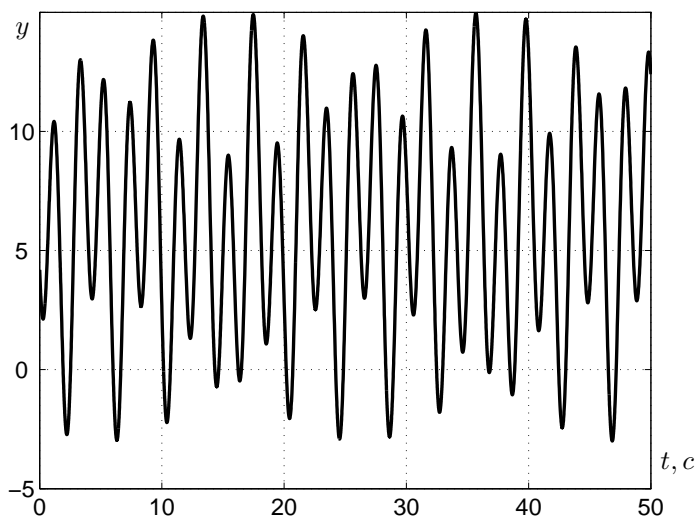


**А.А. Бобцов, В.О. Никифоров, А.А. Пыркин**

# **АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ**



**Санкт-Петербург**

**2015**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

**А.А. Бобцов, В.О. Никифоров, А.А. Пыркин**

**АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ  
ВОЗМУЩЕННЫМИ СИСТЕМАМИ**

**Учебное пособие**

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Санкт-Петербург**

**2015**

УДК 681.51, 681.53, 681.58

Бобцов А.А., Никифоров В.О., Пыркин А.А., Адаптивное управление возмущенными системами. Учебное пособие. — СПб.: Университет ИТМО, 2015. — 126с.

Учебное пособие посвящено исследованию современных методов адаптивного и робастного управления линейными и нелинейными объектами в условиях возмущающих воздействий с неизвестными параметрами. Описаны оригинальные, разработанные авторами алгоритмы оценивания параметров мультигармонических воздействий. Рассмотрены способы стабилизации систем с запаздывающим управлением. Пособие предназначено для студентов факультета компьютерных технологий и управления Университета ИТМО, специализирующихся по направлениям подготовки 15.04.06 Мехатроника и робототехника, 27.04.03 Системный анализ и управление и 27.04.04 Управление в технических системах.

Илл. 23, список литературы — 35 наим.

Одобрено на заседании кафедры СУИИ, протокол № 6 от 19.05.2015

Одобрено Ученым советом факультета КТиУ, протокол № 6 от 23.06.2015



**Университет ИТМО** — ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2015

© Бобцов А.А., Никифоров В.О., Пыркин А.А., 2015

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1 Принцип внутренней модели в задачах компенсации и слежения</b>	<b>9</b>
1.1 Модели внешних воздействий . . . . .	9
1.1.1 Внешние воздействия и задачи управления . . .	9
1.1.2 Построение моделей внешних воздействий . . .	11
1.1.3 Принцип внутренней модели . . . . .	15
1.1.4 Каноническая форма генератора внешних воздействий . . . . .	17
1.2 Управление при известных внешних воздействиях . . .	20
1.2.1 Постановка задач оценки, компенсации и слежения	20
1.2.2 Оценка возмущения . . . . .	22
1.2.3 Компенсация возмущения . . . . .	26
1.2.4 Слежение за командным генератором . . . . .	32
1.3 Управление при неизвестных внешних воздействиях . .	35
1.3.1 Постановка задач адаптивной оценки, слежения и компенсации . . . . .	35
1.3.2 Этапы синтеза адаптивных систем . . . . .	39
1.3.3 Базовые алгоритмы адаптации . . . . .	42
1.3.4 Адаптивная компенсация возмущений . . . . .	52
1.3.5 Числовой пример . . . . .	57
<b>Глава 2 Адаптивная оценка мультигармонических сигналов</b>	<b>61</b>
2.1 Алгоритм адаптивной идентификации параметров смещенного синусоидального сигнала . . . . .	62

