}. \quad (\text{Д.13})$$

(Относительно  $D$ -преобразований см. [120а] и сноску на с. 134.) Нока неясно, существует ли решение  $(y_t, u_t)$  с указанными свойствами. Определим  $\tilde{y} = \tilde{y}(\lambda)$ ,  $\tilde{u} = \tilde{u}(\lambda)$  формулами (Д.13), (Д.10). Тогда, очевидно,  $a(\lambda) \tilde{y} - b(\lambda) \tilde{u} = \tilde{v}(\lambda)$ ,  $\alpha(\lambda) \tilde{u} - \beta(\lambda) \tilde{v} = 0$  и, следовательно, для соответствующих  $y_t$ ,  $u_t$  выполнено (2.15), т. е.  $(y_t, u_t)$  — указанное решение. Поскольку функционал (2.14) не зависит от выбора решения системы (2.15), то можно взять в (2.14) это решение. По условию  $g(0) = a_0 \neq 0$  и  $g(\lambda)$  не имеет нулей в круге  $|\lambda| \leq 1$ . Поэтому (Д.11) справедливо для  $|\lambda| \leq 1$ . Из первого соотношения (Д.13) имеем

$$y_t = \sum_{k=0}^t W^{(k)} v_{t-k}, \quad \sup |y_t| = \sum_{k=0}^t |W^{(k)}|. \quad (\text{Д.14})$$

Второе равенство следует из нерегулярности функции  $v_t = v_t(\xi)$  в интервале значений  $[-C_v, C_v]$ . Отсюда и из (2.14) получаем (Д.12). (Ряд (Д.12), очевидно, сходится.) Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Положим

$$W_y^0 = \alpha_-, \quad W_u^0 = \beta_- b_+^{-1}, \quad \Psi_+ = \Psi b_+. \quad (\text{Д.14})$$

Из первого соотношения (2.19) следует, что  $W_1 = W_y^0$ ,  $W_2 = W_u^0$  — устойчивые д.-р.ф., удовлетворяющие соотношению (1.45). По теореме 3.1.1  $W_y = W_y^0 + b_- \Psi_+$ ,  $W_u = W_u^0 + ab_+^{-1} \Psi_+$  — общий вид функции  $W_y$ ,  $W_u$ . Здесь  $\Psi_+$  пробегает множество всех д.-р.ф. без полюсов в области  $|\lambda| \leq 1$ :  $\Psi_+(\lambda) = \Psi_0 + \Psi_1 \lambda + \dots$ . Положим для  $N \geq 0$

$$W^N = W_y^0 + b_- \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k \lambda^k, \quad W^0 = W_y^0.$$

Так как  $\deg b_- = m$  и  $\deg W_y^0 < m$  (см. (2.19)), то  $\deg W^N \leq m + N - 1$ . Для произвольной голоморфной при-

$|\lambda| \leq 1$  функции  $W_y$  будем обозначать через  $\|W_y\|$  правую часть (Д.12). Так как  $\|W' + W''\| \geq \|W'\| = \|W''\|$  и

$$W^{N+1} = W^N + b_m' \Psi_N \lambda^{m+N} + (b_{m-1}' \lambda^{m-1} + \dots + b_0') \Psi_N \lambda^N,$$

то для любого  $N \geq 0$

$$\|W^{N+1}\| \geq \|W^N\| + |b_m'| |\Psi_N| - (|b_{m-1}'| + \dots + |b_0'|) |\Psi_N|. \quad (\text{Д.15})$$

Мы воспользовались тем, что  $\|W^N + b_m' \Psi_N \lambda^{m+1}\| = \|W^N\| + |b_m' \Psi_N|$ , так как  $\deg W^N \leq m + N - 1$ . Из (Д.15) и (2.18) следует, что  $\|W^{N+1}\| \geq \|W^N\|$  при  $N \geq 0$ . Поскольку  $\|W^0\| \leq \|W^N\|$  и  $\|W^N\| \rightarrow \|W_y\|$  при  $N \rightarrow \infty$ , то  $\|W_y\| \geq \|W^0\| = \|W_y^0\|$ . Итак, значение  $J(u_{(.)})$  минимально для  $\Psi_+ \equiv 0$ , т. е. для  $W_y = W_y^0$ ,  $W_u = W_u^0$ . Согласно (Д.10) оптимальные  $\alpha$  и  $\beta$  находятся из представления  $W_y^0 = \alpha/g$ ,  $W_u^0 = \beta/g$ , где  $g$  — устойчивый многочлен,  $g(0) = 1$ . Сравнивая с (Д.14) и используя условие  $b(0) = b_+(0) \neq 0$ , получаем (2.20). Из (Д.12) для  $W_y = W_y^0 = \alpha_-$  следует (2.21).

**3.Д.5°. Доказательство замечания к теореме 3.2.2.** Доказательство почти дословно совпадает с доказательством теоремы 3.2.2. Различие состоит в выборе передаточных функций  $W_y^0$  и  $W_u^0$  и параметра  $\Psi_+$ . При  $e(\lambda) \neq 1$  и  $d(\lambda) \neq 1$  передаточные функции  $W_y$ ,  $W_u$  удовлетворяют, как нетрудно видеть, вместо (1.45) соотношению  $adW_y - bdW_u = e$ , или  $adW_y e^{-1} - bdW_u e^{-1} = 1$ . Д.-р.ф.  $W_y e^{-1}$  и  $W_u e^{-1}$  — устойчивые ввиду устойчивости обоих сомножителей. По теореме 3.1.1 пара таких функций может быть параметризована в виде  $W_y e^{-1} = W_y^0 e^{-1} + b\Psi$ ,  $W_u e^{-1} = W_u^0 e^{-1} + a\Psi$ , где  $\Psi$  — устойчивая д.-р.ф.,  $W_y^0$  и  $W_u^0$  — устойчивые д.-р.ф., удовлетворяющие уравнению  $adW_y^0 e^{-1} - bdW_u^0 e^{-1} = 1$ . Итак,  $W_y = W_y^0 + b_- \Psi_+$ ,  $W_u = W_u^0 + \frac{a}{b_+} \Psi_+$ , где  $\Psi_+ = \Psi b_+ e$  — устойчивая д.-р.ф. Легко проверить, используя определение  $\alpha_-$  и  $\beta_-$  и условие  $\deg \alpha_- < m = \deg b_-$ , что в качестве  $W_y^0$ ,  $W_u^0$  можно взять  $W_y^0 = \alpha_-$ ,  $W_u^0 = \beta_- b_-^{-1} d^{-1}$ . Аналогичное представление  $W_y$ ,  $W_u$  было использовано в доказательстве теоремы

3.2.2, и дальнейшие рассуждения показывают, что выбранный регулятор является оптимальным.

**3.Д.6°. Доказательство теоремы 3.3.1.** Простоты ради доказательство приведем при  $s = 0$ . В фильтре (1.3) можно считать  $d(\lambda) \equiv 1$ , т. е. помехи  $v_t$  порождаются уравнением  $v_t = e(\nabla) w_t$ . Действительно, в противном случае достаточно к уравнению (3.1) применить оператор  $d(\nabla)$ . В силу устойчивости полинома  $d(\lambda)$  стабилизируемость объекта при этом сохранится.

Приведем уравнение (3.1) к стандартной форме

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + f_{t+1}, \quad y_t = C^*x_t, \quad f_{t+1} = Dv_{t+1}, \quad (\text{Д.16})$$

где  $B, C, D$  — векторы и  $A$  — матрица вычисляются в соответствии с формулами (1.11). Объект (Д.16) при этом стабилизируемый.

Введем неотрицательную квадратичную форму  $F(x, u) = Q(y, u)$  и функционал качества

$$J = \overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} t^{-1} \sum_{s=0}^t M F(x_s, u_s). \quad (\text{Д.17})$$

Поставим задачу синтеза оптимального по  $J$  регулятора в классе допустимых управлений  $\mathcal{U}_0$ . Пусть  $W(\lambda) = b(\lambda) a(\lambda)^{-1}$  — передаточная функция от  $u$  к  $y$ . Поскольку выполняется частотное условие

$$Q_{11}W(\lambda)W(\lambda^{-1}) + 2Q_{12}\operatorname{Re} W(\lambda^{-1}) + Q_{22} > 0,$$

то в силу теоремы 3.1.2 существуют симметричная матрица  $H$ , вектор  $h$  и постоянная  $\kappa$  такие, что при любых векторах  $x$  и  $u$  выполняется равенство

$$(Ax + Bu)^*H(Ax + Bu) - x^*Hx = \\ = Q(y, u) - \kappa |h^*x - u|^2, \quad (\text{Д.18})$$

причем матрица  $A_0 = A + Bh^*$  не имеет собственных значений при  $|\lambda| \geq 1$ . «Расширим» множество  $\mathcal{U}_0$ , допуская управление  $u_t = \mathcal{U}(x_0^t, w_0^t, u_0^{t-1})$ , т. е. предполагая что помеха «в прошлом и настоящем» доступна измерению; новое множество допустимых управлений обозначим через  $\mathcal{U}'_0$ .

**Лемма 3.Д.3.** *Оптимальное (по функционалу (Д.17)) в множестве  $\mathcal{U}'_0$  управление имеет вид*

$$u_t \stackrel{\text{def}}{=} u^{\text{opt}}(x_0^t, w_0^t, u_0^{t-1}) = h^* x_t + \gamma(\nabla) D w_t, \quad (\text{Д.19})$$

$$\text{где } \gamma(\lambda) = \sum_{l=0}^{p-1} \gamma_l \lambda^l, \quad \gamma_l = \kappa^{-2} \sum_{q=0}^{p-(l+1)} e_{q+l+1} B^* (A_0^*)^q H.$$

Доказательство леммы основано на рассмотрении функции  $V(x, t) = x^* H x + \xi_t^* x$ , где  $\xi_t = 2 \sum_{l=t}^{\infty} (A_0)^{l-t+1} H D v_{l+1}$ . Учитывая формулу (Д.18) и то, что для  $\xi_t$  выполняется соотношение  $\xi_t = A_0^* [\xi_{t+1} + 2 H D v_{t+1}]$ , для приращения  $\Delta V_t = V(x_{t+1}, t+1) - V(x_t, t)$  после элементарных преобразований получим формулу

$$\begin{aligned} \Delta V_t &= Q(y_t, u_t) - \kappa^2 [u_t - h^* x_t - \\ &\quad - \kappa^{-2} (2 H D v_{t+1} + \xi_{t+1})^* B / 2]^2 + \zeta_t, \\ \zeta_t &\stackrel{\text{def}}{=} B^* (H D v_{t+1} + \xi_{t+1}) v_{t+1} - \kappa^{-2} [(2 H D v_{t+1} + \xi_{t+1})^* B]^2 H. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} t^{-1} \sum_{l=1}^t M Q(y_l, u_l) &= \\ &= t^{-1} \kappa^2 \sum_{l=1}^t M |u_l - h^* x_l - \kappa^{-2} (2 H D v_{l+1} + \xi_{l+1})^* B / 2|^2 + \\ &\quad + t^{-1} [M V(x_{t+1}, t+1) - V(x_0, 0)] - t^{-1} \sum_{l=0}^t M \xi_l. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части полученного соотношения стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , последнее слагаемое не зависит от управлений. Поэтому оптимальное управление должно минимизировать первое неотрицательное слагаемое. Покажем, что существует допустимое управление, обращающее это слагаемое в нуль. Действительно, используя свойства условных усреднений, получим

$$\begin{aligned} M |u_l - h^* x_l - \kappa^{-2} (2 H D v_{l+1} + \xi_{l+1})^* B / 2|^2 &= \\ &= M \{u_l - h^* x_l - [2 \kappa^2]^{-1} B^* M \{(2 H D v_{l+1} + \xi_{l+1}) |w_0^l\}\}^2 + \\ &\quad + M \|[2 \kappa^2]^{-1} B^* [M \{(2 H D v_{l+1} + \xi_{l+1}) |w_0^l\}\} - (2 H D v_{l+1} + \xi_{l+1})]^2\}. \end{aligned}$$

Здесь были использованы свойства  $M \{x_l | w_0^l\} = x_l$ ,

$M\{u_l \mid w_0^l\} = u_l$ . Наименьшее значение выражения в левой части полученного равенства достигается при

$$u_l = h^*x_l + [2\kappa^2]^{-1}B^*M[(2HDv_{l+1} + \xi_{l+1}) \mid w_0^l] \quad (\text{Д.20})$$

и определяет допустимое управление  $u_l$ . Из формулы для  $\xi_l$  следует, что  $2HDv_{l+1} + \xi_{l+1} = 2 \sum_{t=l}^{\infty} (A_0)^{*l-t} HDv_{t+1}$ .

Учитывая, что  $v_{l+1} = e(\nabla)w_{l+1}$  и  $w_l$  центрированы и независимы, элементарными преобразованиями из (Д.20) получаем (Д.19). Лемма доказана. Переходим непосредственно к доказательству теоремы. Для этого преобразуем (Д.19) к виду, в котором явно не входят величины  $w_0^l$ . (Тем самым будет показано, что оптимальные управления в множествах  $\mathcal{U}_0$  и  $\mathcal{U}_0'$  совпадают.) Действуя на (Д.19) оператором  $e(\nabla)$ , получим  $e(\nabla)u_t = h^*e(\nabla)x_t + \gamma(\nabla)f_t$ . Исключая  $f_t$  из уравнения (Д.16), найдем искомое уравнение регулятора

$$[e(\nabla) + \gamma(\nabla)\nabla B]u_t = [e(\nabla)h^* + \gamma(\nabla)(I + \nabla A)]x_t. \quad (\text{Д.21})$$

Поскольку полином  $e(\lambda) + \lambda\gamma(\lambda)B$  при  $\lambda = 0$  равен  $e_0 \neq 0$ , то уравнение (Д.21) определяет линейный закон управления, в котором  $u_t = \mathcal{U}(x_0^t, u_0^{t-1})$ . Этот закон определяет допустимое управление из множества  $\mathcal{U}_0$ , так как регулятор (Д.21) — стабилизирующий для ОУ (Д.16). Покажем это, вычислив характеристический полином системы управления (Д.16), (Д.21). Используя лемму Шура (см. [24]), имеем

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} I - \lambda A & \lambda B \\ e(\lambda)h^* + \gamma(\lambda)(I - \lambda A) & e(\lambda) + \lambda\gamma(\lambda)B \end{pmatrix} = \\ &= \det(I - \lambda A)[e(\lambda) + \lambda\gamma(\lambda)B - \\ &- [e(\lambda)h^* + \gamma(\lambda)(I - \lambda A)](I - \lambda A)^{-1}\lambda B] = \\ &= e(\lambda) \det(I - \lambda A_0). \end{aligned}$$

В силу отмеченных выше свойств матрицы  $A_0$  и устойчивости полинома  $e(\lambda)$  убеждаемся в устойчивости полинома  $g(\lambda)$ . Уравнение (Д.21) может быть выражено в терминах  $y_t$ , если воспользоваться формулами, с помощью которых совершился переход от (3.1) к (Д.16), что при-

водит к линейному регулятору (3.6). Теорема доказана при  $s = 0$ ; случай  $s > 0$  рассматривается аналогично.

**3.Д.7°. Доказательство леммы 3.3.1.** Для системы управления (3.1), (3.6) со стабилизирующим регулятором и стационарной помехой  $v_t$  решение  $(y_t, u_t)$  может быть представлено как суперпозиция затухающих во времени собственных колебаний  $(\tilde{y}_t, \tilde{u}_t)$  системы, определяемых начальными данными, и частным решением — стационарным процессом  $(\hat{y}_t, \hat{u}_t)$ , не зависящих от выбора начальных данных

$$y_t = \tilde{y}_t + \hat{y}_t, \quad u_t = \tilde{u}_t + \hat{u}_t, \quad (\text{Д.22})$$

причем  $\{\hat{y}_t\}$  — центрированный процесс, если этим свойством обладает процесс  $\{v_t\}$ ;  $\{\tilde{y}_t\}$  — детерминированная последовательность. Тогда  $M_{y_t} \bar{y}_t = \tilde{y}_t \bar{y}_t + M_{\hat{y}_t} \bar{y}_t$ , аналогично,  $M_{u_t} \bar{u}_t = \tilde{u}_t \bar{u}_t + M_{\hat{u}_t} \bar{u}_t$ ,  $M_{y_t} \bar{u}_t = \tilde{y}_t \bar{u}_t + M_{\hat{y}_t} \bar{u}_t$ . Поскольку первые слагаемые этих выражений стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , то в функционале (3.2) под  $y_t$ ,  $u_t$  можно понимать стационарные составляющие  $\hat{y}_t$ ,  $\hat{u}_t$ . В соответствии с известной теоремой Хинчина для стационарного процесса  $\{v_t\}$  справедливо представление

$$v_t = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} e^{i\mu t} dE_\mu, \text{ где } E_\mu \text{ — случайный процесс с некор-}$$

релизованными приращениями, для которого  $MdE_\mu d\bar{E}_\mu = p(e^{-i\mu}) d\mu$ ;  $p(\lambda)$  — спектральная плотность процесса  $v_t$ , имеющая вид (4.50). Тогда стационарные составляющие  $\hat{y}_t$ ,  $\hat{u}_t$  решения системы (3.1), (3.6) могут быть представлены в виде

$$\hat{y}_t = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} W_y(e^{-i\mu}) dE_\mu, \quad \hat{u}_t = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} W_u(e^{-i\mu}) dE_\mu, \quad (\text{Д.23})$$

где  $W_y(\lambda)$ ,  $W_u(\lambda)$  — передаточные функции (4.43). Из (Д.23) получаем

$$\begin{aligned} M\hat{y}_t \bar{y}_t &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} W_y(e^{-i\mu}) W_y(e^{i\mu}) p(e^{-i\mu}) d\mu = \\ &= (2\pi)^{-1} \oint W_y(\lambda) W_y(-\lambda) p(\lambda) d\lambda / \lambda; \end{aligned}$$

аналогично вычисляются  $M\hat{y}_t \bar{\hat{u}}_t$ ,  $M\hat{u}_t \bar{\hat{u}}_t$ , что с учетом (3.2) приводит к (3.7). Лемма доказана.

**3.Д.8°. Доказательство теоремы 3.3.2.** Учитывая (3.42), (3.15), (3.18), перепишем (3.7) в виде

$$J = (2\pi i)^{-1} \oint [D(\lambda) - \lambda^s R_-(\lambda)] [D(\lambda^{-1}) - \lambda^{-s} R_-(\lambda^{-1})] d\lambda/\lambda + \\ + (2\pi i)^{-1} \oint S(\lambda) d\lambda/\lambda, \quad (\text{Д.24})$$

где

$$D(\lambda) = \sigma_w \Pi(\lambda) \Psi(\lambda) e(\lambda) d(\lambda)^{-1} - \lambda^s R_+(\lambda). \quad (\text{Д.25})$$

По условию д.-р.ф.  $\Psi(\lambda)$  при  $\lambda = 0$  имеет корень кратности не ниже  $s$ , по построению (3.15) этим же свойством обладает и д.-р.ф.  $\lambda^s R_+(\lambda)$ . Поэтому устойчивая д.-р.ф.  $D(\lambda)$  имеет при  $\lambda = 0$  корень кратности  $s$ . Поскольку  $R_-(\lambda)$  — правильная д.-р.ф., то д.-р.ф.  $\lambda^{-s} D(\lambda) R_-(\lambda^{-1})$  — устойчивая и обращается в нуль при  $\lambda = 0$ . По теореме о вычетах

$$(2\pi i)^{-1} \oint D(\lambda) \lambda^{-s} R_-(\lambda^{-1}) d\lambda/\lambda = D(\lambda) \lambda^{-s} R_-(\lambda^{-1})|_{\lambda=0} = 0,$$

аналогично,  $(2\pi i)^{-1} \oint D(\lambda^{-1}) \lambda^s R_-(\lambda) d\lambda/\lambda = 0$ , т. е. (Д.24) преобразуется к виду

$$J = \frac{1}{2\pi i} \oint D(\lambda) D(\lambda^{-1}) d\lambda/\lambda + \frac{1}{2\pi i} \oint [|R_-(\lambda)|^2 + S(\lambda)] d\lambda/\lambda. \quad (\text{Д.26})$$

Второе слагаемое в (Д.26) от  $\Psi(\lambda)$  не зависит, а первое — неотрицательно. Поэтому  $\min J$  достигается при  $D(\lambda) = 0$ , что приводит к (3.16), (3.17).

**3.Д.9°. Доказательство теоремы 3.3.3.** Покажем, что в силу теоремы 3.3.2 оптимальный линейный регулятор может быть реализован способом, указанным в теореме 3.3.3. Простоты ради будем предполагать, что  $v(\lambda) = \langle a(\lambda), b(\lambda) \rangle = 1$ . Тогда, обозначая для краткости  $\Gamma(\lambda) = \sigma_w e(\lambda)/d(\lambda)$ , в силу (3.13), (3.10), (3.19) получим

$$R(\lambda) = -\frac{\Gamma(\lambda)}{\Pi(\lambda^{-1})} \{Q_{11} b(\lambda^{-1}) W_y^0(\lambda) + \\ + Q_{12} [a(\lambda^{-1}) W_y^0(\lambda) + b(\lambda^{-1}) W_u^0(\lambda)] + Q_{22} a(\lambda^{-1}) W_u^0(\lambda)\} = \\ = -\Gamma(\lambda) [\Pi_*(\lambda)]^{-1} \{Q_{11} b_*(\lambda) W_y^0(\lambda) + \\ + Q_{12} [a_*(\lambda) W_y^0(\lambda) + b_*(\lambda) W_u^0(\lambda)] + Q_{22} a_*(\lambda) W_u^0(\lambda)\}. \quad (\text{Д.27})$$

Используя это соотношение, а также формулы (3.13), (3.16), (3.18), (Д.25), получим

$$\begin{aligned} W_y(\lambda) &= W_y^0(\lambda) + b(\lambda) \Psi(\lambda) = \\ &= W_y^0(\lambda) + b(\lambda) \Gamma(\lambda)^{-1} \Pi(\lambda)^{-1} [R_-(\lambda) - \lambda^s R_+(\lambda)] = \\ &= W_y^0(\lambda) - \frac{b(\lambda)}{\Pi(\lambda) \Pi_*(\lambda)} \{Q_{11} b_*(\lambda) W_y^0(\lambda) + Q_{12} [a_*(\lambda) W_y^0(\lambda) + \\ &+ b_*(\lambda) W_u^0(\lambda)] + Q_{22} a_*(\lambda) W_u^0(\lambda)\} - \frac{\lambda^s b(\lambda) R_+(\lambda)}{\Gamma(\lambda) \Pi(\lambda)}. \quad (\text{Д.28}) \end{aligned}$$

Учитывая (3.11), (3.10), (3.18), убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \Pi(\lambda) \Pi_*(\lambda) &= Q_{11} b_*(\lambda) b(\lambda) + \\ &+ Q_{12} [b_*(\lambda) a(\lambda) + b(\lambda) a_*(\lambda)] + Q_{22} a_*(\lambda) a(\lambda). \end{aligned}$$

Из (Д.28) с учетом тождества  $a(\lambda) W_y^0(\lambda) - b(\lambda) W_u^0(\lambda) = 1$  и формул (3.19) теперь получаем

$$\begin{aligned} W_y(\lambda) &= \\ &= \frac{Q_{12} b_*(\lambda) + Q_{22} a_*(\lambda)}{\Pi(\lambda) \Pi_*(\lambda)} - \frac{b(\lambda) \lambda^s R_+(\lambda)}{\Gamma(\lambda) \Pi(\lambda)} = \frac{K_1(\lambda) - b(\lambda) d(\lambda) K(\lambda)}{\sigma_w e(\lambda) \Pi(\lambda) \Pi_*(\lambda)}, \quad (\text{Д.29}) \end{aligned}$$

где обозначено  $K(\lambda) = \lambda^s \Pi_*(\lambda) R_+(\lambda)$ . Формулу (3.13) можно переписать в виде

$$R(\lambda) = -\sigma_w \frac{\lambda^r N_2(\lambda^{-1}) e(\lambda)}{\Pi_*(\lambda)} \frac{d(\lambda)}{d(\lambda)} = -\sigma_w \frac{N_{2*}(\lambda) e(\lambda)}{\lambda^s \Pi_*(\lambda) d(\lambda)}.$$

Из (3.15) тогда следует, что все особенности д.-р.ф.  $R_-(\lambda)$  с учетом кратности находятся среди корней полинома  $\lambda^s \Pi_*(\lambda)$ , так что  $K(\lambda)$  — полином, причем

$$\deg K(\lambda) < \deg \Pi_*(\lambda) + s = r + s. \quad (\text{Д.30})$$

Так как  $W_y(\lambda)$  — устойчивая д.-р.ф., то из формулы (Д.29) следует, что полином в числителе должен делиться нацело на  $\lambda^s \Pi_*(\lambda)$ . Обозначая результаты этого деления через  $\sigma_w \alpha(\lambda)$ , приходим к уравнению (3.20). Аналогично устанавливается формула

$$W_u(\lambda) = \frac{K_2(\lambda) - a(\lambda) d(\lambda) K(\lambda)}{\sigma_w \Pi(\lambda) \Pi_*(\lambda) e(\lambda)}. \quad (\text{Д.31})$$

Так как  $W_u(\lambda)$  — устойчивая д.-р.ф., имеющая при

$\lambda = 0$  корень кратности  $s$ , то из (Д.31) следует, что числитель должен делиться нацело на  $\lambda^s \Pi_*(\lambda)$ . Обозначая результат этого деления через  $\sigma_w \tilde{\beta}(\lambda)$ , приходим к уравнению (3.21). Теорема 3.3.3 доказана.

3.Д.10°. Доказательство теоремы 3.3.4. Без ограничения общности достаточно доказать теорему 3.3.4 при  $s = 0$ . Действительно, для функционала (3.25) задача о минимизации в множестве допустимых управлений  $\mathcal{U}_s$  (см. определение 3.3.1) заменой  $y'_t = \nabla^s y_t$  тривиально сводится к аналогичной задаче для множества допустимых управлений  $\mathcal{U}_0$ , но для ОУ вида  $a(\nabla)y'_t = = \nabla^s b(\nabla)u_t + \nabla^s v_t$ . Таким образом, достаточно решить задачу оптимизации без запаздывания в измерении, но при запаздывании в управлении, равном  $(k + + s)$ . Решение последней задачи имеет вид  $\alpha(\nabla)u_t = = \beta(\nabla)y_t$ , где  $\alpha(\nabla)$ ,  $\beta(\nabla)$  — полиномы оптимального в множестве  $\mathcal{U}_0$  регулятора. Оптимальный в множестве  $\mathcal{U}_s$  регулятор будет иметь тогда вид  $\alpha(\nabla)u_t = \nabla^s \beta(\nabla)y_t$ . Итак, будем полагать  $s = 0$  в условиях теоремы 3.3.4.

Воспользуемся процедурой теоремы 3.3.3. В рассматриваемом случае  $Q_{12} = Q_{22} = 0$ ,  $Q_{11} = 1$ , а потому из (3.19) следует, что  $K_1(\lambda) \equiv 0$ . Из уравнения (3.20) тогда находим

$$\sigma_w b_{*+}(\lambda) \alpha(\lambda) = -b_+(\lambda) d(\lambda) K(\lambda), \quad (\text{Д.32})$$

где  $b_{*+}(\lambda) = \lambda^l b_+(\lambda^{-1})$ ,  $l = \deg b_+(\lambda)$ . Так как полином  $b_{*+}(\lambda)$  не имеет корней вне единичного круга, а полином  $b_+(\lambda) d(\lambda)$  — устойчивый, то из (Д.32) следует, что  $\alpha(\lambda)$  имеет вид

$$\alpha(\lambda) = b_+(\lambda) d(\lambda) \varkappa(\lambda), \quad (\text{Д.33})$$

где  $\varkappa(\lambda)$  — некоторый полином. Само соотношение (Д.32) тогда записывается в виде

$$K(\lambda) = -\sigma_w b_{*+}(\lambda) \varkappa(\lambda). \quad (\text{Д.34})$$

Так как  $\deg K(\lambda) < r$ , то из (Д.34) следует, что  $\deg \varkappa(\lambda) < \deg b_-(\lambda)$ , поскольку  $r = \deg b_+(\lambda) + + \deg b_-(\lambda)$  в силу (1.32). Исключая  $K(\lambda)$  в силу (Д.34) из соотношения (3.21) и учитывая (3.19) (при  $s = 0$ ), найдем что полином  $\varkappa(\lambda)$  должен удовлетворять соотношению

$$a(\lambda) d(\lambda) \varkappa(\lambda) - e(\lambda) b_*^{(-)}(\lambda) = \beta(\lambda) b_-(\lambda). \quad (\text{Д.35})$$

Поскольку полиномы  $b_-(\lambda)$  и  $a(\lambda) d(\lambda)$  взаимно несократимы, то в силу леммы 3.3.1 условие  $\deg \kappa(\lambda) < \deg b_-(\lambda)$  однозначно определяет полиномы  $\kappa(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$ , удовлетворяющие соотношению (Д.35). Процедуру определения полинома  $\kappa(\lambda)$  в данном случае можно уточнить. Пусть  $F(\lambda)$  — полином такой, что остаток от деления  $F(\lambda) b_*^{(-)}(\lambda)$  на  $b_-(\lambda)$  равен  $\kappa(\lambda)$ , т. е.

$$F(\lambda) b_*^{(-)}(\lambda) = b_-(\lambda) \pi(\lambda) + \kappa(\lambda), \quad (\text{Д.36})$$

где  $\pi(\lambda)$  — полином. Исключая  $\kappa(\lambda)$  в силу (Д.36) в уравнении (Д.35), найдем, что полином  $F(\lambda)$  должен удовлетворять соотношению

$$\begin{aligned} b_*^{(-)}(\lambda) [a(\lambda) d(\lambda) F(\lambda) - e(\lambda)] &= \\ &= b_-(\lambda) \{\beta(\lambda) + a(\lambda) d(\lambda) \pi(\lambda)\}. \end{aligned} \quad (\text{Д.37})$$

Из (Д.37) следует, что полином в квадратных скобках должен делиться нацело на  $b_-(\lambda)$ . Обозначая результат этого деления через  $G(\lambda)$ , получим

$$a(\lambda) d(\lambda) F(\lambda) - e(\lambda) = G(\lambda) b_-(\lambda). \quad (\text{Д.38})$$

Если  $F(\lambda)$ ,  $G(\lambda)$  — произвольные полиномы, удовлетворяющие (Д.38), то полином  $\kappa(\lambda)$ , определяемый соотношением (Д.36), удовлетворяет (Д.33) и условию  $\deg \kappa(\lambda) < \deg b_-(\lambda)$ . В силу леммы 3.1.1 соотношение (Д.38) однозначно определяет полиномы  $F(\lambda)$ ,  $G(\lambda)$ , если ограничиться условием

$$\deg F(\lambda) < \deg b_-(\lambda). \quad (\text{Д.39})$$

Полином  $\beta(\lambda)$  теперь в силу (Д.37) примет вид

$$\beta(\lambda) = b_*^{(-)}(\lambda) G(\lambda) - a(\lambda) d(\lambda) \pi(\lambda). \quad (\text{Д.40})$$

Формулы (Д.33), (Д.40) определяют оптимальный регулятор и совпадают (при  $s = 0$ ) с формулами, приведенными в теореме 3.3.4. Учитывая замечание, связанное с наличием запаздывания в измерении, убеждаемся в справедливости теоремы 3.3.4.

**3.Д.11°. Доказательство теоремы 3.П.1.** Воспользуемся преобразованием Лапласа (в дискретном варианте) для непосредственного интегрирования системы (П.1), (П.3). Для этой системы ряды

$$\hat{y}(\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t y_t, \quad \hat{u}(\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t u_t, \quad \hat{v}(\lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t v_t \quad (\text{Д.41})$$

сходятся равномерно в некоторой окрестности точки  $\lambda = 0$  и определяют аналитические в этой окрестности вектор-функции  $\hat{y}(\lambda)$ ,  $\hat{u}(\lambda)$ ,  $\hat{v}(\lambda)$ . ( $v_t$  для простоты предполагается ограниченной вектор-функцией.) Найдем соотношение, связывающее введенные функции. Умножая обе части уравнений (П.1), (П.3) на  $\lambda^t$  и суммируя по  $t$ , получим

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t a(\nabla) y_t &= \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t b(\nabla) u_t + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t v_t, \\ \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \alpha(\nabla) u_t &= \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \beta(\nabla) y_t.\end{aligned}\quad (\text{Д.42})$$

Проводя очевидные преобразования, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t a(\nabla) y_t &= \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t y_t + \lambda a_1 \sum_{t=-1}^{\infty} \lambda^t y_t + \dots + \lambda^r a_r \sum_{t=-r}^{\infty} \lambda^t y_t = \\ &= a(\lambda) \hat{y}(\lambda) + \varphi_1(\lambda, y_{-r}^{-1}), \\ \varphi_1(\lambda, y_{-r}^{-1}) &= a_1 y_{-1} + \dots + \lambda^r a_r \sum_{s=-r}^{-1} \lambda^s y_s,\end{aligned}$$

где  $\hat{y}(\lambda)$  определяется по (Д.41). Аналогично,

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t b(\nabla) u_t &= b(\lambda) \hat{u}(\lambda) + \varphi_1(\lambda, u_{-r}^{-1}), \\ \varphi_1(\lambda, u_{-r}^{-1}) &= b_1 u_{-1} + \dots + \lambda^r b_r \sum_{t=-r}^{-1} \lambda^t u_t, \\ \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \alpha(\nabla) u_t &= \alpha(\lambda) \hat{u}(\lambda) + \varphi_2(\lambda, u_{-p}^{-1}), \\ \varphi_2(\lambda, u_{-p}^{-1}) &= a_1 u_{-1} + \dots + \lambda^p a_p \sum_{s=-p}^{-1} \lambda^s u_s, \\ \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^s \beta(\nabla) y_t &= \beta(\lambda) \hat{y}(\lambda) + \varphi_2(\lambda, y_{-p}^{-1}), \\ \varphi_2(\lambda, y_{-p}^{-1}) &= \beta_1 y_{-1} + \dots + \lambda^p \beta_p \sum_{s=-p}^{-1} \lambda^s y_s.\end{aligned}$$

Учитывая полученные соотношения, найдем из (Д.42)

$$\begin{aligned}a(\lambda) \hat{y}(\lambda) - b(\lambda) \hat{u}(\lambda) &= w_1(\lambda) + \hat{v}(\lambda), \\ \alpha(\lambda) \hat{u}(\lambda) - \beta(\lambda) \hat{y}(\lambda) &= w_2(\lambda),\end{aligned}\quad (\text{Д.43})$$

где

$$\begin{aligned} w_1(\lambda) &= \varphi_1(\lambda, u_{-r}^{-1}) - \varphi_1(\lambda, y_{-r}^{-1}), \\ w_2(\lambda) &= \varphi_2(\lambda, y_{-p}^{-1}) - \varphi_2(\lambda, u_{-p}^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{Д.44})$$

Решая систему (Д.43), находим

$$\begin{aligned} \hat{y}(\lambda) &= W_1(\lambda) \hat{v}(\lambda) + W_1(\lambda) [w_1(\lambda) + b(\lambda) \alpha(\lambda)^{-1} w_2(\lambda)], \\ \hat{u}(\lambda) &= W_2(\lambda) \hat{v}(\lambda) + W_2(\lambda) [w_1(\lambda) + b(\lambda) \alpha(\lambda)^{-1} w_2(\lambda)] + \\ &\quad + \alpha(\lambda)^{-1} w_2(\lambda), \end{aligned} \quad (\text{Д.45})$$

где  $W_1(\lambda)$ ,  $W_2(\lambda)$  определяются формулами (П.9). Так как  $w_1(\lambda)$ ,  $w_2(\lambda)$  — полиномы по  $\lambda$  и  $\alpha^{-1}(0) = I_m$ ,  $W_1(0) = I_n$ ,  $W_2(0)$  существует, то соотношения (Д.45) действительно определяют функции, аналитические в некоторой окрестности точки  $\lambda = 0$  (если  $\hat{v}(\lambda)$  — аналитическая в нуле функция).

Умножая первое соотношение (Д.41) на  $\lambda^s$  и интегрируя по окружности достаточно малого радиуса с центром в начале координат, получим

$$(2\pi i)^{-1} \oint \lambda^{-s} \hat{y}(\lambda) d\lambda/\lambda = \sum_{t=0}^{\infty} (2\pi i)^{-1} \oint \lambda^{t-s} d\lambda/\lambda y_t = y_s.$$

Учитывая это соотношение, из (Д.45) находим

$$\begin{aligned} y_t &= (2\pi i)^{-1} \oint W_1(\lambda) \lambda^{-t} \hat{v}(\lambda) d\lambda/\lambda + \\ &\quad + (2\pi i)^{-1} \oint W_1(\lambda) w_1(\lambda) \lambda^{-t} d\lambda/\lambda + \\ &\quad + (2\pi i)^{-1} \oint W_1(\lambda) b(\lambda) \alpha(\lambda)^{-1} W_2(\lambda) \lambda^{-t} d\lambda/\lambda. \end{aligned} \quad (\text{Д.46})$$

Аналогично выводится формула

$$\begin{aligned} u_t &= (2\pi i)^{-1} \oint W_2(\lambda) \lambda^{-t} \hat{v}(\lambda) d\lambda/\lambda + \\ &\quad + (2\pi i)^{-1} \oint W_2(\lambda) w_1(\lambda) \lambda^{-t} d\lambda/\lambda + \\ &\quad + (2\pi i)^{-1} \oint [W_2(\lambda) b(\lambda) + I_m] \alpha(\lambda)^{-1} w_2(\lambda) \lambda^{-t} d\lambda/\lambda. \end{aligned} \quad (\text{Д.47})$$

Формулы (Д.46), (Д.47) полностью определяют поведение во времени решений  $(y_t, u_t)$  системы (П.1), (П.3) при заданных начальных условиях и известных помехах. Контурные интегралы в (Д.46), (Д.47) могут быть вычислены

с помощью теоремы о вычетах. Так как вопрос о стабилизирующих свойствах регулятора (П.3) не связан со свойствами помехи  $v_t$ , положим  $v_t \equiv 0$ , что соответствует  $\hat{v}(\lambda) \equiv 0$  в формулах (Д.46), (Д.47). Для суждения о поведении полученных векторов  $y_t$ ,  $u_t$  при  $t \rightarrow \infty$  существен вопрос об особенностях дробно-рациональных функций (П.13). Так, например, если  $\lambda = \lambda_*$  — простой полюс функции  $W_1(\lambda)$ , то второй интеграл в правой части (Д.46) после применения теоремы о вычетах будет содержать слагаемое  $\text{Res } W_1(\lambda) |_{\lambda=\lambda_*} w_1(\lambda_*) \lambda_*^{-t-1}$ , имеющее экспоненциальный характер во времени. Это выражение стремится к нулю, если  $|\lambda_*| > 1$ . При кратном полюсе вычет определяется более сложно (экспоненциальный член умножается на полином по  $t$ ), но при  $t \rightarrow \infty$  это выражение по-прежнему стремится к нулю, если  $|\lambda_*| > 1$ . Таким образом, при устойчивости д.-р.ф. (П.13) убеждаемся, что  $y_t \rightarrow 0$ ,  $u_t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. система управления (П.1), (П.3) при отсутствии помех асимптотически устойчива. Нетрудно убедиться, что этот факт эквивалентен устойчивости характеристического полинома (П.6) системы (П.1), (П.3), т. е. регулятор (П.3) — стабилизирующий для ОУ (П.1). Теорема З.П.1 доказана. Отметим, что если хотя бы одна из функций (П.13) имеет особенность в замкнутом единичном круге, то после применения теоремы о вычетах в правых частях формул (Д.46), (Д.47) появятся слагаемые, которые не стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Это будет так, если выбором начальных условий можно добиться, чтобы векторы  $W_1(\lambda_*)$ ,  $W_2(\lambda_*)$  были отличны от нуля, что, как правило, имеет место. В этом смысле условие устойчивости д.-р.ф. (П.13) близко к необходимому условию существования стабилизирующего регулятора (П.3).

**З.Д.12°. Доказательство теоремы З.П.2.** Необходимость очевидна. Действительно, если регулятор (П.3) — стабилизирующий, то передаточные функции (П.9) не имеют особенностей в замкнутом единичном круге и удовлетворяют соотношению (П.12). Докажем достаточность. Пусть  $W_1(\lambda)$ ,  $W_2(\lambda)$  — устойчивые д.-р.ф., удовлетворяющие соотношению (П.12). Определим с их помощью регулятор (П.18) в соответствии с процедурой, изложенной в п. З.П.1. Для регулятора (П.18) определим передаточные функции (П.9). Покажем, что  $W_y(\lambda) = W_1(\lambda)$ ,

$W_u(\lambda) = W_2(\lambda)$ . Для этого воспользуемся матричным тождеством (2.Д.31). Применяя тождество (2.Д.31) к правой части первой формулы (П.9), получим  $[W_u(\lambda)]^{-1} = a(\lambda) - b(\lambda) \alpha(\lambda)^{-1} \beta(\lambda)$ . Но в силу процедуры построения регулятора (П.18) выполняется равенство  $a(\lambda)^{-1} \beta(\lambda) = W_2(\lambda) [W_1(\lambda)]^{-1}$ , т. е.  $[W_u(\lambda)]^{-1} = a(\lambda) - b(\lambda) W_2(\lambda) [W_1(\lambda)]^{-1} = [W_1(\lambda)]^{-1}$ . Здесь использовалось соотношение (П.12). Отсюда  $W_u(\lambda) = W_1(\lambda)$ . Аналогично, в силу второй формулы (П.9) устанавливается равенство  $W_u(\lambda) = W_2(\lambda)$ . Итак, устойчивые д.-р.ф.,  $W_1(\lambda)$ ,  $W_2(\lambda)$  являются передаточными функциями для системы управления (П.1), (П.3), (П.18). Для завершения доказательства теоремы З.П.2 в силу теоремы З.П.1 достаточно показать, что д.-р.ф.  $W_1(\lambda) b(\lambda) \alpha^{-1}(\lambda)$  и  $(W_2(\lambda) b(\lambda) + I_m) \alpha^{-1}(\lambda)$  — устойчивые. В силу (П.12) имеем  $W_1(\lambda) a(\lambda) = W_1(\lambda) b(\lambda) \times \times \alpha(\lambda)^{-1} = I_n$ . Но д.-р.ф.  $[W_1(\lambda) a(\lambda) - I_n]$  — устойчивая, т. е. д.-р.ф.  $W_1(\lambda) b(\lambda) \alpha(\lambda)^{-1} \beta(\lambda)$  — устойчивая. Аналогично, из (П.12) выводим  $W_2(\lambda) a(\lambda) W_1(\lambda) = = [W_2(\lambda) b(\lambda) + I_m] W_2(\lambda)$  и  $W_2(\lambda) a(\lambda) = [W_2(\lambda) b(\lambda) + + I_m] \alpha(\lambda)^{-1} \beta(\lambda) = [W_2(\lambda) b(\lambda) + I_m] P_1(\lambda)^{-1} \delta_1(\lambda)^{-1} \times \times \delta_2(\lambda) Q(\lambda)^{-1}$ . Предположим, что  $[W_2(\lambda) b(\lambda) + I_m] \alpha(\lambda)^{-1}$  — неустойчивая; тогда ее полюсы в замкнутом единичном круге определяются корнями диагональных элементов матрицы  $\delta_1(\lambda)$ . Так как соответствующие диагональные элементы матрицы  $\delta_1(\lambda)$ ,  $\delta_2(\lambda)$  взаимно несократимы, а полином  $Q(\lambda)$  имеет не зависящий от  $\lambda$  определитель, то отсюда следует неустойчивость д.-р.ф.  $W_2(\lambda) a(\lambda)$ , что противоречиво. Теорема З.П.2 доказана.

**З.Д.13°. Доказательство теоремы З.П.3.** Определяемые формулами (П.20) д.-р.ф.  $W_1(\lambda)$ ,  $W_2(\lambda)$  при устойчивой д.-р.ф.  $\Psi(\lambda)$ , очевидно, устойчивы и удовлетворяют соотношению (П.12). Покажем, что для произвольной пары  $\{W_1(\lambda), W_2(\lambda)\}$  устойчивых д.-р.ф., удовлетворяющих соотношению (П.12), справедливо представление (П.20) при некоторой устойчивой д.-р.ф.  $\Psi(\lambda)$ . Достаточно, очевидно, показать, что для произвольной пары  $R_1(\lambda)$ ,  $R_2(\lambda)$  устойчивых д.-р.ф., удовлетворяющих соотношению  $a(\lambda) R_1(\lambda) = b(\lambda) R_2(\lambda)$ , справедливо представление

$$\tilde{R}_1(\lambda) = R_1(\lambda) \Psi(\lambda), \quad \tilde{R}_2(\lambda) = R_2(\lambda) \Psi(\lambda), \quad (\text{Д.48})$$

где  $R_1(\lambda)$ ,  $R_2(\lambda)$  определяются формулами (П.24). В силу (П.19), (П.21), (П.22), (П.23) имеем

$$\begin{aligned} R_1(\lambda) &= a(\lambda)^{-1}b(\lambda) \tilde{R}_2(\lambda) = P_2(\lambda)^{-1}D(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}\tilde{R}_2(\lambda) = \\ &= P_2(\lambda)^{-1}D_1(\lambda)D_2(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}\tilde{R}_2(\lambda) = R_1(\lambda)\Psi(\lambda), \end{aligned}$$

где

$$\Psi(\lambda) = D_2(\lambda)Q_2(\lambda)^{-1}\tilde{R}_2(\lambda). \quad (\text{Д.49})$$

Так как соответствующие диагональные элементы матриц  $D_1(\lambda)$  и  $[D_2(\lambda)^T D_2(\lambda)]^{-1} D_2(\lambda)^T$  взаимно несократимы, а д.-р.ф.  $\tilde{R}_1(\lambda)$  — устойчивая, то  $\Psi(\lambda)$  — устойчивая д.-р.ф. Первое соотношение (Д.48) установлено. Разрешая (Д.49) относительно  $\tilde{R}_2(\lambda)$ , в силу (П.24) приходим ко второму уравнению (Д.48). Теорема З.П.3 доказана.

**З.Д.14°. Доказательство теоремы З.П.4.** Доказательство повторяет доказательство теоремы 3.3.2, если соответствующим образом использовать векторно-матричные операции. Поэтому ограничимся лишь кратким пояснением хода доказательства. Как и в скалярном варианте, устанавливаются формулы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M y_t y_t^* = (2\pi i)^{-1} \oint W_y(\lambda) \Gamma(\lambda) \Gamma(\lambda)^* W_y(\lambda)^* d\lambda/\lambda,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M y_t u_t^* = (2\pi i)^{-1} \oint W_y(\lambda) \Gamma(\lambda) \Gamma(\lambda)^* W_u(\lambda)^* d\lambda/\lambda,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M u_t u_t^* = (2\pi i)^{-1} \oint W_u(\lambda) \Gamma(\lambda) \Gamma(\lambda)^* W_u(\lambda)^* d\lambda/\lambda.$$

Если матрица  $R$  положительна и  $R^{1/2}$  — ее квадратный корень, то, используя равенство  $y^* R y = y^* R^{1/2} R^{1/2} y = = \text{Sp } R^{1/2} y y^* R^{1/2}$ , можем записать

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} M y_t^* Q_{11} y_t &= \text{Sp } Q_{11}^{1/2} \lim_{t \rightarrow \infty} M y_t y_t^* Q_{11}^{1/2} = \\ &= (2\pi i)^{-1} \oint \text{Sp } [Q_{11}^{1/2} W_u(\lambda) \Gamma(\lambda) \Gamma(\lambda)^* W_u(\lambda)^* Q_{11}^{1/2}] d\lambda/\lambda = \\ &= (2\pi i)^{-1} \oint \text{Sp } [\Gamma(\lambda)^* W_y(\lambda)^* Q_{11} W_y(\lambda) \Gamma(\lambda)] d\lambda/\lambda \end{aligned}$$

и аналогичные выражения для сочтаний  $u$  с  $u$  и  $u$  с  $u$ .

Это позволяет переписать функционал качества (П.7), (П.8) в виде

$$\begin{aligned} J = & (2\pi i)^{-1} \oint \text{Sp} \{ \Gamma(\lambda^{-1}) \Psi(\lambda^{-1}) [\Pi(\lambda^{-1}) - R(\lambda^{-1})]^T \times \\ & \times [\Pi(\lambda) \Psi(\lambda) \Gamma(\lambda) - R(\lambda)] \} d\lambda/\lambda + \\ & + (2\pi i)^{-1} \oint \text{Sp} \{ \Gamma(\lambda)^* N(W_1^0, W_2^0, W_1^0, W_2^0; \lambda) \Gamma(\lambda) - \\ & - R(\lambda)^* R(\lambda) \} d\lambda/\lambda. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения мало отличаются от скалярного случая. Повторяя их, убеждаемся в справедливости теоремы 3.П.4.

## ГЛАВА 4

### АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫМИ ОБЪЕКТАМИ (МЕТОД РЕКУРРЕНТНЫХ ЦЕЛЕВЫХ НЕРАВЕНСТВ)

В этой главе решаются задачи синтеза адаптивных регуляторов методом рекуррентных целевых неравенств. Рассматриваются линейные дискретные объекты управления, во-первых, потому, что они приобретают все большую практическую значимость в связи с усиливающейся тенденцией применения ЦВМ, и, во-вторых, потому, что для их описания используется более простой математический аппарат, а это дает возможность более выщукло и доступно иллюстрировать метод. В §§ 4.1, 4.2 решаются задачи адаптивного управления, аналогичные задачам §§ 3.2, 3.3, с тем отличием, что теперь коэффициенты объекта и спектральной плотности помехи известны не полностью. Неточное знание этих коэффициентов формулируется, в соответствии со сказанным в гл. 1, заданием класса  $\Xi$  объектов и помех (класс адаптации). Заметим, что обычно точное определение класса адаптации — заключительный этап синтеза адаптивного управления.

Синтез адаптивного управления начинается с постановки цели управления. Идеальной целью управления было бы построение оптимального управления (для функционалов, описанных в §§ 3.2, 3.3). Однако заранее ясно, что вряд ли такая цель управления достижима за конечное время, ибо оптимальный закон управления зависит от неизвестных коэффициентов. В связи с этим в § 4.1 ставится более скромная, но практически близкая цель управления — построение субоптимального управления. Последнее означает, что задается некоторый близкий к единице «уровень оптимальности»  $\rho$  ( $0 < \rho \leq 1$ ) и для построенного («субоптимального с уровнем  $\rho$ ») управле-

ния значение функционала качества будет «немного», именно не более чем в  $\rho^{-1}$  раз, хуже оптимального. (Оптимальному управлению соответствует  $\rho = 1$ .) Отметим, что указанная трактовка термина «субоптимальность» (его точное определение приведено в п. 4.1.1°) нетрадиционна; в технической литературе он часто используется без точного определения, в расплывчатом смысле «хороший», «почти оптимальный» закон управления.

В качестве сенсоров естественно взять тот набор величин, через которые выражается оптимальный или другой, желаемый закон управления. Неизвестные коэффициенты в этом законе управления следует заменить подстраиваемыми параметрами.

Далее, согласно методу рекуррентных целевых неравенств, следует преобразовать цель управления в рекуррентные неравенства для подстраиваемых параметров и использовать для решения этих неравенств один из конечно-сходящихся алгоритмов (КСА). Выбор КСА диктуется двумя основными соображениями: требованием реализуемости алгоритма (все необходимые величины должны выражаться через сенсоры и известные параметры) и необходимостью обеспечить сходимость алгоритма.

Осуществление подобной программы, как будет видно из дальнейшего, возможно лишь при выполнении некоторых условий, которыми и определяется класс адаптации. Основными из таких условий являются предположения об устойчивости объекта по управлению и об ограниченности помех, причем постоянная, ограничивающая помеху, должна быть известной, а сама помеха может быть нестационарной. При этих, а также при некоторых других, менее существенных предположениях будут построены адаптивные субоптимальные регуляторы. Уровень оптимальности  $\rho$  может быть любым, однако чем ближе к единице будет взято число  $\rho$  (т. е. чем «ближе», в соответствии с нашим требованием, должен быть закон управления, который строит адаптивный регулятор, к оптимальному закону управления), тем, вообще, будет больше время адаптации.

Изложению решений указанных задач посвящен § 4.1.

В п. 4.1.2° и 4.1.3° рассмотрены простейшие задачи, иллюстрирующие метод рекуррентных целевых неравенств. Более сложный случай рассмотрен в п. 4.1.4°.

Другие задачи, решаемые методом рекуррентных целевых неравенств, рассмотрены в § 4.2. Эти задачи объединены способом получения рекуррентных целевых неравенств. Этот способ отличен от способа § 4.1 и основан на идентификационном подходе. (Под идентификацией понимается здесь определение коэффициентов объекта и спектральной плотности помехи, асимптотически сколь угодно точное.)

Идентификационный подход вообще является весьма естественным в задачах адаптации. Действительно, если коэффициенты объекта (и спектральной плотности помехи) неизвестны, то естественна попытка найти их, а для управления использовать текущие оценки неизвестных коэффициентов. Этот подход действительно применим во многих задачах адаптации, например в задачах, рассмотренных в § 4.1 и 4.2, но при помехах других типов, например при стационарных помехах. (Должен быть выполнен ряд других условий.) Следует заметить, что обоснование такого подхода и выбор соответствующего алгоритма идентификации представляют часто значительные трудности.

Однако в задачах, рассмотренных в § 4.2 (так же, как и в § 4.1), сведения по помехе столь незначительны (например, известно лишь, что помеха ограничена), что идентификация оказывается принципиально невозможной. Тем более удивительной и интересной представляется возможность адаптивного (и даже субоптимального с любым заданным уровнем оптимальности) управления.

Адаптивность и субоптимальность регулятора означает, что с изменением условий функционирования (не выводящих из класса адаптации!) регулятор сам будет «находить» новый закон управления, сколь угодно близкий к оптимальному в новых условиях.

Подход § 4.2 можно лишь условно назвать идентификационным. Как и при строго идентификационном подходе, на каждом шаге определяются коэффициенты объекта и спектральной плотности помехи, и управление строится по найденным оценкам в предположении, что они истинны. Важно отметить, однако, что, в отличие от случая стационарной помехи, предельные коэффициенты, которые получаются в результате такой «идентификации», могут сильно отличаться от истинных значений.

Некоторые из изложенных в § 4.2 задач могут быть решены и методом § 4.1. Возможны также решения задач в ряде отношений более общих; эти решения получаются теми же методами, поэтому они остались нерассмотренными.

Целевые условия, требующие субоптимальности закона управления (для заданных функционала и уровня оптимальности), являются логически наиболее естественными и практически наиболее важными; они, однако, часто приводят к наиболее трудным задачам адаптации. Некоторые из таких задач остаются нерешенными и поныне. (Например, остаются нерешенными почти все задачи субоптимального адаптивного управления объектами, неустойчивыми по управлению.) В связи с этим в дальнейшем, в гл. 5—7, будут рассмотрены в основном более слабые целевые условия.

В § 4.3 приводятся результаты моделирования на ЭВМ процесса самообучения «робота-велосипедиста» езде на велосипеде — эта задача была описана выше, в § 1.1. Аналогичные эксперименты на ЭВМ были проведены и для многих других задач адаптации — для робототехнических задач, для ряда задач преследования и ряда задач управления технологическими процессами. Ограниченный объем книги не позволил привести их описание. Эксперименты на ЭВМ по моделированию адаптивных систем весьма поучительны: они дают возможность оценить работоспособность различных алгоритмов адаптации и наглядно иллюстрируют способность к самообучению адаптивных систем, проявляющуюся совсем по-разному.

В § 4.П излагаются сведения из теории абсолютной устойчивости о частотных критериях диссипативности дискретных систем, которые используются в процессе доказательств. В § 4.Д приведены доказательства теорем §§ 4.1, 4.2.

### § 4.1. Адаптивное субоптимальное управление линейными динамическими объектами

**4.1.1°. Субоптимальные регуляторы.** Рассмотрим дискретный, в общем случае нелинейный объект управления, состояние которого во все моменты времени однозначно определяется заданием управления  $u_0^\infty = [u_0, u_1, \dots]$ .

(Начальное состояние предполагается фиксированным.) Пусть  $J(u_0^\infty) > 0$  — подлежащий минимизации функционал, определяющий качество управления. Предполагается, что управление  $u_0^\infty$  принадлежит некоторому множеству  $\mathcal{U}$  допустимых управлений.

**Определение 4.1.1.** Пусть задано число  $\rho$  ( $0 \leq \rho \leq 1$ ). Управление  $\hat{u}_0^\infty \in \mathcal{U}$  называется *субоптимальным с уровнем оптимальности  $\rho$* , если

$$\inf_{u_0^\infty \in \mathcal{U}} J(u_0^\infty) \geq \rho J(\hat{u}_0^\infty). \quad (4.1)$$

Согласно (4.1) число  $\rho$  оценивает, насколько величина  $J(\hat{u}_0^\infty)$  близка к нижней границе функционала  $J(u_0^\infty)$ . Чем ближе  $\rho$  к единице, тем ближе  $J(\hat{u}_0^\infty)$  к минимально возможному значению. При  $\rho = 1$  управление  $\hat{u}_0^\infty$  оптимально:

$$J(\hat{u}_0^\infty) = \inf_{u_0^\infty \in \mathcal{U}} J(u_0^\infty).$$

Совершенно аналогично определяется субоптимальное управление (с уровнем  $\rho$ ) для законопредeterminedного функционала и для непрерывного объекта управления. Определение 4.1.1 очевидным образом распространяется на случай произвольной вещественной функции, заданной на абстрактном множестве.

Отметим, что, в соответствии с определением 4.1.1, при использовании термина «субоптимальное управление» нужно задавать (или хотя бы подразумевать заданным) уровень оптимальности  $\rho$ .

Часто в задачах оптимального управления задается не последовательность управляющих воздействий  $u_0^\infty$ , а закон управления («регулятор» или «обратная связь»), т. е. закон построения  $u_t$  в зависимости от конечного числа предыдущих значений управления и состояния. (Примерами могут служить регуляторы вида (3.2.7), (3.2.8) для задач, рассмотренных в § 3.2.) В этом случае говорят о *субоптимальности (с уровнем  $\rho$ ) регулятора или закона управления*.

Ниже будут рассмотрены функционалы  $J(u_0^\infty)$ , значение которых не изменяется, если изменить управление на

конечном интервале времени. Примером такого функционала служит функционал (3.2.14). Функционал (3.2.3) этому условию не удовлетворяет. Рассмотрение функционалов вида (3.2.14), а не вида (3.2.3), связано с тем, что в процессе адаптации в начальный период времени управление, естественно, может сильно отличаться от оптимального (для функционала (3.2.3) и других, аналогичных). Можно надеяться лишь, что спустя конечный промежуток времени (время адаптации) управление, построенное адаптивным регулятором, будет близким к оптимальному.

В следующих пунктах для адаптивных вариантов задачи § 3.2 для функционала (3.2.14) будет построено адаптивное и субоптимальное (с заданным уровнем  $\rho$ ) управление. (Чем ближе  $\rho$  к единице, тем вообще будет больше время адаптации.) Начнем с рассмотрения самого простого случая.

**4.1.2°. Скалярный объект в простейшем случае.** Рассмотрим ту же задачу, что и в п. 3.2.2°, предполагая, однако, что коэффициенты объекта управления известны не полностью. Сведения о коэффициентах, которые необходимо знать (класс адаптации), будут естественным образом выявлены в процессе решения задачи.

а) *Содержательная постановка задачи.* Рассматривается скалярный дискретный объект

$$y_t + a_1 y_{t-1} + \dots + a_r y_{t-r} = b_1 u_{t-1} + \dots + b_r u_{t-r} + v_t, \quad (1.2)$$

где  $b_1 \neq 0$ . Таким образом, запаздывание в управлении минимально:  $k = 1$ . Предполагается, как и в § 3.2, что в (1.2)  $v_t$  — нерегулярное в  $[-C, C]$  ограниченное возмущающее воздействие: выполнено

$$|v_t| \leq C, \quad (1.3)$$

и в остальном значения  $v_t$  произвольны. Класс всевозможных возмущений  $v_t$  указанного вида, как и в § 3.2, обозначим через  $\mathfrak{W}$ . (В обозначениях п. 3.2.1°  $d(\lambda) \equiv 1$ ,  $v_t \equiv w_t$ .) Пусть, как и в п. 3.2.2°, допустимыми являются управления, в которых  $u_t$  выражается через  $u_{t-1}, \dots, u_0, y_t, \dots, y_0$  и  $t$  (т. е. запаздывание в измерении минимально:  $s = 0$ ). Пусть целью управления (ЦУ) в не точных терминах по прежнему является минимизация «по возможности» выходной переменной  $y_t$ . Более точно,

будем стремиться минимизировать функционал

$$J(u_0^\infty) = \overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} \sup_{\substack{y_t^\infty \in \mathfrak{W} \\ t=0}} |y_t|. \quad (1.4)$$

На самом деле, в соответствии со сказанным выше, вместо оптимального будет построено субоптимальное (и адаптивное) управление с любым заранее заданным уровнем оптимальности  $\rho$ .

Если коэффициенты  $a_i, b_j$  объекта (1.2) известны, то, как показано в п. 3.2.2°, решение задачи минимизации функционала (1.4) тривиально: оптимальное управление получается из требования, чтобы уравнение (1.2) приняло вид  $y_t = v_t$ , т. е. оптимальным является управление, определяемое регулятором

$$u_t = b_1^{-1} [-b_2 u_{t-1} - \dots - b_r u_{t-r} + a_1 y_t + \dots + a_r y_{t-r+1}]. \quad (1.5)$$

(Для удобства дальнейших выкладок мы заменили  $t$  на  $t+1$ .) Действительно, для такого управления  $y_{t+1} = v_{t+1}$ , а значит (в силу (1.4) и определения класса  $\mathfrak{W}$ ),  $J(\tilde{u}_0) = C$ ; с другой стороны, для любого допустимого управления  $J(u_0^\infty) > C$  (см. конец п. 3.2.2°).

В п. 3.2.2° было получено также, что для обратной связи (1.5) управление  $u_t$  ограничено (при любых начальных условиях) тогда и только тогда, когда объект устойчив по управлению. Для неустойчивого по управлению объекта цель управления должна быть изменена так, чтобы обеспечить ограниченность  $u_t$ . В связи с этим в этом пункте будем предполагать, что объект (1.2) устойчив по управлению.

Наша задача состоит в построении регулятора, обеспечивающего выполнение ЦУ, в условиях, когда коэффициенты  $a_j, b_j$  известны не полностью, т. е. когда нельзя воспользоваться регулятором (1.5).

*б) Точная постановка задачи адаптивного управления.* Вспоминая определение адаптивной системы (§ 1.1), заметим, что уравнение объекта (1.2) можно записать в виде векторного уравнения первого порядка (3.1.5), т. е. в стандартном виде (1.2.3).

Определим множество  $\{\xi\}$ , входящее в определение адаптивной системы (§ 1.1).

Обозначим через  $\xi^k = \|a_j, b_j\|$  набор коэффициентов  $a_j, b_j$  объекта, через  $\xi^b$  — абстрактный параметр, от которого зависит возмущение  $v_t = v_t(\xi^b)$  и который означает, например, «случай»\*), и, наконец, через  $\xi$  — пару  $\xi = [\xi^k, \xi^b]$ . Пусть  $\{\xi\}$  — множество всех  $\xi$  таких, что  $\xi^k$  принимает всевозможные значения, а  $v_t = v_t(\xi^b)$  принимает всевозможные значения в интервале  $[-C, C]$ .

Пусть ЦУ состоит в выполнении неравенства

$$|y_{t+1}| \leq C_y \quad (1.6)$$

для всех достаточно больших  $t$ . Неравенство (1.6), очевидно, имеет вид (1.2.7). (Для удобства в (1.6) записан индекс  $t + 1$  вместо  $t$ .) Будем считать, что

$$C_y > C. \quad (1.7)$$

Если  $C_y < C$ , то не существует не только адаптивного, но и вообще никакого управления, обеспечивающего цель управления (ибо для любого допустимого управления  $J(u_0) \geq C$ ). Любое управление, для которого выполнено (1.6) при всех достаточно больших  $t$ , будет, согласно определению 4.1.1, субоптимальным с уровнем  $\rho = CC_y^{-1}$  для функционала (1.4).

Вид (1.5) оптимального управления подсказывает выбор сенсора  $\sigma_t$ . Управление (1.5) запишем в виде скалярного произведения

$$u_t = (\sigma_t, \tau^0), \quad (1.8)$$

где  $\sigma_t$  и  $\tau^0$  — векторы,

$$\sigma_t = \text{col}(u_{t-1}, \dots, u_{t-r+1}, y_t, \dots, y_{t-r+1}), \quad (1.9)$$

$$\tau^0 = b_1^{-1} \text{col}(-b_2, \dots, -b_r, a_1, \dots, a_r). \quad (1.10)$$

Итак, в качестве сенсора естественно взять вектор (1.9).

Мы получили, что рассматриваемая задача укладывается в абстрактную схему § 1.1, если только задать класс адаптации  $\Xi \subset \{\xi\}$ . Класс адаптации  $\Xi$  определим ниже, задавая множество, которое будет пробегать вектор  $\xi^k = \|a_j, b_j\|$  коэффициентов объекта. Естественно желание сделать этот класс возможно более широким (без ухудшения скорости сходимости алгоритма адаптации).

\*) Можно отождествить  $\xi^b$  с последовательностью  $v_0, v_1, \dots$ , для которой выполнено (1.3). В дальнейшем будем писать по-прежнему  $v_t$  вместо  $v_t(\xi^b)$ , опуская зависимость от  $\xi^b$ .

в) *Синтез адаптивного регулятора. Построение рекуррентных целевых неравенств.* Согласно изложенному в п. 4.3.2° адаптивное управление ищем в виде, аналогичном (1.8), заменяя неизвестный вектор  $\tau^0$  вектором  $\tau_t$  подстраиваемых параметров \*):

$$\underline{u_t = (\sigma_t, \tau_t)} \quad (1.11)$$

Для вектора  $\tau_t$  мы должны получить (см. п. 4.3.2°) рекуррентные целевые неравенства (РЦН). Они должны быть найдены посредством преобразования целевого условия (1.6), и КСА их решения даст алгоритм определения  $\tau_t$ .

Перейдем к построению РЦН. Используя обозначения (1.9), (1.10), перепишем (1.2), заменяя  $t$  на  $t + 1$ , в виде

$$y_{t+1} = b_1 [u_t - (\sigma_t, \tau^0)] + v_{t+1}. \quad (1.12)$$

Подчеркнем, что (1.12) — лишь записанное в другом виде уравнение объекта; оно справедливо для любого управления. Подставляя (1.11) в (1.12), а полученное выражение в (1.6) и заменяя  $\tau_t$  на  $\tau$ , получим требуемые РЦН:

$$|b_1[(\sigma_t, \tau) - (\sigma_t, \tau^0)] + v_{t+1}| \leq C_v. \quad (1.13)$$

При  $\tau = \tau_t$  (1.13) совпадает с (1.6) и выражение под знаком модуля в (1.13) равно  $y_{t+1}$ . Таким образом, выполнение (1.13) для  $\tau = \tau_t$  означает выполнение (1.6) для данного момента времени; алгоритм определения  $\tau_t$  должен быть построен так, чтобы существовал такой момент  $t_* = t_*(\xi)$ , что при  $t \geq t_*(\xi)$  все неравенства (1.13) (а значит, и (1.6)) были выполнены. Это означает выполнение ЦУ при  $t \geq t_*(\xi)$ , т. е. адаптивность системы (в классе  $\Sigma$ , который пока не определен). Подчеркнем, что неравенства (1.13) не даны — это рекуррентные условные неравенства, лишь после задания алгоритма их решения они определяются окончательно (в данном случае — найдутся векторы  $\sigma_t$  \*\*).

\* ) Заметим, что (1.8) совпадает для нашего случая с (1.2.6), а (1.11) — с (1.2.8).

\*\*) В нашем случае это общее свойство рекуррентных неравенств физически очевидно; лишь после задания алгоритма подстройки вектора параметров  $\tau_t$  «заработает» регулятор, а следовательно, и объект; при этом получат определенные значения компоненты векторов  $\sigma_t$  в (1.9). При другом задании алгоритма подстройки значения  $u_t$ ,  $y_t$ , а значит, и  $\sigma_t$ , естественно, будут другими,

г) Синтез адаптивного регулятора. Решение рекуррентных целевых неравенств. Переидем к построению КСА для решения РЦН (1.13). Неравенства (1.13) вырезают «полосы» в пространстве  $\{\tau\}$ ; мы находимся в ситуации применения алгоритмов «Полоска» (п. 2.1.3°). Рассмотрим вначале алгоритм «Полоска-1». Сравнивая (1.13) с (2.1.9), видим, что  $a_t = b_1 \sigma_t$ . Эта величина входит в правую часть КСА (2.1.13), следовательно, необходимо знание коэффициента  $b_1$ . Поэтому более приемлемым для наших целей является алгоритм «Полоска-2» (п. 2.1.4°), который требует лишь знания знака  $b_1$  и числа  $C_b$  в оценке  $|b_1| \leq C_b$ . Именно, неравенства (1.13) совпадают с (2.1.18), если взять

$$\beta_t = b_1, \quad a_t = \sigma_t, \quad \alpha_t = -b_1(\sigma_t, \tau^0) + v_{t+1}, \quad \epsilon_t = C_y.$$

Применим теорему 2.1.2. Должны быть выполнены условия (2.1.19), (2.1.20), т. е. в нашем случае соотношения

$$0 < |b_1| \leq C_b, \quad |\sigma_t| \leq C_\sigma, \quad (1.14)$$

$$\exists \tau_*, \rho, 0 \leq \rho < 1: \quad |b_1[(\sigma_t, \tau_*) - (\sigma_t, \tau^0)] + v_{t+1}| \leq \rho C_y. \quad (1.15)$$

(В (1.14)  $C_\sigma = \varepsilon^{-1} C_v$ ). Кроме того, должны быть известны величины (2.1.21), т. е. в нашем случае величины

$$\sigma_t, \operatorname{sign} b_1, \eta_t = y_{t+1}, v_t = \operatorname{sign}(C_y - |y_{t+1}|), C_b, \rho. \quad (1.16)$$

Неравенство  $|b_1| \leq C_b$  не является серьезным ограничением; в практических задачах значение  $C_b$  всегда может быть получено. Условие (1.15), очевидно, выполнено для  $\tau_* = \tau^0$ ,  $\rho = C_v C_y^{-1}$ . Величины (1.16) известны в момент  $t+1$ . (Все величины (1.16), кроме  $\eta_t = y_{t+1}$ , известны в момент  $t$ .) Оставляя пока без рассмотрения второе соотношение (1.14), запишем алгоритм (2.1.24), взяв  $\mu_t = (1 - \rho) C_b^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \tau_{t+1} &= \tau_t, \quad \text{если } |y_{t+1}| \leq C_y, \\ \tau_{t+1} &= \tau_t - (1 - \rho) C_b^{-1} \operatorname{sign} b_1 \sigma_t / |\sigma_t|^{-2}, \quad \text{если } |y_{t+1}| > C_y. \end{aligned} \quad (1.17)$$

По теореме 3.1.2 для числа ошибок алгоритма (т. е.

для числа моментов нарушения ЦУ) справедлива оценка

$$r^0 \leq \{ |\tau_0 - \tau^0| C_b (C_y C)^{-1} C_\sigma \}^2. \quad (1.18)$$

Здесь  $\tau_0$  — начальное значение  $\tau_t$ ;  $\tau^0$  — оптимальное значение (1.10).

Уравнение (1.17) описывает алгоритм адаптации, а в совокупности уравнения (1.17), (1.17) являются уравнениями адаптивного регулятора. (Они имеют вид (1.2.8), (1.2.9).)

д) *Выяснение условий сходимости алгоритма адаптации.* Вернемся теперь ко второму неравенству (1.14) — к последнему условию, обеспечивающему конечную сходимость алгоритма (1.17). Условия этого типа (требующие ограниченности вектора  $\sigma_t$ , т. е. ограниченности  $|y_t|$  и  $|u_t|$ ) всегда обеспечиваются (или проверяются) наиболее трудно. Заметим прежде всего, что поскольку, по предположению, объект устойчив по управлению, то условие  $|\sigma_t| \leq C_\sigma$  будет выполнено, если

$$|y_t| \leq Q_y. \quad (1.19)$$

(Здесь  $Q_y$  — некоторая постоянная,  $t = 0, 1, 2, \dots$ ) Действительно, по определению 3.1.2, в нашем случае выполнено (3.1.14), т. е. из (1.19) следует  $|u_t| \leq C_u$ , где  $C_u$  — некоторая постоянная, а значит, и  $|\sigma_t| \leq C_\sigma$ .

Поскольку уравнения (1.11), (1.16), (1.2) полностью определяют  $y_t$ ,  $u_t$  (после задания начальных данных), то условие (1.19) либо выполнено, либо нет — у нас нет свободы добиться его выполнения, если оно не выполнено и если мы не изменяем уравнения (1.11), (1.17), (1.2). На самом деле, оказывается, условие (1.19) выполнено (для некоторой постоянной  $Q_y$ ), однако доказательство этого факта довольно сложно; см. ниже, § 4.Д.

Рассмотрим сейчас один элементарный прием обеспечения условия (1.19), заключающийся во введении принудительных остановок объекта в случае необходимости. (Это означает, формально, изменение уравнения (1.1).) Этот прием полезен также и в том отношении, что мы добиваемся выполнения (1.19) не с какой-либо (неизвестной) постоянной  $Q_y$ , а с заранее заданной постоянной  $Q_y$ , определяемой из условия нормальной работы объекта и из условия адекватности описания объекта уравнением (1.2). Итак, пусть  $Q_y$  — заданная постоянная,  $Q_y > C_y$ .

Пусть объект функционирует до тех пор, пока выполнено (1.19) (первый интервал движения). Пусть в первый момент  $t_1$  нарушения (1.19) объект останавливается, переводится в новое положение с некоторыми малыми начальными значениями  $y_{t_1+1}^{t_1+r}$ ,  $u_{t_1+1}^{t_1+r}$ , затем «запускается» снова (второй интервал движения) и т. д. \*). Будем считать, что начальные данные  $y_{t_j+1}^{t_j+r}$ ,  $u_{t_j+1}^{t_j+r}$ , задаваемые после  $j$ -й остановки в момент  $t_j$ , ограничены одними и теми же постоянными:

$$|y_t| \leq Q_y^0, \quad |u_t| \leq Q_u^0 \text{ при } t_j + 1 \leq t \leq t_j + r, \quad (1.20)$$

причем  $Q_y^0 < C_y$ . (Нужно брать постоянную  $Q_y$  «максимально большой», а постоянные  $Q_y^0$ ,  $Q_u^0$  — «максимально малыми».) В течение остановок подстраиваемые коэффициенты, естественно, изменять не будем:  $\tau_{t_1+1} = \dots = \tau_{t_j+r-1}$ . В момент  $t_j + r$  «включается» уравнение объекта (1.2),  $y_{t_j+r+1}$  определяется из (1.2) и уравнение (1.2) действует, пока выполнено (1.19); этот временной интервал назовем *интервалом движения*  $\Delta_j$ . Следовательно, для  $t \in \Delta_j$  можно записать РЦН; для них  $\tau_t$  определяется согласно (1.17)\*\*). Заранее не исключается случай, когда интервалы движения имеют неограниченно возрастающие длины. Тем не менее из (1.20) и (1.19) следует, в силу устойчивости объекта по управлению, что  $|u_t| \leq C_u$ . Так как теперь выполнено  $|y_t| \leq Q_y$ , то  $|\sigma_t| \leq C_\sigma$  — таким образом выполнено последнее условие сходимости КСА (1.17). По теореме 2.1.2 найдется такой момент  $t_*$ , что при  $t \geq t_*$  выполнено  $|y_{t+1}| \leq C_y$ . Так как  $Q_y > C_y$ , то при

\*) Эта ситуация хорошо понятна на примере задачи о построении «робота-велосипедиста» (§ 1.1). В этом случае уравнение (1.2) — преобразованное уравнение движения велосипеда. Оно функционирует до тех пор, пока велосипед «не упал», после чего задаются новые начальные значения («велосипед устанавливается вертикально»), затем вновь вступает в силу уравнение (1.2) и действует до тех пор, пока велосипед «не упал», и т. д. Разумеется, указанные остановки и запуски объекта возможны и не всегда.

\*\*) Обратим внимание читателя на то, что теперь эволюционное уравнение (т. е. абстрактное уравнение объекта) (1.2.3) отличается от бывшего ранее: оно совпадает с (1.2) для интервалов движения  $\Delta_j = [t_j + r + 1, t_{j+1}]$  и определяется алгоритмом задания начальных данных для интервалов остановок  $[t_{j+1}, t_{j+1} + r]$ . Заметим, что  $t_{j+1} > t_j + r + 1$ ; поэтому интервалы движения непусты.

$t \geq t_*$  движение будет продолжаться неограниченно — остановок будет конечное число.

е) *Формулировка результатов.* Объединяя сделанные в процессе рассуждений предположения, сформулируем полученный результат:

Пусть  $C_y, Q_y$  — заданные постоянные,  $Q_y > C_y > C$ , и выполнено описанное выше условие относительно остановок объекта в моменты нарушения неравенства (1.19); пусть для каждого интервала движения начальные условия удовлетворяют одинаковым неравенствам (1.20), где  $Q_y^0 < C_y$ . Пусть  $\Xi$  — класс возмущений и объектов, определенный условиями:

1.  $|v_t| \leq C$ , и в остальном  $v_t$  произвольно.
2.  $b_1 \neq 0$ ,  $|b_1| \leq C_b$ , числа  $C_b$  и  $\text{sign} b_1$  известны.
3. Объект устойчив по управлению: полином  $b_1 + \lambda b_2 + \dots + \lambda^{r-1} b_{r-1}$  не имеет корней в области  $|\lambda| \leq 1$ .

Пусть ЦУ имеет вид  $|y_t| \leq C_y$  (для достаточно больших  $t$ ) и (1.9) — вектор сенсоров. Определим управление (для интервалов движения) формулами (1.11) и (1.17), где  $\rho = CC_y^{-1}$ . Пусть вне интервалов движения  $\tau_{t_j+1} = \dots = \tau_{t_j+r-1}$  и начальное значение  $\tau_0$  произвольно. Описанная система является адаптивной системой со стабилизирующими законом управления (т. е.  $\exists t_*: \tau_t = \text{const}$ ,  $|y_t| \leq C_y$  при  $t \geq t_*$ ) и с классом адаптации  $\Xi$ . Закон управления (1.11), (1.17) субоптимален (для функционала (1.5)) с уровнем оптимальности  $\rho$ . Для числа моментов движения, при которых не выполнено целевое условие (т. е.  $|y_t| > C_y$ ), справедлива оценка (1.18).

З а м е ч а н и е 1. Предположим, что интервалы движения определяются следующим образом: должно быть выполнено (1.19), а также длительность  $j$ -го интервала движения не должна превосходить заданного числа  $T^{(j)} > 1$ . Легко видеть, что все рассуждения и заключение (выделенное курсивом) остаются справедливыми.

При этом, начиная с  $t = t_*$ , будет выполнено  $|y_t| \leq C_y$  и каждое движение будет кончаться при достижении заданной длительности движения  $T^{(j)}$ . (Теперь уже движений будет неограниченно много.) Это можно интерпретировать как адаптивность по отношению к последовательному изменению начальных условий.

Сформулируем теперь результат (его доказательство приведено в § 4.Д), относящийся к случаю, когда остановок объекта нет.

**Теорема 4.1.1.** Пусть  $\Sigma$  — описанный выше класс объектов и возмущений, ЦУ имеет вид  $|y_t| \leq C_y$  (для достаточно больших  $t$ ), где  $C_y > C$ , и пусть (1.9) — вектор сенсоров. Определим управление формулами (1.11) и (1.17), где  $\rho = CC_n^{-1}$  и  $\tau_0$  — произвольный вектор. Полученная система является адаптивной в классе  $\Sigma$  системой со стабилизирующимся законом управления; закон управления (1.11), (1.17) является субоптимальным (относительно функционала (1.4)) с уровнем оптимальности  $\rho$ . Для числа моментов, при которых  $|y_t| > C_y$ , справедлива оценка (1.18).

Напомним, что нам осталось лишь доказать выполнение соотношения (1.19).

**4.1.3°.** Адаптивное субоптимальное управление в простейшем случае при дополнительном задании ограничения на управление. а) Постановка задачи. Класс адаптации. Часто бывает практически важным обеспечить выполнение условия

$$|u_t| \leq Q_u \quad (1.21)$$

не с какой-либо (неизвестной) постоянной, как в предыдущем пункте, а с заранее заданной постоянной, выбор которой обусловливается конструктивными соображениями.

Рассмотрим задачу предыдущего пункта при наличии дополнительного требования (1.21), а также (как и в п. 4.1.2°) требования  $|y_t| \leq Q_y$  с заданной постоянной  $Q_y$ . Будем считать по-прежнему, что целевое условие есть  $|y_t| \leq C_y$  с постоянной  $C_y > C$ , которая может быть сколь угодно близкой к  $C$  (1.3). При этом естественно считать, что (1.21) выполнено для оптимального управления (1.5) во всей области допустимых значений переменных, т. е. при

$$\begin{aligned} |u_{t-1}| &\leq Q_u, \dots, |u_{t-r}| \leq Q_u, |y_t| &\leq Q_y, \dots \\ &\dots, |y_{t-r}| \leq Q_y. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Это накладывает довольно жесткие условия на коэффициенты  $a_j, b_j$  объекта. Выясним, каковы эти условия. Из

(1.5), (1.22) получаем

$$|u_t| \leq |b_1|^{-1} \left( Q_u \sum_{j=2}^r |b_j| + Q_y \sum_{j=1}^r |a_j| \right),$$

причем равенство достигается. Правая часть не должна превосходить  $Q_u$ :

$$Q_u \sum_{j=2}^r |b_j| + Q_y \sum_{j=1}^r |a_j| \leq Q_u |b_1|. \quad (1.23)$$

Последнее неравенство может быть выполнено, лишь если числа  $b_j$  удовлетворяют соотношению \*)

$$|b_1| > |b_2| + \dots + |b_r|. \quad (1.24)$$

При выполнении (1.24) для любых  $Q_u, a_j$  найдется такое  $Q_y$ , что выполнено (1.23). Итак, при сделанных предположениях должны быть выполнены неравенства (1.23), (1.24). Вместо (1.23) будем считать выполненным аналогичное строгое неравенство (со знаком  $<$  вместо  $\leq$ ), или, иначе, неравенство

$$\begin{aligned} Q_u (|b_1| - |b_2| - \dots - |b_r|) &\geq \\ &\geq \rho^0 Q_y (|a_1| + \dots + |a_r|), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где  $\rho^0 < 1$ . Число  $\rho^0$  характеризует «запас», с которым оптимальное управление (1.5) удовлетворяет требуемой оценке  $|u_t| \leq Q_u$ : для управления (1.5) из (1.25) следует  $|u_t| \leq \rho^0 Q_u$ .

Неравенства (1.25) и (1.24) (с фиксированным числом  $\rho^0$ ) будут неравенствами, определяющими класс адаптации  $\Xi$ . Заметим, что из (1.24) следует устойчивость объекта по управлению \*\*).

\*) При условии, что  $Q_y \sum_{j=1}^r |a_j| \neq 0$ . Последнее соотношение предполагается выполненным. В случае  $a_1 = \dots = a_r = 0$  решение задачи лишь упрощается.

\*\*) Докажем это утверждение. Пусть выполнено (1.24). Среди корней уравнения  $\lambda^{-1} b(\lambda) = b_1 + b_2(\lambda) + \dots + b_r \lambda^{r-1} = 0$  нет корней на единичной окружности. Действительно, если  $\lambda = \lambda_0$  — такой корень,  $|\lambda_0| = 1$ , то  $|b_1| \leq |b_2 \lambda_0 + \dots + b_r \lambda_0^{r-1}| \leq |b_2| + \dots + |b_r|$ , что противоречит (1.24). Рассмотрим вспомогательное уравнение  $b_1 + \varepsilon(b_2 \lambda + \dots + b_r \lambda^{r-1}) = 0$ , корни которого обозначим  $\lambda_j(\varepsilon)$ . При  $0 < \varepsilon < 1$  по доказанному  $|\lambda_j(\varepsilon)| \neq 1$ . При  $\varepsilon = 0$  вспомогательное уравнение не имеет корней, поэтому  $\lambda_j(\varepsilon) \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Итак, при малых  $\varepsilon$  все  $|\lambda_j(\varepsilon)| > 1$ . Так как  $\lambda_j(\varepsilon)$  — не-

Оптимальное управление (1.5) запишем в виде  $u_t = = (\sigma_t, \tau^0)$ , где  $\sigma_t, \tau^0$  — векторы (1.9) и (1.10). Неравенства (1.24), (1.25) означают, что в допустимой области (1.22) для всех  $\sigma_t$  выполнено

$$|(\sigma_t, \tau^0)| \leq Q_u. \quad (1.26)$$

б) *Построение адаптивного управления.* Исходя из вида оптимального управления по указанному в п. 4.3.2° правилу, ищем адаптивное управление в виде  $u_t = = (\sigma_t, \tau_t)$  (т. е. по-прежнему в виде (1.11)), где  $\tau_t$  — вектор подстраиваемых параметров, для которого следует получить РЦН.