2.1.1	Постановка задачи . . . . .	62
2.1.2	Алгоритм идентификации частоты смещенного гармонического сигнала . . . . .	63
2.1.3	Алгоритм идентификации смещения, амплитуды и фазы . . . . .	69
2.1.4	Числовой пример . . . . .	74
2.2	Алгоритм адаптивной идентификации частот и наблюдатель гармоник мультigarмонического сигнала . . . . .	79
2.2.1	Постановка задачи . . . . .	79
2.2.2	Алгоритм идентификации частот смещенного мультigarмонического сигнала . . . . .	80
2.2.3	Алгоритм идентификации смещения, амплитуд и фаз гармоник . . . . .	83
2.2.4	Числовой пример . . . . .	88
<b>Глава 3 Компенсация возмущений для систем с запаздыванием</b>		
		<b>93</b>
3.1	Введение в проблематику . . . . .	93
3.2	Постановка задачи . . . . .	96
3.3	Оценивание частот . . . . .	96
3.4	Наблюдатель возмущения . . . . .	101
3.4.1	Выделение гармоник . . . . .	102
3.4.2	Оценка амплитуд . . . . .	104
3.5	Синтез закона управления . . . . .	106
3.6	Числовой пример . . . . .	111
<b>Заключение</b>		<b>119</b>
<b>Список литературы</b>		<b>120</b>

# Введение

Задача компенсации внешних возмущающих воздействий относится к фундаментальным проблемам современной теории автоматического управления. Особый интерес представляют задачи управления по выходу, как линейными и нелинейными, так и устойчивыми и неустойчивыми объектами.

Весьма наглядный пример сложной технической системы, функционирующей в условиях нестационарной внешней среды, — надводное судно. В открытом море судно подвергается возмущениям, имеющим различную природу и происхождение. Выделяют три типа возмущений, существенно влияющих на качество управления: ветровые воздействия, волновые воздействия и течение. Система автоматического управления движением судна может решать различные задачи: стабилизация курса, движение вдоль заданной траектории, стабилизация продольной и поперечной скоростей, динамическое позиционирование в точке. К системам автоматического управления движением предъявляются жесткие требования к динамическим и точностным показателям качества. Например, для задачи стабилизации курса установившаяся ошибка не должна превышать значение 1 градуса. Для нефтеналивных судов большого водоизмещения, длина которых может быть более 100 метров, необходимо синтезировать системы динамического позиционирования в точке. При том, что судно может находиться под нефтяной вышкой более суток, система управления должна обеспечивать точность позиционирования с отклонением не более 20 см при различного рода возмущениях.

Более сложными техническими объектами в смысле управления являются летательные аппараты, обладающие сравнительно высокими скоростями полета. Сложность объясняется повышенными требовани-

ями к безопасности движения. При этом сам летательный аппарат подвержен весьма серьезным внешним воздействиям: ветер, зоны турбулентности, грозовые тучи, и многое другое, характерное для данного типа объектов управления.

Нормальное функционирование высокоточных оптических систем требуют относительно спокойной и неподвижной внешней среды. Наличие возмущающих воздействий может крайне негативно сказываться на работе такой системы, поэтому влияние возмущения должно быть устранено. В прецизионном электроприводе необходимо минимизировать траекторную ошибку с помощью компенсации возмущающих воздействий. Задача компенсации возмущений решается стендами активной виброзащиты.

Заданную траекторию при движении орбитального тела сохраняет только центр масс, а весь корабль под действием различных возмущающих моментов может вращаться относительно системы координат, связанной с центром масс. Чтобы корпус корабля был неподвижен относительно своего центра, необходимо его стабилизировать в нужном положении. Управление кораблем или орбитальной космической станцией — это не только стабилизация его относительно центра масс, но и ориентация по отношению к внешней системе координат, например, по отношению к Солнцу. Сохранению же полученной ориентации будут препятствовать различного рода регулярные и нерегулярные возмущения, компенсация которых и составляет задачу стабилизации.

Система стабилизации должна работать непрерывно, быть очень чувствительной к возмущающим моментам, которые могут иметь самое разнообразное происхождение, величину и продолжительность действия. Причин возможных внешних возмущений — десятки. Это и силы аэродинамического сопротивления, и гравитационное и магнитное поля Земли, и давление солнечной радиации, и столкновение с метеорами, возможные толчки и удары при встрече с другими космическими аппаратами. Источники возмущающих моментов могут находиться как внутри орбитальной космической станции, так и вне ее.