Как и в предыдущем пункте, из ЦУ  $|y_{t+1}| \leq C_y$  получаем для  $\tau_t$  рекуррентные условные неравенства

$$|b_1(\sigma_t, \tau - \tau^0) + v_{t+1}| \leq C_y. \quad (1.27)$$

Однако прежним алгоритмом (1.17) теперь воспользоваться нельзя, поскольку теперь, в отличие от предыдущего пункта, вектор  $\tau_{t+1}$  должен удовлетворять неравенству  $|u_{t+1}| = |(\sigma_{t+1}, \tau_{t+1})| \leq Q_u$ . Это означает, что вектор  $\tau_{t+1}$  можно брать лишь из области

$$|(\sigma_{t+1}, \tau)| \leq Q_u. \quad (1.28)$$

Неравенства (1.28) — безусловные рекуррентные неравенства (см. п. 2.4.1°). Заметим, что (1.27) — неравенство для  $\tau_t$ , а (1.28) — для  $\tau_{t+1}$ .

Мы пришли к ситуации, описанной в п. 2.4.1°. Неравенства (1.27), (1.28) совпадают соответственно с неравенствами (2.4.1), (2.4.2). Для решения условных неравенств (1.27) и безусловных неравенств (1.28) можно воспользоваться (см. пп. 2.4.3°—2.4.5°) суперпозицией алгоритмов «Полоска-2» и «Полоска-1»; см. замечание 1 к теореме 2.4.1. Таким образом, получаем \*).

$$\begin{aligned} \tau_{t+1} = & \langle |(\sigma_{t+1}, \tau)| \leq Q_u \rangle_1 \langle |b_1(\sigma_t, \tau - \tau^0) + v_{t+1}| \leq \\ & \leq C_y \rangle_2(\tau_t). \end{aligned} \quad (1.29)$$

---

прерывные функции  $\varepsilon$  и  $|\lambda_j(\varepsilon)| \neq 1$  при  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , то  $|\lambda_j(1)| > 1$ , что и требовалось доказать. Заметим, что справедливость нашего утверждения следует также из принципа аргумента (см. аналогичные рассуждения в § 3.2).

\*). Поскольку должно быть выполнено  $|(\sigma_{t+1}, \tau_{t+1})| \leq Q_u$ , то (см. замечание 1 к теореме 2.4.1) в (1.29) должно быть взято именно  $\langle |(\sigma_{t+1}, \tau)| \leq Q_u \rangle_1$ , а не  $\langle |(\sigma_t, \tau)| \leq Q_u \rangle_1$ .

(Здесь мы воспользовались обозначением (2.1.7).) Итак, (1.29) — искомый алгоритм определения  $\tau_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$

Проверим условия конечной сходимости алгоритмов  $\langle \dots \rangle_1$ ,  $\langle \dots \rangle_2$ , а следовательно, и (1.29). Условия сходимости алгоритма  $\langle \dots \rangle_2$ , как показано в предыдущем пункте, будут обеспечены, если мы введем остановки объекта при нарушении неравенства (1.19) так, как это было описано в предыдущем пункте. Рассмотрим условия сходимости алгоритма  $\langle \dots \rangle_1$ . Сравнивая (2.1.9) и (1.28), имеем  $a_t = \sigma_{t+1}$ ,  $\alpha_t = 0$ ,  $e_t = Q_u$ . Так как  $|\sigma_t| \leq C_\sigma$ , то выполнено (2.1.10). Из (1.27) следует, что выполнено (2.1.11) с  $\tau_* = \tau^0$ ,  $\rho_* = \rho^0$ . По теореме 2.1.1 выполнены условия сходимости алгоритма  $\langle \dots \rangle_1$ .

Выпишем явно выражение (1.29). Алгоритм  $\langle \dots \rangle_1$  в (1.29) возьмем, для простоты формул, в виде (2.1.15) (что соответствует выбору  $x = \infty$ ). Обозначим  $\tau'_t = \langle |b_1(\sigma_t, \tau - \tau^0) + v_{t+1}| \leq C_b \rangle_2(\tau_t)$ . Тогда  $\tau_{t+1} = \langle |\sigma_{t+1}, \tau| \leq Q_u \rangle_1(\tau_t)$ . Обозначив выражение  $\eta_t$  в (2.1.15) через  $\eta_t$ , получим по формуле (2.1.12)  $\eta'_t = \langle (\sigma_{t+1}, \tau_t) \rangle$ . Поэтому (2.1.15) примет вид

$$\tau_{t+1} = \tau'_t, \text{ если } |\eta'_t| \leq Q_u,$$

$$\tau_{t+1} = \tau'_t - (\eta'_t - \rho^0 Q_u \operatorname{sign} \eta'_t) |\sigma_{t+1}|^{-2}, \text{ если } |\eta'_t| > Q_u.$$

Используя явную формулу (2.1.24) для алгоритма  $\langle \dots \rangle_2$ , запишем (1.29) в виде

$$\tau'_t = \tau_t, \text{ если } |y_{t+1}| \leq C_y,$$

$$\tau'_t = \tau_t - (1 - \rho) \operatorname{sign} b_1 C_b^{-1} |\sigma_t|^{-2} y_{t+1} \sigma_t, \text{ если } |y_{t+1}| > C_y,$$

$$\tau'_{t+1} = \tau_t, \text{ если } |(\sigma_{t+1}, \tau_t)| \leq Q_u,$$

$$\tau'_{t+1} = \tau_t - [(\sigma_{t+1}, \tau_t) - \rho^0 Q_u \operatorname{sign} (\sigma_{t+1}, \tau_t)] |\sigma_{t+1}|^{-2} \sigma_{t+1}, \\ \text{если } |(\sigma_{t+1}, \tau_t)| > Q_u.$$

(1.30)

в) Формулировка окончательного результата:

Пусть  $\Xi = \Xi(C, C_b, \rho^0, \operatorname{sign} b_1)$  — класс возмущений и объектов, определенный условиями:

1. В (1.2)  $|v_t| \leq C$ , и в остальном значения  $v_t$  произвольны.

2. Выполнены неравенства (1.24), (1.25).

3.  $b_1 \neq 0$ , и фиксированы  $\operatorname{sign} b_1$  и число  $C_b$  в оценке  $|b_1| \leq C_b$ .

Пусть задан уровень оптимальности  $\rho$  ( $0 < \rho < 1$ ) и цель управления имеет вид  $|y_t| \leq C_y$  (для достаточно больших  $t$ ), где  $C_y = \rho^{-1}C$ . Пусть  $\sigma_t = \text{col}(y_{t-r+1}^l, u_{t-r+1}^{l-1})$  — вектор сенсоров. Предположим, что выполнено сформулированное в предыдущем пункте условие относительно установок объекта при нарушении (4.19), где  $Q_u > C_y > C$ , и в неравенствах (1.20) для начальных значений  $Q_u^0 < C_y$ ,  $Q_u^0 < Q_u$ . Определим управление для интервалов движения формулами (1.11), (1.30), где  $\tau_0$  — произвольный вектор, и вне интервалов движения положим  $\tau_{t+r+1} = \dots = \tau_{t+r-1}$ . Описанная система является адаптивной системой со стабилизирующими законом управления и классом адаптации  $\Xi$ . При этом для всех  $t \geq 0$  выполнено  $|u_t| \leq Q_u$ . Для числа  $r^0$  моментов движения, при которых не выполнено целевое условие (т. е.  $|y_t| > C_y$ ), справедлива оценка

$$r^0 \leq \max \{ |\tau_0 - \tau^0| C_b (1 - \rho)^{-1} C_y^{-1} |^2 ((r - 1) Q_u^2 + r Q_y^2), |\tau_0 - \tau^0| Q_u (1 - \rho^0)^{-1} |^2 \},$$

где  $Q_y$  — постоянная в условии (4.19), определяющая продолжение движения, а  $\tau^0$  — вектор (1.10). Адаптивный регулятор (1.11), (1.30) является субоптимальным с уровнем оптимальности  $\rho$  для функционала (4.4).

Оценка для числа  $r^0$  следует из (2.1.14) и из (2.1.26) (см. также п. 2.1.2°).

**Замечание 2.** Легко показать, что спустя время адаптации  $t_*$  установившееся управление  $u_t = (\sigma_t, \tau_t)$ , где  $\tau_t = \text{const}$ , будет субоптимальным управлением с уровнем  $\rho$  для функционала  $J_*(u_0^\infty) = \sup_{t \geq t_*} \sup_{v \in \mathcal{W}} |y_t|$ .

**Замечание 3.** Все утверждения остаются справедливыми, если определение интервалов движения дополнить требованием, чтобы длительность  $j$ -го интервала движения не превосходила заданной величины  $T^{(j)}$ .

**4.1.4°. Скалярный объект при наличии запаздываний в управлении или в измерении. а) Содержательная постановка задачи.** Рассмотрим снова объект, описываемый скалярным уравнением

$$a(\nabla) y_t = b(\nabla) u_t + v_t, \quad (1.31)$$

где  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  — полиномы вида

$$a(\lambda) = 1 + a_1 \lambda + \dots + a_r \lambda^r,$$

$$b(\lambda) = b_k \lambda^k + \dots + b_N \lambda^N, \quad b_k \neq 0 \quad (1.32)$$

( $y_t$  — выход объекта,  $u_t$  — управление,  $k$  — запаздывание в управлении,  $k < r$ ). Относительно помехи  $v_t$  будем, как и в п. 3.2.3°, предполагать, что она удовлетворяет уравнению

$$d(\nabla) v_t = w_t, \quad (1.33)$$

где  $d(\lambda)$  — полином с неизвестными коэффициентами

$$d(\lambda) = 1 + \lambda d_1 + \dots + \lambda^p d_p, \quad (1.34)$$

а  $w_t = w_t(\xi^B)$  — нерегулярная в интервале  $[-C, C]$  функция, т. е.

$$|w_t| \leq C \quad (1.35)$$

и в остальном значения  $w_t$  произвольны \*). Пусть, кроме того,  $|v_t| \leq C_v$ . (Это выполнено, если (1.34) — устойчивый полином.) Класс возмущений  $v_t$ , определенный указанными условиями (с фиксированным полиномом (1.34)), обозначим через  $\mathfrak{W}$ .

Как и в п. 3.2.3°, предположим, что класс допустимых управлений определяется формулой

$$u_t = U(t, y_{t-s}^{t-s}, u_0^{t-1}),$$

показывающей, что управление  $u_t$  может зависеть лишь от  $t, y_{t-s}, y_{t-s-1}, \dots, y_0, u_{t-1}, \dots, u_0$  (но не от  $v_t, \dots, v_0$ !), а в остальном произвольно. Число  $s \geq 0$  (запаздывание в измерении) считается заданным. Обозначим этот класс через  $\mathfrak{U}_s$ .

Пусть  $y^0$  — заданное значение выходной переменной и цель управления состоит в минимизации «по возможностям» отклонения  $y_t$  от  $y^0$ . Именно, цель управления возьмем в виде

$$|y_t - y^0| \leq C_y, \quad (1.36)$$

---

\*) Можно считать, что  $w_t = w_t(\xi^B)$  — случайные величины, удовлетворяющие (1.35),  $\xi^B$  — абстрактный параметр, символизирующий «случай», от которого зависит возмущающее воздействие  $w_t$ . Можно отождествить  $\xi^B$  с ограниченной последовательностью, удовлетворяющей (1.35); тогда  $w_t = w_t(\xi^B)$  — соответствующая компонента последовательности. Напомним, что предположение относительно  $v_t$  охватывает два важных крайних случая: случай, когда,  $v_t = w_t$  — нерегулярная в интервале  $[-C_w, C_w]$  функция ( $d(\lambda) \equiv 1$ ), и случай, когда  $v_t = \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^m A_j e^{i\omega_j t} \right)$  — гармоническое возмущение с неизвестными  $A_j, \omega_j$  ( $p = 2m, w_t = 0$ ).

где  $C_y$  — некоторая постоянная, которую желательно выбрать возможно меньшей. Неравенство (1.36) должно быть выполнено при всех достаточно больших  $t$ .

Задача адаптивного управления, пока еще в неточных терминах, состоит в построении допустимого управления, для которого выполнена ЦУ при неполном знании коэффициентов объекта и полинома  $d(\lambda)$  в (1.33).

б) *Точная постановка задачи.* Следует уточнить значение постоянной  $C_y$  в целевом условии (1.36), определить вектор сенсоров (необходимых измеряемых величин) и класс адаптации, т. е. множество в пространстве коэффициентов  $a_j, b_j, d_j$  такое, что вектор истинных коэффициентов принадлежит этому множеству. Желательно, чтобы класс адаптации был возможно шире; он будет определен в процессе решения задачи.

Минимально возможное значение постоянной  $C_y$  в (1.36) (обозначим его  $C_y^0$ ) определяется из решения минимизационной задачи (на классе допустимых управлений  $u_0^\infty \in \mathcal{U}_s$ ) для функционала

$$J(u_0^\infty) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_{y_t^\infty \in \mathbb{W}} |y_t - y^0|. \quad (1.37)$$

Эта задача была решена в п. 3.2.3°. Ответ содержится в следствии к теореме 3.2.1 и гласит, что нижняя грань функционала (1.37) достигается на некотором оптимальном управлении и равна

$$\text{где } C^0 = \inf_{u_0^\infty \in \mathcal{U}_s} J(u_0^\infty) = C \|F\|, \quad (1.38)$$

$$\|F\| = 1 + |F_1| + \dots + |F_{m-1}|, \quad m = k + s, \quad (1.39)$$

а  $F_j$  — коэффициенты полинома  $F(\lambda)$  степени  $m-1$  ( $F(0) = 1$ ), который вместе с полиномом  $G(\lambda)$  степени  $r+p-1$  однозначно определяется из тождества (3.2.10), т. е. из тождества

$$F(\lambda) d(\lambda) a(\lambda) - \lambda^m G(\lambda) \equiv 1. \quad (1.40)$$

Итак, должно быть выполнено  $C_y \geq C^0$ . Будем предполагать, что  $C_y > C^0$  и, более того, что известно число  $\rho^0$  ( $0 < \rho^0 < 1$ ) в оценке

$$\rho^0 C_y \geq C^0. \quad (1.41)$$

Это неравенство будет одним из условий, определяющим класс адаптации.

Пусть при  $t \geq t_*$  выполнено (1.36). Для соответствующего управления имеем  $J(u_0^*) \leq C_y$ . Из (1.38) следует (см. определение 4.1.1), что это управление субоптимально с уровнем оптимальности  $\rho = C_y^{-1}C^0$ . Так как  $a_j$ , а значит, и  $F_j$ ,  $\|F\|$ ,  $C^0$  неизвестны, то неизвестен и уровень оптимальности  $\rho$ , однако  $C_y$  может быть сколь угодно близким к оптимальному значению  $C^0$  и, следовательно,  $\rho$  — к единице \*). Иногда  $C^0$  известно (хотя  $a_j$ ,  $F_j$  неизвестны); в этом случае можно взять  $\rho^0 = \rho$ .

В п. 3.2.5° было показано (при известных коэффициентах  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $d_j$ ), что объект вместе с оптимальной обратной связью образует устойчивую или неустойчивую систему соответственно тому, является ли сам объект устойчивым или неустойчивым по управлению. Поэтому предположим, что объект устойчив по управлению. (Это второе условие на класс адаптации \*\*). Остальные условия, определяющие класс адаптации, будут сформулированы в процессе построения адаптивного управления.)

в) *Об оптимальном управлении.* Согласно изложенной в п. 1.3.2° схеме, будем исходить из вида оптимального управления. Пусть (1.31) выполнено  $m + p - 1$  тактов

\*) То, что оптимальное значение  $C^0$  зависит от неизвестных параметров, создает естественную трудность, поскольку  $C_y$  желательно взять близким к  $C^0$ , а  $C_y$  должно быть известным. В связи с этим представляет интерес аналогичная задача с неизвестными  $C_y$  и известным уровнем оптимальности  $\rho$  (это означает изменение класса адаптации); решение этой задачи, однако, к настоящему времени не получено. В приложениях обычно известен допуск  $C_y$  отклонения выхода  $y_t$  от требуемого значения  $y^0$ ; таким образом, неравенство  $C_y \geq C^0$ , означающее принципиальную возможность решения задачи, выполнено, хотя  $C^0$  и неизвестно. Число  $\rho^0$  в (1.41) характеризует «запас», с которым выполнено это необходимое условие. Заметим, что чем ближе взято  $C_y$  к «опасной границе»  $C^0$  и, тем самым  $\rho^0$  — к единице, тем, вообще медленнее будет сходиться алгоритм адаптации (но сама система будет «более оптимальной»).

\*\*) Можно поставить вопрос, что же делать в случаях, когда объект неустойчив по управлению (неминимально-фазовый). Приводимое решение тогда непригодно. В этом случае следовало бы изменить цель управления, например, дополнив ее требованием ограниченности  $u_t$ . Удовлетворительное решение этой задачи (в субоптимальной постановке), однако, неизвестно. Для существенно более слабой ЦУ, требующей лишь диссипативности замкнутой системы, решение известно: оно очень простое и будет изложено в п. 4.2.4°.

подряд; применяя к обеим частям равенства (1.31) оператор  $\nabla^{-k}F(\nabla)d(\nabla)$  (что можно сделать, ибо степень полинома  $F(\lambda)d(\lambda)$  равна  $m+p-1$ ), используя (1.40), (1.33) и равенство  $m=k+s$ , придем к соотношению

$$\begin{aligned}\nabla^s G(\nabla)y_t + \nabla^{-k}y_t &= \nabla^{-k}F(\nabla)d(\nabla)b(\nabla)u_t + \\ &\quad + \nabla^{-k}F(\nabla)d(\nabla)v_t,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}y_{t+k} - y^0 &= [\nabla^{-k}F(\nabla)d(\nabla)b(\nabla)u_t - \nabla^sG(\nabla)y_t - y^0] + \\ &\quad + F(\nabla)w_{t+k}. \quad (1.42)\end{aligned}$$

Управление, получаемое приравниванием нулю квадратной скобки в (1.42), допустимо. В п. 3.Д.2° показано, что оно и оптимально. Это управление можно записать в виде

$$u_t = (\sigma_t, \tau^0), \quad (1.43)$$

а квадратную скобку в (1.42) в виде  $[\dots] = b_k[u_t - -(\sigma_t, \tau^0)]$ , где  $\sigma_t, \tau_0$  — векторы с компонентами

$$\sigma_t = \text{col}(u_{t-1}, \dots, u_{t-(p+r+s-1)}, y_{t-s}, \dots, y_{t-(p+r+s-1)}, 1), \quad (1.44)$$

$$\tau^0 = b_k^{-1} \text{col}(-E_1, \dots, -E_{p+r+s-1}, G_0, \dots, G_{p+r-1}, y^0). \quad (1.45)$$

Здесь  $E_j, G_j$  — коэффициенты полиномов

$$b_k^{-1}\lambda^{-k}F(\lambda)d(\lambda)b(\lambda) = 1 + E_1\lambda + \dots + E_{p+r+s-1}\lambda^{p+r+s-1}, \quad (1.46)$$

$$G(\lambda) = G_0 + G_1\lambda + \dots + G_{p+r-1}\lambda^{p+r-1}. \quad (1.47)$$

(Управлением (1.43), конечно, воспользоваться нельзя, так как вектор  $\tau^0$  неизвестен.)

**Замечание.** Если  $y^0 = 0$ , то последние компоненты в (1.44), (1.45) отсутствуют. Если степень  $b(\lambda)$  равна  $r_1$ , то в (1.44) можно взять не  $p+r+s-1$  компонент  $u_{t-j}$ , а только  $p+r_1+s-1$ .

г) *Построение адаптивного управления.* Исходя из формулы (1.43) для оптимального управления, адаптивное управление будем искать в виде

$$\boxed{\boxed{u_t = (\sigma_t, \tau_t)}}, \quad (1.48)$$

где  $\tau_t$  — вектор подстраиваемых параметров (той же размерности, что и  $\tau^0$ ), который следует находить по одному из КСА решения РЦН.

Перейдем к получению РЦН для  $\tau_t$ . Поскольку в (1.42)  $[ \dots ] = b_k [u_t - (\sigma_t, \tau^0)]$ , то (1.42) принимает вид

$$y_{t+k} - y^0 = b_k [(\sigma_t, \tau_t) - (\sigma_t, \tau^0)] + F(\nabla) w_{t+k}. \quad (1.49)$$

Подставляя значение (1.49) в целевое неравенство  $|y_{t+k} - y^0| \leq C_y$  и заменяя  $\tau_t$  на  $\tau$ , получим следующие условные РЦН:

$$|b_k [(\sigma_t, \tau) - (\sigma_t, \tau^0)] + F(\nabla) w_{t+k}| \leq C_y. \quad (1.50)$$

Заметим, что неравенства (1.50) — рекуррентные: значения  $\sigma_t$  в них не определены и зависят от алгоритма, который будет предложен для их решения. (Безусловные РЦН в нашем случае отсутствуют. При наличии дополнительного требования  $|u_t| \leq C_u^0$  с заданной постоянной  $C_u^0$  ими были бы неравенства  $|(\sigma_{t+1}, \tau)| \leq C_u^0$  для вектора  $\tau_{t+1}$ .)

Ниже, для краткости, неравенство (1.50) будем обозначать  $|y_{t+k} - y^0| \leq C_y$ , поскольку именно из этого неравенства оно получено и переходит в него при  $\tau = \tau_t$ .

Перейдем к выбору КСА для решения РЦН (1.50). Поскольку (1.50) — полосы в пространстве  $\{\tau\}$ , то для их решения естественно взять алгоритм «Полоска-2», т. е., в символической записи, алгоритм

$$\tau_{t+1} = \langle |y_{t+k} - y^0| \leq C_y \rangle_2(\tau_t). \quad (1.51)$$

Этот алгоритм требует знания числа  $\text{sign } b_k$  и числа  $C_y$  в оценке  $|b_k| \leq C_b$ . (Это должно быть одним из условий, определяющих класс адаптации.) Сравнивая (1.50) с (2.1.18) и значение  $\eta_t$  в (2.1.21) с (1.49), получаем, что в нашем случае

$$\beta_t = b_k = \text{const}, \quad a_t = \sigma_t, \quad \varepsilon_t = C_y, \quad \eta_t = y_{t+k} - y^0. \quad (1.52)$$

Условие сходимости (2.1.20), очевидно, выполнено для  $\rho = \rho^0$ ,  $\tau_* = \tau^0$  (см. (1.35), (1.38), (1.41)). Условия сходимости (2.1.19) в нашем случае сводятся к одному второму неравенству (2.1.19), т. е. к неравенству

$$\exists C_\sigma : |\sigma_t| \leq C_\sigma. \quad (1.53)$$

Оставим пока без рассмотрения условие (1.53), поскольку формулы (1.52) показывают, что алгоритмом (1.51) воспользоваться нельзя. Действительно, поскольку  $\tau_{t+1}$  выражается через величины (1.52), в частности через  $y_{t+k}$  (см. (2.1.24)), то через эти величины выразится, в силу (1.48), и  $u_{t+1}$ . Итак,  $u_{t+1}$  выразится через будущее значение  $y_{t+k}$ , а это значит, что алгоритм (1.51) нереализуем — управление недопустимо. Оно недопустимо и при  $k = 1$ , ибо, в силу запаздывания в измерении,  $u_t$  должно выражаться через  $y_{t-s}, y_{t-s-1}, \dots$  (Более строго:  $u_t$  должно быть функцией сенсора в момент  $t$ .)

Для того чтобы преодолеть эту трудность, поступим следующим образом. Получив в момент  $t$  РЦН (1.50), будем ждать  $m = s + k$  тактов, т. е. ждать момента, когда значением  $\eta_t = y_{t+k} - y^0$  можно воспользоваться (для построения  $u_{t+s+k}$ ). Итак, вместо (1.51) попытаемся взять следующий алгоритм определения вектора  $\tau_t$ :

$$\tau_{t+m} = \langle |y_{t+k} - y^0| \leq C_y \rangle_2(\tau_t). \quad (1.54)$$

Теперь  $\tau_{t+m} = \tau_{t+k+s}$  (а не  $\tau_{t+1}$ ) выражается через (1.52). (Заметим, что если в правой части (1.54) вместо  $\tau_t$  взять  $\tau_j$ , где  $j \neq t$ , то алгоритм был бы нереализуем. Действительно, подставляя в левую часть неравенства (1.50)  $\tau = \tau_j$ , мы, согласно (2.1.24), не получили бы  $y_{t+k} - y^0$  под знаком модуля в (1.50), если  $\tau_j \neq \tau_t$ . В этом случае вектор  $\tau_{t+m}$  выражался бы через неизвестные величины.) Итак, согласно (1.54), (1.48) значение  $u_{t+m}$  выражается через величины (1.52), т. е. управление (1.54), (1.48) допустимо. Тем не менее алгоритм (1.54) обладает одним недостатком, который делает нецелесообразным его применение. Именно, согласно (1.54),  $\tau_{t+m}$  выражается через  $\tau_t$ . Поэтому последовательность  $\{\tau_t\}$  распадается на  $m$  подпоследовательностей  $\{\tau_{j+mh}\}$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$ ,  $h = 0, 1, \dots$ , таких, что внутри каждой из них следующее значение  $\tau_{j+mh+1}$  выражается через предыдущее  $\tau_{j+mh}$ . Пусть выполнены условия конечной сходимости для (1.54). После того как сойдутся все  $m$  соответствующих алгоритмов «Полоска-2» ( $t \geq t_*$ ), мы получим  $m$  предельных значений  $\tau_{1*}, \dots, \tau_{m*}$ . Поэтому закон управления (1.48), (1.54) не будет стабилизирующимся: при  $t \geq t_*$  вектор  $\tau_t$  будет периодической (с периодом  $m$ ) функцией времени.

По этой причине не будем пользоваться алгоритмом (1.54), а заменим его следующим:

$$\tau_{t+m} = \langle |y_{t+k} - y^0| \leq C_y \rangle_2(\tau_{t+m-1}), \quad \text{если } \tau_t = \dots = \tau_{t+m-1}, \quad (1.55)$$

$\tau_{t+m} = \tau_{t+m-1}$  в противном случае.

Предполагаются заданными значения  $\tau_0, \dots, \tau_{m-1}$ . (Естественно брать  $\tau_0 = \dots = \tau_{m-1}$ ).

Алгоритм (1.55) тоже реализуем: первую формулу в (1.55) можно переписать в виде  $\tau_{t+m} = \langle |y_{t+k} - y^0| \leq C_y \rangle_2(\tau_t)$ , и следовательно (см. (2.1.14)),  $\tau_{t+m}$ , а значит, и  $u_{t+m}$  выражаются через величины (1.52).

Покажем, что при выполнении условия (1.53) формулы (1.48), (1.55) определяют адаптивный регулятор со стабилизирующимся законом управления.

Обозначим через  $N$  множество тех моментов  $t$ , для которых в силу (1.55)  $\tau_{t-1} \neq \tau_t$ . (Считаем, что  $\tau_{-1} \neq \tau_0$ , т. е. что  $0 \in N$ .) Согласно (1.55) для  $t \in N$  имеем  $\tau_{t-1} \neq \tau_t = \dots = \tau_{t+m-1}$  и поэтому в момент  $t + m - 1$  применяется алгоритм «Полоска-2» — срабатывает первая формула (1.55). Исключим из последовательности  $\tau_0, \tau_1, \dots$  группы равных между собой значений  $\tau_j = \dots = \tau_{j+m-1}$  с  $j \in N$ . Множество оставшихся индексов обозначим через  $M$ . Для  $t \in M$  упорядочим множество  $\{\tau_t\}$  по возрастанию индексов. При  $j \in N$  имеем  $\tau_j = \tau_{j+m-1}$ . Поэтому для  $t \in M$  следующее значение  $\tau_t$  выражается через предыдущее по алгоритму «Полоска-2». Условия сходимости (1.1.19) этого алгоритма, как и выше, сводятся к неравенству (1.53), которое, по предположению, выполнено. Итак, этот алгоритм — КСА. Поэтому для  $t + m - 1 \in M$  будет лишь конечное число моментов  $t$ , для которых неравенство  $|y_{t+k} - y^0| \leq C_y$  не выполнено. Пусть  $t^0$  — последний такой момент. Для  $t = t^0 + 2m - 2$  значение  $\tau_{t+1}$  получается из  $\tau_t$  по алгоритму «Полоска-2», и так как соответствующее неравенство выполнено, то  $\tau_{t+1} = \tau_t$ . Это означает, что та же ситуация имеет место для  $\tau_{t+2}$  и  $\tau_{t+1}$ , т. е. что  $\tau_{t+2} = \tau_{t+1}$  и т. д. Итак, при  $t \geq t^0 + 2m - 2$  выполнены все неравенства  $|y_{t+k} - y^0| \leq C$  и  $\tau_t = \text{const}$ . Мы показали адаптивность регулятора (1.48), (1.55) при выполнении соотношения (1.53).

Итак, закон адаптации (1.55) решает поставленную задачу. Тем не менее алгоритм (1.55) обладает некоторым

недостатком: исправление вектора  $\tau_t$  происходит относительно медленно, так как пропускаются все РЦН  $|y_{t+k} - y^0| \leq C_y$ , для моментов  $t$ , при которых не выполнены условия  $\tau_t = \dots = \tau_{t+m-1}$ . В связи с этим рассмотрим еще такой алгоритм адаптации:

$$\tau_{t+m} = \langle |y_{h_t+k} - y^0| \leq C_y \rangle_2 (\tau_{h_t}), \quad (1.56)$$

где  $h_t$  — последний момент в интервале  $t-m+1 \leq h \leq t$ , для которого не выполнено неравенство

$$|y_{h+k} - y^0| \leq C_y, \quad h = t-m+1, \dots, t, \quad (1.57)$$

и если все эти неравенства выполнены, то  $h_t = t$  (или, что же самое,  $\tau_{t+m} = \tau_t$ ).

В алгоритме (1.56), в отличие от алгоритма (1.55), проверяется каждое из РЦН  $|y_{t+k} - y^0| \leq C_y$ . Структура этого алгоритма более сложна: если в алгоритме (1.55)  $\tau_{t+1}$  выражается через  $\tau_t$  (так же, как и во всех предыдущих алгоритмах адаптации), то в алгоритме (1.56) последовательность  $\tau_t$  распадается на конечное число подпоследовательностей — «ветвей» с аналогичным свойством. Такие алгоритмы в дальнейшем будем называть *ветвящимися*. Подробно структура ветвления алгоритма (1.56) будет разобрана ниже, в § 4.Д.2, при доказательстве адаптивности регулятора (1.48), (1.56). Конечная сходимость алгоритма (1.56) будет установлена ниже.

д) *Обеспечение условия сходимости; введение остановок объекта.* Рассмотрим условие (1.53), т. е. условие  $|u_t| \leq Q_u$  и

$$|y_t - y^0| \leq Q_y. \quad (1.58)$$

Здесь  $Q_u, Q_y$  — некоторые постоянные,  $Q_y > C_y$ . В силу устойчивости объекта по управлению неравенство  $|u_t| \leq Q_u$  — следствие неравенства (1.58). Условию (1.58) можно удовлетворить, вводя, как и в п. 4.1.2°, остановки объекта в моменты  $t_j$  нарушения (1.58) и принудительные переводы объекта в начальные положения, для которых

$$\begin{aligned} |y_{t_j+1}^0| &\leq Q_y^0, \dots, |y_{t_j+r}^0| \leq Q_y^0, \\ |u_{t_j+1}^0| &\leq Q_u^0, \dots, |u_{t_j-k+r+1}^0| \leq Q_u^0, \end{aligned} \quad (1.59)$$

где  $Q_y^0, Q_u^0$  — одни и те же для всех моментов остановок постоянные,  $Q_y^0 < C_y, Q_u^0 < C_u$ . Во время остановок зна-

чения  $\tau_j$  не изменяется. Каждому моменту движения (моменту управления по формуле (1.48)) соответствует рекуррентное целевое неравенство (1.50); чтобы не изменять формулы (1.55) и (1.56), условимся исключать моменты в интервалах остановок из счёта моментов времени. Так как неравенство (1.50) (оно основывается на (1.42)) выведено в предположении, что объект движется согласно (1.31) по крайней мере  $m + p - 1$  тактов подряд, то постоянная  $Q_y$  в (1.58) должна быть выбрана настолько большой, чтобы каждое движение содержало не менее  $m + p - 1$  тактов. Легко сформулировать соответствующее грубое достаточное условие — оно будет последним условием, определяющим класс адаптации.

Заметим, что можно останавливать объект не только в моменты нарушения (1.58), но также и когда время  $j$ -го интервала движения достигло величины  $T_j$ , где  $T_j \geq m + p - 1$  — заранее заданные числа.

Итак, после введения остановок объекта в соответствии со сказанным правилом выполнено (1.53), а, значит (1.55) — КСА. Установим формулу для оценки числа ошибок алгоритма (1.55). В каждом временнём интервале длины  $m$  хотя бы один раз «срабатывает» алгоритм «Полоска-2». Поэтому число ошибок  $r^0$  не превосходит  $m\hat{r}^0$ , где  $\hat{r}^0$  — оценка числа ошибок алгоритма «Полоска-2», даваемая формулой (2.1.26). В нашем случае

$$|\sigma_t|^2 \leq C_\sigma^2 = Q_y^2(p+r-k) + Q_u^2(p+r)$$

и, как было отмечено выше,  $\tau_* = \tau^0$  — вектор (1.45),  $\rho = \rho^0$ ,  $\varepsilon^{-1} = C_y^{-1}C_\sigma$ . Поэтому согласно (2.1.26)

$$r^0 \leq m \{ |\tau_0 - \tau^0| C_b (1 - \rho^0)^{-1} C_y^{-1} \} [Q_u^2(p+r-k) + Q_u^2(p+r)]. \quad (1.60)$$

Запишем в явном виде алгоритм (1.55). Взяв в (2.1.24)  $\mu_t = (1 - \rho) C_b^{-1} = (1 - \rho^0) C_b^{-1}$ , подставляя значения (1.52) и заменяя  $t + m$  на  $t + 1$ , перепишем алгоритм (1.55) в виде

---


$$\begin{aligned} \tau_{t+1} &= \tau_t - (1 - \rho^0) C_b^{-1} \operatorname{sign} b_k (y_{t-s+1} - y^0) \sigma_{t-m+1} |\sigma_{t-m+1}|^{-2}, \\ &\text{если } |y_{t-s+1} - y^0| > C_y, \text{ и } \tau_t = \tau_{t-1} = \dots = \tau_{t-m+1}, \\ &\tau_{t+1} = \tau_t \text{ в противном случае.} \end{aligned} \quad (1.61)$$


---

Лишь сейчас мы можем указать, что является в нашем случае вектором сенсоров  $\hat{b}_t$ . Так как  $u_t$  в (1.48) должно выражаться через  $\hat{b}_t$ , а  $\tau_{t+1}$  в (1.59) — через  $\hat{b}_{t+1}$ ,  $\hat{b}_t$ , то  $\hat{b}_t$  — набор величин  $y_{t-s}$ ,  $\sigma_t$ ,  $\sigma_{t-m}$ . Из (1.44) следует что можно взять  $\hat{b}_t = \text{col}(y_{t-N}^{t-s}, u_{t-N}^{t-1})$ , где  $N = p + r + k + 2s - 1$ . Заметим, что вектор  $\tau_t$  в § 1.2 (обозначим его через  $\hat{\tau}_t$ ) и здесь имеет разный смысл: сравнивая (1.59) и (1.2.9), видим, что  $\hat{\tau}_t = \text{col}(\tau_t, \dots, \tau_{t-m+1})$ .

е) *Формулировки результатов.* Вспомним и объединим все предположения, которые были сделаны выше. Пусть  $\Xi$  — класс объектов и возмущений, определяемый условиями:

1. Возмущение  $v_t$  принадлежит классу  $\mathfrak{W}$ , в частности,  $|v_t| \leq C_v$  и удовлетворяются соотношения (1.33), (1.35).
2. Объект устойчив по управлению: полином  $b(\lambda) = b_k \lambda^k + \dots + b_r \lambda^r$  не имеет корней в области  $0 < |\lambda| \leq 1$ .
3. Выполнено (1.41) с известным  $\rho^0$  ( $0 < \rho^0 < 1$ ).
4. В уравнении объекта (1.31)  $b_k \neq 0$ ,  $|b_k| \leq C_b$ , числа  $C_b$  и  $\text{sign } b_k$  известны.
5. При нарушении (1.58) объект останавливается и переводится в новое начальное положение так, что выполнено (1.59).
6. Число  $Q_y$  в (1.58) настолько велико, что при начальных значениях, удовлетворяющих (1.59), каждое движение содержит по крайней мере  $t + p - 1$  тактов, где  $t = k + s$ , а  $p$  — степень полинома  $d(\lambda)$ .

Пусть  $\tau_0 = \tau_1 = \dots = \tau_{m-1}$  — произвольный вектор. Мы доказали что регулятор (1.48), (1.61) адаптивен в классе  $\Xi$  с ЦУ (1.36) и субоптимальен (для функционала (1.37)) с уровнем оптимальности  $C^0 C_y^{-1}$ ; закон управления (1.48), (1.61) — стабилизирующийся (т. е.  $\exists t_*$ :  $|y_t - y^0| \leq C_y$  и  $\tau_t = \text{const}$  при  $t \geq t_*$ ), и для числа  $r^0$  моментов движения, при которых  $|y_t - y^0| > C_y$ , справедлива оценка (1.60).

Рассмотрим алгоритм (1.56). Из (2.1.24) следует явная формула для этого алгоритма:

$$\begin{aligned} \tau_{t+m} &= \tau_{h_t} - (1 - \rho^0) C_b^{-1} \text{sign } b_k \cdot (y_{h_t+k} - y^0) |\sigma_{h_t}|^{-2} \sigma_{h_t}, \\ &\quad \text{если } |y_{h_t+k} - y^0| > C_y, \\ \tau_{t+m} &= \tau_{h_t}, \quad \text{если } |y_{h_t+k} - y^0| \leq C_y. \end{aligned} \tag{1.62}$$

Здесь  $h_t$  определяется по неравенствам (1.57) так, как указано выше. Вектор  $\tau_0 = \dots = \tau_{2m-2}$  задается произвольно.

**Теорема 4.1.2.** Алгоритм (1.62) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \tau_{t+m} &= \tau_t - (1 - \rho^0) C_b^{-1} \operatorname{sign} b_k \cdot (y_{t+k} - y^0) |\sigma_t|^{-2} \sigma_t, \\ &\text{если } |y_{t+k} - y^0| > C_y, \\ \tau_{t+m} &= \tau_{t+m-1}, \text{ если } |y_{t+k} - y^0| \leq C_y. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Регулятор (1.48), (1.63) адаптивен в классе  $\Xi$  с ЦУ (1.36) и субоптимален (для функционала (1.37)) с уровнем оптимальности  $C^0 C_y^{-1}$ ; закон управления (1.48), (1.63) — стабилизирующийся.

Замечание. Алгоритм (1.63) требует большой памяти: в момент  $t + m$  должны храниться в памяти  $\tau_{t+m-1}, \dots, \tau_t$ . Теорема 4.1.2 остается справедливой, если вместо (1.63) (т. е. вместо (1.56)) взять такой алгоритм:

$$\begin{aligned} \tau_{(v+1)m} &= \langle |y_{h_m+k} - y^0| \leq C_y \rangle_2(\tau_{vm}), \\ \tau_t &= \tau_{vm} \text{ при } t = vm + 1, \dots, (v + 1)m - 1, \\ v &= 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (1.64)$$

где  $h_m$  — последний момент в интервале  $(v - 1)m < h \leq vm$ , для которого не выполнено неравенство  $|y_{h+k} - y^0| \leq C_y$ , и если все эти неравенства выполнены, то  $h_m = vm$ . Для этого алгоритма в памяти должно храниться лишь одно значение  $\tau_{vm}$ , но зато, как правило, алгоритм (1.64) сходится медленнее алгоритма (1.63).

Обоснование алгоритма (1.64) проводится почти словно, так же как и алгоритма (1.56) в § 4.Д.

ж) *Адаптивное субоптимальное управление без остановок объекта.* Пусть  $\Xi'$  — класс объектов и возмущений, для которых выполнены сформулированные выше условия 1—3. Таким образом, для класса  $\Xi_1$  отсутствуют принудительные остановки объекта и значения  $\operatorname{sign} b_k$ ,  $C_b$  могут быть неизвестны.

Пусть

$$\sigma'_t = \operatorname{col}(u_t, \dots, u_{t-(p+r+s-1)}, y_{t-s}, \dots, y_{t-(p+r+s+1)}, 1). \quad (1.65)$$

(Вектор  $\sigma'_t$  отличается от  $\sigma_t$  добавлением компоненты, равной  $u_t$ ; см. (1.44).) Пусть  $\tau'_t$  — вектор подстраиваемых пара-

метров той же размерности, что и  $\sigma'_t$ , определяемый рекуррентно согласно алгоритму «Полоска-1»:

$$\tau'_{t+1} = \langle |y_{t-s+1} - (\sigma'_{t-k-s+1}, \tau_t)| \leq C_y \rangle_1 (\tau'_t). \quad (1.66)$$

Этот алгоритм возьмем в виде (1.1.17) с  $\rho = \rho^0$ :

$$\begin{aligned} \eta_t &= y_{t-s+1} - (\sigma'_{t-k-s+1}, \tau'_t), \\ \tau'_{t+1} &= \tau'_t, \text{ если } |\eta_t| \leq C_y, \\ \tau'_{t+1} &= \tau'_t - \mu_t (\eta_t - \rho^0 C_y \operatorname{sign} \eta_t) |\sigma'_{t-k-s+1}|^{-2} \sigma'_{t-k-s+1}. \quad (1.67) \\ &\text{если } |\eta_t| > C_y. \end{aligned}$$

Числа  $\mu_t$  берутся, согласно теореме 2.4.1а, в интервале  $0 < \mu' \leq \mu_t \leq \mu'' < 2$ . Дополнительно потребуем, чтобы число  $\mu_t \in (\mu', \mu'')$  определялось из условия

$$\mu_t: \tau'_{t+1}^{(1)} = \max, \quad (1.68)$$

где  $\tau'_{t+1}^{(1)}$  — первая компонента вектора  $\tau'_{t+1}$ . (Тогда  $\mu_t = \varepsilon_t \mu' + (1 - \varepsilon_t) \mu''$ , где  $\varepsilon_t = 0$  или 1; легко написать явную формулу для  $\varepsilon_t$ .) Вектор  $\tau'_0$  задается произвольно, так, чтобы  $\tau'_0^{(1)} \neq 0$ . Из (1.67) следует, что тогда все  $\tau_t^{(1)} \neq 0$ . Управление  $u_t$  определим уравнением

$$u_t: (\sigma'_t, \tau'_t) = 0. \quad (1.69)$$

Это уравнение имеет вид  $\tau_t^{(1)} u_t + (\dots) = 0$ , поэтому  $u_t$  однозначно определяется.

**Теорема 4.1.3.** Регулятор (1.67) — (1.69) адаптивен в классе  $\Xi'$  и субоптимален (для функционала (1.4)) с уровнем оптимальности  $C^0 C_y^{-1}$ . Закон управления (1.67) — (1.69) стабилизируется (т. е. при  $t \geq t_*$  имеет вид  $u_t = (\sigma_t, \tau_*)$ ,  $\tau_* = \text{const}$ , где  $\sigma_t$  — вектор (1.44)). Для числа  $r^0$  нарушений целевых неравенств  $|y_t - y^0| \leq C_y$  ( $t \geq m + p$ ) справедлива оценка

$$\begin{aligned} r^0 &\leq m |\tau'_0 - \tau'_*|^2 (1 - \rho^0)^{-2} [\mu' (2 - \mu'')]^{-1} \times \\ &\quad \times [(p + r + s) Q_u^2 + (p + r) Q_y^2] C_y^{-2}. \quad (1.70) \end{aligned}$$

Значения  $\tau'_*$ ,  $Q_y$ ,  $Q_u$  имеют обычный смысл, — см. доказательство теоремы 4.1.3 в § 4.Д.

## § 4.2. Задачи адаптивного управления дискретным объектом с другими способами составления рекуррентных целевых керавенств

### 4.2.1°. Скалярный объект в простейшем случае.

а) *Способ функциональной идентификации.* В предыдущем параграфе были рассмотрены задачи, в которых РЦН для  $t_t$  получались подстановкой в ЦУ текущего значения управления  $u_t = (\sigma_t, t_t)$ . В ряде случаев возможен и полезен другой прием получения РЦН. Он основан как бы на попытке идентификации объекта, т. е. попытке определения всех неизвестных коэффициентов; управление же на каждом шаге получается из формулы для желаемого управления, в которую вместо неизвестных значений параметров подставляются их оценки. Поскольку в рассматриваемых задачах идентификация объекта невозможна (т. е. невозможно асимптотически точное определение неизвестных коэффициентов объекта и помехи по данным измерений), то идентификации на самом деле не происходит. Через конечное число моментов времени КСА доставляет значения коэффициентов объекта (возможно, далекие от истинных значений), обладающие следующим свойством: истинные вход и выход объекта удовлетворяют «идентифицированному» уравнению объекта, но с другой помехой, ограниченной константой, близкой к соответствующей константе для истинной помехи. В этом случае будем говорить, что имеет место *функциональная идентификация*. Итак, исходная цель управления заменяется вспомогательной — требованием функциональной идентификации. РЦН пишутся именно для этой вспомогательной ЦУ. Управление строится в соответствии с основной ЦУ, с заменой неизвестных параметров объекта их текущими оценками. Этот способ получения РЦН будем называть *приемом функциональной идентификации*. Этот прием (вместе с методом РЦН) позволяет решать задачи адаптивного управления в тех случаях, когда уравнение объекта, полученное в результате функциональной идентификации, описывает объект того же класса адаптации (или «почти» того же класса), что и реальный объект, остающийся неизвестным. Поскольку адаптивное управление в равной степени «справляется» со всеми объектами этого класса, то оно решает и исходную задачу.

Рассмотрим этот прием вначале на примере простейшей задачи п. 4.1.2° субоптимального управления скалярными объектами.

б) *Уравнение объекта; постановка задачи адаптивного управления.* Пусть

$$a(\nabla) y_t - b(\nabla) u_t = v_t \quad (2.1)$$

— уравнение скалярного объекта,  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  — полиномы вида

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= 1 + \lambda a_1 + \dots + \lambda^r a_r, \\ b(\lambda) &= \lambda b_1 + \dots + \lambda^r b_r, \quad b_1 \neq 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пусть, как и в п. 4.1.2°, помеха  $v_t = v_t(\xi^b)$  нерегулярна в интервале значений  $[-C, C]$ :

$$|v_t| \leq C \quad (2.3)$$

и в остальном значения  $v_t$  произвольны. Предположим, что целью управления является выполнение неравенства

$$|y_t| \leq C_y \quad (2.4)$$

для всех достаточно больших  $t$ . Мы видели в § 3.2, что задача разрешима лишь в случае  $C_y \geq C$ ; пусть поэтому

$$C_y > C. \quad (2.5)$$

Предположим, что коэффициенты  $a_j$ ,  $b_j$  и помеха неизвестны, т. е., в обозначениях § 1.2, что  $\xi = [a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r, v_0^\infty]$ . Пусть объект (2.1) устойчив по управлению, и пусть этим условием определяется класс адаптации  $\Xi$ . (Выше было показано, что это предположение естественно для ЦУ (2.3).) Заметим, что, в отличие от п. 4.1.2°, сейчас не предполагаются известными  $\text{sign } b_1$  и число  $C_b$  в оценке  $|b_1| \leq C_b$ . Введем векторы

$$\tau^0 = \text{col}(-a_1, \dots, -a_r, b_1, \dots, b_r), \quad (2.6)$$

$$\tau_t = \text{col}(-a_r^{(t)}, \dots, -a_1^{(t)}, b_1^{(t)}, \dots, b_r^{(t)}), \quad (2.7)$$

$$\sigma'_t = \text{col}(y_t, \dots, y_{t-r+1}, u_t, \dots, u_{t-r+1}). \quad (2.8)$$

Таким образом,  $\tau^0$  и  $\tau_t$  — векторы неизвестных коэффициентов объекта и подстраиваемых параметров. Заметим, что вектор  $\sigma'_t$  — не сенсор (он содержит по сравнению с (1.9) одну «лишнюю» компоненту  $u_t$ ).

в) *Составление РЦН.* Запишем (заменив для удобства  $t$  на  $t + 1$ ) уравнение объекта (2.1) в виде

$$y_{t+1} = (\sigma'_t, \tau^0) + v_{t+1}. \quad (2.9)$$

Поскольку  $|y_{t+1} - (\sigma'_t, \tau^0)| \leq C$  (см. (2.3)) и  $C_y > C$ , то в качестве РЦН возьмем неравенства

$$|y_{t+1} - (\sigma'_t, \tau)| \leq C_y. \quad (2.10)$$

Решение этих неравенств и означает как бы идентификацию объекта: вектор  $\tau^0$  неизвестных параметров объекта удовлетворяет им. В (2.10) нужно взять  $C_y$  вместо  $C$ , поскольку РЦН (2.10) для  $\tau = \tau^0$  должны быть выполнены «с запасом». РЦН (2.10) соответствуют вспомогательной ЦУ  $|y_{t+1} - (\sigma'_t, \tau^0)| \leq C_y$ . (Поскольку  $\tau^0 = \tau^0(\xi)$ , это неравенство имеет вид (1.2.7).) Решение РЦН (2.10) равносильно функциональной идентификации объекта. Действительно, пусть при  $t \geq t_*$  выполнено (2.10) для некоторого  $\tau = \tau_*$  (не утверждается близость вектора  $\tau_*$  к  $\tau^0$ ); при  $t \geq t_*$  (2.10) эквивалентно соотношениям

$$y_{t+1} = (\sigma'_t, \tau_*) + v'_t, \quad (2.11)$$

$$|v'_t| \leq C_y. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.11) описывает объект вида (2.1), но с другими коэффициентами (компонентами вектора  $\tau_*$ ) и с другой «помехой»  $v'_t$ . Его можно записать в виде

$$a'(\nabla) y_t = b'(\nabla) u_t + v'_t, \quad (2.13)$$

где  $a'(\lambda)$ ,  $b'(\lambda)$  — полиномы:  $a'(\lambda) = 1 + \lambda a'_1 + \dots + \lambda^r a'_r$ ,  $b'(\lambda) = \lambda b'_1 + \dots + \lambda^r b'_r$ . Итак, вход  $u_t$  и выход  $y_t$  нашего объекта при  $t \geq t_*$  удовлетворяют уравнению нового объекта, но с другой помехой — произошла «функциональная идентификация».

Заметим, что в соответствии с определением РЦН значения векторов  $\sigma'_t$  и чисел  $y_{t+1}$  в (2.10) пока не определены, поскольку нет алгоритма управления.

г) *Формирование регулятора (алгоритма адаптивного управления).* В § 4.1 было показано, что оптимальное управление получается из условия, чтобы уравнение (2.1) объекта приняло вид  $y_{t+1} = v_{t+1}$ , т. е. из условия  $(\sigma'_t, \tau^0) = 0$ . Естественно поэтому находить управление  $u_t$  из условия

$$(\sigma'_t, \tau_t) = 0. \quad (2.14)$$

В качестве КСА определения  $\tau_t$  естественно взять какой-либо из алгоритмов «Полоска-1», поскольку неравенства (2.10) имеют вид (2.1.9). Итак, в обозначениях гл. 2,

$$\tau_{t+1} = \langle |y_{t+1} - (\sigma'_t, \tau)| \leq C_y \rangle_1 (\tau_t). \quad (2.15)$$

Соотношения (2.14), (2.15) полностью определяют алгоритм управления, если не обращать внимания на возможность равенства нулю коэффициента при  $u_t$  в левой части (2.14), а также на более существенный момент — на доказательство сходимости алгоритма (2.15). Эти вопросы будут рассмотрены ниже. Пока же продолжим рассуждения.

Пусть (2.15) — КСА:  $\tau_t = \text{const}$  при  $t \geq t_*$ , и при  $t > t_*$ ,  $\tau = \tau_t$  выполнено (2.10). Тогда из (2.10) и выбора управления (2.11) следует, что  $|y_{t+1}| \leq C_y$  при  $t \geq t_*$ , что и означает выполнение ЦУ. Более того, поскольку значение  $C_y$  может быть взято сколь угодно близким к  $C$ , то алгоритм управления (2.14), (2.15) будет субоптимальным с уровнем  $\rho^0 = CC_y^{-1}$ , сколь угодно близким к единице.

Заметим, что спустя время адаптации при  $t \geq t_*$  из (2.10) для  $\tau_t = \tau_* = \text{const}$  следует (2.11), (2.12). Это означает, что произошла функциональная идентификация. При этом не утверждается, что вектор  $\tau_*$  близок к вектору  $\tau^0$  и это на самом деле может не иметь места. Поэтому и следует говорить о функциональной, а не о «настоящей» идентификации. Для нас важно, что уравнению (2.11) удовлетворяют  $y_t$  и  $u_t$  реального объекта (2.1), остающегося неизвестным. Управление  $u_t$ , определяемое из (2.11), удовлетворяет при  $t \geq t_*$  уравнению  $(\sigma'_t, \tau_*) = 0$ , т. е. является оптимальным для объекта (2.11): в силу этого уравнения  $y_{t+1} = v'_{t+1}$ ,  $|y_{t+1}| \leq C_y$ , что означает выполнение ЦУ. Итак, функциональная идентификация сочетается в данном случае с приемом оптимального управления «функционально идентифицированного» объекта. В других задачах управление строится по-другому.

Подчеркнем, что точная идентификация объекта в данном случае невозможна:  $y_t$  и  $u_t$  могут удовлетворять разным уравнениям (2.1) и (2.11), в которых  $v_t$  и  $v'_t$  удовлетворяют неравенству (2.2). Лишь при дополнительных и достаточно ограничительных условиях на помеху (обычно эти условия включают требование стационарности помехи) идентификация возможна.

д) *Обоснование алгоритма адаптивного управления.* Продолжим решение рассматриваемой задачи. Мы остановились на том, что достаточно обеспечить возможность определения  $u_t$  из (2.11) и конечную сходимость алгоритма (2.15).

Условие конечной сходимости (б) п. 2.1.3° выполнено для  $\tau_* = \tau^0$ ,  $\rho = CC_y^{-1}$ . Действительно, из (2.9) получаем, что при  $\tau = \tau^0$  левая часть (2.10) не превосходит  $C = \rho C_y$ . Так как в нашем случае  $\varepsilon_t \equiv C_y$ , то условие (а) п. 2.1.3° равносильно условию  $|a_t| = |\sigma'_t| \leq \text{const}$ , или, иначе, условию  $|y_t| \leq Q_y$ ,  $|u_t| \leq Q_u$ , где  $Q_y$ ,  $Q_u$  — некоторые постоянные. В силу устойчивости объекта по управлению достаточно обеспечить соотношение

$$|y_t| \leq Q_y \quad (2.16)$$

с любой (произвольно большой) постоянной  $Q_y$ .

Как и в § 4.1, для обеспечения (2.16) вводим остановки объекта в моменты, когда (2.16) нарушается. После остановки начальные условия для каждого последующего движения ограничиваются одними и теми же постоянными (см. (1.20)). Тогда выполнено (2.16). Следовательно, выполнено условие сходимости (а) п. 2.1.3°. Во время остановок  $\tau_t$  изменять не будем; поэтому остановки не скажутся на алгоритме (2.15). Итак, любой из (2.15) — КСА.

Рассмотрим теперь возможность определения  $u_t$  из (2.11). Если взять алгоритм (2.15) в виде (2.1.13), то «в исключительных случаях» коэффициент  $b_1^{(t)}$  при  $u_t$  может обращаться в нуль. Чтобы избежать этого, возьмем в качестве КСА (2.15) алгоритм (2.1.17), содержащий свободный параметр  $\mu_t$ , которым распорядимся так, чтобы указанное обстоятельство не имело места:

---


$$\begin{aligned} \tau_{t+1} &= \tau_t, \text{ если } |y_{t+1}| \leq C_y, \\ \tau_{t+1} &= \tau_t - \mu_t (y_{t+1} - C \operatorname{sign} y_{t+1}) |\sigma'_t|^{-2} \sigma'_t, \quad (2.17) \\ &\text{если } |y_{t+1}| > C_y. \end{aligned}$$


---

(Мы учли, что  $\eta_t = y_{t+1} - (\sigma'_t, \tau_t) = y_{t+1}$  в силу (2.11), а также что  $\rho \varepsilon_t = \rho C_y = C$ .) Здесь  $\mu_t$  — любое число в интервале  $0 < \mu' \leq \mu_t \leq \mu'' < 2$ . Из (2.17) и (2.7) следует, что  $b_1^{(t+1)}$  — линейная функция  $\mu_t$ . Именно,

$$b_1^{(t+1)} = b_1^{(t)} - \mu_t (y_{t+1} - C \operatorname{sign} y_{t+1}) |\sigma'_t|^{-2} u_t.$$

Поэтому  $\mu_t \in [\mu', \mu'']$  можно определить так, чтобы  $b_1^{(t+1)} \neq 0$ . Этот выбор неоднозначен; не будем указывать конкретную формулу для  $\mu_t$ , отметим лишь, что естественно брать  $\mu_t = 1$  (тогда оценка для числа ошибок в теореме 2.1.1а — наилучшая) и изменять значение  $\mu_t$ , если для  $\mu_t = 1$  полученная величина  $b_1^{(t+1)}$  близка к нулю. Для числа ошибок алгоритма (2.17) по теореме 2.1.1а справедлива оценка

$$r^0 \leq |\tau_0 - \tau^0|^2 [(r + 1) C_y^2 + r C_u^2] (C_y - C)^{-2} \times \\ \times [\mu' (2 - \mu')]^{-1}. \quad (2.18)$$

(Так как  $\varepsilon_t \equiv C_y$ , то  $\varepsilon = C_y^{-1} [(r + 1) C_y^2 + r C_u^2]^{1/2}$ .) Из (2.14) получаем

---


$$u_t = [b_1^{(t)}]^{-1} (b_2^{(t)} u_{t-1} + \dots + b_r^{(t)} u_{t-r+1} - a_1^{(t)} y_t - \dots - a_r^{(t)} y_{t-r+1}). \quad (2.19)$$


---

Поскольку после каждой остановки имеется хотя бы один момент движения, то будет и бесконечно много моментов движения. Для каждого из них поставлено РЦН. Так как (2.15) — КСА, то при  $t \geq t_*$  будет выполнено (2.4). Возьмем  $Q_y > C_y$ ; тогда при  $t \geq t_*$  остановок не будет.

Заметим, что, как и в § 4.1, интервалы движения можно ограничить условием, чтобы время  $j$ -го движения не пре-восходило заданного числа  $T^{(j)}$ . (Тогда при  $t \geq t_*$  будет бесконечно много остановок).

Сформулируем полученный результат:

Пусть  $\Sigma$  — класс объектов и возмущений, определенный условиями: объект (2.1) устойчив по управлению  $u_t$ , возмущение  $v_t$  удовлетворяет условию (2.3) и в остальном произвольно. Пусть  $Q_y > 0$  — заданная постоянная ( $Q_y > C_y$ ), движение (согласно уравнению (2.1)) происходит до тех пор, пока не нарушается (2.16), затем объект останавливается, переводится в начальное положение, для которого выполнено (1.20), и. т. д. Пусть (2.4) — ЦУ и управление осуществляется по формулам (2.17), (2.19), где  $\tau_t$ ,  $\sigma'_t$  — векторы (2.7), (2.8),  $\tau_0$  — произвольный вектор и выполнено указанное условие относительно выбора  $\mu_t$ . Тогда описанная система адаптивна в классе  $\Sigma$  и закон управления (2.17),

(2.18) — стабилизирующий и субоптимальный (с уровнем  $\rho = CC_u^{-1}$ ) для функционала (1.5). Для числа моментов движения, при которых не выполнено ЦУ, справедлива оценка (2.18).

е) *Замечания.* Оказывается, что аналогичный результат справедлив и без требования остановок объекта при нарушении (2.16). Именно, для описанного алгоритма управления существует такая постоянная  $Q_y$ , что (2.16) выполнено. Доказательство этого факта проводится аналогично доказательству теоремы 4.1.1. (Аналогичные рассуждения для более общего случая приведены ниже, в п. 4.2.2° в.)

В заключение этого пункта отметим, что в ряде задач прием функциональной идентификации к цели не приводит. «В чистом виде» он неприменим, например, в задаче субоптимального управления при наличии запаздывания в управлении или в измерении, рассмотренной в п. 4.1.4°. Используя этот прием, мы встретились бы с рядом трудностей; укажем лишь самую существенную. Как следует из п. 4.1.4°, управление нужно было бы определять, приравнивая к нулю квадратную скобку в уравнении (1.42) для «функционально идентифицированного» объекта, т. е. в уравнении

$$y_{t+k} - y^0 = [\nabla^{-k} F^{(t)}(\nabla) b^{(t)}(\nabla) u_t - \nabla^s G^{(t)}(\nabla) y_t - y^0] + \\ + F^{(t)}(\nabla) w_{t+k}. \quad (2.20)$$

(Для простоты взят случай  $d(\lambda) \equiv 1$ .) Здесь  $F^{(t)}(\lambda)$ ,  $G^{(t)}(\lambda)$  — полиномы, определяемые по  $a^{(t)}(\lambda)$  из уравнения (1.40) с  $d(\lambda) \equiv 1$ . (При  $t \geq t_*$  их коэффициенты постоянны.) Из (2.20) следует оценка

$$|y_{t+k} - y^0| = |F^{(t)}(\nabla) w_{t+k}| \leq \|F^{(t)}\| C$$

вместо требуемой по ЦУ оценки  $|y_{t+1} - y^0| \leq C_y$ , где  $C_y$  сколь угодно близко к оптимальному значению  $\|F\| C$ . Не удается доказать (и вряд ли это верно), что величина  $\|F^{(t)}\| C$  близка к  $C_y$ . Итак, получается адаптивное, но не субоптимальное управление. Это связано с тем, что на самом деле идентификации не происходит. (Если бы она происходила, то полином  $a^{(t)}(\lambda)$  был бы близок к  $a(\lambda)$ ,  $F^{(t)}(\lambda)$  — к  $F(\lambda)$  и  $\|F^{(t)}\|$  — к  $\|F\|$ .) Отметим, однако, что в указанной задаче прием функциональной идентификации все же применим, но не «в чистом виде», а в комбинации с методом § 4.1 (см. п. 4.Д.3°).

**4.2.2°. Субоптимальное управление векторным объектом без запаздывания в управлении и в измерении; матрица  $b_1$  неизвестна.** а) *Уравнение объекта; постановка задачи адаптивного управления.* Результаты предыдущего пункта распространяются на векторный объект (2.1). Именно, пусть (2.1) — векторный объект, причем векторы  $y_t$  и  $u_t$  имеют одинаковую размерность  $n$ ;  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  — матричные полиномы степени  $\leq r$ ;  $a(0) = I_n$  — единичная матрица;  $b(\lambda) = \lambda b_1 + \dots$ ,  $\det b_1 \neq 0$ . Предположим, что компоненты  $v_t^{(j)} = v_t^{(j)}(\xi^b)$  векторного возмущения  $v_t = v_t(\xi^b)$  нерегулярны в интервалах значений  $[-C^{(j)}, C^{(j)}]$ :

$$|v_t^{(j)}| \leq C^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.21)$$

и в остальном  $v^{(j)}$  произвольны. Пусть сенсор — вектор (1.9) и целью управления является выполнение неравенств

$$|y_t^{(j)}| \leq C_y^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

Из результатов § 3.1 следует, что задача разрешима лишь при  $C_y^{(j)} \geq C^{(j)}$ , пусть поэтому .

$$C_y^{(j)} > C^{(j)}. \quad (2.23)$$

Предположим, что объект (2.1) устойчив по управлению. Класс  $\Xi$  адаптации определяется этим условием, а также условием  $\det b_1 \neq 0$  и предложением (2.21) относительно помехи. (Заметим, что, в отличие от п. 4.1.4°, никаких других предположений, кроме  $\det b_1 \neq 0$ , не делается.)

б) *Построение адаптивного управления.* Применим прием функциональной идентификации. Запишем уравнение (2.1) в виде

$$y_{t+1} = \tau^0 \sigma'_t + v_{t+1}, \quad (2.24)$$

где  $\tau^0$  и  $\sigma'_t$  — матрица и вектор (2.6) и (2.8). Пусть  $\tau_t$  — матрица (2.7) настраиваемых параметров и  $\tau_j^0, \tau_{t,j}, \tau_j$  — строки матриц  $\tau^0, \tau_t, \tau$ . Применяя прием функциональной идентификации, возьмем в качестве РЦН неравенства

$$|y_{t+1}^{(j)} - \tau_{t,j} \sigma'_t| \leq C_y^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.25)$$

Эти неравенства для каждого  $j$  решаются независимо:

$$\tau_{t+1,j} = \langle |y_{t+1}^{(j)} - \tau_j \sigma'_t| \leq C_y^{(j)} \rangle_1 (\tau_{t,j}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.26)$$

Алгоритм (2.26) для каждого  $j$  берем в виде (2.1.17) со свободным параметром  $\mu_t$ , который обозначим через  $\mu_t^{(j)}$ . (Этот алгоритм совпадает с (2.17), если в (2.17) заменить  $\tau_t$  на  $(\tau_{t,j})^*$ , а  $y_{t+1}$ ,  $\mu_t$ ,  $C$ ,  $C_y$  — на  $y_{t+1}^{(j)}$ ,  $\mu_t^{(j)}$ ,  $C^{(j)}$ ,  $C_y^{(j)}$ .) Начальную матрицу  $\tau_0$  выбираем так, чтобы  $\det b_1^{(0)} \neq 0$ , а параметры  $\mu_t^{(j)}$  — так, чтобы  $\det b_1^{(t)} \neq 0$ . Это всегда можно сделать. Действительно, пусть  $\det b_1^{(t)} = 0$  и, например,  $\mu_t^{(j)} = \mu_t$ . Так как  $b_1^{(t+1)} = b_1^{(t)} + \mu_t c_t$  — линейная функция  $\mu_t$ , то  $\det b_1^{(t+1)} = P_t(\mu_t)$  — полином от  $\mu_t$ ,  $P_t(0) = 0$ . Следовательно,  $P_t(\mu_t) = 0$  лишь для изолированных значений  $\mu_t$ .

Управление  $u_t$  определим (используя неравенство  $\det b_1^{(t)} \neq 0$ ) из соотношения

$$\tau_t \sigma_t' = 0, \quad (2.27)$$

или, иначе, по формуле (2.19). Соотношения (2.26) и (2.19) задают алгоритм управления.

Если (2.26) — КСА (т. е. если выполнены условия сходимости (2.1.10), (2.1.11)), то существует такой момент  $t_*$ , что при  $t \geq t_*$  выполнена ЦУ (2.22), т. е. система адаптивна. Действительно, при  $t \geq t_*$  выполнены ЦН (2.25), а они, в силу (2.27), совпадают с (2.22).

в) *Обоснование алгоритма адаптации.* Покажем, что (2.26) — КСА. Условие (2.1.11), очевидно, выполнено для  $\tau_* = \tau_j^0$ ,  $\rho = C^{(j)}(C_y^{(j)})^{-1}$ . Условие (2.1.10), т. е. условие  $|\sigma_t'| \leq \text{const}$ , сводится, в силу устойчивости объекта по управлению, к условию  $|y_t^{(j)}| \leq Q_y^{(j)}$ . Как и в предыдущем пункте, его можно обеспечить, задавая  $Q_y^{(j)}$  произвольно (лишь бы  $Q_y^{(j)} > C_y^{(j)}$ ) и вводя остановки объекта с обычными условиями. Рассмотрим, однако, ситуацию, когда остановки объекта не допустимы, — объект все время функционирует согласно уравнению (2.1).

Покажем, что существуют постоянные  $Q_y^{(j)}$ , для которых  $|y_t^{(j)}| \leq Q_y^{(j)}$ . Именно, покажем, что наша система диссипативна.

По теореме 2.1.3 (см. замечание в п. 2.1.5°) для любого  $\delta > 0$  существует такое число  $T_* = T_*(\delta)$ , что при  $t \geq T_*$  выполнены все неравенства

$$|y_{t+1}^{(j)} - \tau_{t,j} \sigma_t'| \leq C_y^{(j)} (1 + \delta |\sigma_t'|^2)^{1/2}.$$

В силу (2.27) эти неравенства совпадают с неравенствами

$$|y_{t+1}^{(j)}| \leq C_y^{(j)} (1 + \delta |\sigma_t'|^2)^{1/2}.$$

Полагая  $C_y = [(C_y^{(1)})^2 + \dots + (C_y^{(n)})^2]^{1/2}$ , получаем

$$|y_{t+1}|^2 \leq C_y (1 + \delta |\sigma_t'|^2) \text{ при } t \geq T_*. \quad (2.28)$$

По теореме 4.П.3 (см. ниже п. 4.П.5°) система (2.1), (2.28) диссипативна, если только число  $\delta > 0$  взять достаточно малым.

Итак,  $\exists Q_y: |y_t| \leq Q_y$ , т. е. (2.26) — КСА. Это означает, что система (2.1), (2.26), (2.19) адаптивна в классе  $\Xi$ .

Можно показать, что построенный закон управления (2.26), (2.19) субоптимален относительно естественно выбранного функционала; соответствующие рассуждения опускаем, поскольку они аналогичны рассуждениям § 4.1.

**4.2.3°. Объект первого порядка.** Рассмотрим специально случай векторного объекта первого порядка, уравнения которого для удобства дальнейших ссылок запишем в виде

$$\mathbf{x}_{v+1} = P\mathbf{x}_v + Q\mathbf{u}_v + f_{v+1}, \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Здесь  $\mathbf{x}_v$  и  $\mathbf{u}_v$  — векторы порядка  $n$ ;  $P$  и  $Q$  — квадратные  $n \times n$ -матрицы,  $\det Q \neq 0$ . Объект (2.29), очевидно, устойчив по управлению  $\mathbf{u}_v$ . Пусть  $|f_v^{(j)}| \leq C_x^{(j)}$ ,  $C_x^{(j)} > C^{(j)}$ , и ЦУ состоит в обеспечении следующих неравенств для всех достаточно больших  $v$ :

$$|x_v^{(j)}| \leq C_x^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.30)$$

Здесь  $x_v^{(j)}$  — компоненты вектора  $\mathbf{x}_v$ . Пусть класс адаптации  $\Xi$  состоит из всех объектов и возмущений указанного вида (т. е.  $P$  и  $Q$  — полностью неизвестные матрицы,  $\det Q \neq 0$ ).

Поставленная задача адаптивного управления решается весьма просто излагаемым методом. Не будем, однако, приводить ее непосредственное решение, а соплемся на результаты п. 4.2.2°, поскольку эта задача — частный случай задачи п. 4.2.2°.

В данном случае  $a(\lambda) = I - \lambda P$ ,  $b(\lambda) = \lambda Q$ ,  $\sigma_v' = \text{col}(\mathbf{x}_v, \mathbf{u}_v)$ ,  $\tau^0 = \|P, Q\|$ . Пусть  $\tau_v = \|P_v, Q_v\|$  — матрица подстраиваемых параметров и по-прежнему  $\tau_{v,j}$  — строки матрицы  $\tau_v$ . Алгоритм (2.26) (если его взять в виде

(2.1.17)) имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_{v+1,j} &= \tau_{v,j}, \text{ если } |x_{v+1}^{(j)}| \leq C_x^{(j)}, \\ \tau_{v+1,j} &= \tau_{v,j} - \frac{\mu_v^{(j)} (x_{v+1}^{(j)} - C^{(j)} \operatorname{sign} x_{v+1}^{(j)})}{\|\mathbf{x}_v\|^2 + \|\mathbf{u}_v\|^2} [\operatorname{col}(\mathbf{x}_v, \mathbf{u}_v)]^*, \quad (2.31) \\ &\text{если } |x_{v+1}^{(j)}| > C_x^{(j)}. \end{aligned}$$

При этом  $\tau_0 = \|P_0, Q_0\|$  — произвольная матрица,  $\det Q_0 \neq 0$ , числа  $\mu_v^{(j)}$  из интервала  $0 < \mu' \leq \mu_v^{(j)} \leq \mu'' < 2$  подбираются так, чтобы  $\det Q_{v+1} \neq 0$ ,  $v = 0, 1, \dots$ . Из (2.19) имеем

$$\mathbf{u}_v = -Q_v^{-1} P_v \mathbf{x}_v. \quad (2.32)$$

Из изложенного следует, что система (2.29), (2.31), (2.32) адаптивна в классе  $\Xi$ : существует такой момент  $t_* = t_*(x_0, \tau_0)$ , что при  $t \geq t_*$  выполнено (2.30).

Заметим, что совершенно аналогично решаются задачи, в которых вместо ЦУ (2.30) взяты ЦУ  $|x_v^{(j)} - a^{(j)}| \leq C_x^{(j)}$ , или  $|\mathbf{x}_v - \mathbf{a}| \leq C_x$  (где  $a^{(j)}$ ,  $\mathbf{a}$  — заданные постоянные числа и заданный вектор). В последнем случае вместо (2.30) следовало бы использовать алгоритм «Векторная полоска» п. 2.1.8, б), дополненный введением свободного параметра  $\mu_v$ , выбираемого так, чтобы  $\det Q_v \neq 0$ .

**4.2.4. Объект, неустойчивый по управлению.** Выше было отмечено, что неизвестно решение задачи адаптивного и субоптимального управления для объекта с ограниченной помехой. (Субоптимальность понимается в смысле естественно определяемого функционала; см. (1.4).) Покажем, что если ЦУ, означающую субоптимальность управления (с любым заданным уровнем), заменить более слабой ЦУ, означающей диссипативность, то эта задача решается и притом весьма просто. Заметим, что требование диссипативности соответствует требованию асимптотической устойчивости замкнутой системы при отсутствии внешних возмущений.

Рассмотрим, для простоты рассуждений, скалярный объект (2.1), где, как обычно,  $|v_t| \leq C$ . (Все рассуждения совершенно аналогичны в случае векторного объекта.)

Вводя вектор  $x_t = \text{col}(y_t, \dots, y_{t-r+1}, u_{t-1}, \dots, u_{t-r+1})$ , получаем из (2.1) систему в стандартной форме (см. (3.1.10), (3.1.11)), которую запишем в виде

$$x_{t+1} = Ax_t + bu_t + b'v_{t+1}, \quad y_t = Cx_t. \quad (2.33)$$

Пусть полиномы  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  не имеют общих множителей. Тогда (см. п. 3.1.3°) пара  $(A, b)$  управляема. Из (2.33) последовательно имеем

$$\begin{aligned} x_{t+2} &= A^2x_t + Abu_t + bu_{t+1} + Ab'v_{t+1} + b'v_{t+2}, \\ &\vdots \\ x_{t+2r-1} &= A^{2r-1}x_t + A^{2r-2}bu_t + \dots + bu_{t+2r-2} + \\ &\quad + A^{2r-2}b'v_{t+1} + \dots + b'v_{t+2r-1}. \end{aligned}$$

Пусть  $N = 2r - 1$  — размерность вектора  $x_t$ . Полагая

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_v &= x_{vN}, \quad \mathbf{u}_v = \text{col}(u_{(v+1)N-1}, \dots, u_{vN}), \\ \mathbf{v}_v &= \text{col}(v_{(v+1)N}, \dots, v_{vN+1}), \quad f_{v+1} = Q'\mathbf{v}_v, \end{aligned}$$

$P = A^N$ ,  $Q = \|b, \dots, A^{N-1}b\|$ ,  $Q' = \|b', \dots, A^{N-1}b'\|$ , получаем систему вида (2.29). Так как пара  $(A, b)$  управляема, то  $\det Q \neq 0$ . Очевидно,  $|f_v^{(j)}| \leq K^{(j)}C$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , где  $K^{(j)}$  зависит лишь от параметров объекта. Взяв  $C_x^{(j)} > K^{(j)}C$  и полагая  $C_y = \max_j C_x^{(j)}$ ,  $C_u = \max_j C_x^{(r+j)}$ ,  $j = 0, \dots, r - 1$ , перепишем ЦУ (2.30) в виде

$$\begin{aligned} |y_{vN}| &\leq C_y, \quad |y_{vN-j}| \leq C_y, \quad |u_{vN-j}| \leq C_u, \quad (2.34) \\ v &= 0, 1, \dots, j = 1, \dots, r - 1. \end{aligned}$$

Из (2.34) следует диссипативность системы. Решение задачи адаптивного управления дается формулами (2.31), (2.32). Класс адаптации: произвольное уравнение (2.1) фиксированного порядка  $r$  со взаимно простыми полиномами  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$ .

Недостатки этого решения очевидны: подстраиваемых параметров намного больше, чем неизвестных параметров объекта, закон управления (выражающий значение  $u_t$  через  $u_{t-q}^t, y_{t-p}^t$ ) не стабилируется, постоянные  $C_y, C_u$  в ЦУ (2.34) завышены (во всяком случае, нет утверждения о том, что они могут быть взяты сколь угодно близкими к минималь-

но возможным, т. е. что система управления субоптимальна). Кроме того, в ЦУ (2.34) вошли неравенства  $|y_t| \leq C_y$  не для всех значений  $t$ . (Для пропущенных значений  $t$  выполнение этих неравенств следует из (2.34), но для еще более завышенной постоянной  $C_y$ .) Заметим, однако, что поскольку постоянные  $C_x^{(j)}$  — любые, для которых  $C_x^{(j)} > K^{(j)}C$ , то при  $C \rightarrow 0$  можно брать в ЦУ (2.34)  $C_y \rightarrow 0$  и  $C_u \rightarrow 0$ .

**4.2.5°. Синтез адаптивного регулятора с эталонной моделью.** а) *Постановка задачи.* Предположим, что дан объект (выход его обозначим через  $y_t$ ), на который действуют возмущение  $v_t$ , задающий сигнал  $x_t$  и управляющий сигнал  $u_t$  (сигнал регулирования качества системы) \*):

$$a(\nabla) y_t = b(\nabla) u_t + c(\nabla) x_t + v_t. \quad (2.35)$$

Пусть желаемые свойства объекта описываются эталонной моделью со входом  $x_t$  и выходом  $y_t^M$ :

$$a^M(\nabla) y_t^M = c^M(\nabla) x_t. \quad (2.36)$$

В (2.35), (2.36) все величины скалярные,

$$a(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^r a_j \lambda^j, \quad b(\lambda) = \sum_{j=1}^r b_j \lambda^j, \quad b_1 \neq 0, \quad c(\lambda) = \sum_{j=1}^r c_j \lambda^j, \quad (2.37)$$

$$a^M(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^r a_j^M \lambda^j, \quad c^M(\lambda) = \sum_{j=1}^r c_j^M \lambda^j. \quad (2.38)$$

Изменяются все сигналы, кроме  $v_t$ .

Будем предполагать, что  $x_t$  — ограниченный сигнал ( $|x_t| \leq \text{const}$ ) и что модель (2.36) устойчива по выходу  $y_t^M$ . (Эти условия обычно всегда выполнены.) Задача состоит в построении регулятора, вырабатывающего сигнал  $u_t$  так, чтобы обеспечить близость (по возможности) выхода объекта к выходу эталонной модели:

$$|y_t - y_t^M| \leq C_y. \quad (2.39)$$

Неравенство (2.39) должно быть выполнено для всех дос-

\* ) Уравнение (2.35) может описывать объект и регулятор; если оно описывает лишь объект, то обычно  $c(\lambda) \equiv 0$ . Другой часто встречающийся случай:  $c(\lambda) = -b(\lambda)$ .

достаточно больших  $t$ . Значение  $C_y$  в (2.39) связано с величиной помехи  $v_t$ .

Относительно помехи  $v_t$  будем предполагать, как и в п. 4.1.2°, что она нерегулярна в интервале  $[-C, C]$ , т. е.

$$|v_t| \leq C, \quad (2.40)$$

а в остальном значения  $v_t$  произвольны.

Пренебрегая временно в (2.35) внешним возмущением  $v_t$ , получим из (2.35), (2.36), что равенство  $y_{t+1} = y_{t+1}^M$  имеет место, если

$$\begin{aligned} b_1 u_t + \dots + b_r u_{t-r+1} &= a_1 y_t + \dots + a_r y_{t-r+1} - \\ &- a_1^M y_t^M - \dots - d_r^M y_{t-r+1}^M + \\ &+ (c_1^M - c_1) x_t + \dots + (c_r^M - c_r) x_{t-r+1}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Если не пренебречь возмущением, то при выполнении (2.41) из (2.35) и (2.36) имеем  $y_{t+1} - y_{t+1}^M = v_{t+1}$ . Поэтому (2.39) выполнено (для момента  $t+1$ ), если выполнено (2.41) и  $C_y \geq C$ . Легко видеть, что условие  $C_y \geq C$  и необходимо для существования управления, обеспечивающего (2.39). Это доказывается дословно так же, как и аналогичное утверждение в п. 3.2.1° (см. также п. 4.1.2°). При выполнении (2.41) минимально возможное  $C_y$  в (2.39) совпадает со значением  $C$  в (2.40). Итак, возьмем  $C_y > C$  и в качестве ЦУ примем условие (2.39), которое должно быть выполнено для всех достаточно больших  $t$ . Пусть  $\rho = CC_y^{-1}$ .

Будем предполагать, как и в п. 4.1.2°, что объект (2.35) устойчив по управлению, а также что известны  $\text{sign } b_1$  и число  $C_b$  в оценке  $|b_1| \leq C_b$ . Первое предположение обосновывается так же, как и в п. 4.1.2°, а второе связано с выбором в дальнейшем алгоритма «Полоска-2» в качестве алгоритма адаптации. Этими предположениями, а также предположением относительно помехи и модели определяется класс адаптации, который обозначим через  $\Xi_1$ .

Управлением (2.41) воспользоваться нельзя, так как коэффициенты  $a_j, b_j, c_j, a_j^M, c_j^M$  неизвестны; оно, однако, подсказывает выбор вектора сенсоров. Именно, вводя вектор

$$\begin{aligned} \sigma_t = \text{col} (u_{t-1}, \dots, u_{t-r+1}, x_t, \dots, x_{t-r+1}, y_t, \dots \\ \dots, y_{t-r+1}, y_t^M, \dots, y_{t-r+1}^M), \end{aligned} \quad (2.42)$$

перепишем (2.41) в виде

$$\underline{u}_t = (\sigma_t, \tau^0), \quad (2.43)$$

где  $\tau^0$  — вектор той же размерности, что и  $\sigma_t$ , компоненты которого легко выписать. (Они неизвестны, так как неизвестны  $a_j, b_j, c_j$ .) Итак, в задаче адаптивного управления в качестве сенсора следует взять вектор (2.42).

б) *Решение задачи адаптивного управления.* Для составления РЦН можно воспользоваться двумя описанными выше способами. Воспользуемся сначала первым способом (§ 4.1). Исходя из формулы (2.43), ищем управление в виде

$$\underline{\underline{u}}_t = (\sigma_t, \tau_t), \quad (2.44)$$

где  $\tau_t$  — вектор подстраиваемых параметров. Запишем (2.35) в виде

$$y_{t+1}^M = y_{t+1} + b_1 [u_t - (\sigma_t, \tau^0)] + v_{t+1}. \quad (2.45)$$

Подставляя сюда (2.44) и заменяя  $u_t$  и  $\tau$ , получаем из ЦУ (2.39) следующие РЦН:

$$|b_1[(\sigma_t, \tau) - (\sigma_t, \tau^0)] + v_{t+1}| \leq C_v. \quad (2.46)$$

Эти рекуррентные неравенства имеют вид (2.1.18). Для их решения применяем алгоритм «Полоска-2»:

$$\begin{aligned} \tau_{t+1} &= \tau_t, \text{ если } |y_{t+1} - y_{t+1}^M| < C_v, \\ \tau_{t+1} &= \tau_t - \frac{(1-\rho) \operatorname{sign} b_1 (y_{t+1} - y_{t+1}^M) \sigma_t}{C_b |\sigma_t|^2}, \quad (2.47) \\ &\text{если } |y_{t+1} - y_{t+1}^M| \geq C_v. \end{aligned}$$

(Мы взяли  $\mu_t = (1-\rho) C_b^{-1}$  и учли, что в нашем случае  $\eta_t$ , т. е. значение под знаком модуля в (2.46) для  $\tau = \tau_t$ , равно  $y_{t+1} - y_{t+1}^M$ .) Алгоритм (2.44), (2.47), где  $\sigma_t$  — вектор измеряемых величин (2.42), есть в нашем случае алгоритм адаптивного управления.

в) *Обоснование алгоритма адаптивного управления.* Нам осталось доказать конечную сходимость алгоритма и указать значение  $\rho$  в (2.47). По теореме 2.1.2 нужно установить ограниченность вектора  $\sigma_t$  (см. условие (а) п. 2.1.4°), а также проверить выполнение (2.46) в усиленном

смысле (см. условие (б) п. 2.1.4°). Последнее, очевидно, имеет место для  $\tau_* = \tau^0, \rho = CC_y^{-1}$ . Итак, в (2.47)  $\rho = CC_y^{-1}$ . Доказательство ограниченности вектора  $\sigma_t$  проводится так же, как и в п. 4.2.2°. По теореме 2.1.3 при любом  $\delta > 0$  имеется лишь конечное число значений  $t$ , для которых нарушены неравенства

$$|y_{t+1} - y_{t+1}^M| \leq C_y (1 + \delta |\sigma_t|^2)^{1/2}. \quad (2.48)$$

Поэтому существует такое  $T$ , что при  $t \geq T$  все неравенства (2.48) выполнены. В силу ограниченности  $x_t$  и устойчивости модели по выходу будет ограничен и выход  $y_t^M$ . По теореме 4.П.3 о диссипативности (см. § 4.П) система (2.35), (2.48) диссипативна. Поэтому  $|u_t| \leq Q_u, |y_t| \leq Q_y$  для некоторых  $Q_u, Q_y$ , т. е.  $|\sigma_t| \leq \text{const}$ . Итак, (2.47) — КСА: существует такое число  $t_*$ , что при  $t \geq t_*$  выполнено (2.38). Сформулируем полученный результат:

*Система (2.35), (2.44), (2.47) при любом  $\tau_0$  адаптивна в классе  $\Xi_1$ ; закон управления (2.44), (2.47) — стабилизирующийся.*

Легко проверяется, что управление (2.44), (2.47) также и субоптимально с уровнем  $\rho = CC_y^{-1}$  для функционала

$$J(u_0^\infty) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup_{v_0} |y_t - y_t^M|. \quad (2.49)$$

г) *Замечание.* Выше предполагалось, что коэффициенты модели  $a_j^M, c_j^M$  неизвестны. Если они известны, то задача упрощается в том смысле, что вектор подстраиваемых параметров  $\tau$  следует брать меньшей размерности (именно на  $r - 1$  компонент меньше); в качестве  $\sigma_t$  следует взять вектор, полученный из (2.42) отбрасыванием компонент  $y_{t-1}^M, \dots, y_{t-r+1}^M$ . Доказательство остается тем же. (Заметим, что в число сенсоров необходимо включить величину  $y_{t+1}^M$ , поскольку  $y_{t+1}^M$  входит в правую часть (2.47), которая может зависеть от  $\sigma_t$  и  $\sigma_{t+1}$ . Поэтому сенсорами будут компоненты построенного вектора  $\sigma_t$  и  $y_t^M$ .)

д) *Использование приема функциональной идентификации.* Применим теперь другой способ получения РЦН — функциональную идентификацию. Соответственно предположим, что класс адаптации  $\Xi_2$  определен условиями: объект устойчив по управлению  $u_t$ , модель известна и вы-

полнено (2.40). Таким образом, по сравнению с определением класса  $\Xi_1$  отсутствуют предположения о коэффициенте  $b_1$ , но зато предполагаются известными коэффициенты  $a_j^M, c_j^M$ . Последнее предположение можно было бы и не делать, но оно мало ограничительно. Напомним, что  $x_t, y_t^M$  ограничены при  $t \rightarrow \infty$ .

Обозначим через  $a_t(\lambda), b_t(\lambda), c_t(\lambda)$  полиномы вида (2.37) с подстраиваемыми коэффициентами  $a_j^{(t)}, b_j^{(t)}, c_j^{(t)}$ . В соответствии с методом функциональной идентификации составим РЦН для «определения» коэффициентов  $a_j, b_j, c_j$  объекта (2.35). Для этого введем векторы

$$\tau^0 = \text{col}(a_1, \dots, a_r, -b_1, \dots, -b_r, -c_1, \dots, -c_r), \quad (2.50)$$

$$\tau_t = \text{col}(a_1^{(t)}, \dots, a_r^{(t)}, -b_1^{(t)}, \dots, -b_r^{(t)}, -c_1^{(t)}, \dots, -c_r^{(t)}), \quad (2.51)$$

$$\sigma'_t = \text{col}(y_{t-1}, \dots, y_{t-r+1}, u_t, \dots, u_{t-r+1}, x_t, \dots, x_{t-r+1}) \quad (2.52)$$

и перепишем уравнение объекта (2.35) в виде

$$y_{t+1} + (\sigma'_t, \tau^0) = v_{t+1}. \quad (2.53)$$

Для оценки  $\tau_t$  вектора  $\tau^0$  составляем следующие РЦН:

$$|y_{t+1} + (\sigma'_t, \tau)| \leq C_y. \quad (2.54)$$

Здесь  $C_y > C$ . Неравенства (2.54) имеют решение и притом «в усиленном смысле»: при  $\tau = \tau^0$  выражение под знаком модуля в (2.54) в силу (2.53) совпадает с  $v_{t+1}$  и  $|v_{t+1}| \leq C = \rho C_y$ , где  $\rho < 1$ . Неравенства (2.54) имеют вид (2.1.9). Запишем пока в общем виде КСА для их решения:

$$\tau_{t+1} = \langle y_{t+1} - (\sigma'_t, \tau) | \leq C_y \rangle_1(\tau_t). \quad (2.55)$$

По этому алгоритму (он подлежит уточнению) определяется вектор оценок (2.51).

Следуя методу функциональной идентификации, управление  $u_t$  определяем из формулы (2.41) для оптимального управления, заменяя в ней неизвестные коэффициенты  $a_j, b_j, c_j$  их оценками  $a_j^{(t)}, b_j^{(t)}, c_j^{(t)}$ :

---


$$\begin{aligned} b_1^{(t)} u_t + \dots + b_r^{(t)} u_{t-r+1} &= a_1^{(t)} y_t + \dots + a_r^{(t)} y_{t-r+1} - a_1^M y_t^M - \dots \\ &\dots - a_r^M y_{t-r+1}^M + (c_1^M - c_1^{(t)}) x_t + \dots + (c_r^M - c_r^{(t)}) x_{t-r+1}. \end{aligned} \quad (2.56)$$


---

Для того чтобы отсюда можно было найти  $u_t$ , следует потребовать, чтобы  $b_1^{(t)} \neq 0$ . Мы увидим ниже, что этому условию всегда можно удовлетворить при подходящем выборе свободного параметра в алгоритме (2.55). При этом  $u_t$  выражается через вектор сенсоров (2.42), что и требуется.

Пусть (2.55) — КСА. Тогда  $\tau_t = \tau_\infty = \text{const}$  при  $t \geq t_*$  и при  $\tau = \tau_*$ ,  $t \geq t_*$  неравенства (2.54) выполнены. Обозначая  $y_{t+1} + (\sigma'_t, \tau_t) = v'_{t+1}$ , получим из (2.56) и (2.36), что  $v'_{t+1} = y_{t+1} - y^M_{t+1}$ . Поэтому неравенства (2.54) для  $\tau = \tau_t$  имеют вид (2.39). Итак, при  $t \geq t_*$  выполнено целевое условие. Это означает, что система адаптивна в классе  $\Sigma_2$ .

Нам осталось уточнить алгоритм (2.55) и обосновать его конечную сходимость. В качестве КСА (2.55) возьмем алгоритм (2.1.17) со свободным параметром  $\mu_t$ :

$$\begin{aligned} \tau_{t+1} &= \tau_t, \quad \text{если } |y_{t+1} - y^M_{t+1}| \leq C_y, \\ \text{где } \tau_{t+1} &= \tau_t - \mu_t \zeta_t \sigma'_t, \quad \text{если } |y_{t+1} - y^M_{t+1}| > C_y, \\ \zeta_t &= [(y_{t+1} - y^M_{t+1}) - C \operatorname{sign}(y_{t+1} - y^M_{t+1})] |\sigma'_t|^{-2}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

(Мы использовали здесь то, что при  $\tau = \tau_t$  выражение под знаком модуля в (2.54) есть  $y_{t+1} - y^M_{t+1}$ .) В (2.57)  $\mu_t$  — любое число в интервале  $0 < \mu' \leq \mu_t \leq \mu'' < 2$ . Из (2.57) следует, что  $b_1^{(t+1)} = b_1^{(t)}$ , если  $|y_{t+1} - y^M_{t+1}| \leq C_y$ , и  $b_1^{(t+1)} = b_1^{(t)} - \mu_t \zeta_t u_t$ , если  $|y_{t+1} - y^M_{t+1}| > C_y$ . Поэтому  $\mu_t$  с указанными свойствами всегда существует. Можно, например, выбрать в (2.57)  $\mu_t$  из условия  $|b_1^{(t+1)}| = \max$ :

$$\begin{aligned} \mu_t &= \mu', \quad \text{если } |b_1^{(t)} - \mu' \zeta_t u_t| > |b_1^{(t)} - \mu'' \zeta_t u_t|, \\ \mu_t &= \mu'', \quad \text{если } |b_1^{(t)} - \mu' \zeta_t u_t| \leq |b_1^{(t)} - \mu'' \zeta_t u_t|. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Для обоснования конечной сходимости алгоритма (2.57) достаточно проверить условие (а) п. 2.1.3°, т. е.

условие  $\exists \varepsilon > 0: C_y \geq \varepsilon |\sigma'_t|$ , или, иначе,

$$\exists Q_y, Q_u: |y_t| \leq Q_y, |u_t| \leq Q_u. \quad (2.59)$$

(Условие (б) п. 2.1.3° выполнено для  $\tau_* = \tau^0$ ,  $\rho = CC_y^{-1}$ .)

По теореме 2.1.3 (2.57) — конечно-решающий алгоритм рекуррентных целевых неравенств, получающихся из (2.54) заменой  $C_y$  на  $C_y(1 + \delta |\sigma'_t|^2)^{1/2}$ . Здесь  $\delta > 0$  — любое число. Итак, существует такое  $T = T(\delta)$ , что при  $t \geq T$  выполнено

$$|y_{t+1} - y_{t+1}^M| \leq C_y(1 + \delta |\sigma'_t|^2)^{1/2}. \quad (2.60)$$

Это неравенство имеет вид (4.П.46). По теореме 4.П.3 о диссипативности системы (2.35), (2.60) диссипативна, если только выполнено (4.П.48). (В нашем случае  $\varepsilon = \delta$ ,  $p_0 = 1$ ; мы использовали ограниченность последовательностей  $x_t$  и  $y_t^M$ .) Можно считать, что  $\delta$  удовлетворяет неравенству (4.П.48). Поэтому справедливо (2.59), следовательно, (2.57) — КСА. Сформулируем полученный результат:

*В рассматриваемой задаче с ЦУ (2.39) формулы (2.57), (2.58), (2.56) (где  $\tau_0$  — произвольный вектор) описывают адаптивный (в классе  $\Xi_2$ ) регулятор. Закон управления (2.57), (2.58), (2.56) — субоптимальный с уровнем  $\rho = CC_y^{-1}$  и стабилизирующийся.*

е) *Замечания.* 1. Выше был рассмотрен случай отсутствия запаздывания в измерении и в управлении. При наличии хотя бы одного из таких запаздываний рассуждения сильно усложняются, тем не менее задача синтеза адаптивного и субоптимального регулятора с эталонной моделью решается; это решение аналогично решению задачи п. 4.1.4°, изложенному в п. 4.Д.3°. При этом помеха может быть любой из класса  $\mathfrak{W}$  (см. п. 4.1.4°) с неизвестной спектральной характеристикой  $d(\lambda)^{-1}$ .

2. Имеются случаи, когда метод функциональной идентификации дает существенный выигрыш по сравнению с прямым подходом, описанным в § 4.1. Это случаи, когда в ОУ неизвестно лишь относительно немного параметров. Пусть, например, в (2.3)  $a_j, b_j, c_j$  линейно зависят от некоторого относительно небольшого числа неизвестных параметров  $\tau_j$  (а в остальном  $a_j, b_j, c_j$  известны). Тогда следует проводить функциональную идентификацию вектора  $\tau$  с компонентами  $\tau_j$ . Обычным образом для вектора

т получаются РЦН; они решаются посредством КСА «Полоска-1». Значение  $u_t$ , как обычно, определяется по формулам оптимального (или другого, приемлемого) управления, в которые вместо неизвестного вектора  $\tau$  подставляется его текущая оценка  $\tau_t$ . Если размерность вектора  $\tau$  существенно меньше числа параметров в ОУ, то получается существенный выигрыш по сравнению с прямым методом. (Разумеется, все сказанное относится к задачам, в которых применим как прямой, так и идентификационный подходы.)

3. Приведенные выше решения относились к случаям, когда нет остановок объекта и когда, следовательно, выполнено неравенство  $|y_t| \leq Q_y$  с некоторой (вообще неизвестной) постоянной  $Q_y$ . Аналогично § 4.1, рассматриваются задачи, в которых должно быть выполнено  $|y_t| \leq Q_y$  с заранее заданной постоянной  $Q_y$ . При этом, аналогично § 4.1, вводятся остановки объекта при нарушении неравенства  $|y_t| \leq Q_y$  с переводом объекта в новое начальное положение.

**4.2.6°. О нелинейных задачах.** В предыдущем и в этом параграфах были рассмотрены линейные объекты управления с целями управления, для которых оптимальной является линейная обратная связь.

Анализируя изложенные выше методы синтеза адаптивных субоптимальных регуляторов, легко заметить, что для этих методов существенна линейная зависимость левой части уравнения объекта (2.1) от параметров, а не от переменных  $y_t$ ,  $u_t$ . Существенно используется также вид ЦУ, позволяющий получать РЦН, выделяющие выпуклые области в пространстве подстраиваемых параметров. Очевидно, что к РЦН с указанным свойством сводятся многие задачи с нелинейными (относительно  $y_t$ ,  $u_t$ ) уравнениями объекта. Для таких РЦН имеются конечно-сходящиеся алгоритмы их решения (см. гл. 2). Если, применяя эти алгоритмы, удается выразить  $\tau_{t+1}$  через  $\tau_t$ ,  $\sigma_t$ ,  $\sigma_{t+1}$ , а также удается обеспечить условия их конечной сходимости, то оказывается решенной задача синтеза адаптивного регулятора. Эти соображения показывают (а многочисленные примеры подтверждают), что существует большой класс задач с нелинейными уравнениями объекта управления, для которых метод РЦН позволяет строить алгоритмы адаптивного управления.

**4.2.7°.** Замечание о возможности использования результатов этого и предыдущего параграфов в задачах синтеза адаптивного управления непрерывным объектом. Адаптивному управлению непрерывными объектами посвящены гл. 6 и 7. Укажем сейчас на один простой способ синтеза адаптивного управления непрерывным объектом. Этот способ заключается в сведении дифференциального управления объекта к разностному и в применении результата п. 4.2.3°. Возможны и другие способы сведения непрерывного объекта к дискретному; при этом получаются другие адаптивные регуляторы.

Рассмотрим, для простоты, скалярный непрерывный объект

$$a_n(p) y(t) = b_n(p) u(t) + v(t) \quad (p = d/dt). \quad (2.61)$$

Здесь  $t$  — непрерывное время,  $t \in [0, \infty)$ ,  $a_n(\lambda)$  и  $b_n(\lambda)$  — полиномы:  $a_n(\lambda) = \lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + a_0$ ,  $b_n(\lambda) = \lambda^s b_s + \dots + b_0$ ,  $b_s \neq 0$ . Пусть  $x(t) = \text{col}(y^{(r-1)}(t), \dots, y(t), u^{(s-1)}(t), \dots, u(t))$ . Из (2.61) получим для  $\dot{x}(t)$  уравнение

$$\dot{x}(t) / dt = Ax(t) + bu^{(s)}(t) + b'v(t), \quad (2.62)$$

где  $A$ ,  $b$ ,  $b'$  — постоянные матрицы размерностей  $N \times N$ ,  $N \times 1$ ,  $N \times 1$ , где  $N = r + s$ , которые легко явно выписать. В частности,  $b' = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$ . Предположим, что  $a_n(\lambda)$  и  $b_n(\lambda)$  не имеют общих корней; легко проверить, что тогда пара  $(A, b)$  управляема. Пусть  $\delta > 0$  — некоторое число,  $N = r + s$  и  $\Delta_v$ ,  $\Delta_v^{(j)}$  — интервалы:

$$\Delta_v = (v\delta, (v+1)\delta), \quad \Delta_v^{(j)} = (v\delta + (j-1)N^{-1}\delta, v\delta + jN^{-1}\delta), \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.63)$$

Положим

$$u^{(s)}(t) = u_v^{(j)} \text{ при } t \in \Delta_v^{(j)}, \quad u_v = \text{col}[u_v^{(1)}, \dots, u_v^{(N)}], \quad (2.64)$$

$$x_v = x(v\delta), \quad f_{v+1} = \int_{v\delta}^{(v+1)\delta} e^{A(v\delta+\delta-t)} b' v(t) dt. \quad (2.65)$$

Интегрируя (2.62) по  $\Delta_v$ , получим для  $x_v$  уравнение (2.29), где

$$P = e^{\delta A}, \quad Q = PS(b, Rb, \dots, R^{N-1}b), \quad R = e^{N-1}\delta A \quad (2.66)$$

и

$$S = A^{-1} (e^{N^{-1}\delta A} - I) = \delta N^{-1} (I + N^{-1}\delta A/2 + \dots). \quad (2.67)$$

При малых  $\delta$  имеем  $\det S = (\delta N^{-1})^N [1 + O(\delta)] \neq 0$ . Из управляемости пары  $(A, b)$  следует управляемость  $(R, b)$ . Поэтому  $\det Q \neq 0$  при достаточно малом  $\delta$  и мы вправе применить к полученному уравнению (2.29) результаты п. 4.2.3°. Пусть

$$\int_{v\delta}^{(v+1)\delta} |v(t)| dt \leq C_v, \quad v = 0, 1, \dots, \quad (2.68)$$

$$|e_j^* e^{At} e_1| \leq K^{(j)} \text{ при } 0 \leq t \leq \delta, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.69)$$

где  $e_j$  — векторы-орты с единицей на  $j$ -м месте и с нулями на прочих местах. Из (2.65) с учетом, что  $b' = e_1$ , получаем  $|f_{v+1}^{(j)}| \leq K^{(j)}C_v$ . В качестве ЦУ можно взять (2.30) с любыми постоянными  $C_x^{(j)} = C^{(j)} > K^{(j)}C_v$ , или, в других обозначениях,

$$\begin{aligned} |y^{(j)}(v\delta)| &\leq C^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, r-1, \\ |u^{(j)}(v\delta)| &\leq C^{(j+r)}, \quad j = 0, \dots, s-1. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Для этой ЦУ регулятор (2.31), (2.32) адаптивен в классе всевозможных объектов и помех указанного вида (фиксированы  $r$  и  $s$ , числа  $a_j, b_j$  — любые выполнено (2.66)).

Заметим, что при ограниченной помехе ( $|v(t)| \leq \leq \text{const}$ )  $C_v = Q(\delta)$ . Из (2.69) следует, что  $K^{(1)} \rightarrow 1$ ,  $K^{(j)} \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$  ( $j \neq 1$ ). Поэтому в (2.70) числа  $C^{(j)}$ ,  $C^{(j+r)}$  могут быть взяты сколь угодно малыми; по ним можно найти такое малое  $\delta > 0$ , что условия  $C^{(j)} > K^{(j)}C_v$  будут выполнены и регулятор (2.31), (2.32) будет обеспечивать выполнение неравенств (2.70) при всех достаточно больших  $v$ . Следует, однако, отметить, что при  $\delta \rightarrow 0$  величина  $u^{(s)}(t)$  (т. е.  $u_v$ ) будет в общем случае неограниченно возрастать. Выше рассматривался скалярный объект (2.64). Все сказанное легко переносится на случай векторного объекта.

Приведенное решение обладает теми же недостатками, что и решение п. 4.2.3°. Основной из них — большое число подстраиваемых параметров. Ниже, в гл. 6 и 7, при ряде специальных дополнительных предположений будут получены более удобные решения.

### § 4.3. Моделирование на ЭВМ процесса самообучения «робота-велосипедиста» езде на велосипеде

Алгоритмы субоптимального и адаптивного управления в §§ 4.1, 4.2 были запрограммированы и использованы при решении разных задач адаптивного управления движущимися объектами и технологическими процессами. Ниже описана серия экспериментов, относящаяся к модельной, но наглядной задаче о «роботе-велосипедисте», описанной в § 4.1.

Представим себе, что «робот-велосипедист» — это некоторый «ящик», который может быть «посажен» на велосипед. Внутри этого ящика имеется устройство, измеряющее угол  $y_t$  отклонения рамы велосипеда от вертикальной плоскости в дискретные моменты времени  $t\delta$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ , от ящика идут тяги на руль, так что робот может поворачивать руль в моменты  $t\delta$ . Угол поворота руля в интервале  $(t\delta, (t + 1)\delta)$  обозначим через  $u_t$ . Величина  $\delta$  — варьируемый параметр (типичный случай:  $\delta = 0,2$  с). Велосипед имеет мотор и может двигаться, управляемый роботом. Задача состоит в построении «робота-велосипедиста» (т. е. в определении соответствующего алгоритма управления), который мог бы обучаться сам ездить на велосипедах разных типов при разных возмущающих воздействиях (меняется мотор, изменяется ветер). Для простоты будем рассматривать лишь прямолинейное и равномерное движение велосипеда.

Поставим задачу более точно. Управление  $u_t$  — угол поворота руля. Целевое условие, как и в § 4.1, имеет вид  $|y_t| \leq C_y$ , что означает «удовлетворительную езду», т. е. малость (в требуемом смысле) отклонения плоскости рамы велосипеда от вертикальной плоскости. Вначале велосипед с роботом устанавливается вертикально, затем движется, управляемый роботом, пока не упадет (т. е. пока  $|y_t| \leq Q_y$ ) и пока время этого движения не превосходит заданного числа  $T_d$  (первое движение), после чего снова устанавливается вертикально, движется с тем же условием (второе движение) и т. д. (Типичный случай:  $T_d = 30$  м.) Эти движения прекращаются, если либо робот «обучился», именно, если в течение  $n_d$  движений все время выполняется целевое условие  $|y_t| \leq C_y$ , либо

если он «не обучился», т.е. если суммарное время всех движений достигло заданной большой величины. (Ниже  $n_d = 5$ , а робот всегда обучался.) Определенный таким образом набор движений будем называть *экспериментом*; в течение эксперимента все варьируемые параметры неизменны (в терминологии § 1 вариант  $\xi = \text{const}$ ). Варьируемые параметры — скорость велосипеда, коэффициенты спектральной характеристики внешнего воздействия, размеры велосипеда и др., полный их набор описан ниже. Эксперименту соответствуют число  $m_*$  падений робота и время обучения  $t_*$ , определяемое как время, после которого всегда  $|y_t| \leq C_y$ . Числа  $t_*$  и  $m_*$  характеризуют качество обучения. После окончания эксперимента меняются варьируемые параметры, начинается новый эксперимент и т. д. При этом возможны два случая: а) начальное значение вектора подстраиваемых параметров берется из предыдущего эксперимента; б) принимается, что это начальное значение  $\tau_0 = 0$  (в первом эксперименте  $\tau_0 = 0$ ). В случае а) будем говорить, что новый эксперимент является продолжением предыдущего — это означает, что физически тот же робот ставится в новые условия. В случае б) будем говорить, что этот эксперимент является начальным — это означает, что мы как бы стираем из памяти робота весь его предыдущий опыт. Отметим, что проводились также эксперименты со значениями  $n_d$  и  $T_d$ , отличными от указанных выше.

Опишем теперь более подробно и более точно моделируемое движение. Управление (угол поворота руля) было кусочно-постоянной функцией непрерывного времени  $\hat{t}$  с интервалом постоянства  $\delta$ , т. е.  $u(\hat{t}) = u(t)$  при  $t\delta \leq \hat{t} < (t+1)\delta$ . Число  $\delta > 0$  — варьируемый параметр. Уравнение движения велосипеда, взятое из [73], имеет вид (1.1.1) (в непрерывном времени). Оно сводится к уравнению (1.1.5) (в дискретном времени), т. е. к уравнению (1.31) с  $r = k + 1$ . Параметры  $a_j, b_j$  в уравнении (1.1.5) выражаются через физические параметры  $V, g, e, l, h$  по формулам (1.1.2), (1.1.6). (Иногда значения  $b_1, b_2$  отличались знаком от выражений в (1.1.6); см. ниже.) Напомним, что  $V$  — скорость велосипеда,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $e$  — база велосипеда,  $l, h$  — координаты центра тяжести (см. рис. 1.1 на стр. 14). Все эти параметры —

варьируемые, т. е. могут меняться от эксперимента к эксперименту. Кроме того, был введен еще один варьируемый параметр  $\eta = \pm 1$ , означающий положение «рук» «робота-велосипедиста». Именно, в (4.1.5) значения  $b_1$  и  $b_2$  могли либо совпадать с выражениями в (4.1.6) (при этом считалось, что  $\eta = 1$ ), либо отличаться от них знаком (при этом считалось, что  $\eta = -1$ ). Изменение знака  $\eta$  означает физически перекрещивание «рук» «робота-велосипедиста».

Внешнее воздействие имело вид

$$v_t = d\epsilon_t \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^{n_0} A_j e^{i\omega_j t} \right) + w_t. \quad (3.1)$$

Здесь  $w_t$  — нерегулярная в интервале значений  $[-\Phi, \Phi]$  функция (она вычислялась по программе псевдослучайных чисел, равномерно распределенных в интервале  $[-\Phi, \Phi]$ ),  $d$  — варьируемый параметр, характеризующий уровень регулярной составляющей внешнего возмущения,  $\epsilon_t$  — функция, монотонно возрастающая от 0 до 1 за варьируемое время  $T^*$ . Наличие множителя  $\epsilon_t$ , означающего постепенное включение большого возмущения, отличает (3.1) от возмущения, рассмотренного в §§ 4.1, 4.2. Следуя, рассмотренному в §§ 4.1, 4.2, отвечает  $T^* = 1$ . Эксперименты показали, что при относительно больших  $d$  робот плохо переносит внезапное включение большого возмущения ( $T^* = 1$ ); в связи с этим были взяты более реалистичные значения  $T^* = 5 \div 20$ , что соответствует нарастанию возмущения за  $T^*\delta = 1 \div 4$  с. Были рассмотрены различные возмущения с тремя типами спектра; основные из них представлены на рис. 4.1. (На рис. 4.1  $n_0 = 5$ ,  $\omega_{j+1} - \omega_j = \Delta\omega$  постоянно; было взято  $\Delta\omega = 0,02$  с,  $\omega_0 = 1,25$  с; брались и аналогичные спектры с  $n_0 = 2 \div 4$ .) Числа  $d$ ,  $T^*$ ,  $A_j$ ,  $\omega_j$  — варьируемые параметры. Таким образом, вариант  $\xi$  — это совокупность всех варьируемых параметров и реализации «нерегулярной части возмущения»  $w_t$  (или, что то же самое, реализации возмущения  $v_t$ ).

Число  $n_0$  в (3.1) должно удовлетворять оценке  $2n_0 \leqslant \leqslant p$ , где  $p$  — число в (1.34). Было взято  $p = 2n_0$ . Допустимыми были взяты управления класса  $U_1$ ; см. п. 4.1.4°. (Запаздывание в измерении — один такт.)

Опишем класс адаптации. Неварьируемыми являются лишь параметры  $n = 2n_0 + r - 1$  — размерность вектора

сенсоров (1.44) (см. замечание г в конце п. 4.1.4°) и  $C_y$  — параметр ЦУ\*). Класс адаптации в соответствии с п. 4.1.4° определялся условиями: объект устойчив по управлению

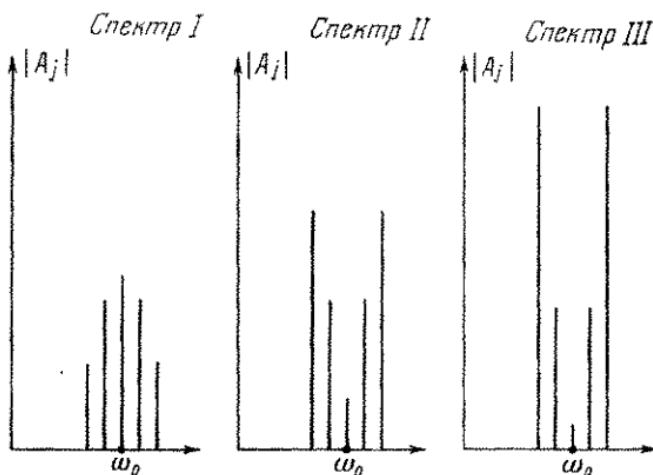


Рис. 4.1.

(это условие практически не накладывало никаких ограничений) и  $|b_1| \leq C_b$ , где  $C_b$  — известная постоянная.

Опишем адаптивный регулятор. Управление вычислялось по следующей формуле, отличающейся от формулы (1.48) поправкой, диктуемой естественными соображениями:

$$\begin{aligned} u_t &= (\sigma_t, \tau_t), \text{ если } |(\sigma_t, \tau_t)| \leq C_u, \\ u_t &= C_u (\sigma_t, \tau_t) |(\sigma_t, \tau_t)|^{-1}, \text{ если } |(\sigma_t, \tau_t)| > C_u. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В качестве  $C_u$  было взято  $C_u = 45^\circ$ . Итак, если управляющее устройство требовало повернуть руль на угол, больший  $45^\circ$ , то он поворачивался лишь на  $45^\circ$  (в соответствующую сторону). Впрочем, как правило, было  $|(\sigma_t, \tau_t)| \leq C_u$ , т. е. формулы (3.2) и (1.48) практически совпадали.

\*). Значение  $C_y$  тоже можно считать варьируемым параметром, если в число сенсоров включить сигнал выполнения целевого неравенства  $\mu_t = \text{sign}(C_y - y_t)$ . Неварьируемость  $n$  и  $C_y$  означает, что эти числа известны конструктору «робота-велосипедиста» — этим параметрам «разрешено» входить в уравнения адаптивного регулятора.

Алгоритм адаптации совпадал с (1.61), но также с некоторой поправкой. Именно, в отличие от п. 4.1.4°, знак числа  $b_1 = b_k$  был неизвестен. Изменения в алгоритме адаптации, вызванные варьируемостью  $\eta = \text{sign } b_1$ , были внесены в соответствии с идеей, описанной в замечании 2 п. 2.1.4°. (Можно было бы пользоваться и алгоритмом адаптации (1.67).)

Перейдем к описанию результатов экспериментов на ЭВМ.

Наиболее трудно робот адаптировался к перекрещиванию «рук» (замена  $\eta$  на  $(-\eta)$ ) и к введению большого регулярного возмущения. В случае  $n_0 = 0$ , когда может присутствовать лишь нерегулярная составляющая возмущения (эти возмущения будем называть малыми), время обучения было от 0,1 с. до нескольких секунд, падений было  $0 \div 10$ . С увеличением  $n$  возрастает класс адаптации, т. е. робот становится более универсальным, приобретая потенциальную возможность справляться с большим регулярным возмущением. Вместе с тем время обучения при малом возмущении возрастает с увеличением  $n$  от нескольких секунд для  $n = 3$  до нескольких минут для  $n = 15$ . Ниже приведены в основном результаты экспериментов

ТАБЛИЦА 4.1

№ эксп.	Варьируемые параметры				Начало		Продолжение		
	$\eta$	$C_V$	$c$ (м)	$h$ (м)	$m_*$	$t_*$	№ эксп.	$m_*$	$t_*$
1	+	10°	1,1	0,6	5	23 с	—	—	—
2	—	10°	1,1	0,6	57	1 м 15 с	1	57	1 м 16 с
3	+	18°	1,1	0,6	8	1 м 16 с	—	—	—
4	—	18°	1,1	0,6	70	1 м 32 с	3	71	1 м 33 с
5	+	6°	1,1	0,6	5	1 м 14 с	4	3	4 м 42 с
6	+	4°	1,1	0,6	4	6 м 13 с	5	9	1 м 14 с
7	+	1°	1,1	0,6	6	42 м 3 с	6	6	54 м 13 с
8	+	4°	3,3	0,6	12	40 м 35 с	6	7	32 м 39 с
9	+	10°	2	0,6	8	1 м	1	4	23 с
10	+	10°	0,65	0,6	4	16 с	1	3	8 с
11	+	10°	1,1	1,5	8	1 м 15 с	1	3	21 с
12	+	10°	1,1	2,0	9	19 м 6 с	11	3	1 м 15 с
13	—	10°	1,1	2,0	238	51 м 7 с	12	242	4 м 42 с

для одного из наиболее универсальных роботов с  $n = 7$ ,  $k = 1$ . Результаты представлены в табл. 4.1 — 4.5. В экспериментах 1—13 (табл. 4.1,  $l = 0,7$  м,  $n = 6$ ) возмущение было малым ( $c_y = 1^\circ$ ,  $d = 0$ ,  $n_0 = 0$ ); в экспериментах 14—24 (табл. 4.2,  $c = 1$ , 1 м,  $h = 0,6$ ,  $n = 7$ ) возмущение было также малым ( $C_y = 1^\circ$ ,  $d = 0$ ,  $n_0 = 0$ ); в экспериментах 25—44 оно было «большим» с регулярной составляющей ( $C_y = 1^\circ$ ,  $d \neq 0$ ,  $n_0 = 2, 4, 6$ ,  $k = 1$ ). Слова «начало» и «продолжение» в табл. 4.1, 4.2, 4.5 понимаются в описанном выше смысле. На рис. 4.2 представлена схема экспериментов, в кружках стоят номера

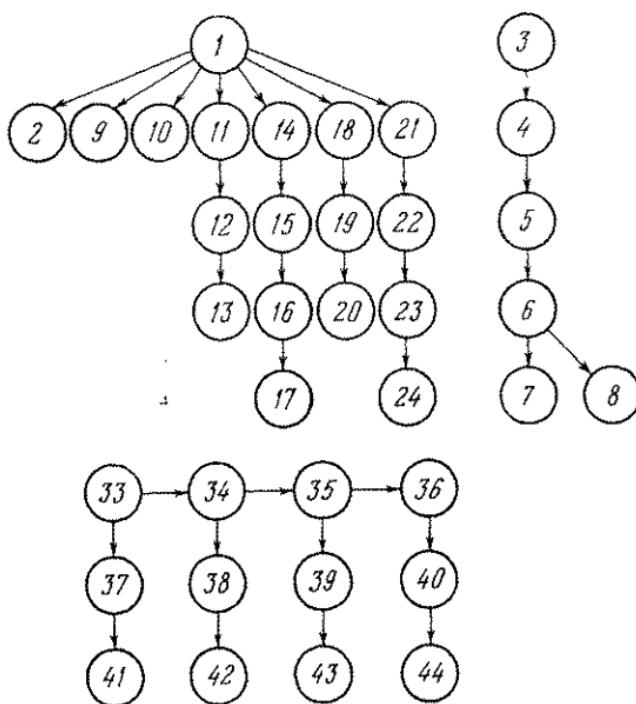


Рис. 4.2.

экспериментов, стрелки указывают на продолжение эксперимента. Каждой ветви (например,  $1 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 13$  или  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 8$ ) соответствует как бы последовательность экспериментов с реальным роботом. Рассмотрим, например, ветвь  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 8$ . Вначале (эксперимент № 3) робот с  $n = 7$  был посажен на велосипед с параметрами,

ТАБЛИЦА 4.2

№ эксп.	Варьируемые параметры				Начало		Продолжение		
	$\eta$	$v$ (м/с)	$l$ (м)	$\delta$ (с)	$m_*$	$t_*$	№ эксп.	$m_*$	$t_*$
14	+	3,0	0,7	—	3	4 м 21 с	1	9	4 м 50 с
15	—	3,0	0,7	—	168	25 м 29 с	14	416	22 м 30 с
16	—	2,0	0,7	—	422	30 м 32 с	15	375	33 м 23 с
17	—	1,7	0,7	—	803	3 ч 5 м 37 с	16	684	52 м 4 с
18	+	6	1,0	—	5	19 с	1	2	1 с
19	—	6	1,0	—	46	15 м 6 с	18	48	51 с
20	—	6	0,1	—	108	6 м 22 с	19	117	3 м 56 с
21	+	6	0,7	0,3	7	2 м 57 с	1	3	3 м 23 с
22	—	6	0,7	0,3	32	1 м 7 с	21	33	56 с
23	—	6	0,7	0,4	23	1 м 2 с	22	30	1 м 14 с
24	+	6	0,7	0,4	5	26 с	23	7	26 с

ТАБЛИЦА 4.3

(a)  $n = 7$  спектр I

№ эксп.	d	$\frac{v_{\max}}{C_y}$	$m_*$	$t_*$
25	2	1,83	7	51 м 6 с
26	3	2,63	6	41 м 44 с
27	7	5,83	9	1 ч 6 м 1 с
28	10	8,24	10	1 ч 28 м 58 с

(b)  $n = 5$  спектр I

№ эксп.	d	$\frac{v_{\max}}{C_y}$	$m_*$	$t_*$
29	2	1,83	8	1 ч 8 м 18 с
30	3	2,63	10	1 ч 42 м 47 с
31	7	5,83	8	1 ч 5 м 27 с
32	10	8,24	14	1 ч 22 м 52 с

(c)  $n = 3$  спектр I

№ эксп.	d	$\frac{v_{\max}}{C_y}$	$m_*$	$t_*$
33	2	1,83	8	1 ч 8 м 39 с
34	3	2,63	11	1 ч 27 м 53 с
35	7	5,83	5	22 м 6 с
36	10	8,24	12	2 ч 6 м 6 с

(d)  $n = 3$  спектр II

№ эксп.	d	$\frac{v_{\max}}{C_y}$	$m_*$	$t_*$
37	2	1,71	6	35 м 14 с
38	3	2,22	5	22 м 10 с
39	7	4,88	6	31 м 2 с
40	10	6,87	4	14 м 37 с

ТАБЛИЦА 4.4

№ эксп.	Варьируемые параметры				Начало		№ эксп.	Варьируемые параметры				Начало	
	$\eta$	$C_y$	$c$ (м)	$h$ (м)	$m_*$	$t_*$		$\eta$	$C_y$	$c$ (м)	$h$ (м)	$m_*$	$t_*$
1 *	+	10°	1,1	0,6	3	3 с	8 *	+	4°	3,3	0,6	2	40 с
2 *	-	10°	1,1	0,6	8	7 с	9 *	+	10°	2	0,6	3	4 с
3 *	+	18°	1,1	0,6	3	2 с	10 *	+	10°	0,65	0,6	3	2 с
4 *	-	18°	1,1	0,6	13	11 с	11 *	+	10°	1,1	1,5	3	4 с
5 *	+	6°	1,1	0,6	3	3 с	12 *	+	10°	1,1	2,0	3	6 с
6 *	+	4°	1,1	0,6	3	6 с	13 *	-	10°	1,1	2,0	3	49 с
7 *	+	1°	1,1	0,6	3	1 м 16 с							

ТАБЛИЦА 4.5

№ эксп.	Спектр	$d$	$v_{\max}/C_y$	Начало		Продолжение		
				$m_*$	$t_*$	№ эксп.	$m_*$	$t_*$
33	I	2	1,83	8	1 ч 8 м 39 с	—	—	—
37	II	2	1,71	6	35 м 14 с	33	1	11 с
41	III	2	1,36	4	35 м 45 с	37	2	29 с
34	I	3	2,66	11	1 ч 27 м 53 с	33	2	30 с
38	II	3	2,22	5	29 м 10 с	34	3	1 м 5 с
42	III	3	1,92	8	1 ч 50 м 26 с	38	4	2 м 17 с
35	I	7	5,83	5	22 м 6 с	34	4	29 м 12 с
39	II	7	4,88	6	31 м 2 с	35	2	35 с
43	III	7	4,17	9	1 ч 21 м 30 с	39	3	2 м 40 с
36	I	10	8,23	12	2 ч 6 м 30 с	35	5	42 м 50 с
40	II	10	6,87	4	2 ч 18 м 31 с	36	4	18 м 36 с
44	III	10	5,86	8	2 ч 37 м 42 с	40	5	35 м 50 с

указанными выше; целевое условие было сравнительно легким:  $C_y = 18^\circ$ . Робот упал восемь раз и обучился езде за 1 м 16 с. (Слово «обучился» означает, что он правильно проехал оставшееся время 28 м 44 с первого движения и затем правильно ездил пять раз по 30 м, выдерживая руль в заданных пределах.) Шестой раз (эксперимент № 4, продолжение) его посадили на велосипед, перекрестив ему «руки». (И об этом ему «не сообщили»). Разумеется, он сразу упал

и падал довольно много раз ( $m_* = 71$ ). Но время его перебучения (1 м 33 с) относительно невелико. Закончив правильно это движение, он, как обычно, был посажен заново и проехал правильно ( $|y_t| \leq 18^\circ$ ) положенные пять раз по полчаса. После этого («неожиданно для него») ему снова перекрестили «руки» и одновременно поставили более жесткую ЦУ:  $|y_t| \leq 6^\circ$  (эксперимент № 5). Новые параметры самообучения:  $m_* = 3$ ,  $t_* = 2$  м 42 с. Резкое уменьшение числа падений, по-видимому, связано с тем, что при большом  $C_y$  подстраиваемые параметры изменяются реже, чем при малом, и поэтому при большом  $C_y$  робот падает, не успев обучиться. Далее (эксперимент № 6), уже не меняя «руки», ему поставили еще более жесткую цель управления ( $|y_t| \leq 4^\circ$ ), и он обучился за 1 м 14 с упав девять раз\*). Последний эксперимент (№ 8) с этим роботом: его посадили на велосипед в три раза длиннее обычного,  $c = 3,3$  м, он обучился кататься на нем за 32 м 39 с, упав семь раз.

Эксперименты 9—13 и 18—20 иллюстрируют самообучение езде на велосипедах разной конструкции. В экспериментах 14—17 изменялась скорость велосипеда, а в экспериментах 21—24 — запаздывание в управлении. (Некоторая несимметрия для экспериментов с  $\eta = +1$  и с  $\eta = -1$  связана с тем, что «гипотеза о правильном значении  $\eta$ » у робота вначале всегда  $\eta_0 = +1$ ; если на самом деле  $\eta = -1$ , то после обучения, естественно,  $\eta_0 = -1$ .)

Типичная динамика самообучения в эксперименте с малым возмущением и с  $n = 7$  представлена на рис. 4.3.

\*) Может возникнуть вопрос: почему робот много раз падает в этом эксперименте и в аналогичных экспериментах? Это связано с алгоритмом обучения: всякое нарушение целевого неравенства приводит к поиску нового вектора подстраиваемых параметров (можно сказать: к поиску нового закона управления) с резкими изменениями этого вектора. Эти резкие изменения, обусловленные алгоритмом адаптации «Полоска-2», естественны: робот «не знает», почему целевое неравенство перестало выполняться (ему могли вновь перекрестить «руки» или посадить на велосипед другой конструкции, или «включить» сильный ветер и т. п.), и может «ожидать», что это связано с сильным изменением внешних условий.

Отметим, что в эксперименте № 7 роботу было поставлено предельно возможная ЦУ:  $|y_t| \leq 1^\circ$ . Так как и  $C_y = 1^\circ$ , то в этом эксперименте теоретическое время обучения равно  $\infty$ .

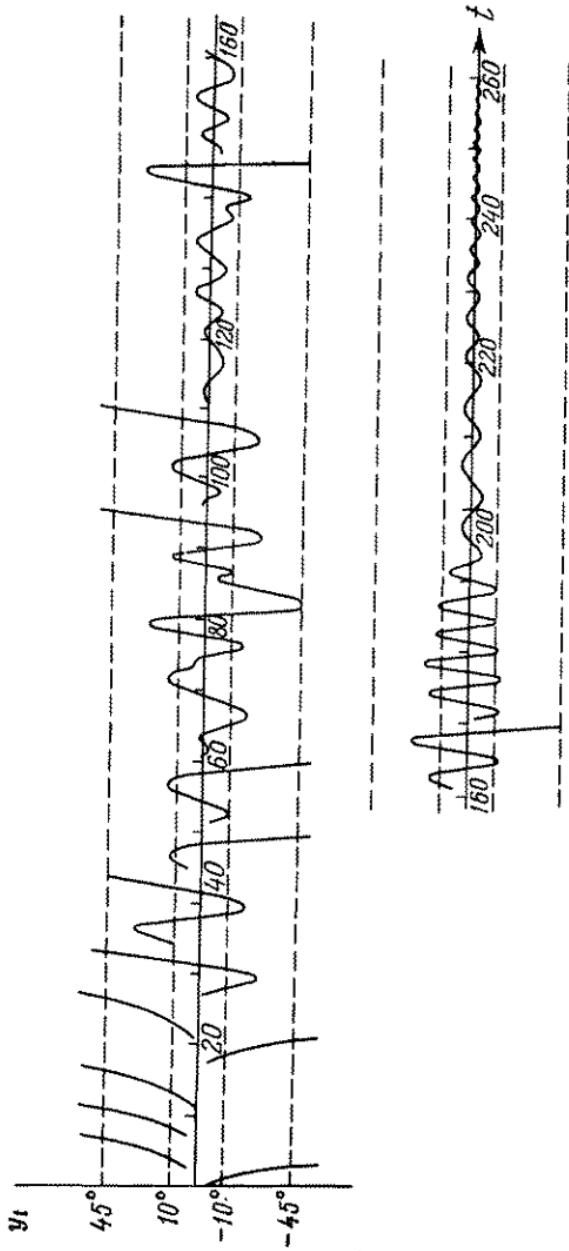


Рис. 4.3.

Видно, что первые шесть раз робот почти сразу падает (но вектор подстраиваемых параметров, т. е. закон управления, успевает измениться много раз). Седьмой раз робот «пытается» удержать равновесие и падает в сторону, противоположную начальному наклону. Далее он едет все лучше и спустя  $t_* = 183$  с едет все время правильно.

Наиболее интересными в теоретическом отношении являются эксперименты 25—44 (табл. 4.3, 4.5), в которых возмущение — большое, регулярное ( $d \neq 0$ ). Если до этого (когда  $d = 0$ ) всегда было  $C_y^{-1}v_{\max} < 1$  (здесь  $v_{\max} = \max |v_t|$  за время эксперимента), то теперь  $C_y^{-1}v_{\max} > 1$ . Величина  $C_y^{-1}v_{\max}$  аналогична отношению шум/сигнал. «Справляясь» с этой задачей фильтрации большого регулярного возмущения (неизмеряемого и с неизвестным спектром) могут лишь роботы с  $n > 1$ . В табл. 4.3 представлены параметры самообучения роботов с  $n = 3, 5, 7$ . В табл. 4.4. приведены результаты экспериментов («начало») для робота с  $n_0 = 0$ ,  $n = 1$  в тех же условиях, что и в экспериментах 1—13 для робота с  $n = 7$  (табл. 4.1). Мы видим, что робот с  $n = 7$  в условиях малого возмущения обучается хотя и хуже робота с  $n = 1$ , но «приемлемо» хуже. (Зато, в отличие от робота с  $n = 1$ , робот с  $n = 7$  может обучаться и в условиях большого возмущения).

Наконец, в табл. 4.5 представлены результаты самообучения для трех типов спектра возмущения, изображенных на рис. 4.1, при последовательно возрастающей интенсивности возмущения ( $d = 2, 3, 7, 10$ ). Сравнение результатов по графикам «начало» и «продолжение» показывает, что в данном случае предыдущий опыт помогает. (В экспериментах с перекрещиванием «рук» робота предыдущий опыт обычно вредит, что естественно.)

Были проведены аналогичные эксперименты с  $n_0 = 0$ . Для этих роботов время самообучения обычно меньше:  $t_* = 0,5 \div 5$  с, и часто  $m_* = 0$ , т. е. падений вообще не происходит.

В целом из результатов экспериментов видно, что «роботы-велосипедисты» обучаются совсем не по-человечески. Они очень «обучаемы». Вряд ли человек обучался бы езде так быстро при столь больших возмущающих воздействиях и при столь сильных вариациях внеш-

них условий. В процессе самообучения роботы действуют очень решительно (еще бы: они не боятся падать). Они очень часто падают и, изменяя закон управления (вектор подстраиваемых параметров) резко и часто, очень быстро находят нужный закон управления.

### § 4.П. Приложение

**4.П.1°. Диссипативность дискретных систем.** а) *Уравнение дискретного объекта, классы объектов, определяемые квадратичными связями.* Дискретный объект в общем случае описывается векторными уравнениями

$$z_{t+1} = g_t(z_t), \quad y_t = h_t(z_t) \quad (\text{П.1})$$

( $z_t$  — состояние,  $y_t$  — выход объекта),  $z_t$  и  $y_t$  — векторы, вообще говоря, разной размерности. Обычно, однако, уравнения дискретного объекта обладают определенной спецификой, которую полезно учесть. Именно, обычно уравнения объекта разделяются на уравнения линейной и нелинейной частей. В простейшем случае, когда объект содержит один нелинейный блок, а оставшаяся его часть описывается (в разумном приближении) линейными уравнениями, первое уравнение (П.1) объекта задается уравнениями

$$z_{t+1} = Az_t + b\zeta_t + f_{t+1}, \quad \zeta_t = \psi_t(\sigma_t), \quad \sigma_t = c^*z_t. \quad (\text{П.2})$$

Здесь  $A$  — квадратная,  $b, c$  — одностолбцовые матрицы (они не зависят от  $t$ ),  $f_t$  — внешнее возмущение,  $\sigma_t$ ,  $\zeta_t$  — скалярные вход и выход нелинейного блока. Все величины, как обычно, вещественны. Уравнения (П.2) можно, конечно, записать в виде одного векторного уравнения  $z_{t+1} = g_t(z_t)$ . В наиболее часто встречающемся случае нелинейность  $\psi_t(\sigma)$  удовлетворяет (для любых  $t$  и  $\sigma$ ) соотношениям

$$\mu_1 \leqslant \psi_t(\sigma) / \sigma \leqslant \mu_2, \quad (\text{П.3})$$

где  $\mu_1, \mu_2$  — заданные числа.

Заметим, что если мы не обладаем никакими сведениями о нелинейности, кроме (П.3), а это часто имеет место, то (П.3) можно заменить следующим неравенством:

$$(\zeta_t - \mu_1\sigma_t)(\mu_2\sigma_t - \zeta_t) \geqslant 0, \quad (\text{П.4})$$

которое выполнено для всех  $\sigma_t, \zeta_t$ . Неполное знание не-

линейности (например, знание лишь соотношений (П.3)) означает, что задан класс нелинейностей. В нашем примере — это класс нелинейностей, входы и выходы которых удовлетворяют соотношению (П.4). Итак, в этом случае вместо (П.2), (П.3) можно задать уравнения

$$z_{t+1} = Az_t + b\zeta_t + f_{t+1}, \quad \sigma_t = c^*z_t, \quad (\text{П.5})$$

описывающие линейную часть системы, и неравенство (П.4), описывающее класс нелинейностей. Неравенство (П.4) — частный случай неравенства вида  $F(z_t, \zeta_t) \geq 0$ , где  $F(z, \zeta)$  — квадратичная форма переменных  $z, \zeta$ . Именно, в нашем примере левая часть (П.4) есть  $F(z, \zeta) = -(\zeta - \mu_1 c^* z)(\mu_2 c^* z - \zeta)$ .

Можно привести много других примеров, когда нелинейности, входящие в уравнения дискретного объекта, описываются квадратичной связью  $F(z_t, \zeta_t) \geq 0$ . Не останавливаясь на этих примерах, запишем сразу уравнения, которые ниже будут рассматриваться:

$$z_{t+1} = Az_t + B\zeta_t + f_{t+1}(z_t, \zeta_t), \quad (\text{П.6})$$

$$F(z_t, \zeta_t) + \varphi_t(z_t, \zeta_t) \geq 0. \quad (\text{П.7})$$

Здесь  $z_t, \zeta_t$  — векторы (порядков  $N$  и  $n$ ),  $A, B$  — постоянные матрицы (порядков  $N \times N$  и  $N \times n$ ),  $F(z, \zeta)$  — квадратичная форма,  $\varphi_t(z, \zeta)$  и  $f_t(z, \zeta)$  — «малые» функции по отношению соответственно к квадратичной и линейной:

$$\varphi_t(z, \zeta) / (|z|^2 + |\zeta|^2)^{-1} \rightarrow 0, \quad (\text{П.8})$$

$$|f_t(z, \zeta)| / (|z|^2 + |\zeta|^2)^{-1/2} \rightarrow 0 \quad (\text{П.9})$$

при  $|z|^2 + |\zeta|^2 \rightarrow \infty$  равномерно по  $t$ . Кроме того, будем предполагать, что для любого числа  $K > 0$  существует такое число  $K' > 0$ , что

$$|f_t(z, \zeta)| \leq K' \quad \text{при } |z|^2 + |\zeta|^2 \leq K^2. \quad (\text{П.10})$$

Обычно возмущение  $f_t(z, \zeta)$  ограничено; тогда, очевидно, условия (П.9) и (П.10) выполнены.

б) *Теорема о диссипативности для векторного уравнения первого порядка.* Будем предполагать, что форма  $F(z, \zeta)$  в (П.7) удовлетворяет соотношению

$$F(0, \zeta) < 0 \quad \text{при } |\zeta| \neq 0. \quad (\text{П.11})$$

Заметим, что в случае квадратичной связи (П.4)  $F(0, \zeta) =$

$= -|\zeta|^2$ , т. е. это условие выполнено. Распространим вещественную форму  $F(z, \zeta)$  до эрмитовой на комплексные значения  $z, \zeta$ . Такое распространение, очевидно, существует и единственno. (В приведенном выше примере  $F(z, \zeta) = (\zeta - \mu_1 c^* z)(\mu_2 c^* z - \zeta)$  для вещественных  $z, \zeta$ , а для комплексных  $z, \zeta$  получаем

$$F(z, \zeta) = \operatorname{Re} [(\zeta - \mu_1 c^* z)^*(\mu_2 c^* z - \zeta)].$$

**Определение 4.П.1.** Система (П.6), (П.7), называется *минимально устойчивой*, если существует такая  $(n \times N)$ -матрица  $D$ , что  $F(z, Dz) \geq 0$  для любых  $z$ , и если объект (П.6) с обратной связью  $\zeta_t = Dz_t$  (где  $f_t = f_t(z_t, \zeta_t)$  рассматривается как вход) устойчив по  $z_t$ , т. е., иначе, если асимптотически устойчиво решение  $z_t$  уравнений

$$z_{t+1} = Az_t + B\zeta_t, \quad \zeta_t = Dz_t. \quad (\text{П.12})$$

Заметим, что в силу этого определения система (П.2), (П.4) минимально устойчива, если для некоторого  $\mu$  ( $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ ) система (П.2) с «нелинейностью»  $\Phi_t(\sigma_t) = \mu\sigma_t$  устойчива по выходу  $z_t$ : в круге  $|\lambda| \leq 1$  нет корней уравнений  $\det[I - \lambda(A + b\mu c)] = 0$  (см. § 3.1).

**Теорема 4.П.1.** (первая теорема о диссипативности). *Предположим, что выполнены условия (П.8)–(П.11) и что система (П.6), (П.7) минимально устойчива. Пусть существует такое  $\delta > 0$ , что при всех комплексных  $\lambda, \tilde{z}, \tilde{\zeta}$ , связанных соотношениями*

$$\lambda^{-1}\tilde{z} = A\tilde{z} + B\tilde{\zeta}, \quad \tilde{\zeta} = D\tilde{z}, \quad |\lambda| = 1 \quad (\text{П.13})$$

*выполнено*

$$F(\tilde{z}, \tilde{\zeta}) \leq -\delta(|\tilde{z}|^2 + |\tilde{\zeta}|^2) \text{ при } |\lambda| = 1. \quad (\text{П.14})$$

*Тогда система (П.6), (П.7) диссипативна по состоянию  $z_t$ : существует такое ограниченное множество  $\mathfrak{F}^0$ , что для любых  $\{z_t, \zeta_t\}$ , удовлетворяющих (П.6), (П.7), найдется момент  $t^0$  такой, что  $z_t \in \mathfrak{F}^0$  при  $t \geq t^0$ .*

**Замечание П.1.** Условие (П.14) будем называть *частотным условием*. Если матрица  $A$  не имеет собственных значений на окружности  $|\lambda| = 1$ , то частотное условие приобретает более простой вид

$$F[(\lambda^{-1}I - A)^{-1}B\tilde{\zeta}, \tilde{\zeta}] < 0 \text{ при всех } \tilde{\zeta} \neq 0, \lambda, |\lambda| = 1. \quad (\text{П.15})$$

Действительно, из (П.14) следует (П.15). Пусть выполнено (П.15). Форма в (П.15) не превосходит  $\pi(\lambda) |\tilde{\zeta}|^2$ , где  $\pi(\lambda)$  — максимальное собственное значение матрицы этой формы. Так как  $\pi(\lambda)$  — непрерывная функция при  $|\lambda| = 1$ , то  $\pi(\lambda) \leq \pi_0 < 0$ . Очевидно, что существует такое  $\delta > 0$ , что  $(-\pi_0) |\tilde{\zeta}|^2 \leq -\delta (|\tilde{z}|^2 + |\tilde{\zeta}|^2)$  при любых  $\tilde{\zeta}$  и  $\tilde{z} = (\lambda^{-1} I - A)^{-1} B \tilde{\zeta}$ , откуда следует (П.14).

#### 4.П.2°. Доказательство теоремы 4.П.1.

а) Лемма 4.П.1. Предположим, что на  $\mathbb{R}^N$  задана вещественная непрерывная функция  $V(z)$ , причем  $V(z) \rightarrow \infty$  при  $|z| \rightarrow \infty$  и для любого процесса  $\{z_t, \zeta_t\}$  системы (П.6), (П.7) выполнено

$$V(z_{t+1}) - V(z_t) \leq -\alpha(z_t) \text{ при } |z| \geq \xi, \quad t \geq 0, \quad (\text{П.16})$$

где  $\alpha(z)$  — некоторая непрерывная функция,  $\alpha(z) > 0$ ,  $\xi > 0$ .

Пусть  $\xi' = \sup |z_{t+1}| \neq \infty$ , где верхняя грань берется по всем  $t \geq 0$  и всем процессам системы (П.6) (П.7), удовлетворяющим условиям  $|z_t| \leq \xi$ .

Положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\eta) &= \{z \in \mathbb{R}^n : V(z) \leq \eta\}, \\ \eta^0 &= \sup_{|z| \leq \xi} V(z), \quad \eta' = \sup_{|z| \leq \xi} V(z), \quad \eta'' = \max\{\eta^0, \eta'\}. \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

Тогда для любого процесса  $\{z_t, \zeta_t\}$ , удовлетворяющего системе (П.6), (П.7), найдется такой момент  $t^0$ , что  $z_t \in \mathfrak{F}(\eta'')$  при всех  $t \geq t^0$ .

Доказательство леммы 4.П.1. Из (П.17), очевидно, следует, что для любого  $\eta$  множество  $\mathfrak{F}(\eta)$  ограничено. Пусть  $\{z_t, \zeta_t\}$  — произвольный процесс системы (П.6), (П.7) и  $\eta \geq \eta^0$ . Покажем, что найдется такой момент  $t^0$ , что  $z_{t^0} \in \mathfrak{F}(\eta)$ . Предположим противное:  $\forall t \geq 0 z_t \notin \mathfrak{F}(\eta)$ . Так как  $\mathfrak{F}(\eta) \supset \mathfrak{F}(\eta^0)$ , а  $\mathfrak{F}(\eta^0)$  по определению числа  $\eta^0$  содержит шар  $\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{R}^N : |z| \leq \xi\}$ , то  $\forall t \geq 0 |z_t| \geq \xi$ . Из (П.16) имеем  $V(z_{t+1}) \leq V(z_t) - \alpha(z_t)$ , откуда

$$V(z_t) \leq V(z_0) - \sum_{j=0}^{t-1} \alpha(z_j) \leq V(z_0). \quad (\text{П.18})$$

Из (П.15), (П.18) следует, что  $z_t$  — ограниченная последовательность:  $\forall t |z_t| \leq \xi_1$ . Итак,  $\xi \leq |z_t| \leq \xi_1$ . Пусть

$\alpha_0 = \inf \alpha(z)$  при  $\xi \leq z \leq \xi_1$ . Так как  $\alpha(z)$  — непрерывная положительная функция, то  $\alpha_0 > 0$ . Из первого неравенства (П.18) получаем, что  $V(z_t) \leq V(z_0) - t\alpha_0$ , т. е.  $V(z_t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Последнее противоречит непрерывности  $V(z)$ . Мы показали что  $z_{t^0} \in \mathfrak{F}(\eta)$  для некоторого  $t^0$ .

Покажем, что любое множество  $\mathfrak{F}(\eta)$  с  $\eta \geq \eta'$  является инвариантным: из  $z_{t^0} \in \mathfrak{F}(\eta)$  следует  $z_t \in \mathfrak{F}(\eta)$  при  $t \geq t^0$ . Пусть  $\eta \geq \eta'$ ,  $z_{t^0} \in \mathfrak{F}(\eta)$ . Если две возможности:  $|z_{t^0}| > \xi$  и  $|z_{t^0}| \leq \xi$ . В первом случае из (П.16) имеем  $V(z_{t^0+1}) \leq V(z_{t^0}) \leq \eta$ , т. е.  $z_{t^0+1} \in \mathfrak{F}(\eta)$ . Во втором случае в силу (П.17)  $V(z_{t^0+1}) \leq \eta' \leq \eta$ , т. е. снова  $z_{t^0+1} \in \mathfrak{F}(\eta)$ . Итак,  $z_{t^0} \in \mathfrak{F}(\eta)$  влечет  $z_{t^0+1} \in \mathfrak{F}(\eta)$ , т. е.  $\forall t \geq t^0 z_t \in \mathfrak{F}(\eta)$ .

Так как  $\eta'' > \eta^0$ , то  $\exists t^0: z_{t^0} \in \mathfrak{F}(\eta'')$ . Так как  $\eta'' > \eta'$ , то  $z_{t^0} \in \mathfrak{F}(\eta'')$  при  $t \geq t^0$ . Лемма доказана.

б) Доказательство теоремы 4.П.1. Покажем, что из условий теоремы следует существование такого числа  $K > 0$ , что для любого процесса системы (П.6), (П.7) при достаточно больших  $t$  выполнено  $|z_t| \leq K$ . Воспользуемся леммой 4.П.1. Постараемся найти такую  $(N \times N)$ -матрицу  $H = H^*$ , чтобы функция  $V(z) = z^*Hz$  удовлетворяла условиям леммы. Имеем из (П.6)

$$\begin{aligned} V(z_{t+1}) - V(z_t) &= \\ &= \{(Az_t + B\zeta_t)^*H(Az_t + B\zeta_t) - z_t^*Hz_t + F(z_t, \zeta_t)\} + \\ &+ [2f_{t+1}^*H(Az_t + B\zeta_t) + f_{t+1}^*Hf_{t+1} + \varphi_t] - F(z_t, \zeta_t) - \varphi, \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

где  $f_{t+1} = f_{t+1}(z_t, \zeta_t)$ ,  $\varphi_t = \varphi_t(z_t, \zeta_t)$ .

Потребуем, чтобы при любых  $z_t$  и  $\zeta_t$  было выполнено

$$\begin{aligned} (Az_t + B\zeta_t)^*H(Az_t + B\zeta_t) - z_t^*Hz_t + F(z_t, \zeta_t) &\leq \\ &\leq -\delta(|z_t|^2 + |\zeta_t|^2) \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

для некоторого  $\delta > 0$ . Тогда, используя (П.7), из (П.19) получаем

$$V(z_{t+1}) - V(z_t) \leq -\delta(|z_t|^2 + |\zeta_t|^2) + [\dots], \quad (\text{П.21})$$

где точками обозначено выражение в квадратных скобках в (П.19). Так как  $[\dots] \leq K_1 |f_{t+1}| (|z_t|^2 + |\zeta_t|^2)^{1/2} + K_2 |f_{t+1}|^2 + |\varphi_t|$ , где  $K_1$  и  $K_2$  — постоянные, зависящие от  $A$ ,  $B$ ,  $F$ ,  $H$ ,  $\varphi$ ,  $\zeta$ ,  $z$ ,  $t$ .

сияющие лишь от  $H$ ,  $A$  и  $B$ , то из (П.8), (П.9) следует, что  $|[\dots]|(|z_t|^2 + |\zeta_t|^2)^{-1} \rightarrow 0$  при  $|z_t|^2 + |\zeta_t|^2 \rightarrow \infty$  равномерно по  $t$ . Поэтому существует такое  $\zeta > 0$ , что  $|[\dots]| \leq \frac{\delta}{2}(|z_t|^2 + |\zeta_t|^2)$  при  $|z_t| > \zeta$  и из (П.24) получаем  $V(z_{t+1}) - V(z_t) \leq -\alpha(z_t)$ , где  $\alpha(z) = \frac{\delta}{2}|z|^2$ .

— Мы показали, что (П.20) влечет (П.16) для  $V(z) = z^*Hz$ .

Рассмотрим условие (П.20). По частотной теореме 3.1.2 (см. также [127к]) для существования матрицы  $H$ , удовлетворяющей (П.20), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено (П.14) для любых  $\lambda$ ,  $\tilde{z}$ ,  $\tilde{\zeta}$ , связанных соотношениями (П.13). Действительно, условие (1.60) в нашем случае имеет вид (П.14). Итак, выполнено (П.20), а значит, и (П.16).

Покажем, что  $V(z) \rightarrow \infty$  при  $|z| \rightarrow \infty$ , т. е. что  $H > 0$ . Из (П.20) для  $\zeta_t = Dz_t$  имеем, обозначая  $P = A + BD$ :

$$z_t^*P^*HPz_t - z_t^*Hz_t + F(z_t, Dz_t) \leq -\delta|z_t|^2 \quad (\text{П.22})$$

при любых  $z_t$ . Здесь  $D$  — матрица в (П.13). Так как система (П.6), (П.7) минимально устойчива, то  $F(z, Dz) \geq 0$  при любых  $z$ , а  $P$  — устойчивая матрица: уравнение  $\det(I - \lambda P) = 0$  не имеет корней в круге  $|\lambda| \leq 1$ . Из (П.22) получаем  $z_t^*P^*HPz_t - z_t^*Hz_t \leq -\delta|z_t|^2$  для любого  $z_t$ . Хорошо известно, что отсюда и из устойчивости матрицы  $P$  следует, что  $H > 0$  \*).

Нам осталось установить (П.16). Элементарно проверяется, с использованием (П.11) и (П.8), что (П.7) и неравенство  $|z_t| \leq \xi$  влечет  $|\zeta_t| \leq C(\xi)$ , где  $C(\xi)$  — некоторая постоянная. Отсюда и из (П.10) получаем, что  $|f_{t+1}(z_t, \zeta_t)| \leq K'(\xi)$  при  $|z_t| \leq \xi$ .

Из (П.6) теперь следует (П.16).

\*) Докажем, для полноты, это утверждение. Рассмотрим уравнение  $z_{t+1} = Pz_t$ . Так как  $P$  — устойчивая матрица, то  $\exists C, \rho, 0 < \rho < 1 : |z_t| = |P^t z_0| \leq C^t \rho^t |z_0|$  для  $t \geq 0$ . Мы имеем  $z_{t+1}^*Hz_{t+1} - z_t^*Hz_t \leq -\varepsilon|z_t|^2$ . Суммируя эти неравенства от  $t = 0$  до  $t = T$  и переходя к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , получаем  $-z_0^*Hz_0 \leq -\varepsilon(|z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots)$ , т. е.  $z_0^*Hz_0 \geq \varepsilon|z_0|^2$  для любого  $z_0$ , что и означает неравенство  $H > 0$ .

Итак, мы убедились, что выполнены все условия леммы 4.П.1. Следовательно, система (П.6), (П.7) диссипативна.

4.П.3°. Теорема о диссипативности для уравнения произвольного порядка. Рассмотрим вместо (П.6), (П.7) аналогичную систему высокого порядка:

$$A(\nabla)x_t = B(\nabla)w_t + f_t(x_{t-r}^t, w_{t-r}^t), \quad (\text{П.23})$$

$$F(x_{t-r}^t, w_{t-r}^t) + \varphi_t(x_{t-r}^t, w_{t-r}^t) \geq 0. \quad (\text{П.24})$$

Здесь  $x_t, w_t, f_t(x_{t-r}^t, w_{t-r}^t)$  — векторные вход, выход и внешнее возмущение порядков  $n_1, n_2, n_1$ ,  $\nabla$  — оператор сдвига ( $\nabla x_t = x_{t-1}$ ) и

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= I + \lambda A_1 + \dots + \lambda^r A_r, \\ B(\lambda) &= \lambda B_1 + \dots + \lambda^r B_r, \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

где  $A_j, B_j$  — постоянные вещественные матрицы порядков соответственно  $n_1 \times n_1$  и  $n_1 \times n_2$ ,  $I$  — единичная матрица. Уравнение (П.23) описывает линейную часть системы, а неравенство (П.24) — некоторый класс нелинейных частей. В (П.24)  $F(x_{t-r}^t, w_{t-r}^t)$  — вещественная квадратичная форма своих аргументов (т. е.  $r+1$  векторных аргументов порядка  $n_1$  и  $r+1$  векторных аргументов порядка  $n_2$ ),  $\varphi_t(x_{t-r}^t, w_{t-r}^t)$  — «малый» по сравнению с  $F(x_{t-r}^t, w_{t-r}^t)$  добавок. Именно, обозначая  $\hat{x}, \hat{w}$  векторные аргументы функции  $\varphi_t$  (их порядки  $(r+1)n_1$  и  $(r+1)n_2$ ), будем считать выполненным условие

$$\varphi_t(\hat{x}, \hat{w})(|\hat{x}|^2 + |\hat{w}|^2)^{-1/2} \rightarrow 0 \text{ при } |\hat{x}|^2 + |\hat{w}|^2 \rightarrow \infty. \quad (\text{П.26})$$

равномерно по  $t$ . Что касается функции  $f_t$ , определяющей возмущающее воздействие, то будем считать, что

$$|f_t(\hat{x}, \hat{w})|(|\hat{x}|^2 + |\hat{w}|^2)^{-1/2} \rightarrow 0 \text{ при } |\hat{x}|^2 + |\hat{w}|^2 \rightarrow \infty \quad (\text{П.27})$$

равномерно по  $t$ , а также что для всякого  $K > 0$  найдется такое  $K'$ , что

$$|f_t(\hat{x}, \hat{w})| \leq K' \text{ при } |\hat{x}|^2 + |\hat{w}|^2 \leq K. \quad (\text{П.28})$$

Эти условия, очевидно, выполнены в том часто встречающемся случае, когда возмущение ограничено.

**Определение 4.П.2.** Система (П.23), (П.24) называется *минимально устойчивой*, если существуют матричные полиномы

$$\alpha(\lambda) = I + \alpha_1\lambda + \dots + \alpha_r\lambda^r, \quad \beta(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \dots + \beta_r\lambda^r \quad (\text{П.29})$$

размерностей соответственно  $n_2 \times n_2$  и  $n_2 \times n_1$ , удовлетворяющие следующим двум условиям:

(I) Линейная система разностных уравнений

$$A(\nabla)x_t = B(\nabla)w_t, \quad (\text{П.30})$$

$$\alpha(\nabla)w_t = \beta(\nabla)x_t \quad (\text{П.31})$$

асимптотически устойчива, т. е. все корни уравнения

$$\det \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ \beta(\lambda) & \alpha(\lambda) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{П.32})$$

лежат в области  $|\lambda| > 1$ .

(II) При любых  $x_{t-r}^t, w_{t-r}^t$ , удовлетворяющих уравнениям (П.30), (П.31), выполнено неравенство

$$F(x_{t-r}^t, w_{t-r}^t) \geq 0. \quad (\text{П.33})$$

Чтобы сформулировать критерий диссипативности системы (П.23), (П.24), потребуется некоторое преобразование формы  $F(x_{t-r}^t, w_{t-r}^t)$ . Заменим в (П.23)  $f_t$  нулем, оператор  $\nabla$  — комплексной переменной  $\lambda$ , а векторы  $x_t, w_t$  — комплексными векторами  $\tilde{x}, \tilde{w}$ . (Эту формальную процедуру можно трактовать как переход к  $D$ -преобразованиям в (П.23) с  $f_t = 0$  и с заменой  $Dw_t$  произвольным комплексным вектором  $\tilde{w}$ .) Тогда получим

$$\tilde{x} = \chi(\lambda)\tilde{w}, \quad \text{где } \chi(\lambda) = A(\lambda)^{-1}B(\lambda). \quad (\text{П.34})$$

Далее, аналогично, векторы  $x_{t-j} = \nabla^j x_t, w_{t-j} = \nabla^j w_t$  заменим величинами

$$\lambda^j \tilde{x} = \lambda^j \chi(\lambda) \tilde{w} \text{ и } \lambda^j \tilde{w}. \quad (\text{П.35})$$

Распространим форму

$$\mathfrak{F}(x_{t-r}^t, w_{t-r}^t) = \mathfrak{F}(x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-r}, w_t, w_{t-1}, \dots, w_{t-r}) \quad (\text{П.36})$$

на комплексные значения ее аргументов с сохранением ее эрмитовости и вместо аргументов  $x_{t-j}, w_{t-j}$  подставим

соответствующие им выражения (П.35). Тогда получим эрмитову форму комплексного вектора  $\tilde{w}$ , зависящую от комплексного параметра  $\lambda$ , которую обозначим через  $\tilde{\mathfrak{F}}(\lambda, \tilde{w})$ . Итак,

$$\tilde{\mathfrak{F}}(\lambda, \tilde{w}) = F(\chi(\lambda)\tilde{w}, \lambda\chi(\lambda)\tilde{w}, \dots, \lambda^{-r}\chi\tilde{w}, \tilde{w}, \dots, \lambda^r\tilde{w}). \quad (\text{П.37})$$

**Теорема 4.П.2.** Предположим, что

(А) Выполнены соотношения (П.26) — (П.28).

(В) При  $x_t = \dots = x_{t-r} = 0$ ,  $w_{t-1} = \dots = w_{t-r} = 0$  функция (П.36) — отрицательно определенная форма  $w_t$ :

$$\tilde{\mathfrak{F}}(0, 0, \dots, 0, w_t, 0, \dots, 0) < 0, \text{ если } w_t \neq 0.$$

(П.38)

(С) Система (П.23), (П.24) минимально устойчива.

(Д) Существует такое число  $\delta > 0$ , что при всех  $\lambda$ ,  $|\lambda| = 1$ ,  $\det A(\lambda) \neq 0$  и при всех комплексных векторах  $\tilde{w}$  выполнено

$$F(\lambda, \tilde{w}) \leq -\delta(|\chi(\lambda)\tilde{w}|^2 + |\tilde{w}|^2). \quad (\text{П.39})$$

Тогда система (П.23), (П.24) диссипативна по выходу  $(x_t, w_t)$ : существует такая ограниченная область  $\tilde{\mathfrak{F}} \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ , что для любого процесса  $(x_t, w_t)$ , удовлетворяющего соотношениям (П.23), (П.24), найдется момент  $t^0$  такой, что  $(x_t, w_t) \in \tilde{\mathfrak{F}}$  при  $t \geq t^0$ .

**З а м е ч а н и е.** Если на единичной окружности нет корней уравнения  $\det A(\lambda) = 0$ , то частотное условие (П.39) эквивалентно, очевидно, тому, что  $\tilde{F}(\lambda, \tilde{w}) < 0$  при всех  $\tilde{w}$  и  $\lambda$ ,  $|\lambda| = 1$ .

**4.П.4°. Доказательство теоремы 4.П.2.** Сведем систему (П.23), (П.24) к (П.6), (П.7) введением подходящего вектора  $z_t$ . Для этого дополним соотношение (П.23) следующими тождествами:

$$\nabla^{-1}x_{t-r}^{t-1} = x_{t-r+1}^t, \quad \nabla^{-1}w_{t-r}^{t-1} = w_{t-r+1}^t, \quad (\text{П.40})$$

а соотношение (П.23) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \nabla^{-1}x_t = -A_1x_t - \dots - A_rx_{t-r+1} + B_1w_t + \dots + \\ + B_rw_{t-r+1} + f_{t+1}(x_{t-r}^t, w_{t-r}^t). \end{aligned} \quad (\text{П.41})$$

Рассматривая в качестве вектора состояния вектор

$$z_t = \text{col}[x_{t-r}^t, w_{t-r}^{t-1}], \quad (\text{П.42})$$

а в качестве вектора нелинейностей вектор  $w_t$ , запишем соотношения (П.40), (П.41) в виде (П.6), а неравенство (П.24) — в виде (П.7). Условия (A) — (D) для системы (П.23), (П.24) означают, что выполнены условия теоремы 4.П.1 для системы (П.40), (П.41). По теореме 4.П.1 система (П.40), (П.41) диссипативна по состоянию. Это означает диссипативность исходной системы (П.23), (П.24) по выходу  $(x_t, w_t)$ .

**4.П.5°.** Теорема о диссипативности объекта, устойчивого по управлению. В ряде задач синтеза адаптивных регуляторов для линейных дискретных объектов управления возникает некоторая специальная ситуация, которую сейчас рассмотрим. Предположим, что дан векторный объект

$$a(\nabla)y_t = b(\nabla)u_t + v_t, \quad (\text{П.43})$$

где  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  — матричные (или скалярные) полиномы,

$$a(\lambda) = a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda^r a_r, \quad b(\lambda) = \lambda^k b_k + \dots + \lambda^r b_r,$$

$a(\lambda)$  — прямоугольная,  $b(\lambda)$  — квадратная матрицы,

$$a_0 \neq 0, \quad \det b_k \neq 0, \quad (\text{П.44})$$

$y_t, u_t, v_t$  — векторы соответствующих размерностей. Пусть  $p \geq 0, p_0 \geq 0, q \geq 0, q_0 \geq k$  — целые числа и

$$S_t = \text{col}(y_{t-p_0}, \dots, y_{t-p_0-p}, u_{t-q_0}, \dots, u_{t-q_0-q}). \quad (\text{П.45})$$

Наряду с линейным уравнением (П.43) рассмотрим следующую квадратичную связь:

$$|y_t|^2 \leq \varepsilon |S_t|^2 + \varphi_t(y_t, S_t), \quad (\text{П.46})$$

где  $\varepsilon > 0$  — фиксированное число и

$$\begin{aligned} \varphi_t(y_t, S_t)(|y_t|^2 + |S_t|^2)^{-1} \rightarrow 0 \\ \text{при } |y_t|^2 + |S_t|^2 \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (\text{П.47})$$

равномерно по  $t$ . В (П.47)  $y_t, S_t$  — независимые переменные; при этом по-прежнему  $S_t$  имеет вид (П.45). Если  $\varepsilon = 0$ ,  $\varphi_t(y_t, S_t) \leq \text{const}$ , то из (П.46) следует, что  $|y_t| \leq \text{const}$ . Если объект (П.43) устойчив по управлению и  $|v_t| \leq \text{const}$ , то и  $|u_t| \leq \text{const}$  и, более того, система (П.43), (П.46) диссипативна. Оказывается, что система (П.43), (П.46) диссипативна и при малых  $\varepsilon > 0$

и вообще при неограниченной величине  $\varphi_t(y_t, S_t)$ , если только выполнено (П.47). Нижеследующая теорема указывает явную оценку для соответствующих значений  $\varepsilon$ .

**Теорема 4.П.3.** Предположим, что в (П.43) «помеха»  $v_t$  ограничена ( $|v_t| \leq C_v$ ) и что объект (П.43) устойчив по управлению (уравнение  $\det b(\lambda) = 0$  не имеет корней в области  $0 < |\lambda| \leq 1$ ). Пусть

$$\varepsilon(p + q \sup_{|\lambda|=1} |b(\lambda)^{-1}a(\lambda)|^2) < 1; \quad (\text{П.48})$$

$$\text{если } p_0 = 0, \text{ то } \varepsilon < 1. \quad (\text{П.49})$$

Тогда система (П.43), (П.46) диссипативна.

**З а м е ч а н и е.** В задачах адаптивного управления часто квадратичная связь (П.46) имеет вид

$$|y_t - y^0|^2 \leq C(1 + \delta |S_t|^2), \quad (\text{П.50})$$

или

$$|y_t - y^0| \leq C(1 + \delta |S_t|), \quad (\text{П.51})$$

где  $y^0, \delta > 0, C > 0$  — заданные вектор и числа. Тогда, очевидно, выполнено и (П.47) с  $\varepsilon = \delta C$ .

**Доказательство теоремы 4.П.3.** Применим к системе (П.43), (П.46) теорему 4.П.2. Положим  $x_t = u_{t-k}, w_t = y_t, f_t = b_k^{-1}v_t$ . Уравнение (П.43) совпадает с (П.23) для  $A(\lambda) = \lambda^k b_k^{-1}b(\lambda), B(\lambda) = b_k^{-1}a(\lambda)$ , а (П.46) — с соотношением (П.24), в котором

$$F(x_{t-r}^t, w_{t-r}^t) = C\delta |S_t|^2 - |w_t|^2. \quad (\text{П.52})$$

Здесь, в силу сделанных обозначений (см. (П.45)),

$$|S_t|^2 = \sum_{j=p_0}^{p_0+p-1} |w_{t-j}|^2 + \sum_{j=q_0}^{q_0+q-1} |x_{t+k-j}|^2. \quad (\text{П.53})$$

Заметим, что  $|S_t|^2$  зависит, в силу неравенства  $q_0 \geq k$ , от  $x_{t-h}$  с  $h \geq 0$ , что и должно быть согласно (П.36); числа  $r$  здесь и в предыдущем пункте означают разные величины.

Проверим условия теоремы 4.П.2. Очевидно, что условие (A) выполнено. Условие (B) выполнено, если либо  $p_0 > 0$ , либо  $p_0 = 0, \varepsilon < 1$ , что имеет место в силу (П.49). Система (П.43), (П.46) минимально устойчива: стабилизирующая обратная связь имеет вид  $w_t = 0$  (т. е.  $\varphi_t = 0$ ), и выражение (П.52) неотрицательно при  $w_t = 0$ . (Мы ис-

пользовали предположение об устойчивости объекта по управлению). Проверим частотное условие. Согласно замечанию к теореме 4.П.2, оно имеет вид  $\tilde{F}(\lambda, \tilde{w}) < 0$  при всех  $\tilde{w}$  и  $\lambda$ ,  $|\lambda| = 1$ . Из (П.52), (П.53) следует

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\lambda, \tilde{w}) &= C\delta |\tilde{S}|^2 - |\tilde{w}|^2, \\ |\tilde{S}|^2 &= p|\tilde{w}|^2 + q|\tilde{x}|^2, \text{ где } \tilde{x} = \lambda^{-s}b(\lambda)^{-1}a(\lambda)\tilde{w}.\end{aligned}$$

Частотное условие принимает вид (П.48) и, следовательно, выполнено. По теореме 4.П.2 система (П.43), (П.46) диссипативна.

#### § 4.Д. Доказательства теорем 4.1.1—4.1.3

Приводимые ниже доказательства существенно используют результаты § 4.П. Именно, используется теорема 4.П.3 о диссипативности.

**4.Д.1°. Доказательство теоремы 4.1.1.** Требуется доказать, что для любого решения системы (1.2), (1.11), (1.17) выполнено  $|y_t| \leq Q_y$  с некоторой постоянной  $Q_y$ .

Рассмотрим наряду с РЦН (1.13) вспомогательные РЦН

$$|b_1[(\sigma_t, \tau) - (\sigma_t, \tau^0)] + v_{t+1}| \leq C_y (1 + \delta |\sigma_t|^2)^{1/2}, \quad (\text{Д.1})$$

отличающиеся от (1.13) множителем в правой части. Число  $\delta > 0$  должно быть малым; оно будет подобрано ниже. По теореме 2.1.4 (см. также замечание в п. 2.1.5°) при любом  $\delta > 0$  алгоритм (1.17), т. е. алгоритм «Полоска-2» для РЦН (1.13), является одновременно конечно-решающим алгоритмом для рекуррентных неравенств (Д.1).

Итак, существует такой момент  $T$ , что при  $\tau = \tau_t$ ,  $t \geq T$  все неравенства (Д.1) выполнены. (Заметим, что согласно алгоритму (1.17)  $\tau_t$  может меняться и при  $t \geq T$ .) Для  $\tau = \tau_t$  выражение под знаком модуля в левой части неравенства (Д.1) совпадает с  $y_{t+1}$  (именно из этого условия получены РЦН (1.13)). Мы получили, что  $|y_{t+1}| \leq C_y (1 + \delta |\sigma_t|^2)^{1/2}$  при  $t \geq T$ , т. е., иначе,

$$|y_t|^2 \leq \delta C_y^2 |\sigma_{t-1}|^2 + C_y^2. \quad (\text{Д.2})$$

Применим теорему 4.П.3 (о диссипативности). Неравенство (Д.2) совпадает с (П.46) для  $S_t = \sigma_{t-1}$ ,  $\Phi_t(y_t, S_t) =$

$= C_y^2$ ,  $\varepsilon = \delta C_y^2$ . Сравнивая (П.45) с (1.9), видим, что  $p_0 = 1$ ,  $p = r - 1$ ,  $q = r - 2$ ,  $q_0 = 2$ . Условие (П.47), очевидно, выполнено. По теореме 4.П.3 система (1.2), (Д.2) диссипативна, если выполнено частотное условие (П.48), т. е. условие

$$8C_y^2 (p + q \sup_{|\lambda|=1} |b(\lambda)^{-1}a(\lambda)|^2) < 1. \quad (\text{Д.3})$$

Пусть  $\delta$  в (Д.1) удовлетворяет этому неравенству. Тогда справедливо заключение о диссипативности системы (1.2), (Д.2). Поэтому (1.19) выполнено.

4.Д.2°. **Доказательство теоремы 4.1.2.** Рассмотрим вначале структуру алгоритма (1.56). Будем говорить, что точка  $h_t$  (вектор  $t_{h_t}$ ) порождает точку  $t + m$  (вектор  $t_{t+m}$ ), если выполнено (1.56). Все натуральные числа распадаются на упорядоченные по возрастанию подмножества (ветви), вообще пересекающиеся, в которых каждая следующая точка порождает предыдущую. Точке  $h_t$  сопоставим (+), если  $|y_{h_t+k} - y^0| \leq C_y$ , и (-), если  $|y_{h_t+k} - y^0| > C_y$ . Имеют место свойства: (I) начало каждой ветви — одно из чисел  $0, \dots, 2m - 1$ ; (II) концу каждой ветви соответствует (+); (III) точкам ветвления соответствует (-); (IV) пересечение двух ветвей состоит из общего начала; разойдясь, ветви не склеиваются; (V) имеется не более  $2m - 1$  бесконечных ветвей. Свойства (I) — (IV) очевидны. Свойство (V) следует из того, что внутри любого интервала  $[t_0, t_0 + 2m - 1]$  имеется представитель каждой ветви (ибо  $(t + m) - h_t \leq 2m + 1$ ). Если бы было более  $2m - 1$  бесконечных ветвей, то при достаточно большом  $t_0$ , когда их «хвосты» с  $t \geq t_0$  не пересекаются, их представители не уложились бы в интервал  $[t_0, t_0 + 2m - 1]$ .