Внутренние возмущения могут быть вызваны не только работой подвижных частей оборудования, но и перемещениями членов экипажа. Если возмущения не компенсировать постоянно, то импульс момента может быть очень большим, а угловые скорости вращения будут расти неограниченно и станция может раскрутиться до большой скорости. Внешние возмущения естественного происхождения — аэродинамиче-

ского, гравитационного или магнитного — характеризуются, с одной стороны, весьма малыми значениями возмущающего момента, с другой стороны, довольно большой продолжительностью их действия.

Нет никаких сомнений, что задача активной компенсации возмущающих воздействий является актуальной для широкого класса технических объектов управления. На сегодняшний день получено большое число алгоритмов управления в условиях внешних воздействий [2, 3, 9, 14, 31, 32]). Как правило, подходы к управлению при наличии возмущения предполагают использование интегральных регуляторов, повышение у системы порядка астатизма или же встраивание известной модели возмущающего воздействия (комбинированные регуляторы), что в подавляющем большинстве случаев является сильной идеализацией. Однако, применение указанных методов ограничивается классом измеряемых, ограниченных возмущений или же возмущений с известной динамической моделью. С развитием адаптивного управления удалось найти более конструктивные решения в классе параметрически и сигнально не определенных детерминированных возмущений [9, 14, 31].

При огромном количестве работ, посвященных методам синтеза регуляторов в условиях запаздывания зачастую не рассматривается наличие внешних возмущений, при этом не ясно, является ли тот или иной предложенный метод пригодным к использованию в реальном техническом объекте. Существует не меньшее количество результатов, где получены адаптивные и робастные схемы компенсации параметрически не определенных возмущающих воздействий. Однако, при наличии временного запаздывания в контуре управления практически все эти методы становятся неэффективными. В связи с этим студентам предлагается изучить подходы, позволяющие работать в условиях запаздывания, параметрической неопределенности и действия внешних возмущений, чему посвящено учебное пособие.

Описанные в учебном пособии подходы базируются на методе функций Ляпунова, анализе амплитудно-фазовых частотных характеристик линейных динамических звеньев, методе “backstepping” Мировска Крстича. В пособии также использованы общие методы теории автоматического управления и автоматизации технологических процессов, алгебры многочленов и теории матриц, теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

В пособии предложены оригинальные методы компенсации де-



терминированного гармонического возмущения, действующего на неустойчивые нелинейные объекты с запаздыванием в канале управления. Наиболее значимым является объединение результатов по компенсации возмущений и метода М. Крстича [20] по стабилизации неустойчивых объектов управления с запаздыванием, что позволило получить новый метод управления неустойчивыми объектами с запаздыванием в условиях параметрически не определенных возмущающих воздействий.

Управление в условиях параметрической неопределенности и при измерении скалярных входов и выходов объекта с запаздыванием без условно является наиболее сложной задачей. В пособии представлены алгоритмы управления, как с использованием прогнозирующих устройств, так и без них. Представленные алгоритмы обеспечивают слежение выхода объекта за эталонным сигналом с заданной точностью, при этом динамический порядок объекта может быть произвольным. Приведены результаты моделирования для случая, если запаздывание в объекте неизвестно (но известна верхняя граница запаздывания) и объект управления подвержен внешним неконтролируемым ограниченными возмущениям.

Практическая значимость алгоритмов управления по выходу заключается в том, что такие методы (т. е. без измерения переменных состояния объекта или производных выходного сигнала) могут быть эффективно применены для широкого класса технических объектов, функционирующих в условиях возмущающих воздействий и запаздывания в каналах управления и измерения. Применение описанных методов позволяет существенно ослабить требования к объему априорной информации о свойствах среды функционирования объекта управления; значительно снизить затраты на разработку и использование сенсорной техники для измерения всех переменных состояния системы или производных выходной переменной; расширить класс технических объектов, для которых могут быть успешно решены задачи высокоточного управления; повысить надежность системы благодаря устранению дополнительных помех, вызванных использованием датчиков переменных состояния или вычислителей производных выходной переменной.

# Глава 1

## Принцип внутренней модели в задачах компенсации и слежения

### 1.1 Модели внешних воздействий

#### 1.1.1 Внешние воздействия и задачи управления

В подавляющем большинстве практических случаев построение замкнутых систем автоматического управления не может быть осуществлено без учета влияния *внешних воздействий*. К внешним (по отношению к замкнутому контуру системы автоматического управления) воздействиям относятся:

1) *сигналы задания*  $g(t)$  (задающие воздействия, командные сигналы, программные траектории), определяющие желаемый характер изменения регулируемых переменных;

2) *сигналы возмущения*  $\delta(t)$  (возмущающие воздействия, внешние возмущения), характеризующие влияние на объект управления внешней среды и, как правило, препятствующие достижению заданной цели управления.