Рассмотрим одну из бесконечных ветвей. Ей соответствует по (1.56) стандартная ситуация алгоритма «Полоска-2». Из условий 1, 2, 5 следует, что  $|y_t| \leq Q_y$ ,  $|u_t| \leq Q_u$ . По теореме 2.1.2 (1.56) — КСА. Поэтому: (VI) на каждой бесконечной ветви имеется не более  $r^0$  минусов. Из (I) — (VI) следует такая структура алгоритма (1.56): (VII) число бесконечных ветвей равно  $m$ ; эти ветви  $B_1, \dots, B_m$  имеют общую точку ветвления  $t_*$  и общую часть  $B_0 = [B_*, t_*]$ , точке  $t_*$  соответствует минус, а всем прочим точкам ветвей  $B_j \setminus B_*$  — плюсы; имеется лишь конечное число конечных ветвей, все они «отвечаются» от  $B_*$ ;

ветви  $B_j$  суть

$$\begin{aligned} B_1 &= [B_*, t_*, t_* + m, t_* + 2m, \dots], \\ B_2 &= [B_*, t_*, t_* + m + 1, t_* + 2m + 1, \dots], \quad (\text{Д.4}) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$B_m = [B_*, t_*, t_* + 2m - 1, t_* + 3m - 1, \dots];$$

для  $t \geq t_* + m$  все  $\tau_t = \text{const}$ ; точки  $t_* + 1, \dots, t_* + m - 1$  суть концы некоторых конечных ветвей. Действительно, из (VI) следует, что если есть хотя бы один  $(-)$ , то есть и  $(-)$  с наибольшим номером  $t_*$ . Поэтому числам  $t > t_*$  соответствуют плюсы. Согласно алгоритму (1.56), для интервалов сравнения  $[t - m + 1, t]$  с  $t = t_* - m + 1, t_* - m + 2, \dots$  получим разбиение на ветви (Д.4). Из (III) следует, что точки  $t > t_*$  не могут быть точками ветвления; поэтому все точки  $0, \dots, t_* - 1$  образуют конечное число конечных ветвей, прикрепленных к  $B_*$ . Согласно (Д.4) векторы  $\tau_t$  с  $t = t_* + m, t_* + m + 1, \dots, t_* + 2m - 1$  совпадают с правой частью (1.56) для  $t = t_*$ , т. е. все они равны. При дальнейшем движении по ветвям (Д.4) значения  $\tau_t$  не меняются (так как им соответствуют плюсы). Следовательно, при  $t \geq t_* + m$  выполнены РЧН и  $\tau_t = \text{const}$ . Это означает адаптивность регулятора и стабилизируемость закона управления. Субоптимальность следует из ЦУ. Выше было сделано предположение, что есть хотя бы один минус. В противном случае адаптивность очевидна, а стабилизируемость следует по алгоритму из условия  $\tau_0 = \dots = \tau_{2m-1}$ .

Нам осталось доказать, что алгоритм (1.62) совпадает с (1.63). Обозначим  $\varepsilon_t = |y_t - y^0| - C_y$ . Пусть  $\varepsilon_t > 0$ ; тогда  $h_t = t$ , в (1.62) имеет место первый случай и (1.62) совпадает с (1.63). Пусть  $\varepsilon_t \leq 0$  и  $h_t < t$ ; тогда по определению числа  $h_t$  имеем  $h_{t-1} = h_t$  и из (1.56)

$$\tau_{t+m} = \langle |y_{h_{t-1}+k} - y^0| \leq C_y \rangle_{2(\tau_{h_{t-1}})} = \tau_{t-1+m},$$

т. е. выполнено (1.63). В последнем случае, когда  $\varepsilon_t \leq 0$  и  $h_t = t$ , снова  $\tau_{t+m} = \tau_{t-1+m}$ . Действительно, пусть  $h_*$  — последний момент из интервала  $h \in [0, t]$ , для которого  $\varepsilon_h > 0$ . Так как  $\varepsilon_t \leq 0$ ,  $h_t = t$ , то  $h_* < t - m$  и из (1.56)  $\tau_{h_*+m} = \tau_{h_*+m-1} = \dots = \tau_{h_*+2m}$ . Так как  $\varepsilon_j \leq 0$  при  $j = h_* + 1, \dots, t$ , то отсюда, в силу (1.56), получаем  $\tau_{h_*+m} = \dots = \tau_{t+m-1} = \tau_m$ , в частности,  $\tau_{t+m-1} = \tau_m$ , что и утверждалось.

4.Д.3°. Доказательство теоремы 4.1.3. Применим для синтеза адаптивного управления некоторую комбинацию прямого метода (§ 4.1) и метода функциональной идентификации (§ 4.2). Именно, будем «функционально идентифицировать» не объект управления (1.31), а коэффициенты в соотношении (1.42). Перепишем соотношение (1.42) в виде

$$y_{t+k} - y^0 = (\sigma'_t, \tau'_*) + F(\nabla) w_{t+k}. \quad (*)$$

Здесь  $\sigma'_t$  — вектор (1.65),  $\tau'_*$  — вектор той же размерности, что и  $\sigma'_t$ , с первой компонентой  $\tau_*^{(1)} = b_k \neq 0$ . Оптимальное управление получается приравниванием нулю квадратной скобки в (1.42), т. е., в новых обозначениях оно имеет вид  $(\sigma'_t, \tau'_*) = 0$ . Так как  $(\sigma'_t, \tau'_*) = \tau_*^{(1)} u_t + \dots$ , где точки означают не зависящие от  $u_t$  члены, то  $u_t$  однозначно определяется для любого  $t$ .

Перейдем к построению адаптивного управления. Будем определять  $u_t$  из соотношения

$$(\sigma'_t, \tau'_t) = 0 \quad (\text{Д.5})$$

(совпадающего с (1.69)), где  $\tau'_t$  — вектор подстраиваемых параметров той же размерности, что и  $\tau'_*$ . Для нахождения  $\tau'_t$  возьмем РН

$$|y_{t+k} - y^0 - (\sigma'_t, \tau')| \leq C_y, \quad (\text{Д.6})$$

рассмотрение которых естественно в силу (\*). Эти неравенства имеют решение  $\tau' = \tau'_*$  «в усиленном смысле»: по свойству З п. 4.1.4°, е) выполнено (1.41), т. е.  $|F(\nabla) w_{t+k}| \leq \|F\| C \leq \rho^0 C_y$ , а это значит, что

$$|y_{t+k} - y^0 - (\sigma'_t, \tau')| = |F(\nabla) w_{t+k}| \leq \rho^0 C_y,$$

где  $\rho^0 < 1$ .

Для решения РН (Д.6) было бы естественно взять алгоритм «Полоска-1»:

$$\tau'_{t+1} = \langle |y_{t+k} - y^0 - (\sigma'_t, \tau')| \leq C_y \rangle_1(t_i). \quad (\text{Д.7})$$

Однако алгоритм управления (Д.5), (Д.7) нереализуем: из (Д.7) видно, что  $\tau'_t$ , а значит, и  $u_t$  выражаются через  $y_{t+k-1}$ , в то время как для допустимого закона управления значение  $u_t$  должно выражаться по крайней мере через  $y_{t+s}$ . Поэтому в (Д.7) сдвинем индексы у  $\tau'_t$  так,

чтобы получилось реализуемое управление:

$$\tau'_{t+m} = \langle | y_{t+k} - y^0 - (\sigma'_t, \tau') | \leq C_y \rangle_1 (\tau'_{t+m-1}). \quad (\text{Д.8})$$

Закон управления (Д.5), (Д.8) допустим (он относится к классу  $\mathcal{U}_s$ ), если только из (Д.5) для любого  $t$  можно найти  $u_t$ . Для того чтобы обеспечить это последнее свойство, возьмем конкретную реализацию алгоритма (Д.8) в виде (2.1.17), т. е. в виде (1.67), и распорядимся параметром  $\mu_t$  так, чтобы из  $\tau'_{t+m-1} \neq 0$  следовало  $\tau'_{t+m} \neq 0$ . (Здесь  $\tau'_t$  — первая компонента вектора  $\tau'_t$ .) Очевидно, это можно сделать. В частности, можно находить  $\mu_t$  из условия (1.67).

Покажем, что закон управления (Д.5), (Д.8) обеспечивает ЦУ, если только (Д.8) — КСА. Пусть при  $t \geq t_*$  выполнено (Д.6) для  $\tau' = \tau'_{t+m-1}$  и  $\tau'_t = \tau_\infty = \text{const}$ . Для  $t \geq t_*$ ,  $\tau'_t = \tau_\infty$ ,  $\tau' = \tau_\infty'$  из (Д.5), (Д.8) имеем  $| y_{t+k} - y^0 | \leq C_y$ . Таким образом, ЦУ выполнена и закон (Д.5), (Д.8) субоптимальен с уровнем  $C_y^{-1}C^0$ .

Перейдем к проверке условий теоремы 2.1.1а, т. е. к доказательству того, что (Д.8) — КСА. Условие (б), как показано выше, выполнено для  $\tau' = \tau'_*$ ,  $\rho = \rho^0$ . Условие (а) равносильно неравенствам  $| y_t | \leq Q_y$ ,  $| u_t | \leq Q_u$ ,  $\forall t$ . Возьмем произвольное  $\delta' > 0$  и рассмотрим РН

$$| y_{t+k} - y^0 - (\sigma'_t, \tau') | \leq C_y (1 + \delta | \sigma'_t |). \quad (\text{Д.9})$$

По теореме 2.1.3 (и замечанию в п. 2.1.5°) (Д.8) — конечно-решающий алгоритм РН (Д.9) и  $| \tau'_{t+1} - \tau'_t | \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Итак, существует такое  $T > 0$ , что при  $t \geq T$

$$| y_{t+k} - y^0 - (\sigma'_t, \tau'_{t+m-1}) | \leq C_y (1 + \delta | \sigma'_t |). \quad (\text{Д.10})$$

Пусть  $\delta'' > 0$  — произвольное число и  $T'$  — такое число ( $T' \geq T$ ), что  $| \tau'_{t+m-1} - \tau'_t | \leq \delta''$  при  $t \geq T'$ . Из (Д.5), (Д.10) при  $t \geq T'$  получаем

$$| (\sigma'_t, \tau'_{t+m-1}) | = | (\sigma'_t, \tau'_{t+m-1}) - (\sigma'_t, \tau'_t) | \leq | \sigma'_t | \delta'',$$

$$| y_{t+k} - y^0 | \leq C_y + (\delta' C_y + \delta'') | \sigma'_t |. \quad (\text{Д.11})$$

Неравенство (Д.11) имеет вид (П.51). По теореме 4.П.3 система  $\alpha(\nabla)y_t = \beta(\nabla)u_t + v_t$  и (Д.11) диссипативна. В частности,  $| y_t | \leq Q_y$ ,  $| u_t | \leq Q_u$ . (Мы использовали свойства 1, 2 класса  $\Xi'$ .) Итак, выполнено условие (а).

По теореме 2.1.1а (Д.8) — КСА. Для числа  $r'$  ошибок алгоритма (Д.8) справедлива формула, указанная в теореме 2.1.1а, т. е. в нашем случае

$$r' \leq |\tau'_0 - \tau'_*|^2 (1 - \rho^0)^{-2} [\mu' (2 - \mu'')]^{-1} \varepsilon^{-2}, \quad (\text{Д.12})$$

где  $\varepsilon^{-2} = [(p + r + s) Q_u^2 + (p + r) Q_v^2] C_y^{-2}$ . (Действительно, в неравенстве (2.1.10)  $\varepsilon_t = C_y$ ,  $a_t = \sigma'_t$ , из (1.64)  $|\sigma'_t|^2 \leq (p + r + s) Q_u^2 + (p + r) Q_v^2$ .)

Покажем, что при  $|y_{t^0+k} - y^0| > C_y$  во временнóм интервале  $t^0 \leq t \leq t^0 + m - 1$  длины  $m$  хотя бы один раз нарушается неравенство (Д.6) для  $\tau' = \tau'_{t^0+m-1}$ . Действительно, если все эти неравенства выполнены, то, согласно (Д.8),  $\tau'_{t^0+m} = \tau'_{t^0+m-1}$ , т. е.  $\tau'_{t^0+m-1} = \tau'_{t^0}$ . Из (Д.6) для  $t = t^0$ ,  $\tau' = \tau'_{t^0+m-1}$ ; из (Д.5) имеем тогда  $|y_{t^0+k} - y^0| \leq C_y$ , что противоречит предположению. Итак, для числа  $r^0$  неравенств  $|y_{t^0+k} - y^0| > C_y$  справедлива оценка  $r^0 \leq mr'$ . Из (Д.12) следует оценка (1.70). Так как РН (Д.6) ставится лишь для  $t \geq m + p - 1$  (см. п 4.1.4°в), то указанные неравенства относятся к значениям  $t > m + p$ .

## ГЛАВА 5

# АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Здесь изучается задача управления объектами, на которые воздействуют аддитивные стационарные помехи. Рассматриваются объекты управления в дискретном времени, описываемые линейными разностными уравнениями. Функционалы качества управления теперь содержат операции усреднения по ансамблю реализаций процесса управления: это приводит к тому, что на каждой реализации значения целевой функции либо неизвестны, либо малопригодны для целей управления. Такое положение ограничивает возможности метода рекуррентных целевых неравенств для построения алгоритмов адаптации. Ниже в роли алгоритмов адаптации выступают рекуррентные модификации метода наименьших квадратов (МНК). Вообще говоря, оптимальность управлений достигается лишь при состоятельности доставляемых алгоритмом адаптации оценок вектора существенных параметров. Установление идентификационных свойств алгоритма оценивания в системах с обратной связью встречает значительные трудности из-за противоречивого характера процессов управления и оценивания: чем лучше качество управления, тем обычно хуже происходит идентификация. Хорошо известно, что идентификация ОУ требует определенного разнообразия входных воздействий или, как еще говорят, входное воздействие должно обладать достаточно богатым спектром. В данной главе основное внимание уделяется белошумным помехам, аддитивно действующим на ОУ. Такие помехи, с одной стороны, имеют «достаточно богатый спектр», а с другой — обеспечивают несмещенность оценок МНК. При коррелированных помехах оценки оказываются смешенными и соответствующие МНК алгоритмы адаптации не позволяют, вообще говоря,

обеспечить достижения оптимальных целей в адаптивном варианте задачи управления. Исключение представляют частные задачи. Одна из них, когда объект — минимально-фазовый, а функционал качества имеет вид предельной дисперсии выходного процесса, подробно исследуется ниже. Оптимальная цель управления в этой задаче обеспечивается при возмущении, являющемся стационарным процессом с дробно-рациональной спектральной плотностью (которая, разумеется, не предполагается известной, но обладает некоторыми достаточно общими свойствами). Состоятельность оценок для этой специальной задачи управления не гарантируется.

В более общих задачах адаптации, также рассматриваемых в этой главе, оптимальность управления является следствием состоятельности оценок, доставляемых алгоритмом адаптации. Эта состоятельность может обеспечиваться различными приемами, способствующими обогащению спектрального состава управляющих воздействий. Ниже рассмотрены два из таких приемов. Первый из них предполагает возможность использования процедуры «встряхивания», когда в зависимости от предыстории процесса управления «движение» системы управления прерывается и возобновляется из новых «начальных» данных. Такой способ представляется ограничительным для ряда прикладных задач. Второй прием обогащения спектра управлений состоит в смене регуляторов, синтезирующих управления. Эта смена также определяется в зависимости от предыстории конкретной реализации процесса управления. Разумеется, и процесс «прерывания» и процесс «переключения» регуляторов протекают лишь на некотором конечном промежутке времени, и с некоторого момента времени необходимость в них отпадает — «искусственное» обогащение спектра управляющих воздействий автоматически прекращается.

### § 5.1. Оптимальное адаптивное управление в случае минимально-фазового объекта управления

**5.1.1°. Постановка задачи.** Будем предполагать, что ОУ со скалярными входом  $u_t$  и выходом  $y_t$  описывается линейным разностным уравнением

$$a(\nabla; \xi) y_t = b(\nabla; \xi) u_t + v_t(\xi), \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} a(\lambda, \xi) &= 1 + \lambda a_1(\xi) + \dots + \lambda^r a_r(\xi), \\ b(\lambda, \xi) &= \lambda^k [b_k(\xi) + \dots + \lambda^{r-k} b_r(\xi)]; \end{aligned} \quad (1.2)$$

натуральное число  $r$  определяет разностный порядок ОУ, т. е.  $a_r^2(\xi) + b_r^2(\xi) \neq 0$ ; натуральное число  $k$  — запаздывание по управлению,  $k \geq 1$ . Коэффициенты полиномов (1.2) являются известными функциями параметра  $\xi$ , о котором известно лишь, что  $\xi \in \Sigma$ ;  $\Sigma$  — некоторое множество абстрактных параметров.

Помехи  $v_t$  при каждом  $t$  являются случайными величинами (с.в.), т. е. зависят лишь от вероятностного параметра  $\omega$ , который можно предполагать частью параметра  $\xi$ . Условимся считать  $\omega$  элементом вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , где  $\Omega = \{\omega\}$  — множество элементарных событий;  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра событий — подмножество множества  $\Omega$ ;  $P$  — вероятностная мера, определенная на событиях из  $\mathcal{A}$ . Далее предполагается, что  $\{v_t\}$  — стационарный процесс, определяемый уравнением

$$d(\nabla, \xi)v_t = e(\nabla, \xi)w_t, \quad (1.3)$$

где  $\{w_t\}$  — случайный процесс с независимыми значениями, обладающий свойствами

$$Mw_t^2 = \sigma_w^2, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t w_s^2 = \sigma_w^2, \quad Mw_t = 0. \quad (1.4)$$

Полиномы  $d(\lambda, \xi)$ ,  $e(\lambda, \xi)$  в (1.3) имеют вид

$$\begin{aligned} d(\lambda, \xi) &= 1 + \lambda d_1(\xi) + \dots + \lambda^p d_p(\xi), \\ e(\lambda, \xi) &= e_0(\xi) + \lambda e_1(\xi) + \dots + \lambda^p e_p(\xi), \quad e_0 \neq 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

вещественные коэффициенты которых также являются известными функциями параметра  $\xi$ , причем зависимость такова, что коэффициенты  $d_i(\xi)$ ,  $e_i(\xi)$ , так же как и  $a_i(\xi)$ ,  $b_i(\xi)$ , не зависят от случайного параметра  $\omega$  (в этом смысле можно говорить о детерминированных функциях  $a_i(\xi)$ ,  $b_i(\xi)$ ,  $d_i(\xi)$ ,  $e_i(\xi)$ ). При каждом  $\xi \in \Sigma$  полиномы  $d(\lambda, \xi)$ ,  $e(\lambda, \xi)$  предполагаются устойчивыми, т. е. не имеющими корней в замкнутом единичном круге. При этих условиях, как известно, уравнение (1.3) определяет  $\{v_t\}$  как стационарный процесс с дробно-рациональной

спектральной плотностью

$$p(\lambda, \xi) = \sigma_w^2 e(\lambda, \xi) e(\lambda^{-1}, \xi)/d(\lambda, \xi) d(\lambda^{-1}, \xi). \quad (1.6)$$

В (1.6) принята запись, в которой переменная  $\lambda$  может принимать произвольные комплексные значения. При  $|\lambda| \equiv 1$  формула (1.6) принимает вид

$$p(\lambda, \xi) = \sigma_w^2 |e(\lambda, \xi)|^2 / |d(\lambda, \xi)|^2,$$

откуда следует, что спектральная плотность равномерно ограничена и положительна на единичной окружности комплексной плоскости.

Характерной особенностью рассматриваемых в этом параграфе ОУ (1.1) является их устойчивость по управлению (минимальная фазовость), т. е. предполагается, что при любом  $\xi \in \Xi$  полином

$$b_+(\lambda, \xi) = b_k(\xi) + \lambda b_{k+1}(\xi) + \dots + \lambda^{r-k} b_r(\xi) \quad (1.7)$$

является устойчивым (отсюда, в частности, следует, что  $b_k(\xi) \neq 0$  при любом  $\xi \in \Xi$ ). Допустимыми будем считать управления  $u_t$ , имеющие вид

$$u_t = \mathcal{U}_t(y_0, \dots, y_t, u_0, \dots, u_{t-1}), \quad (1.8)$$

где  $\mathcal{U}_t$  — некоторая детерминированная функция своих аргументов. Таким образом, управляющие входы  $u_t$  могут зависеть лишь от предыстории процесса управления и принято, что нет запаздывания в измерении (последнее условие несущественно).

Пусть  $y_{t*}$  — заданная числовая последовательность, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t y_{s*}^2 < \infty. \quad (1.9)$$

Примем ЦУ следующего вида: требуется в классе допустимых управлений обеспечить наименьшее значение следующему функционалу качества:

$$J(u_0^\infty) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t M((y_s - y_{s*})^2 | y_0^{s-1}) \quad (1.10)$$

независимо от значения  $\xi \in \Xi$ . Последнее условие означает, что при синтезе управлений (1.8) использование значения  $\xi$  недопустимо, но возможно использование общих свойств множества  $\Xi$ . Если зависимости (1.8), решающие поставленную задачу, синтезированы, то они определяют систему, адаптивную в классе  $\Xi$  по отношению к ЦУ (1.10).

Последовательность  $y_{t*}$  называют обычно *программным движением*, а сформулированная задача может быть названа *задачей оптимального слежения*. Функционал качества (1.9) имеет вид предельной дисперсии случайного процесса  $\{y_t - y_{t*}\}$ .

Задача оптимального слежения допускает решение не при любых зависимостях полиномов (1.2), (1.5) от параметра  $\xi$ . Прежде чем переходить к выяснению условий ее разрешимости, постараемся решить задачу в случае, когда коэффициенты этих полиномов — известные величины.

**5.1.2°. Решение задачи оптимального управления в неадаптивном варианте.** В данном пункте предполагается, что коэффициенты полиномов (1.2), (1.5) известны и поэтому в законе (1.8) допустимо использование их значений. Поскольку зависимость этих полиномов от  $\xi$  теперь не играет особой роли, будем упрощать запись, полагая  $a(\lambda, \xi) = a(\lambda)$  и т. д.

Умножая обе части уравнения (1.1) на устойчивый операторный полином  $d(\nabla)$ , в силу (1.3) получим

$$a'(\nabla) y_t = b'(\nabla) u_t + e(\nabla) w_t, \quad (1.11)$$

где  $a'(\lambda) = d(\lambda) a(\lambda)$ ,  $b'(\lambda) = d(\lambda) b(\lambda)$ .

Уравнение (1.11) остается минимально-фазовым в силу устойчивости полинома  $d(\lambda)$ . Если  $d(\lambda) \not\equiv \text{const}$ , то ОУ (1.11) не является управляемым, поскольку полиномы  $a'(\lambda)$ ,  $b'(\lambda)$  имеют общий делитель  $d(\lambda)$ , но так как ОУ (1.11) — минимально-фазовый, то он стабилизируемый, а этого свойства оказывается достаточно для синтеза оптимальных управлений. Поэтому в дальнейшем будем иметь дело с ОУ в форме (1.11). Определим полином  $F(\lambda)$  степени, не превосходящей ( $k - 1$ ), соотношениями

$$F(0) = 1, \quad \frac{d^s [a'(\lambda) I(\lambda) - e(\lambda)]}{d\lambda^s} \Big|_{\lambda=0} = 0, \quad s = 1, \dots, k - 1. \quad (1.12)$$

Тогда полином  $a'(\lambda)F(\lambda) - e(\lambda)$  делится нацело на  $\lambda^k$ . Обозначим результат этого деления через  $G(\lambda)$ ,

$$G(\lambda) = \lambda^{-k} [a'(\lambda)F(\lambda) - e(\lambda)]. \quad (1.13)$$

Умножим теперь обе части уравнения (1.11) на операторный полином  $F(\nabla)$ ; в силу (1.13) получим

$$\begin{aligned} e(\nabla)[y_t - y_{t*} - F(\nabla)w_t] &= \\ &= \nabla^k [F(\nabla)d(\nabla)b_+(\nabla)u_t - G(\nabla)y_t] - e(\nabla)y_{t*}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

**Лемма 5.1.1.** *Закон управления (1.8), выбранный в форме*

$$F(\nabla)d(\nabla)b_+(\nabla)u_t = G(\nabla)y_t + e(\nabla)y_{(t+k)*}, \quad (1.15)$$

*определяет оптимальное управление в смысле функционала качества (1.10). При этом*

$$\inf_{\{u_t\}} J(u_t^\sim) = \sum_{i=0}^{k-1} F_i^2 \sigma_w^2, \quad (1.16)$$

где  $F_k$  — коэффициенты полинома  $F(\lambda)$ .

Лемма 5.1.1 доказывается просто, доказательство основано на использовании устойчивости полинома  $e(\lambda)$ , а также белошумности помехи  $w_t$ .

Итак, оптимальная управляющая система оказалась линейной и описывается разностным уравнением (1.15). Отметим, что использование закона управления (1.15) предполагает знание программного движения  $y_{t*}$  по крайней мере на  $k$  тактов вперед.

При  $y_{t*} \equiv 0$  регулятор (1.15) является стабилизирующим для ОУ (1.11) (а поэтому и для (1.1)). Действительно, характеристический полином  $g(\lambda)$  в этом случае в силу (1.13) имеет вид

$$g(\lambda) = a'(\lambda)F(\lambda)b'_+(\lambda) - \lambda^k b'_+(\lambda)G(\lambda) = b'_+(\lambda)e(\lambda),$$

т. е. является устойчивым. Если ОУ (1.1) не является минимально-фазовым, то система управления (1.1), (1.15) будет неустойчивой.

**5.1.3°.** Выбор регулятора при неизвестных параметрах объекта управления. Вернемся теперь к рассмотрению случая, когда коэффициенты полиномов (1.2), (1.5) зависят от параметра  $\xi$ , значение которого неизвестно. Теперь воспользоваться регулятором (1.15) для синтеза управ-

лений, разумеется, нельзя. Сделаем основополагающее для дальнейшего предположение о том, что правая часть в уравнении (1.14) зависит от конечного числа параметров, причем зависимость эта — линейная. Обозначая набор этих параметров через  $\tau$ ,  $\tau = \tau(\xi)$ ;  $\tau$  — конечномерный вектор-столбец, запишем уравнение (1.14) в виде

$$e(\nabla, \xi)[y_{t+k} - y_{(t+k)*} - F(\nabla)w_{t+k}] = \Phi_t \tau(\xi) + \varphi_t - y_{(t+k)*}, \quad (1.17)$$

где вектор-строка  $\Phi_t$  и скалярная величина  $\varphi_t$  предполагаются уже известными в каждый момент времени  $t$  (они составлены из величин

$$y_{t-k}, y_{t-k-1}, \dots, u_{t-k}, u_{t-k-1}, \dots, y_{t*}, y_{(t-1)*}, \dots,$$

возможно, умноженными на известные коэффициенты). Сделанное допущение заведомо имеет место, если в качестве компонент вектора  $\tau$  выбирать коэффициенты полиномов  $F(\lambda, \xi)d(\lambda, \xi)b_+(\lambda, \xi)$ ,  $e(\lambda, \xi)$  и  $G(\lambda, \xi)$ , зависящие от  $\xi$ . Простоты ради предположим, что число компонент вектора  $\tau(\xi)$  не зависит от выбора  $\xi \in \Xi$ .

Вместо регулятора (1.15), имеющего в принятых обозначениях вид

$$\Phi_t \tau(\xi) + \varphi_t = y_{(t+k)*}, \quad (1.18)$$

условимся формировать управления  $u_t$  с помощью закона

$$\Phi_t \tau_t + \varphi_t = y_{(t+k)*}, \quad (1.19)$$

где  $\tau_t$  — вектор подстраиваемых параметров, размерность которого совпадает с размерностью вектора существенных параметров  $\tau(\xi)$ . Способ формирования векторов  $\tau_t$  определяется алгоритмом адаптации и будет рассмотрен позднее. Пока лишь отметим, что не при любом векторе  $\tau_t$  регулятор (1.19) может определять управления. Действительно, в (1.18) компонента вектора  $\tau$ , отвечающая управлению  $u_t$ , была отлична от нуля в силу того, что

$$F(0) = 1, \quad b_+(0) \neq 0, \quad d(0) \neq 1.$$

Подобное условие следует обеспечить и для вектора  $\tau_t$ . С этой целью предположим, что знак величины  $b_+(0, \xi)$  не изменяется при  $\xi \in \Xi$  и

$$|b_+(0, \xi)| \geq C_b, \quad (1.20)$$

где  $C_b$  — некоторая положительная постоянная, не зависящая от выбора  $\xi \in \Xi$ . Условие (1.20) обеспечивает разрешимость уравнения (1.19) при любых  $\tau_t \in T = \tau(\Xi)$ ;  $T$  — образ множества  $\Xi$  в пространстве подстраиваемых параметров, причем соответствующая компонента векторов  $\tau_t$  не может быть сколь угодно близкой к нулю. Если величина  $b_+(0, \xi)$  не зависит от  $\xi$ , то достаточно знать ее знак  $(b_+(0, \xi) \neq 0$  в силу устойчивости полинома  $b_+(\lambda, \xi)$ .

В дальнейшем в качестве  $T$  будем рассматривать произвольное множество, которое является выпуклым.

Кроме того, если  $\tau \in T$ , то для компоненты  $\tau^{(i)}$  вектора  $\tau$ , отвечающей величине  $u_t$  в выражении  $\Phi_t \tau$ , предполагается выполненным неравенство

$$\tau^{(i)} \operatorname{sign} b_+(0, \xi) \geq C_b. \quad (1.21)$$

Поскольку величина  $b_+(0, \xi)$  не изменяет знака на множестве  $\Xi$ , то это условие означает, что при произвольном  $\tau \in T$  компонента вектора  $\tau^{(i)}$  в нуль обращаться не может и имеет постоянный знак на  $T$ .

Если величина  $b_+(0, \xi)$  от  $\xi$  не зависит, то величина  $u_t$  войдет в  $\varphi_t$ , но не в  $\Phi_t \tau$ . В этом случае регулятор (1.19) при всех  $t$  определяет управления  $u_t$  и множество  $T$  может быть произвольным множеством в пространстве подстраиваемых параметров.

**5.1.4°. Алгоритм адаптации.** Векторы  $\tau_t$  подстраиваемых параметров будем формировать по правилу

$$\begin{aligned} \tau_{t+k} &= P_T [\tau_t + \gamma_t \delta \Phi_t (y_{t+k} - y_{(t+k)*})], \\ \gamma_{t+1}^{-1} &= \gamma_t^{-1} + |\Phi_t|^2, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где  $\delta$  — положительное число — параметр алгоритма адаптации,  $P_T$  — проектор на множество  $T$ , которое будем предполагать выпуклым,  $\tau_0, \dots, \tau_{k-1}$  — произвольные векторы,  $\gamma_0 = 1$ .

Если  $T$  — все пространство подстраиваемых параметров (что допустимо принять, если величина  $b_+(0, \xi)$  не зависит от параметра  $\xi$ ), то  $P_T$  — тождественная операция и алгоритм (1.22) совпадает с (2.2.27), (2.2.28) при  $k = 1$ .

**5.1.5°. Основное утверждение.**

**Теорема 5.1.1.** Предположим что выполнены условия:

1. При любом  $\xi \in \Xi$  ОУ (1.1) — минимально-фазовый, т. е. полином (1.7) — устойчивый.

2. Для любого вектора  $\tau(\xi)$ , определяемого соотношением (1.17), выполняется неравенство (1.21), с некоторой положительной постоянной  $C_b$ .

3. Множество  $T = \tau(\Xi)$  выпукло, и известен проектор  $P_T$  на это множество.

4. Помеха  $v_t(\xi)$  в уравнении (1.1) формируется устойчивым фильтром (1.3), (1.5), где входы  $w_t$  являются независимыми с.в., удовлетворяющими условиям (1.4). Полином  $e(\lambda, \xi)$  в (1.3) при каждом  $\xi$  и любом  $\lambda$ ,  $|\lambda| = 1$ , удовлетворяет условию  $\operatorname{Re} e(\lambda, \xi) > \rho$  с некоторым положительным  $\rho > 0$ .

5. Программное движение  $y_{t*}$  является детерминированным и удовлетворяет условию (1.9).

Тогда управляющая система (1.19), (1.22) при произвольном выборе начальных подстроек  $\tau_0^{k-1}$  и при  $\delta < \rho$  является адаптивной в классе  $\Xi$  по отношению к ЦУ, состоящей в минимизации функционала качества (1.10). При этом для функционала качества имеет место формула (1.16) и с вероятностью 1 справедливы неравенства

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t y_s^2 < \infty, \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t u_s^2 < \infty.$$

Подчеркнем, что в теореме 5.1.1 не утверждается состоятельность оценок  $\tau_t$ , доставляемых алгоритмом адаптации (1.22). При  $k > 1$  значения функционала качества (1.10) на оптимальных управлениях, как следует из (1.16), могут зависеть от  $\xi$  и поэтому не могут быть «вычислены заранее», когда коэффициенты ОУ (1.1) неизвестны. Теорема 5.1.1 утверждает, что сужение класса допустимых управлений, связанное с отказом использовать значения коэффициентов ОУ в обратных связях, не ухудшает качества управления.

## § 5.2. Синтез адаптивного регулятора в задаче о диссипативности

При решении задачи оптимального адаптивного управления, приведенного в предыдущем параграфе, существенно использовалось свойство устойчивости по управлению рассматриваемых ОУ, а также специальный вид функционала качества, который зависел лишь от выходов

$y_t$ , но не от управлений  $u_t$ . В данном параграфе задача адаптивного управления будет решаться для произвольных ОУ со скалярными входами и выходами. Ее решение основано на доказательстве состоятельности оценок, доставляемых алгоритмом адаптации. Поскольку вид функционала качества не очень существен, то удобно продемонстрировать основные идеи на более простой задаче адаптивного управления. В качестве таковой ниже выбрана задача о диссипативности системы управления. Более сложная задача оптимального адаптивного управления рассмотрена в следующем параграфе.

**5.2.1°. Постановка задачи.** Уравнение ОУ в переменных «вход—выход» принимается в виде (1.1), (1.2). Помеха  $v_t$ , действующая на объект, порождается фильтром (1.3) при  $e(\lambda, \xi) \equiv 1$ . Так как полином  $d(\lambda, \xi)$  предполагается устойчивым, то после домножения уравнения (1.1) на операторный полином  $d(\nabla, \xi)$  приходим к уравнению вида (1.11), но уже с белошумной помехой  $v_t$ . Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением уравнения (1.1), предполагая, что  $v_t$  — помеха, имеющая вид

$$v_t = w_t. \quad (2.1)$$

Класс всевозможных реализаций таких помех  $v_t$  обозначим через  $\mathfrak{W}$ .

ЦУ примем в требовании обеспечить неравенство

$$\overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} M(y_t^2 + u_t^2 | y_0^{t-1}, v_0^{t-1}) < \infty \quad (2.2)$$

в классе допустимых управлений (1.8) при любой реализации помехи  $v_t$  из класса  $\mathfrak{W}$ , т. е. в соответствии с принятой терминологией рассматривается задача о диссипативности системы управления \*).

Отметим, что УС, синтезированная в предыдущем параграфе, не обеспечивает ЦУ (2.2), если ОУ (1.1) не является устойчивым по управлению.

\* ) Здесь, как и раньше,  $M(\cdot | y_0^{t-1}, u_0^{t-1})$  обозначает условное среднее при фиксированной предыстории процесса управления. Более точно, условие в момент времени  $t$  определяется  $\sigma$ -алгеброй, порождаемой с. в.  $\{y_0, \dots, y_{t-1}, u_0, \dots, u_{t-1}\}$ . Само неравенство (2.2) понимается с вероятностью 1.

ЦУ (2.2) требуется обеспечить в условиях, когда параметр  $\xi$ , от которого зависят полиномы (1.2), неизвестен.

Обозначим через  $\tau$  набор коэффициентов полиномов (1.2), зависящих от  $\xi$ ,  $\tau = \tau(\xi)$ ,

$$\tau(\xi) = \text{col}(a_{i_1}(\xi), \dots, a_{i_l}(\xi), b_{j_1}(\xi), \dots, b_{j_m}(\xi)), \quad (2.3)$$

$$1 \leq i_l \leq r, \quad k \leq j_m \leq r.$$

Коэффициенты, не вошедшие в набор (2.3), т. е. не зависящие от  $\xi$ , предполагаются известными. Набор  $\tau(\xi)$  представляет собой вектор существенных параметров. Предполагается, что размерность вектора  $\tau(\xi)$  однаакова для всех  $\xi \in \Xi$ . Обозначим  $T = \tau(\Xi)$  и будем  $T$  называть *пространством подстраиваемых параметров*. Как обычно, при синтезе обратных связей недопустимо использование значения вектора  $\tau(\xi)$ , определяющего набор неизвестных коэффициентов уравнения (1.1), и вероятностного параметра  $\omega$ , определяющего реализацию помехи  $\{v_t\} \subset \mathcal{W}$ . Таким образом, множество  $T \times \mathcal{W}$  характеризует неопределенность об ОУ и условиях его функционирования.

В дальнейшем удобно полиномы в (1.1) записывать в виде  $a(\lambda, \tau)$ ,  $b(\lambda, \tau)$ , подчеркивая зависимость от введенного вектора  $\tau$  существенных параметров.

**5.2.2°. Синтез регулятора при известном векторе существенных параметров.** Опишем способ построения обратных связей, который можно рассматривать как уточнение метода модального управления (см. п. 3.1.5°) для случая скалярного ОУ.

Зададимся произвольным устойчивым полиномом степени  $2r$ :

$$g(\lambda) = 1 + \lambda g_1 + \dots + \lambda^{2r} g_{2r} \quad (2.4)$$

и полиномы  $\alpha(\lambda, \tau)$ ,  $\beta(\lambda, \tau)$  регулятора

$$\alpha(\nabla, \tau) u_t = \beta(\nabla, \tau) y_t \quad (2.5)$$

определим из соотношений

$$\begin{aligned} a(\lambda, \tau) \alpha(\lambda, \tau) - b(\lambda, \tau) \alpha(\lambda, \tau) &= g(\lambda), \\ \alpha(0, \tau) &= 1, \quad \beta(0, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Приравнивая в (2.6) выражения при одинаковых степенях  $\lambda$ ,

получим систему линейных уравнений

$$L(\tau) \kappa = l(\tau) \quad (2.7)$$

относительно коэффициентов регулятора

$$\kappa = \text{col} (\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p); \quad (2.8)$$

$p$  — разностный порядок регулятора. Если полиномы  $a(\lambda, \tau)$ ,  $b(\lambda, \tau)$  не имеют общих корней, т. е. ОУ (1.1) — управляемый, то в силу леммы 3.1.1 система (2.7) однозначно разрешима относительно  $\kappa$  при некотором  $p \leq r$ .

При условии разрешимости системы (2.7) регулятор (2.5), (2.8) будет стабилизирующим для ОУ (1.1), причем характеристический полином системы управления (1.1), (2.5) будет совпадать с (2.4). При сделанных о помехах предположениях стабилизирующий регулятор обеспечит выполнение ЦУ (2.2).

Из (2.6) непосредственно следует, что если в (2.4)

$$g_{2r} \neq 0, \quad (2.9)$$

то разностный порядок регулятора (2.5) равен  $r$ . В дальнейшем условие (2.9) будет предполагаться выполненным.

Если ОУ (1.1) не при всех  $\tau \in T$  является управляемым, то система (2.7) может оказаться неразрешимой. Будем далее предполагать, что при всех  $\tau \in T$  ОУ (1.1) является стабилизуемым, т. е. полиномы  $a(\lambda, \tau)$ ,  $b(\lambda, \tau)$  могут иметь общий делитель, но он должен быть устойчивым полиномом. В этом случае в качестве  $g(\lambda)$  в (2.6) условимся выбирать полином  $g(\lambda) = g'(\lambda, \tau) g''(\lambda)$ , где  $g'(\lambda, \tau)$  — наибольший общий делитель полиномов  $a(\lambda, \tau)$ ,  $b(\lambda, \tau)$  степени  $q$  и  $g''(\lambda)$  — произвольный устойчивый полином,  $g''(0) = 1$ , степени  $2(r - q)$ . В этом случае после сокращения в (2.6) на  $g'(\lambda, \tau)$  и приравнивания выражений при одинаковых степенях  $\lambda$  вновь приходим к системе (2.7), которая в силу леммы 3.1.1 разрешима при некотором  $p \leq r - q$ .

Приведенную конструкцию нахождения коэффициентов стабилизирующего регулятора полезно распространить на случай, когда полиномы  $a(\lambda, \tau)$ ,  $b(\lambda, \tau)$  имеют близкие (не обязательно совпадающие) корни вне единичного круга. С этой целью представим полиномы  $a(\lambda, \tau)$ ,

$b(\lambda, \tau)$  в виде

$$a(\lambda, \tau) = a'(\lambda, \tau) a''(\lambda, \tau), \quad b(\lambda, \tau) = b'(\lambda, \tau) b''(\lambda, \tau), \quad (2.10)$$

где  $a'(\lambda, \tau), b'(\lambda, \tau)$  — устойчивые полиномы одинаковой степени  $r'$ ,  $r' = r'(\tau)$ ,  $a'(0, \tau) = b'(0, \tau) = 1$ , и полином

$$f(\lambda, \tau) = a'(\lambda, \tau) - b'(\lambda, \tau) = \sum_{i=1}^r f_i(\tau) \lambda^i \quad (2.11)$$

имеет «малые» коэффициенты  $f_i(\tau)$ :

$$\sum_{i=1}^r |f_i(\tau)| \leq C_f. \quad (2.12)$$

(Значение малости постоянной  $C_f$  в дальнейшем будет уточнено.) Полиномы  $a''(\lambda, \tau), b''(\lambda, \tau)$  предполагаются уже несократимыми. Полиномы  $\alpha(\lambda, \tau), \beta(\lambda, \tau)$  теперь будем определять из соотношения

$$a''(\lambda, \tau) \alpha(\lambda, \tau) - b''(\lambda, \tau) \beta(\lambda, \tau) = g''(\lambda), \quad (2.13)$$

где  $g''(\lambda)$  — устойчивый полином,  $g''(0) = 1$ , степени  $(2r - r')$ . Соотношение (2.13) вновь приводит к линейной системе (2.7), которая разрешима при достаточно больших  $r$  и доставляет регуляторы (2.5), разностные порядки которых не меньше  $r$ . Далее предполагается, что устойчивый полином  $g''(\lambda)$  как-то выбран, фиксирован и  $g_{2r-r'} \neq 0$ . При этом не исключено, что  $g''(\lambda) = g''(\lambda, \tau)$ . Для определенных описанным выше способом полиномов  $\alpha(\lambda, \tau), \beta(\lambda, \tau)$  характеристический полином  $g(\lambda) = g(\lambda, \tau)$  системы управления (1.1), (2.5) будет устойчивым, если постоянная  $C_f$  в (2.12) выбрана достаточно малой. Ниже это условие предполагается выполненным.

Подчеркнем, что реализация приведенной конструкции синтеза регулятора предполагает стабилизируемость ОУ (1.1) при каждом  $\tau(\xi) \in T$ .

**5.2.3°. Описание класса адаптации.** Класс  $\mathfrak{W}$  помех, действующих на ОУ, был описан в п. 5.2.1°. Опишем теперь те общие свойства, которые предполагаются известными об ОУ (1.1). Эти свойства сформулируем как условия, налагаемые на множество подстроек  $T = \tau(\Xi)$ .

1. При каждом  $\tau \in T$  полиномы  $a(\lambda, \tau), b(\lambda, \tau)$  не имеют близких корней в замкнутом единичном круге.

Более точно это означает, что существует постоянная  $\mu > 0$  такая, что  $\mu$ -окрестность множества корней полинома  $a(\lambda, \tau)$  может пересекаться с  $\mu$ -окрестностью множества корней полинома  $b(\lambda, \tau)$  лишь вне замкнутого единичного круга. Постоянная  $\mu$  от  $\tau \in T$  не зависит и потому предполагается известной.

2. Если постоянная  $C_f$  в (2.12) выбрана достаточно малой, то существует число  $v > 0$  такое, что  $v$ -окрестность корней полинома  $\alpha(\lambda, \tau)$  не пересекается с  $v$ -окрестностью корней полинома  $\beta(\lambda, \tau)$ .

Множество  $T$ , обладающее свойствами 1 и 2, обозначим через  $T_{\mu v}$ . Очевидно,  $T_{\mu'v'} \subseteq T_{\mu''v''}$ , если  $\mu' \geq \mu''$ ,  $v' \geq v''$ . Более того, существует такое число  $\rho_*$ ,  $\rho_* = \rho(\mu, v)$ , что при  $\rho < \rho_*$  множество  $T_{\mu/2, v/2}$  содержит  $\rho$ -окрестность множества  $T_{\mu v}$ .

3. Величины  $\mu$ ,  $v$ ,  $C_f$  и оценка  $\rho$  величины  $\rho_*(\mu, v)$ ,  $\rho < \rho_*(\mu, v)$ , выбраны столь малыми, что при любой подстройке  $\tau$  из  $\rho$ -окрестности вектора существенных параметров  $\tau(\xi) \in T_{\mu v}$  регулятор (2.5) является стабилизирующим для ОУ (1.1).

При указанных значениях  $\mu$ ,  $v$  множество  $T_{\mu v} \times \mathbb{W}$  будет классом адаптации.

**5.2.4°. Алгоритм адаптации.** При неизвестном значении вектора  $\tau(\xi)$  воспользоваться регулятором (2.5) не представляется возможным. Как обычно, вместо (2.5) используется регулятор с подстраиваемыми параметрами  $\tau_t$ :

$$\alpha(\nabla, \tau_t) u_t = \beta(\nabla, \tau_t) y_t. \quad (2.14)$$

При  $\tau_t = \tau(\xi)$  регулятор (2.14) полностью совпадает с (2.5). Подстройки  $\tau_t$  формируются с помощью алгоритма адаптации. Для его формулировки введем вектор

$$\Phi_{t-i} = \text{col}(-y_{t-i_1}, \dots, -y_{t-i_l}, u_{t-j_1}, \dots, u_{t-j_m}), \quad (2.15)$$

отвечающий набору (2.3) неизвестных коэффициентов уравнения (1.1). Само уравнение (2.1) тогда можно представить в виде

$$y_{t+1} = \Phi_t^* \tau + \varphi_t + v_{t+1}, \quad (2.16)$$

где

$$\varphi_t = - \sum_{s=1}^r a_s y_{t-s} + \sum_{s=-k}^r b_k u_{t-s}, \quad (2.17)$$

и штрихи при суммировании означают, что опускаются слагаемые, вошедшие в  $\Phi_{t-1}$ , т. е.  $\Phi_{t-1}$  включает не зависящие от  $t$  и  $\xi$  величины в уравнении (1.1). Соотношение (2.16) имеет вид «наблюданного сигнала»  $y_{t+1} - \phi_t$ , представляющего собой аддитивную смесь «полезного сигнала»  $\Phi_t^* \tau$  и помехи, причем «полезный сигнал» линейно зависит от неизвестных параметров. Задача оценки параметров «полезного сигнала» — стандартная задача фильтрации случайных процессов, и для ее решения можно воспользоваться различными способами. Особенность рассматриваемой задачи состоит в стохастической зависимости значений «полезного сигнала». Однако в каждый момент времени  $t$  с.в.  $\Phi_t$  и  $v_{t+1}$  независимы. Это позволяет обоснованно применить рекуррентную процедуру МНК для получения оценок параметра  $\tau$ .

Перейдем к описанию алгоритма адаптации.

Определим последовательность векторов  $\tau'_t$  и матриц  $\gamma_t$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned}\tau'_{t+1} &= \tau'_t + h_t \gamma_t \Phi_t L_t [y_{t+1} - \phi_t - \Phi_t^* \tau'_t], \\ \gamma_{t+1} &= \gamma_t - h_t \gamma_t \Phi_t L_t \Phi_t^* \gamma_t, \\ L_t &= (1 + h_t \Phi_t^* \gamma_t \Phi_t)^{-1},\end{aligned}\tag{2.18}$$

где

$$h_t = (1 + |\Phi_t|^2)^{-1/2}.\tag{2.19}$$

Векторы  $\Phi_t$  и скалярные величины  $\phi_t$  определяются формулами (2.15), (2.16);  $\tau_0$  — произвольный вектор из  $T_{\mu\nu}$ ;  $\gamma_0$  — произвольная положительная матрица. Подстройки  $\tau_t$  в регуляторе (2.14) вычисляются по следующему правилу:  $\tau_0 = \tau'_0 \in T_{\mu\nu}$ . Вектор  $\tau_0$  не изменяется до момента времени  $t_1$ , когда впервые окажутся выполнеными условия  $|\tau_t - \tau'_0| > \rho$ ,  $\tau_t \in T_{\mu/2, \nu/2}$ , и тогда  $\tau_{t_1} = \tau'_{t_1}$ , затем вектор  $\tau_t$  сохранится до момента  $t_2$ , когда впервые после  $t_1$  выполняются условия  $|\tau_t - \tau'_{t_1}| > \rho$ ,  $\tau_t \in T_{\mu/2, \nu/2}$ , и тогда  $\tau_{t_2} = \tau'_{t_2}$ , и т. д.

Алгоритм (2.18) является некоторой модификацией рекуррентной процедуры (2.3.2) и при  $h_t \equiv 1$ ,  $R = 1$  с точностью до обозначений совпадает с последней.

Если оценки  $\tau'_t$  окажутся сильно состоятельными, т. е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau'_t = \tau(\xi)$  с вероятностью 1, то, очевидно, подстройки  $\tau_t$  стабилизируются за конечное время,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_t = \tau_\infty$  и

$|\tau_\infty - \tau(\xi)| \leq \rho$ . Если число  $\rho$  выбрано достаточно малым, то регулятор (2.14) при  $\tau_t = \tau_\infty$  будет стабилизирующим для ОУ (1.1) и, следовательно, ЦУ (2.2) будет обеспечена. Соответствующие оценки «достаточной малости» величины  $\rho$  в зависимости от полиномов (1.2) и (2.4) могут быть получены методами теории возмущений и здесь этот вопрос не обсуждается. Итак, задача свелась к выяснению условий, при которых оценки  $\tau_t$  сильно состоятельны.

**5.2.5°. Состоятельность оценок.** Наличие скалярных величин  $h_t$  в процедуре (2.18) несущественно отличает ее от процедуры (2.3.2). В частности, к (2.18) применима лемма 2.3.2, из которой следует справедливость соотношений

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{t+1}^{-1} &= \bar{\gamma}_t^{-1} + h_t \Phi_t \Phi_t^*, \\ \bar{\tau}_{t+1}' &= \tau + \bar{\gamma}_{t+1} \bar{\gamma}_0^{-1} (\bar{\tau}_0' - \tau) + \bar{\gamma}_{t+1} \sum_{s=1}^t h_s \Phi_s v_{s+1}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из последнего соотношения (2.20) следует, что оценки  $\tau_t'$  будут сильно состоятельными, если с вероятностью 1 выполняется предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\gamma}_{t+1} \sum_{s=1}^t h_s \Phi_s v_{s+1} = 0. \quad (2.21)$$

**Лемма 5.2.1.** Пусть для системы управления (2.1), (2.14), подстраиваемые параметры  $\tau_t$  определяются с помощью процедуры (2.18) описанным выше образом. Тогда для любого  $\varepsilon \in [0, 1/2]$  с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\varepsilon-1} \sum_{s=1}^t h_s \Phi_s v_{s+1} = 0. \quad (2.22)$$

Если, кроме того, при некотором  $\varepsilon \in [0, 1/2]$  предельно невырождена в смысле определения 2.3.1 матрица

$$J_{t, \varepsilon} = \frac{1}{t^{1-\varepsilon}} \sum_{s=1}^t h_s \Phi_s \Phi_s^*, \quad (2.23)$$

то при этом  $\varepsilon$  с вероятностью 1

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{1-\varepsilon} |\bar{\gamma}_{t+1}| < \infty \quad (2.24)$$

и, следовательно, оценки  $\tau_i$ , доставляемые процедурой (1.18), сильно состоятельны.

Неравенство (2.24), вообще говоря, может нарушаться. Для его обеспечения видоизменим постановку задачи.

**5.2.6°. Процедура «встряхивания».** Будем предполагать, что в произвольные моменты времени имеется возможность прерывать движение системы (1.1), (2.14), (2.18) и продолжать его из новых произвольных начальных данных. Такое предположение представляется допустимым в некоторых задачах «велосипедного» типа, когда в определенные моменты времени система «падает», затем с помощью некоторого способа ее фазовым переменным придают новые значения и движение продолжается до следующего «падения». Во многих приложениях, однако, такое предположение представляется весьма ограничительным либо даже невозможным. В следующем параграфе будет приведен вариант решения задачи синтеза АдУС, в котором нет необходимости использовать такую процедуру «встряхивания». Сейчас же, предполагая это возможным, покажем, как выбором моментов прерывания (своих для каждой реализации УП) и начальных данных можно обеспечить (2.24).

Зададимся положительной постоянной  $C_\gamma$ ,  $C_\gamma > 2$ , и в каждый момент  $t$  будем проверять выполнение условия

$$t^{1-\varepsilon} |\gamma_t| < C_\gamma; \quad (2.25)$$

$|\gamma_t|$  — евклидова норма матрицы  $\gamma_t$ ;  $\varepsilon$  — некоторое число из интервала  $(0, 1/2)$ . Если в некоторый момент  $\tilde{t}$  неравенство (2.25) оказалось нарушенным, то в течение  $s$  последующих моментов времени  $\tilde{t} + 1, \tilde{t} + 2, \dots, \tilde{t} + s$  будем «встряхивать» систему (1.1), (2.14), выставляя ее в каждый из этих моментов в такие начальные положения, что выполняются соотношения  $h_{\tilde{t}+1}^{1/2} \Phi_{\tilde{t}+1} = e_1, h_{\tilde{t}+2}^{1/2} \Phi_{\tilde{t}+2} = e_2, \dots, h_{\tilde{t}+q}^{1/2} \Phi_{\tilde{t}+q} = e_q, h_{\tilde{t}+q+1}^{1/2} \Phi_{\tilde{t}+q+1} = e_1$  и т. д. Здесь  $q$  — размерность векторов  $\Phi_t$  и  $\{e_j\}_{j=1}^q$  — ортонормированный базис в евклидовом пространстве этих векторов.

**Лемма 5.2.2.** Пусть процедура «встряхивания» после момента  $\tilde{t} = t_i$  нарушения неравенства (2.25) выполняется в течение  $d$  циклов,  $s = dq$ , где

$$d > (T(\tilde{t}) - \tilde{t})/q \quad (2.26)$$

и  $T(\tilde{t})$  — решение уравнения

$$T = 2T^{1-\epsilon}/C_\gamma + \tilde{t}. \quad (2.27)$$

Тогда в момент времени  $t = t_{l+s}$  выполнено неравенство

$$(t + s)^{1-\epsilon} |\gamma_{l+s}| \leq C_\gamma/2. \quad (2.28)$$

При  $C_\gamma > 2$  неравенство (2.27) разрешимо и при  $\epsilon = 0$ , так что (2.28) справедливо и в этом случае.

После момента  $t = \tilde{t} + s$  процедура «встряхивания» прекращается до очередного нарушения неравенства (2.25). Алгоритм оценивания (2.18) продолжает свою работу и во время процесса «встряхивания», причем  $y_{l+1}$  в (2.16) — реакция ОУ (1.1) на очередное начальное состояние, так что  $\Phi_t$  и  $\varphi_t$  вычисляются в (2.15), (2.17) в моменты «встряхивания» по задаваемым начальным состояниям. Разумеется, процедуру «встряхивания» нет необходимости продолжать все  $d$  циклов, если неравенство (2.28) оказалось выполненным раньше.

**5.2.7°. Основное утверждение.** Использование приведенной процедуры «встряхивания» обеспечивает сильную состоятельность оценок  $\tau_l$  и сходимость за конечное время оценок  $\tau_l$  при произвольном выборе начальных данных  $\tau_0$ ,  $\gamma_0$  ( $\gamma_0$  — положительная матрица) в процедуре (2.18). Полученный результат неудовлетворителен в том смысле, что неясно, будет ли процедура «встряхивания» продолжаться неограниченно долго, обеспечивая тем самым ЦУ (2.2) за счет «насильственного» прерывания движения. Оказывается, что неравенство (2.24) обеспечивает управляющей системой на почти каждой реализации управляемого процесса через конечное время (свое для каждой реализации), после чего необходимость во «встряхивании» отпадает.

**Теорема 5.2.1.** Предположим, что выполнены условия:

1. Класс  $\mathfrak{W}$  помех в уравнении (1.1) состоит из всеозможных реализаций процесса (2.1).
2. Вектор существенных параметров  $\tau(\xi)$ , определяемый (2.3), принадлежит множеству  $T_{\mu\nu}$ , введенному в п. 5.2.3° условиями 1—3.
3. Число  $r$  в алгоритме адаптации выбрано достаточно малым в соответствии с условием 3 п. 5.2.3°.
4. Устойчивый полином  $g''(\lambda)$  в (2.13) имеет степень  $2r - r'$ , так что построенные в соответствии с конст-

рукцией п. 5.2.2° полиномы  $\alpha(\lambda, \tau)$ ,  $\beta(\lambda, \tau)$  при любом  $\tau \in T_{\mu\nu}$  имеют разностный порядок не меньше  $r$ .

Тогда управляющая система, определяемая регулятором (2.14), алгоритмом адаптации (2.18) и описанной в п. 5.2.6° процедурой «встряхивания», адаптивна в классе  $T_{\mu\nu} \times \mathbb{W}$ . При этом оценки  $\tau_t'$ , полученные в силу алгоритма (2.18), сильно состоятельны независимо от выбора начальных данных  $\tau_0', \gamma_0 > 0$ . Подстройки  $\tau_t$ , определяемые по  $\tau_t'$  в соответствии с алгоритмом адаптации, стабилизируются через конечное время, т. е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_t = \tau_\infty$  достигается через конечное время, и, начиная с этого времени, условия (2.21), (2.24) леммы 5.2.1 выполняются автоматически, следовательно, необходимость в процедуре «встряхивания» отпадает.

Отметим следующий факт, на котором основана теорема 5.2.1.

Если ввести вектор

$$x_t = \text{col}(y_t, \dots, y_{t-r+1}, u_t, \dots, u_{t-r+1}), \quad (2.29)$$

то для него в силу системы управления (1.1), (2.5) справедливо соотношение

$$x_{t+1} = A(\tau)x_t + Bv_{t+1},$$

где  $B = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$  и матрица  $A(\tau)$  выписывается стандартным образом. Так как порядок регулятора (2.5) не меньше  $r$ , то пара  $\{A(\tau), B\}$  оказывается управляемой, что позволяет доказать существование и невырожденность

матрицы  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t x_s x_s^*$ , а с ней справедливость неравенства (2.24). Аналогичное заключение справедливо, если в регуляторе (2.5) вместо  $\tau$  использовать близкие к нему векторы  $\tau_t$ . Использование процедуры «встряхивания» позволяет получить оценки  $\tau_t$  из  $\rho$ -окрестности вектора  $\tau(\xi)$ , а в силу отмеченного выше факта при таких значениях  $\tau_t$  (и достаточно малом  $\rho$ ) неравенство (2.24) выполняется автоматически, устранив необходимость в дальнейшем использовании процедуры «встряхивания». Такова общая схема доказательства теоремы 5.2.1. Разумеется, неравенство (2.24) может оказаться выполненным на некоторых реализациях в силу УС (2.14), (2.18), и тогда процесс «встряхивания» на этих реализациях «включаться» не будет.

### § 5.3. Синтез адаптивного регулятора в задаче об оптимизации стохастического объекта

**5.3.1°. Постановка задачи.** Вновь примем, что ОУ описывается уравнением

$$a(\nabla, \tau) y_t = b(\nabla, \tau) u_t + v_t, \quad (3.1)$$

где  $y_t$ ,  $u_t$ ,  $v_t$  — скалярные выход, управление и помеха,  $\tau$  — вектор параметров, состоящий из набора неизвестных коэффициентов полиномов  $a(\lambda, \tau)$ ,  $b(\lambda, \tau)$ . О векторе  $\tau$  известно лишь, что  $\tau \in T$ ;  $T$  — некоторое множество. Помехи  $v_t$  предполагаются стохастически независимыми с.в. со свойствами

$$Mv_t = 0, Mv_t^2 = \sigma_v^2 > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t v_s^2 = \sigma_v^2 \quad (3.2)$$

(последнее равенство предполагается выполненным с вероятностью 1).

Пусть  $Q(y, u)$  — положительная квадратичная форма переменных  $(y, u)$ :

$$Q(y, u) = Q_{11}y^2 + 2Q_{12}yu + Q_{22}u^2,$$

$$Q_{12}^2 < Q_{11}Q_{22}, \quad Q_{11}, Q_{22}, Q_{12}$$

— вещественные коэффициенты формы. При известном векторе  $\tau$  может быть синтезирован, в соответствии с п. 3.П.5°, стабилизирующий регулятор

$$\alpha(\nabla, \tau) u_t = \beta(\nabla, \tau) y_t, \quad (3.3)$$

который доставляет минимум функционалу качества

$$J = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} M Q(y_t, u_t) \quad (3.4)$$

в классе всех неупреждающих обратных связей.

В адаптивном варианте задачи оптимального управления вектор  $\tau$  неизвестен. Требуется синтезировать управляющую систему, формирующую допустимые управлении в соответствии с определением 3.3.1, для которых

$$J' \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} M \{Q(y_t, u_t) \mid y_0^{t-1}, u_0^{t-1}\} \Rightarrow \min_{\{u_0^\infty \in U_s\}} . \quad (3.5)$$

Здесь  $\mathcal{U}_s$  — множество допустимых управлений, введенное в § 3.3, и под знаком  $\overline{\lim}$  стоит условное математическое ожидание; в качестве условия выступает предыстория процесса управления. Функционал  $J'$  называют также *пределальным значением условных потерь*. Таким образом, задача состоит в синтезе адаптивного регулятора, обеспечивающего минимизацию предельного значения условных потерь в условиях, когда параметры  $\tau$  объекта неизвестны. Такой регулятор назовем *адаптивным*.

Иногда в адаптивном варианте задачи управления вместо функционала (3.5) принимается функционал

$$J = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \sum_{s=0}^t M Q(y_s, u_s), \quad (3.6)$$

который в классе линейных стабилизирующих обратных связей, как нетрудно показать, совпадает с (3.4). ЦУ (3.4) может оказаться «грубой» в адаптивном варианте задачи управления. Обеспечение ЦУ (3.5) означает, что на почти каждой реализации управления  $u_0^\infty$  будет обеспечен минимум (среднеквадратичного) функционала; это следует понимать следующим образом: если в регуляторе (3.3) вместо  $\tau$  использовать оценку  $\tau_t$ , доставляемую алгоритмом адаптации после достаточно продолжительного времени его функционирования, то полученный таким образом регулятор с постоянными коэффициентами ( $\tau_t$  «заморожено») будет реализовывать управление, обеспечивающие функционалу качества значения, сколь угодно близкие к оптимальному (тем ближе, чем позже будет «заморожена» оценка  $\tau_t$ ). Усреднение в (3.5) при этом производится по случаю, определяемому белошумными помехами. Если же в адаптивном варианте задачи управления выбран функционал (3.4) безусловных потерь, то при этом происходит усреднение не только по реализации действующих помех, но и по реализациям примененных последовательностей управления. Это может привести к тому, что на каждой конкретной реализации процесса управления не удается гарантировать оптимальных свойств системы управления.

Вообще говоря, от (3.5) можно перейти к (3.4) безусловным усреднением, т. е. УС, обеспечивающие (3.5), обеспечивают ЦУ (3.4). С другой стороны, УС, обеспечивающая ЦУ (3.4), обычно обеспечивает и (3.5). Так, на-

пример, в случае известного параметра  $\tau(\xi)$  условные и безусловные потери совпадают, т. е. в этом случае реализуется и ЦУ (3.4).

**5.3.2°. Синтез субоптимальной управляющей системы.** В предыдущем параграфе была предложена конструкция синтеза адаптивного регулятора, которая (при возможном использовании на некотором конечном промежутке времени процедуры «встряхивания») не только обеспечивала ЦУ (2.2), но позволяла получать состоятельные оценки  $\tau'_t$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau'_t = \tau$ . Этим обстоятельством естественно воспользоваться для обеспечения ЦУ, более «тонких», чем (2.2), например, ЦУ (3.5). Поясним, как можно этого добиться.

В основе конструкции синтеза управляющей системы, рассмотренной в § 5.2, лежало предположение о выборе устойчивого полинома (2.4), единственным ограничением на этот выбор было условие (2.9), в остальном устойчивый полином  $g(\lambda)$  выбирался произвольно (если опустить на момент рассуждения, связанные с возможным наличием у полиномов  $a(\lambda, \tau)$ ,  $b(\lambda, \tau)$  общего делителя). Таким произволом можно воспользоваться следующим образом: выбрать в качестве  $g(\lambda, \tau)$  в конструкции § 5.2 полином (2.6), где  $\alpha(\lambda, \tau)$ ,  $\beta(\lambda, \tau)$  — полиномы, отвечающие оптимальному регулятору. Если при каждом  $\tau \in T$  так полученный полином будет удовлетворять условию (3.9), то синтезированная в § 5.2 адаптивная управляющая система, кроме ЦУ (2.2), будет при выборе достаточно малого  $\rho$  в алгоритме адаптации (2.18) обеспечивать ЦУ

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} M[Q(y_t, u_t) | y_0^{t-1}, u_0^{t-1}] < J' + \varepsilon \quad (3.7)$$

при сколь угодно малом  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$ . Это связано с тем, что у регулятора (2.14) коэффициенты «замораживаются» через конечное время и их предельное значение  $\tau_\infty$  находится в  $\rho$ -окрестности вектора  $\tau$ , а величина  $J' = J'(\tau)$  является непрерывной функцией параметра  $\tau$ . Итак, использование УС § 5.2 при выполнении для оптимального регулятора условия (2.9) приводит к субоптимальному управлению.

К сожалению, для оптимальных регуляторов условие (2.9) часто не выполняется. Так, например, если ОУ (3.1) устойчив по управлению, то при минимальном запаздыва-

нии в управлении ( $k = 1$ ), как уже говорилось в § 3.2, полиномы  $\alpha(\lambda, \tau)$ ,  $\beta(\lambda, \tau)$  имеют вид

$$\alpha(\lambda, \tau) = \frac{b(\lambda, \tau)}{\lambda}, \quad \beta(\lambda, \tau) = \frac{a(\lambda, \tau) - 1}{\lambda},$$

т. е. оптимальный регулятор в данном случае имеет разностный порядок ( $r = 1$ ). Это не значит, конечно, что

информационная матрица  $J_T = \frac{1}{T} \sum_s h_s \Phi_s \Phi_s^*$  будет обя-

зательно предельно вырожденной. Если все коэффициенты полиномов  $a(\lambda, \tau)$ ,  $b(\lambda, \tau)$  неизвестны, то  $J_T$  заведомо будет предельно вырожденной: уравнение регулятора имеет вид  $\Phi_t^* \tau = 0$ . Если часть коэффициентов известна, то размерность вектора  $\Phi_t$  уменьшается и матрица  $J_T$  может оказаться предельно невырожденной. Тем не менее тот факт, что оптимальный регулятор имеет разностный порядок меньше, чем разностный порядок ОУ (3.1), не позволяет непосредственно воспользоваться УС § 5.2 для синтеза оптимальных управлений. Однако, если ограничиться субоптимальной ЦУ (3.7), то можно поступить следующим образом.

Пусть  $g_{\text{опт}}(\lambda, \tau)$  — характеристический полином системы управления (1.1), (2.5), отвечающий оптимальному регулятору. Если полином  $g_{\text{опт}}(\lambda, \tau)$  имеет степень меньше  $2r$ , то в соотношении (2.6) в качестве  $g(\lambda)$  выберем полином

$$g(\lambda) = g(\lambda, \tau) = g_{\text{опт}}(\lambda, \tau) + \lambda^{2r} g_{2r}, \quad (3.8)$$

где  $g_{2r}$  — отличное от нуля достаточно малое число. Полиномы  $\alpha(\lambda, \tau)$ ,  $\beta(\lambda, \tau)$ , найденные из соотношения (2.6), теперь будут иметь разностный порядок не ниже  $r$ , и, следовательно, применима конструкция синтеза адаптивной УС, обеспечивающей ЦУ (2.2). Подстройки  $\tau_t$  сойдутся за конечное время к некоторому вектору  $\tau_\infty$  из  $\rho$ -окрестности вектора  $\tau(\xi)$ .

Заметим теперь, что найденные из соотношений (2.8), (3.8) коэффициенты полиномов  $\alpha(\lambda, \tau)$ ,  $\beta(\lambda, \tau)$  будут близки к коэффициентам оптимального регулятора, если постоянная  $g_{2r}$  в (3.8) выбрана достаточно малой. Как следствие этого, заключаем, что синтезированная в § 5.2 УС будет обеспечивать и ЦУ (3.7) при сколь угодно малом  $\varepsilon$ , если

числа  $\rho$  и  $g_{2r}$  достаточно малы. Таким образом, синтезированный в предыдущем параграфе адаптивный регулятор будет обеспечивать *субоптимальное управление* со сколь угодно высоким уровнем субоптимальности.

Мы ограничимся сделанными замечаниями о возможности синтезировать субоптимальную адаптивную УС, не приводя точных формулировок. Подчеркнем, что в теоретическом плане при синтезе адаптивных управлений в § 5.2 принципиальную роль играла процедура «встряхивания», позволяющая «затягивать» оценки  $\tau_t$  в нужную окрестность вектора  $\tau(\xi)$  при нарушении условия идентифицируемости (при вырождении информационной матрицы). В следующем пункте будет предложена другая конструкция синтеза оптимального адаптивного регулятора, не использующая процедуры «встряхивания».

**5.3.3°. Идея построения управляемой системы.** В основу синтеза адаптивных управлений будут положены два регулятора, один из которых является оптимальным при известных значениях существенного параметра, а другой — стабилизирующими и имеющим разностный порядок не меньше  $r$ . Оценки, доставляемые алгоритмом (2.18) при использовании второго «грубого» регулятора, будут состоятельными, но управления не оптимальными. Поэтому производится последовательное переключение с одного регулятора на другой. Этот способ переключения таков, что, начиная с некоторого момента времени, когда «грубые» управления обеспечивают получение достаточно хороших оценок вектора существенных параметров, происходит переключение на «тонкий» (оптимальный) регулятор и дальнейшее подключение к «грубому» регулятору уже не производится. В такой схеме «грубый» регулятор играет роль, вполне аналогичную процедуре «встряхивания» § 5.2. Напомним, что условием перехода к процедуре «встряхивания» являлось нарушение (2.25), т. е. вырождение информационной матрицы. В нашем случае информационная матрица (см. п. 2.4.3°)

$$J_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t h_s \Phi_s \Phi_s^* \quad (3.9)$$

может оказаться вырожденной и условие (2.25) будет нарушаться при работе «тонкого» регулятора, так что ис-

пользование условия (2.25) для переключения регуляторов приведет к бесконечной серии переключений с одного регулятора на другой и, следовательно, оптимальность управлений достигнута не будет. Поэтому в данном параграфе выбирается другой способ переключения регуляторов, использующий свойства оптимальных управлений. Именно выясняется, что если управления формируются с помощью оптимального регулятора (или близкого к нему), то, несмотря на возможное вырождение информационной матрицы, обеспечивается сходимость оценок алгоритма (2.18). Это свойство позволяет предложить такой способ переключения, при котором после некоторого конечного промежутка времени УС «застревает» на «тонком» регуляторе, обеспечивая выполнение ЦУ (3.5).

**5.3.4°. Синтез управляющей системы.** Предположим, что имеется регулятор

$$\alpha''(\nabla) u_t = \beta''(\nabla) y_t, \quad \alpha(0) = 1, \quad (3.10)$$

разностного порядка не меньше  $r$ , коэффициенты которого не зависят от  $t$ , и для каждого  $\tau \in T$  регулятор (3.10) является стабилизирующим для ОУ (3.1). В п. 5.3.6° покажем, что такое предположение не является существенным и делается для упрощения рассуждений. Предполагая, что каждому  $\tau \in T$  отвечает стабилизируемый ОУ (3.1), синтезированный в соответствии с § 3.3 оптимальный в смысле критерия (3.6) регулятор будем записывать в виде

$$\alpha'(\nabla, \tau) u_t = \beta'(\nabla, \tau) y_t. \quad (3.11)$$

Управления будем формировать следующим образом. Условимся режим управления называть *оптимизирующим*, если  $u_t$  формируются с помощью регулятора

$$\alpha'(\nabla, \tau_t) u_t + \alpha_{rt} \nabla^r u_t = \beta'(\nabla, \tau_t) y_t, \quad (3.12)$$

в котором  $\tau_t$  — вектор подстроек, алгоритм вычисления которых будет описан ниже,  $\alpha_{rt}$  — регуляризирующая добавка, убывающая к нулю при  $t \rightarrow \infty$  по специальному закону, который будет далее сформулирован. Формирование управлений с помощью регулятора (3.10) назовем *режимом стабилизации*. Режимы оптимизации и стабилизации будут чередоваться в зависимости от поведения подстроек  $\tau_t$ .

Рассмотрим режим оптимизации, с которого начинается процесс управления. Предположим, что фиксированы положительные числа  $C_\gamma, C_Q, C_\alpha, \varepsilon, 0 < \varepsilon < 1/2$ . Будем формировать оценки  $\tau_t'$  вектора  $\tau$  существенных параметров с помощью алгоритма (2.18), предполагая, что начальные величины — вектор  $\tau_0' \in T$  и матрица  $\gamma_0 > 0$  как-то фиксированы. В качестве вектора  $\tau_t$  выбран вектор  $\tau_0'$  и в качестве величины  $\alpha_{rt}$  — число  $C_\alpha^*$ ). Эти значения вектора  $\tau_t$  и число  $\alpha_{rt}$  сохраняются до момента времени  $t_1$ , пока не нарушится неравенство

$$\max_{0 \leq s \leq t} \frac{1}{s} \sum_{l=0}^s Q(y_l, u_l) < C_Q \quad (3.13)$$

либо пока не окажутся выполненными условия

$$t^{1-\varepsilon} \operatorname{Sp} \gamma_t < C_\gamma, \quad \tau_t' \in T. \quad (3.14)$$

Здесь  $Q(y, u)$  — целевая функция из (3.5). При нарушении неравенства (3.13) осуществляется переход на стабилизирующий режим. При выполнении неравенства (3.14) в момент времени  $t = t_1$  изменяются значения вектора  $\tau_t$  и числа  $\alpha_{rt}$ :  $\tau_{t_1} = \tau_{t_1}', \alpha_{rt_1} = C_\alpha/2$ . Затем режим оптимизации продолжается с этими значениями  $\tau_t, \alpha_{rt}$  до первого момента  $t_2$ , когда либо нарушится неравенство (3.13), либо будет выполнено неравенство (3.14). При нарушении (3.13) переходим к режиму стабилизации. При выполнении неравенства (3.14) в момент  $t_2$  режим оптимизации продолжается, но с измененными величинами  $\tau_t$  и  $\alpha_{rt}$ :  $\tau_{t_2} = \tau_{t_2}', \alpha_{rt_2} = C_\alpha/3$  и т. д. В режиме стабилизации управления формируются с помощью регулятора (3.10), одновременно производится вычисление  $\tau_t', \gamma_t$  в соответствии с алгоритмом (2.18). Режим стабилизации продолжается до момента времени  $t$ , когда впервые окажутся выполненными условия

$$\frac{1}{t} \sum_{s=1}^t Q(y_s, u_s) < C_Q/2, \quad t^{1-\varepsilon} \gamma_t < C_\gamma/2, \quad \tau_t' \in T. \quad (3.15)$$

---

$^*)$  Далее простоты ради предполагается, что полином  $\alpha'(\lambda, \tau_t)$  имеет нулевой коэффициент при  $\lambda^r$  при всех  $t$ . Если это не так, то этот коэффициент  $\alpha_r(t)$  нужно учитывать при выборе регуляризующей добавки  $\alpha_{rt}$ , с тем чтобы  $\alpha_r(\tau_t') + \alpha_{rt} \neq 0$ .

Если такой момент  $T$  наступит, то осуществляется переход к режиму оптимизации, причем выбирается  $\tau_T = \tau'_T$ ,  $\alpha_{rT} = C_\alpha/v_T + 1$ , где  $v_T$  — число проведенных к моменту времени  $T$  коррекций (изменений) вектора подстроек  $\tau_t$ . Во время процесса стабилизации векторы  $\tau_t$  и числа  $\alpha_{rt}$  не изменяются. Сформулированным условием управляющая система определена полностью.

**5.3.5°. Оптимальные свойства адаптивной управляющей системы.** Может оказаться, что режим стабилизации затягивается чрезмерно долго, даже если оценки  $\tau_t$  состоятельны. Это может привести к неоптимальности синтезированной в предыдущем пункте управляющей системы. Следующее утверждение позволяет понять «механизм» работы УС.

**Лемма 5.3.1.** *Предположим, что помехи  $v_t$ , действующие на ОУ (3.1), стохастически независимы и удовлетворяют условиям (3.2). Пусть ОУ (3.1) замкнут произвольным регулятором*

$$\alpha(\nabla) u_t = \beta(\nabla) y_t, \quad \alpha(0) = 1, \quad (3.16)$$

*разностный порядок которого не меньше  $r$ . Тогда регулятор (3.16) является стабилизирующим в том и только в том случае, если с вероятностью 1 справедливо неравенство*

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t Q(y_s, u_s) < \infty. \quad (3.17)$$

*Здесь  $Q(y, u)$  — положительная квадратичная форма из (3.5).*

Если регулятор (3.17) — стабилизирующий, то установление неравенства (3.17) несложно, оно является следствием последнего из условий (3.2) (при этом независимость с. в.  $v_t$  и их центрированность роли не играют). Установление свойства стабилизуемости регулятора (3.16) при выполнении (3.17) не столь очевидно. Дело в том, что неравенство (3.17) не предполагается выполненным при «любых начальных условиях» в системе управления.

Поясним это подробнее. Запишем систему управления (3.1), (3.16) в виде

$$x_{t+1} = Ax_t + Bv_{t+1}. \quad (3.18)$$

Несложно привести пример регулятора (3.16) (разностного порядка, меньшего чем  $r$ ) такого, что вектор  $B$  будет принадлежать подпространству устойчивости матрицы  $A$ , т. е.  $|A'B| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , хотя сама матрица  $A$  не является устойчивой. Тогда все решения  $x_t$  уравнения (3.18), начинающиеся в подпространстве устойчивости, будут с вероятностью 1 равномерно по  $t$  ограничены и, следовательно, для этих решений выполняется неравенство (3.17). Регулятор же (3.16) не является стабилизирующим, поскольку для стабилизирующего регулятора матрица  $A$  устойчива. Выбор регулятора, разностный порядок которого не меньше  $r$ , приводит к управляемости пары  $\{A, B\}$  (см. лемму 5.Д.3), и для неустойчивой матрицы  $A$  теперь  $|A'B| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Использование белошумности помехи  $v_t$  позволяет отсюда сделать вывод о нарушении с вероятностью 1 неравенства (3.17).

Вернемся к обсуждению свойств УС, синтезированной в п. 5.3.4°. Если постоянную  $C_Q$  выбрать из условия

$$\sup_{v_t \in \mathbb{W}} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t Q(y_s, u_s) < C_Q/2, \quad (3.19)$$

где  $\mathbb{W}$  — класс всех помех, удовлетворяющих условиям (3.2), то оказывается, что каждый режим стабилизации продолжается не более чем конечное (с вероятностью 1) время. В режиме оптимизации значения  $\tau_t$  и  $\alpha_{rt}$  сохраняться постоянными бесконечно долго также не могут. Эти свойства позволяют показать, что с некоторого момента времени режимы стабилизации «включаться» не будут, т. е. изменение  $\tau_t$  и  $\alpha_{rt}$  будет происходить из-за выполнения условий (3.14). В силу леммы 5.2.1 оценки  $\tau_t$  будут состоятельными,  $\tau_t \rightarrow \tau$ , что совместно со свойством  $\alpha_{rt} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  обеспечивает достижение ЦУ (3.5). Такова цепь рассуждений, приводящая к доказательству следующего утверждения.

**Теорема 5.3.1.** *Предположим, что выполнены условия:*

1. *Множество  $T$  открыто.*
2. *Класс  $\mathbb{W}$  помех  $v_t$ , действующих на ОУ (3.1), состоит из всевозможных реализаций стохастически независимых с. в. со свойствами (3.2).*
3. *Постоянная  $C_Q$  выбрана из условия (3.19).*

Тогда на почти каждой реализации процесса управления общее время стабилизирующих режимов конечно и синтезированная в п. 5.3.4° управляющая система является адаптивной в классе  $T \times \mathfrak{W}$  по отношению к ОУ (3.5).

**5.3.6°. Синтез стабилизирующего регулятора.** Если множество  $T$  достаточно обширно, то регулятора (3.10), стабилизирующего каждый ОУ (3.1) при  $\tau \in T$ , может не существовать. В этом случае вместо (3.10) рассмотрим регулятор

$$\alpha''(\nabla, \tau_t) u_t = \beta''(\nabla, \tau_t) y_t, \quad (3.20)$$

где полиномы  $\alpha''(\lambda, \tau)$ ,  $\beta''(\lambda, \tau)$  определяются в соответствии с конструкцией п. 5.2.2°, т. е. регулятор (3.20) при  $\tau_t = \tau$  является стабилизирующим для ОУ (3.1) и имеет разностный порядок, не меньший  $r$ . Подстройки  $\tau_t''$  в (3.20) будем формировать с помощью алгоритма (2.1.55), в данном случае имеющего вид

$$\tau_{t+1}'' = \tau_t'', \text{ если } |\eta_t| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |\Phi_t|, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \tau_{t+1}'' &= \tau_t'' + \Phi_t^* \eta_t / |\Phi_t|^2, \text{ если } |\eta_t| \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |\Phi_t|, \\ \eta_t &= y_{t+1} - \Phi_t^* \tau_t'' - \varphi_t. \end{aligned} \quad (3.22)$$

(В отличие от (2.1.55), в (3.21) принято  $\kappa = 1$ .) Алгоритм (3.21) предназначен для решения системы рекуррентных целевых неравенств

$$|y_{t+1} - \Phi_t^* \tilde{\tau} - \varphi_t| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |\Phi_t| \quad (3.23)$$

относительно вектора  $\tilde{\tau}$ .

В силу (2.16) неравенства (3.23) можно записать в виде

$$|\Phi_t^*(\tau - \tilde{\tau}) + v_{t+1}| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |\Phi_t|. \quad (3.24)$$

Предположим теперь, что дополнительно к условиям (3.2) помеха  $v_t$  равномерно по  $t$  ограничена,

$$|v_t| \leq C_v, \quad (3.25)$$

где  $C_v$  — детерминированная постоянная. Если постоянные  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  выбраны из условий  $\varepsilon_1 \geq 2C_v$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ , то из (3.24), видно, что рекуррентные целевые неравенства (3.23) разрешимы (в качестве решения может быть выбран вектор  $\tilde{\tau} = \tau$ ). Отметим, что, хотя значения  $\tau$  и  $v_{t+1}$  неизвестны, выражение под знаком модуля в левой части неравенства (3.24) известно, так как в силу (2.16) совпа-

дает с выражением под знаком модуля в левой части неравенства (3.23) — предполагается, что величины  $\{y_{t+1}, \Phi_t, \Phi_t\}$  измеряемые, т. е. входят составляющими в сенсор. Если принять  $\varepsilon_{1*} = C_v$ ,  $\varepsilon_{2*} = 0$ , то условия (2.1.53) будут выполнены при  $x = 1$  и в соответствии с теоремой 2.1.8 алгоритм (3.21), (3.22) является КСА. Поэтому не более чем за конечное время подстройки  $\tau_t^*$  «заморозятся», т. е. примут постоянное значение. Кроме того, если параметр  $\varepsilon_2$  выбран достаточно малым, то регулятор (3.20) при  $\tau_t^* = \tau_\infty$  будет обеспечивать равномерную по  $t$  ограниченность выходов и управлений, а потому в силу леммы 5.3.1 будет стабилизирующим для ОУ (3.1). Для области диссипативности системы управления (3.1), (3.20) при  $\tau_t^* = \tau_\infty$  можно получить оценку, что позволит выбрать постоянную  $C_Q$ , удовлетворяющую условию (3.19). Написание этой постоянной, а также требование, чтобы  $\tau_t^* \in T$ , приводит к некоторым ограничениям на множество  $T$ . Как и в § 5.3, типичным из такого рода предположений является предположение о выпуклости множества  $T$ , условие  $\tau_t^* \in T$  в этом случае обеспечивается использованием суперпозиции алгоритма (3.21) с операцией  $P_T$  проектирования на выпуклое множество  $T$ . Мы не будем формулировать точных условий, при которых алгоритм (3.21) «доставляет» за конечное время стабилизирующий ОУ (3.1) регулятор (3.20) при  $\tau_t^* = \tau_\infty$ . Аналогичная задача подробно исследована в гл. 6. Отметим лишь, что в силу построения регулятор (3.20) при  $\tau_t^* = \tau_\infty$  будет иметь разностный порядок, не меньший  $r$ , и, следовательно, использование регулятора (3.20), (3.21) с подстраиваемыми параметрами  $\tau_t^*$  вместо регулятора (3.10) позволяет УС, синтезированной в п. 5.3.4°, обеспечить выполнение ЦУ (3.5).

Таким образом, использование КСА адаптации позволяет осуществлять стабилизацию ОУ, что в принятой схеме синтеза адаптивных УС является необходимым этапом достижения оптимальных ЦУ.

## § 5.П. Приложение

Приложение посвящено двум замечаниям о возможности распространения способа синтеза адаптивных систем, изложенного в § 5.3, на более общие ОУ. Первое замечание касается случая коррелированных помех. Здесь

предлагается алгоритм адаптации, позволяющий получать состоятельные оценки и в случае, когда помеха  $v_t$  в уравнении (3.1) представляет собой линейную комбинацию сдвигов во времени белошумного процесса либо являются произвольным стационарным процессом с дробно-рациональной спектральной плотностью.

Второе замечание касается многосвязных ОУ. Поясняется, что во многих случаях способ синтеза адаптивных УС § 5.3 может быть перенесен на случай ОУ с любыми входами и выходами.

**5.П.1°. Синтез адаптивных управляющих систем при коррелированных помехах.** В §§ 5.2, 5.3 предполагалось, что помеха  $v_t$  — белошумная, и это было существенно. Дело в том, что используемые здесь в качестве алгоритмов адаптации рекуррентные модификации метода наименьших квадратов дают асимптотически смещенные оценки при коррелированной помехе, т. е. заведомо не обеспечивают состоятельности оценок. Опишем схему построения алгоритмов адаптации, позволяющих обеспечить состоятельные оценки для стационарных возмущений, имеющих дробно-рациональную спектральную плотность. Без ограничения общности можно полагать  $d(\lambda) \equiv 1$  в (1.3), в противном случае этого можно достигнуть применением к уравнению (1.1) операции  $d(\nabla)$ . Далее, будем предполагать, что  $d(\lambda) \equiv 1$ . В этом случае помеха  $v_t$  является центрированной и в моменты времени, разделенные промежутками, не меньшими чем  $p + 1$ , принимает независимые значения.

Опишем эвристический прием получения несмещенных оценок в этом случае. Пусть ОУ (3.1) записан в виде

$$y_{t+1} = \Phi_t^* \tau + \varphi_t + v_{t+1} \quad (\text{П.1})$$

(см. (2.16)). Пусть  $t_n = (p + 1)n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , — равноотстоящие моменты времени. Предполагая, что матрица

$$\sum_{m=1}^n h_{m-1} \Phi_{t_{m-1}}^* \Phi_{t_n}^* = \gamma_{n+1}^{-1} \quad (\text{П.2})$$

неособая при достаточно больших  $n$  ( $h_m$  — неотрицательные весовые множители, выбором которых распорядимся позднее), из (П.1) с учетом обозначения (П.2)

получим

$$\tau = \gamma_{n+1} \sum_{m=1}^n h_{m-1} \Phi_{t_{m-1}} [y_{t_m+1} - \varphi_{t_m}] - \gamma_{n+1} \sum_{m=1}^n h_{m-1} \Phi_{t_{m-1}} v_{t_m+1}. \quad (\text{П.3})$$

Правая часть в (П.3) состоит из двух слагаемых — первое из них выражается через измеряемые величины, а второе содержит неизмеряемые помехи  $v_t$ , а потому неизвестно. Естественно первое слагаемое объявить оценкой  $\tau_{n+1}$  вектора  $\tau$  в момент времени  $t_{n+1}$ :

$$\tau'_{n+1} = \gamma_{n+1} \sum_{m=1}^n h_{m-1} \Phi_{t_{m-1}} [y_{t_m+1} - \varphi_{t_m}]. \quad (\text{П.4})$$

При  $t_n \leq t < t_{n+1}$  принимаем  $\tau_t = \tau'_{n+1}$ . Этими условиями оценки  $\tau_t$  определены при всех достаточно больших  $t$ , но они не являются рекуррентными. Придадим им рекуррентную форму. Из (П.2) следует

$$\gamma^{-1}_{n+1} = \gamma^{-1}_n + h_{n-1} \Phi_{t_{n-1}} \Phi_{t_n}^*; \quad (\text{П.5})$$

отсюда, используя матричное тождество (2.Д.31), получим  $\gamma_{n+1} = (\gamma^{-1}_n + \Phi_{t_{n-1}} \Phi_{t_n}^*)^{-1} =$

$$= \gamma_n - \gamma_n \Phi_{t_{n-1}} (1 + \Phi_{t_n}^* \gamma_n \Phi_{t_{n-1}})^{-1} \Phi_{t_n}^* \gamma_n, \quad (\text{П.6})$$

что позволяет рекуррентно пересчитывать матрицы  $\gamma_n$ . Используя (П.6), из (П.4) окончательно получим

$$\begin{aligned} \tau'_{n+1} &= \tau'_n + h_{n-1} \gamma_n \Phi_{t_{n-1}} L_n [y_{t_{n+1}} - \Phi_{t_n}^* \tau_n - \varphi_{t_n}], \\ \gamma_{n+1} &= \gamma_n - h_{n-1} \gamma_n \Phi_{t_{n-1}} L_n \Phi_{t_n}^* \gamma_n, \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

где

$$L_n = (1 + \Phi_{t_n}^* \gamma_n \Phi_{t_{n-1}})^{-1}. \quad (\text{П.8})$$

Рекуррентная процедура (П.7), (П.8) вполне аналогична процедуре (2.18). Существенное различие состоит в несимметричности матрицы  $\gamma_n$  в (П.7). Алгоритм вычисления (П.7), (П.8) также требует задания начальных вектора  $\tau'_0$  и матрицы  $\gamma_0$ . Вектор  $\tau'_0$  будем считать произвольным, матрицу  $\gamma_0$  — неособой. Разумеется, не при всяких  $\tau'_0$ ,  $\gamma_0$  порожденные алгоритмом (П.7), (П.8) векторы  $\tau'_n$  и матрицы  $\gamma_n$  удовлетворяют соотношениям (П.4), (П.5). Если матрицы  $\gamma_n$  неособые при всех  $n$ , то, используя мат-

ричное тождество (2.Д.34), из второй формулы (П.7) с учетом (П.8) найдем

$$\gamma_{n+1}^{-1} = \gamma_n^{-1} + h_{n-1} \Phi_{t_{n-1}} \Phi_{t_n}^*, \quad (\text{П.9})$$

т. е.

$$\gamma_{n+1}^{-1} = \gamma_0^{-1} + \sum_{m=1}^n h_{m-1} \Phi_{t_{m-1}} \Phi_{t_m}^*. \quad (\text{П.10})$$

Учитывая (П.9), (11.1), первую из формул (П.7) можно записать в виде

$$\tau'_{n+1} (\tau'_{n+1} - \tau) = \gamma_n^{-1} (\tau'_n - \tau) + h_{n-1} \Phi_{t_{n-1}} v_{t_n+1}, \quad (\text{П.11})$$

откуда

$$\tau'_{n+1} = \tau + \gamma_{n+1} \gamma_0^{-1} (\tau'_0 - \tau) + \gamma_{n+1} \sum_{m=1}^n h_{m-1} \Phi_{t_{m-1}} v_{t_m+1}. \quad (\text{П.12})$$

Соотношение (П.12) было основным при доказательстве состоятельности оценок  $\tau'_t$  в лемме 5.2.4. В этой лемме предполагалось, что с.в.  $v'_m = v_{t_m+1}$  центрированы и стохастически независимы между собой и с векторами  $\Phi_{t_{m-1}}$ , а векторы  $\Phi_{t_{m-1}} v_{t_m+1}$  некоррелированы. В рассматриваемом случае все эти условия выполнены; поэтому, выбирая

$$h_n = (1 + |\Phi_{t_n}|^2)^{-1/2} \text{ и } \varepsilon \in (0, 1/2),$$

можем в силу леммы 5.2.4 утверждать, что с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{\varepsilon-1} \sum_{m=1}^n h_{m-1} \Phi_{t_{m-1}} v_{t_m+1} = 0. \quad (\text{П.13})$$

Если же с вероятностью 1 выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h^{1-\varepsilon} |\gamma_{n+1}| < \infty, \quad (\text{П.14})$$

то из (П.12) следует сильная состоятельность оценок  $\tau'_n$ , доставляемых алгоритмом (П.7).

Использование процедуры (П.7) в качестве алгоритма адаптации позволяет синтезировать адаптивные УС (в том числе и оптимальные) при «конечно-зависимых» помехах  $v_t$ , т. е. помехах, которые независимы в моменты времени, разделенные конечным промежутком. Это использование производится аналогично тому, как в случае белошумных помех использовалась процедура (2.18). Ана-

логия при этом не является полной из-за несимметричности матриц  $\gamma_n$  в процедуре (П.7).

**5.П.2°. Адаптивное управление многосвязными объектами.** Предложенные в §§ 5.2, 5.3 способы синтеза адаптивного управления носят достаточно общий характер в том смысле, что с незначительными изменениями переносятся на многосвязные ОУ. Остановимся на основных моментах, когда такое перенесение не представляет особых трудностей.

а) Нужно уметь синтезировать регуляторы, которые при известных значениях параметров ОУ стабилизируют его и для которых система управления является «управляемой по помехе», т. е. при записи системы управления в виде уравнения (3.18) пара матриц  $\{A, B\}$  обладает свойством управляемости (см. п.3.1.3°). В §§ 5.2, 5.3 в случае скалярных ОУ это свойство достигалось за счет повышения разностного порядка регулятора. Аналогичные приемы обеспечения «управляемости по возмущениям» могут быть использованы в рамках метода модального управления (см. § 3.1).

б) Предполагая, что вектор существенных параметров входит линейно в коэффициенты матричных полиномов  $a(\lambda, t)$ ,  $b(\lambda, t)$ ;  $a(0, t) = I$  — единичная матрица, ОУ вновь может быть записан в виде (2.16), но  $\Phi_t$  теперь является прямоугольной матрицей. В скалярном случае вектор  $\Phi_t$  представлял собой часть вектора  $x_t$  состояния системы управления, что неоднократно использовалось при доказательстве предельной невырожденности информационной матрицы (2.23). В случае многосвязного ОУ положение сложнее. В том частном случае, когда каждый столбец матрицы  $\Phi_t^*$  является частью вектора  $x_t$  и в разных столбцах нет одинаковых элементов, ситуация в указанном отношении мало отличается от скалярного случая. Такого положения часто удается достичь за счет искусственного повышения размерности вектора существенных параметров, что в ряде задач крайне нежелательно. Если же один и тот же параметр входит в различные коэффициенты полиномов  $a(\lambda, t)$  либо  $b(\lambda, t)$  и нежелательно расширение числа различных параметров, то зависимость между элементами матрицы  $\Phi_t$  и компонентами вектора  $x_t$  становится более сложной и требует особого изучения.

В остальном конструкция §§ 5.2, 5.3 синтеза УС и утверждение об адаптивности синтезированной УС естественно переносятся на случай ОУ со многими входами и выходами. В частности, используя результаты гл. 3 по синтезу оптимальных регуляторов, можно получить решение задачи адаптивного оптимального управления многосвязными ОУ, как это было сделано в § 5.3 для скалярного ОУ.

### § 5.Д. Доказательства лемм и теорем

5.Д.1°. Доказательство леммы 5.1.1. Пусть

$$x_t = \text{col} (y_t - y_{t^*} - F(\nabla) w_t, \quad y_{t-1} - y_{(t-1)^*} - \\ - F(\nabla) w_{t-1}, \dots, \quad y_{t-k+1} - y_{(t-k+1)^*} - F(\nabla) w_{t-k+1}).$$

Тогда вектор  $x_t$  удовлетворяет уравнению

$$x_{t+1} = Ax_t + B\eta_{t-k}, \quad (\text{Д.1})$$

где  $B = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$ , через  $\eta_{t-k}$  обозначена правая часть в уравнении (1.14), матрица  $A$  выписывается стандартным образом и является устойчивой в силу устойчивости полинома  $e(\lambda)$ . Из (Д.1) получаем

$$x_t = A^t x_0 + \sum_{s=1}^t A^{t-s} B \eta_{s-k}$$

и, следовательно,

$$y_t - y_{t^*} = F(\nabla) w_t + B^* A^t x_0 + \sum_{s=1}^t B^* A^{t-s} B \eta_{s-k}.$$

Так как полином  $F(\lambda)$  степени не выше  $k-1$ , а с.в.  $w_t$  стохастически независимы, то первое слагаемое в правой части полученного неравенства стохастически независимо от второго и третьего слагаемых. Учитывая центрированность с.в.  $w_t$  получим

$$\mathbb{M}(|y_t - y_{t^*}|^2 | y_1^{t-1}) = \mathbb{M} |F(\nabla) w_t|^2 + \\ + \mathbb{M} \left( |B^* A^t x_0 + \sum_{s=1}^t B^* A^{t-s} B \eta_{s-k}|^2 | y_0^{t-1} \right).$$

В силу устойчивости матрицы  $A$  имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t \mathbb{M}(|B^* A^s x_0|^2 | y_0^{t-1}) = 0,$$

поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t (\|y_s - y_{s_k}\|^2 | y_0^{t-1}) = \\ = \sum_{i=0}^{k-1} |F_i|^2 \sigma_w^2 + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{r=1}^t \left( \left\| \sum_{s=1}^r B^* A^{t-s} B \eta_{s-k} \right\|^2 | y_0^{t-1} \right).$$

Из полученного равенства следует, что наименьшее значение достигается при  $\eta_{s-k} \equiv 0$ , что и доказывает лемму.

**5.Д.2°. Доказательство теоремы 5.1.1.** Учитывая неравенство  $|P_T \tau' - \tau(\xi)| \leq |\tau' - \tau(\xi)|$ , справедливое для вектора  $\tau(\xi)$ ,  $P_T \tau(\xi) = \tau(\xi)$ , из первого соотношения (1.21) с учетом (1.19) получим

$$|\tau_{t+k} - \tau|^2 \leq |\tau_t - \tau|^2 - 2\delta \gamma_t \chi_t z_t - 2\delta \gamma_t F(\nabla) w_{t+k} + \\ + \sigma^2 \gamma_t^2 |\Phi_t|^2 [z_t^2 + 2z_t F(\nabla) w_{t+k} + (F(\nabla) w_{t+k})^2], \quad (\text{Д.2})$$

где для краткости введены обозначения

$$z_t = y_{t+k} - y_{(t+k)*} - F(\nabla) w_{t+k}, \quad (\text{Д.3})$$

$$\chi_t = \Phi_t(\tau - \tau_t) = e(\nabla) z_t.$$

Из соотношения (1.17) следует, что величина  $(y_{t+k} - y_{(t+k)*} - F(\nabla) w_{t+k})$  зависит лишь от векторов  $y_t, y_{t-1}, \dots, u_t, u_{t-1}, \dots$ , а потому стохастически независима со с.в.  $F(\nabla) w_{t+k}$  (напомним, полином  $F(\lambda)$  степени не выше  $k-1$ , а с.в.  $\{w_t\}$  независимы). Поэтому, вычисляя среднее от обеих частей неравенства (Д.2) с учетом свойств (1.4) с.в.  $w_t$ , получим

$$\mathbb{M} |\tau_{t+k} - \tau|^2 \leq \mathbb{M} |\tau_t - \tau|^2 - 2\delta \mathbb{M} \gamma_t z_t (\chi_t - z_t \delta/2) + \\ + \delta^2 \sigma_w^2 \mathbb{M} \gamma_t^2 |\Phi_t|^2 \sum_{i=0}^{k-1} F_i^2.$$

Здесь учтено, что в силу второго соотношения (1.22) выполняется неравенство  $\gamma_t |\Phi_t|^2 \leq 1$ . Используя условие 4 теоремы 5.1.1, как и при доказательстве теоремы 2.3.3, получим, что справедливо неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^t z_s \left( \chi_s - \frac{\delta + \delta_1}{2} z_s \right) > -\infty$$

для некоторого  $\delta_1 > 0$ . Это означает, что существует по-

стоянная  $C_\rho$  такая, что при всех  $t$  неотрицательна величина

$$\rho_t = 2\delta \sum_{s=0}^{t-1} z_s \left( \chi_s - \frac{\delta + \delta_1}{2} z_s \right) + C_\rho. \quad \text{Учитывая равенство}$$

$\gamma_{t+1}\rho_{t+1} = \gamma_{t+1}\rho_t - 2\delta\gamma_t z_t \left( \chi_t - \frac{\delta + \delta_1}{2} z_t \right)$  и неравенства  $\rho_t \geq 0$ ,  $\gamma_t \leq \gamma_{t-1}$ ,  $\gamma_{t+1}\rho_t \leq \gamma_t\rho_t$ , получим

$$\begin{aligned} M(|\tau_{t+k} - \tau|^2 + \gamma_{t+1}\rho_{t+1}) &\leq M|\tau_t - \tau|^2 - 2\delta_1 M\gamma_t z_t^2 + \\ &+ \delta^2 \sigma_w^2 \sum_{i=0}^{k-1} F_i^2 M\gamma_i^2 |\Phi_i|^2 + M\gamma_t \rho_t. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \sum_{s=N}^{N+k} M|\tau_s - \tau|^2 + M\gamma_{N+1}\rho_{N+1} &\leq \sum_{s=0}^{k-1} M|\tau_s - \tau|^2 - \\ &- 2\delta_1 \sum_{s=0}^N M\gamma_s z_s^2 + \delta^2 \sigma_w^2 \sum_{i=0}^{k-1} F_i^2 \sum_{s=0}^N M\gamma_s^2 |\Phi_s|^2 + M\gamma_0 \rho_0. \end{aligned}$$

Поскольку сходится ряд  $\sum_{s=0}^{\infty} M\gamma_s^2 |\Phi_s|^2$  (см. доказательство теоремы 2.2.3), то из полученного неравенства следует сходимость ряда  $\sum_{s=0}^{\infty} M\gamma_s z_s^2$  и, следовательно, как и при доказательстве теоремы 2.2.3, выводим, что с вероятностью 1 справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t\gamma_t \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t z_s^2 = 0. \quad (\text{Д.4})$$

Покажем, что из (Д.4) следует утверждение теоремы. Прежде всего заметим, что в силу условий (1.4) с вероятностью 1 справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t w_s^2 = \sigma_w^2, \quad (\text{Д.5})$$

которое является следствием закона больших чисел, примененным к с.в.  $w_s^2$ , имеющим одинаковое математическое ожидание. Поэтому из уравнения (1.1) в силу устойчивости

полинома (1.7) следует при любых  $t$  неравенство

$$\frac{1}{t} \sum_{s=0}^t u_s^2 \leq C_1 \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t y_s^2 + C_2 \quad (\text{Д.6})$$

с некоторыми положительными постоянными  $C_1, C_2$  (зависящими, вообще говоря, от  $\xi$ ). Неравенство (Д.6) устанавливается с помощью элементарных выкладок и на нем останавливаться не будем. Учитывая условие (1.9), из определения  $\Phi_t$  получим

$$\frac{1}{t} \sum_{s=0}^t |\Phi_s|^2 \leq C_3 + C_4 \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t y_s^2$$

с некоторыми постоянными  $C_3, C_4$ . С учетом второго соотношения (1.22) тогда получаем

$$\frac{\gamma_{t+1}^{-1}}{t} \leq C_5 + C_6 \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t y_s^2;$$

$C_5, C_6$  — некоторые постоянные. Из (Д.3) с учетом (Д.5) и (1.9) тогда находим

$$\frac{\gamma_{t+1}^{-1}}{t} \leq C_7 + C_8 \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t z_s^2 \quad (\text{Д.7})$$

с некоторыми постоянными  $C_7, C_8$ .

Если на событии положительной вероятности  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t y_s^2 = \infty$ , то на том же событии  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (\gamma_t^{-1}/t) = \infty$ .

В этом случае неравенство (Д.7) приводит к противоречию с условием (Д.4), рассуждения полностью аналогичны тем, что приведены при доказательстве теоремы 2.2.3. Таким образом, с вероятностью 1 выполняются неравенства

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t y_s^2 < \infty \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t \gamma_t > C_9,$$

где  $C_9$  — некоторая положительная постоянная. Из

условия (Д.4) теперь следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t z_s^2 = 0. \quad (\text{Д.8})$$

В силу первой формулы (Д.3) имеем

$$z_t^2 = M(z_t^2 | y_0^t, u_0^t) = (y_{t+k} - y_{(t+k)_*})^2 - \sigma_w^2 \sum_{s=0}^{k-1} F_i^2.$$

Здесь учтено, что  $z_t$  является функцией величин  $\{y_0^t, u_0^t\}$ , а также независимость с.в.  $z_t$  и  $F(\nabla) w_{t+k}$ . Предельное равенство (Д.8) принимает вид

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T M[(y_{t+k} - y_{(t+k)_*})^2 | y_0^t, u_0^t] = \sigma_w^2 \sum_{s=0}^{k-1} F_i^2.$$

Формула (1.16) приводит теперь к утверждению теоремы 5.1.1.

**5.Д.3°. Доказательство леммы 5.2.1.** Равенство (2.22) устанавливается аналогично тому, как было установлено равенство (2.Д.33), если учесть, что с.в.  $h_t$  и  $z_t$  независимы при каждом  $t$ . Действительно, вводя величину

$$\kappa_s = h_s \Phi_s v_{s+1}$$

и учитывая независимость  $h_s \Phi_s^*$  от  $v_{s+1}$  и центрированность  $v_t$ , убеждаемся, что величины  $\kappa_s$  некоррелированы. Поэтому

$$\begin{aligned} M(t^{e-1} \sum_{s=0}^t \kappa_s)^2 + \sum_{s=0}^t (M\kappa_s)^2 / t^{2(e-1)} &= \\ &= \sum_{s=0}^t M h_s^2 |\Phi_s|^2 \sigma_v^2 \leq \sigma_v^2 / t^{2(e-1)}, \end{aligned}$$

где учтено, что  $h_t |\Phi_t| \leq 1$ . Поскольку  $2e < 1$ , то доказано существование среднеквадратичного предела (2.22). Далее, повторяя рассуждения, приводящие к доказательству теоремы 2.П.2, устанавливаем сходимость (2.22) с вероятностью 1.

Из первого соотношения (2.20) получаем формулу

$$\gamma_{t+1}^{-1} = \gamma_0^{-1} + \sum_{s=0}^t h_s \Phi_s v_{s+1} = \gamma_0^{-1} + t^{1-e} J_{t,e}.$$

В силу предельной невырожденности матрицы  $J_{t,\epsilon}$  отсюда следует неравенство

$$\gamma_{t+1}^{-1}/t^{1-\epsilon} = (t^{1-\epsilon}\gamma_{t+1})^{-1} = \gamma_0^{-1}/t^{1-\epsilon} + J_{t,\epsilon},$$

т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (t^{1-\epsilon}\gamma_{t+1})^{-1} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} J_{t,\epsilon} > 0$$

(неравенство понимается в смысле квадратичных форм), что эквивалентно (2.24). При этом безразлично, понимать ли под нормой матрицы  $\gamma_{t+1}$  в неравенстве (2.24) евклидову норму (квадрат которой равен сумме квадратов элементов матрицы) или операторную норму (совпадающую с наибольшим собственным значением матрицы  $\gamma_{t+1}$ ). Из (2.24) и (2.22) следует (2.21), что в силу второй из формул (2.20) означает сходимость с вероятностью 1 оценок  $\tau'_{t+1}$  к  $\tau(\xi)$ . Лемма 5.2.1 доказана.

**5.Д.4°. Доказательство леммы 5.2.2.** Из первой формулы (2.20) получаем

$$\gamma_{t+s}^{-1} = \gamma_t^{-1} + \sum_{p=\tilde{t}+1}^{\tilde{t}+s} h_p \Phi_p \Phi_p^* = \gamma_t^{-1} + dI_q,$$

где  $I_q$  — единичная матрица размерности  $q \times q$ . Отсюда  $(\tilde{t}+s)^{e-1}\gamma_{t+s}^{-1} = (\tilde{t}+s)^{e-1}\gamma_t^{-1} + (\tilde{t}+s)^{e-1}dI_q \geq dI_q (\tilde{t}+s)^{e-1} = dI_q [\tilde{t}+dq]^{e-1}$ . (Д.9)

Выберем  $d$  из условия

$$d[\tilde{t}+dq]^{e-1} > 2/(C_\gamma q),$$

или

$$dq > 2(\tilde{t}+dq)^{1-e}/C_\gamma, \text{ или } T > 2T^{1-e}/C_\gamma + \tilde{t}, \quad (\text{Д.10})$$

где  $T = \tilde{t}+dq$ . Следовательно, если  $T > T(\tilde{t})$ ,  $T(\tilde{t})$  — решение уравнения (2.27), то для  $T$  выполнено неравенство (Д.10), что в силу принятых обозначений эквивалентно (2.26). Неравенство (Д.9) при этом обращается в (2.28), что и доказывает лемму.

**5.Д.5°. Доказательство теоремы 5.2.1.** В условиях теоремы 5.2.1 оценки  $\tau'_t$  сильно состоятельны. Действительно, процедура «встраивания» обеспечивает, в силу леммы 5.2.2, выполнение неравенства (2.24) при всех  $t$ , так что выполнены все условия леммы 5.2.1 и, следовательно,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau'_t = \tau(\xi)$ . Отсюда следует, что векторы подстроек

$\tau_t$  сходятся за конечное время,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_t = \tau_\infty$ , причем  $|\tau_\infty - \tau(\xi)| < \rho$  и поэтому регулятор (2.14) при  $\tau_t = \tau_\infty$  при достаточно малом  $\rho$  будет стабилизирующим для ОУ (1.1). Рассмотрим систему управления (1.1), (2.14) при достаточно больших  $t$ , когда  $\tau_t = \tau_\infty$ . Вводя  $r$ -вектор

$$x_t = \text{col}(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-r+1}, u_t, \dots, u_{t-r+1}), \quad (\text{Д.11})$$

запишем его в виде

$$x_{t+1} = A(\tau_\infty) x_t + Bv_{t+1}, \quad (\text{Д.12})$$

где  $B = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$  и матрица  $A(\tau_\infty)$  выписывается стандартным образом. Стабилизируемость регулятора (2.14) при  $\tau_t = \tau_\infty$  означает, что матрица  $A(\tau_\infty)$  устойчива, т. е. не имеет собственных значений вне открытого единичного круга.

**Лемма 5.Д.1.** *Если матрица  $A$  в уравнении (Д.12) устойчива и  $v_t$  имеет вид (2.1), то для решений  $x_t$  уравнения (Д.12) с вероятностью 1 справедливо предельное равенство*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L x_{t_l} x_{t_l}^* = \sigma_v^2 \sum_{s=0}^{\infty} A^s B B^* A^{*s}. \quad (\text{Д.13})$$

**Доказательство.** Лемма 5.Д.1 следует почти непосредственно из соотношения

$$x_{t_l} = A^{t_l} x_0 + \sum_{s=0}^{t_l-1} A^s B v_{t_l-s},$$

эквивалентного (Д.12). Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L x_{t_l}^* x_{t_l} &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |A^{t_l} x_0|^2 + \\ &+ 2 \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left( A^{t_l} x_0, \sum_{s=0}^{t_l-1} A^s B v_{t_l-s} \right) + \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left| \sum_{s=0}^{t_l-1} A^s B v_{t_l-s} \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{Д.14})$$

Первое слагаемое в правой части (Д.14) стремится к нулю при  $L \rightarrow \infty$  в силу устойчивости матрицы  $A^t$ . Второе стремится к нулю с вероятностью 1, поскольку в силу закона больших чисел для с. в.  $A^s B v_{t_l-s}$  (теорема 2.П.2) с

вероятностью 1 справедливо равенство

$$\lim_{L \rightarrow \infty} t_l^{-1} \sum_{s=0}^{t_l-1} A^s B v_{t_l-s} = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L t_l A^{t_l} x_0 \left( \frac{1}{t_l} \sum_{s=0}^{t_l-1} A^s B v_{t_l-s} \right) = 0$$

с той же вероятностью, так как для устойчивой матрицы  $A$  справедливо неравенство

$$|A^t| \leq C_A v^t \quad (\text{Д.15})$$

с некоторыми положительными  $C_A$  и  $v$ ,  $v < 1$ . Используя вновь закон больших чисел для вычисления последнего слагаемого в правой части (Д.14), приходим к (Д.13).

**Лемма 5.Д.2.** *Если в условиях леммы 5.Д.1 пара  $\{A, B\}$  — управляемая, то информационная матрица*

$$J_T = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T h_t \Phi_t \Phi_t^* \quad (\text{Д.16})$$

*с вероятностью 1 предельно невырождена в смысле определения 2.3.1. Здесь вектор  $\Phi_t$  определяется по (2.15).*

**Доказательство.** Из (Д.13) и (Д.15) с вероятностью 1 следует

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{l=0}^L |x_{t_l}|^2 = \sigma_v^2 \sum_{s=0}^{\infty} \operatorname{Sp} A^s B B A^{*s} \leq \sigma_v^2 C_A^2 \frac{1}{1-v^2} \equiv C_x. \quad (\text{Д.17})$$

Используя очевидное неравенство

$$1 = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^L h_{t_l} h_{t_l}^{-1} \leq \left( \frac{1}{L} \sum_{l=0}^L h_{t_l}^2 \right)^{1/2} \left( \frac{1}{L} \sum_{l=0}^L h_{t_l}^{-2} \right)^{1/2},$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \sum_{l=0}^L h_{t_l}^2 &\geq \left( \frac{1}{L} \sum_{l=0}^L h_{t_l}^{-2} \right)^{-1} = \left[ \frac{1}{L} \sum_{l=0}^L (1 + |\Phi_{t_l}|^2) \right]^{-1} = \\ &= \left( 1 + \frac{1}{L} \sum_{l=0}^L |\Phi_{t_l}|^2 \right)^{-1} \geq \left( 1 + \frac{1}{L} \sum_{l=0}^L |x_{t_l}|^2 \right)^{-1}, \end{aligned}$$

и поскольку  $h_s \geq h_s^2$ , то с учетом (Д.17) выполняется

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{l=0}^L h_l \geq (1 + C_x)^{-1} \quad (\text{Д.18})$$

с вероятностью 1. Так как  $\{t_l\}$  в (Д.18) — произвольная монотонная последовательность натуральных чисел, то это означает, что  $h_l \geq (1 + C_x)^{-1}$ , за исключением, быть может, конечного числа индексов. Пренебрегая этим конечным множеством, для матрицы (Д.16) тогда получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_T \geq (1 + C_x)^{-1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{l=0}^T \Phi_l \Phi_l^*. \quad (\text{Д.19})$$

В силу управляемости пары  $\{A, B\}$  матрица в правой части (Д.13) положительна, т. е. для произвольного вектора  $d$  размерности  $2r$  справедливо неравенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{s=0}^T (x_s, d)^2 \geq \lambda_{AB} |d|^2, \quad (\text{Д.20})$$

где  $\lambda_{AB}$  — наименьшее собственное значение указанной матрицы. Поскольку вектор  $\Phi_s$  является частью вектора  $x_s$ , то из неравенства (Д.20) следует неравенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{s=0}^T (\Phi_s^* \tilde{d})^2 \geq \lambda_{AB} |\tilde{d}|^2, \quad (\text{Д.21})$$

где  $\tilde{d}$  — произвольный вектор размерности  $l + m$  (см. (2.15)); с учетом этого неравенства из (Д.19) получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_T \geq (1 + C_x)^{-1} \lambda_{AB} I; \quad (\text{Д.22})$$

$I$  — единичная матрица соответствующей размерности. Неравенство (Д.22) означает, что матрица  $J_T$  предельно невырождена.

**Лемма 5.Д.3.** В условиях теоремы 5.2.1 пара  $\{A(\tau_\alpha), B\}$  — управляемая, если  $\beta(\lambda, \tau_\alpha) \neq 0$ . Здесь  $\beta(\lambda, \tau_\alpha)$  — полином из регулятора (2.14) при  $\tau_l = \tau_\alpha$ .

Приведем простое доказательство этого утверждения, основанное в некотором смысле на косвенных фактах. По-

скольку  $\tau_\infty \in T_{\mu/2, v, 2}$ , то полиномы  $\alpha(\lambda, \tau_\infty)$ ,  $\beta(\lambda, \tau_\infty)$  взаимно несократимы и в соответствии с (2.9) их степень равна  $r$ . Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда существует ненулевой вектор  $e$ ,

$e = \text{col}(c, d)$ ,  $c = \text{col}(c_0, \dots, c_{r-1})$ ,  $d = \text{col}(d_0, \dots, d_{r-1})$ , удовлетворяющий условиям

$$e^* A^s (\tau_\infty) B = 0, s = 0, 1, \dots, 2r-1. \quad (\text{Д.23})$$

Тогда выполняется равенство

$$g(\nabla) e^* x_t = 0, \quad (\text{Д.24})$$

где  $g(\lambda)$  — характеристический полином системы (1.1), (2.14) при  $\tau_t = \tau_\infty$ . Действительно, пусть  $\tilde{g}(\lambda)$  — характеристический полином матрицы  $A$ ,  $\tilde{g}(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \tilde{g}_0 \lambda^{2r} + \tilde{g}_1 \lambda^{2r-1} + \dots + \tilde{g}_{2r}$ . Умножая равенства

$$\begin{aligned} x_t &= x_t, \quad x_{t+1} = Ax_t + Bv_{t+1}, \quad \dots, \quad x_{t+2r} = \\ &\quad \dots = A^{2r}x_t + A^{2r-1}Bv_{t+1} + \dots + Bv_{t+2r} \end{aligned}$$

соответственно на коэффициенты  $\tilde{g}_{2r}, \tilde{g}_{2r-1}, \dots, \tilde{g}_0$  полинома  $\tilde{g}(\lambda)$  и почленно суммируя, найдем

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\nabla^{-1}) x_t &= \tilde{g}(A) x_t + \tilde{g}_{2r-1} Bv_{t+1} + \dots \\ &\quad \dots + \tilde{g}_0 (A^{2r-1} Bv_{t+1} + \dots + Bv_{t+2r}). \end{aligned}$$

В силу тождества Гамильтона — Кэли  $\tilde{g}(A) \equiv 0$ . Поэтому, умножая полученное соотношение скалярно на  $e$  и учитывая (Д.23), найдем  $\tilde{g}(\nabla^{-1}) e^* x_t = 0$ . Как хорошо известно, полином  $g(\lambda) = \lambda^r \tilde{g}(\lambda^{-1})$  совпадает с характеристическим полиномом системы (1.1), (2.14) при  $\tau_t = \tau_\infty$ , что и приводит к (Д.24). С другой стороны, из уравнений (1.1), (2.14) при  $\tau_t = \tau_\infty$  получаем

$$g(\nabla) y_t = \alpha(\nabla, \tau_\infty) v_t, \quad g(\nabla) u_t = \beta(\nabla, \tau_\infty) v_t. \quad (\text{Д.25})$$

Действуя на первое из уравнений (Д.25) оператором  $c_i \nabla^i$ , а на второе — оператором  $d_i \nabla^i$  и затем складывая почленно полученные равенства, найдем, что

$$g(\nabla) e^* x_t = [\alpha(\nabla, \tau_\infty) c(\nabla) + \beta(\nabla, \tau_\infty) d(\nabla)] v_t, \quad (\text{Д.26})$$

где  $c(\lambda) = \sum_{s=0}^{r-1} \lambda^s c_s$ ,  $d(\lambda) = \sum_{s=0}^{r-1} \lambda^s d_s$ . В силу (Д.24) из

(Д.26) выводим равенство

$$[\alpha(\nabla, \tau_\alpha) c(\nabla) + \beta(\nabla, \tau_\infty) d(\nabla)] v_t = 0,$$

которое в силу независимости с.в.  $v_t$  означает, что

$$\alpha(\lambda, \tau_\alpha) c(\lambda) = -\beta(\lambda, \tau_\infty) d(\lambda). \quad (\text{Д.27})$$

Если  $\beta(\lambda, \tau_\infty) \neq 0$ , то из (Д.27) следует, что отношение  $\alpha(\lambda, \tau_\alpha)/\beta(\lambda, \tau_\infty)$  несократимых полиномов, по крайней мере один из которых имеет степень  $r$ , равно отношению полиномов  $d(\lambda)/c(\lambda)$ , степени которых не превосходят  $r - 1$ , что привело к противоречию. Лемма 5.Д.3 доказана.

Теорема 5.2.1 является непосредственным следствием лемм 5.Д.1 — 5.Д.3. Действительно, начиная с некоторого момента времени (зависящего от реализации управляемого процесса), величины  $y_t, u_t$  начинают удовлетворять уравнению (Д.12) с устойчивой матрицей  $A(\tau_\circ)$ , причем пара  $\{A(\tau_\circ), B\}$  в силу леммы 5.Д.3 — управляемая. Тогда в силу лемм 5.Д.1, 5.Д.2 информационная матрица (Д.17) предельно невырождена и, следовательно, выполняется неравенство (2.24) при  $\epsilon = 0$  и тем более при  $\epsilon > 0$ . Из леммы 5.2.1 теперь следует утверждение теоремы 5.2.1.

**5.Д.6°. Доказательство леммы 5.3.1.** Пусть с вероятностью 1 выполняется неравенство (3.17). В силу положительности формы  $Q(y, u)$  отсюда следует, что с той же вероятностью

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{s=0}^t |x_s|^2 < \infty. \quad (\text{Д.28})$$

Из (3.18) для любого натурального  $l$  имеем  $x_{t+l} = A^l x_t + \sum_{s=0}^{l-1} A^s B v_{t-s+l}$ , откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \frac{|x_{t+l}|^2}{r_t} &= \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \frac{|A^l x_t|^2}{r_t} + \\ &+ 2 \left( A^l \sum_{s=0}^{l-1} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \frac{x_t v_{t-s+l}}{r_t}, A^s B \right) + \\ &+ \sum_{s=0}^{l-s} \sum_{s'=0}^{l-1} (A^s B, A^{s'} B) \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \frac{v_{t-s+l} v_{t-s'+l}}{r_t}, \end{aligned} \quad (\text{Д.29})$$

где

$$r_t = 1 + \frac{1}{t} \sum_{s=0}^t |x_s|^2.$$

В силу теоремы 2.П.2 с вероятностью 1 при  $s \neq s'$  имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \frac{x_t v_{t-s+l}}{r_t} = 0, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \frac{v_{t-s+l} v_{t-s'+l}}{r_t} = 0. \quad (\text{Д.30})$$

Поясним вывод первого из равенств (Д.30). Обозначим

$$V_T = \left| \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \frac{x_t v_{t-s+l}}{r_t} \right|^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} V_{T+1} &= \left( \frac{T}{T+1} \right)^2 V_T + 2 \frac{1}{(T+1)^2} \sum_{t=0}^T \frac{(x_t, x_{T+1}) v_{t-s+l} v_{T+1-s+l}}{r_t r_{T+1}} + \\ &\quad + \frac{1}{(T+1)^2} \frac{|x_{T+1}|^2 v_{T+1-s+l}}{r_{T+1}^2}. \end{aligned}$$

Учитывая независимость величины  $v_{T+1-s+l}$  от остальных, имеем

$$\mathbb{M}(V_{T+1} | x_0^{T+1}, v_0^{T-s+l}) = \left( \frac{T}{T+1} \right)^2 V_T + \sigma_v^2 \frac{|x_{T+1}|^2}{(T+1)^2 r_{T+1}^2}.$$

Покажем, что  $\sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{M} |x_{t+1}|^2 (t+1)^{-2} r_{t+1}^{-2} < \infty$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{|x_{t+1}|^2}{(t+1)^2 r_{t+1}^2} &\leq |x_{t+1}|^2 \left[ \left( t+1 + \sum_{s=0}^{t+1} |x_s|^2 \right) \left( t + \sum_{s=0}^t |x_s|^2 \right) \right]^{-1} \leq \\ &\leq t+1 + \sum_{s=0}^{t+1} |x_s|^2 - \left( t + \sum_{s=0}^t |x_s|^2 \right) \left[ \left( t+1 + \sum_{s=0}^{t+1} |x_s|^2 \right) \times \right. \\ &\times \left. \left( t + \sum_{s=0}^t |x_s|^2 \right) \right]^{-1} = \left( t + \sum_{s=0}^t |x_s|^2 \right)^{-1} - \left( t+1 + \sum_{s=0}^{t+1} |x_s|^2 \right)^{-1}, \end{aligned}$$

откуда  $\sum_{t=0}^{\infty} |x_{t+1}|^2 (t+1)^{-2} r_{t+1}^{-2} \leq |x_0|^{-2}$  и потому

$$M \sum_{t=0}^{\infty} |x_{t+1}|^2 (t+1)^{-2} r_{t+1}^{-2} \leq |x_0|^{-2} \quad (|x_0| \neq 0).$$

С учетом этого факта в силу теоремы 2.П.1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_t = V_* \quad \text{и} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{t}{t+1} \right)^2 - 1 \right] V_t < \infty$$

с вероятностью 1. Так как  $\sum_{t=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{t}{t+1} \right)^2 - 1 \right] = \infty$ , то подпоследовательность  $V_{t_k} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $V_* = 0$ , что и утверждалось. Второе равенство в (Д.30) показывается аналогично.

С учетом (Д.30) из (Д.29) находим

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \frac{|x_{t+1}|^2}{r_t} \geq \sum_{s=0}^{l-1} |A^s B|^2 \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \frac{v_{t-s+l}^2}{r_t}. \quad (\text{Д.31})$$

В силу (Д.28) справедливы неравенства  $C_r \leq r_l^{-1} \leq 1$ , где  $C_r$  — положительная с. в. Тогда из (Д.31) находим

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T |x_{t+1}|^2 \geq C_r \sum_{s=0}^{l-1} |A^s B|^2 \sigma_v^2. \quad (\text{Д.32})$$

Для управляемой пары  $\{A, B\}$  при неустойчивой матрице  $A$  выполнено  $\overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^l |A^s B| = \infty$ . Так как неравенство (Д.32) справедливо при всех  $l$ , то в силу (Д.28) приходим к выводу, что  $A$  — устойчивая матрица и, следовательно, регулятор (3.16) — стабилизирующий.

Пусть, обратно, регулятор (3.16) стабилизирующий для ОУ (3.1). Тогда в уравнении (3.18) матрица  $A$  устойчива (не имеет корней вне открытого единичного круга). Покажем, что последнее из условий (3.2) обеспечивает выполнение неравенства (Д.28) с вероятностью 1, а с ним и неравенства (3.17) с той же вероятностью. Известно, что для устойчивой матрицы  $A$  существуют положительные

постоянные  $C_A$  и  $\lambda$ ,  $\lambda < 1$ , такие, что при всех  $t \geq 0$  справедливы неравенства

$$|A^t| \leq C_A \lambda^t. \quad (\text{Д.33})$$

С учетом (3.18), (Д.33) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T |x_t|^2 &\leq 2 \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T |A^t x_0|^2 + \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \left( \sum_{s=0}^{t-1} A^s B v_{t-s} \right)^2 \right] \leq \\ &\leq 2 \left[ C_A^2 |x_0|^2 \frac{1 - \lambda^{2T}}{T(1 - \lambda^2)} + \frac{|B|^2 C_A^2}{T} \sum_{t=0}^T \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{s'=0}^{t-1} \lambda^{s+s'} |v_{t-s} v_{t-s'}^*| \right] \leq \\ &\leq 2 \left[ \frac{C_A^2 |x_0|^2 (1 - \lambda^{2T})}{T(1 - \lambda^2)} + 2C_A^2 |B|^2 \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s v_{t-s}^2 \right] \leq \\ &\leq 2 \left[ \frac{C_A^2 |x_0|^2 (1 - \lambda^{2T})}{T(1 - \lambda^2)} + 2C_A^2 |B|^2 \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T v_{t-s}^2 \right], \end{aligned}$$

откуда следует неравенство (Д.28). Лемма доказана.

**5.Д.7°. Доказательство теоремы 5.3.1.** В силу леммы 5.3.1 и условий переключения регуляторов (3.10) и (3.12) время их работы при постоянных коэффициентах с вероятностью 1 конечно. Это свойство обеспечивает выполнение условия (2.24), а потому в силу леммы 5.2.1 оценки  $\tau'_t$  являются сильно состоятельными,  $\tau'_t \rightarrow \tau$  и  $\alpha_{rt} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Несложно убедиться, что, когда оценки  $\tau'_t$  окажутся в достаточно малой окрестности вектора  $\tau$ , а  $\alpha_{rt}$  — достаточно малыми величинами, регулятор (3.12) будет обеспечивать неравенство (3.13) (здесь используется субоптимальность регулятора: он обеспечивает меньшее значение функционалу качества (3.5), чем неоптимальный регулятор (3.10)). Во всяком случае, с этого момента времени режим стабилизации «включаться» не будет. При этом условия (3.14) уже в непрекращающемся режиме оптимизации будут выполняться бесконечно много раз, что и обеспечит  $\alpha_{rt} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $\tau_t \rightarrow \tau$ . Управление только с регулятором (3.12), когда  $\tau_t = \tau$ ,  $\alpha_{rt} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  обеспечивает достижение ЦУ (3.5), поскольку коэффициенты оптимального регулятора и функционал (3.5) непрерывно зависят от параметра  $\tau$ . Теорема 5.3.1 доказана.

## ГЛАВА 6

### АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫМИ ОБЪЕКТАМИ (ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА И РЕКУРРЕНТНЫЕ ЦЕЛЕВЫЕ НЕРАВЕНСТВА)

В случае непрерывных ОУ, описываемых дифференциальными уравнениями, синтез адаптивных регуляторов, в общем, осуществляется по той же схеме, что и в случае дискретных ОУ. Более того, если ОУ — линейный, то при использовании кусочно-постоянных управляющих воздействий задача управления непрерывным объектом может быть сведена к соответствующей задаче для дискретного объекта. Такое сведение возможно различными способами, один из них обсуждается в § 3.1.

Если говорить о собственно непрерывных объектах, то по сравнению с дискретными у них имеется ряд существенных особенностей. С одной стороны, в непрерывном времени сложнее решать задачу оптимального управления; о возникающих здесь трудностях в случае стационарных возмущений говорилось в п. 3.П.2°. Если помехи равномерно ограничены во времени, то решения задачи оптимального управления, подобной той, что подробно изучалась в гл. 4, может не существовать: для функционала качества, не содержащего управления, выход ОУ может быть сделан сколь угодно малым за счет достаточно сильной обратной связи; коэффициенты регулятора при этом принимают сколь угодно большие значения. Введение управления в функционал качества делает задачу управления, как и в дискретном случае, сложной; окончательное ее решение пока неизвестно.

С другой стороны, непрерывные системы доставляют большее разнообразие типов обратных связей. Так, подстройка параметров регулятора может происходить во все моменты времени, приводя к непрерывным алгоритмам

адаптации. Это обычно дает существенный эффект, если помехи измерения и действующие на ОУ возмущения не очень интенсивны. Использование управляющих систем с разрывными нелинейностями либо переменной структурой приводит к качественно новым явлениям — появлению скользящих режимов, с помощью которых в ряде случаев удается значительно улучшить динамические характеристики системы управления.

Синтез управлений в непрерывном времени накладывает дополнительные по сравнению с дискретным временем ограничения. Основным из них является требование использовать в цепях обратной связи возможно меньшее число компонент вектора состояния либо меньшее число производных от выходного процесса. Это требование не является формализованным в силу своей противоречивости: использование большего числа производных в цепях обратной связи позволяет улучшать качество управления в разном смысле, но делает управляющую систему более чувствительной к помехам измерения этих производных. Поэтому компромисс между «оптимальностью» и «грубоостью» достигается для конкретных систем неформальными приемами, часто с использованием эвристических соображений. По указанным причинам в данной главе основное внимание уделяется задачам стабилизации, а не оптимизации (в смысле различных функционалов качества).

Как уже указывалось в § 1.3, в основе принятого подхода к задаче синтеза аддативной управляющей системы лежит предположение о существовании закона управления, зависящего от конечного набора существенных параметров и обеспечивающего выполнение ЦУ при известных их значениях.

Введение существенных параметров в законы управления и их использование при синтезе управлений могут осуществляться различными способами. Наиболее распространенными являются следующие три, которые можно назвать соответственно *методом эталонного уравнения*, *методом функций Ляпунова* и *методом подстраиваемой модели*. В методе эталонного уравнения накладываются условия на управления, которые должны обеспечить предписанное поведение управляемого процесса (УП). Предписание поведения обычно имеет форму некоторого уравнения, которому должен удовлетворять УП. Это эта-

лонное уравнение не зависит от неизвестных параметров, и поэтому его выполнение или невыполнение в моменты наблюдений (измерений) может послужить источником сведений о величине тех или иных неизвестных параметров. Полученные из этого условия оценки используются в законе управления вместо точных, но неизвестных параметров. Сам закон управления строится из условия, чтобы при точных значениях параметров эталонное уравнение выполнялось (точно или приближенно, в зависимости от условий задачи). Параметры, вошедшие в закон управления, играют роль существенных. Обычно число их стараются сделать возможно меньшим, упрощая вид регулятора, даже ценой некоторых отклонений от требования точного выполнения эталонного уравнения.

Более гибкие возможности для целей управления предоставляет метод функций Ляпунова, который в ряде случаев можно рассматривать как обобщение метода эталонного уравнения. В этом методе уравнение регулятора определяется из условия, чтобы некоторая положительная функция фазовых переменных и параметров ОУ убывала на траекториях системы управления (т. е. являлась функцией Ляпунова). В такой форме ограничения на управление не являются столь определенными, как в методе эталонного уравнения, но связь между методами остается тесной, а при конкретизации способа убывания функции на траекториях системы управления приходим к методу эталонного уравнения. В качестве существенных параметров в методе функций Ляпунова выступают те, для которых удается построить функцию Ляпунова. Третий метод — метод подстраиваемой модели — представляет основу различных идентификационных методов. Он состоит в выборе модели управляемого процесса и подстройки параметров этой модели по наблюдаемым отклонениям (рассогласованиям) поведения реального УП и поведения, предписываемого ему моделью. В роли существенных параметров здесь выступают параметры модели; их подстройка может рассматриваться как идентификация ОУ (при этом возможна функциональная, или фиктивная, идентификация, когда цель подстройки — обеспечить с заданной точностью совпадение выходов ОУ и модели при одинаковых входах, либо же собственно идентификация — оценивание параметров, от которых зависит управляемый процесс). Особо-

бенность метода подстраиваемой модели — в отрыве процесса идентификации от процесса управления. Оценивание параметров управляемого процесса может происходить независимо от поставленной ЦУ или даже в ее отсутствие. Все три описанных способа синтеза регуляторов используются в данной главе. В § 6.1 обсуждаются возможности метода функций Ляпунова в задачах адаптивного управления. Вскрывается единство и особенности различных методов адаптивного управления, обсуждается их связь с методом рекуррентных целевых неравенств. Это единство обусловлено использованием функций Ляпунова как для определения структуры управляющей системы, так и для исследования работоспособности непрерывных и дискретных алгоритмов адаптации.

В §§ 6.2, 6.3 синтез регулятора осуществляется соответственно на основе метода эталонного уравнения и метода функций Ляпунова. Алгоритм адаптации в каждой из этих задач получен и обоснован в рамках метода рекуррентных целевых неравенств.

Большая часть изложенных в этих параграфах результатов предполагает, что в сенсор включается столько компонент вектора состояния или производных от выходного процесса, сколько потребует метод синтеза адаптивного регулятора.

В ряде случаев это число может быть даже большим, чем требует существо дела. Мы сознательно не стремились минимизировать набор данных измерений, чтобы не усложнять проводимых построений и сделать основные идеи более понятными. В § 6.4 показано, что в рамках метода конечно-сходящихся алгоритмов можно синтезировать управляющую систему в условиях, когда некоторые (либо все) производные выходного процесса недоступны изменению. Существенными параметрами при этом выступают неизвестные коэффициенты ОУ, т. е. синтез управляющей системы осуществляется на основе метода подстраиваемой модели.

### § 6.1. Метод функций Ляпунова в теории адаптивных систем

Прямой метод Ляпунова исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений в теории адаптивных систем получил широкое признание и дальней-

шее развитие. Без преувеличения можно сказать, что подавляющее большинство предложенных способов синтеза управляющих систем и методов исследования их работоспособности основаны на использовании неотрицательных функций (обычно квадратичных) от переменных состояния системы управления, убывающих на траекториях исследуемой системы. Более того, сам выбор структуры управляющей системы часто осуществляется из условия, чтобы подходящая функция переменных состояния системы управления являлась для нее функцией Ляпунова, т. е., грубо говоря, была неотрицательной и не возрастала на траекториях системы управления. «Проектирование» таких функций обычно требует достаточно подробных сведений о свойствах ОУ. Задача управления в адаптивном варианте требует, чтобы управляющая система, синтезированная с помощью той или иной функции Ляпунова, не зависела от параметров конкретного объекта из возможного класса рассматриваемых ОУ.

В этом параграфе показывается, как метод функций Ляпунова «работает» в теории адаптивных систем и какова его связь с методом рекуррентных целевых неравенств.

**6.1.1°. Синтез стабилизирующих регуляторов и функции Ляпунова.** Пусть ОУ с выходом  $y(t)$ , состоянием  $x(t)$  и управляющим воздействием  $u(t)$  описывается уравнением в стандартной форме

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau)x + B(\tau)u + v(t), \quad y(t) = Dx(t), \quad (1.1)$$

где  $v(t)$  — действующая на объект помеха, относительно которой известно лишь, что

$$|v(t)| \leq C_v; \quad (1.2)$$

$C_v$  — заданная постоянная;  $A$  — квадратная и  $B$ ,  $D$  — прямоугольные матрицы соответствующих размерностей (для ОУ со скалярным входом и выходом  $B$  — вектор-столбец,  $D$  — вектор-строка). Матрицы  $A$ ,  $B$  определены с точностью до  $N$ -вектора  $\tau$  параметров, о котором известно, что он принадлежит подмножеству Т евклидова пространства  $\mathbb{R}^N$ .

В терминах гл. 1 вариантом  $\xi$  является пара  $\{\tau, v(\cdot)\}$ , а  $\{\xi\}$  равно произведению множества Т на множество всех возможных реализаций помех, удовлетворяющи (1.2).

Примем, что ЦУ состоит в обеспечении неравенства

$$J = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} Q(y(t), u(t)) < C_Q, \quad (1.3)$$

где  $Q(y, u)$  — целевая функция и  $C_Q$  — заданная постоянная \*). Свойства  $Q(y, u)$  по мере необходимости будут уточняться; пока предположим лишь ее непрерывность по каждому аргументу.

Предположим теперь, что вектор  $y(t)$  входит в сенсор  $\sigma(t)$  (набор доступных измерений в момент времени  $t$ ) и что для каждого  $\tau \in T$  существует обратная связь вида

$$u(t) = C(\tau) y(t), \quad (1.4)$$

которая обладает следующими свойствами:

1. Матрица

$$K(\tau) = A(\tau) + B(\tau) C(\tau) \quad (1.5)$$

турвицева.

2. Существуют положительная матрица  $H(\tau)$  и положительное число  $\rho(\tau)$  такие, что

$$G(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} -[K(\tau)^* H(\tau) + H(\tau) K(\tau) + \rho(\tau) H(\tau)] \geq 0, \quad (1.6)$$

т. е.  $G(\tau)$  — неотрицательная матрица \*\*).

3. Целевая функция  $Q(y, u)$ , матрица  $H(\tau)$  и помеха  $v(t, \xi)$  согласованы в том смысле, что справедливо включение

$$\{Q(Dx, C(\tau) Dx) < C_Q\} \equiv \left\{ x^* H(\tau) x \leq \frac{|H(\tau)| C_v^2}{\varepsilon \rho'(\tau) [\rho(\tau) - \rho'(\tau)]} \right\}, \quad (1.7)$$

где постоянные  $C_Q$  и  $C_v$  взяты из (1.3), (1.2),  $\rho(\tau)$  — из (1.6),  $\rho'(\tau)$  — положительная величина,  $\rho'(\tau) < \rho(\tau)$ , и  $\varepsilon$  — некоторое положительное число,  $\varepsilon < 1$  \*\*\*).

\*) Дальнейшие рассуждения упростятся, если принять  $C_Q = \infty$ , т. е. если ограничиться задачей о диссипативности (в смысле функционала  $J$ ; см. § 1.2).

\*\*) Существование таких матриц  $H(\tau)$  иногда удобно устанавливать с помощью частотной теоремы 3.1.3. В качестве примера использования теоремы 3.1.3 в этих целях см. доказательство теоремы 6.2.1.

\*\*\*) Условие 3 можно опустить, если принять  $C_Q = \infty$  в (1.3).

Закон управления (1.4) с указанными свойствами обеспечивает ЦУ (1.3). Действительно, вычислим производную по времени  $t$  от функции

$$V(x) = x^* H(\tau) x \quad (1.8)$$

вдоль траектории  $x = x(t)$  уравнения

$$dx/dt = K(\tau)x. \quad (1.9)$$

С учетом обозначений (1.5), (1.6) получим

$$\begin{aligned} dV[x(t)]/dt &\leq -[\rho(\tau) - \rho'(\tau)] V[x(t)] + \\ &+ |H(\tau)| C_v^2 [\rho'(\tau)]^{-1}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из неравенства (1.10) в силу положительности величины  $(\rho - \rho')$  следует, что при любом  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , и  $C_v > 0$  траектория  $x(t)$  за конечное время войдет в множество  $\{x^* H(\tau) x \leq |H(\tau)| C_v^2 (\varepsilon \rho'(\tau)) [\rho(\tau) - \rho'(\tau)]^{-1}\}$  и больше его не покинет. Но в силу условия З это множество содержится в множестве, определяемом в пространстве состояний неравенством

$Q(y, u) < C_Q$  при  $y = Dx$ ,  $u = C(\tau)y = C(\tau)Dx$ , т. е., начиная с некоторого момента времени, будет выполняться неравенство  $Q(y(t), u(t)) < C_Q$ , что приводит к (1.3).

Отметим, что при  $C_v = 0$  (помеха отсутствует) множество в правой части включения (1.7) вырождается в точку  $x = 0$  и все траектории системы управления (1.1), (1.9) стягиваются к нулевому вектору.

Построение обратной связи (1.4), обеспечивающей существование функции Ляпунова (1.8) с указанными выше свойствами, — типичная задача теории управления линейными объектами. Для нас сейчас важно лишь, что для каждого значения  $\tau \in T$  такая функция Ляпунова может быть построена. Тем самым зависимости  $C(\tau)$ ,  $H(\tau)$ ,  $\rho(\tau)$ ,  $G(\tau)$  предполагаются известными при изменении  $\tau$  в  $T$ .

Если значение  $\tau$  неизвестно, то воспользоваться законом управления (1.4) непосредственно нельзя. Возможны по крайней мере два пути учета зависимости (1.4) в адаптивном варианте задачи управления.

Первый из них состоит в использовании закона управления вида

$$u(t) = C[\tau(t)]y(t), \quad (1.11)$$

где  $\tau(t)$  — подходящим образом выбираемая оценка в момент времени  $t$  неизвестного вектора  $\tau = \tau_*$ .

Этот подход естественно назвать *идентификационным*, поскольку здесь существенно используется зависимость  $C = C(\tau)$  и синтез управляющей системы сводится по существу к идентификации ОУ (4.1).

Второй способ можно назвать *прямым*, поскольку управления формируются по закону

$$u(t) = \hat{C}(t)y(t), \quad (1.12)$$

где  $\hat{C}(t)$  — матрица подстраиваемых параметров, выбираемая тем или иным подходящим образом. Здесь не используется зависимость  $C = C(\tau)$ , а непосредственно подстраиваются коэффициенты обратной связи.

Каждый из указанных подходов обладает своими особенностями. Так, в некоторых задачах число подстраиваемых параметров в (1.12) оказывается меньше, чем число существенных параметров; в этом случае прямая подстройка может оказаться предпочтительнее. С другой стороны, выбор алгоритмов адаптации и их обоснование в рамках прямой подстройки могут привести к весьма ограничительным предположениям о множестве Т рассматриваемых параметров. Остановимся на этом вопросе подробнее.

**6.1.2°. Алгоритм прямой подстройки коэффициентов регулятора.** Дифференцируя функцию (1.8) по  $t$  в силу (1.1), находим

$$\begin{aligned} dV[x(t)]/dt &\leq -x(t)^*G(\tau)x(t) - [\rho(\tau) - \rho'(\tau)]V[x(t)] + \\ &+ 2y(t)^*[\hat{C}(t) - C(\tau)]^*B(\tau)^*H(\tau)x(t) + |H(\tau)|C_{\rho'}^2(\tau) \end{aligned} \quad (1.13)$$

(при  $\hat{C}(t) = C(\tau)$  приходим, разумеется, к (1.10)). Предположим теперь дополнительно, что матрица  $H(\tau)$  удовлетворяет условию

$$B^*(\tau)H(\tau) = LD, \quad (1.14)$$

где  $D$  — матрица из (1.1) и  $L$  — некоторая матрица соответствующей размерности, не зависящая от  $\tau$ . Тогда предпоследнее слагаемое в (1.13) преобразуется к виду

$$2y(t)^*[\hat{C}(t) - C(\tau)]^*Ly(t) = 2\text{Sp}\{Ly^*[\hat{C}(t) - C(\tau)]^*\}.$$

Матрица  $Ly^*$  выражается через сенсор и, следовательно, в каждый момент времени может быть использована для

получения построек  $\hat{C}(t)$ . Выберем закон изменения  $\hat{C}(t)$  в виде

$$d\hat{C}(t)/dt = -P [Ly(t)y(t)^* + \kappa \hat{C}(t)], \quad (1.15)$$

где  $P$  — произвольная симметричная положительная матрица и  $\kappa$  — неотрицательное число. Тогда

$$\begin{aligned} 2y^*(t)[\hat{C}(t) - C(\tau)]^*Ly(t) &= \\ &= \frac{d}{dt}|\hat{C}(t) - C(\tau)|_{P^{-1}}^2 - \kappa|\hat{C}(t) - C(\tau)|^2 + \kappa|C(\tau)|^2. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение

$$|C|_{P^{-1}}^2 = \text{Sp } C^*P^{-1}C \quad (1.16)$$

и использованы соотношения  $\text{Sp } ab^* = \text{Sp } ba^*$ ,

$$2\text{Sp } a^*P^{-1}b = \text{Sp } a^*P^{-1}a + \text{Sp } b^*P^{-1}b,$$

вытекающие из правил действия с векторно-матричными величинами. Учитывая полученное равенство, перепишем (1.13) в виде

$$\begin{aligned} d\hat{V}(t)/dt &\leqslant -[\rho(\tau) - \rho'(\tau)]\hat{V}(t) + \\ &+ |H(\tau)|C_v^2[\rho'(\tau)]^{-1} + 2[\rho(\tau) - \rho'(\tau)]|C(\tau)|^2, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где обозначено

$$\hat{V}(t) = x(t)^*H(\tau)x(t) + |\hat{C}(t) - C(\tau)|_{P^{-1}}^2 \quad (1.18)$$

и принято  $\kappa \geqslant \rho(\tau) - \rho'(\tau)$ . Из неравенства (1.17) вытекает, что выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \hat{V}(t) &\leqslant \\ &\leqslant |H(\tau)|C_v^2\{\rho'(\tau)[\rho(\tau) - \rho'(\tau)]\}^{-1} + |C(\tau)|_{P^{-1}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} c_{\hat{V}}(\tau), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} x(t)^*H(\tau)x(t) &\leqslant c_{\hat{V}}(\tau), \\ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |C(t) - C(\tau)|_{P^{-1}}^2 &< c_{\hat{V}}(\tau). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Неравенства (1.19) не означают, конечно, что  $C(t) \rightarrow C(\tau)$  при  $t \rightarrow \infty$ , но гарантируют равномерную по  $t$  ограниченность  $|x(t)|$ . Если при этом справедливо

## включение

$$\{\sup Q [Dx, \hat{C}(t) Dx] \leq C_Q\} \equiv \{x^* H(\tau) x \leq c_{\hat{V}}(\tau)\},$$

где верхняя грань берется по всем  $\hat{C}(t)$ , удовлетворяющим (1.19), то обеспечивается ЦУ (1.3). Отметим, что при  $C_v = 0$  (помеха отсутствует) из (1.19) не следует, что система управления (1.1), (1.12), (1.16) будет асимптотически устойчивой. При  $C_v = 0$  асимптотическую устойчивость по  $x$ , как это легко следует из неравенства (1.13), можно обеспечить, если в алгоритме (1.16) выбрать  $\kappa = 0$ . Однако такой способ подстройки оказывается чувствительным к помехам в ОУ (1.1): в п. 2.4.3° был приведен пример, когда система управления (1.1), (1.12), (1.16) при  $\kappa = 0$  неустойчива при сколь угодно малом уровне  $C_v$  помехи  $v(t)$ , действующей на ОУ (1.1).

Итак, при ряде предположений о функции Ляпунова (1.8) непрерывный алгоритм подстройки (1.16) обеспечил по крайней мере диссипативность системы управления.

Алгоритм подстройки (1.16) получен при существенном предположении (1.14). Вопрос о существовании положительных матриц  $H(\tau)$ , удовлетворяющих условиям (1.6), (1.14), подробно исследуется в гл. 7 с помощью частотной теоремы типа 3.1.5. Там же выясняются особенности этого метода для синтеза адаптивных систем. Работоспособность алгоритма адаптации типа (1.15) при этом обосновывается с использованием метода скоростного градиента (см. § 2.4).

Отметим, что условие (1.14) накладывает достаточно сурьёзные ограничения на класс Т рассматриваемых ОУ. Как правило, существование матриц  $H(\tau)$  с указанными выше свойствами удается установить лишь для устойчивых по управлению объектов при ряде дополнительных предположений о свойствах его коэффициентов.

**6.1.3°. Алгоритм идентификационной подстройки параметров регулятора.** Непрерывный алгоритм подстройки коэффициентов регулятора может быть получен и при использовании обратных связей (1.11), если наложить на класс ОУ (1.1) соответствующие ограничения. Предположим, что измерению доступен весь вектор состояния  $x(t)$ , а матрица  $H$  в (1.6) не зависит от  $\tau$ . В этих условиях будем отыскивать закон изменения оценок  $\tau(t)$ , обеспечивающих равномерную ограниченность функции (1.8) на траекториях системы управления (1.1), (1.11).

Дифференцируя (1.8) в силу (1.4), получим

$$\begin{aligned} dV[x(t)]/dt &\leq -x(t)^*G(\tau(t))x(t) + \\ &+ |H|C_v^2\{\rho[\tau(t)]\}^{-1} + 2x(t)^*H\{A(\tau) - A[\tau(t)]\}x(t) + \\ &+ 2x(t)^*H\{B(\tau) - B[\tau(t)]\}u. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Предположим теперь дополнительно, что матрицы  $A$  и  $B$  зависят линейно от вектора  $\tau$ . Тогда можно записать

$$\begin{aligned} x(t)^*H\{A(\tau) - A[\tau(t)]\}x(t) + x(t)^*H\{B(\tau) - \\ - B[\tau(t)]\}u(t) = F(t)^*[\tau - \tau(t)], \end{aligned} \quad (1.21)$$

где вектор  $F(t)$  выражается через сенсор, т. е. доступен измерению в момент времени  $t$ . Теперь (1.20) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} dV[x(t)]/dt &\leq -x(t)^*G[\tau(t)]x(t) + \\ &+ 2F(t)^*[\tau - \tau(t)] + |H|C_v^2\{\rho[\tau(t)]\}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Определим закон получения оценок  $\tau(t)$  уравнением

$$d\tau(t)/dt = P[F(t) - \kappa\tau(t)], \quad (1.23)$$

где  $P$  — произвольная положительная матрица и  $\kappa$  — неотрицательное число. Неравенство (1.22) тогда записывается в виде

$$\begin{aligned} d\hat{V}/dt &\leq -x(t)^*G[\tau(t)]x(t) + \\ &+ |H|C_v^2\{\rho[\tau(t)]\}^{-1} - \kappa|\tau(t) - \tau|^2 + \kappa|\tau|^2, \end{aligned}$$

где использовано обозначение (1.16) и

$$\hat{V}(t)^* = x^*(t)Hx(t) + |\tau(t) - \tau|_{P^{-1}}^2.$$

Из этого неравенства следует, что если равномерно по  $\tau \in T$  выполняются неравенства  $G(\tau) \geq \lambda_G > 0$  и  $\rho(\tau) \geq \rho > 0$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{V}(t) \leq |H|^2 C_v^2 [\lambda_G \rho]^{-1} + |\tau|^2$  при выборе  $\kappa = \lambda_G |H|^{-1}$  в (1.23).

Таким образом, непрерывный алгоритм подстройки (1.23) определяется через сенсор и обеспечивает диссипативность системы управления. Алгоритм (1.23) придает системе управления свойства, аналогичные тем, что придавал ей алгоритм (1.16).

Существование матрицы  $H$ , для которой матрицы (1.6) положительно определены равномерно по  $\tau \in T$ , также налагает серьезные ограничения на множество  $T$ . Если

не принимать во внимание предположение о доступности измерению всех компонент вектора  $x$ , то изложенный выше подход применим к подклассам ОУ, устойчивых по управлению. Обоснование алгоритма адаптации (1.23) в этом случае также может быть произведено на основе метода скоростного градиента, изложенного в § 2.4.

Отметим, что алгоритм (1.16) получен с использованием линейности функции  $dV/dt$  по подстраиваемым параметрам, тогда как вывод алгоритма (1.23) опирался на предположение о линейной зависимости коэффициентов ОУ (1.1) от вектора  $\tau$  существенных параметров. В ряде типичных приложений функция  $dV/dt$  удовлетворяет обоим этим условиям одновременно, так что при измерении всего вектора состояния оба подхода (прямой и идентификационный) получения непрерывных алгоритмов адаптации совпадают.

**6.1.4°. Метод функций Ляпунова и рекуррентные целевые неравенства.** Предположим, что в условиях п. 6.1.1° вектор состояния  $x(t)$  доступен измерению ( $y(t) = x(t)$ ), и, более того, доступна измерению производная  $dx/dt$ . Будем формировать управления  $u(t)$  по закону

$$u(t) = C[\tau(t)]x(t), \quad (1.24)$$

где  $\tau(t)$  — вектор-функция, изменяющаяся лишь в моменты времени

$$t_j, j = 0, 1, \dots, t_{j+1} - t_j \geq \delta > 0.$$

Более подробно последовательность  $\{t_j\}$  будет описана позднее. На участке постоянства функции  $\tau(t)$  вычислим производную от функции

$$V(t) = x(t)^* H[\tau(t)] x(t) \quad (1.25)$$

в силу уравнения (1.1). Имеем

$$\begin{aligned} dV(t)/dt = -x(t)^* G_t x(t) - \rho_t V(t) + \\ + 2x(t)^* H_t v(t) + 2F(t, \tau, \tau(t))^* H_t x(t), \end{aligned} \quad (1.26)$$

где для краткости введены обозначения

$$\begin{aligned} H_t = H[\tau(t)], \quad G_t = G[\tau(t)], \quad \rho_t = \rho[\tau(t)], \\ F(t, \tau, \tau') = [A(\tau) - A(\tau')]x(t) + \\ + [B(\tau) - B(\tau')]u(t). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Введем функцию

$$\begin{aligned} \varphi(t, \tau') = -2x(t)^* H_t v(t) + \rho_t V(t)/2 - \\ - 2F(t, \tau, \tau')^* H_t x(t) + C_\varphi, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$C_\varphi$  — некоторая постоянная, выбором которой распорядимся позднее. Отметим, что, хотя функция  $\varphi(t, \tau')$  зависит от  $t$ , ее значения известны в каждый момент времени, поскольку в силу (1.26) она выражается через сенсор (доступные измерению величины). Действительно, учитывая обозначения (1.27), в силу (1.26) имеем

$$\varphi(t, \tau') = -dV/dt - x(t)^* G_t x(t) - \rho_t V(t)/2 + C_\varphi, \quad (1.29)$$

и так как  $x(t)$ ,  $dx/dt$  входят, по предположению, в сенсор, то правая часть в формуле (1.29) выражается через сенсор, если этим свойством обладают  $\tau(t)$  и  $\tau'$ .

Функция (1.28) определяет рекуррентные целевые неравенства

$$\varphi(t_{i+1}, \tau') > 0, \quad (1.30)$$

из которых должен определяться  $\tau(t_{i+1})$ , если вектор  $\tau(t_i)$  уже определен. Здесь  $t_{i+1}$  — первый момент времени, следующий за  $t_i + \delta$ , когда впервые нарушается неравенство

$$\varphi[t, \tau(t)] > 0. \quad (1.31)$$

Если (1.31) выполнено при всех  $t$ , начиная с некоторого  $t_*$ , то последовательность  $\{t_i\}$  — конечная.

Поясним причину появления рекуррентных целевых неравенств (1.30). Предположим, что эта система разрешима и для ее решения выбрана некоторая рекуррентная процедура

$$\tau(t_{i+1}) = \Psi[\tau(t_i), \sigma(t_{i+1})], \quad (1.32)$$

где  $\sigma(t_{i+1})$  — сенсор в момент времени  $t_{i+1}$  и  $\Psi(\tau, \sigma)$  — некоторая функция. Предположим, что алгоритм (1.32) обеспечивает включение  $\tau(t_i) \in T$  при всех  $t_i$  и является конечно-сходящимся в смысле определения 2.1.1. Тогда последовательность  $\tau(t_{i+1})$  достигает своего предела  $\tau_\infty$  за конечное время  $t_*$  и при  $t > t_*$  выполняется неравенство  $\varphi(t, \tau_\infty) > 0$ , или, учитывая (1.28),

$$dV/dt \leq -x^*(t) G(\tau_\infty) x(t) - \rho(\tau_\infty) V(t)/2 + C_\varphi,$$

т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) H(\tau_\infty) x(t) \leq 2C_\varphi \rho(\tau_\infty)^{-1}.$$

Таким образом, использование конечно-сходящихся алгоритмов позволяет обеспечить диссипативность системы управления и оценить область диссипативности.

Остановимся кратко на вопросе о разрешимости системы рекуррентных целевых неравенств (1.30). При  $\tau' = \tau$  в силу (1.28) имеем  $\varphi(t, \tau) \geq C_\varphi - 2 |H_t| C_v^2 / \rho_t$ . Если величина  $C_T = 2C_v^2 \sup_{\tau \in T} |H(\tau)| / \rho(\tau)$  конечна и постоянная  $C_\varphi$  выбрана из условия  $C_\varphi > C_T$ , то убеждаемся, что неравенства (1.30) разрешимы и  $\tau' = \tau$  является решением при всех  $t$ .

Для получения алгоритма подстройки можно воспользоваться теоремой 2.1.7. Условие вогнутости по  $\tau'$  функции  $\varphi(t, \tau')$  будет выполнено, если матрицы  $A$  и  $B$  зависят от  $\tau$  линейно. В этом случае в силу (1.28) можно написать равенство

$$\varphi(t, \tau') = -2x^*(t) H_t v(t) + \rho_t V(t)/2 - \Phi(t)^*(\tau - \tau') + C_\varphi, \quad (1.33)$$

где вектор  $\Phi(t)$  выражается через сенсор. Тогда  $\text{grad}_\tau \varphi(t, \tau) = \Phi(t)$  и алгоритм теоремы 2.1.7, примененный к функции

$$\tilde{\varphi}(t, \tau') = \varphi(t, \tau') |\Phi(t)|^{-1} + \varepsilon$$

( $\varepsilon$  — достаточно малое положительное число), принимает вид

$$\begin{aligned} \tau(t_{i+1}) &= \tau(t_i) + \zeta_{i+1} \Phi(t_{i+1}) |\Phi(t_{i+1})|^{-1}, \\ \zeta_{i+1} &= \rho_{i+1} - \beta_{i+1} \varphi[t_{i+1}, \tau(t_1)] |\Phi(t_{i+1})|^{-1}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Здесь  $t_{i+1}$  — первый момент времени, следующий за  $t_i + \delta$ ,  $\delta > 0$ , при котором нарушается неравенство  $\varphi[t, \tau(t_i)] \geq -\varepsilon |\Phi^*(t)|$ , а  $\rho_i, \beta_i$  — произвольные последовательности неотрицательных чисел, удовлетворяющие условиям  $\sum \rho_i = \infty$ ,  $0 \leq \beta_i \leq 2$ .

В силу теоремы 2.1.7 алгоритм (1.34) является конечно-сходящимся, последовательность  $\{\tau(t_i)\}$  достигает своего предела  $\tau_\infty$  за конечное время  $t_*$  и при  $t \geq t_*$  выполняется  $\varphi(t, \tau_\infty) > -\varepsilon |\Phi(t)|$ , или, в силу (1.29),  $dV/dt \leq -x^*G(\tau_\infty)x(t) - \rho(\tau_\infty)V(t)/2 + C_\varphi + \varepsilon |\Phi(t)|$ .

$$(1.35)$$

Поскольку вектор  $\Phi(t)$  линейно зависит от  $x(t)$ , то из (1.35) при достаточно малом  $\varepsilon$  также удается получить неравенство  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \leq C_V$  с некоторой постоянной  $C_V$ , которая при малом  $\varepsilon$  близка к  $2C_\Phi [\rho(\tau_\infty)]^{-1}$ .

Наконец, нужно еще обеспечить включение  $\tau(t_i) \in T$ , в противном случае матрица  $C[\tau(t)]$  может быть не определена. Это несложно сделать, если  $T$  — выпуклое множество и известен проектор  $P_T$  на него. Тогда достаточно взять суперпозицию алгоритма (1.34) с операцией проектирования  $P_T$ , как об этом говорилось в § 2.4.

Приведенный способ синтеза управляющей системы (1.24), (1.34) на основе сочетания метода функций Ляпунова и метода рекуррентных целевых неравенств носит достаточно общий характер. Внимательное рассмотрение приведенной выше конструкции обнаруживает, что при построении целевых неравенств зависимость от  $\tau'$  определялась лишь через матрицы  $A(\tau')$ ,  $B(\tau')$ , тогда как в  $H$  и  $C$  использовались значения  $\tau(t)$ , найденные в предшествующие моменты времени. Именно это обстоятельство облегчает обоснование алгоритмов адаптации, обеспечивая вогнутость по  $\tau'$  функции  $\varphi(t, \tau')$  (выше схема такого обоснования намечена в предположении линейной зависимости коэффициентов ОУ (1.1) от  $\tau$ ; это привело к линейной зависимости  $\varphi(t, \tau')$  от  $\tau'$ ). Подобное выделение параметра  $\tau'$  оказывается достаточным для синтеза нужных управлений, если алгоритм — конечно-сходящийся, так как после достижения предела последовательностью  $\tau(t_i)$  оказываются выполненными равенства  $\tau(t) = \tau' = \tau_\infty$ .

**6.1.5°. Непрерывные алгоритмы адаптации «с памятью».** Выше, в п. 6.1.2° и 6.1.3°, уже отмечался недостаток непрерывных алгоритмов самонастройки (1.15), (1.23). Этот недостаток связан с тем, что обоснованное их применение требует либо независимости от  $\tau$  матрицы  $H$  в функции Ляпунова (1.16), либо матрицы  $L$  в формуле (1.14). В настоящем пункте будет показано, как с помощью усложнения алгоритма адаптации (это усложнение, как нам представляется, несущественно для приложений) можно обосновать непрерывные алгоритмы адаптации и в случаях, когда указанные матрицы  $H$  и  $L$  могут зависеть от вектора  $t$ . Тем самым непрерывные алгоритмы адаптации приобретут черты универсальности, свойственные процедурам метода

рекуррентных целевых неравенств, и могут обоснованно применяться для стабилизации объектов, не обязательно устойчивых по управлению. В действительности, обсуждаемый ниже метод синтеза управляющей системы основан на комбинации идей метода рекуррентных целевых неравенств (характерной особенностью которого является обеспечение монотонного приближения оценок  $\tau_i$  к неизвестному вектору  $\tau$  существенных параметров) и метода функций Ляпунова (характерной особенностью которого являются законы изменения подстроек такие, что выбранная функция Ляпунова убывает на траекториях системы управления, проходящих вне некоторого ограниченного множества состояний). Для определенности ограничимся рассмотрением постановки задачи п. 6.1.3°, т. е. предположим, что весь вектор состояния  $x(t)$  доступен измерению. Примем, что в уравнении (1.1) вектор  $B$  не зависит от параметра  $\tau^*$ , а матрица  $A(\tau)$  зависит от него линейно, т. е. при любых  $\tau'$ ,  $\tau''$ ,  $x$  выполняется равенство

$$A(\tau') - A(\tau'') x = \tilde{A}(x)(\tau' - \tau'') \quad (1.36)$$

и для матрицы  $\tilde{A}(x)$  справедлива оценка

$$|\tilde{A}(x)| \leq C_A |x| \quad (1.37)$$

с некоторой постоянной  $C_A$ . ЦУ примем в виде

$$\overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} |x(t)| \leq C_x, \quad \overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} |u(t)| \leq C_u, \quad (1.38)$$

где  $C_x$ ,  $C_u$  — заданные постоянные. Относительно множества Т существенных параметров предположим:

I. Множество Т ограничено, замкнуто и выпукло, причем известен проектор  $P_T$  на это множество.

\*) Это предположение не является существенным для многих приложений. Действительно, пусть  $B = \bar{B}(\tau)$ . Тогда, вводя расширенный вектор состояния  $\tilde{x}(t) = \text{col}(x(t), u(t))$  и новые управление  $\tilde{u}(t) = du(t)/dt$ , для  $x(t)$  получим уравнение  $d\tilde{x}/dt = \tilde{A}(\tau)\tilde{x}$ , где

$$\tilde{A}(\tau) = \begin{pmatrix} A(\tau) & B(\tau) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$I$  и  $0$  — единичная и нулевая матрицы соответствующих размерностей. Полученное уравнение имеет вид (1.1). Легко показать, что пара  $(\tilde{A}(\tau), \tilde{B})$  — управляемая, если этим свойством обладает пара  $(A(\tau), B(\tau))$ .

II. При любом  $\tau \in T$  существует и известен вектор  $C = C(\tau)$ , для которого матрица  $A_1(\tau) = A(\tau) + BC(\tau)^*$  гурвицева и закон управления  $u(t) = C(\tau)^* x(t)$  обеспечивает ЦУ (1.38) при произвольной помехе  $v(\cdot) \in \mathfrak{V}_{C_\nu}$  (класс помех  $\mathfrak{V}_{C_\nu}$  определяется условием (1.2)).

Воспользовавшись идентификационным подходом, управление  $u(t)$  будем формировать по формуле (1.24), где  $\tau(t)$  — подходящая оценка неизвестного вектора  $\tau$ , которая должна определяться через  $x(s)$ ,  $t_0 \leq s \leq t$ , и при всех  $t$  принадлежать множеству  $T$ .

Вектор-функция  $\tau(t)$  будет представлять собой кусочно-постоянную аппроксимацию вектор-функции  $\hat{\tau}(t)$ , способ получения которой будет описан ниже. Эта аппроксимация определяется по следующему правилу: в начальный момент времени  $t_0$  выполняется  $\tau(t_0) = P_T \hat{\tau}(t_0)$ . Обозначим через  $t_1$  первый момент времени, следующий за  $t_0$ , когда нарушается неравенство  $|\tau(t_0) - \hat{\tau}(t)| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  — положительный параметр. Тогда  $\tau(t) = \tau(t_0)$  при  $t_0 \leq t < t_1$  и  $\tau(t_1) = P_T \hat{\tau}(t_1)$  (функция  $\hat{\tau}(t)$  может испытывать разрыв первого рода при  $t = t_1$ ). Пусть значения  $\tau(t)$  определены до момента времени  $t_j$ . Обозначим через  $t_{j+1}$  момент времени, следующий за  $t_j$ , когда впервые нарушится неравенство  $|\tau(t_j) - \hat{\tau}(t)| < \varepsilon$ . Тогда  $\tau(t) = \tau(t_j)$  при  $t_j \leq t < t_{j+1}$  и  $\tau(t_{j+1}) = P_T \hat{\tau}(t_{j+1} + 0)$ . Если момента  $t_{j+1}$  не существует, то полагаем  $t_{j+1} = \infty$  и в этом случае последовательность  $\{t_j\}$ , в которых  $\tau(t)$  может изменяться, конечна. Из последующего уточнения закона изменения  $\tau(t)$  следует, что  $t_{j+1} > t_j$  при любом  $j$ . В силу приведенного правила при всех  $t$  (за возможным исключением моментов скачков функции  $\hat{\tau}(t)$ ) выполняются условия

$$\tau(t) \in T, \quad |\hat{\tau}(t) - \tau(t)| \leq \varepsilon. \quad (1.39)$$

Формирование вектор-функции  $\hat{\tau}(t)$  будем осуществлять в зависимости от протекания процесса  $x(t)$ . Именно, пусть  $X = \{x: |x| \leq C_x\}$ ;  $C_x$  — постоянная из (1.38). Обозначим через  $t'$ ,  $t''$  два последовательных момента времени «входа» траектории в множество  $X$  и «выхода» из него. Тогда  $\hat{\tau}(t') = \hat{\tau}(t'')$ , т. е. значение функции  $\hat{\tau}(t)$  восстанавливается при выходе  $x(t)$  из множества  $X$ . То же свойство «восстанавливаемости» будем предполагать выполнен-

ным и для вектор-функции  $\tau(t)$ . Реализация такого способа формирования функций  $\tau(t)$ ,  $\hat{\tau}(t)$  требует «памяти» для запоминания значений  $\tau(t')$ ,  $\hat{\tau}(t')$ , отвечающих последнему во времени вхождению траектории  $x(t)$  в множество  $X$ .