Сигналы задания и сигналы возмущения принципиально различны по их доступности прямым измерениям. На практике, как правило, внешние возмущения не доступны прямым измерениям и, кроме того, заранее известны только с точностью до определенного класса воздействий, заданного диапазоном амплитуд и частот, статистическими характеристиками (математическим ожиданием и дисперсией, законом распределения, спектральной плотностью) и т. п. Сигналы задания не только доступны прямым измерениям, но часто генерируются спе-

циальным устройством, хотя и внешним по отношению к замкнутому контуру системы автоматического управления, но являющимся ее составной частью – блоком задания, программным устройством, интерполятором траектории и т. п. В ряде случаев, сигнал задания является заранее известным.

В зависимости от вида сигнала задания выделяют следующие классы задач управления:

1) *задача стабилизации* регулируемых переменных на заданном постоянном уровне; при этом сигнал задания является постоянным на достаточно длительных интервалах времени, т. е. представляет собой кусочно-постоянную функцию времени;

2) *задача слежения*, при которой сигнал задания меняется по заранее неизвестному закону, т. е. представляет собой априорно неизвестную функцию времени;

3) *задача программного управления*, при которой сигнал задания меняется по заранее известному закону, т. е. представляет собой априорно известную функцию времени.

В условиях отсутствия внешних возмущений (что, как правило, на практике является сильной идеализацией) может быть поставлена задача асимптотического слежения за сигналом задания

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (1.1)$$

при выполнении дополнительных требований по времени переходного процесса, перерегулированию и т. п. В формуле (1.1)  $e(t) = g(t) - y(t)$  – ошибка управления, представляющий собой разницу между сигналом задания  $g(t)$  и регулируемой переменной  $y(t)$ .

В условиях воздействия внешних возмущений цель управления в виде асимптотического стремления (1.1) на практике реализовать удастся не всегда, и в этих случаях ставится более слабая задача обеспечения ограниченности ошибки управления

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| \leq \kappa \quad \text{для всех } t \geq T, \quad (1.2)$$

где  $\kappa$  – достаточно малая, заранее заданная величина (допустимая ошибка слежения), а  $T$  определяет время переходного процесса, после которого должно выполняться заданное требование по точности слежения.

Необходимо отметить, что асимптотическое условие (1.1) может быть также достигнуто при воздействии внешних возмущений за счет применения специальных методов компенсации возмущений (чему посвящено основное содержание пособия). Однако в данном случае потребуется некоторая априорная информация о свойствах возмущения. Поэтому, как с теоретической, так и с практической точек зрения, является важным вопрос о минимальном объеме априорной информации, который позволил бы описать значимый для практики класс внешних воздействий и, в тоже время, обеспечить выполнение асимптотического условия (1.1) без прямого измерения возмущения или его полной априорной известности.

С другой стороны, достижение условия (1.1) даже при отсутствии возмущений, но при быстро изменяющемся сигнале задания, может потребовать априорную информации о его свойствах и применение специальных методов комбинированного управления. Таким образом, и в случае решения задачи асимптотического слежения встает вопрос о минимальном объеме априорной информации о свойствах сигнала задания.

В настоящем пособии проблема априорного описания внешних сигналов (сигналов задания или возмущающих воздействий) решается с помощью специальных, параметрически неопределенных моделей внешних воздействий.

### 1.1.2 Построение моделей внешних воздействий

Существует принципиально различные методы построения систем управления, компенсирующих (минимизирующих) влияние внешних возмущений: методы инвариантного управления [12], стохастические методы, частотные методы и методы  $H_\infty$ -оптимизации [4], адаптивные и робастные методы. Все они отличаются как принципом построения системы (закона) управления, так и принятой гипотезой относительно вида (свойств) внешнего возмущения.