Продолжим уточнение способа формирования функции  $\tau(t)$ . Зададимся положительной матрицей  $G$  и положительным числом  $v$ , удовлетворяющим условию  $\max_{\tau \in T} \operatorname{Re} \lambda(\tau) + v < 0$ , где  $\operatorname{Re} \lambda(\tau)$  — наибольшая вещественная часть матрицы  $A_1(\tau) = A(\tau) + BC(\tau)^*$ . Такое число  $v$  существует, так как матрицы  $A_1(\tau)$  гурвицевы и множество  $T$  компактно. Обозначим через  $H(\tau)$  положительную матрицу, определяемую соотношением

$$H(\tau)A_1(\tau) + A_1(\tau)^*H(\tau) + 2vH(\tau) = -G. \quad (1.40)$$

Обозначим, наконец, через  $\lambda_H$ ,  $\Lambda_H$  не зависящие от  $\tau$  постоянные, для которых при любом  $\tau \in T$  и произвольном  $x$  выполняются неравенства  $\lambda_H |x|^2 \leq x^*H(\tau)x \leq \Lambda_H |x|^2$  (такие постоянные существуют в силу компактности множества  $T$ ). Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(t) = V[x, \hat{\tau}(t), \tau(t)] = x^*H[\tau(t)]x + |\tau - \hat{\tau}(t)|^2. \quad (1.41)$$

Предполагая, что  $t_j < t < t_{j+1}$ , вычислим производную по  $t$  от  $V[x(t), \hat{\tau}(t), \tau_j]$ ,  $\tau_j = \tau(t_j)$ , в силу системы (1.1), (1.24) с учетом (1.36), (1.40). Получим

$$\begin{aligned} dV(t)/dt = & -x(t)^*Gx(t) - 2vx(t)^*H(\tau_j)x(t) + \\ & + 2x(t)^*H(\tau_j)\tilde{A}[x(t)][\tau - \tau(t)] + \\ & + 2x(t)^*H(\tau_j)v(t) + 2x(t)^*H(\tau_j)\tilde{A}[x(t)] \times \\ & \times [\tau - \hat{\tau}(t)] - 2[d\hat{\tau}(t)/dt]^*[\tau - \hat{\tau}(t)]. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Равенство (1.42) подсказывает, в каком виде следует определять закон изменения вектор-функции  $\hat{\tau}(t)$ . Будем  $\hat{\tau}(t)$  определять на интервале  $t_j < t < t_{j+1}$  из соотношения

$$d\hat{\tau}(t)/dt = \tilde{A}[x(t)]^*H[\tau(t)]x(t). \quad (1.43)$$

Для однозначного определения  $\hat{\tau}(t)$  требуется еще задать начальное значение  $\hat{\tau}(t_j + 0)$ . Условимся это начальное значение задавать в зависимости от поведения  $x(t)$  на предшествующем интервале. Именно, если выполняется

при  $\delta_j = v\lambda_H C_x^2 (t_j - t_{j-1})$  неравенство

$$x(t_j)^* H(\tau_{j-1}) x(t_j) \leq x(t_{j-1})^* H(\tau_{j-1}) x(t_{j-1}) - \delta_j, \quad (1.44)$$

то будем дополнять уравнение (1.43) начальным условием  $\hat{\tau}(t_j + 0) = \tau(t_{j-1})$ , т. е. выбирать его совпадающим с начальным значением на предыдущем интервале. Если же (1.44) нарушается, то дополним (1.43) условием  $\hat{\tau}(t_j + 0) = P_T \hat{\tau}(t_j - 0)$ , т. е. выберем начальное значение совпадающим с проекцией на  $T$  оценки  $\hat{\tau}(t)$ , полученной к моменту времени  $t_j$ . При этом в любом случае  $\tau(t_j) = P_T \hat{\tau}(t_j + 0)$  в соответствии с ранее принятым соглашением. Функция  $\hat{\tau}(t)$  испытывает разрывы первого рода в точках  $t_j$  при выполнении неравенства (1.44) и в моменты выхода  $x(t)$  из множества  $X$ , а при остальных  $t$  непрерывно дифференцируема. Учитывая (1.42), (1.38), (1.24), (1.39) и обозначая через  $\lambda_G$  наименьшее собственное значение матрицы  $G$ , из (1.42) получим

$$\begin{aligned} dV(t)/dt &\leq -|x(t)|[(\lambda_G - 2\varepsilon C_A \Lambda_H) |x(t)| - \\ &\quad - 2\Lambda_H C_v] - 2v x(t)^* H(\tau_i) x(t). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Предположим, что постоянная  $C_x$  в (1.38) удовлетворяет неравенству  $\lambda_G C_x > 2\Lambda_H C_v$  и параметр  $\varepsilon$  выбран столь малым, что выполняется

$$(\lambda_G - 2\varepsilon C_A \Lambda_H) C_x \geq 2\Lambda_H C_v. \quad (1.46)$$

Тогда из (1.45) следует, что функция (1.41) убывает на траекториях системы (1.1), (1.24), (1.43), если на промежутке  $(t_j, t_{j+1})$  выполнено  $|x(t)| \geq C_x$ . Убедимся, что общее время нахождения  $x(t)$  вне множества  $X$  конечно. Принятое соглашение о восстановляемости значений  $\tau(t)$ ,  $\hat{\tau}(t)$  при выходе из множества  $X$  позволяет отвлечься от тех промежутков времени, когда выполняется  $|x(t)| < C_x$ . Совместная последовательные моменты входа в  $X$  и выхода из  $X$  траектории  $x(t)$ , можно считать, что при всех рассматриваемых  $t$  выполнены неравенства  $|x(t)| \geq C_x$  и  $\sup_t |x(t)|^2 = C_x^2 < \infty$  в силу (1.41), (1.45), (1.46).

Если подсчитывать изменение функции  $V(t)$  только на таких «склеенных» интервалах времени, то из (1.45) получим, что  $V(t_{j+1} - 0) \leq V(t_j + 0)$ , однако в моменты времени  $\{t_j\}$  функция  $V(t)$  может испытывать скачки за счет принятого выше способа выбора начальных значений

$\hat{\tau}(t_j + 0)$ . Покажем, что общая длина интервалов  $(t_j, t_{j+1})$ , на которых происходит нарушение неравенства (1.44), конечна. Действительно, на интервале  $(t_j, t_{j+1})$  в силу (1.45), (1.46) для изменения  $V(t)$  справедлива оценка

$$\dot{V}(t_{j+1}) - V(t_j) \leq -2vC_x^2\lambda_H(t_{j+1} - t_j). \quad (1.47)$$

Но из (1.43) следует, что  $|\hat{\tau}(t_{j+1}) - \tau(t_j)| = \varepsilon \leq C_A C_x \Lambda_H(t_{j+1} - t_j)$ , т. е. интервалы  $(t_{j+1} - t_j)$  положительны и их длина отделена от нуля. Неравенство (1.47) теперь означает, что на каждом интервале функция (1.41) убывает на положительную величину и эта величина равномерно по  $j$  отделена от нуля. Нарушение неравенства (1.44) на  $j$ -м интервале означает, что величина  $|\tau(t_{j+1}) - \tau|^2$  меньше величины  $|\tau(t_j) - \tau|^2$  и их разность равномерно по  $j$  отделена от нуля. Ясно, что таких интервалов не может быть бесконечно много (именно подобная идея невозможности «бесконечного убывания» функции  $|\tau(t_j) - \tau|$  лежит в основе доказательства большинства процедур метода рекуррентных целевых неравенств). Итак, через конечное время на каждом из интервалов  $(t_j, t_{j+1})$  будет с необходимостью выполняться неравенство (1.44). Поскольку теперь  $|\tau(t_{j+1}) - \tau| = |\tau(t_j) - \tau|$  в силу принятого соглашения о выборе начальных значений в законе (1.43), то  $V(t_{j+1} + 0) \leq V(t_j + 0) - C_x^2 v \lambda_H(t_{j+1} - t_j)$ . Так как в силу сказанного выше интервалы  $(t_{j+1} - t_j)$  не могут ограниченно «сжиматься», то это означает, что общая длина интервалов  $(t_j, t_{j+1})$ , на которых выполняется неравенство (1.44), также величина конечная. Приведенные рассуждения показывают, что, начиная с некоторого конечного момента времени  $t_*$ , будет выполняться неравенство  $|x(t)| \leq C_x$ , т. е. обеспечено будет первое неравенство из целевого условия (1.38). Если к тому же выполнено неравенство  $\max_{t \in T} |C(t)| C_x \leq C_u$ , то, очевидно, ЦУ

(1.38) будет обеспечена. Итак, синтезированная управляющая система (1.24), (1.43), где  $\tau(t)$  — кусочно-постоянная функция времени, определяемая по  $\hat{\tau}(t)$  в соответствии с принятыми выше соглашениями, использует только доступные измерению данные и обеспечивает ЦУ (1.38), если постоянные  $C_x, C_u$  в (1.33) и параметры алгоритма адаптации выбраны указанным выше способом.

Отметим, что если помеха отсутствует,  $v(t) \equiv 0$ , то допустимо принять  $C_x = C_u = 0$ , т. е. синтезированная управляющая система обеспечивает асимптотическую устойчивость состояний объекта управления. При этом существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\tau}(t) = \tau_*$ , причем не обязательно  $\tau_* = \tau$ .

При ненулевой помехе, как показывают простые примеры, функция  $\hat{\tau}(t)$  не стабилизируется, испытывая бесконечное число разрывов первого рода (это не означает, вообще говоря, что  $\tau(t)$  не стабилизируется тоже).

## § 6.2. Синтез адаптивного регулятора на основе метода эталонного уравнения

**6.2.1°. Постановка задачи и условия ее разрешимости.** Примем, что ОУ со скалярными входом  $u(t)$  и выходом  $y(t)$  описывается уравнением

$$a(p, \tau)y = b(p, \tau)u + v(t, \xi), \quad (2.1)$$

где  $p = d/dt$  — производная во времени;  $a(\lambda, \tau)$ ,  $b(\lambda, \tau)$  — полиномы по  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned} a(\lambda, \tau) &= \lambda^r + \lambda^{r-1}a_{r-1}(\tau) + \dots + a_0(\tau), \\ b(\lambda, \tau) &= \lambda^s b_s + \lambda^{s-1}b_{s-1}(\tau) + \dots + b_0(\tau), \\ b_s &\neq 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

коэффициенты которых — функции вектора параметров  $\tau$ ,  $\tau \in T$ ;  $v(\xi)$  — возмущающее воздействие, зависящее от варианта  $\xi \in \{\xi\}$  и для каждого  $\xi$  удовлетворяющее условию

$$\sup_t |v(t, \xi)| \leq C_v \quad (2.3)$$

с постоянной  $C_v$ , не зависящей от  $\xi$ . Вектор  $\tau$  назовем *вектором существенных параметров*. Задача состоит в формировании таких управляющих воздействий  $u = u(t)$ , при которых точно или приближенно выполнялось бы равенство (*эталонное уравнение*)

$$G(p)y = r(t), \quad (2.4)$$

где

$$G(\lambda) = \lambda^r + \lambda^{r-1}G_{r-1} + \dots + G_0 \quad (2.5)$$

— гурвицев полином, определяющий эталонную модель (2.4),  $r(t)$  — задающее воздействие — функция, значение которой в каждый момент времени  $t$  предполагается известным.

Если параметр  $\tau$  известен, то регулятор

$$\alpha(p, \tau) u = \beta(p, \tau) y + b_s^{-1} r(t), \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(p, \lambda) &= \lambda^s + \lambda^{s-1} \alpha_{s-1}(\tau) + \alpha_0(\tau), \\ \beta(\lambda, \tau) &= \lambda^r \beta_{r-1}(\tau) + \dots + \beta_0(\tau), \\ \alpha_i(\tau) &= b_s^{-1} b_i(\tau), \quad i = 0, \dots, s-1, \\ \beta_j(\tau) &= b_s^{-1} [a_j(\tau) - G_j], \quad j = 0, \dots, r-1, \end{aligned} \quad (2.7)$$

обеспечивает равенство

$$G(p)y - r(t) = v(t, \xi), \quad (2.8)$$

т. е. минимально возможную невязку в эталонном уравнении в классе всех неизмеряемых нерегулярных помех  $v(t, \xi)$ . Характеристический полином  $g(\lambda)$  системы управления (2.1), (2.6) — (2.7) равен  $g(\lambda) = G(\lambda) b_s^{-1} b(\lambda, \tau)$ , т. е. регулятор (2.6) будет стабилизирующим, если ОУ устойчив по управлению (полином  $b(\lambda, \tau)$  — гурвицев). Далее это условие будем предполагать выполненным для каждого  $\tau \in T$ . Если задающее воздействие  $r(t)$  равномерно по  $t$  ограничено,

$$\sup_t |r(t)| \leq C_r < \infty, \quad (2.9)$$

то система (2.1), (2.6) — (2.7) будет диссипативна (и несложно получить оценку области диссипативности). Использование соотношения (2.6) в качестве уравнения регулятора подразумевает, что величины  $\{y(t), \dots, y^{(r)}(t), u(t), \dots, u^{(s)}(t), r(t)\}$  доступны измерению в каждый момент времени, т. е. входят в сенсор. Далее это условие будет предполагаться выполненным.

**6.2.2°. Адаптивный вариант задачи управления.** Если вместо регулятора (2.6) используется регулятор

$$\alpha(p, \hat{\tau}) u = \beta(p, \hat{\tau}) y - b_s^{-1} r(t), \quad (2.10)$$

то при  $\hat{\tau} \neq \tau$  равенство (2.8), вообще говоря, выполняться не будет. В качестве ЦУ выберем теперь требование

обеспечить неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |G(p)y(t) - r(t)| \leq \rho^{-1} C_v \quad (2.11)$$

при некотором  $\rho$ ,  $0 < \rho < 1$ , т. е. рассмотрим задачу субоптимального управления с уровнем оптимальности  $\rho$  (см. § 1.2). Если воспользоваться уравнениями (2.1), (2.10), то неравенство

$$|G(p)y(t) - r(t)| \leq \rho^{-1} C_v \quad (2.12)$$

примет вид целевого неравенства

$$\varphi(t, \hat{\tau}) > 0, \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(t, \hat{\tau}) = \rho^{-1} C_v - & |[a(p, \hat{\tau}) - a(p, \tau)]y + \\ & + [b(p, \tau) - b(p, \hat{\tau})]u + v(t, \xi)|. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Таким образом, приходим к системе рекуррентных целевых неравенств для определения оценки  $\hat{\tau}$ . Фиксация какого-либо алгоритма, доставляющего такие оценки, замыкает систему управления (2.1), (2.10), и остается исследовать способность полученной управляемой системы обеспечивать выполнение поставленной ЦУ.

Такое исследование мы проведем в предположении, когда коэффициенты уравнения (2.1) зависят от  $\tau$  линейно. (Это условие заведомо выполнено, если в качестве набора существенных параметров выбраны неизвестные коэффициенты в уравнении (2.1).) При таком предположении можем записать

$$\begin{aligned} \Phi(t)^*[\tau - \hat{\tau}] = & \\ = \sum_i' [a_i(\hat{\tau}) - a_i(\tau)] p^i y + \sum_j' [b_j(\tau) - b_j(\hat{\tau})] p^j u, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где штрих означает, что при суммировании учитываются слагаемые, которые зависят от векторов  $\tau$ ,  $\hat{\tau}$ . Вектор  $\Phi(t)$  в каждый момент времени  $t$  определяется значениями величин  $\{y(t), \dots, p^{r-1}y(t), u(t), \dots, p^{s-1}u(t)\}$ , входящих в сенсор, и таким образом, известен.

Функция (2.14) в этих обозначениях запишется в виде

$$\varphi(t, \hat{\tau}) = \rho^{-1} C_v - |\Phi(t)^*(\tau - \hat{\tau}) + v(t, \xi)|. \quad (2.16)$$

Итак, задача синтеза адаптивной управляемой системы свелась к нахождению решений  $\hat{\tau}$  рекуррентных целевых

неравенств (2.13), (2.16). Эти неравенства разрешимы при всех  $t$  в «усиленном» смысле, как это следует из (2.16), (2.3), если принять  $\hat{\tau} = \tau$ , причем функция  $\varphi(t, \hat{\tau})$  выпукла по  $\hat{\tau}$  и ее значения известны в каждый момент времени  $t$ : формула  $\varphi(t, \hat{\tau}) = \rho^{-1}C_v - |G(p)y(t) - r(t)|$ , получаемая в силу (2.16), (2.12), выражает  $\varphi(t, \hat{\tau})$  через сенсор, если принять, что величина  $y^{(r)}(t)$  также доступна измерению в момент времени  $t$ .

Для построения алгоритма подстройки  $\hat{\tau} = \tau(t)$  можно воспользоваться алгоритмом (2.1.55). В принятых обозначениях запишем его в виде

$$\hat{\tau}(t_{j+1}) = P_T [\hat{\tau}(t_j) + \kappa \theta(t_{j+1}) \Phi(t_{j+1}) \eta(t_{j+1}) |\Phi(t_{j+1})|^{-2}], \quad (2.17)$$

$$\eta(t_{j+1}) = d^r y(t_{j+1})/dt^r - \Phi(t_{j+1}) * \hat{\tau}(t_j) - \varphi(t_{j+1}), \quad (2.18)$$

$$j = 0, 1, \dots,$$

$$\theta(t_{j+1}) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\eta(t_{j+1})| < \rho^{-1}C_v, \\ 1, & \text{если } |\eta(t_{j+1})| \geq \rho^{-1}C_v. \end{cases} \quad (2.19)$$

Здесь  $P_T$  — проектор на множество  $T$ , которое будем считать выпуклым;  $t_{j+1}$  — первый момент времени, следующий за  $t_j + |\Phi(t_j)| + \delta_j$ ,  $\delta_j = \max_{k \leq j} |t_k - t_{k-1}|$ , когда впервые нарушается неравенство  $\varphi[t, \hat{\tau}(t_j)] > 0$ ;  $d^r y(t_{j+1} - 0)/dt^r = \lim_{e \rightarrow 0} d^r y(t_{j+1} - e)/dt^r$ ;  $\kappa$  — параметр алгоритма,  $0 < \kappa < 2$ ;  $\rho$  — уровень оптимальности из (2.11),  $0 < \rho < 1$ ; вектор  $\Phi(t)$  определяется соотношением (2.15):

$$\varphi(t) = - \sum_i'' a_i p^i y(t) + \sum_j'' b_j p^j u(t), \quad (2.20)$$

где штрихи означают, что суммирование ведется по тем слагаемым, в которых  $a_i, b_j$  от  $\tau$  не зависят.

Алгоритм (2.17) — (2.19) определяет  $\hat{\tau}(t)$  как кусочно-постоянную функцию времени, причем длина интервалов постоянства с возрастанием времени не убывает до нуля. Значения  $\hat{\tau}(t_j)$  при этом оказываются выражеными через доступные измерению величины, и, таким образом, описанная процедура подстройки параметров может быть принята в качестве алгоритма адаптации. Применение теоремы 2.1.8. позволяет получить следующий результат.

**Теорема 6.2.1.** Предположим, что выполнены условия:

1. Полином  $G(\lambda)$ , задающий эталонное уравнение (2.4), гурвицев. Множество  $T$  замкнуто и выпукло, и известен проектор  $P_T$  на это множество. Кроме того, для любого  $\tau \in T$  определяемые формулами (2.7) функции  $\alpha_i(\tau)$ ,  $\beta_i(\tau)$  имеют смысл, причем полином  $\alpha(\lambda, \tau)$  гурвицев и при любом вещественном  $\omega$  и произвольном  $\tau \in T$  выполняется неравенство

$$[\omega^{2r} - 1 + (\omega^{2s} - 1)] |W(i\omega)|^2 |W_1(i\omega, \tau)|^2 (\omega^2 - 1)^{-1} < \delta. \quad (2.21)$$

Здесь  $W_1(\lambda) = \left(1 + \sum_{i=0}^n G_i \lambda^i\right)^{-1}$  — передаточная функция эталонного уравнения (2.4),  $W(\lambda, \tau) = \beta(\lambda, \tau)/\alpha(\lambda, \tau)$  — передаточная функция регулятора (2.6) и  $\delta$  — положительное число.

2. Помеха  $v(t, \xi)$  удовлетворяет неравенству (2.3) с постоянной  $C_v$ , не зависящей от  $\xi \in \Xi$ , а задающее воздействие  $r(t)$  в (2.4) удовлетворяет (2.9).

3. Сенсор, т. е. набор доступных измерению величин, совпадает с набором  $\{y, \dots, p^r y, u, \dots, p^s u, r(t)\}$ .

4. Параметр  $\kappa$  в (2.17) выбран из условия  $0 < \kappa < 2(1 + 2\rho)^{-1}$ .

Тогда алгоритм (2.17) — (2.18) — конечно-сходящийся независимо от выбора начальной подстройки  $\tau(t_0)$ , а управляющая система (2.1), (2.12), (2.17) является адаптивной в классе  $\Xi = T \times \{\xi\}$  по отношению к ОУ (2.11).

### § 6.3. Синтез управляющей системы с помощью вырожденной функции Ляпунова

Для ОУ, устойчивых по управлению, существуют простые способы синтеза обратных связей, обеспечивающие диссипативность системы управления. Рассмотрим один из них, основанный на введении вырожденной функции Ляпунова.

**6.3.1°. Постановка задачи.** В фазовом пространстве ОУ (2.1) зададимся линейным устойчивым многообразием

$$\sum_{j=0}^{r-1} G_j p^j y(t) = 0, \quad G_{r-1} = 1, \quad p = \frac{d}{dt}. \quad (3.4)$$

Устойчивость этого многообразия означает, что полином

$$G(\lambda) = \sum_{j=0}^{r-1} G_j \lambda^j \quad (3.2)$$

является гурвицевым. Зададимся ЦУ, состоящей в попадании всех фазовых траекторий системы (2.1) на многообразие (3.1) или некоторую его окрестность. Нетрудно видеть, что выполнение этого условия обеспечивает равномерную во времени ограниченность выходов ОУ и управляющих воздействий.

Итак, рассмотрим функцию

$$S(t) = \sum_{j=0}^{r-1} G_j p^j y(t) \quad (3.3)$$

и поставим задачу: синтезировать управления, для которых бы функция

$$V(\mathcal{Y}) = |S(t)|^2 \quad (3.4)$$

убывала либо, во всяком случае, была равномерно по  $t$  ограничена. Здесь

$$\mathcal{Y} = \text{col}(p^{r-1}y, \dots, y). \quad (3.5)$$

Как обычно, о векторе  $\tau$  существенных параметров известно лишь, что  $\tau \subset T$ . Предполагается, что вектор (3.5), его производная по  $t$  и управлений входят в сенсор и могут быть использованы при синтезе обратных связей. Помехи  $v(t, \xi)$  при  $\xi \in \Sigma'$  предполагаются удовлетворяющими условию (1.3).

В § 6.1 говорилось о возможности использования функций Ляпунова для определения структуры управляющей системы. Настоящий параграф является уточнением соображений, изложенных в п. 6.1.3° на случай, когда функция  $V(\mathcal{Y})$  может вырождаться (обращаться в нуль) не только при  $\mathcal{Y} = 0$ .

Прежде чем переходить к адаптивному варианту задачи управления, изучим возможность синтеза линейного регулятора при известном векторе  $\tau$ .

**6.3.2°. Синтез обратных связей и разрешимость задачи управления.** При неконтролируемых помехах  $v(t, \xi)$  обеспечить удержание вектора  $\mathcal{Y}(t)$  на многообразии (3.1) принципиально невозможно. Поэтому зададимся усло-

вием попадания в  $C_s$ -окрестность этого многообразия, точнее, в качестве ЦУ поставим требование обеспечить неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^{r-1} G_j p^j y(t) \right| < C_s. \quad (3.6)$$

Обратим внимание на то, что условия (3.6) и (2.12) (при  $r(t) \equiv 0$ ,  $v(t, \xi) \equiv 0$ ) имеют лишь внешнее сходство: (3.6) определяет многообразие в пространстве  $\{\mathcal{Y}\}$ , тогда как (2.12) представляет собой дифференциальное неравенство (оно включает старшую производную  $y^{(r)}(t)$  выходного процесса). Постоянная  $C_s$  в (3.6) определяет допустимое отклонение от многообразия (3.1).

Дифференцируя функции (3.4), (3.3) по  $t$  в силу уравнения (2.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (d/dt) |S(t)|^2 + \rho |S|^2 &= S(t) \left[ \sum_{j=0}^{r-1} G_{j-1} + \rho G_j - a_j(\tau) \right] p^j y + \\ &+ \sum_{i=0}^s b_i(\tau) p^i u(t) + S(t) v(t, \xi), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\rho$  — произвольное положительное число,  $G_{-1} = 0$ . Если управление  $u(t)$  выбирать из условия

$$b(p, \tau) u = - \sum_{j=0}^{r-1} [G_{j-1} + \rho G_j - a_j(\tau)] p^j y(t), \quad (3.8)$$

то (3.7) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2} dV/dt \leq -\rho V + |S(t)| C_v, \quad V = S^2,$$

или

$$d |S(t)| / dt \leq -\rho |S(t)| + C_v, \quad (3.9)$$

откуда элементарно выводится неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |S(t)| \leq \rho^{-1} C_v, \quad (3.40)$$

т. е. обеспечивается попадание в многообразие (3.6) при  $C_s = \rho^{-1} C_v$ . Поскольку величина  $\rho$  может быть выбрана сколь угодно большой, то можно обеспечить попадание траектории  $\mathcal{Y}(t)$  в сколь угодно малую окрестность много-

гообразия (3.1). Следует отметить, что увеличение  $\rho$  ведет, в силу (3.8), к увеличению коэффициентов обратной связи.

Нетрудно убедиться, что выполнение (3.10) в силу гурвицевости полинома  $G(\lambda)$  обеспечивает диссипативность процесса  $\mathcal{Y}(t)$ , а в силу устойчивости ОУ (2.1) по управлению и равномерную ограниченность по  $t$  управляющих воздействий.

Регулятор (3.8) можно записать в виде (2.6), где

$$\begin{aligned}\alpha_j(\tau) &= b_s^{-1} b_j(\tau), & j = 0, \dots, s-1, \\ \beta_j(\tau) &= -b_s^{-1} [G_{j-1} + \rho G_j - a_j(\tau)], & j = 0, \dots, r-1.\end{aligned}\quad (3.11)$$

**6.3.3°. Синтез адаптивного регулятора.** В случае неизвестного значения вектора  $\tau$  существенных параметров управление  $u(t)$  будем формировать с помощью соотношения

$$\alpha(p, \hat{\tau}(t)) u = \beta(p, \hat{\tau}(t))' y, \quad (3.12)$$

где  $\hat{\tau}(t)$  — оценки вектора  $\tau$ , коэффициенты полиномов  $\alpha(\lambda, \tau)$ ,  $\beta(\lambda, \tau)$  вычисляются по формулам (3.11).

Если в (3.7) использовать управление, полученное в силу (3.12), то вместо (3.9) получим

$$\frac{1}{2} dV/dt = -\rho V + S(t) \Phi(t)^* [\tau - \hat{\tau}(t)] + S(t) v(t, \xi), \quad (3.13)$$

где вектор  $\Phi(t)$  определяется соотношением (2.15) (предполагаем вновь, что зависимость коэффициентов ОУ (2.1) от вектора  $\tau$  — линейная).

Введем функцию

$$\varphi(t, \hat{\tau}) = -S(t) \Phi(t)^* [\tau - \hat{\tau}] - S(t) v(t) + \rho V(t). \quad (3.14)$$

Из (3.13) следует, что целевые неравенства (2.13) для функции (3.14) разрешимы в множестве фазового пространства  $\{\mathcal{Y}\}$ , определяемого неравенством

$$|S(t)| > C_v/\rho', \quad \rho' < \rho, \quad (3.15)$$

и решением, в частности, является вектор  $\hat{\tau} = \tau$ . В силу (3.13) выполняется равенство  $u(t, \hat{\tau}) = -\frac{1}{2} dV/dt$ , т. е. функция  $\varphi(t, \hat{\tau})$  выражается через сенсор. Если нашлась функция  $\hat{\tau}(t)$  такая, что, начиная с некоторого момента времени выполняется  $\varphi(t, \hat{\tau}(t)) > 0$ , то это означает выполне-

ние неравенства (3.10). Нужные оценки  $\hat{\tau}(t)$  могут быть построены с помощью незначительной модификации алгоритма теоремы 2.1.7.

Определим  $\hat{\tau}(t)$  в виде кусочно-постоянной функции согласно следующему условию: в начальный момент  $\hat{\tau}(t_0)$  — произвольный вектор. Пусть  $\{t_j\}$  — временная последовательность, определяемая условиями:  $t_{j+1}$  — первый момент времени, следующий за  $t_j + \delta$ ,  $\delta > 0$ , когда нарушается неравенство (2.13), (3.14) в множестве (3.15). Тогда  $\hat{\tau}(t) = \hat{\tau}(t_j)$  при  $t_j \leq t < t_{j+1}$ ; при этом

$$\hat{\tau}(t_{j+1}) = P_T [\hat{\tau}(t_j) + \theta(t_{j+1}) \times \Phi(t_{j+1}) S(t_{j+1})]. \quad (3.16)$$

Здесь  $P_T$  — проектор на множество  $T$ , которое предполагаем выпуклым,

$$\theta(t_{j+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } |S(t_{j+1})| \geq C_v [\rho']^{-1} \text{ и} \\ d |S(t)|/dt |_{t=t_{j+1}-0} > -\varepsilon |\Phi(t_{j+1})|, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} v_j &= (1 + v_j)^{-1} + \delta_j d |S|/dt |_{t=t_{j+1}-0} |\Phi(t_{j+1})|^{-1}, \\ v_j &= 1 + \sum_{n=1}^j \theta(t_n) = v_{j-1} + \theta(t_j); \end{aligned} \quad (3.18)$$

$\delta_j$  — произвольные числа из интервала  $[0, 1]$ ,  $\varepsilon$  — параметр алгоритма,  $\varepsilon > 0$ . В алгоритме (3.16) — (3.18)

$$dV/dt |_{t=t_{j+1}-0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} dV(t_{j+1} - \varepsilon)/dt,$$

т. е. левый предел (в момент  $t$  старшая производная  $d^r y/dt^r$ , а с ней и  $dV/dt$  могут испытывать разрыв первого рода).

Заметим, что при выполнении неравенства (3.15) неравенство

$$d |S|/dt |_{t=t_{j+1}-0} > -\varepsilon |\Phi(t_{j+1})| \quad (3.19)$$

может выполняться лишь при  $|\Phi(t_{j+1})| \neq 0$ . Действительно, при  $|\Phi(t_{j+1})| = 0$  получаем  $d |S|/dt \leq -2C_v (\rho - \rho') (\rho')^{-2}$ , тогда как (3.19) при этом имеет вид  $d |S|/dt > 0$ , что противоречиво. Поэтому при  $\theta(t) = 1$  выполняется неравенство  $|\Phi(t)| \neq 0$  и выражение для  $x_j$  имеет смысл в моменты  $\theta(t_{j+1}) = 1$ .

**Теорема 6.3.1.** *Предположим, что [выполняются условия]:*

1. Множество  $T$  — ограниченное, выпуклое, замкнутое, и известен проектор  $P_T$  на множество  $T$ . Для каждого  $\tau \in T$  объект (2.1) устойчив по управлению и старший коэффициент  $b_s$  полиномов  $b(\lambda, \tau)$  не зависит от  $\tau$  и отличен от нуля.

2. Коэффициенты полиномов  $a(\lambda, \tau)$ ,  $b(\lambda, \tau)$  линейно зависят от параметра  $\tau$ .

3. Полином (3.2) гурвицев.

4. Помеха  $v(t, \xi)$  при  $\xi \in \Sigma'$  удовлетворяет условию (2.3).

5. Параметр  $\rho'$  в алгоритме (3.16) — (3.19) удовлетворяет условию  $0 < \rho' < \rho$ , где  $\rho$  из (3.10).

6. Величины  $(r^r y, \dots, y, r^s y, \dots, u)$  входят в сенсор.

Тогда управляющая система, определяемая регулятором (3.12), (3.11) с подстраиваемыми параметрами и алгоритмом подстройки параметров (3.16) — (3.19), является адаптивной в классе  $\Xi = T \times \Sigma'$  по отношению к ЦУ (3.10) независимо от выбора начальной подстройки  $\tau(t_0) \in T$  и начального состояния в системе управления. При этом алгоритм адаптации (3.16) — (3.19) является конечно-сходящимся, т. е. определяемая им кусочно-постоянная функция  $\hat{\tau}(t)$  имеет предел

$$\hat{\tau}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\tau}(t) \quad (3.20)$$

и этот предел достигается за конечное время.

#### § 6.4. Адаптивное управление линейным объектом в случае, когда производные выхода недоступны измерению

**6.4.1. Постановка задачи.** В предыдущих параграфах задача адаптивной стабилизации решалась в предположении, что сенсор содержит достаточно высокие производные по времени  $t$  от выходов и управлений. Покажем, как можно решать задачу адаптивного управления, когда некоторые из этих производных недоступны измерению. Для определенности ограничимся рассмотрением ОУ со скалярными входом и выходом

$$a(p, \xi) y = b(p, \xi) u + v(t, \xi), \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} a(\lambda, \xi) &= \lambda^r + \lambda^{r-1} a_1(\xi) + \dots + a_r(\xi), \\ b(\lambda, \xi) &= \lambda^{r-1} b_1(\xi) + \dots + b_r(\xi); \end{aligned} \quad (4.2)$$

$\xi$  — вариант,  $\xi \in \Xi$ , и помеха  $v(t, \xi)$  удовлетворяет условию (2.3) независимо от варианта  $\xi$ . Предполагается, что при каждом  $\xi \in \Xi$  полиномы  $a(\lambda, \xi)$  и  $b(\lambda, \xi)$  не имеют общих корней в замкнутой правой полуплоскости, т. е. рассматривается множество стабилизируемых ОУ. Дополнительные ограничения на множество  $\{\xi\}$  будут сформулированы позднее.

Требуется синтезировать обратную связь вида

$$u(t) = \mathcal{U}(t, \sigma(t)), \quad (4.3)$$

обеспечивающую выполнение неравенства

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (|u(t)| + |y(t)|) < \infty. \quad (4.4)$$

Здесь  $\sigma(t)$  — сенсор (набор данных измерения, доступных к моменту времени  $t$ ). Будем предполагать, что  $\sigma(t) = \{y(s), u(s), s \leq t\}$ , т. е. обратная связь не должна содержать производных по  $t$  от выхода  $y(t)$  и управления  $u(t)$ .

**6.4.2°. Синтез регулятора при известных коэффициентах объекта.** Если вариант  $\xi$  известен, то закон вида (4.3) может быть синтезирован следующим способом. Предположим на некоторое время, что сенсор  $\sigma(t)$  включает производные функций  $y(t)$ ,  $u(t)$  до порядка  $r$ . Зададимся гурвицевым полиномом  $g(\lambda)$  степени  $2r$ :

$$g(\lambda) = \lambda^{2r} + \lambda^{2r-1}g_1 + \dots + g_{2r}, \quad (4.5)$$

который делится на наибольший общий делитель полиномов  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  (зависимость от  $\xi$  в этом пункте не указывается). Определим полиномы  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  степени  $r$  из соотношения

$$a(\lambda)\alpha(\lambda) - b(\lambda)\beta(\lambda) = g(\lambda), \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) = \lambda^r + \lambda^{r-1}\alpha_1 + \dots + \alpha_r, \quad \beta(\lambda) = \\ = \lambda^r\beta_0 + \dots + \beta_r. \end{aligned} \quad (4.7)$$

В силу леммы 3.1.1 полиномы  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  перечисленными условиями определяются однозначно (и могут быть найдены из линейной системы, получаемой из (4.6) приравниванием выражений при одинаковых степенях  $\lambda$ ). Регулятор

$$\alpha(p)u = \beta(p)y \quad (4.8)$$

является стабилизирующим для ОУ (4.1), поскольку характеристический полином системы управления (4.1), (4.8) совпадает с гурвицевым полиномом (4.6).

Управление  $u(t)$ , удовлетворяющее (4.8), можно формировать и без измерения производных. Действительно, пусть вектор  $U(t)$  определяется уравнением

$$dU(t)/dt = AU(t) + By(t), \quad (4.9)$$

где

$$A = \begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{r-1} & -a_r \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} k_r \\ k_{r-1} \\ \vdots \\ k_1 \end{vmatrix}, \quad (4.10)$$

коэффициенты  $k_i$  определяются рекуррентными соотношениями

$$k_1 = \beta_1 - \alpha_1 \beta_0, \quad k_{s+1} = (\beta_{s+1} - \alpha_{s+1} \beta_0) - \sum_{i=1}^s k_{s-i+1} d_i, \quad s = 1, \dots, r-1.$$

Обозначим  $d = \text{col}(0, 0, \dots, 1)$ . Тогда функция

$$u(t) = \beta_0 y(t) + d^* U(t) \quad (4.11)$$

удовлетворяет (4.8) (см. п. 3.4.1°) и, следовательно, обеспечивает ЦУ (4.4). Для определения управления  $u_t$  по алгоритму (4.9) — (4.11) достаточно знать только  $y_t$ .

**6.4.3°. Синтез адаптивной управляемой системы.** Если вариант  $\xi$  неизвестен, то воспользоваться законом управления (4.11) нельзя, поскольку теперь в уравнении (4.9) матрица  $A$  и вектор  $B$  зависят от  $\xi$ . Закон (4.11) в этом случае зависит от конечного набора существенных параметров, который обозначим через  $\tau$ . Покажем, как вводится в (4.11) вектор  $\tau$ .

Зададимся произвольным гурвицевым полиномом  $G(\lambda)$  степени  $r$ :

$$G(\lambda) = \lambda^r + \lambda^{r-1} G_1 + \dots + G_r \quad (4.12)$$

с простыми корнями  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ .

Выполним разложение на простейшие дроби функций  $a(\lambda, \xi) G(\lambda)^{-1}$  и  $b(\lambda, \xi) G(\lambda)^{-1}$ :

$$a(\lambda, \xi) G(\lambda)^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^r A_i(\xi) (\lambda - \lambda_i)^{-1}, \quad (4.13)$$

$$b(\lambda, \xi) G(\lambda)^{-1} = \sum_{i=1}^r B_i(\xi) (\lambda - \lambda_i)^{-1}.$$

В качестве вектора  $\tau$  существенных параметров выберем

$$\tau = \tau(\xi) = \text{col}(A_1(\xi), \dots, A_r(\xi), B_1(\xi), \dots, B_r(\xi)) \quad (4.14)$$

(для простоты предполагаем, что все величины  $A_i, B_i$  зависят от  $\xi$ ). Из соотношений (4.13) можно определить коэффициенты полиномов (4.2) как функции вектора  $\tau$ . Краткости ради так найденные величины будем обозначать через  $\hat{a}_i(\tau), \hat{b}_i(\tau)$ . У определяемых соотношением (4.6) полиномов  $\alpha(\lambda, \tau), \beta(\lambda, \tau)$  коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$  будут теперь функциями  $\tau$ ,  $\alpha_i = \alpha_i(\tau), \beta_i = \beta_i(\tau)$ . Следовательно, матрица  $A$  и вектор  $B$  в (4.9) также зависят от  $\tau$ , а потому  $U(t) = U(t, \tau)$ . Закон (4.11) с учетом зависимости от вектора существенных параметров запишется так:

$$u(t) = \beta_r(\tau)y(t) + d^*U(t, \tau). \quad (4.15)$$

В адаптивном варианте задачи, как обычно, вместо регулятора (4.15) используется регулятор

$$u(t) = \beta_r[\hat{\tau}(t)]y(t) + d^*U[t, \hat{\tau}(t)], \quad (4.16)$$

где  $\hat{\tau}(t)$  — подходящим образом выбираемые оценки неизвестного вектора  $\tau$ . Алгоритм подстройки параметров  $\hat{\tau}(t)$  замыкает систему (4.1), (4.16). Нужно еще побеспокоиться, чтобы алгоритм подстройки выражался через сенсор  $\sigma(t)$  и, разумеется, чтобы выполнялась поставленная ЦУ (в данном случае (4.4)).

**6.4.4°. Алгоритм адаптации.** Прежде чем формулировать алгоритм адаптации, приведем важное свойство вектора (4.14). Введем функции  $\tilde{u}_i(t), \tilde{y}_i(t)$  с помощью уравнений

$$\frac{d\tilde{u}_i}{dt} - \lambda_i \tilde{u}_i = u(t), \quad \frac{d\tilde{y}_i}{dt} - \lambda_i \tilde{y}_i = y(t), \quad i = 1, \dots, r, \quad (4.17)$$

где  $\lambda_i$  — корни полинома (4.12). Соотношения (4.17) определяют устойчивые фильтры, на входы которых поступают соответственно  $u(t)$ ,  $y(t)$ .

Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = y(t) + \sum_{i=1}^r A_i(\xi) \tilde{y}_i(t) - \sum_{i=1}^r B_i(\xi) \tilde{u}_i(t) - \tilde{v}(t), \quad (4.18)$$

где  $\tilde{v}(t)$  определяется уравнением  $G(p)\tilde{v}(t) = v(t)$ . Для  $\tilde{v}(t)$  справедлива, в силу гурвицности  $G(\lambda)$  и (2.3), оценка

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{v}(t)| \leq C_v C_G \stackrel{\text{def}}{=} C_{\tilde{v}}; \quad (4.19)$$

постоянная  $C_G$  определяется полиномом  $G(\lambda)$ .

**Лемма 6.4.1.** Для любых функций  $y(t)$ ,  $u(t)$ ,  $v(t)$ , связанных соотношением (4.1), выполняется  $G(p)\psi(t) \equiv 0$ .

Из леммы 6.4.1 следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$ . Таким образом, для вектора  $\tau(\xi)$  имеет место равенство

$$y(t) = \Phi(t)^* \tau(\xi) + \tilde{v}(t), \quad (4.20)$$

где вектор

$$\Phi(t) = \text{col}(-\tilde{y}_1(t), \dots, -\tilde{y}_r(t), \tilde{u}_1(t), \dots, \tilde{u}_r(t)) \quad (4.21)$$

выражается формулами (4.17) через сенсор  $\sigma(t)$ , а для  $\tilde{v}(t)$  справедлива оценка (4.19). Мы пришли к стандартному представлению для выхода ОУ через вектор существенных параметров. Соотношение (4.20) порождает рекуррентную систему целевых неравенств

$$|\eta(t, \hat{\tau})| < \rho^{-1} C_v, \quad \eta(t, \hat{\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} y(t) - \Phi^*(t) \hat{\tau} \quad (4.22)$$

относительно вектора  $\hat{\tau}$ . Здесь  $\rho$  — произвольное число из интервала  $(0, 1)$ , обеспечивающее разрешимость неравенств (4.22) при достаточно больших  $t$ .

Неравенства типа (4.22) изучались в § 2.1. Алгоритм (2.1.55) в принятых обозначениях может быть сформулирован в следующем виде: пусть  $\hat{\tau}(t_0)$  — произвольный вектор и  $\{t_j\}$ ,  $j = 0, 1, \dots$  — последовательность моментов времени, в которой  $t_{j+1}$  — первый момент, следующий за  $t_j + \delta$ ,  $\delta > 0$ , при котором впервые нарушается неравенство

$$|\eta[t, \hat{\tau}(t_j)]| \leq \rho^{-1} G_{\tilde{v}} + \epsilon |\Phi(t)|; \quad (4.23)$$

$\varepsilon$  — параметр алгоритма. Оценки  $\hat{\tau}(t)$  изменяются лишь в моменты времени  $\{t_j\}$  по следующему правилу:

$$\hat{\tau}(t_{j+1}) = P_T \{ \hat{\tau}(t_j) + \kappa \eta [t_{j+1}, \hat{\tau}(t_j)] \Phi(t_{j+1}) | \Phi(t_{j+1}) |^{-2} \}, \quad (4.24)$$

где  $P_T$  — проектор на множество  $T = \{\tau\}$  и  $\kappa$  — параметр алгоритма, выбираемый из условия  $0 < \kappa < 2(1 - \rho)$ ;  $\eta(t, \hat{\tau})$  — величина из (4.22).

Первая серия условий теоремы 2.4.8 будет выполнена, если принять  $\varepsilon_{1*} = C_v$ ,  $\varepsilon_{2*} = 0$ ,  $\varepsilon_1 = \rho^{-1}C_v$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon$ . Поэтому алгоритм (4.24) является конечно-сходящимся и определяет кусочно-постоянную вектор-функцию  $\hat{\tau}(t)$ , у которой число скачков конечно (в соответствии с оценкой (2.4.59) это число оценивается сверху величиной  $|\tau - \hat{\tau}(t_0)|^2 [\varepsilon^2 \kappa (2 - \kappa)]^{-1}$ ). Предельное значение  $\hat{\tau}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\tau}(t)$  функции обеспечивает выполнение неравенств (4.23) при достаточно больших  $t$  и при  $\hat{\tau}(t_j) = \hat{\tau}_\infty$ . Алгоритм (4.24) выражает  $\hat{\tau}(t_{j+1})$  через значения  $y(t)$ ,  $u(t)$  до момента времени  $t_{j+1}$ , т. е. через сенсор  $\sigma(t_{j+1})$ .

**Теорема 6.4.1.** *Предположим, что выполнены условия:*

1. *Множество  $\Xi$  вариантов таково, что ОУ (4.1) — (4.2) при  $\xi \in \Xi$  стабилизируемые, помеха  $v(t, \xi)$  удовлетворяет условию (2.3), а множество  $T = \tau(\Xi)$ , определяемое отображением (4.14), (4.13), выпукло, замкнуто, причем известен проектор  $P_T$  на это множество.*

2. *Параметр  $\kappa$  в алгоритме (4.24) удовлетворяет неравенству  $0 < \kappa < 2(1 - \rho)$ , а параметр  $\varepsilon$  из целевого неравенства (4.23) выбран достаточно малым \*).*

*Тогда управляющая система, определяемая соотношениями (4.16), (4.24), аддативна в классе  $\Xi$  по отношению к ЦУ (4.4).*

Утверждение теоремы станет почти очевидным, если заметить, что при достаточно больших  $t$  система управления (4.1), (4.16), (4.24) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} a(p, \hat{\tau}_\infty) y &= b(p, \hat{\tau}_\infty) u + G(p) \eta(t, \hat{\tau}_\infty), \\ \alpha(p, \hat{\tau}_\infty) u &= \beta(p, \hat{\tau}_\infty) y, \\ \hat{\tau}(t) &= \hat{\tau}_\infty, \end{aligned} \quad (4.25)$$

\*). Эта достаточная малость может быть оценена через характеристики множества  $T$ , но эти оценки громоздки и не отражают сути дела, а потому не приводятся.

где для  $\eta(t, \hat{\tau}_\alpha)$  справедлива оценка (4.23). Если пренебречь в «возмущении»  $G(p)\eta(t, \hat{\tau}_\alpha)$  членом с  $\varepsilon$ , то выполнение (4.4) для (4.25) немедленно следует из гурвицевости характеристического полинома (4.6) системы управления (4.25). Член с  $\varepsilon$  в  $G(p)\eta(t, \hat{\tau}_\alpha)$  можно интерпретировать как параметрическое возмущение коэффициентов полиномов  $a(\lambda, \hat{\tau}_\alpha), b(\lambda, \hat{\tau}_\alpha)$ . Поскольку система (4.25) груба по отношению к таким возмущениям, то при достаточно малом  $\varepsilon$  условие (4.4) будет выполняться. Таковы наводящие соображения; доказательство теоремы приведено в п. 6.Д.4°.

## § 6.Д. Доказательства лемм и теорем

**6.Д.1°. Доказательство теоремы 6.2.1.** Предположим, что

$$\sup_t |\Phi(t)| = C_\Phi < \infty. \quad (\text{Д.1})$$

Убедимся, что тогда выполнена вторая серия условий теоремы 2.1.8. Действительно, в условиях теоремы 6.2.1 можно принять  $\varepsilon_{1*} = C_v$ ,  $\varepsilon_1 = \rho^{-1}C_v$ ,  $\varepsilon_{2*} = 0$ . Тогда неравенства (2.1.54) являются следствием условий теоремы. В силу теоремы 2.1.8 алгоритм адаптации (2.17) — (2.18) является конечно-сходящимся, т.е., начиная с некоторого конечного момента времени, выполняется неравенство  $|\eta(t)| = \rho^{-1}C_v$ , или  $|d^r y/dt^r y(t) - \Phi(t)^* \hat{\tau}(t) - \varphi(t)| < \rho^{-1}C_v$ . Учитывая (2.15), (2.19), убеждаемся, что это неравенство совпадает с (2.12), откуда следует, что выполнена ЦУ (2.11).

Убедимся в выполнении неравенств (Д.1). При каждой коррекции алгоритма (2.17) — (2.19) происходит уменьшение величины  $|\hat{\tau}(t_j) - \tau|$ . Зададимся произвольным числом  $\varepsilon_2 > 0$  и рассмотрим неравенство

$$|\Phi(t) * [\tau - \hat{\tau}(t)] + v(t, \xi)| < \rho^{-1}C_v + \varepsilon_2 |\Phi(t)|, \quad (\text{Д.2})$$

где  $\hat{\tau}(t)$  — кусочно-постоянная функция, формируемая алгоритмом (2.17) — (2.19). Алгоритм этот для рекуррентных целевых неравенств (Д.2) является конечно-решающим (в смысле определения 2.1.1). Действительно, при нарушении неравенства (Д.2) автоматически нарушается и неравенство (2.12) и в момент времени  $t_{j+1}$  (если  $t_{j+1} \geq t_j + \delta_j + |\Phi(t_j)|$ ) происходит коррекция вектора

$\hat{\tau}(t)$ . Но таких коррекций с нарушением (Д.2) не может быть бесконечно много — это приводит к противоречию с утверждением теоремы 2.1.8, поскольку теперь оказывается выполненной первая серия ее условий.

Предположим теперь, что (Д.1) не выполнено. Тогда последовательность  $\{t_j\}$  бесконечна и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |t_{j+1} - t_j| = \infty.$$

Покажем, что существование сколь угодно больших промежутков постоянства функций  $\hat{\tau}(t)$  приводит к выполнению (Д.1). Рассмотрим некоторый интервал  $(t_j, t_{j+1})$  при достаточно большом  $j$ , на котором  $\hat{\tau}(t) = \tau_j$ . Систему (2.1), (2.10) при  $t \in (t_j, t_{j+1})$  можно представить в виде

$$dx/dt = A(\tau_j)x + B\eta(t). \quad (\text{Д.3})$$

Здесь

$$x = \text{col}(p^{r-1}y, \dots, y, p^{s-1}u, \dots, u), \\ B = \text{col}(1, 0, \dots, 0),$$

$$A(\tau) = \begin{vmatrix} -C_{r-1} \dots -C_1 & -G_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_{r-1}(\tau) \dots & \beta_1(\tau) & \beta_0(\tau) - \alpha_{s-1}(\tau) \dots - \alpha_1(\tau) - \alpha_0(\tau) & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\eta(t) = r(t) + v(t, \xi) + \Phi(t)^* [\tau - \hat{\tau}_j], \quad (\text{Д.4})$$

причем в силу (Д.2) и (2.9) для  $\eta(t)$  выполняется неравенство

$$|\eta(t)| \leq \rho^{-1}C_v + \varepsilon_2 |\Phi(t)| + C_r \quad (\text{Д.5})$$

при сколь угодно малом  $\varepsilon_2$ . Введем теперь функцию

$$V(x) = x^* H x \quad (\text{Д.6})$$

с симметричной матрицей  $H$  и вычислим производную по  $t$  от этой функции в силу системы (Д.3). Имеем

$$dV[x(t)]/dt = x(t)^* [HA(\tau_j) + A(\tau_j)^* H]x(t) + \\ + 2x(t)^* B\eta(t). \quad (\text{Д.7})$$

Если при любом вещественном  $\omega$  и некотором  $\delta > 0$  выполняется неравенство

$$\| [A(\tau_j) - i\omega I_{s+r}]^{-1} B \| \leq \delta, \quad (\text{Д.8})$$

то в силу частотной теоремы 3.1.3 существует симметричная матрица  $H = H(\tau_j)$ , для которой выполняется неравенство

$$x^* [HA(\tau_j) + A(\tau_j)^* H] x + 2x^* HB\eta \leq -\|x\|^2 + \delta \|\eta\|^2. \quad (\text{Д.9})$$

Нетрудно убедиться, что (Д.8) является следствием неравенства (2.24). Выбирая в (Д.6) матрицу  $H = H(\tau_j)$  и используя (Д.9), (Д.5), преобразуем (Д.7) к виду

$$dV[x(t)]/dt \leq -\|x(t)\|^2 + 2\delta [C_r + \rho^{-1}C_v]^2 + 2\delta\varepsilon_2^2 \|\Phi(t)\|^2. \quad (\text{Д.10})$$

Поскольку все компоненты вектора  $\Phi(t)$  являются компонентами вектора  $x(t)$ , то для некоторой постоянной  $C_\Phi$  выполняется неравенство  $\|\Phi(t)\| \leq C_\Phi \|x(t)\|$ . Предполагаем величину  $\varepsilon_2$  выбранной столь малой, что справедливо неравенство  $\gamma = 1 - 2\delta\varepsilon_2^2 C_\Phi^2 > 0$ . Из (Д.10) выводим

$$dV[x(t)]/dt \leq -\gamma \|x(t)\|^2 + 2\delta (C_r + \rho^{-1}C_v)^2. \quad (\text{Д.11})$$

Так как полиномы  $G(\lambda)$  и  $\alpha(\lambda, \tau_j)$  гурвицевы, то матрица  $A(\tau_j)$  устойчива, а потому матрица  $H(\tau_j)$  — положительная. Обозначим через  $\lambda(\tau_j)$ ,  $\Lambda(\tau_j)$  ее наименьшее и наибольшее собственные значения; тогда из (Д.11) получим

$$\begin{aligned} \|x(t_{j+1})\|^2 &\leq \exp\{-\gamma\Lambda^{-1}(\tau_j)(t_{j+1} - t_j)\} \|x(t_j)\|^2 \times \\ &\times \Lambda(\tau_j) \lambda(\tau_j)^{-1} + 2\delta (C_r + \rho^{-1}C_v)^2 \Lambda(\tau_j) [\gamma\lambda(\tau_j)]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Д.12})$$

Так как  $|\tau_j - \tau| \leq |\tau(t_0) - \tau| \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_0$ , то

$$\inf_{\hat{\tau} \in T_0} \lambda(\hat{\tau}) = \lambda_0 > 0, \text{ где } T_0 = T \cap \{|\tau - \hat{\tau}| \leq \Delta_0\}.$$

Введем также  $\Lambda_0 = \sup_{\hat{\tau} \in T_0} \Lambda(\hat{\tau})$ . Если для некоторого  $j$  выполняется неравенство

$$(2\Lambda_0/\lambda_0) \exp\{-\gamma\Lambda_0^{-1}(t_{j+1} - t_j)\} < 1, \quad (\text{Д.13})$$

то значения  $|x(t_j)|$  равномерно по  $j$  ограничены. Действи-

тельно, из (Д.12) с учетом (Д.13) получаем

$$|x(t_{j+1})|^2 \leq |x(t_j)|^2/2 + C,$$

откуда  $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |x(t_j)|^2 \leq 2C$ . Это означает, что  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\Phi(t_j)|^2 \leq 2CC_\Phi < \infty$ , т. е. выполняется (Д.4). Теорема 6.2.1 доказана.

**6.Д.2°. Доказательство теоремы 6.3.1.** Убедимся в выполнении условий теоремы 2.1.7 для функции

$$\tilde{\varphi}(t, \hat{\tau}) = \varepsilon |\Phi(t)| |S(t)| + \varphi(t, \hat{\tau}),$$

где  $\varphi(t, \hat{\tau})$  имеет вид (3.14). В данном случае

$$\operatorname{grad}_{\hat{\tau}} \tilde{\varphi}(t, \hat{\tau}) = \operatorname{grad}_{\hat{\tau}} \varphi(t, \hat{\tau}) = \Phi(t) S(t)$$

и функция  $\tilde{\varphi}(t, \hat{\tau})$  удовлетворяет условию (2.1.45) со знаком равенства. Система условных неравенств

$$\tilde{\varphi}(t, \hat{\tau}) > 0 \quad (\text{Д.14})$$

разрешима с «запасом» при  $\tau = \hat{\tau} = \tau_*$  в множестве (3.15). Действительно, в силу (3.14) при  $\theta(t) = 1$  получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t, \tau) &\geq \varepsilon |\Phi(t) S(t)| + \varphi(t, \tau) \geq \\ &\geq \varepsilon |\Phi(t)| |S(t)| + |S(t)| (\rho |S(t)| - C_v) \geq \\ &\geq |S(t)| \left[ \varepsilon |\Phi(t)| + \frac{C_v (\rho - \rho')}{\rho'} \right] \geq C_v^2 (\rho - \rho') [\rho']^{-2} > 0, \end{aligned}$$

т. е. неравенство  $\tilde{\varphi}(t, \tau) > 0$  выполнено с «запасом». Предположение о разрешимости неравенства (Д.14) лишь при дополнительном предположении (3.15) никак не скаживается на доказательстве сходимости алгоритма теоремы 2.1.7, если переопределить пороговую функцию  $\theta_k$ , как это сделано в алгоритме (3.16) — (3.18). В этом случае алгоритм (3.16) — (3.18) в силу теоремы 2.1.7 будет конечно-сходящимся. Если  $t_*$  — время достижения предела (3.20), то при каждом  $t \geq t_*$  выполнено по крайней мере одно из неравенств

$$|S(t)| < C_v / \rho', \quad (\text{Д.15})$$

$$d|S(t)|/dt \leq -\varepsilon |\Phi(t)|. \quad (\text{Д.16})$$

Неравенство (Д.16) показывает, что в области (3.15) функция  $|S(t)|$  не возрастает. В действительности в области

(3.15)  $d |S(t)| / dt$  строго отрицательна. Покажем это. Если  $|\Phi(t)| > C_\Phi$ , где  $C_\Phi$  — некоторая постоянная, то это следует из (Д.16). Пусть  $|\Phi(t)| \leq C_\Phi$ . Тогда в предположении (3.15) из (3.13) выводим

$$\begin{aligned} -d |S(t)| / dt &\geq \rho |S(t)| - |\Phi(t)| |\tau - \hat{\tau}(t)| - C_v \geq \\ &\geq C_v (\rho - \rho') [\rho']^{-1} - C_\Phi |\tau - \hat{\tau}(t)| \geq \\ &\geq C_v (\rho - \rho') [\rho']^{-1} - C_\Phi |\tau - \hat{\tau}(t_0)|, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $d |S(t)| / dt \leq -\mu$ ,  $\mu > 0$  при достаточно малой  $C_\Phi$ . Полученное неравенство показывает, что

$$|S(t)| - |S(\tilde{t})| \leq \mu(t - \tilde{t}), \text{ или } |S(\tilde{t})| \geq \mu(t - \tilde{t}),$$

т. е. если в момент времени  $\tilde{t}$  неравенство (3.15) выполнено, то оно заведомо нарушится к моменту времени  $\tilde{t} + t'$ , где  $t' \geq S(\tilde{t})\mu^{-1}$ . Отсюда следует, что по крайней мере с этого момента выполняется неравенство (Д.15). Это и доказывает теорему 6.3.1, так как число  $\rho'$  может быть выбрано сколь угодно близким к  $\rho$ .

**6.Д.3°. Доказательство леммы 6.4.1.** Обозначим через  $G'_i(\lambda)$  полином  $G'_i(\lambda) = G(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{-1}$ . Тогда  $G(p)\tilde{u}_i = G_i(p)(p - \lambda_i)\tilde{u}_i = G'_i(p)u$  и, аналогично,  $G(p)\tilde{y}_i = G'_i(p)y(t)$ . Кроме того, из (4.13) следуют операторные равенства

$$\begin{aligned} a(p, \xi) &= G(p) + \sum_{i=1}^r A_i(\xi)G'_i(p), \\ b(p, \xi) &= \sum_{i=1}^r B_i(\xi)G'_i(p). \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, из формулы (4.18) получим

$$\begin{aligned} G(p)\psi(t) &= \left[ G(p) + \sum_{i=1}^r A_i(\xi)G'_i(p) \right] y(t) - \\ &- \sum_{i=1}^r B_i(\xi)G'_i(p)\varphi(t) - G(p)\tilde{v}(t) = \\ &= a(p, \xi)y(t) - b(p, \xi)u(t) - v(t) = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**6.Д.4°. Доказательство теоремы 6.4.1.** При достаточно больших  $t$ , когда алгоритм (4.24) уже сошелся, можем

считать, что в (4.23) выполняется  $\tau(t) = \hat{\tau}_\infty$ . Уравнение (4.16) тогда перепишется в виде

$$\alpha(p, \hat{\tau}_\infty)u = \beta(p, \hat{\tau}_\infty)y. \quad (\text{Д.17})$$

Соотношение (4.20) запишем в виде

$$y(t) = \Phi(t)^* \hat{\tau}_\infty + \Phi(t)^* [\tau(\xi) - \hat{\tau}_\infty] + \tilde{v}(t, \xi),$$

или, в силу леммы 6.4.1,

$$a(p, \hat{\tau}_\infty)y = b(p, \hat{\tau}_\infty)u + G(p)\eta(t, \hat{\tau}_\infty), \quad (\text{Д.18})$$

где  $\eta(t, \hat{\tau}_\infty)$  определяется формулой (4.22) и удовлетворяет неравенству (4.23) (при  $\hat{\tau}(t_j) = \hat{\tau}_\infty$ ).

Обозначим через  $g(\lambda, \hat{\tau}_\infty)$  полином степени  $2r$ :

$$g(\lambda, \hat{\tau}_\infty) = a(\lambda, \hat{\tau}_\infty)\alpha(\lambda, \hat{\tau}_\infty) - b(\lambda, \hat{\tau}_\infty)\beta(\lambda, \hat{\tau}_\infty). \quad (\text{Д.19})$$

По правилу выбора полиномов  $\alpha(\lambda, \hat{\tau}_\infty)$ ,  $\beta(\lambda, \hat{\tau}_\infty)$  полином (Д.19) гурвицев. Из соотношений (Д.17), (Д.18) непосредственно следуют соотношения

$$\begin{aligned} g(p, \hat{\tau}_\infty)y(t) &= \alpha(p, \hat{\tau}_\infty)G(p)\eta(t, \hat{\tau}_\infty), \\ g(p, \hat{\tau}_\infty)u(t) &= \beta(p, \hat{\tau}_\infty)G(p)\eta(t, \hat{\tau}_\infty). \end{aligned} \quad (\text{Д.20})$$

Здесь полиномы  $\alpha(\lambda, \hat{\tau}_\infty)$  и  $\beta(\lambda, \hat{\tau}_\infty)G(\lambda)$  имеют степень  $r$ . Сформулируем вспомогательное предложение.

**Лемма 6.Д.1.** *Если величины  $y(t)$  и  $\eta(t)$  связаны соотношением*

$$M(p)y = N(p)\eta, \quad (\text{Д.21})$$

где  $M(p)$  — гурвицев полином степени  $r$  и  $N(p)$  — произвольный полином, степень которого не превосходит  $r$ , то справедливо неравенство

$$|z(t)| \leq C e^{-\gamma(t-t_0)} |z(t_0)| + C \int_{t_0}^t e^{-\gamma(t-s)} |\eta(s)| ds,$$

где  $z(t) = y(t) - N_0\eta(t)$ ;  $N_0$  — старший коэффициент полинома  $N(\lambda)$ ;  $\gamma$  — некоторое положительное число, определяемое полиномом  $M(\lambda)$ , и  $C$  — некоторая постоянная, определяемая полиномами  $M(\lambda)$ ,  $N(\lambda)$ .

Доказательство. Пусть

$$M(\lambda) = \lambda^r + \lambda^{r-1}M_1 + \dots + M_r,$$

$$N(\lambda) = \lambda^r N_0 + \dots + N_r$$

(может оказаться, что  $N_0 = 0$ ). Тогда (Д.21) можно переписать в виде

$$M(p)[y(t) - N_0\eta(t)] = L(p)\eta,$$

где  $L(\lambda) = \lambda^{r-1}L_1 + \dots + L_r$  — полином степени не выше  $r-1$ . Величина  $z(t) = y(t) - N_0\eta(t)$  может быть представлена в виде  $z(t) = d^*X(t)$ , где  $r$ -вектор  $X(t)$  определяется уравнением

$$\begin{aligned} dx/dt &= Ax + B\eta, \quad B = \text{col}(k_r, \dots, k_1), \\ A &= \begin{vmatrix} -M_{r-1} & -M_{r-2} & \dots & -M_1 & -M_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$k_i$  — некоторые постоянные (см. § 3.1). При этом  $d^*(\lambda I - A)^{-1}B = L(\lambda)/M(\lambda)$ . В силу гурвицевости полинома  $M(\lambda)$  матрица  $A$  устойчива и, следовательно,  $|e^{A(t-t_0)}| \leq C e^{-\gamma(t-t_0)}$  с некоторым  $\gamma > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq |d^*e^{A(t-t_0)}z(t_0)| + \int_{t_0}^t |d^*e^{A(t-s)}B| |\eta(s)| ds \leq \\ &\leq C e^{-\gamma(t-t_0)} |z(t_0)| + C |B| \int_{t_0}^t e^{-\gamma(t-s)} |\eta(s)| ds, \end{aligned}$$

что и утверждалось.

Вернемся к доказательству теоремы. Применяя лемму 6.Д.1 к неравенствам (Д.20) и учитывая оценку (4.23), получим

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq C_1 + \varepsilon |\Phi(t)| + \varepsilon C_2 \int_{t_0}^t e^{-\gamma(t-s)} |\Phi(s)| ds, \\ |u(t)| &\leq C_3 + \varepsilon C_4 |\Phi(t)| + \varepsilon C_5 \int_{t_0}^t e^{-\gamma(t-s)} |\Phi(s)| ds, \end{aligned} \tag{Д.22}$$

где  $C_i$  — некоторые постоянные. Из (4.17) следует, что при достаточно больших  $t$  справедливы оценки  $|\tilde{u}_i(t)| \leq C_6 + C_7 |u(t)|$ ,  $|\tilde{y}_i(t)| \leq C_8 + C_7 |y(t)|$  с некоторыми постоянными, а потому в силу (4.21) имеем  $|\Phi(t)| \leq C_8 + C_9 (|y(t)| + |u(t)|)$ . Подставляя последнюю

оценку в (Д.22), получим, что при достаточно малых  $\varepsilon$  (эта малость может быть оценена через введенные постоянные  $C_i$ ) для величины  $v(t) = |y(t)| + |u(t)|$  справедлива оценка

$$v(t) \leq C + \varepsilon C \int_{t_0}^t e^{-\gamma(t-s)} v(s) ds$$

с некоторой постоянной  $C$  и, следовательно,

$$\max_{t_0 \leq s \leq t} v(s) \leq C + \frac{\varepsilon C}{\gamma} \max_{t_0 \leq s \leq t} v(s),$$

откуда при достаточно малом  $\varepsilon$  ( $\varepsilon C < \gamma$ ) следует, что  $\max_{t_0 \leq s \leq t} v(s) \leq C(1 + \varepsilon C/\gamma)^{-1}$ , т. е.  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (|y(t)| + |u(t)|) < \infty$ , что и требовалось доказать.

## ГЛАВА 7

### АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫМИ ОБЪЕКТАМИ (ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА И ЧАСТОТНАЯ ТЕОРЕМА)

Эта глава посвящена адаптивным системам управления, функционирующими в непрерывном времени. При этом как ОУ, так и адаптивный регулятор описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Как было сказано в начале гл. 6, задача оптимального адаптивного управления для таких систем до сих пор не получила удовлетворительного решения. Большинство известных результатов относится к задачам управления с эталонной моделью, в которых для задания ЦУ используется вспомогательная система — эталонная модель, определяющая желаемое поведение траекторий управляемого процесса. Именно такие системы и будут рассмотрены ниже. Существенную роль при синтезе алгоритма адаптации играет так называемая частотная теорема (см. § 3.1), дающая условия разрешимости матричных неравенств специального вида.

Основное внимание уделяется практически важному случаю, когда вектор состояния ОУ недоступен измерению. Однако в § 7.1 задача решается без учета этого ограничения, чтобы более наглядно пояснить механизм применения частотной теоремы. Кроме того, в §§ 7.1, 7.2 предполагается, что на ОУ не действуют возмущения. Вопрос о работоспособности синтезированных систем в условиях возмущений исследуется в § 7.3 на основе общих методов огрубления алгоритмов скоростного градиента (см. п. 2.4.3°). Отметим, что работоспособность адаптивных систем в условиях динамических возмущений (п. 7.3.2°) и возмущений, вызванных дискретизацией адаптивного регулятора (п. 7.3.3°), не вытекает непосредственно из ре-

зультатов п. 2.4.3°. Анализ этих случаев проводится с учетом специфики задачи адаптивного управления с эталонной моделью.

### § 7.1. Адаптивное управление при полном измерении состояния объекта

**7.1.1°. Постановка задачи синтеза адаптивной системы с эталонной моделью.** Для простоты будем рассматривать ОУ со скалярными входом и выходом, описываемый уравнением

$$a(p)y(t) = b(p)u(t), \quad (1.1)$$

где  $u(t) \in \mathbb{R}^1$  — управление,  $y(t) \in \mathbb{R}^1$  — выход ОУ,  $a(p)$ ,  $b(p)$  — полиномы от оператора дифференцирования:

$$\begin{aligned} a(p) &= p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0, \\ b(p) &= b_mp^m + \dots + b_0, \quad p = d/dt, \end{aligned}$$

причем  $m < n$ . Предположим, что желаемое поведение траекторий ОУ задается уравнением эталонной модели

$$a_m(p)y_m(t) = b_m(p)r(t), \quad (1.2)$$

где  $r(t) \in \mathbb{R}^1$  — задающее воздействие (кусочно-непрерывная ограниченная функция времени),  $y_m(t) \in \mathbb{R}^1$  — выход эталонной модели,  $a_m(p) = p^n + a_{n-1}^m p^{n-1} + \dots + a_0^m$ ,  $b_m(p) = b_{m-1}^m p^{m-1} + \dots + b_0^m$ . Требуется определить управление  $u(t)$  так, чтобы достигалась ЦУ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_m(t)| = 0, \quad (1.3)$$

т. е. чтобы выход ОУ (1.1) приближался с течением времени к выходу эталонной модели (1.2). При этом фазовые координаты ОУ и подстраиваемые параметры должны оставаться ограниченными (это важно для практической применимости найденных алгоритмов). Значения параметров ОУ, как обычно, неизвестны (зависят от варианта  $\xi$ ), причем при некоторых  $\xi \in \Xi$  ОУ может быть неустойчивым. Параметры эталонной модели (1.2), напротив, будем считать известными, а полином  $a_m(\lambda)$  гурвицевым (эталонная модель устойчива).

Сложность решения задачи зависит от «величины» класса адаптации  $\Sigma$  и от того, какие величины доступны наблюдению в момент времени  $t$ , т. е. от состава вектора сенсоров  $\sigma(t)$ . Вначале рассмотрим простейший случай, когда в сенсор  $\sigma(t)$  входят в требуемом количестве последовательные производные  $y^{(i)}(t)$ ,  $r^{(i)}(t)$ .

**7.1.2°. Решение задачи для простейшего случая.** Пусть в (1.1)  $m = 0$ , т. е. ОУ описывается уравнением

$$a(p)y(t) = b_0 u(t). \quad (1.4)$$

Первый этап решения задачи — выбор структуры регулятора — в этом случае оказывается особенно простым. Зададим «идеальный» закон управления соотношением

$$b_0 u(t) = \alpha(p)y(t) + b_m(p)r(t), \quad (1.5)$$

в котором  $\alpha(\lambda)$  — полином степени  $n - 1$ . Очевидно, если подставить (1.5) в (1.4) и положить  $\alpha(p) = a(p) - a_m(p)$ , то получим (1.2), т. е. динамика системы совпадает с динамикой эталонной модели. При этом ошибка  $y(t) — y_m(t)$  будет подчиняться уравнению  $a_m(p)(y(t) — y_m(t)) = 0$  и в силу гурвицевости  $a_m(\lambda)$  ЦУ (1.3) будет достигаться.

Для выбора подстраиваемых параметров выделим в (1.5) коэффициенты, зависящие от неизвестных параметров ОУ. Если ввести обозначения

$$z(t) = \text{col}(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t), b_m(p)r(t)), \quad (1.6)$$

$$\tau_* = b_0^{-1} \text{col}(a_0 - a_0^m, \dots, a_{n-1} - a_{n-1}^m, 1),$$

то закон управления (1.5) примет вид  $u(t) = (\tau_*)^* z(t)$ . Поэтому реальный закон управления можно задать соотношением

$$u(t) = \tau(t)^* z(t), \quad (1.7)$$

где  $\tau(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$  — вектор подстраиваемых параметров. Отметим, что использование закона (1.7) требует, чтобы были доступны наблюдению все компоненты вектора  $z(t)$ : переменные состояния ОУ  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)}(t)$  и производные  $r(t)$ , входящие в выражение  $b_m(p)r(t)$ . При этом функция  $r(t)$  должна быть достаточно гладкой.

Перейдем к следующему этапу — выбору алгоритма адаптации. Зададим вспомогательную оценочную функцию

в виде квадрата невязки:  $Q(t) = \delta^2(t)$ , где

$$\delta(t) = a_m(p)y(t) - b_m(p)r(t). \quad (1.8)$$

Величина  $\delta(t)$  выражает степень близости управляемого процесса к эталону. Выразим  $\delta(t)$  через подстраиваемые параметры. Из (1.4), (1.7), (1.6) имеем

$$a_m(p)y(t) = [a_m(p) - a(p)]y(t) + b_0\tau(t)^*z(t) = \\ = b_0\tau^*z(t) - b_0(\tau_*)^*z(t) + b_m(p)r(t),$$

откуда

$$\delta(t) = \delta(\tau(t), t) = b_0(\tau - \tau_*)^*z(t).$$

Так как величину  $Q(t)$  в процессе подстройки целесообразно уменьшать, выберем градиентный алгоритм адаптации

$$d\tau(t)/dt = -\Gamma \text{grad}_\tau \delta^2(\tau(t), t),$$

где  $\Gamma = \Gamma^* > 0$  — положительно определенная  $(n+1) \times (n+1)$ -матрица. Очевидно,  $\text{grad}_\tau \delta(\tau(t), t) = 2b_0z(t)$ ; включая положительную величину  $2|b_0|$  в матрицу  $\Gamma$ , приходим к алгоритму

$$d\tau/dt = -(\text{sign } b_0)\delta(t)\Gamma z(t). \quad (1.9)$$

В частности, при  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_0, \dots, \gamma_n\}$  алгоритм (1.9) принимает вид

$$\begin{cases} d\tau_i/dt = -\gamma_i(\text{sign } b_0)\delta(t)y^{(i)}(t), & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ d\tau_n/dt = -\gamma_n(\text{sign } b_0)\delta(t)b_m(p)r(t), \end{cases} \quad (1.10)$$

где  $\gamma_i > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $\tau = \text{col}(\tau_0, \dots, \tau_n)$ . Для применения алгоритмов (1.9), (1.10) необходимо знать величину  $\text{sign } b_0$ .

Отметим, что выход  $y_m(t)$  эталонной модели (1.2) не используется в адаптивном регуляторе (1.7) — (1.9); поэтому синтезированная система может быть названа системой с *неявной эталонной моделью*. В то же время величину  $\delta(t)$  можно представить как  $\delta(t) = a_m(p)(y - y_m)$ , и тогда выход эталонной модели будет использоваться в алгоритме адаптации явно.

Отметим также, что к алгоритму (1.9), (1.10) можно прийти на основе схемы скоростного градиента, взяв в качестве оценочного интегральный функционал  $\bar{Q}(t) = \int_0^t \delta^2(\tau(s), s) ds$ .

**Теорема 7.1.1.** Если полином  $a_m(p)$  гурвицев, а функция  $b_m(p)r(t)$  кусочно-непрерывна и ограничена, то все траектории системы (1.4), (1.7) — (1.9) ограничены и ЦУ (1.3) достигается.

Очевидно, единственное, что требуется знать об ОУ для реализации адаптивного регулятора (1.7) — (1.9), — это знак коэффициента  $b_0$ . Поэтому из теоремы 7.1.1 следует, что система (1.4), (1.7) — (1.9) адаптивна в классе  $\Xi$ , определяемом заданием величины  $\text{sign } b_0(\xi)$ , по отношению к ЦУ (1.3).

При доказательстве теоремы 7.1.1 используется следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы 2.4.1 для случая интегрального оценочного функционала.

**Лемма 7.1.1.** Пусть  $Q(\tau, t)$  — неотрицательная функция, выпуклая и непрерывно дифференцируемая по  $\tau$  при любом  $t \geq 0$  и кусочно-непрерывная по  $t$  при любом  $\tau \in \mathbb{R}^N$ , причем  $\int_0^\infty Q(\tau_*, t) dt < \infty$  для некоторого  $\tau_* \in \mathbb{R}^N$ . Если вектор-функция  $\tau(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\tau}{dt} = -\Gamma \text{grad}_\tau Q(\tau(t), t), \quad (1.11)$$

где  $\Gamma = \Gamma^* > 0$  —  $N \times N$ -матрица, то  $\tau(t)$  ограничена и

$$\int_0^\infty Q(\tau(t), t) dt < \infty. \quad (1.12)$$

Доказательство леммы основано на использовании функции Ляпунова вида

$$V(\tau, t) = \frac{1}{2} |\tau - \tau_*|^2_{\Gamma^{-1}} + \int_t^\infty Q(\tau_*, s) ds. \quad (1.13)$$

Найденное решение неудовлетворительно по крайней мере в двух отношениях. Во-первых, оно относится только к случаю  $t = 0$ . Общий случай будет рассмотрен ниже, в п. 7.2.2°. Во-вторых, в регуляторе (1.7) используются все фазовые координаты ОУ, а в алгоритме адаптации (1.8), (1.9), кроме того, старшая производная  $y^{(n)}(t)$ , необходимая для вычисления невязки  $\delta(t)$ . Таким образом, сенсором в синтезированной системе является вектор  $\sigma(t) = \text{col}(y(t), \dots, y^{(n)}(t), r(t), \dots, r^{(m)}(t)) \in$

$\in \mathbb{R}^{n+m_1+2}$ . Однако в практических задачах производные высокого порядка обычно недоступны измерению либо измеряются со значительной помехой. Наличие помех иска- жает динамику системы и может нарушить ее работоспособность. Для сокращения числа сенсоров в адаптивный регулятор вводится набор фильтров. В следующем пункте будет показано, как фильтрация невязки  $\delta(t)$  в алгоритме адаптации позволяет избавиться от необходимости измерения старшей производной  $y^{(n)}(t)$ .

**7.1.3°. Фильтрация невязки в алгоритме адаптации.** Рассмотрим линейную управляемую и наблюдаемую систему

$$dx_F/dt = A_F x_F + b_F \eta, \quad \eta_F = d_F^* x_F, \quad (1.14)$$

где  $x_F \in \mathbb{R}^n$ ;  $\eta$ ,  $\eta_F$  — скаляры. Пусть  $W_F(\lambda) = d_F^* \cdot (M_n - A_F)^{-1} b_F$  — передаточная функция (1.14). Очевидно,  $W_F(\lambda) = b_F(\lambda)/a_F(\lambda)$ , где  $b_F(\lambda)$ ,  $a_F(\lambda)$  — полиномы, причем  $\deg a_F(\lambda) = n$ ,  $\deg b_F(\lambda) = l < n$ . Будем называть систему (1.14) *фильтром* с передаточной функцией  $W_F(\lambda)$ , а функцию (сигнал)  $\eta_F(t)$  — результатом *фильтрации* функции (сигнала)  $\eta(t)$ . Вместо уравнений (1.14) будем иногда использовать сокращенную запись  $a_F(p)\eta_F = b_F(p)\eta$ , или  $\eta_F = W_F(p)\eta$ . Нас будут интересовать только устойчивые фильтры, у которых полином  $a_F(\lambda)$  гурвицев. Нетрудно показать, что если функция  $\eta(t)$  имеет непрерывные производные до порядка  $k$ , то «отфильтрованная» функция  $\eta_F(t)$  имеет непрерывные производные до порядка  $k + n - l$ , т. е. операция фильтрации обладает сглаживающими свойствами. Число  $n_F = n - l$  называется *порядком фильтрации*. Чтобы отфильтровать сигнал  $\eta(t)$ , не нужно измерять его производные. Наоборот, производные  $\eta_F^{(i)}(t)$  отфильтрованного сигнала  $\eta_F(t)$  до порядка  $i = n_F$  можно получить, не выполняя операций дифференцирования, как линейные комбинации компонент вектора состояния  $x_F(t)$ . Действительно, если в уравнениях состояния фильтра (1.14) взять

$$A_F = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_0 \end{vmatrix}, \quad b_F = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad d_F = \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (1.15)$$

где  $a(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0$ ,  $b(p) = b_lp^l + \dots + b_0$ , то  $\eta_F^{(i)} = d_i^*x_F$ , где  $d_i = \text{col}(\underbrace{0, \dots, 0}_{i}, b_0, \dots, b_l, 0, \dots, 0)$ ,  $i = 1, \dots, n_F$ .

Сглаживающее свойство фильтров дает основание использовать их для уменьшения числа производных, требуемых для реализации адаптивных регуляторов. Покажем, как фильтрация невязки в алгоритме адаптации (1.9) позволяет исключить из сенсора старшую производную  $y^{(n)}(t)$  выхода ОУ. Основой для модификации алгоритма адаптации служит следующее утверждение.

**Лемма 7.1.2.** Рассмотрим систему

$$\delta(\tau, t) = \tau^*z(t) + \mu(t), \quad (1.16)$$

$$\delta_F(t) = W_F(p)\delta(\tau(t), t), \quad (1.17)$$

$$d\tau(t)/dt = -\delta_F(t)\Gamma z(t), \quad (1.18)$$

где  $\tau \in \mathbb{R}^N$ ,  $z(t) \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mu(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $\Gamma = \Gamma^* > 0 = N \times N$ -матрица и  $\int_0^\infty |\delta(\tau_*, t)|^2 dt < \infty$  для некоторого  $\tau_* \in \mathbb{R}^N$ . Если передаточная функция фильтра  $W_F(\lambda)$  удовлетворяет условиям:

а) полином  $a_F(\lambda)$  гурвицев;

$$\text{б)} \quad \operatorname{Re} W_F(i\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^1; \quad (1.19)$$

$$\text{в)} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re} W_F(i\omega) > 0,$$

то  $\int_0^\infty \delta_F^2(t) dt < \infty$  и функции  $\tau(t)$ ,  $x_F(t)$  ограничены при  $t \geq 0$ . Если, кроме того, функции  $z(t)$ ,  $\mu(t)$  ограничены, то  $\delta_F(\tau(t), t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Для доказательства леммы используется функция Ляпунова

$$V(x_F, \tau, t) = x_F^* H x_F + |\tau - \tau_*|_{\Gamma^{-1}}^2 + \kappa \int_t^\infty |\delta(\tau_*, s)|^2 ds. \quad (1.20)$$

Условия (1.19) гарантируют существование у системы (1.16) — (1.18) функции (1.20) со свойствами  $V > 0$  при  $x_F \neq 0$ ,  $\tau \neq \tau_*$ ,  $\dot{V} < 0$  при  $x_F \neq 0$ . Центральным моментом доказательства является применение частотной теоремы 3.1.4.

Можно показать, что условия (1.19) эквивалентны неравенству

$$\operatorname{Re} W_F(\lambda) \geq 0 \text{ при } \operatorname{Re} \lambda \geq 0. \quad (1.21)$$

Несколько более слабое неравенство

$$\operatorname{Re} W_F(\lambda) \geq 0 \text{ при } \operatorname{Re} \lambda > 0 \quad (1.22)$$

широко известно, в частности, в теории линейных электрических цепей. Условием (1.22) задается класс функций, являющихся полным сопротивлением некоторого пассивного двухполюсника. Функции  $W_F(\lambda)$ , удовлетворяющие (1.22), часто называют *положительными вещественными функциями*. Поэтому естественно назвать функции, удовлетворяющие (1.21), *строго положительно вещественными*, а соответствующий фильтр (1.14) — *строго пассивным*. Можно показать, что у строго пассивного фильтра как знаменатель, так и числитель передаточной функции  $W_F(\lambda)$  гурвицевы и разность их степеней (порядок фильтрации) равна единице ( $n_F = 1$ ). Примером передаточной функции строго пассивного фильтра является функция  $1/(\lambda + \alpha)$ , где  $\alpha > 0$ , а также любая линейная комбинация таких функций с положительными коэффициентами.

Введем теперь в алгоритм адаптации (1.9) вместо невязки  $\delta(t)$  вида (1.8) отфильтрованную невязку  $\delta_F(t)$ . Условия работоспособности полученного адаптивного регулятора даются следующей теоремой.

**Теорема 7.1.2.** *Рассмотрим систему (1.4), (1.7), (1.17), (1.18), в которой  $z(t)$ ,  $\delta(t, \tau(t))$  задаются соотношениями (1.6), (1.8). Если фильтр  $W_F(p)$  строго пассивен, то все траектории системы ограничены и ЦУ (1.3) достигается.*

Покажем, что в алгоритме (1.18) не требуется измерения величины  $y^{(n)}(t)$ . Действительно, возьмем, например, в (1.17) строго пассивный фильтр с передаточной функцией  $W_F(\lambda) = b_F(\lambda)/a_m(\lambda)$ , где  $a_m(\lambda)$  — знаменатель передаточной функции эталонной модели (1.2). Поскольку невязку (1.8) можно представить в виде  $\delta(t) = a_m(p)(y(t) - y_m(t))$ , отфильтрованная невязка  $\delta_F(t)$  будет иметь вид  $\delta_F(t) = b_F(p)(y(t) - y_m(t))$  и алгоритм (1.8) примет вид

$$d\tau(t)/dt = -b_F(p)(y(t) - y_m(t))\Gamma z(t), \quad (1.23)$$

где  $b_F(\lambda)$  — гурвицев полином степени  $n = 1$ . Чтобы

обеспечить пассивность функции  $W_F(\lambda)$ , удобно брать  $b_F(\lambda)$  в виде  $b_F(\lambda) = \sum_{i=1}^n \beta_i a_m(\lambda)/(\lambda - \lambda_i)$ , где  $\beta_i > 0$ ,  $\lambda_i$  — корни полинома  $a_m(\lambda)$ . На самом деле в (1.17) достаточно брать фильтр первого порядка при  $W_F(\lambda) = 1/(\lambda + \alpha)$ ,  $\alpha > 0$ .

Отметим, что дальнейшее сокращение количества используемых производных от  $y(t)$  описанным методом невозможно, поскольку для строго пассивных фильтров порядок фильтрации не может превышать единицы. Некоторые методы адаптивного управления при недоступности для измерения части переменных состояния ОУ описываются ниже. Эти методы применимы, в частности, к устойчивым по входу (минимально-фазовым) объектам вида (1.1).

### § 7.2. Адаптивное управление при неполном измерении состояния объекта

В настоящем параграфе рассматриваются задачи адаптивного управления, в которых на структуру регулятора наложены те или иные ограничения. Эти ограничения могут быть обусловлены требованием простоты технической реализации адаптивного регулятора или невозможностью измерения ряда переменных управляемого процесса. Задачи такого рода возникают, например, когда на объекте уже действует обычный «неадаптивный» регулятор. Если диапазон условий работы ОУ достаточно широк, то действующий регулятор может не обеспечивать требуемого качества системы управления на всех режимах, что вызывает необходимость усовершенствования системы. Усовершенствовать систему можно на основе принципов адаптации, вводя подстройку коэффициентов регулятора в процессе его функционирования. При этом появляется возможность без существенной переделки действующей системы и без установки новых датчиков обеспечить требуемое качество управления на всех режимах работы.

Для решения таких задач и предназначены описываемые методы. Рассматриваемые системы можно отнести к классу систем с эталонной моделью (явной или неявной). Из-за недостаточно «богатой» структуры регулятора может оказаться, что не для любого варианта  $\xi \in \Xi$  сущ-

ствуют значения коэффициентов регулятора, обеспечивающие достижение исходной ЦУ для всех допустимых задающих воздействий. В этих случаях удается строить работоспособные системы ценой ослабления ЦУ.

Рассматриваются задачи стабилизации и слежения сначала для линейных ОУ со скалярным входом, а затем для нелинейных и многомерных ОУ. Во всех случаях адаптивный регулятор является линейным с подстраиваемыми коэффициентами, а алгоритм адаптации строится по схеме скоростного градиента.

При фиксации структуры регулятора приобретает важную роль задача выяснения предельных возможностей данной структуры. В частности, поскольку для обоснования работоспособности систем используется метод функций Ляпунова, представляет интерес нахождение всех алгоритмов адаптации, обеспечивающих существование у системы функции Ляпунова из заданного класса. Применение частотной теоремы позволяет решить эту задачу: выделить класс алгоритмов адаптации, охватывающий все алгоритмы, которые можно синтезировать с помощью квадратичных функций Ляпунова.

**7.2.1°. Адаптивная стабилизация линейного ОУ.** Пусть ОУ описывается уравнением

$$dx/dt = Ax + bu, \quad \sigma(t) = L^*x(t), \quad (2.1)$$

где  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния ОУ,  $u = u(t)$  — скалярное управление,  $\sigma(t) \in \mathbb{R}^l$  — вектор сенсоров,  $A = A(\xi)$ ,  $b = b(\xi)$ ,  $L = L(\xi)$  — параметры ОУ, зависящие от варианта  $\xi \in \Xi$ . Регулятор задан линейным с подстраиваемыми коэффициентами:

$$u = \tau(t)^*\sigma(t), \quad (2.2)$$

где  $\tau(t) \in \mathbb{R}^l$ . Поставим задачу: найти алгоритм адаптации

$$d\tau/dt = F(\sigma(t)) \quad (2.3)$$

такой, чтобы для любого  $\xi \in \Xi$  достигалась ЦУ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (2.4)$$

и траектории системы  $x(t)$ ,  $\tau(t)$  были ограничены.

Поставленную задачу будем решать на основе принципа скоростного градиента. Для этого зададим ЦУ (2.4) соотношением  $Q(x(t)) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , где  $Q(x) = -0,5x^*Hx$  — оценочная функция,  $H = H^* > 0$  — положительно определенная  $n \times n$ -матрица. Найдем функцию  $\varphi(x, \tau, \xi)$  — производную  $Q(x)$  в силу (2.1), а затем  $\text{grad}_\tau \varphi(x, \tau, \xi)$ . Имеем

$$\varphi(x, \tau, \xi) = x^*H(Ax + b\tau^*\sigma), \quad (2.5)$$

$$\text{grad}_\tau \varphi(x, \tau, \xi) = x^*Hb\sigma. \quad (2.6)$$

Поскольку алгоритм адаптации должен использовать только величины, входящие в  $\sigma(t)$ , в (2.6) скаляр  $x^*Hb$  должен быть функцией вектора сенсоров  $\sigma(t)$ . Но как  $x^*Hb$ , так и  $\sigma = L^*x$  линейны по  $x$ , поэтому  $x^*Hb$  должен быть линейной комбинацией сенсоров, т. е.  $b^*Hx = g^*L^*x$  для некоторого  $g \in \mathbb{R}^l$  и любого  $x \in \mathbb{R}^n$ . А это означает, что  $Hb = Lg$ . Мы пришли к алгоритму адаптации

$$d\tau/dt = -g^*\sigma(t)\Gamma\sigma(t), \quad (2.7)$$

где  $\Gamma = \Gamma^* > 0$  —  $l \times l$ -матрица. Чтобы получить условия достижения ЦУ в системе (2.4), (2.2), (2.7), воспользуемся теоремой 2.4.1. Условия (2.4.4), (2.4.5), очевидно, выполнены, так как правые части системы и функция  $Q(x)$  суть гладкие функции, не зависящие от  $t$ . Условие выпуклости (2.4.6) справедливо в силу линейности по  $\tau$  правой части (2.5). Осталось проверить условие достижимости (2.4.7). Оно будет выполнено, если существует вектор  $\tau_* \in \mathbb{R}^l$  такой, что  $x^*H(A + b(\tau_*)^*L^*)x < 0$  при  $x \neq 0$ . При этом нам нет нужды находить  $H$ ,  $\tau_*$ , поскольку алгоритм (2.7) от них не зависит. Достаточно лишь знать, что такие матрица и вектор существуют. Мы приходим к следующей алгебраической задаче:

Даны  $n \times n$ -матрица  $A$ ,  $n \times l$ -матрица  $L$ , векторы  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $g \in \mathbb{R}^l$ . Требуется найти условия существования  $n \times n$ -матрицы  $H = H^* > 0$  и вектора  $\tau_* \in \mathbb{R}^l$  таких, что

$$HA_* + (A_*)^*H < 0, \quad Hb = Lg, \quad A_* = A + b(\tau_*)^*L^*. \quad (2.8)$$

Решение задачи дается теоремой 3.1.5, позволяющей сформулировать основной результат пункта.

**Теорема 7.2.1.** Система (2.1), (2.2), (2.7) адаптивна в классе  $\Xi$  по отношению к ЦУ (2.4), и все ее траектории ограничены, если для любого  $\xi \in \Xi$  числитель правильной дробно-рациональной функции  $g^*L^*(M_n - A)^{-1}b$  является гурвицевым полиномом степени  $n - 1$  с положительными коэффициентами.

**З а м е ч а н и я.** 1. Полином, возникающий в теореме, можно представить в виде  $g^*h(\lambda)$ , где  $h(\lambda) = \delta(\lambda)W(\lambda)$ ,  $W(\lambda) = L^*(M_n - A)^{-1}b$ ,  $\delta(\lambda) = \det(M_n - A)$ . Таким образом, условия работоспособности адаптивной системы выражаются через передаточную матрицу-столбец ОУ  $W(\lambda)$  (от входа  $u$  к выходу  $\sigma$ ) и через характеристический многочлен ОУ  $\delta(\lambda)$ . Эти условия не зависят от способа приведения уравнений объекта к виду (2.1). Более того, для проверки условий теоремы вообще не нужно приводить уравнения объекта к виду (2.1). Достаточно лишь знать, что это можно сделать. Но, как известно (см. [43]), любая передаточная матрица из правильных дробно-рациональных функций может быть реализована системой (2.1). Это обстоятельство будет использоваться в дальнейшем.

2. В теореме не требуется ни управляемости, ни наблюдаемости ОУ (2.1). Поэтому числитель и знаменатель  $W(\lambda)$  могут иметь общие множители. Однако в условиях теоремы эти множители обязаны быть гурвицевыми в силу гурвицевости  $g^*h(\lambda)$  и условия  $\deg g^*h(\lambda) = n - 1$ .

3. Как известно, у гурвицева полинома все коэффициенты имеют одинаковый знак. Поэтому в теореме достаточно требовать положительности не всех коэффициентов  $g^*h(\lambda)$ , а хотя бы одного из них, например старшего.

В соответствии с результатами § 2.4 условия теоремы 7.2.1 достаточны для существования у системы (2.1) — (2.3) функции вида

$$V(x, \tau) = x^*Hx + (\tau - \tau_*)^*H_1(\tau - \tau_*), \quad (2.9)$$

где  $H = H^* \geq 0$  —  $n \times n$ -матрица,  $H_1 = H_1^* \geq 0$  —  $l \times l$ -матрица,  $\tau_n \in \mathbb{K}^l$ , обладающей свойством

$$\dot{V}(x, \tau) < 0 \text{ при } x \neq 0. \quad (2.10)$$

Оказывается, эти условия являются и необходимыми.

**Теорема 7.2.2.** Пусть  $W(\lambda) \neq 0$ . Для существования у системы (2.1) — (2.3) функции Ляпунова вида (2.9) со-

свойством (2.10) необходимо и достаточно, чтобы алгоритм адаптации имел вид (2.7), а полином  $g^*h(\lambda)$  был гурвицевым степени  $n - 1$  с положительными коэффициентами.

Теорема 7.2.2 показывает, что алгоритмами вида (2.7) исчерпываются все алгоритмы, которые могут быть получены с помощью функции Ляпунова вида (2.9), и синтезировать еще какие-либо алгоритмы, используя функцию (2.9) со свойством (2.10), невозможно.

Интересно отметить, что к алгоритму (2.7) можно прийти, выбирая в схеме скоростного градиента оценочную функцию в виде  $Q(x) = (g^*\sigma(t))^2 = (g^*L^*x)^2$ . Эта оценочная функция вырожденная: она не удовлетворяет условию роста (2.4.7). Тем не менее можно показать, что в условиях теоремы 7.2.1 применимо замечание к теореме 2.4.1, т. е. работоспособность системы (2.1), (2.2), (2.7) можно обосновывать с помощью вырожденной функции Ляпунова. Такой подход оказывается более удобным для введения в систему зоны нечувствительности с целью обеспечения ее работоспособности в условиях помех (см. §§ 6.3, 7.3).

На основании теоремы 7.2.1 можно предложить следующую методику синтеза адаптивной системы стабилизации линейного ОУ:

1. Определяется передаточная матрица объекта  $W_{\sigma/u}(\lambda)$ , являющаяся столбцом длины  $l$  (т. е.  $l$ -вектором).

2. Вычисляется  $l$ -вектор  $h(\lambda) = W_{\sigma/u}(\lambda)\delta(\lambda)$ , где  $\delta(\lambda)$  — характеристический полином объекта.

3. Составляется полином  $g^*h(\lambda)$ , где  $g$  —  $l$ -вектор.

4. Вектор  $g$  выбирается так, чтобы для любых значений параметров объекта из класса  $\Xi$  полином  $g^*h(\lambda)$  был гурвицевым степени  $n - 1$  с положительным коэффициентами.

5. Найденное значение вектора  $g$  берется в качестве вектора параметров алгоритма (2.7).

Если вектора  $g$ , удовлетворяющего условиям пункта 4, не существует, то заданная структура является недостаточно «богатой» для синтеза адаптивного регулятора (2.2) — (2.3) с помощью функций Ляпунова класса (2.9).

а) *Стабилизация минимально-фазового ОУ.* Проиллюстрируем описанную методику на задачах стабилизации ОУ вида (1.1). Пусть вначале вектор сенсоров  $\sigma(t)$  имеет

вид

$$\sigma(t) = \text{col}(y, \dot{y}, \dots, y^{l-1}). \quad (2.11)$$

Введем полиномиальный вектор  $\pi_l(\lambda) = \text{col}(1, \lambda, \dots, \dots, \lambda^{l-1})$ . Тогда регулятор (2.2) можно представить в виде

$$u(t) = \tau(t)^* \pi_l(p)y, \quad (2.12)$$

где  $\tau(t) \in \mathbb{R}^l$  — вектор подстраиваемых параметров. Передаточная функция  $W_{\sigma/u}(\lambda)$  имеет вид  $W_{\sigma/u}(\lambda) = \pi_l(\lambda)b(\lambda)/a(\lambda)$ . Очевидно, при  $l+m \leq n$  все компоненты  $W_{\sigma/u}(\lambda)$  — правильные рациональные функции и уравнения (1.1), (2.11) можно привести к виду (2.1). Если  $g = \text{col}(g_0, \dots, g_{l-1})$ , то величину  $g^*\sigma$  в алгоритме адаптации (2.7) можно записать как  $g^*\delta = g^*\pi_l(p)y = g(p)y$ , где  $g(\lambda) = \sum_{i=0}^{l-1} g_i \lambda^i$ . Поэтому алгоритм (2.7) принимает вид

$$d\tau/dt = -[g(p)y]\Gamma\sigma(t). \quad (2.13)$$

По теореме 7.2.1 для определения условий работоспособности системы необходимо вычислить полином  $g^*h(\lambda)$ , где  $h(\lambda)$  — числитель передаточной матрицы  $W_{\sigma/u}(\lambda)$ . В данном случае  $h(\lambda) = \pi_l(\lambda)b(\lambda)$  и, следовательно,  $g^*h(\lambda) = g(\lambda)b(\lambda)$ . Очевидно, полином  $g^*h(\lambda)$  гурвицев тогда и только тогда, когда гурвицевы полиномы  $g(\lambda)$  и  $b(\lambda)$ . Таким образом, из теоремы 7.2.1 следует, что если адаптивный регулятор имеет вид (2.13), где  $g(\lambda)$  — гурвицев полином, то система (1.1), (2.12), (2.13) будет адаптивна в классе  $\Sigma$  по отношению к ЦУ (2.4), когда для любого  $\xi \in \Sigma$  ОУ (1.1) — минимально-фазовый,  $l+m = n$  и знаки коэффициентов  $b(\lambda)$ ,  $g(\lambda)$  совпадают. Условие  $l+m = n$  задает класс допустимых структур регулятора: наблюдению должна быть доступна  $n-m-1$  производная выхода ОУ.

Отметим, что при  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}\}$  алгоритм (2.13) приобретает простой вид

$$d\tau_i(t)/dt = -\gamma_i [g(p)y]y^{(i)}, \quad i = 0, 1, \dots, l-1. \quad (2.14)$$

В случае  $m = 0$  и  $r(t) = y_m(t) \equiv 0$  алгоритм (2.14) совпадает с (1.23) при  $b_F(p) = g(p)$ .

Машинное моделирование системы (1.1), (2.12), (2.13) для различных случаев показало, что процесс подстройки (адаптации) коэффициентов регулятора сходится в несколько раз быстрее переходного процесса объекта. Сходимость процесса адаптации («замораживание» коэффициентов регулятора) при ненулевом состоянии ОУ возможна (как видно из (2.13)) при выполнении условия  $g(p)y = 0$ . И действительно, через некоторое (относительно малое) время выход объекта  $y(t)$  начинает удовлетворять уравнению

$$g(p)y = 0, \quad (2.15)$$

которое можно интерпретировать как уравнение «эталонной модели», задающее желаемое качество процессов в системе.

б) *Подстройка знаменателя передаточной функции регулятора.* Рассмотрим снова ОУ (1.1), а регулятор возьмем в виде

$$\beta(p)u(t) = \alpha(p)y(t), \quad (2.16)$$

где  $\alpha(\lambda) = \alpha_{l_1}\lambda^{l_1} + \dots + \alpha_0$ ,  $\beta(\lambda) = \lambda^{l_2} + \beta_{l_2-1}\lambda^{l_2-1} + \dots + \beta_0$ , причем  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  — подстраиваемые параметры. Преобразуем (2.16) к виду

$$\tilde{u} = \alpha(p)y - \bar{\beta}(p)u, \quad (2.17)$$

где  $\bar{\beta}(\lambda) = \beta(\lambda) - \lambda^{l_2}$ ,  $\tilde{u} = p^{l_2}u$  — вспомогательная переменная, которую будем рассматривать как новое управление. Расширим пространство состояний ОУ (1.1), введя новые фазовые координаты  $u$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\dots$ ,  $u^{(l_2-1)}$ . Тогда систему (1.1), (2.17) можно представить в виде (2.1), (2.2) при  $\tilde{n} = n + l_2$ ,  $\tilde{l} = l_1 + l_2 + 1$ . Передаточная матрица  $W_{\sigma/\tilde{u}}(\lambda)$  равна

$$W_{\sigma/\tilde{u}}(\lambda) = [\lambda^{l_2}a(\lambda)]^{-1} \text{col} (\lambda^{l_2}b(\lambda)\pi_{l_1+1}(\lambda) - a(\lambda)\pi_{l_2}(\lambda)). \quad (2.18)$$

Представляя вектор  $g \in \mathbb{R}^l$  в алгоритме адаптации (2.7) в виде  $g = \text{col}(g', g'')$ , где  $g' \in \mathbb{R}^{l_1+1}$ ,  $g'' \in \mathbb{R}^{l_2}$ , и вводя полиномы  $g'(\lambda) = (g')^*\pi_{l_1+1}(\lambda)$ ,  $g''(\lambda) = (g'')^*\pi_{l_2}(\lambda)$ , запишем алгоритм (2.7) для данного случая в виде

$$d\tau(t)/dt = -[g'(p)y - g''(p)u]\Gamma\sigma(t), \quad (2.19)$$

где

$$\sigma(t) = \text{col}(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t), \dots, \dots, u^{(l_2-1)}(t)).$$

Для проверки условий теоремы 7.2.1 необходимо вычислить полином  $g^* h(\lambda)$ . Очевидно,

$$g^* h(\lambda) = \lambda^{l_2} b(\lambda) g'(\lambda) - a(\lambda) g''(\lambda). \quad (2.20)$$

Степень правой части (2.20) равна  $n + l_2 - 1 = \tilde{n} - 1$ , если старший коэффициент  $g''(\lambda)$  не равен нулю; поэтому единственным условием работоспособности полученной системы является гурвицевость полинома (2.20) и положительность его коэффициентов при любом  $\xi \in \Xi$ . Согласно лемме 3.1.1, если при каждом  $\xi \in \Xi$  наибольший общий делитель полиномов  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  гурвицев и  $a(0) \neq 0$ , то для каждого  $\xi \in \Xi$  существует пара полиномов  $g_\xi'(\lambda)$ ,  $g_\xi''(\lambda)$  такая, что правая часть (2.20) обладает требуемыми свойствами. Однако нам необходимо, чтобы полиномы  $g'(\lambda)$ ,  $g''(\lambda)$  не зависели от  $\xi \in \Xi$ . Существование решения задачи определяется в каждом конкретном случае отдельно и зависит от «размера» класса адаптации  $\Xi$ . Тем не менее можно сказать, что потенциальные возможности структуры (2.17) больше, чем возможности структуры (2.12), и позволяют в принципе решать задачи адаптивной стабилизации неминимально-фазовых ОУ (1.1) при меньшем числе доступных производных выхода ОУ.

**7.2.2°. Адаптивные системы слежения.** В настоящем пункте рассматриваются задачи, в которых ЦУ определяет желаемую (эталонную) реакцию системы на задающее воздействие  $r(t)$ . Функция  $r(t)$  предполагается доступной наблюдению в линейной комбинации с рядом своих производных. Таким образом, эволюционное и сенсорное уравнения ОУ будут вместо (2.1) иметь вид

$$dx/dt = Ax + bu, \quad \sigma(t) = \text{col}(\bar{\sigma}(t), d(p)r(t)), \quad (2.21)$$

где  $\bar{\sigma}(t) = L^*x(t)$ ,  $d(\lambda)$  — заданный полином,  $\deg d(\lambda) = n_d$ . Структуру регулятора зададим в виде (2.2), где теперь  $\tau(t) \in \mathbb{R}^{l+1}$ . Рассмотрим два способа построения адаптивных регуляторов, соответствующие системам с явной и неявной эталонной моделью.

а) *Система с явной эталонной моделью.* Для задания ЦУ введем уравнения эталонной модели

$$dx_M/dt = A_M x_M + b_M d(p)r(t), \quad \bar{\sigma}_M(t) = L_M^* x_M(t), \quad (2.22)$$

где  $x_M(t) \in \mathbb{R}^n$ , а порядки  $A_M, b_M, L_M$  — такие же, как у соответствующих величин в (2.21). Предположим, что для любого  $\xi \in \Sigma$  существуют вектор  $v_* = v_*(\xi) \in \mathbb{R}^l$  и число  $\theta_* = \theta_*(\xi) > 0$  такие, что справедливы равенства

$$A_M = A + b(v_*)^* L^*, \quad b_M = \theta_* b, \quad L_M = L. \quad (2.23)$$

Соотношения (2.23) означают, что различие между ОУ и эталонной моделью обусловлено лишь разницей между матрицами  $A, A_M$  и «величинами» векторов  $b, b_M$  и для любого  $\xi \in \Sigma$  может быть устранено регулятором (2.2) при  $\tau(t) = \tau_* = \text{col}(v_*, \theta_*)$ . Поэтому условия (2.23) могут быть названы *условиями согласованности* модели (2.22) со структурой (2.21), (2.2).

Поставим задачу нахождения алгоритма адаптации вида

$$d\tau/dt = F(\sigma(t), \bar{\sigma}_M(t)) \quad (2.24)$$

так, чтобы в системе (2.21), (2.2), (2.22), (2.24) достигалась ЦУ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_M(t)| = 0. \quad (2.25)$$

Для решения задачи можно воспользоваться принципом скоростного градиента, взяв оценочную функцию

$$Q(x, t) = 0,5 (x - x_M(t))^* H (x - x_M(t)), \quad (2.26)$$

где  $H = H^* > 0$  —  $n \times n$ -матрица. Получаемый результат содержится в следующей теореме.

**Теорема 7.2.3.** *Пусть алгоритм адаптации имеет вид*

$$d\tau/dt = -g^* (\bar{\sigma}(t) - \bar{\sigma}_M(t)) \Gamma \sigma(t), \quad (2.27)$$

где  $\Gamma = \Gamma^* > 0$  —  $(l+1) \times (l+1)$ -матрица,  $g \in \mathbb{R}^l$ . Если для любого  $\xi \in \Sigma$  выполняются условия согласованности (2.23), функция  $d(p)r(t)$  — кусочно-непрерывна и ограничена, а фильтр с передаточной функцией  $W_F(\lambda) = g^* L^* (M - A_M)^{-1} b_M$  строго пассивен (см. п. 7.1.3°), то система (2.21), (2.2), (2.22), (2.27) адаптивна в классе  $\Sigma$  по отношению к ЦУ (2.25) и все ее траектории ограничены.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 7.2.1 с использованием теоремы 2.4.1 и частотной теоремы 3.1.4. Устанавливается, что при выполнении условий теоремы 7.2.3 у системы (2.21), (2.2), (2.22), (2.24) существует функция Ляпунова

$$V(x, \tau, t) = (x - x_m(t))^* H (x - x_m(t)) + (\tau - \tau_*)^* H_1 (\tau - \tau_*), \quad (2.28)$$

где  $H = H^* > 0$  —  $n \times n$ -матрица,  $H_1 = H_1^* > 0$  —  $(l+1) \times (l+1)$ -матрица,  $\tau_* = \text{col} (v_*, \theta_*)$  со свойством

$$\dot{V}(x, \tau, t) < 0 \text{ при } x \neq x_m(t). \quad (2.29)$$

Оказывается, что алгоритм (2.27) охватывает все алгоритмы, которые могут быть получены с помощью функции Ляпунова (2.28) со свойством (2.29).

**Теорема 7.2.4.** Пусть выполнены условия согласованности (2.23) и  $L \neq 0$ . Для того чтобы у системы (2.21), (2.2), (2.22), (2.24) существовала функция Ляпунова (2.28) со свойством (2.29), необходимо и достаточно, чтобы алгоритм адаптации имел вид (2.27), а фильтр с передаточной функцией  $W_F(\lambda) = g^* L^* (\lambda I - A_m)^{-1} b_m$  был строго пассивным.

Теорема 7.2.4 доказывается аналогично теореме 7.2.2.

Если взять в (2.27) матрицу  $\Gamma$  блочно-диагональной:  $\Gamma = \text{diag} \{\bar{\Gamma}, \gamma\}$ , где  $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}^* > 0$  —  $l \times l$ -матрица,  $\gamma > 0$ , то алгоритм (2.27) примет более употребительный вид

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma}/dt &= -g^* (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_m) \bar{\Gamma} \bar{\sigma}, \\ d\theta/dt &= -g^* (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_m) \gamma d(p) r(t). \end{aligned} \quad (2.30)$$

б) Система с неявной квазистатической эталонной моделью. Пусть опять ОУ описывается уравнениями (2.21), а структура регулятора задана в виде (2.2). Зададим ЦУ вместо (2.25) соотношением

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |g^* \bar{\sigma}(t) - d(p) r(t)| = 0, \quad (2.31)$$

где  $g \in \mathbb{R}^l$ ,  $\bar{\sigma}(t) = L^* x(t)$ . Введем оценочную функцию

$$Q(x, t) = 0,5 (x - x_*(t))^* H (x - x_*(t)), \quad (2.32)$$

где  $H = H^* > 0$ . Если  $r(t) \equiv r$ , то в (2.32)  $x_*(t) \equiv x_*$  и является установившимся состоянием системы (2.21), (2.2) при  $\tau(t) \equiv \tau_*$  для некоторого  $\tau_*$ , соответствующего устойчивой системе (2.21), (2.2). При этом для определения вектора  $x_* \in \mathbb{R}^n$  имеем равенство

$$(A + b(v_*)^*L^*)x_* = \theta_*bd(0)r, \quad (2.33)$$

где  $\tau_* = \text{col}(v_*, \theta_*)$ ,  $v_* \in \mathbb{R}^l$ . Очевидно, если выбрать  $\theta_*$  в (2.33) так, чтобы выполнялось дополнительное условие

$$g^*L^*x_* = d(0)r, \quad (2.34)$$

то при  $r(t) \equiv r$  ЦУ (2.31) будет достигаться, если достигается вспомогательная цель  $Q(x(t)) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Если  $r(t) \not\equiv \text{const}$ , то для задания  $x_*(t)$  также будем использовать соотношение (2.33), в котором  $d(0)r$  заменено на  $d(p)r(t)$ . Таким образом, в оценочной функции (2.32), в отличие от (2.25), используется неявная эталонная модель, построенная без учета динамики ОУ.

Построение алгоритма скоростного градиента и применение теорем 2.4.1, 3.1.5 приводят к следующему результату.

**Теорема 7.2.5.** Пусть алгоритм адаптации имеет вид

$$d\tau/dt = -[g^*\bar{\sigma}(t) - d(p)r(t)]\Gamma\sigma(t), \quad (2.35)$$

где  $\Gamma = \Gamma^* > 0$  —  $(l+1) \times (l+1)$ -матрица,  $\bar{\sigma}(t) = L^*x(t)$ ,  $g \in \mathbb{R}^l$ . Положим  $h(\lambda) = \delta(\lambda)W(\lambda)$ ,  $W(\lambda) = L^*(M - A)^{-1}b$ ,  $\delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ . Если для любого  $\xi \in \Xi$  полином  $g^*h(\lambda)$  гурвицев степени  $n-1$  с положительными коэффициентами и  $r^{(i)}(t) \in L_2(0, \infty)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_d + 1$ , то система (2.21), (2.2), (2.35) адаптивна в классе  $\Xi$  по отношению к ЦУ (2.31). Если, кроме того,  $r(t)$  ограничена, то все траектории системы ограничены.

Действуя так же, как и при доказательстве теорем 7.2.2, 7.2.4, можно установить справедливость следующей теоремы.

**Теорема 7.2.6.** Пусть  $W(\lambda) \neq 0$ . Тогда условия теоремы 7.2.5 являются необходимыми и достаточными для существования у системы (2.21), (2.2), (2.3) функции Ляпунова  $V(x, \tau, t) = [x - x_*(t)]^*H[x - x_*(t)] +$

$$+ [\tau - \tau_*]^*H_1[\tau - \tau_*]$$

(где  $H = H^* > 0 - n \times n$ -матрица,  $H_1 = H_1^* > 0 - (l+1) \times (l+1)$ -матрица,  $\tau_* \in \mathbb{R}^{l+1}$ ,  $x_*(t)$  удовлетворяет (2.33), (2.34)), обладающей свойством  $\dot{V}(x, \tau, t) < 0$  при  $x \neq x_*(t)$ .

Применим полученные результаты к построению адаптивных регуляторов для ОУ (1.1). Структуру регулятора зададим в виде

$$u = v(p)y(t) + \theta d(p)r(t), \quad (2.36)$$

где  $v(\lambda) = v^* \pi_l(\lambda)$ ,  $v \in \mathbb{R}^l$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^1$ ,  $\tau = \text{col}(v, \theta)$  — вектор подстраиваемых параметров. Алгоритм адаптации для системы с явной моделью принимает вид

$$d\tau/dt = -g(p)(y(t) - y_m(t))\Gamma\sigma(t), \quad (2.37)$$

где  $\sigma(t) = \text{col}(y, \dot{y}, \dots, y^{(l-1)}, d(p)r(t))$ ,  $\deg g(\lambda) = l-1$ ,  $y_m(t)$  — выход эталонной модели (1.2). Применяя теорему 7.2.3, получаем, что система (1.1), (2.36), (2.37) адаптивна в классе  $\Xi$  по отношению к ЦУ (1.3), если для любого  $\xi \in \Xi$  существуют полином  $v_*(\lambda)$  и число  $\theta_* > 0$ , удовлетворяющее условиям согласованности

$$a_m(\lambda) = a(\lambda) + v_*(\lambda)b(\lambda), \quad \theta_* b(\lambda)d(\lambda) = b_m(\lambda),$$

и фильтр с передаточной функцией  $g(\lambda)b(\lambda)/a_m(\lambda)$  строго пассивен. Для строгой пассивности требуется, в частности, чтобы полином  $g(\lambda)$  был гурвицевым степени  $n-m-1$ .

В системе с неявной моделью алгоритм адаптации имеет вид

$$d\tau/dt = -[g(p)y(t) - d(p)r(t)]\Gamma\sigma(t), \quad (2.38)$$

где  $g(\lambda)$  — гурвицев полином степени  $n-m-1$ . Из теоремы 7.2.5 следует, что система (1.1), (2.36), (2.38) адаптивна в классе  $\Xi$  по отношению к ЦУ (2.31), если для любого  $\xi \in \Xi$  ОУ (1.1) — минимально-фазовый, знаки коэффициентов полиномов  $b(\lambda)$ ,  $g(\lambda)$  одинаковы и  $r^{(i)}(t) \in L_2(0, \infty)$ ,  $i = 1, \dots, n_d + 1$ .

Отметим, что если в алгоритме (2.37) величину  $y_m(t)$  задавать не уравнением (1.2), а эталонным уравнением пониженного порядка  $g(p)y_m(t) = d(p)r(t)$ , то алгоритм (2.37) превращается в алгоритм (2.38). В (2.38), однако, выход эталонной модели явно не используется.

Аналогичные результаты можно получить для адаптивных регуляторов с подстройкой знаменателя переда-

точной функции. При этом для систем с явной эталонной моделью можно снять условия согласованности (2.23).

**Пример.** Рассмотрим задачу адаптивного управления летательным аппаратом по углу тангажа для ОУ вида (1.1.13). Предполагая, что величина  $p\vartheta(t)$  доступна измерению, зададим структуру регулятора в виде

$$u(t) = \tau_0 [\vartheta(t) - r(t)] + \tau_1 p\vartheta(t), \quad (2.39)$$

где  $\tau_0, \tau_1$  — подстраиваемые коэффициенты. Возможность сокращения числа подстраиваемых коэффициентов по сравнению с (2.36) обусловлена астатизмом ОУ, т. е. наличием у передаточной функции ОУ (1.1.13) полюса при  $\lambda = 0$ . Алгоритм адаптации, аналогичный (2.38), имеет вид

$$\begin{aligned} d\tau_0/dt &= \gamma_0 \delta(t) [\vartheta(t) - r(t)], \\ d\tau_1/dt &= \gamma_1 \delta(t) p\vartheta(t), \\ \delta(t) &= g_0 [\vartheta(t) - r(t)] + g_1 p\vartheta(t), \end{aligned} \quad (2.40)$$

где  $\gamma_0 > 0, \gamma_1 > 0$ . Напомним, что мы считаем ОУ минимально-фазовым,  $b_0 > 0$ . Из теоремы 7.2.3 следует, что если  $g_0 > 0, g_1 > 0$  и  $dr(t)/dt \in L_2(0, \infty)$  (скорость изменения задающего воздействия затухает), то в системе достигается ЦУ  $\delta(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. поведение выхода  $\vartheta(t)$  ОУ приближается при  $t \rightarrow \infty$  к поведению выхода  $\vartheta_m(t)$  эталонной модели  $(g_1 p + g_0)\vartheta_m(t) = g_0 r(t)$ .

**7.2.3°. Адаптивная стабилизация нелинейного ОУ.** Рассмотрим задачу адаптивной стабилизации ОУ, описываемого уравнениями

$$dx/dt = Ax + b\tilde{u}, \quad \sigma = L^*x, \quad y = d^*\sigma, \quad (2.41a)$$

$$\tilde{u} = u - \psi(y, t), \quad (2.41b)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathbb{R}^l, y \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1, \psi(y, t)$  — некоторая скалярная функция. Уравнения (2.41a) описывают линейную часть ОУ, соотношение (2.41b) задает закон внутренней обратной связи, являющийся, вообще говоря, нелинейным и нестационарным. Будем считать, что от варианта  $\xi$  зависят не только параметры линейной части (2.41a), но и «нелинейность»  $\psi(y, t)$ . Единственная доступная информация о значениях  $\psi(\cdot)$  состоит в том, что график  $\psi(y, t)$  как функции первого аргумента лежит при всех  $t \geq 0$  в первом и третьем квадрантах, т. е. при всех

$t \geq 0$  выполняется неравенство

$$y\psi(y, t) \geq 0. \quad (2.42)$$

В (2.41б) допускаются и разрывные нелинейности; при этом предполагается, что функция  $\psi(y, t)$  стационарна (т. е.  $\dot{\psi}(y, t) \equiv \psi(y)$ , а все точки разрыва  $\psi(y)$  изолированы. Решения возникающих далее уравнений с разрывной правой частью можно понимать в любом разумном смысле (см., например, [24]).

Зададим структуру регулятора в виде

$$u(t) = \tau(t)^* \sigma(t), \quad (2.43)$$

где  $\tau(t) \in \mathbb{R}^l$  — вектор подстраиваемых параметров, и поставим задачу нахождения алгоритма адаптации вида

$$\frac{d\tau}{dt} = F(\sigma(t)) \quad (2.44)$$

так, чтобы система (2.40) — (2.44) была адаптивна в заданном классе  $\Xi$  по отношению к ЦУ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (2.45)$$

Действуя аналогично п. 7.2.1°, приходим к алгоритму адаптации

$$\frac{d\tau}{dt} = -y(t)\Gamma\sigma(t), \quad (2.46)$$

где  $\Gamma = \Gamma^* > 0$ . Прежде чем сформулировать условия работоспособности системы, обозначим через  $b_y(\lambda)$  числитель передаточной функции линейной части (2.41а) «от входа  $\tilde{u}$  к выходу  $y$ », т. е.  $b_y(\lambda) = \delta(\lambda)d^*L^*(M - A)^{-1}b$ , где  $\delta(\lambda) = \det(M - A)$ .

**Теорема 7.2.7.** Если для любого  $\xi \in \Xi$  полином  $b_y(\lambda)$  гурвицев степени  $n - 1$  с положительными коэффициентами, то система (2.41) — (2.43), (2.46) адаптивна в классе  $\Xi$  по отношению к ЦУ (2.45) и все траектории системы ограничены.

Следующая теорема показывает, что алгоритмы вида (2.46) охватывают все алгоритмы класса (2.44), которые можно синтезировать с помощью квадратичной функции Ляпунова (2.9). Для справедливости теоремы нужно потребовать, чтобы условие (2.42) было «неизбыточным». Будем говорить, что связь (2.42) точна для нелинейности  $\psi(y, t)$ , если отношение  $\psi(y, t)/y$  при  $y \neq 0$  и  $t > 0$  принимает любое положительное значение.

**Теорема 7.2.8.** Для существования у системы (2.41) — (2.44) функции Ляпунова вида (2.9) со свойством  $V(x, \tau) < 0$  при  $x \neq 0$  достаточно, а если  $b_{y_1}(\lambda) \not\equiv 0$  и связь (2.42) точна, то и необходимо, чтобы алгоритм адаптации (2.44) имел вид (2.46), а многочлен  $b_y(\lambda)$  был гурвицевым степени  $n - 1$  с положительными коэффициентами.

Рассмотрим подробнее часто встречающийся случай, когда наблюдению доступны регулируемая координата объекта и несколько ее последовательных производных. Пусть ОУ и регулятор описываются уравнениями

$$a(p)y = b(p)[u + \psi(y_1)], \quad y_1 = d(p)y, \quad (2.47)$$

$$u = \tau(p, t)y(t), \quad (2.48)$$

где

$$a(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i, \quad b(\lambda) = \sum_{i=0}^m b_i \lambda^i,$$

$$\tau(\lambda, t) = \sum_{i=0}^{l-1} \tau_i(t) \lambda^i, \quad d(\lambda) = \sum_{i=0}^{l-1} d_i \lambda^i,$$

$p = d/dt$ ,  $\tau_i(t)$  — подстраиваемые коэффициенты. Систему (2.47) можно представить в форме уравнений состояния, если  $m + l \leq n$ . Вектором сенсоров является, очевидно, вектор  $\sigma(t) = \text{col}(y, \dot{y}, \dots, y^{(l-1)})$ , передаточная функция  $W_{y_1/u}(\lambda)$  имеет вид  $W_{y_1/u}(\lambda) = d(\lambda)b(\lambda) \times a(\lambda)^{-1}$ , а полином  $b_{y_1}(\lambda)$  равен  $b_{y_1}(\lambda) = d(\lambda)b(\lambda)$ . Применяя теорему 7.2.7, получаем, что система (2.46) — (2.48) будет аддитивна в классе  $\Xi$  по отношению к ЦУ (2.45), если для любого  $\xi \in \Xi$  полиномы  $b(\lambda)$ ,  $d(\lambda)$  гурвицевы,

$$\deg b(\lambda) + \deg d(\lambda) = n - 1, \quad b(0)d(0) > 0 \quad (2.49)$$

и нелинейность  $\psi(y_1)$  удовлетворяет в точках непрерывности неравенству  $y_1\psi(y_1) \geq 0$ . При  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_0, \dots, \gamma_{l-1}\}$  алгоритм (2.46) принимает простой вид

$$d\tau_i/dt = -\gamma_i y_1 y^{(i)}, \quad i = 0, 1, \dots, l-1. \quad (2.50)$$

**7.2.4°. Аддитивная стабилизация многомерного ОУ.** В настоящем пункте результаты п. 7.2.4° распространяются на многомерные ОУ, т. е. на объекты с несколькими управляющими воздействиями. Для описания ОУ и регулятора сохраним уравнения (2.1), (2.2), в которых будем считать, что  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $n_u \geq 1$ ,  $\tau, b - n \times n_u$ -матрицы.

Передаточная матрица  $W(\lambda) = L^*(M - A)^{-1}b$  теперь будет иметь порядок  $l \times n_u$ . В случае  $n_u > 1$  вместо алгоритма (2.7) будем рассматривать алгоритм

$$d\tau_j/dt = -[g_j^* y] \Gamma_j y, j = 1, \dots, n_u, \quad (2.51)$$

где  $\tau_j$  — столбцы матрицы настраиваемых коэффициентов  $\tau$ ,  $g_j \in \mathbb{R}^l$ ,  $j = 1, \dots, n_u$ ,  $\Gamma_j = \Gamma_j^* > 0$  —  $l \times l$ -матрицы. В алгоритме (2.51) для настройки каждого столбца матрицы  $\tau$ , по существу, используется алгоритм вида (2.7), параметры которого (вектор  $g_i$  и матрица  $\Gamma_j$ ) — свои для каждого столбца.

Приведем формулировки утверждений, являющихся распространением теорем 7.2.1, 7.2.2 на случай  $n_u > 1$ . Для формулировки понадобятся следующие определения.

Пусть  $P(\lambda) — m \times m$ -матрица из правильных дробно-рациональных функций от  $\lambda$ , имеющая вид  $P(\lambda) = S_1^* (\lambda I_n - R)^{-1} S_2$ , где  $R$  — матрица порядка  $n \times n$ ,  $S_1, S_2$  — матрицы порядка  $n \times m$ ,  $I_n$  — единичная  $n \times n$ -матрица. Положим  $\delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - R)$ ,  $\varphi(\lambda) = \delta(\lambda) \det P(\lambda)$ ,  $\Gamma = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda P(\lambda)$ . Можно показать, что  $\varphi(\lambda)$  — полином степени не выше  $n - m$  со старшим членом  $\lambda^{n-m} \det \Gamma$ .

**Определение 7.2.1.** Матрица  $P(\lambda)$  называется *минимально-фазовой*, если полином  $\varphi(\lambda)$  гурвицев. Матрица  $P(\lambda)$  называется *строго минимально-фазовой*, если полином  $\varphi(\lambda)$  гурвицев, а матрица  $\Gamma$  симметрична и положительно определена.

Введенное определение минимально-фазовой матрицы согласуется с известным в теории автоматического управления понятием *минимально-фазового звена* [47]. Минимально-фазовая матрица в смысле определения 7.2.1 — это не что иное, как передаточная матрица многомерного минимально-фазового звена. В частном случае, когда  $m = 1$  и, следовательно,  $P(\lambda) = \varphi(\lambda)/\delta(\lambda)$ , где  $\varphi(\lambda)$  — полином степени не выше  $n - 1$ , минимально-фазовость функции  $P(\lambda)$  означает, что ее числитель гурвицев. При этом строгая минимально-фазовость  $P(\lambda)$  означает, что  $\varphi(\lambda)$  — гурвицев полином степени  $n - 1$  с положительными коэффициентами.

Ниже  $l \times m$ -матрица со столбцами  $g_1, \dots, g_m$  обозначается через  $G$ . Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 7.2.9.** Система (2.1), (2.2), (2.51) адаптивна в классе  $\Xi$  по отношению к ЦУ (2.4), если класс  $\Xi$  определяется условием: для любого  $\xi \in \Xi$  матрица  $\theta_\xi G^* W(\lambda)$  строго минимально-фазовая при некоторой  $\theta_\xi = \text{diag}\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ ,  $\theta_j > 0$ .

**Теорема 7.2.10.** Пусть передаточная матрица  $OY$  не равна нулю тождественно, а ранг матрицы  $b$  равен  $n_u$ . Для существования у системы (2.1) — (2.3) функции Ляпунова вида

$$V(x, \tau) = x^* Hx + \sum_{j=1}^{n_u} (\tau_j - \tau_{j*})^* H_j (\tau_j - \tau_{j*}) \quad (2.52)$$

со свойством  $\dot{V}(x, \tau) < 0$  при  $x \neq 0$  необходимо и достаточно, чтобы алгоритм адаптации имел вид (2.51), а матрица  $\theta G^* W(\lambda)$  была строго минимально-фазовой при некоторой  $\theta = \text{diag}\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ ,  $\theta_j > 0$ . В (2.52)  $H = H^* > 0$  —  $n \times n$ -матрица,  $H_j = H_j^* > 0$ ,  $j = 1, \dots, n_u$ , —  $l \times l$ -матрицы,  $\tau_j$ ,  $\tau_{j*}$  — столбцы матриц  $\tau$ ,  $\tau_*$  соответственно.

Теоремы 7.2.9, 7.2.10 доказываются аналогично теоремам 7.2.1, 7.2.2 с использованием теоремы 3.1.5.

В соответствии с определением строго минимально-фазовой матрицы класс адаптации  $\Xi$  определяется условиями:

1.  $\delta(\lambda) \det \theta_\xi G^* W(\lambda)$  — гурвицев полином.

2. Матрица  $\theta_\Gamma \Gamma$  симметрична и положительно определена, где  $\Gamma = G^* \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda W(\lambda) = G^* L^* b$ .

Так как  $\det \theta_\xi G^* W(\lambda) = \det \theta_\xi \det G^* W(\lambda)$ , то первое условие равносильно гурвицевости полинома  $\delta(\lambda) \det G^* \times W(\lambda)$ . Для проверки второго условия в случаях  $n_u = 2, 3$  оказываются полезными следующие элементарные леммы.

**Лемма 7.2.1.** Пусть  $\Gamma = \{\gamma_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Для существования матрицы  $\theta = \text{diag}\{\theta_1, \theta_2\}$ ,  $\theta_1 > 0$ ,  $\theta_2 > 0$ , такой, что  $\theta \Gamma = [\theta \Gamma]^* > 0$ , необходимо и достаточно, чтобы

1)  $\gamma_{11} > 0$ ,  $\gamma_{11}\gamma_{22} > \gamma_{12}\gamma_{21}$ .

2)  $\gamma_{12}\gamma_{21} > 0$  или  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$ .

**Лемма 7.2.2.** Пусть  $\Gamma = \{\gamma_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Для существования матрицы  $\theta = \text{diag}\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ ,  $\theta_j > 0$ , такой, что  $\theta \Gamma = [\theta \Gamma]^* > 0$ , необходимо и достаточно, чтобы

1)  $\gamma_{11} > 0$ ,  $\gamma_{12}\gamma_{22} > \gamma_{12}\gamma_{21}$ ,  $\det \Gamma > 0$ ;

2) каждый вектор  $r_{ij}$  вида  $r_{ij} = (\gamma_{ij}, \gamma_{ji})$  при  $i \neq j$  либо имел компоненты одного знака, либо был равен нулю, причем при  $r_{ij} \neq 0$  для всех  $i \neq j$  дополнительно требуется, чтобы  $\gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{32} = \gamma_{21}\gamma_{31}\gamma_{32}$ .

Проверка условия строгой минимально-фазовости упрощается, если  $n_u = l$ , а ОУ описывается уравнением

$$A(p)y = B(p)u, \quad (2.53)$$

где  $y, u$  —  $n_u$ -векторы,  $A(\lambda) = I_n \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} A_i \lambda^i$ ,  $B(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \lambda^i$ ,  $A_i, B_i, i = 0, \dots, n-1$  — квадратные матрицы порядка  $l \times l$ . Передаточная матрица ОУ (2.53) равна  $W(\lambda) = [A(\lambda)]^{-1}B(\lambda)$ ; при этом  $\delta(\lambda) = \det A(\lambda)$ . Так как  $m = l$  и матрицы  $G, B(\lambda), A(\lambda)$  — квадратные, то

$$\det \theta G^* W(\lambda) = \det \theta \det G \det B(\lambda),$$

откуда видно, что минимально-фазовость матрицы  $\theta G^* W(\lambda)$  равносильна гурвицевости полинома  $\det B(\lambda)$ . Далее,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda W(\lambda) = B_{n-1}$ , т. е. строгая минимально-фазовость равносильна гурвицевости  $\det B(\lambda)$  и симметричности и положительной определенности матрицы  $\theta G^* B_{n-1}$ . Если, например,  $B_{n-1} = \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ , то можно положить  $\theta = I_m$ ,  $G = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ , где  $\text{sign } \gamma_i = \text{sign } \beta_i$ , т. е. для синтеза адаптивной системы стабилизации достаточно знать знаки элементов матрицы  $B_{n-1}$ .

### § 7.3. Грубость адаптивных систем с эталонной моделью

**7.3.1°. Грубость по отношению к ограниченным возмущениям.** Выше, в §§ 7.1, 7.2, мы рассмотрели задачи адаптивного управления при отсутствии возмущений. В практических ситуациях действием возмущений обычно пренебречь нельзя и синтезированные адаптивные системы для сохранения работоспособности нуждаются в огрублении. Применяемые в §§ 7.1, 7.2 алгоритмы адаптации относятся к классу алгоритмов скоростного градиента, поэтому для их огрубления можно использовать способы, описанные в п. 2.4.3°. Мы рассмотрим два способа огрубления: введение отрицательной обратной связи и введение зоны нечувствительности.

а) *Огрубление введением отрицательной обратной связи.* Этот способ применяется, когда уровень возмущений неизвестен: целью управления считается диссипативность системы. Пусть, например, ОУ описывается уравнением

$$a(p)y(t) = b(p)u(t) + v(t), \quad (3.1)$$

отличающимся от (1.1) наличием ограниченного скалярного возмущения:

$$|v(t)| \leq C_v. \quad (3.2)$$

Для применения результатов п. 2.4.3° необходимо выписать уравнение обобщенного настраиваемого объекта (ОНО) (2.4.1). Для этого (3.1) преобразуется к уравнениям состояния

$$dx/dt = Ax + b[u - \tilde{v}(t)], \quad y = d^*x, \quad (3.3)$$

в которых  $\tilde{v}(t)$  удовлетворяет соотношению  $b(p)\tilde{v}(t) = v(t)$ . Будем считать, что полином  $b(\lambda)$  гурвицев, т. е. ОУ-минимально-фазовый; тогда функция  $\tilde{v}(t)$  будет ограниченной. Из теоремы 2.4.4 следует, что если в правые части алгоритмов адаптации (1.9), (1.18) ввести слагаемое  $\text{grad } \omega(t)$ , где  $\omega(t)$  — выпуклая штрафная функция, удовлетворяющая условию роста (2.4.24), то соответствующие адаптивные системы будут сохранять свойство диссипативности при произвольном уровне возмущений  $C_v$ . Тот же вывод верен и для алгоритмов (2.7), (2.27), (2.35), (2.46), (2.51) (для этих алгоритмов уравнения ОУ уже записаны в форме уравнений состояния).

К рассмотренному случаю могут быть сведены задачи, в которых возмущения обусловлены наличием нелинейности, нестационарности ОУ, действием помех измерения и т. д. Пусть, например, ОУ описывается уравнением

$$a(p)y(t) = b(p)\tilde{u}(t), \quad \tilde{u} = \psi(u), \quad (3.4)$$

где скалярная функция  $\psi(u)$  удовлетворяет для любого  $\xi \in \Xi$  условию линейного роста

$$|\psi(u) - \beta u| \leq C_\psi \quad (3.5)$$

при некоторых  $\beta > 0$ ,  $C_\psi > 0$  и любых  $u \in \mathbb{R}^1$ . (Такой случай может возникнуть, в частности, при учете квантования по уровню в линейном регуляторе, что соответствует наличию на входе ОУ ступенчатой нелинейности  $\psi(u)$ ,

удовлетворяющей (3.5) при  $\beta = 1$ ,  $C_\psi = \kappa/2$ , где  $\kappa$  — шаг квантования.) Уравнение (3.4) сводится к (3.3) введением эквивалентного возмущения  $\tilde{v}(t) = \psi(u(t)) - \beta u(t)$ . Поэтому огрубленные адаптивные системы будут сохранять диссипативность при произвольных  $C_\psi$ .

Несколько иначе проявляется действие помех измерения. Для определенности рассмотрим адаптивный регулятор (2.2), (2.7). Использование в (2.2), (2.7) вместо  $\sigma(t)$  «зашумленного» вектора сенсоров  $\tilde{\sigma}(t) = \sigma(t) + v(t)$  эквивалентно введению в ОУ возмущения, уровень которого пропорционален  $|v(t)|$ , а в алгоритм адаптации — возмущения, уровень которого пропорционален  $|x(t)|$ . Действуя так же, как и при доказательстве теоремы 2.4.4, нетрудно убедиться, что диссипативность системы гарантируется, если интенсивность помехи  $C_v$  достаточно мала, а штрафная функция  $\omega(t)$  удовлетворяет условию квадратичного роста:  $\omega(t) \geq \mu |t|^2$  при  $\mu > 0$  и достаточно больших  $|t|$ . Этот вывод относится ко всем алгоритмам §§ 7.1, 7.2.

Еще раз подчеркнем, что в рассмотренных случаях размер предельного множества синтезированной адаптивной системы зависит от варианта  $\xi$  и определяется как уровнем возмущений, так и параметрами ОУ. В этих условиях естественной ЦУ является наличие у системы ограниченного предельного множества, т. е. ее диссипативность.

б) *Огрубление введением зоны нечувствительности.* Этот способ применяется при известной границе уровня возмущений  $C_v$ . Рассмотрим вначале простейший случай, когда ОУ описывается уравнением (3.1) при  $b(p) = b_0$ . Для получения огрубленного алгоритма адаптации воспользуемся градиентным подходом (см. пп. 1.1.3°, 7.1.4°), взяв вспомогательную оценочную функцию

$$Q(t, \tau) = \begin{cases} \delta^2(t, \tau) - \varepsilon^2 & \text{при } \delta^2(t, \tau) > \varepsilon^2, \\ 0 & \text{при } \delta^2(t, \tau) < \varepsilon^2, \end{cases} \quad (3.6)$$

где  $\varepsilon > C_v$ , а величина  $\delta(t, \tau)$  задается формулой (1.8). В результате придем к алгоритму с зоной нечувствительности

$$\frac{d\tau}{dt} = \begin{cases} -(\operatorname{sign} b_0) \delta(t, \tau(t)) \Gamma z(t) & \text{при } |\delta(t, \tau(t))| > \varepsilon, \\ 0 & \text{при } |\delta(t, \tau(t))| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (3.7)$$

Применяя лемму 7.1.1 для  $Q(t, \tau)$  вида (3.6), получим, что в системе (3.1), (1.6) — (1.8), (3.7) при  $\varepsilon > C_v$ ,  $b(\lambda) = b_0$  и гурвицевом  $a_m(\lambda)$  достигается вспомогательная ЦУ

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |a_m(p)[y(t) - y_m(t)]| \leq \varepsilon. \quad (3.8)$$

Из (3.8) следует достижение ЦУ

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_m(t)| \leq C_m \varepsilon, \quad (3.9)$$

где  $C_m > 0$  определяется по полиному  $a_m(\lambda)$ .

Для огрубления алгоритма с фильтрацией невязки, описанного в п. 7.4.3°, можно воспользоваться теоремой 2.4.5. Легко убедиться, что (1.18) является алгоритмом скоростного градиента по отношению к оценочной функции  $Q(x_F) = x_F^* H x_F$  (функции Ляпунова устойчивого фильтра (1.14)). Поэтому огрубленный алгоритм адаптации будет иметь вид

$$d\tau/dt = \begin{cases} -\delta_F(t) \Gamma z(t) & \text{при } x_F^* H x_F > \varepsilon, \\ 0 & \text{при } x_F^* H x_F < \varepsilon. \end{cases} \quad (3.10)$$

Для применения алгоритма (3.10) необходимо знать матрицу  $H$ , которую удобно вычислять одновременно с построением фильтра (1.14) следующим образом. Зададимся гурвицевой матрицей коэффициентов фильтра  $A_F$  и положительно определенной  $n_F \times n_F$ -матрицей  $G$  и найдем матрицу  $H > 0$  из уравнения Ляпунова  $HA_F + A_F^* H = -G$ . Затем вычислим  $d_F = Hb_F$ , где  $b_F \in \mathbb{R}^{n_F}$  — произвольный ненулевой вектор. Построенный фильтр будет пассивным в силу теоремы 3.1.4, а матрица  $H$  будет обладать нужными свойствами. «Порог»  $\varepsilon$  в (3.10) должен удовлетворять неравенству  $\varepsilon > \varepsilon_*$ , где «оптимальное» значение  $\varepsilon_*$  вычисляется в теореме 2.4.5 через  $C_v$  и параметры эталонной модели (1.2). По теореме 2.4.5 синтезированная система будет адаптивной в классе ОУ (3.1), (3.2) при  $b(\lambda) = b_0$  с заданными  $C_v$ ,  $\text{sign } b_0$  по отношению к ЦУ  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} x_F^* H x_F \leq \varepsilon$ . Можно показать, что ЦУ (3.9) также будет достигаться при некотором  $C_m > 0$ .

Для систем с эталонной моделью пониженного порядка (см. § 7.2) описанный способ огрубления не годится, так

как в этих системах матрица  $H$  зависит, в силу (2.8), от неизвестного вектора  $\tau_* = \tau_*(\xi)$ . Но в п. 7.2.1° было отмечено, что алгоритмы § 7.2. являются алгоритмами скоростного градиента и по отношению к оценочной функции  $Q(\sigma) = (g^* \sigma)^2$ , где  $\sigma$  — сенсор. Поэтому для их огрубления можно вводить зону нечувствительности по невязке  $\eta(t) = g^* \sigma(t)$ :

$$d\tau/dt = \begin{cases} -\eta(t) \Gamma \sigma(t) & \text{при } |\eta(t)| > \varepsilon, \\ 0 & \text{при } |\eta(t)| < \varepsilon, \end{cases} \quad (3.11)$$

где  $\Gamma = \Gamma^* > 0$ ,  $\varepsilon > \varepsilon_*$ . Величина  $\varepsilon_*$  вычисляется в соответствии с теоремой 2.4.5 и зависит от уровня возмущений  $C_v$ , а в задачах слежения, кроме того, от максимальной скорости изменения задающего воздействия  $r(t)$  (точнее, от величины  $C_r$ , в оценке  $|pd(p)r(t)| \leq C_r$ ). Аналогичный способ можно применить и к алгоритмам (1.18), (2.27). Во всех случаях в синтезированных системах будет достигаться ЦУ (3.9) (для задач стабилизации в (3.9) следует положить  $y_m(t) \equiv 0$ ).

**7.3.2°. Грубость по отношению к динамическим возмущениям.** Представляет интерес исследование грубысти адаптивных систем управления по отношению к факторам, имеющим динамическую природу. К числу таких факторов относятся, например, дополнительные инерционности или запаздывания в ОУ, инерционности датчиков и исполнительных механизмов. Часто динамические погрешности возникают при упрощении математического описания ОУ, например при отбрасывании старших производных в уравнении ОУ или при приближенной замене ОУ с распределенными параметрами сосредоточенной (конечномерной) моделью. Обусловленные этими причинами возмущения нельзя априори считать равномерно ограниченными: уровень возмущений зависит от фазовых координат ОУ и состояния дополнительных динамических систем (звеньев), порождающих возмущения. Формально наличие динамических возмущений выражается в повышении истинного порядка уравнений ОУ по сравнению с порядком уравнений, используемых для синтеза регулятора.

Для обеспечения грубысти адаптивной системы по отношению к динамическим возмущениям вследствие неопределенности их уровня наиболее подходит первый

способ из числа рассмотренных в § 2.4 — введение в алгоритм адаптации отрицательной обратной связи. Точное утверждение сформулируем для адаптивных систем стабилизации, рассмотренных в п. 7.2.1°. Динамическое звено, порождающее возмущение, будем считать включенным последовательно с ОУ (в таком виде можно представить широкий класс динамических возмущений). Итак, пусть ОУ описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax + b\tilde{u}, \quad \sigma = L^*x, \quad (3.12)$$

$$\tilde{u} = W_\kappa(p)u, \quad (3.13)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^l$ ,  $u$ ,  $\hat{u} \in \mathbb{R}^1$ . Как обычно, запись (3.13) означает, что  $\tilde{u}(t)$  является выходом динамического звена с передаточной функцией  $W_\kappa(\lambda)$ , входом которого является  $u(t)$ . Параметр  $\kappa > 0$  характеризует степень инерционности звена (3.13). Например, (3.13) может быть звеном первого порядка с передаточной функцией  $W_\kappa(\lambda) = 1/(\kappa\lambda + 1)$ . При этом величина  $\kappa$  является постоянной времени звена; при  $\kappa = 0$  динамические возмущения исчезают. Мы будем требовать, чтобы (3.13) удовлетворяло при некоторых  $\rho > 0$ ,  $C_0(x, u) > 0$ ,  $C_1 > 0$  условию

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(t) - u(t)| &\leq \\ &\leq C_0(x(0), u(0)) e^{-\rho t/\kappa} + C_1 \int_0^t e^{-\rho(t-s)/\kappa} \left| \frac{du}{ds} \right| ds, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где  $x(0)$  — начальное состояние звена (3.13). Нетрудно показать, что если звено (3.13) задано уравнениями состояния  $\kappa dX/dt = PX + qu$ ,  $\tilde{u} = r^*X$ ,  $X \in \mathbb{R}^N$ , то (3.14) выполнено, когда матрица  $P$  гурвицева и  $r^*P^{-1}q = -1$  (последнее соотношение означает, в силу равенства  $r^*P^{-1}q = -W_\kappa(0)$ , отсутствие у звена (3.13) статической ошибки). Например, для уравнения  $\kappa d\tilde{u}/dt + \tilde{u}(t) = u(t)$ , соответствующего передаточной функции  $W_\kappa(\lambda) = 1/(\kappa\lambda + 1)$ , условие (3.14) выполнено при  $\rho = C_1 = 1$ ,  $C_0(\tilde{u}, u) = |\tilde{u} - u|$ . В общем случае звено (3.13) может иметь распределенные параметры и описываться, например, дифференциальным уравнением в бес-

конечномерном фазовом пространстве или интегральным уравнением \*).

Адаптивный регулятор зададим уравнениями

$$u(t) = \tau(t)^* \sigma(t), \quad (3.15)$$

$$d\tau/dt = -g^* \sigma(t) \Gamma \sigma(t) - \text{grad } \omega(\tau), \quad (3.16)$$

где  $g \in \mathbb{R}^l$ ,  $\omega(\tau) \geq 0$  — выпуклая штрафная функция. Алгоритм адаптации (3.16) представляет собой огрубленный вариант алгоритма (2.7). Прежде чем сформулировать ЦУ, заметим, что правые части уравнений (3.12), (3.15), (3.16) являются нелинейными функциями состояния системы  $\text{col}(x, t)$ , не удовлетворяющими глобально-му условию Липшица. Простые примеры показывают, что для таких систем диссипативность может нарушаться при сколь угодно малых  $\kappa$ , так как при «больших» начальных условиях  $x(0), \tau(0)$  уровень возмущения  $v(t) = |\tilde{u}(t) - u(t)|$  может быть велик, т. е. необходимая степень малости  $\kappa$  должна быть связана с величиной начальных условий. Вместо диссипативности для таких систем можно потребовать наличия так называемой *пределальной диссипативности при  $\kappa \rightarrow 0$* . Это свойство состоит в том, что в фазовом пространстве системы существует шар  $D_\infty$ , в который сходятся при  $t \rightarrow \infty$  все траектории системы с начальными условиями из некоторого шара  $D_0(\kappa)$ , причем для любого ограниченного множества  $S$  найдется такое  $\kappa > 0$ , что  $D_0(\kappa) \supset S$ . С практической точки зрения предельная диссипативность при  $\kappa \rightarrow 0$ , по существу, совпадает с обычной диссипативностью для малых  $\kappa$ .

Учитывая сказанное, целью управления будем считать предельную диссипативность системы (3.12) — (3.16) при  $\kappa \rightarrow 0$ . Пусть  $h(\lambda)$  — числитель передаточной функции ОУ (3.12):  $h(\lambda) = \delta(\lambda)W_{\sigma/u}(\lambda)$ . Справедлива следующая теорема.

**Теорема 7.3.1.** Пусть для любого  $\xi \in \Xi$  полином  $g^* h(\lambda)$  гурвицев степени  $n - 1$  с положительными коэффи-

\*) Если звено (3.13) описывается дифференциальным уравнением в баанаховом пространстве  $xdX/dt = PX + qu$ ,  $\tilde{u} = r^* X$ , где  $P$  — линейный оператор, порождающий сильно непрерывную полугруппу [118], то условие (3.14) выполняется, когда оператор  $P$  гурвицев и  $W_n(0) = 1$ .

циентами, а возмущение  $\tilde{u}(t) - u(t)$  удовлетворяет условиям (3.13), (3.14) (постоянные  $\rho, C_0(\cdot), C_1$  могут зависеть от  $\xi$ ). Если функция  $\omega(\tau)$  выпукла, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет при  $\mu > 0$  и достаточно больших  $|\tau|$  неравенству  $\omega(\tau) \geq \mu |\tau|^2$ , то система (3.12), (3.15), (3.16) предельно диссипативна при  $\kappa \rightarrow 0$  для любого  $\xi \in \Xi$ .

Аналогичное утверждение справедливо для задачи слежения. Кроме того, можно получить более точные результаты, касающиеся близости траекторий исходной и возмущенной систем.

**7.3.3°. Грубость по отношению к дискретизации алгоритма адаптации. Метод непрерывных моделей.** Рассмотрим вопрос о влиянии на работоспособность адаптивной системы дискретизации алгоритма адаптации. Этот вопрос важен при реализации адаптивного регулятора в ЦВМ. По причинам, отмеченным в п. 7.3.2°, адаптивные системы в условиях помех могут терять диссипативность даже при сколь угодно малом шаге дискретизации  $v > 0$ . Поэтому под ЦУ вновь будем понимать предельную диссипативность при  $v \rightarrow 0$ . Сформулируем общие условия предельной диссипативности при  $v \rightarrow 0$  для алгоритмов скоростного градиента, огрубленных введением отрицательной обратной связи. Для простоты ограничимся случаем, когда функции  $F(x, \tau, t, \xi)$ ,  $Q(x, t)$  (см. § 2.4) не зависят явно от времени.

**Теорема 7.3.2.** Пусть уравнение ОНО имеет вид

$$dx/dt = F(x, \tau, \xi) + v(t, \xi), \quad (3.17)$$

причем  $|v(t, \xi)| \leq C_v(\xi)$ , а функция  $F(x, \tau, \xi)$  удовлетворяет условиям локальной ограниченности (2.4.4) и локальной липшицевости:

$$|F(x', \tau, \xi) - F(x'', \tau, \xi)| \leq C(\beta, \tau) |x' - x''|$$

при  $|x'| \leq \beta$ ,  $|x''| \leq \beta$ . Пусть  $|\partial^2 Q(x)/\partial x_i \partial x_j| \leq C_Q$ , а алгоритм адаптации описывается разностным уравнением

$$\tau(t) = \tau(t_k) - v \Gamma \operatorname{grad}_\tau [\Phi(x(t_k), \tau(t_k), \xi) + \omega(\tau)] \quad (3.18)$$

при  $t_k < t \leq t_{k+1}$ ,  $t_k = kv$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , где  $\Phi(x, \tau, \xi) = [\operatorname{grad} Q(x)]^* F(x, \tau, \xi)$ ,  $\omega(\tau) \geq \mu |\tau|^2$  при  $\mu > 0$

и достаточно больших  $|\tau|$ . Тогда система (3.17), (3.18) предельно диссипативна при  $v \rightarrow 0$ .

Теореме 7.3.2 можно дать другую интерпретацию, связанную с так называемым методом непрерывных моделей. Этот метод применяется для синтеза дискретных адаптивных систем управления и основан на переходе от непрерывно-дискретной стохастической системы, состоящей из непрерывного объекта и дискретного алгоритма адаптации, к некоторой непрерывной системе, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями. Такая упрощенная непрерывная система (она строится по вполне определенным правилам) называется детерминированной непрерывной моделью исходной системы. Для детерминированной модели синтезируется непрерывный алгоритм адаптации. При этом используется один из известных методов (см., например, §§ 7.1, 7.2). Единственное, о чем надо позаботиться, — это о сохранении работоспособности системы при возврате к дискретному времени. Но как раз в этом и состоит утверждение теоремы 7.3.2.

Поясним применение метода непрерывных моделей на примере стабилизации неустойчивого ОУ вида

$$dx/dt = Ax + bu + v(t), \quad \sigma(t) = L^*x(t) \quad (3.19)$$

при помощи адаптивного регулятора

$$u(t) = \tau(t)^* \sigma(t), \quad (3.20)$$

$$\tau(t_{k+1}) = \Phi_v(\sigma(t_k), \tau(t_k)), \quad (3.21)$$

где  $t_k = kv$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Поскольку на ОУ действуют возмущения неизвестной интенсивности, под стабилизацией понимается обеспечение диссипативности системы (3.19) — (3.21). Построим упрощенную непрерывную модель системы (3.19) — (3.21). Для этого представим (3.21) в виде

$$\tau(t_{k+1}) = \tau(t_k) + v\Psi_v(\sigma(t_k), \tau(t_k)), \quad (3.22)$$

где  $\Psi_v(\sigma, \tau) = [\Phi_v(\sigma, \tau) - \tau]/v$ . Пусть в представлении (3.22) функция  $\Psi_v(\sigma, \tau)$  ограничена при малых  $v > 0$ . Тогда, считая  $v$  малым, отбрасывая возмущения в (3.19) и переходя в (3.22) к непрерывному времени, приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx/dt &= Ax + bu, \quad \sigma = L^*x, \quad u = \tau^*x, \\ dt/dt &= \Psi_v(\sigma, \tau). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Система (3.23) называется *детерминированной непрерывной моделью* системы (3.19) — (3.21). Для синтеза устойчивой непрерывной модели воспользуемся огрубленным алгоритмом (3.16). Возвращаясь к дискретному времени, получим следующий алгоритм адаптации:

$$\tau(t_{k+1}) = \tau(t_k) - v [g^* \sigma(t_k) \Gamma \sigma(t_k) + \text{grad } \omega(\tau(t_k))]. \quad (3.24)$$

Алгоритм (3.24) будет обеспечивать предельную диссипативность системы (3.19), (3.20), (3.24) при  $v \rightarrow 0$ , если для любого  $\xi \in \Xi$  полином  $g^* h(\lambda)$  гурвицев степени  $n-1$  с положительными коэффициентами и  $\omega(\tau) \geq \mu |\tau|^2$  при достаточно больших  $|\tau|$ . Это следует из теорем 7.2.1, 7.3.2.

Другое применение метода непрерывных моделей — это получение приближенных оценок скорости сходимости процессов адаптации. Искомые оценки получаются при помощи непрерывной модели процесса. Для исходного процесса эти оценки будут приближенными, но точность их возрастает по мере уменьшения шага дискретности. Если же шаг дискретности стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , то точность оценок растет с ростом номера шага и непрерывную модель можно применять для исследования сходимости (устойчивости) процесса адаптации.

## § 7.Д. Доказательства лемм и теорем

**7.Д.1°. Доказательство леммы 7.1.1.** Рассмотрим производную функции (1.13) в силу уравнения (1.11). Вследствие выпуклости по  $\tau$  функции  $Q(\tau, t)$  получим

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tau, t) &= -(\tau - \tau_*)^* \text{grad}_\tau Q(\tau, t) - Q(\tau_*, t) \leq \\ &\leq -Q(\tau, t) \leq 0, \end{aligned}$$

откуда  $|\tau(t) - \tau_*|_{\mathbb{R}^{n-1}}^2 \leq 2V(\tau(t), t) \leq 2V(\tau(0), 0)$  и, значит, функция  $\tau(t)$  ограничена. Интегрируя неравенство  $dV(\tau(t), t)/dt \leq -Q(\tau(t), t)$  по отрезку  $[0, t]$  для любого  $t \geq 0$ , получаем

$$\int_0^t Q(\tau(s), s) ds \leq V(\tau(0), 0) - V(\tau(t), t) \leq V(\tau(0), 0),$$

откуда непосредственно следует (1.12). Лемма доказана.

**7.Д.2°. Доказательство теоремы 7.1.1.** При доказательстве нам понадобятся некоторые известные свойства линейных устойчивых систем, которые сформулируем в виде леммы.

**Лемма 7.Д.1.** Рассмотрим систему

$$dx/dt = Px(t) + qu(t), \quad y(t) = d^*x(t),$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ , матрица  $P$  гурвицева. Пусть  $d^*(M_{n_x} - P)^{-1}q = B(\lambda)/a(\lambda)$ ,  $a(\lambda) = \det(M_{n_x} - P)$ , причем степени элементов полиномиальной матрицы  $B(\lambda)$  не превышают  $m < n_x$ .

Справедливы следующие утверждения \*):

1. Если  $u(t) \in L_2(0, \infty)$ , то  $x(t)$  ограничена на  $x(t) \in L_2(0, \infty)$ ,  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $y^{(i)}(t)$  ограничена,  $y^{(i)}(t) \in L_2(0, \infty)$ ,  $y^{(i)}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  для  $i = 0, 1, \dots, n_x - m - 1$ .

2. Если  $u(t) \in L_2(0, \infty)$ ,  $u(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то  $dx/dt \rightarrow 0$ ,  $y^{(i)}(t) \rightarrow 0$ ,  $i = 1, \dots, n_x - m$ , при  $t \rightarrow \infty$ .

3. Если  $u(t)$  ограничена, то ограничены функции  $x(t)$ ,  $dx/dt$ ,  $y^{(i)}(t)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n_x - m$ .

Пусть  $\delta(\tau(t), t)$  определяется из (1.8). Как показано в п. 7.1.2°,  $\delta(\tau, t) = b_0(\tau - \tau_*)^* z(t)$ . Поэтому алгоритм (1.9) является частным случаем (1.11), если задать  $Q(\tau, t) = \delta^2(\tau, t)$ . При  $\tau = \tau_*$ , очевидно,  $\delta(\tau, t) = 0$  и, следовательно, условия леммы 7.1.1 выполнены. Из леммы следует, что  $\delta^2(\tau(t), t) \in L_2(0, \infty)$  и вектор-функция  $\tau(t)$  ограничена. Если заметить теперь, что  $a_m(p)(y(t) - y_m(t)) = \delta(\tau(t), t)$ , то утверждение теоремы будет немедленно следовать из леммы 7.Д.1.

**7.Д.3°. Доказательство леммы 7.1.2.** Воспользуемся теоремой 3.1.4. Так как частотные условия (1.19) предполагаются выполненными, то по упомянутой теореме существует  $N_F \times N_F$ -матрица  $H = H^* > 0$  ( $N_F$  — размерность вектора  $x_F$  состояния фильтра) такая, что

$$HA_F + A_F^*H < 0, \quad Hb_F = d_F. \quad (\text{Д.4})$$

\*) Будем писать  $f(t) \in L_2(0, \infty)$ , если  $f(t)$  — измеримая вектор-функция на  $[0, \infty)$ , такая, что  $\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt < \infty$ .

Возьмем матрицу  $H$  со свойствами (Д.1) и построим функцию (1.20). Оценивая производную функции (1.20) в силу системы (1.14), (1.16), (1.18), получим

$$\begin{aligned} dV/dt &= 2x_F^* H A_F x_F + 2x_F^* H b_F \delta - 2(\tau - \tau_*)^* z(t) \delta_F - \\ &- \kappa \delta_*^2 = -x_F^* R x_F + 2\delta_F \delta - 2(\delta - \delta_*) \delta_F - \kappa \delta_*^2 = \\ &= -x_F^* R x_F + 2\delta_F \delta_* - \kappa \delta_*^2 \leq -x_F^* R x_F + \delta_F^2/\kappa, \end{aligned}$$

где  $R = R^* > 0$  и для краткости обозначено  $\delta = \delta(\tau(t), t)$ ,  $\delta_* = \delta(\tau_*, t)$ ;  $\delta_F = \delta_F(t)$ . При достаточно большом  $\kappa > 0$  и малом  $C_\delta > 0$  справедливо неравенство

$$dV/dt \leq -C_\delta \delta_F^2. \quad (\text{Д.2})$$

Из (Д.2) следует, что функции  $x_F(t)$ ,  $\tau(t)$  ограничены. Интегрируя (Д.2), получим, что  $C_\delta \int_0^t \delta_F^2(s) ds \leq V_0$  и, значит,  $\delta_F(t) \in L_2(0, \infty)$ . Если  $z(t)$  ограничена, то будет ограниченной функция  $\delta(t)$ , а следовательно, и функции  $dx_F/dt$ ,  $d\delta_F(t)/dt$ . Из леммы 2.Д.5 при  $Q = |\delta_F(t)|^2$  получаем, что  $\delta_F(t) \rightarrow 0$ . Лемма доказана.

**7.Д.4°. Доказательство теоремы 7.1.2.** Докажем вначале ограниченность вектора  $z(t)$ , заданного соотношением (1.6). По первой части леммы 7.1.2  $\delta_F(t) \in L_2(0, \infty)$ . Из (1.8) следует, что

$$\delta_F(t) = a_m(p) y_F(t) - b_m(p) r_F(t) + \mu(t),$$

где  $\mu(t)$  — решение однородного уравнения  $a_F(p) \mu(t) = 0$ . Очевидно,  $\mu(t) \in L_2(0, \infty)$ ,  $\mu(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Функции  $\delta_F(t)$ ,  $b_m(p) r_F(t)$ ,  $\mu(t)$  ограничены, поэтому из леммы 7.Д.1 следует, что  $y_F^{(i)}(t)$  ограничены при  $i = 0, \dots, n$ , т. е. ограничена функция  $a_F(p) y_F(t)$ . В силу строгой пассивности фильтра (1.14)  $\deg b_F(\lambda) = 1 + \deg a_F(\lambda)$ . Применяя лемму 7.Д.1 к системе  $a_F(p) y_F(t) = b_F(p) y(t)$ , в которой сигнал  $a_F(p) y_F(t)$  рассматривается как входной, получаем, что  $y^{(i)}(t)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , ограничены, т. е. ограничен вектор  $z(t)$ . Теперь, по второй части леммы 7.1.2, мы можем заключить, что  $\delta_F(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Запишем, учитывая (1.8), равенство

$$a_F(p) \delta_F(t) = a_m(p) b_F(p) [y(t) - y_m(t)]. \quad (\text{Д.3})$$

Считая в (Д.3) величину  $\delta_F(t)$  входом и вновь применяя лемму 7.Д.1, получим, что  $y^{(i)}(t) - y_m^{(i)}(t) \rightarrow 0$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , что и требовалось доказать.

**7.Д.5°. Доказательство теорем 7.2.1, 7.2.2.** Доказательство теоремы 7.2.1 непосредственно вытекает из рассуждений перед ее формулировкой, теоремы 2.4.1 и следствия из теоремы 3.1.5. Для доказательства теоремы 7.2.2 запишем производную функции (2.9) в силу системы (2.1) – (2.3) в виде

$$\dot{V}(x, \tau) = x^* (HA_* + (A_*)^* H)x + 2(\tau - \tau_*)^* \times \\ \times [H_1 F(\sigma) + x^* H b \sigma], \quad (\text{Д.4})$$

где  $A_* = A + b(\tau_*)^* L^*$ . В силу линейности по  $\tau$  правой части (Д.4) условие (2.10) эквивалентно соотношениям  $HA_* + (A_*)^* H < 0$ ,  $F(\sigma) = -(x^* H b) H_1^{-1} \sigma$ . Так как  $W(\lambda) \not\equiv 0$ , то  $y \not\equiv 0$  и, следовательно,  $x^* H b = \text{const}$  при  $y = \text{const}$ , что равносильно справедливости равенства  $Hb = Lg$  для некоторого  $l$ -вектора  $g$ . Таким образом, (2.10) равносильно тому, что алгоритм адаптации имеет вид (2.7), где  $\Gamma = H_1^{-1} > 0$ , а вектор  $g$  удовлетворяет соотношениям (2.8). Применяя следствие из теоремы 3.1.5, получаем доказываемое утверждение.

**7.Д.6°. Доказательство теоремы 7.2.5.** Покажем, что (2.35) является алгоритмом скоростного градиента по отношению к оценочной функции (2.32) для некоторых  $H = H^* > 0$ ,  $\tau_* = \text{col}(v_*, \theta_*) \in \mathbb{R}^{l+1}$ , и воспользуемся теоремой 2.4.1. Пусть вначале  $r(t) \equiv r$ . Вычисляя производную функции (2.32) в силу (2.21), (2.2), имеем

$$dQ/dt = (x - x_*)^* H (Ax + bv^* L^* x + b\theta d(0)r), \quad (\text{Д.5})$$

где  $\tau = \text{col}(v, \theta)$ . Из (Д.5) следует, что

$$\text{grad}_v(dQ/dt) = \delta(t)\bar{\sigma}, \quad \partial(dQ/dt)/\partial\theta = \delta(t)d(0)r,$$

где  $\delta(t) = (x - x_*)^* H b$ . Пользуясь условиями теоремы и следствием из теоремы 3.1.5, получаем, что для некоторых  $H = H^* > 0$ ,  $v_* \in \mathbb{R}^l$  выполняются соотношения

$$Hb = Lg, HA_* + (A_*)^* H < 0, A_* = A + b(v_*)^* L^*. \quad (\text{Д.6})$$

Для  $H, v_*$ , удовлетворяющих (Д.6), получим  $x^* H b = g^* \bar{\sigma}(t)$ ,  $(x_*)^* H b = g^* L^* x_*$ . Но вектор  $x_*$  удовлетворяет (2.33), поэтому  $g^* L^* x_* = g^* L^* A_*^{-1} b \theta_* d(0)r$ . Выбирая

$\theta_* = (g^* L^* A_*^{-1} b)^{-1}$ , убеждаемся в том, что алгоритм скоростного градиента совпадает с (2.35) и справедливо соотношение (2.34). Кроме того, в силу (Д.6) при найденных  $H, v_*$ ,  $\theta_*$  выполняется условие (2.4.7) теоремы 2.4.1. Проверка остальных условий теоремы 2.4.1 тривиальна. Достижение ЦУ (2.31) следует из того, что по теореме 2.4.1  $x(t) - x_* \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Пусть теперь  $r(t) \not\equiv \text{const}$ ; тогда при вычислении  $\partial Q/dt$  следует заменить  $d(0)r$  на  $d(p)r(t)$  и добавить к правой части (Д.5) слагаемое  $(x - x_*)^* H b dx_* / dt$ , не превышающее по норме величины  $C |x - x_*| \mu(t)$ , где  $\mu(t) = |\rho d(p)r(t)| \in L_2(0, \infty)$ . Как и при доказательстве леммы 7.1.2, устанавливаем, что функция  $V(x, \tau, t)$ , вводимая в теореме 7.2.6, ограничена и  $\delta(t) \in L_2(0, \infty)$ . Но отсюда следует, что все траектории системы (2.21), (2.2), (2.35) ограничены и, следовательно,  $\delta(t) = g^* \bar{\sigma}(t) - d(p)r(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.

**7.Д.7°. Доказательство теорем 7.2.7, 7.2.8.** Удобнее начать с доказательства теоремы 7.2.8.

**Достаточность.** Пусть алгоритм адаптации задается соотношением (2.46), а полином  $b_u(\lambda)$  гурвицев степени  $n - 1$  с положительными коэффициентами. В силу следствия из теоремы 3.1.5 существуют матрица  $H = H^* > 0$  и  $l$ -вектор  $\tau_*$  такие, что  $HA_* + (A_*)^* H = -R < 0$ ,  $Hb = Ld$ ,  $A_* = A + B[\tau_*]^* L^*$ . Положим  $H_1 = \Gamma^{-1}$  и рассмотрим функцию  $V(x, \tau)$  вида (2.9) для выбранных  $H, \tau_*, H_1$ . Вычисляя производную от  $V(x, \tau)$  в силу системы (2.41) — (2.43), (2.46), получим

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, \tau) = & 2x^*H[Ax + b(\tau^*\sigma + \psi(y, t))] - \\ & - 2(\tau - \tau_*)^*H_1y\Gamma\sigma = -x^*Rx - y\psi(y, t),\end{aligned}$$

откуда видно, что условие  $\dot{V} < 0$  при  $x \neq 0$  выполняется вследствие (2.42).