Теоретически обеспечение цели управления (1.2) в условиях действия внешних возмущений может быть достигнуто за счет усиления отрицательной обратной связи по ошибке управления. Однако на практике, как правило, такой подход является неприемлемым. Даже малые отклонения свойств реального объекта управления от принятой математической модели (малые неучтенные постоянные времени, нелиней-

ные звенья типа “насыщение” и т. п.) приводят к потери устойчивости замкнутой системы при увеличении коэффициентов обратной связи. Поэтому для повышения точности реальных систем, действующих в условиях внешних возмущений, предпочтительнее использовать методы комбинированного управления, когда сигнал управления наряду с обратными связями по ошибке управления содержит прямые связи компенсации возмущения. В настоящем пособии, в развитие подхода, изложенного в [7], рассматривается важный для практики класс детерминированных возмущений, в которых может быть выделена доминирующая регулярная составляющая.

**Допущение 1.1** Внешнее возмущение  $\delta$  представимо в виде:

$$\delta = \Delta + v, \quad (1.3)$$

где  $\Delta = \Delta(t)$  – неизвестная ограниченная функция времени (нерегулярная составляющая возмущения), а  $v = v(t)$  – регулярная составляющая возмущения, которая может быть представлена в качестве выхода линейной модели конечной размерности:

$$\dot{\chi} = \Gamma\chi, \quad (1.4)$$

$$v = h^T\chi; \quad (1.5)$$

при этом  $\chi \in \mathbb{R}^q$  – вектор состояния, имеющий начальное значение  $\chi(0)$ ;  $\Gamma - q \times q$  матрица постоянных коэффициентов и  $h$  – постоянный вектор соответствующей размерности. Без потери общности будем считать, что пара  $(h^T, \Gamma)$  является полностью наблюдаемой.

Модель (1.4)–(1.5) в общем случае будем называть *моделью внешних воздействий*, или *командным генератором*, если ее выходом является сигнал задания  $g(t)$ , и *генератором возмущения*, если ее выходом является регулярная составляющая возмущения  $v(t)$ .

Допущение 1.1 позволяет с единых позиций рассмотреть три вида внешних возмущений, широко встречающихся на практике:

1) при  $\Delta(t) \equiv 0$  возмущение  $\delta(t) = v(t)$  является регулярной априорно неточно заданной функцией времени;

2) при  $\Delta(t) \neq 0$  и  $v(t) \neq 0$  представление (1.3) описывает, в частности, возмущение, содержащее доминирующую регулярную составляющую  $v(t)$  и нерегулярную составляющую (помеху или ошибку аппроксимации – см. ниже)  $\Delta(t)$ ;

3) при  $v(t) \equiv 0$  возмущение  $\delta(t) = \Delta(t)$  является ограниченной функцией времени, относительно которой разработчик системы управления не располагает никакой априорной информацией.

В связи с принятым допущением 1.1 являются важными следующие вопросы:

1) насколько широкий и важный с практической точки зрения класс внешних сигналов описывает модель (1.3)–(1.5);

2) каковы методы построения генератора внешних воздействий (1.4)–(1.5);

3) каков объем априорной информации необходим для построения модели (1.4)–(1.5).

Из теории линейных систем известно, что решением системы линейных дифференциальных уравнений (1.4)–(1.5) является функция вида

$$v(t) = h^T e^{\Gamma t} \chi(0).$$

При этом изменение начальных условий  $\chi(0)$  модели (1.4) обеспечивает генерацию различных реализаций сигнала  $v(t)$ .

Основной метод построения моделей внешних воздействий (1.4)–(1.5) – *метод последовательного дифференцирования*. Проиллюстрируем данный метод следующими примерами.

**Пример 1.1.** Рассмотрим построение генератора постоянного сигнала  $v(t) = A$ , где  $A$  – заданная константа. Выберем в качестве координаты состояния генератора внешнего воздействия сам сигнал, т. е.  $\chi_1 = v$ . Дифференцируя  $\chi_1$  по времени, получаем  $\dot{\chi}_1 = 0$ . Тогда легко видеть, что постоянное воздействие описывается моделью (1.4)–(1.5) первого порядка с параметрами:

$$\Gamma = 0, \quad h = 1,$$

и начальным условием  $\chi(0) = A$ .