**Необходимость.** Пусть у системы (2.41) — (2.44) существует функция  $V(x, \tau)$  вида (2.9) со свойством (2.10). Выражение для  $\dot{V}(x, \tau)$  можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, \tau) = & x^*(HA_* + (A_*)^*H)x + 2x^*Hb\psi(y, t) + \\ & + 2(\tau - \tau_*)^*[H_1F(\sigma) + x^*Hb\sigma], \quad (\text{Д.7})\end{aligned}$$

где  $A_* = A + b [\tau_*]^* L^*$ . Так же, как и при доказательстве теоремы 7.2.2, получаем, что  $F(\sigma) = -(g^* \sigma) H_1^{-1} \sigma$ , где  $g$  — некоторый  $l$ -вектор, причем  $Hb = Lg$ . Теперь (Д.7) принимает вид

$$\dot{V}(x, \tau) = x^* (HA_* + (A_*)^* H)x - 2x^* Lg\psi, \quad (\text{Д.8})$$

где  $\psi = \psi(y, t)$ . Воспользуемся теперь условием точности связи (2.42), которое означает, что для любой пары чисел  $(y_0, \psi_0)$  такой, что  $y_0 \psi_0 > 0$ , существуют решение системы (2.41) — (2.44) и число  $\mu > 0$ , удовлетворяющие в некоторый момент  $t_0$  равенствам  $\mu y_0 = d^* L^* x(t_0)$ ,  $\mu \psi_0 = \psi(y(t_0), t_0)$ . Так как  $\dot{V} \leq 0$  вдоль любого решения системы, то, обозначив через  $W(x, \psi)$  правую часть (Д.8), видим, что функция  $W(x, \psi)$  удовлетворяет условию:  $W(x, \psi) \leq 0$  при всех  $x, \psi$  таких, что  $y\psi > 0$ . По непрерывности,  $W(x, \psi) \leq 0$  и при  $y\psi \geq 0$ . Но функции  $W(x, \psi)$  и  $U(x, \psi) = y\psi = x^* L d\psi$  — квадратичные формы вектора  $z = \text{col}(x, \psi)$ . Поэтому можно воспользоваться следующим утверждением.

**Лемма 7.Д.2 ([24], с. 67).** Пусть  $Q(z)$ ,  $G(z)$  — квадратичные формы на линейном пространстве  $Z = \{z\}$ , причем  $G(z_0) > 0$  для некоторого вектора  $z_0 \in Z$ . Условие  $Q(z) \geq 0$  при  $G(z) \geq 0$  равносильно существованию числа  $\theta \geq 0$  такого, что  $Q(z) - \theta G(z) \geq 0$  для всех  $z \in Z$ .

Применяя лемму 7.Д.2 к формам  $Q(z) = -W(x, \psi)$  и  $G(z) = U(x, \psi)$ , получим, что существует число  $\theta \geq 0$  такое, что

$$x^* (HA_* + (A_*)^* H)x + \psi \sigma^* (-2g + \theta d) \leq 0 \quad (\text{Д.9})$$

при всех  $x, \psi$ . Но левая часть (Д.9) есть линейная функция от  $\psi$  при каждом  $x$ , а линейная функция не меняет знака, только если коэффициент при  $\psi$  обращается в нуль, т. е. если  $\sigma^*(2g - \theta d) = 0$ . Отсюда  $2g = \theta d$ . Так как  $H > 0$  и  $Hb = Lg$ , то  $g \neq 0$  и, следовательно,  $\theta > 0$ . Полагая  $\Gamma = H_1^{-1} \theta / 2$ , получим, что  $F(\sigma) = d^* \sigma \Gamma \sigma$ , т. е. алгоритм адаптации имеет вид (2.46). Теперь из (Д.9) вытекает неравенство  $HA_* + (A_*)^* H < 0$ . Применяя следствие из теоремы 3.1.5, получаем, что полином  $b_y(\lambda)$  гурвицев степени  $n - 1$  с положительными коэффициентами. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 7.2.7. Из доказательства теоремы 7.2.8 (достаточности) следует, что

в условиях теоремы 7.2.7 для любого  $\xi \in \Xi$  существует функция  $V(x, t)$  вида (2.9) такая, что для любого решения  $\{x(t), \tau(t)\}$  системы (2.41)–(2.44), (2.46) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} dV/dt &= -x(t)^* Rx(t) - \theta y\psi(y, t), \\ dV/dt &\leq -\varepsilon |x(t)|^2 \end{aligned} \quad (\text{Д.10})$$

для некоторого  $\varepsilon > 0$ . Поэтому существует  $\lim V(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Интегрируя (Д.10) на каждом отрезке  $[0, T]$ , получим, что  $x(t) \in L_2(0, \infty)$ . Но правая часть (2.46) является квадратичной формой вектора  $x(t)$ , поэтому существует конечный  $\lim \tau(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Учитывая вид функции  $V(t)$ , получаем, что существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)^* H x(t) = \mu$ . Но  $x(t) \in L_2(0, \infty)$  и, значит,  $\mu = 0$ , т. е. ЦУ (2.45) достигается. Теорема доказана.

**7.Д.8°. Доказательство теоремы 7.3.1.** Докажем вначале два вспомогательных утверждения.

**Лемма 7.Д.3.** Рассмотрим систему дифференциальных неравенств

$$\begin{aligned} dV/dt &\leq -\alpha_1(V) + C_1(V, \eta), \\ d\eta/dt &\leq -\alpha_2(\eta)/\kappa + C_2(V, \eta), \end{aligned} \quad (\text{Д.11})$$

в которых  $V = V(t) \geq 0$ ,  $\eta = \eta(t) \geq 0$  – непрерывно дифференцируемые функции,  $\kappa > 0$  – параметр. Пусть правые части (Д.11) непрерывны и для некоторых  $V_* > 0$ ,  $\eta_* > 0$  удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_1(V) > 0, \alpha_2(\eta) > 0, C_i(V, \eta) \leq \bar{C}_i(V) \alpha_2(\eta) \quad (\text{Д.12})$$

при  $i = 1, 2$ ,  $V > V_*$ ,  $\eta > \eta_*$ . Тогда система (Д.11) предельно-диссипативна при  $\kappa \rightarrow 0$  и ее предельное множество содержится в множестве  $D_* = \{(V, \eta): V \leq V_*, \eta \leq \eta_*\}$ .

**Доказательство.** Положим  $\bar{C}(V) = \bar{C}_1(V) + \bar{C}_2(V)$ ,  $D(\kappa) = \{(V, \eta): \bar{C}(V + \eta) \leq (2\kappa)^{-1}\}$ . Функцию  $\bar{C}(V)$  можно считать неубывающей, заменив в противном случае  $\bar{C}(V)$  на  $\sup_{\bar{V} \leq V} \bar{C}(\bar{V})$ . Множества  $D(\kappa)$ , очевидно,

неограниченно расширяются при  $\kappa \rightarrow 0$ . Для доказательства леммы достаточно показать, что все решения системы (Д.11) с начальными условиями из множества  $D(\kappa)$  попадают при достаточно больших  $t$  в множество  $D_*$ . Будем

считать  $\kappa > 0$  настолько малым, чтобы  $D(\kappa) \supset D_*$ . Оценивая производную функции  $U(V, \eta) = V + \eta$  в силу (Д.11), получим

$$dU(V, \eta)/dt \leq -\alpha_1(V) - \alpha_2(\eta)/\kappa + \bar{C}(V)\alpha_2(\eta).$$

Если  $V > V_*$ ,  $\eta > \eta_*$ ,  $(V, \eta) \in D(\kappa)$ , то, в силу (Д.12),  $dU(V, \eta)/dt \leq$

$$\leq -\alpha_1(V) - \alpha_2(\eta)/(2\kappa) + \alpha_2(\eta)[\bar{C}(V) - (2\kappa)^{-1}] < 0.$$

Поэтому траектории, начинающиеся в множестве  $D(\kappa)$ , останутся в нем при всех  $t \geq 0$ . Более того, любая такая траектория войдет при достаточно большом  $t$  в множество  $D_*$ , так как  $dV/dt < 0$  при  $(V, \eta) \in D(\kappa) \setminus D_*$ . Лемма доказана.

**Лемма 7.Д.4.** Рассмотрим систему

$$dz/dt = F(z, v), \quad (\text{Д.13})$$

$$v(t) = [W_\kappa(p) - 1]\Phi(z), \quad (\text{Д.14})$$

где  $z = z(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $v(t) \in \mathbb{R}^1$ , функция  $F(z, v)$  непрерывна, а функция  $\Phi(z)$  непрерывно дифференцируема. Пусть в силу (Д.13), (Д.14) справедливо неравенство

$$|v(t)| \leq R_0(X(0), v(0)) e^{-vt/\kappa} + \int_0^t e^{-v(t-s)/\kappa} [R_1(z(s)) + R_2(z(s)) |v(s)|] ds, \quad (\text{Д.15})$$

в котором  $v > 0$ ,  $\kappa > 0$ ,  $X$  — вектор состояния звена (Д.14), функции  $R_0(X, v)$ ,  $R_1(z)$ ,  $R_2(z)$  непрерывны и положительны. Пусть, кроме того, существует гладкая функция  $V(z) \geq 0$ , удовлетворяющая условиям

$$V(z) \rightarrow +\infty \text{ при } |z| \rightarrow +\infty, \quad (\text{Д.16})$$

$$dV(z, t)/dt \leq -\alpha(z(t)) + R_3(z(t)) |v(t)|, \quad (\text{Д.17})$$

где  $dV(z)/dt$  — производная функции  $V(z)$  в силу (Д.13),  $\alpha(z)$ ,  $R_3(z)$  непрерывны, причем  $\alpha(z) > 0$  вне некоторого ограниченного множества  $D$ . Тогда система (Д.13), (Д.14) предельно-диссипативна при  $\kappa \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $\eta(t)$  правую часть (Д.15). Очевидно,

$$\begin{aligned}\eta(0) &= R_0(X(0), v(0)), |v(t)| \leq \eta(t), \\ d\eta/dt &= -v\eta(t)/\kappa + R_1(z(t)) + R_2(z(t))|v(t)| \leq \\ &\leq -v\eta(t)/\kappa + R_1(z(t)) + R_2(z(t))\eta(t).\end{aligned}\quad (\text{Д.18})$$

Покажем, что функции  $V(z(t))$ ,  $\eta(t)$  удовлетворяют условиям леммы 7.Д.3. Для этого определим функции

$$\bar{R}_i(V) = \sup_{V(z)=V} R_i(z), i = 1, 2, 3, \alpha_1(V) = \inf_{V(z)=V} \alpha(z)$$

(определение корректно, так как множества  $V(z) = V$  ограничены вследствие (Д.16)). Если взять  $V_*$  так, чтобы  $D \subset \{z: V(z) \leq V_*\}$ , а  $\eta_* > 0$  взять произвольно, то, очевидно,  $\alpha_1(V) > 0$  при  $V > V_*$  и неравенства (Д.11) следуют из (Д.17), (Д.18), если положить

$$\begin{aligned}\alpha_2(\eta) &= v\eta, C_1(V, \eta) = \bar{R}_3(V)\eta, C_2(V, \eta) = \\ &= \bar{R}_1(V) + \bar{R}_2(V)\eta.\end{aligned}$$

Неравенства (Д.12) будут выполнены, если взять, например,  $\bar{C}_1(V) = \bar{R}_3(V)/v$ ,  $\bar{C}_2(V) = \bar{R}_1(V)/(v\eta_*) + \bar{R}_2(V)/v$ . Из леммы 7.Д.3 следует, что все траектории системы (Д.13), (Д.14), начинающиеся в множестве  $D_0(\kappa) = \{(z, X): (V(z), R_0(X, v)) \in D(\kappa)\}$ , попадают при достаточно больших  $t > 0$  в множество  $D_\infty = \{(z, X): V(z) \leq V_*, |v| \leq \eta_*\}$  (множество  $D(\kappa)$  определено при доказательстве леммы 7.Д.3). При этом множество  $D_\infty$  ограничено в силу (Д.16) и устойчивости звена (Д.14), а множества  $D_0(\kappa)$  неограниченно расширяются и исчерпывают все пространство  $\{(z, X)\}$  при  $\kappa \rightarrow 0$ . Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Достаточно проверить выполнение условий леммы 7.Д.4 для  $z = \text{col}(x, \tau)$ ,  $v(t) = \tilde{u}(t) - u(t)$ . Положим  $V(z) = x^*Hx + |\tau - \tau_*|^{2-\delta}$ , где  $H > 0$ ,  $\tau_* \in \mathbb{R}^l$  определены при доказательстве теоремы 7.2.1. Очевидно,  $V(z) \rightarrow \infty$  при  $|z| \rightarrow \infty$ , т. е. условие (Д.16) выполнено. Аналогично доказательству теоремы 2.4.4, убеждаемся, что условие (Д.17) также выполнено при  $\alpha(z) = \alpha V(z) - \beta$ ,  $R_3(z) = |x^*Hb|$  для некоторых  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Выполнение (Д.15) следует из

соотношения (3.14), так как

$$\begin{aligned} |du/dt| &\leqslant |\tau^*L^*dx/dt + (d\tau/dt)*L^*x| = \\ &= |\tau^*L^* [Ax + b\tau^*L^*x + bv(t)] + \\ &\quad + [g^*L^*xx^*L\Gamma - \operatorname{grad} \omega(\tau)L^*x]| \end{aligned}$$

и можно положить в (Д.15)

$$R_0(X, v) = C_0(X, v),$$

$$\begin{aligned} R_1(z) &= C_1 |\tau^*L^* (Ax + b\tau^*L^*x) + \\ &\quad + [g^*L^*xx^*L\Gamma - \operatorname{grad} \omega(\tau)L^*x]|, \\ R_2(z) &= C_2 |\tau^*L^*b|. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**7.Д.9°. Доказательство теоремы 7.3.2.** Рассмотрим наряду с системой (3.17), (3.18) ее непрерывную модель  $dz/dt = A(z)$ , где

$$z = \operatorname{col}(x, \tau),$$

$$A(z) = \operatorname{col}(F(x, \tau), -\Gamma \operatorname{grad} \tau [\varphi(x, \tau) + \omega(\tau)]).$$

Из доказательства теоремы 2.4.4 следует, что система  $dz/dt = A(z)$  удовлетворяет условию экспоненциальной диссипативности [306] с функцией  $V(x, \tau)$  вида (2.4.9). Помехи  $v(t, \xi)$  в (3.17), по условию, ограничены для любого  $\xi \in \Xi$ . Поэтому предельная (условная) диссипативность системы (3.17), (3.18) при  $x \rightarrow 0$  непосредственно следует из теоремы 1 работы [28a].

# ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

## *К главе 1*

§ 1.1. Рассмотрение модельных примеров имеет целью вскрыть основные идеи и особенности методов, работоспособных в значительно более сложных ситуациях. Таким примером для нас послужила задача о «роботе-велосипедисте». Различные постановки адаптивных вариантов этой задачи анализировались в работах [127 з, л, н, 172, 113е]; на ней был апробирован обширный арсенал методов рекуррентного оценивания, включая метод рекуррентных целевых неравенств [127г, е], методы стохастической оптимизации [113е] и различные схемы самонастройки, основанные на методе функций Ляпунова [4г, д]. Нетрудно заметить, что книга посвящена развитию именно этих методов в применении к более общим задачам управления.

Впервые идеи и методы адаптации стали широко использоваться в задаче адаптивного управления полетом [54а, б, 63, 71, 85 и др.]. В настоящее время эти идеи и методы применяются при построении алгоритмов управления с помощью ЭВМ различными технологическими процессами [6, 17, 29, 68, 75, 81, 95], в задачах обучения и самообучения классифицирующих систем [20, 41, 65, 116, 121, 123, 127б], при управлении робототехническими системами [4в, 25, 62, 93, 107б, в, д] и во многих других областях [19, 33, 38, 83, 96, 98, 104, 105б, 120б—г]. Краткие сведения о решении ряда прикладных задач адаптации читатель найдет в трудах I—III Ленинградских симпозиумов по теории адаптивных систем (Вопросы кибернетики, М., Научный Совет по кибернетике; Адаптивные системы, 1974, 1976; Адаптивные системы управления, 1977; Адаптивные системы управления, 1979), а также в [143, 144].

§ 1.2. Приводимое здесь определение адаптивной системы впервые дано (в других терминах) в [127г] и развивается в [127м, н]. Формализация понятия адаптивной системы для более общей ситуации приводится в [104а, 113б, в]. Эта формализация уточняет соответствующие общие определения (см., например, [14, 21а, 53, 120б, 124, 126]) в применении к конкретным задачам управления. Последовательное использование формализованных понятий, связанных с проблемой адаптивного управления, дает основу для построения теории адаптивных систем как математической науки.

Основные понятия и методы, введенные в [127м, н], использовались при решении задач адаптивного управления в работах [1, 4а, б, 11а, 16, 17, 26, 28—31, 62, 67—68, 77б, 78—80, 91, 101—102, 104, 107—108, 113а—г, 114—116, 117а, в—д, 127б—и, л, м, 172]. Полученные в этих и других работах результаты позволяют,

как нам кажется, говорить о построении содержательного раздела теории адаптивного управления, изложению современного состояния которого посвящена данная книга.

§ 1.3. Изложенная здесь схема решения задач адаптивного управления восходит, по существу, к первым работам по синтезу самонастраивающихся систем. Общая идея дуального управления, получившая признание после работ [112], конкретизируется здесь путем сведения задачи адаптивного управления к задаче построения и обоснования алгоритмов адаптации. Градиентные алгоритмы адаптации широко пропагандировались в книгах [120б, в], где упор делался на вероятностные алгоритмы типа стохастической аппроксимации. Алгоритмы скоростного градиента (1.3.3) введены в [54в, 55] (для задач идентификации); их свойства изучены в [117е] (подробнее см. § 2.4).

Понятия рекуррентных целевых неравенств и конечно-сходящихся алгоритмов введены в [127в]. Метод рекуррентных целевых неравенств (РЧН) как метод решения задач адаптации разработан в [127в–з] и последовательно (хотя и кратко) изложен в [127м, н]. Другие постановки и методы решения задач управления с incomplete информацией изложены в [9, 12, 35–36, 46, 49, 50, 55, 566, 57–59, 82б, 94, 119, 122, 149, 159].

## К главе 2

§ 2.1. Описанные в пп. 2.1.3°–2.1.5° конечно-сходящиеся алгоритмы предложены в [127б–г, н]. Теорема 2.1.7 с незначительными изменениями приводится в [113а, б], теорема 2.1.8 и ее модификации — в [4а, б]. Алгоритм (2.1.57) назван в [4а] «модифицированной полоской». Введение параметра  $\varepsilon_2 > 0$  позволило доказать сходимость алгоритма (2.1.57) независимо от факта ограниченности величин  $|a_t|$ , что имеет важное значение при синтезе адаптивных регуляторов [4а, 16, 79б, 102]. Метод рекуррентных целевых неравенств обобщался в различных направлениях. Получены локально-оптимальные варианты КСА, когда на каждом шаге алгоритма происходит оптимизация его параметров с целью получения наилучшей оценки [107б, г], алгоритмы с увеличенной глубиной «памяти» для повышения быстродействия [79в, 107а], стохастические аналоги КСА [113а, 114] и т. д. (см. также [4б, 5, 26б, 67, 79а, г, 91, 101, 108, 116, 117а, 127ж, з, м]).

Сделаем одно замечание, касающееся применения «метода полного перебора» для построения КСА. Большинство РЧН, рассмотренных в § 2.1, обладают таким свойством: области, которые они «вырезают» в пространстве  $\{\tau\}$ , содержат некоторый «шарик»  $T_0$ , центром которого является вектор существенных параметров  $\tau(\xi)$ . Это — следствие существования идеального регулятора, обеспечивающего выполнение поставленной ЦУ, что означает принципиальную возможность решения задачи, а также следствие некоторой стабильности, присущей практическим задачам.

Подстройки  $\tau_t$  можно определять с помощью процедуры полного перебора. Действительно, пусть  $\{\tau\}$  — конечно-мерное пространство,  $\varphi_l(\tau) \geqslant 0$  — РЧН и  $\{\tau^{(j)}\}$  — некоторое счетное всюду плотное множество в  $\{\tau\}$ , например, векторы с рациональными компонентами.

Пусть  $\tau_t = \tau^{(j)}$ ; не будем изменять  $\tau_t$ , если  $\varphi_t(\tau_t) \geq 0$ , и перейдем к следующему вектору  $\tau^{(j+1)}$ , если  $\varphi_t(\tau_t) < 0$ . Более точно: полагаем  $\tau_{t+1} = \tau_t$ ,  $\theta_{t+1} = \theta_t$ , если  $\varphi_t(\tau_t) \geq 0$ , и  $\tau_{t+1} = \tau(\theta_t)$ ,  $\theta_{t+1} = \theta_t + 1$ , если  $\varphi_t(\tau_t) < 0$ . (Здесь  $\theta_t$  — число ошибок алгоритма к моменту времени  $t$ ). Этот алгоритм, очевидно, КСА, так как  $\tau_{t_0} \in T_0$  для некоторого  $t_0$  и тогда при всех  $t \geq t_0$  будет  $\tau_t = \tau_{t_0}$  и  $\varphi_t(\tau_{t_0}) > 0$ . Практическая непригодность этого алгоритма очевидна. Такой алгоритм в равной степени «применим» для решения любой вычислительной задачи. Число ошибок алгоритма полного перебора очень быстро возрастает с увеличением размерности  $N$  пространства  $\{\tau\}$ . Оценки числа ошибок алгоритмов полного перебора в конкретных задачах дают астрономические величины. Так, например, в одной модельной задаче преследования [127e] для алгоритма полного перебора время самообучения составило бы  $t_* \approx 10^{62}$  лет. Оценки же числа  $r_0$  для КСА § 2.1 зависят лишь от  $|\tau_0 - \tau(\xi)|$  и мало чувствительны к размерности  $N$  пространства подстраиваемых параметров. В той же задаче преследования [127e] время самообучения  $t_*$  изменяется секундами или минутами.

Другое обстоятельство, характерное для КСА § 2.1, — это монотонное убывание величины  $|\tau_t - \tau(\xi)|$  в моменты невыполнения РН. Последнее означает, что адаптивная система с алгоритмами адаптации § 2.1 «читается на своих ошибках» — каждая ошибка приводит к улучшению закона управления. Этого, разумеется, нельзя сказать про систему, алгоритм адаптации которой основан на полном переборе. Монотонное приближение  $\tau_t$  к  $\tau(\xi)$  можно трактовать как «направленный перебор» в пространстве подстраиваемых параметров (законов управления), который осуществляют КСА. Известны различные другие схемы с частичным перебором, позволяющие эффективно реализовать алгоритмы адаптации широкого круга практических задач [72, 97, 104].

§ 2.2. Метод стохастической аппроксимации (МСА) получил широкое применение в задачах адаптации благодаря работам [120a, б]. Аналогичные алгоритмы успешно разрабатывались в рамках метода потенциальных функций [2]. В настоящее время литература по использованию рекуррентных процедур МСА весьма обширна и насчитывает сотни журнальных статей и несколько монографий. Эти алгоритмы применяются в задачах обучения [20, 120a, б, 113б], самообучения [65, 121, 123], идентификации [1, 44, 45а, 48, 70, 88, 125, 129—131, 155, 157] и адаптивного управления [45в, 113в, 115, 141, 142, 156, 174]. Дальнейшее развитие МСА получило в работах [89а, б], в которых в весьма общей форме проводится исследование вопросов сходимости рекуррентных стохастических процедур и стабильности доставляемых этими процедурами оценок. Теорема 2.1.1 — типичный и простейший пример условий сходимости рекуррентных процедур МСА. Изложение п. 2.2.3° следует [1].

В п. 2.2.4° приводится изложение (с необходимыми уточнениями) некоторых результатов работ [140, 141], с которыми авторов любезно познакомил Я. З. Цыпкин. В этих работах идентификация и адаптивное управление осуществляется на основе своеобразного варианта МСА, занимающего промежуточное положение между про-

цедурой Роббинса—Монро и рекуррентной процедурой МНК. Такие алгоритмы, когда шаг алгоритма зависит от предыстории процесса оценивания и лишь асимптотически стремится к постоянной величине, широко применяются в зарубежной литературе в качестве алгоритмов идентификации и адаптации [129—131, 144]. Упомянутые выше уточнения касаются одного места в доказательстве теоремы 2.2.3. В [140] переход от неравенства (2.Д.26) к (2.Д.27) осуществляется со ссылкой на лемму Кронекера. Это ссылка оказалась для авторов недоступной, и пришлось восстанавливать доказательство, в результате чего возникли леммы 2.Д.3—2.Д.4, из которых следует, что используемое в [140] утверждение справедливо не всегда, как утверждается в [140], а лишь на событии  $\{\lim r_l = \infty\}$ . Этого, правда, «хватило» для завершения доказательства теоремы 2.2.3.

§ 2.3. Рекуррентные модификации метода наименьших квадратов (МНК) и их обобщение — фильтр Калмана — получили всеобщее признание после работ [147а, 148], вызвавших качественное изменение теории оптимальной фильтрации стационарных процессов, разработанной Н. Винером и А. Н. Колмогоровым. Этому предмету посвящены отдельные монографии и статьи, из которых отметим [43, 64, 132, 136, 143—145]. МНК использовался, главным образом, в задачах идентификации [155, 165, 167, 168], поскольку наличие обратных подстраиваемых связей сильно усложняет исследование сходимости и оптимальных свойств рекуррентных процедур МНК [64]. § 2.3 следует [113 в] (см. также [113 г]).

§ 2.4. Изложение здесь основано на результатах [117е]. Термин «обобщенный настраиваемый объект» (ОНО) заимствован из [85]. Алгоритмы скоростного градиента для различных частных случаев предлагались, начиная с [39а, 166], многими авторами, использовавшими для синтеза адаптивных систем метод функций Ляпунова. В подавляющем большинстве работ рассматриваются линейные уравнения ОНО и квадратичные оценочные функции [4д, 10, 13, 18, 32, 34, 37, 39, 52, 74, 82, 84, 85, 117в—д, 119, 134, 151—154, 160—164, 169]. Случай нелинейного ОНО рассмотрен в [99], где при помощи квадратичной функции Ляпунова получены условия асимптотической устойчивости (в малом) для задачи идентификации. Алгоритмы скоростного градиента с оценочной функцией общего вида введены А. А. Красовским [54в, 55]. В этих работах алгоритм, аналогичный (2.4.2) для задачи идентификации, был получен как второе приближение к алгоритму, оптимальному по критерию «обобщенной работы» в предположении высокочастотности входных воздействий и медленности процесса подстройки. Теоремы 2.4.1, 2.4.4 близки к результатам [117е]. Теоремы 2.4.2, 2.4.3, 2.4.5—2.4.7 публикуются впервые. Условия типа строгой предельной невырожденности и утверждения, близкие к теоремам 2.4.2, 2.4.3 для линейного объекта, в разных вариантах встречались в работах [39в, 44, 52, 86, 125, 129—131, 150, 154, 162, 174]. Доказательства теорем 2.4.2, 2.4.3 основаны на результатах [174].

Понятие грубости, введенное А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным, находит применение в самых различных областях математики и техники. Вопросы огрубления алгоритмов адаптации исследовались ранее применительно к задачам оценивания [89б].

Для частных случаев систем с эталонной моделью огрубление введением отрицательной обратной связи рассматривалось в [117д, 163]. Утверждение, близкое к теореме 2.4.4, сформулировано в [72]. Результат, близкий к теореме 2.4.7, получен в работе [39в]. Отметим, что способы огрубления, описанные в п. 2.4.3°, можно трактовать как способы регуляризации [109]. Например, алгоритм (2.4.5) превращается в (2.4.2), если ввести регуляризованный оценочный функционал  $Q(x, t) + \int_0^t \omega[\tau(s)] ds$ .

В основе большинства процедур адаптации гл. 6 лежат алгоритмы типа скоростного градиента (см. также [30б, 117е]).

### К главе 3

**§ 3.1.** Подробные сведения, касающиеся управляемости и наблюдаемости, можно найти, например, в [21б, 24, 47, 49, 92], относительно свойства диссипативности см., например, [27, 61]. Введенные здесь понятия устойчивости и диссипативности по выходу (по входу) оказываются весьма удобными. Ранее аналогичное понятие абсолютной устойчивости по выходу систематически использовалось одним из авторов (см., например, — [127с]). Теоремы стабилизации и алгоритмы определения стабилизирующей матрицы можно найти в [21б, 24, 40]; им посвящена также большая журнальная литература.

Переход к уравнению в стандартной форме описан в [21б].

Синтез обратной связи по заданному характеристическому полиному замкнутой системы используется во многих работах по автоматическому управлению [21, 24, 40, 51] и получил название метода модального управления. Построения, проводимые в п. 3.1.5° (а также в последующих пунктах гл.3), основаны на использовании простой леммы 3.1.1. Использование этой леммы позволяет очень просто построить требуемую обратную связь для объектов со скалярным входом и выходом. Реализация такого подхода в задаче синтеза адаптивного регулятора изложена в [4а, 102, 113е, 127м, 128а, б]. Синтез обратной связи, близкий к описанному в § 3.1, предложен в [76]. Доказательство леммы 3.1.1, отличное от приведенного в § 3.Д, имеется в [128а] — доказательство [128а] переносится и на векторный случай.

Частотные теоремы для скалярного и непрерывного случаев в формулировках, близких к приведенным, установлены впервые в работах [127а, 147в]. В общем случае подробные доказательства (с разными алгоритмами определения  $H, h, \chi$ ) приведены в [24, 92, 127к]. Доказательство из [24], по-видимому, одно из наиболее простых. Дискретный случай, как показано, например, в [92] (см. сноску на с.122), просто сводится к непрерывному. Некоторые другие сведения о методах доказательства частотной теоремы и библиографию читатель найдет в комментариях к § 1.5—1.6 из [24]. Теорема 3.1.5 доказана в [117г] (следствие из нее — в [117в]).

**§ 3.2.** Изложение пп. 3.2.1°—3.2.5° следует работам [128а, б]. В пп. 3.2.6°, 3.2.7° приведены результаты, принадлежащие А. Е. Барабанову.

§ 3.3. Теорема 3.3.1 получена С. Г. Семеновым и В. Н. Фоминым. Идея доказательства этой теоремы возникла в результате обсуждения задачи с Ю. Ф. Казариновым. При доказательстве использованы конструкции [7]. Другой способ доказательства линейности оптимального регулятора, основанный на использовании уравнения Эйлера для функционала качества, предложен в [87а], однако факт неупреждаемости синтезированных обратных связей строго не доказан.

Синтез оптимальных дискретных систем при стационарных номехах подробно изучался в [47, 76], но основным объектом здесь были системы, устойчивые либо по выходу, либо по управлению, причем запаздывания по управлению и измерению были минимальными. Для случая непрерывного времени краткое и содержательное изложение спектрального метода синтеза оптимального регулятора имеется в [60], где упор сделан на алгоритмическую сторону задачи синтеза, на трудности, связанные с вырождением (п. 3.П.2°), указано в [87б], там же предлагаются разные способы регуляризации.

В общем случае задача оптимального управления линейным дискретным объектом со скалярными входом и выходом решена в [77а], где, по-видимому, впервые реализована идея о параметризации множества всех устойчивых передаточных функций (см. теорему 3.1.1.) Усовершенствование этой идеи, проведенное в [113д], позволило решить задачу синтеза оптимального регулятора для объекта в стандартной форме [113е]. Изложение § 3.3 следует [113е].

§ 3.П. Приведенное в п. 3.П.1° решение задачи оптимального управления для произвольного стабилизируемого многосвязного объекта публикуется впервые. Идеи об использовании теоремы 3.П.7 принадлежат В. А. Павлову. Окончательный вариант теорем 3.П.2—3.П.3, доказательство которых основано на теореме 3.П.1 (см. [113д]), получен В. Н. Фоминым. Другим способом задача синтеза оптимального регулятора для произвольного управляемого объекта решена в [116]. Здесь же рассмотрен случай, когда размерность вектора управлений может превышать число управляемых переменных.

#### *К главе 4*

Метод рекуррентных целевых неравенств предложен в [127в—и, м] и использовался в разнообразных задачах адаптивного управления, как об этом уже говорилось в примечаниях к гл. 1. В гл. 4 рассмотрены лишь типичные, наиболее простые задачи, за исключением п. 4.1.4°, где рассмотрена трудная задача адаптивного субоптимального управления при наличии произвольных запаздываний в управлении и измерении.

§ 4.1. Излагаются результаты работ [127м, и, 172]. Теоремы 4.1.2, 4.1.3 ранее не были опубликованы. Теорема 4.1.2 получена В. А. Бондарко и В. А. Якубовичем, а теорема 4.1.3 — А. Е. Барбановым, В. А. Бондарко и В. А. Якубовичем. Равносильность формул (1.62) и (1.63) установлена В. А. Бондарко. Помимо алгоритмов, описанных в п. 4.1.3°, для решения той же задачи (наиболее сложной задачи гл. 4) могут быть предложены и другие алгоритмы адаптации (см. [16а, б]).

§ 4.2. Здесь также излагаются результаты работ [16а, б, 127, л, м, 172].

К п. 4.2.7° С. В. Гусеву принадлежит другой способ сведения произвольного непрерывного объекта с ЦУ «диссипативность» к задаче адаптивного управления дискретным объектом, устойчивым по управлению [26в]. Этот способ в некоторых отношениях лучше излагаемого в п. 4.2.7°.

§ 4.3. Описываемые здесь результаты экспериментов на ЭВМ взяты из [127м]. Другие эксперименты по моделированию процесса самообучения адаптивной системы можно найти в [5, 67, 79в, г, 115, 127е, м, н].

§ 4.П. Излагаются ранее неопубликованные результаты, полученные В. А. Бондарко и В. А. Якубовичем. Частотные критерии диссипативности могут, по-видимому, найти широкое применение в задачах адаптивного управления.

### *К главе 5*

§ 5.1. Излагаются с уточнениями результаты работ [140, 141]. Уточнение связано с необходимостью обеспечить реализуемость регулятора, что вынуждает ввести проектор  $P$  в алгоритм адаптации (5.1.22), в противном случае старший коэффициент в уравнении регулятора может обращаться в нуль, что не позволит вырабатывать в соответствующие моменты времени нужных управлений. В работах [140, 141] такая возможность молчаливо игнорируется.

§ 5.2. Изложение следует работе [113г]. Доказательство модернизировано, что позволило отказаться от предположения о существовании четвертых моментов у помехи. В предположении гауссовойности помех аналогичная задача изучалась в [78].

§ 5.3. Теорема 5.3.1 представляет собой развитие результатов [77б] и публикуется впервые. Идея использовать переключение стабилизирующего и «оптимального» регуляторов изложена в [113е].

### *К главе 6*

§ 6.1. Самые различные методы самонастройки (которую в неформализованном определении мы отождествляем с адаптацией) основаны на требовании, чтобы при возрастании времени убывала некоторая функция переменных состояния. Это условие определяет структуру регулятора. Сюда относятся различные беспоисковые методы самонастройки, использующие функции чувствительности [53, 54а, 82а, 85], схемы градиентной самонастройки с эталонной моделью [103], метод вспомогательного оператора [33, 42], оптимальное управление по критерию обобщенной работы [54, б, в], метод скоростного градиента [117е], подходы к синтезу управления на основе гиперустойчивости [37, 151, 152, 169] и частотной теоремы Калмана — Якубовича [18, 117г, 134, 160, 161]. Все эти методы в той или иной степени опираются на идеи прямого метода Ляпунова, исходя либо из требования уменьшения ошибки отслеживания, либо из условия убывания какой-либо другой функции переменных состояния. Метод функций Ляпунова в теории адап-

тивного управления приобрел гражданство немногим более десяти лет назад [39а, 166] (см. также [18, 34, 39б, в] и др.). За прошедший период этот метод получил последовательное развитие в работах [84, 85] по беспоисковой самонастройке автоматических систем. Перспективы развития этого направления очерчены в [84]. § 6.1 посвящен отдельным аспектам применения метода функций Ляпунова в теории адаптивных систем. Конструкции пп. 6.1.3°, 6.1.5° принадлежат Г. С. Аксенову.

Изложение пп. 6.1.1—6.1.4° основано на [4г], результаты п. 6.1.5° публикуются впервые.

§ 6.2. Близкие результаты приводятся в [3, 4а, б]. В приведенной форме теорема 6.2.1 публикуется впервые.

§ 6.3. Изложение следует работе [4д].

§ 6.4. Текст написан А. Е. Барабановым и В. Н. Фоминым и является переработкой статьи [11а].

## К главе 7

§ 7.1. Адаптивным системам с эталонной моделью посвящено большое число работ [13, 33, 39, 42, 52, 82—85, 103, 119, 139, 151, 153, 160—164]. Некоторые методы синтеза таких систем изложены в монографиях [85, 152]. В работах [39, 151, 153], в отличие от постановки, принятой в гл. 7, считается, что подстройке доступны непосредственно коэффициенты уравнения ОУ. В [18б] рассмотрен случай, когда часть коэффициентов эталонной модели неизвестна. П. 7.1.2° основан на результатах [8а]. Утверждение, близкое к лемме 7.1.1, доказано в [117е]. Частотная теорема («лемма Калмана—Якубовича») применяется для синтеза адаптивных систем, начиная с работы [166] (см. также [4д, 15, 16, 117в—д, 134, 160, 162]). В работах [37, 151, 152, 169] используется близкий подход, основанный на понятии гиперустойчивости [92]. Утверждения, близкие к лемме 7.1.2, имеются в [18а, 160, 169]. Свойства пассивных систем можно найти, например, в [110, 135]. Алгоритм (7.1.23) описан в работах [39а, 85, 153]. Практически важная задача адаптивного управления без измерения производных давно привлекает внимание исследователей. Однако известные решения либо слишком громоздки [139], либо недостаточно обоснованы [161, 164, 169]. В работе [137] предложена общая схема получения алгоритмов адаптивного управления без измерения производных, в которую укладываются алгоритмы [139, 161, 164, 169]. Интересные подходы к этой задаче, основанные на понятии адаптивного наблюдателя [13, 134, 138, 158], также пока не получили должного обоснования.

§ 7.2. Результаты этого параграфа опираются на теорему 3.1.5 [117г]. В п. 7.2.1° излагаются результаты [117в]. Теоремы 7.2.3, 7.2.4 близки к известным [85]. Применяя теорему 7.2.3 к системе (7.1.1), (7.2.16), можно получить алгоритм адаптивного управления работы [160], использующий  $n - m - 1$  производную от выхода ОУ. Утверждение, близкое к частному случаю теоремы 7.2.6, можно извлечь из [86]. Результаты п. 7.2.3° публикуются впервые. Их доказательство опирается на теоремы двойственности в невыпуклых квадратичных экстремальных задачах [24, 117б]. Изложение в п. 7.2.4° основано на работе [117г].

**§ 7.3.** Результаты п. 7.3.2 публикуются впервые. Другой вариант решения задачи аддитивной стабилизации объекта с распределенными параметрами предложен в [15]. Вопросы грубости аддитивных систем с эталонной моделью по отношению к динамическим возмущениям (обусловленным неточностью измерения производных выхода ОУ) рассматривались также в работе [396]. Теорема 7.3.2 близка к теореме 4 [117e]. Подробное изложение метода непрерывных моделей можно найти в книге Д. П. Деревицкого и А. Л. Фрадкова, упоминавшейся в предисловии (см. также [8, 28, 30]).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агафонов С. А., Красулина Т. П., Фомин В. Н. Использование стохастических рекуррентных процедур в качестве алгоритмов идентификации.— Вестник Ленинградского ун-та, 1981, № 1, с. 5—9.
2. Айзerman М. А., Браверман Э. М., Розонов эр Л. И. Метод потенциальных функций в теории обучения машин.— М.: Наука, 1970, 384 с.
3. Аксенов Г. С. Синтез адаптивного управления в задаче о диссипативности линейных нестационарных систем.— В кн.: Синтез регуляторов в некоторых задачах адаптивного управления / Под ред. В. Н. Фомина.— Деп. в ВИНИТИ, № 1441-77, 1977, с. 5—10.
4. Аксенов Г. С., Фомин В. Н. а) Синтез адаптивных дискретных регуляторов в задаче о диссипативности много связных линейных систем.— Деп. в ВИНИТИ, № 3961-79, 27 с.; б) Конечно-сходящиеся алгоритмы в задаче о построении адаптивного регулятора.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1974, с. 113—121; в) К задаче об адаптивном управлении манипулятором.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1976, с. 164—167; г) Метод функций Ляпунова в задаче синтеза адаптивных регуляторов.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1979, с. 69—93; д) Синтез адаптивного управления с помощью вырожденной функции Ляпунова.— Вестник Ленинградского ун-та, 1979, № 19, с. 5—8.
5. Аксенов Г. С., Фомин В. Н., Хрящев С. М. О линейных адаптивных системах управления.— В кн.: Методы вычислений, вып. 9.— Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1974, с. 73—104.
6. Александровский Н. М., Егоров С. В., Кузин Р. Е. Адаптивные системы автоматического управления сложными технологическими процессами.— М.: Энергия, 1973, 272 с.
7. Андреев В. А., Шепелявый А. И. Синтез оптимальных управлений для дискретных систем в задаче минимизации квадратного функционала.— Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik, 1972, 8, № 8/9, р. 549—568.
8. Андреевский Б. Р., Блахкин А. Т., Деревицкий Д. П., Фрадков А. Л. а) Метод исследования динамики адаптивных систем управления летательными аппаратами.— В кн.: Управление в пространстве, т. 1.— М.:

- Наука, 1976, с. 171—179; б) Метод синтеза дискретных адаптивных систем стабилизации стохастических объектов.— В кн.: Рефераты докладов, представленных на VII Всесоюзное совещание по проблемам управления.— М.: Наука, 1977, с. 52—56.
9. Аоки М. Оптимизация стохастических систем.— М.: Наука, 1971, 424 с.
  10. Ашимов А., Сыздыков Д. Ж., Тохтабаев Г. М. Беспоисковые самонастраивающиеся системы идентификации.— Автоматика и телемеханика, 1973, № 2, с. 184—188.
  11. Барабаев А. Е. а) Адаптивное управление линейным стационарным объектом при неполных данных.— В кн.: Синтез регуляторов в некоторых задачах адаптивного управления / Под ред. В. Н. Фомина.— Деп. в ВИНИТИ, № 1441-77, 1977, с. 34—38; б) Оптимальное управление линейным объектом со стационарными помехами и квадратичным критерием качества.— Деп. в. ВИНИТИ, № 3478-79, 1979, 20 с.
  12. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления.— М.: Наука, 1969, 118 с.
  13. Белоуров С. В. Синтез прямого управления для систем с неявно заданной моделью при помощи адаптивных наблюдателей.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1979, с. 5—18.
  14. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования.— М.: Наука, 1975, 767 с.
  15. Бондарко В. А., Лихтарников А. Л., Фрадков А. Л. Синтез адаптивной системы стабилизации линейного объекта с распределенными параметрами.— Автоматика и телемеханика, 1979, № 12, с. 95—103.
  16. Бондарко В. А., Икубович В. А. а) Квадратичный критерий диссипативности дискретных систем и его применение к задачам адаптивного управления.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1979, с. 87—120; б) Синтез систем адаптивного управления с эталонной моделью без принудительных остановок объекта управления.— В кн.: Адаптация и обучение в системах управления и принятия решений.— Новосибирск: Наука, 1980, с. 45—53.
  17. Брайтман В. М., Зак А. В., Любачевский Б. Д., Перлин Б. А., Шпаков П. П., Якубович В. А. Алгоритм адаптивного управления для одного класса устойчивых химико-технологических процессов.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптация в системах со сложной организацией.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1977, с. 107—110.
  18. Брусиц В. А. а) Синтез имитатора линейных стационарных объектов.— Автоматика и телемеханика, 1977, № 4, с. 55—60; б) Синтез беспоисковой самонастраивающейся системы методом теории абсолютной устойчивости.— Автоматика и телемеханика, 1978, № 7, с. 61—67.

19. В а п и к В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным.— М.: Наука, 1979, 447 с.
20. В а п и к В. Н., Ч е р в о н е н к и с А. Я. Теория распознавания образов.— М.: Наука, 1974, 416 с.
21. В о р о н о в А. А. а) Основы теории автоматического управления. Ч. III. Оптимальные, многосвязные и адаптивные системы.— Л.: Энергия, 1970, 326 с.; б) Устойчивость, управляемость, наблюдаемость.— М.: Наука, 1979, 335 с.
22. В о р ч и к Б. Г. Асимптотические оценки максимального правдоподобия параметров замкнутой стохастической системы.— Автоматика и телемеханика, 1976, № 12, с. 32—48.
23. Г а н т м а х е р Ф. Р., Теория матриц.— М.: Гостехиздат, 1954, 491 с.
24. Г е л и г А. Х., Леонов Г. А., Я к у б о в и ч В. А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным положением равновесия.— М.: Наука, 1978, 400 с.
25. Г и н з б у р г А. Р., Т и м о ф е е в А. В. Об адаптивной стабилизации программных движений механических систем.— Прикладная математика и механика, 1977, т. 41, № 5, с. 859—869.
26. Г у с е в С. В. а) Адаптивное управление объектами, параметры которых изменяются по неизвестным законам.— В кн.: Синтез регуляторов в некоторых задачах адаптивного управления/ Подред. В. Н. Фомина.— Деп. в ВИНИТИ, № 1441-77, 1977, с. 10—17; б) Один критерий сравнения конечно-сходящихся алгоритмов решения систем неравенств.— Деп. в ВИНИТИ, № 3781-78, 1978, 12 с.; в) Простой алгоритм адаптивной стабилизации линейного непрерывного объекта, основанный на специальном способе дискретизации управления.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1979, с. 80—85.
27. Д е м и д о в и ч Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967, 472 с.
28. Д е р е в и ц к и й Д. П., а) Синтез стохастической дискретной адаптивной системы стабилизации с помощью непрерывной модели.— Автоматика и вычислительная техника, 1975, № 6, с. 50—52; б) Метод исследования динамики дискретных адаптивных систем управления динамическими объектами.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1976, с. 86—90.
29. Д е р е в и ц к и й Д. П., Р у б е к и н Н. Ф. Адаптивные системы управления непрерывными технологическими процессами в нефтехимии.— М.: ЦНИИТЭнефтехим, 1975, 49 с.
30. Д е р е в и ц к и й Д. П., Ф р а д к о в А. Л. а) Две модели для анализа динамики алгоритмов адаптации.— Автоматика и телемеханика, 1974, № 1, с. 67—75; б) Исследование дискретных адаптивных систем управления динамическими объектами с помощью непрерывных моделей.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1975, № 5.
31. Д е р е в и ц к и й Д. П., Ф р а д к о в А. Л., Я к у б о в и ч В. А. Адаптивная оптимизация нелинейного объекта в условиях помех.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные

- системы.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1976, с. 123—128.
32. Догановский С. А. Параметрические системы автоматического регулирования.— М.: Энергия, 1973, 168 с.
  33. Евланов Л. Г. Самонастраивающиеся системы с поиском градиента методом вспомогательного оператора.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1963, № 1, с. 113—120.
  34. Елисеев В. Д. Метод синтеза многомерных самонастраивающихся систем управления.— Автоматика и телемеханика, 1977, № 4, с. 66—74.
  35. Емельянов С. В., Костылева Н. Е., Уткин В. И. Системы с переменной структурой в задачах идентификации и управления многомерным объектом.— Доклады на IV конгрессе ИФАК, т. 48,— Варшава, 1969.
  36. Емельянов С. В., Уткин В. И., Таран В. А., Костылева Н. Е., Шубладзе А. М., Езерде В. Б., Дубровский Е. Н. Теория систем с переменной структурой.— М.: Наука, 1970, 592 с.
  37. Еремин Е. П., Нгуен Тхук Loan, Чартышвили Г. С. Беспоисковая система идентификации с моделью, синтезируемая по критерию гиперустойчивости.— Автоматика и телемеханика, 1973, № 5, с. 54—65.
  38. Живоглядов В. П., Медведев А. В. Непараметрические алгоритмы адаптации.— Фрунзе: Илим, 1974, 134 с.
  39. Земляков С. Д., Рутковский В. Ю. а) Обобщенные алгоритмы адаптации одного класса беспоисковых самонастраивающихся систем с моделью.— Автоматика и телемеханика, 1967, № 6, с. 88—94; б) Синтез систем координатно-параметрического управления на основе беспоисковых самонастраивающихся систем с эталонной моделью.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1973, № 2, с. 168—178; в) Условия функционирования многомерной самонастраивающейся системы управления с эталонной моделью при постоянно действующих параметрических возмущениях.— ДАН СССР, 1978, т. 241, № 2, с. 301—304.
  40. Зубов В. И. Лекции по теории управления.— М.: Наука, 1975, 495 с.
  41. Ивахненко А. Г. Самообучающиеся системы распознавания и автоматического управления.— Киев: Наукова думка, 1969, 391 с.
  42. Казаков И. Е., Евланов Л. Г. К теории самонастраивающихся систем с поиском градиента методом вспомогательного оператора. Доклад, представленный на 2-й Международный конгресс ИФАК.— М.: Наука, 1963, 24 с.
  43. Калман Р., Фалб П., Арбіб М. Очерки по математической теории систем.— М.: Мир, 1971, 400 с.
  44. Каминская В., Немура А. Стохастические методы идентификации динамических систем.— Вильнюс: Монтас, 1975, 197 с.
  45. Катковник В. Я., Кульчицкий О. Ю. а) Идентификация линейных динамических систем со случайными воз-

- мущениями.— В кн.: Кибернетика и вычислительная техника. Дискретные системы, вып. 24.— Л.: Изд-во ЛПИ, 1974, с. 19—23; б) Идентификация линейных динамических систем со случайными возмущениями при неполном наблюдении вектора состояний.— В кн.: Кибернетика и вычислительная техника. Дискретные системы, вып. 28.— Л.: Изд-во ЛПИ, 1975, с. 18—22; в) Возможность применения методов типа стохастической аппроксимации для адаптивной стабилизации дискретной динамической системы.— Автоматика и телемеханика, 1976, № 9, с. 113—123.
46. Катковник В. Я., Первозванский А. А. Методы поиска экстремума и задача синтеза многомерных систем управления.— В кн.: Адаптивные автоматические системы.— М.: Советское радио, 1972, с. 17—42.
47. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А., Многомерные дискретные системы управления.— М.: Наука, 1966, 416 с.
48. Катковник В. Я., Хейсин В. Е. а) Итеративные алгоритмы оптимизации для отслеживания дрейфа экстремума.— Автоматика и вычислительная техника, 1976, № 6, с. 34—40; б) Процедуры случайного поиска для отслеживания дрейфа оптимального нестационарного решения.— В кн.: Вопросы кибернетики. Случайный поиск в задачах оптимизации.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1978, с. 18—28.
49. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления.— М.: Мир, 1977, 650 с.
50. Кельман Г. К., Позняк А. С., Черницер А. В. Алгоритмы «локальной» оптимизации в задачах асимптотического управления нелинейными динамическими объектами.— Автоматика и телемеханика, 1977, № 11, с. 73—88.
51. Кирченко Н. Ф. Введение в теорию стабилизации движения.— Киев: Выща школа, 1978, 182 с.
52. Климентов С. И., Прокопов Б. И., О синтезе асимптотически устойчивого алгоритма адаптивной системы с эталонной моделью прямым методом Ляпунова.— Автоматика и телемеханика, 1974, № 10, с. 97—104.
53. Козлов Ю. М., Юсупов Р. М. Беспoisковые самонастраивающиеся системы.— М.: Наука, 1969, 455 с.
54. Красовский А. А. а) Динамика непрерывных самонастраивающихся систем.— М.: Физматгиз, 1963, 468 с.; б) Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование.— М.: Наука, 1973, 560 с.; в) Оптимальные алгоритмы в задачах идентификации с адаптивной моделью.— Автоматика и телемеханика, 1976, № 12, с. 75—82.
55. Красовский А. А., Буков В. Н., Шендрек В. С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами.— М.: Наука, 1977, 271 с.
56. Красовский Н. Н. а) Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М.: Физматгиз, 1959, 211 с.; б) К задаче управления с неполной информацией.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1976, № 2, с. 3—7; в) Об управлении

- при неполной информации.— Прикладная математика и механика, 1976, т. 40, вып. 2, с. 197—206.
57. Красовский Н. Н., Осипов Ю. С. Задача управления с неполной информацией.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1973, № 4, с. 5—14.
  58. Кунцевич В. М., Лычак М. М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова.— М.: Наука, 1977, 400 с.
  59. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности.— М.: Наука, 1977, 392 с.
  60. Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н. Спектральные методы синтеза линейных систем с обратной связью.— Киев: Наукова думка, 1971, 138 с.
  61. Ласаль Ж., Лефшетц С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова.— М.: Мир, 1964, 168 с.
  62. Лачинов В. М., Самарский В. Г., Тимофеев А. В., Якубович В. А. Адаптивное управление манипулятором с шаговыми приводами.— В кн.: Робототехника.— Л.: Изд-во ЛПИ, 1976, с. 66—94.
  63. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета.— М.: Машиностроение, 1973, 616 с.
  64. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов.— М.: Наука, 1974, 696 с.
  65. Лиховидов В. Н., Фомин В. Н. Математическая постановка задачи классификации изображений.— Вестник Ленинградского ун-та, 1976, № 19, с. 61—68.
  66. Лозов М. Теория вероятностей.— М.: ИЛ, 1962, 719 с.
  67. Любачевский Б. Д. Рекуррентный алгоритм адаптивного управления линейным дискретным динамическим объектом.— Автоматика и телемеханика, 1974, № 3, с. 83—94.
  68. Любачевский Б. Д., Якубович В. А. Адаптивное управление устойчивыми динамическими объектами.— Автоматика и телемеханика, 1974, № 4, с. 116—127.
  69. Меллон Д. Применение самонастраивающихся систем для управления полетом.— В кн.: Самонастраивающиеся автоматические системы.— М.: Наука, 1964, с.
  70. Медведев Г. А. Рекуррентное оценивание при помощи коррелированных наблюдений.— Автоматика и телемеханика, 1974, № 5, с. 110—115.
  71. Москатов Г. К. Надежность адаптивных систем.— М.: Советское радио, 1973, 103 с.
  72. Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы.— М.: Наука, 1978, 336 с.
  73. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем.— М.: Наука, 1967, 519 с.
  74. Носов В. Р. Исследование устойчивости и качества переходных процессов в адаптивных системах с эталонной моделью.— В кн.: Internationale Konferenz nichtlinear Schwingungen. Band II, № 2.— Berlin, 1977, р. 173—182.
  75. Основы управления технологическими процессами / Под ред. Н. С. Райбмана.— М.: Наука, 1978, 440 с.

76. Остром К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления.— М.: Мир, 1973, 322 с.
77. Павлов В. А., Фомин В. Н. а) Спектральный метод синтеза оптимальных регуляторов.— В кн.: Синтез регуляторов в некоторых задачах адаптивного управления / Под ред. В. Н. Фомина.— Деп. в ВИНИТИ, № 1441-77, 1977, с. 44—51; б) Чувствительность оптимальных систем управления к малым изменениям коэффициентов регулятора.— Вестник Ленинградского ун-та, 1978, № 1, с. 67—71.
78. Павлов В. А., Фомин В. Н., Хрящев С. М. Адаптивное управление линейным разностным объектом при неконтролируемых гауссовских помехах.— Деп. в ВИНИТИ, № 2027-76, 15 с.
79. Пенев Г. Д. а) Некоторые задачи синтеза адаптивного управления динамическими объектами.— В кн.: Методы вычислений, вып. 9.— Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1974, с. 105—115; б) Адаптивная стабилизация одного класса нелинейных и нестационарных динамических систем.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1976, с. 93—99; в) Некоторые конечно-сходящиеся алгоритмы решения бесконечных систем неравенств с высокой скоростью сходимости.— Вестник Ленинградского ун-та, 1977, № 7, с. 70—78; г) Адаптивное управление некоторыми квазилинейными нестационарными динамическими системами.— Вестник Ленинградского ун-та, 1978, № 7, с. 43—47; д) Алгоритмы параметрической идентификации полностью управляемых и наблюдаемых линейных систем.— Деп. в ВИНИТИ, № 2082-79, 1979, 25 с.
80. Пенев Г. Д., Якубович В. А. О некоторых задачах адаптивного управления.— ДАН СССР, 1971, т. 198, № 4, с. 787—790.
81. Первозванский А. А. Математические модели в управлении производством.— М.: Наука, 1975, 615 с.
82. Петров А. И. а) Об одной задаче определения оптимального алгоритма самонастройки.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, № 1, с. 206—217; б) Статистический синтез адаптивных систем терминального управления с эталонной моделью.— ДАН СССР, 1978, т. 242, № 2, с. 298—301.
83. Петров Б. Н., Кафаров В. В., Рутковский В. Ю., Петров В. Л., Ядыкин И. Б. Применение беспоисковых самонастраивающихся систем для управления химико-технологическими процессами.— Измерения, контроль, автоматизация, 1979, № 3 (19), с. 46—54.
84. Петров Б. Н., Рутковский В. Ю., Земляков С. Д., Крутова И. Н., Ядыкин И. Б. Некоторые вопросы теории беспоисковых самонастраивающихся систем.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1976, № 2, с. 154—162; 1976, № 3, с. 142—154.
85. Петров Б. Н., Рутковский В. Ю., Крутова И. Н., Земляков С. Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления.— М.: Машиностроение, 1972, 260 с.

86. Петров Б. Н., Теряев Е. Д., Шамриков Б. М. Условия параметрической идентифицируемости объекта управления в замкнутых автоматических системах.— ДАН СССР, 1977, т. 232, № 6, с. 1281—1284.
87. Петров Ю. П. а) Вариационные методы теории оптимального управления.— Л.: Энергия, 1977, 280 с.; б) Синтез оптимальных линейных систем с учетом требований реализуемости.— Вестник Ленинградского ун-та, 1978, № 13, с. 97—102.
88. Позияк А. С. Сходимость алгоритмов стохастической аппроксимации при идентификации параметров динамических объектов.— Автоматика и телемеханика, 1979, № 8, с. 186—190.
89. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. а) Псевдоградиентные алгоритмы адаптации и обучения.— Автоматика и телемеханика, 1973, № 3, с. 45—69; б) Адаптивные алгоритмы оценивания (сходимость, оптимальность, стабильность).— Автоматика и телемеханика, 1979, № 3, с. 71—84.
90. Понtryагин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1976, 392 с.
91. Пономаренко В. И., Якубович В. А. Метод рекуррентных целевых неравенств в задачах субоптимального адаптивного управления динамическими объектами.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1977, с. 16—28.
92. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем.— М.: Наука, 1970, 453 с.
93. Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л. Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы.— М.: Наука, 1978, 400 с.
94. Пугачев В. С., Казаков И. Е., Евланов П. Г. Основы статистической теории автоматических систем.— М.: Машиностроение, 1974, 400 с.
95. Райбман Н. С., Чадеев В. М. а) Адаптивные модели в системах управления.— М.: Советское радио, 1966, 159 с.; б) Построение моделей процессов производства.— М.: Энергия, 1975, 374 с.
96. Растрогин Л. А. Системы экстремального управления.— М.: Наука, 1974, 630 с.
97. Растрогин Л. А., Рипа К. К., Тарасенко Г. С. Адаптация случайного поиска.— Рига: Зинатне, 1978, 242 с.
98. Сейдж Э. П., Мелса Дж. Л. Идентификация систем управления.— М.: Наука, 1974, 246 с.
99. Серегин В. Н. Синтез асимптотически устойчивого алгоритма идентификации нелинейной нестационарной системы прямым методом Ляпунова.— Автоматика и телемеханика, 1978, № 4, с. 28—32.
100. Системы автоматического управления самолетом / Михалев И. А. и др.— М.: Машиностроение, 1972, 464 с.
101. Соколов Б. М. Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения неравенств в некоторых задачах автоматиче-

- ского управления.— В кн.: Вычислительная техника и вопросы кибернетики, вып. 7.— Л.: Изд-во Ленинградского ун-та 1970, с. 126—133.
102. Соколов В. Ф., Фомин В. Н. а) Об адаптивном управлении линейным объектом, не являющимся минимально-фазовым.— Деп. в ВИНИТИ, № 1864-76, 1976, 16 с.; б) Адаптивная стабилизация линейных систем с помощью регуляторов переменной структуры.— Деп. в ВИНИТИ, № 1985-77, 1977, 19 с.
103. Солодовников В. В., Шрамко Л. С. Расчет и проектирование аналитических самоастраивающихся систем с эталонными моделями.— М.: Машиностроение, 1972, 270 с.
104. Срагович В. Г. а) Теория адаптивных систем.— М.: Наука, 1976, 319 с.; б) Автоматные адаптивные системы управления марковскими цепями.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1977, с. 29—35.
105. Стратонович Р. Л. а) Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления.— М.: Изд-во МГУ, 1966, 320 с.; б) Принципы адаптивного приема.— М.: Советское радио, 1973, 141 с.
106. Терехов В. А., Янчевский А. Э. Адаптивное управление и идентификация в импульсных автоматических системах.— В кн.: Вопросы теории систем автоматического управления, вып. 4.— Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1978, с. 15—20.
107. Тимофеев А. В. а) Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы адаптивной идентификации дискретных динамических систем.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1973, № 5, с. 206—213; б) Оптимальные конечно-сходящиеся алгоритмы адаптивной стабилизации программных движений.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1977, с. 38—42; в) Адаптивное управление программным движением динамических систем.— Автоматика, 1978, № 3, с. 36—43.; г) Конечно-сходящиеся локально-оптимальные алгоритмы решения неравенств, возникающих в задачах синтеза адаптивных систем.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1975, № 4, с. 9—26; д) Принципы и алгоритмы построения адаптивных систем управления роботов.— В кн.: Робототехника.— Л.: Изд-во ЛПИ, 1977, с. 35—43.
108. Тимофеев А. В., Самарский В. Г. Оптимальные многошаговые конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем целевых неравенств и их применение.— В кн.: Математические методы решения экономических задач, вып. 8.— М.: Наука, 1979, с. 82—95.
109. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974, 223 с.
110. Толстов Ю. Г. Теория линейных электрических цепей.— М.: Высшая школа, 1978, 279 с.
111. Уткин В. И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой.— М.: Наука, 1974, 272 с.

112. Фельдбаум А. А. а) О проблемах дуального управления.— В кн.: Методы оптимизации автоматических систем.— М.: Наука, 1972, с. 89—108; б) Основы теории оптимальных автоматических систем.— М.: Наука, 1966, 623 с.
113. Фомин В. Н. а) Стохастические аналоги конечно-сходящихся алгоритмов обучения опознающих систем.— В кн.: Вычислительная техника и вопросы программирования, вып. 6.— Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1971, с. 68—86; б) Математическая теория обучаемых опознающих систем.— Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1976, 235 с.; в) Рекуррентное оценивание в задаче синтеза адаптивного управления.— Деп. в ВИНИТИ, № 3868-76, 1976, 20 с.; г) Синтез адаптивного регулятора в случае независимых аддитивных помех.— В кн.: Синтез регуляторов в некоторых задачах адаптивного управления / Под ред. В. Н. Фомина.— Деп. в ВИНИТИ, № 1441-77, 1977, с. 51—57; д) О стабилизации дискретных систем управления.— Деп. в ВИНИТИ, № 2506-78, 1978, 25 с.; е) Синтез адаптивных регуляторов в задаче управления линейными дискретными системами.— Деп. в ВИНИТИ, № 2202-79, 1979, 65 с.
114. Фомин В. Н., Холопов А. А. Среднее время сходимости рекуррентных алгоритмов (с поощрением).— Деп. в ВИНИТИ, № 3867-76, 1976, 22 с.
115. Фомин В. Н., Хрящев С. М. Об одной задаче адаптивного управления линейным объектом в условиях случайных помех.— Автоматика и телемеханика, 1976, № 10, с. 109—117.
116. Фомин В. Н., Якубович В. А. Обучаемые опознающие системы и рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы.— В кн.: Алгоритмы обучения распознавания образов.— М.: Советское радио, 1973, с. 29—42.
117. Фрадков А. Л. а) Некоторые конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств и их применение в теории адаптивных систем.— Вестник Ленинградского ун-та, 1972, № 19, с. 70—75; б) Теоремы двойственности в некоторых невыпуклых экстремальных задачах.— Сибирский математический журнал, 1973, № 2, с. 357—383; в) Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта.— Автоматика и телемеханика, 1974, № 12, с. 96—103; г) Квадратичные функции Ляпунова в задаче адаптивной стабилизации линейного динамического объекта.— Сибирский математический журнал, 1976, № 2, с. 436—445; д) Метод синтеза алгоритмов адаптивной стабилизации линейного многосвязного динамического объекта.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1976, с. 81—84; е) Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления.— Автоматика и телемеханика, 1979, № 9, с. 90—101.
118. Функциональный анализ / Под ред. С. Г. Крейна.— М.: Наука, 1972, 544 с.
119. Фурасов В. Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация.— М.: Наука, 1977, 248 с.
120. Цыпкин Я. З. а) Теория линейных импульсных систем.— М.: Физматгиз, 1963, 968 с.; б) Адаптация и обучение в автомо-

- матических системах.— М.: Наука, 1968, 399 с.; в) Основы теории обучающихся систем.— М.: Наука, 1970, 251 с.; г) Адаптивные алгоритмы оптимизации при априорной неопределенности.— Автоматика и телемеханика, 1979, № 6, с. 94—108.
121. Цыпкин Я. З., Кельманис Г. К. О рекуррентных алгоритмах самообучения.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1967, № 5, с. 78—87.
122. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А.— Игровые задачи управления и поиска.— М.: Наука, 1978, 270 с.
123. Шлезингер М. И. О самопроизвольном различении образов.— В кн.: Читающие автоматы.— Киев, Наукова думка, 1965, с. 24—34.
124. Энциклопедия кибернетики / Под ред. В. М. Глушкова, т. 1.— Киев: Главная редакция УСЭ, 1974, 607 с.
125. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления.— М.: Мир, 1975, 683 с.
126. Юревич Е. И. Теория автоматического управления.— Л.: Энергия, 1975, 416 с.
127. Якубович В. А. а) Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования.— ДАН СССР, 1962, т. 143, № 6, с. 1304—1307; б) Некоторые общие принципы построения обучаемых оноизнающих систем.— В кн.: Вычислительная техника и вопросы программирования, вып. 4.— Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1965, с. 3—72; в) Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств.— ДАН СССР, 1966, т. 166, № 6, с. 1308—1311; г) К теории адаптивных систем.— ДАН СССР, 1968, т. 182, № 3, с. 518—521; д) Адаптивные системы с многошаговыми целевыми условиями.— ДАН СССР, 1968, т. 183, № 2, с. 303—306; е) Об одной задаче самообучения целесообразному поведению.— Автоматика и телемеханика, 1969, № 8, с. 119—139; ж) Конечно-сходящиеся алгоритмы решения счетных систем неравенств и их применение в задачах адаптивных систем.— ДАН СССР, т. 189, № 3, 1969, с. 495—498; з) Об одном методе построения адаптивного управления в условиях большой неопределенности.— В кн.: Труды V Всесоюзного совещания по проблемам управления.— М.: Наука, 1971, с. 123—125; и) Об одном классе адаптивных систем и о результатах моделирования на ЭВМ процесса их самообучения.— В кн.: Механизмы и принципы целенаправленного поведения.— М.: Наука, 1972, с. 50—78; к) Частотная теорема в теории управления.— Сибирский математический журнал, 1973, № 2, с. 384—420; л) Об одном методе построения адаптивного управления линейным динамическим объектом в условиях большой неопределенности.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1974, с. 46—61; м) Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем.— В кн.: Вопросы кибернетики. Адаптивные системы.— М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1976, с. 32—63; н) Адаптивное субоптимальное управление линейным динамическим объектом при

- наличии запаздывания в управлении.— Кибернетика, 1976, № 1, с. 26—43; о) Гл. II—III — в кн.: Методы исследования нелинейных систем автоматического управления.— М.: Наука, 1975, с. 74—175.
128. Якубович Е. Д. а) Решение одной задачи оптимального управления дискретной линейной системой.— Автоматика и телемеханика, 1975, № 9, с. 73—79; б) Оптимальное управление линейной дискретной системой при наличии неизмеряемого возмущения.— Автоматика и телемеханика, 1977, № 4, с. 49—54.
129. Åström K. J., Bohlin T. Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records.— Proc. 2nd IFAC Symp. Theory of Self-Adaptive Control System, Teddington, 1965.
130. Åström K. J., Borisson U., Ljung L., Wittenmark B. Theory and application of self-tuning regulators.— Automatica, 1977, v. 13, № 5, p. 457—486.
131. Åström K. J., Eykhoff P. System identification — a survey.— Automatica, 1972, v. 7, p. 123—162.
132. Bucy R. S., Joseph P. D. Filtering for stochastic processes with application to guidance.— N. Y., London: Interscience Publ., 1968, 195 p.
133. Caines P. E. Prediction error identification methods for stationary stochastic processes.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1976, v. AC-21, № 4, p. 500—506.
134. Carroll R. L., Lindorff D. P. An adaptive observer for single-input, single-output linear systems.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1973, v. AC-18, № 5, p. 428—435.
135. Desoer C. A., Vidyasagar M. Feedback Systems. Input-Output properties.— N. Y.: Academic Press, 1975, p. 264.
136. Deutsch R. Estimation Theory.— N. Y.: Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1965, 269 p.
137. Egardt B. Unification of some continuous-time adaptive control schemes.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1979, v. AC-24, № 4, p. 588—592.
138. Elliot H., Wolovich W. A. Parameter adaptive identification and control.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1979, v. AC-24, № 4, p. 592—599.
139. Feuer A., Morse A. S. Adaptive control of single-input, single-output linear systems.— IEEE Trans. Aut. Contr. 1978, v. AC-23, № 4, p. 557—569.
140. Goodwin G. C., Ramadge P. J., Caines P. E. Ultimate objectives and prior knowledge in system identification.— Invited Paper on 5th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, 1978, Dec. 19.
141. Goodwin G. C., Sin K. S. Stochastic adaptive control. The general delay-coloured noise case.— Technical Report N 7904: The Univ. of Newcastle, New South Wales, Australia, March 1979.
142. Gustavsson I., Ljung L., Söderström T. Identification of processes in closed loop — identifiability and accuracy aspects.— Automatica, 1977, v. 13, № 1, p. 59—75.

143. IEEE Transaction on Automatic Control (Special issue on linear-quadratic-Gaussian problems): 1971, v. AC-16, № 6
144. IEEE Transaction on Automatic Control (Special issue on systems identification and time-series analysis): 1974, v. AC-19 № 6.
145. J a z w i n s k i A. N. Stochastic processes and filtering theory.— N. Y., London: Academic Press, 1970, 376 c.
146. J o h n s o n C. R., T s e E. Adaptive implementation of one-step-ahead optimal control.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1978, v. AC-23, № 5, p. 865—872.
147. K a l m a n R. E. a) New approach to linear filtering and prediction problems.— J. Basic Eng. ASME, ser. D., 1960, v. 82, № 1, p. 35—45; b) Ljapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1963, v. 49, № 2.
148. K a l m a n, R. E., B u c y, R. S. New results in linear filtering and prediction theory.— J. Basic Eng. ASME, Ser. D. 1961, v. 83, № 4, p. 95—108.
149. K u d v a, P., N a r e n d r a K. S. An identification procedure for discrete multivariable systems.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1974, v. AC-19, № 5, p. 549—552.
150. K u s h n e r H. J. On the convergence of Lion's identification method with random inputs.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1970, v. AC-15, № 6, p. 652—654.
151. L a n d a u J. D. A survey of model reference adaptive techniques.— Automatica, 1974, v. 10, № 4, p. 353—379.
152. L a n d a u J. D. Adaptive control systems-model reference approach.— N. Y.: Marcel Dekker, 1980.
153. L i n d o r f f D. P., C a r r o l R. L. Survey of adaptive control using Lyapunov design.— Int. J. Contr., 1973, v. 18, № 5, p. 897—914.
154. L i o n P. N. Rapid identification of linear and nonlinear systems.— AJAA J., 1967, v. 5, p. 1835—1842.
155. L j u n g L. Consistency of the least-squares identification method.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1976, v. AC-21, № 5, p. 779—881.
156. L j u n g L. Analysis of recursive stochastic algorithms.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1977, v. AC-22, № 4, p. 551—575.
157. L j u n g L. Convergence analysis of parametric identification methods.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1978, v. AC-23, № 5, p. 770—783.
158. L ü d e r s G., N a r e n d r a K. S. Stable adaptive schemes for state estimation and identification of linear systems.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1974, v. AC-19, № 6, p. 841—847.
159. M e n d e l J. M. Discrete technique of parameter estimation: the equation error formulation.— N. Y.: Marcel Dekker, 1973.
160. M o n o p o l i R. V. The Kalman-Yakubovich lemma in adaptive control system design.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1973, v. AC-18, № 5, p. 527—529.
161. M o n o p o l i R. V. Model reference adaptive control with an augmented error signal.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1974, v. AC-19, № 5, p. 474—484.

162. Narendra K. S., Kudva P. Stable adaptive schemes for system identification and control.— IEEE Trans. Syst. Man. Cybern., 1974, v. SMC-4, № 6, p. 542—560.
163. Narendra K. S., Tripathi S. S., Lüders G., Kudva P. Adaptive control using Liapunov's method.— Techn. Reprt № CT-43: Yale University, New Haven, 1971.
164. Narendra K. S., Valavani L. S. a) Stable adaptive control design-direct control.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1978, v. AC-23, № 4, p. 570—582; b) Direct and indirect adaptive control.— Automatica, 1979, v. 15, № 6, p. 653—664.
165. Norris D. O., Snyder L. E. Consistency of least-squares estimates used linear systems identification.— SIAM J. Contr., 1975, v. 13, № 6, p. 1183—1194.
166. Parks P. C. Lyapunov redesign of model reference adaptive control systems.— IEEE Aut. Contr. 1966, v. AC-11, № 3, p. 362—367.
167. Safonov M. G., Athans M. Robustness and Computational aspects of nonlinear stochastic estimators and regulators.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1978, v. AC-23, № 4, p. 717—725.
168. Söderström T. Convergence properties of the generalized least squares identification method.— Automatica, 1974, v. 10, № 6, p. 617—626.
169. Susuki T., Dohimoto Y. A. A modified scheme for the model-reference adaptive control with augmented error signal.— Int. J. Control., 1978, v. 27, № 2, p. 199—213.
170. Westphal L. C. An improved adaptive identifier for discrete multivariable linear system.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1978, v. AC-23, № 5, p. 860—865.
171. Wittenmark B. Stochastic adaptive control methods: a survey.— Int. J. Control., 1975, v. 21, № 5, p. 705—730.
172. Yakubovich V. A. On a method of adaptive control under conditions of great uncertainty.— Preprints of the 5th World Congress IFAC, Paris, 1972, v. 37—3, p. 1—6.
173. Young K. D. Design of variable structure model-following control systems.— IEEE Trans. Aut. Contr., 1978, v. AC-23, № 6, p. 1079—1085.
174. Yuan J. S. C., Wonham W. M.— Probing signals for model reference identification.— IEEE Trans. Aut. Contr. 1977, v. AC-22, № 4, p. 530—539.

# СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

ОУ — объект управления;.

ЦУ — цель управления;

РН — рекуррентные неравенства;

РЧН — рекуррентные целевые неравенства;

КСА — конечно-сходящийся алгоритм;

с. в. — случайная величина (случайные величины);

д.-р. ф. — дробно-рациональная функция;

$\nabla$  — операция сдвига на текст назад:  $\nabla y_t = y_{t-1}$ ;

$p = \frac{d}{dt}$  — операция дифференцирования;

$\overline{\lim} (\lim)$  — верхний (нижний) предел;

$\deg g(\lambda)$  — степень полинома  $g(\lambda)$ ;

$\operatorname{grad}_\tau \varphi(t, \tau)$  — градиент по  $\tau$  функции  $\varphi(t, \tau)$  (вектор-столбец);

$\operatorname{Sp} A$  — след (сумма диагональных элементов) матрицы  $A$ ;

$\det A$  — определитель матрицы  $A$ ;

$A^T$  — матрица, транспонированная матрице  $A$ ;

$A^* = A^T$  — матрица, эрмитово сопряженная матрице  $A$  (в вещественном случае  $A^* = A^T$ );

$A^{-1}$  — матрица, обратная матрице  $A$  ( $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ );

$I$  — единичная матрица;

$\|A^{(ij)}\|$  — матрица с элементами  $A^{(ij)}$ ; если  $i = 1, \dots, m$ ;

$i = 1, \dots, n$ , то  $\|A^{(ij)}\|$  —  $(m \times n)$ -матрица ( $m$  — число строк,  $n$  — число столбцов);

$|A|$  — евклидова норма матрицы  $A$ ;

$|A|^2 = \sum_{ij} |A^{(ij)}|^2$  — сумма квадратов абсолютных величин элементов матрицы  $A$ ;

$x = \operatorname{col}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$  — вектор с  $n$  компонентами ( $n$ -вектор или одностолбцовая матрица с  $n$  строками);

$|x| = \left( \sum_{i=1}^n |x^{(i)}|^2 \right)^{1/2}$  — норма вектора; если  $x = \operatorname{col}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ ,  $y = \operatorname{col}(y^{(1)}, \dots, y^{(m)})$ , то  $\operatorname{col}(x, y) = \operatorname{col}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}, y^{(1)}, \dots, y^{(m)})$ ;

$\mathbb{R}^n$  — евклидово пространство (множество всех векторов с  $n$  вещественными компонентами);

$\mathbb{M}$  — символ математического ожидания (операция усреднения);

$\mathbb{M}\{\cdot|\mathfrak{A}\}$  — условное (при условии  $\mathfrak{A}$ ) математическое ожидание.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адаптор 35, 41
  - алгоритм адаптации 41, 49, 72
    - ветвящийся 230
    - идентифицирующий 88
    - рекуррентный 49
    - адаптивного прогнозирования 77
    - «Векторная полоска» 69
    - конечно-решающий рекуррентные неравенства 51
    - «Модифицированная полоска» 68, 69
    - обучения 72
    - «Полоска-1» 57—59
    - «Полоска-2» 60, 61
    - проектирования на выпуклое множество 54
    - решения рекуррентных неравенств конечно-сходящийся 51, 57—59
    - скоростного градиента 82, 84
- Вариант 29, 30
- Вектор переменных 29, 30
  - подстраиваемых параметров 33, 41, 50
  - сенсоров 29, 30
  - существенных параметров 41, 353
  - управлений 29, 30
- Вектор-функция строго предельно невырожденная 89
- Воздействие задающее 354
  - управляющее 122
- Возмущение нерегулярное 137
- Время адаптации 13, 35, 41
- Градиент стохастический 71
- Грубость системы 92
- Движение программное 289
- Дискретный объект управления — см. объект управления дискретный
- Диссипативность 39, 93
  - предельная 407
  - системы управления 139, 140
- Задача адаптивного прогноза 75, 76
  - модального управления 130, 132
  - оптимального слежения 289
- Закон адаптации 35
  - управления 32, 209
- Запаздывание в измерении 133, 155
  - в управлении 16, 122
- Звено минимально-фазовое 399
- Значение условных потерь предельное 305
- Зона нечувствительности 94
- Идентификация 207, 335
  - функциональная 235, 335
- Интервал движения 216
- Качество прогноза 76
- Кифера — Вольфовича процедура 71
- Класс адаптации 13, 41
- Матрица информационная 81
  - предельно невырожденная 81
  - коэффициентов усиления алгоритма 84
  - минимально-фазовая 399
  - наблюдаемости 127

- Матрица передаточная** 135  
 — строго минимально-фазовая 399  
 — управляемости 127
- Метод адаптивной фильтрации** 77  
 — непрерывных моделей 409  
 — подстраиваемой модели 334, 335  
 — рекуррентных целевых неравенств 48, 205  
 — функций Ляпунова 334, 335  
 — эталонного уравнения 334
- Модель непрерывная детерминированная** 409, 410  
 — эталонная 247  
 — неявная 379
- Наблюдаемость пары матриц** 129
- Непрерывный объект управления** — см. объект управления непрерывный
- Неравенства рекуррентные безусловные** 50  
 — условные 50  
 — целевые рекуррентные 47  
 — — безусловные 48  
 — — условные 47, 48
- Неупреждаемость** 38
- Область диссипативности выхода** 139
- Объект минимальный** 127  
 — минимально-фазовый 126  
 — наблюдаемый 127  
 — обобщенный настраиваемый 83  
 — диссипативный по выходу 139  
 — управления линейный дискретный 122  
 — — — — возмущающее воздействие 122  
 — — — —, вход 122, 125  
 — — — —, выход 122, 125  
 — — — —, задающее воздействие 122  
 — — — —, запаздывание в управлении 122  
 — — — — минимально-фазовый 126
- Объект управления линейный дискретный, наблюдаемость** 127  
 — — — — неустойчивый по входу 126  
 — — — — по управлению 126  
 — — — —, помеха 122  
 — — — —, разностный порядок 122  
 — — — —, состояние 123, 125  
 — — — — стационарный, уравнения в стандартной форме 125  
 — — — —, управление 122  
 — — — —, управляемость 127  
 — — — —, управляющее воздействие 122  
 — — — —, уравнения в переменных «вход — выход» 122, 123  
 — — — —, — в пространстве состояний объекта 123  
 — — — —, — в стандартной форме 123  
 — — — —, — с выделенными внешними воздействиями 123  
 — — — —, — эквивалентные 125  
 — — — — устойчивый по входу 126, 127  
 — — — — по выходу 126, 127  
 — — — — по состоянию 127  
 — — — — по управлению 126  
 — — — —, характеристический полином 126  
 — — — — непрерывный 128  
 — — — —, возмущение 128  
 — — — —, вход 128  
 — — — —, выход 128  
 — — — — минимально-фазовый 126  
 — — — —, наблюдаемость 129  
 — — — —, помеха 128  
 — — — — скалярный 128  
 — — — —, управляемость 129  
 — — — —, управляющее воздействие 128  
 — — — —, уравнение в переменных «вход — выход» 128

- Объект управления линейный дискретный, уравнение в стандартной форме 128  
 — — — —, устойчивость по входу 129  
 — — — —, — по выходу 129  
 — — — —, — по состоянию 129  
 — — — —, характеристический полином 129  
 — — стабилизируемый 130, 132  
 — управляемый 127  
 Оптимизация 39
- Параметр варьируемый 30  
 — подстраиваемый 33, 41  
 — существенный 34, 41, 49  
 Плотность спектральная процесса 176  
 Полином гурвицев 129  
 — устойчивый 127  
 — характеристический замкнутой системы 131  
 Помеха 31  
 Помехи нерегулярные 137  
 — стационарные 158  
 Порядок фильтрации 381  
 Последовательность случайных величин белошумная 138  
 Прогноз адаптивный 75  
 — оптимальный 77  
 Прогнозирование адаптивное 77, 78  
 Пространство подстраиваемых параметров 295  
 Процедура Кифера — Вольфовича 71  
 — метода наименьших квадратов рекуррентная 80  
 — Роббинса — Монро 70, 71  
 Процесс стационарный с дробно-рациональной матрицей спектральных плотностей 138  
 — — центрированный с дробно-рациональной спектральной плотностью 177  
 — управляемый 38
- Расширение варианта 32  
 Регулятор 32  
 — адаптивный 13, 20, 25, 35, 41, 305
- Регулятор неадаптивный 40  
 — стабилизирующий 130, 132, 168, 177  
 Режим оптимизации 309  
 — стабилизации 309  
 — управления оптимизирующий 309  
 Роббинса — Монро процедура 70, 71
- Связь обратная 155  
 Сенсор 29, 30  
 — векторный 29, 30  
 Сепарация функции 161  
 Система адаптивная 13, 35, 41, 49  
 — — управляющая 13, 41  
 — минимально устойчивая 270, 275  
 — работоспособная 88  
 — самонастраивающаяся 13  
 — со стабилизирующими законом управления 35  
 — управления 132  
 — — диссипативная 139  
 — — — по выходу 139  
 Сложение оптимальное 289  
 Состояние 29, 30  
 Стабилизация 39, 130  
 Субоптимальность 207  
 — закона управления 209  
 — регулятора 209  
 Субоптимизация 39  
 Супермартингал 98  
 Суперпозиция конечно-сходящихся алгоритмов 54
- Теорема о стабилизации 130  
 Траектория системы устойчивая при постоянно действующих возмущениях 96
- Управление 29, 30  
 — векторное 29, 30  
 — допустимое 38, 154  
 — модальное 130, 132  
 — нереализуемое 157  
 — оптимальное 145  
 — предельно-оптимальное 155

- Управление субоптимальное 209, 308  
 Управляемость пары матриц 127  
 Уравнение неадаптивного регулятора 32  
 — обобщенного настраиваемого объекта 83  
 — регулятора 155  
 — сенсорное 31, 38  
 — эволюционное 31, 38  
 — эталонное 353  
 Уравнения адаптивного регулятора 35  
 Уровень оптимальности 209  
 Условие устойчивости системы управления 139  
 — целевое 33  
 — частотное 141  
 Факторизация дробно-рациональных функций 180—183  
 Фильтр 381  
 — строго пассивный 383  
 Фильтрация 381  
 Функционал качества управления 39  
 Функция вещественная положительная 383  
 Функция вещественная строго положительная 383  
 — дискриминантная 72  
 — дробно-рациональная 168  
 — — устойчивая 177  
 — Ляпунова конечно-сходящегося алгоритма 53  
 — нерегулярная 137  
 — оценочная 70  
 — передаточная 135  
 — целевая 33, 38  
 Характеристика возмущения спектральная 137  
 Цель адаптации 42  
 — управления 13, 32, 39  
 — — локальная 39  
 Число ошибок алгоритма 51  
 Шаг алгоритма 71  
 Элемент последовательности обучающий 71

*Владимир Николаевич Фомин,  
Александр Львович Фрадков,  
Владимир Андреевич Якубович*

**АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ**

Редактор *Л. И. Смоляр*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *Г. В. Подвольская*

ИБ № 11671

---

Сдано в набор 06.11.80.

Подписано к печати 10.06.81.

Т-05893. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага тип. № 1.

Обыкновенная гарнитура. Высокая печать.

Условн. печ. л. 23,52. Уч.-изд. л. 24,97.

Тираж 3900 экз. Заказ № 186.

Цена 4 руб.

---

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

2-я типография издательства «Наука»

121099, Москва, Г-99, Шубинский пер. 10