**Пример 1.2.** Пусть требуется построить генератор гармонического сигнала

$$v(t) = A \sin(\psi + \omega t), \quad (1.6)$$

где  $A$  – амплитуда сигнала,  $\omega$  – угловая частота сигнала, а  $\psi$  – начальная фаза сигнала. Выберем в качестве первой координаты вектора состояния генератора сам сигнал, т. е.  $\chi_1 = v$ . Дифференцируя  $\chi_1$  по времени с учетом (1.6), находим

$$\dot{\chi}_1 = \omega A \cos(\psi + \omega t). \quad (1.7)$$

Выберем в качестве второй координаты вектора состояния генератора производную гармонического сигнала, т. е.  $\chi_2 = \dot{v}$ . Тогда, продолжая процедуру последовательного дифференцирования, находим:

$$\dot{\chi}_2 = \ddot{v}(t) = -\omega^2 A \sin(\psi + \omega t) = -\omega^2 \chi_1. \quad (1.8)$$

Объединяя уравнения (1.7)–(1.8) с учетом обозначений  $\chi_1 = v$  и  $\chi_2 = \dot{v} = \dot{\chi}_1$ , окончательно получаем:

$$\dot{\chi}_1 = \chi_2, \quad \dot{\chi}_2 = -\omega^2 \chi_1, \quad v = \chi_1.$$

Для векторно-матричной формы (1.4)–(1.5) имеем:

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad h^T = [1 \ 0]. \quad (1.9)$$

При этом легко видеть, что

$$\chi_1(0) = v(0) = \sin \psi, \quad \chi_2(0) = \dot{v}(0) = \omega A \cos \psi. \quad (1.10)$$

Таким образом, генератор внешних воздействий второго порядка с коэффициентами (1.9) и начальными условиями (1.10) генерирует гармонический сигнал (1.6) с заданными: амплитудой  $A$ , угловой частотой  $\omega$  и начальной фазой  $\psi$ .

**Пример 1.3.** Построим командный генератор для смещенного гармонического сигнала вида

$$v(t) = B + A \sin(\psi + \omega t),$$

где  $B$  – “смещение”, а  $A$ ,  $\omega$  и  $\psi$  – амплитуда, угловая частота и начальная фаза переменной составляющей сигнала, соответственно. Используя результаты из примеров 1.1 и 1.2, нетрудно показать, что в данном

случае генератор будет описываться моделью (1.4)–(1.5) третьего порядка с параметрами

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \end{vmatrix}, \quad h^T = [1 \ 1 \ 0]$$

и начальными условиями

$$\chi_1(0) = B, \quad \chi_2(0) = \sin \psi, \quad \chi_3(0) = \omega A \cos \psi.$$

### 1.1.3 Принцип внутренней модели

В классической теории управления параметры генератора (1.4)–(1.5) полагаются точно известными, что позволяет использовать для компенсации возмущения (или обеспечения асимптотического слежения за сигналом задания) *принцип внутренней модели* [11]. В соответствии сданным принципом, для полной компенсации (асимптотического воспроизведения) внешнего воздействия модель его генератора должна быть соответствующим образом воспроизведена в структуре системы управления. Простейшим примером использования принципа внутренней модели является интегральный регулятор, позволяющий за счет введения в обратную связь интегратора (т. е. модели постоянного сигнала – см. пример 1.1) полностью компенсировать постоянное возмущение.

Использование классического принципа внутренней модели, предполагающего воспроизведение в структуре системы управления модели генератора (1.4)–(1.5), позволяет достигнуть заданной цели управления для всех возможных начальных условий генератора. Другими словами, даже при фиксированном алгоритме управления цель управления достигается для некоторого класса внешних воздействий, заданного с точностью до параметров, определяемых начальными условиями модели генератора. Так, для модели гармонического сигнала с параметрами (1.9) класс внешних воздействий будет представлен гармоническими сигналами с известной угловой частотой  $\omega$ , но с произвольной амплитудой  $A$  и произвольной начальной фазой  $\psi$ .

Естественно, с практической точки зрения предпочтительно построить закон управления, который обеспечивал бы выполнение заданной цели для возможно более широкого класса внешних воздей-



ствий. Расширение класса внешних воздействий обеспечивает применение *адаптивного подхода* к принципу внутренней модели [7]. В соответствии с данным подходом, модель (1.4)–(1.5) рассматривается в качестве параметрически неопределенной, т. е. полагается, что коэффициенты матрицы  $\Gamma$  и вектора  $h$  являются неизвестными. Очевидно, что в этом случае существенно расширяется класс функций  $v(t)$ , генерируемых моделью (1.4)–(1.5) фиксированного порядка. Так, например, модель второго порядка при различных параметрах и начальных условиях будет описывать: постоянный сигнал  $v(t) = \text{const}$ , линейно нарастающий сигнал  $v(t) = At$ , гармонический сигнал  $v(t) = A \sin(\psi + \omega t)$ , экспоненциально нарастающие (затухающие) сигналы  $v(t) = A_1 \exp(\alpha_1 t) + A_2 \exp(\alpha_2 t)$  и гармонический экспоненциально нарастающий (затухающий) сигнал  $v(t) = A \exp(\alpha t) \sin(\psi + \omega t)$ . В приведенных выше формулах  $A, A_1, A_2, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \psi, \omega$  – постоянные параметры, определяемые как параметрами модели (1.9), так и начальными условиями (1.10).

Во многих практических случаях внешнее воздействие (например, возмущение  $\delta(t)$ ) задается аналитическим выражением, для которого не удается подобрать соответствующего решения линейной модели (1.4)–(1.5), или графиками и таблицами, полученными экспериментально. В этом случае можно использовать *аппроксимационный подход* к принципу внутренней модели [11]. Для этого разложим искомую функцию  $\delta(t)$  в ряд:

$$\bar{\delta}(t) = \sum_{k=1}^N c_k \bar{v}_k(t), \quad (1.11)$$

где  $\bar{\delta}(t)$  – аппроксимационное представление сигнала  $\delta(t)$ ,  $c_k$  – коэффициенты аппроксимации,  $N$  – выбранное число членов ряда,  $\bar{v}_k(t)$  – базисные функции, являющиеся решениями известных линейных дифференциальных уравнений, т. е. выходами базисных генераторов вида:

$$\dot{\bar{\chi}}_k = \bar{\Gamma}_k \bar{\chi}_k, \quad (1.12)$$

$$\bar{v}_k = \bar{h}_k^T \bar{\chi}_k. \quad (1.13)$$

При заданных базисных функциях  $\bar{v}_k(t)$  коэффициенты аппроксимации  $c_k$  выбираются таким образом, чтобы получить минимальную

норму ошибки аппроксимации:

$$\Delta(t) = \delta(t) - \sum_{k=1}^N c_k \bar{v}_k(t).$$

Наконец, легко видеть, что от суммы базисных функций можно перейти к одной регулярной составляющей  $v(t) = \sum_{k=1}^N \bar{v}_k(t)$ , генерируемой моделью (1.4)–(1.5) с параметрами:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\Gamma}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\Gamma}_N \end{bmatrix}, \quad h^T = [\bar{h}_1^T, \bar{h}_2^T, \dots, \bar{h}_N^T], \quad (1.14)$$

где коэффициенты аппроксимации отнесены к вектору состояния генератора возмущения

$$\chi^T = [c_1 \bar{\chi}_1^T, c_2 \bar{\chi}_2^T, \dots, c_N \bar{\chi}_N^T].$$

Это, вообще говоря, позволяет избежать необходимости вычисления коэффициентов  $c_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

Таким образом, применение аппроксимационного подхода к принципу внутренней модели позволяет получить представление (1.3), где  $\Delta(t)$  является ошибкой аппроксимации. При этом даже для заранее назначенного набора базисных функций  $\bar{v}_k(t)$  (т. е. для модели генератора с известными параметрами (1.14)) нет необходимости в вычислении коэффициентов  $c_k$ , т. к. они попадают в начальные условия вектора состояния  $\chi(0)$ . Если же модель генератора рассматривается как параметрически неопределенная, то построение адаптивной системы управления обеспечит настройку не только коэффициентов аппроксимации  $c_k$  (за счет компенсации влияния начальных условий), но и настройку самих базисных функций, что существенно расширяет класс внешних воздействий, аппроксимируемых генератором фиксированной размерности.

### 1.1.4 Каноническая форма генератора внешних воздействий

Решения многих задач, представленные в настоящем пособии, основаны на использовании специальной, так называемой *канонической*

формы генератора внешних воздействий. Так, в случае параметрически неопределенной модели генератора каноническая форма позволяет представить регулярную составляющую возмущения  $v(t)$  в виде линейной регрессионной модели с неизвестными постоянными параметрами и известными базисными функциями. Такая модель является типичной для многих задач идентификации, адаптивного наблюдения и адаптивного управления.

*Лемма 1.1 [28, 29]. Регулярная составляющая возмущения  $v(t)$  может быть представлена в виде выхода модели:*

$$\dot{\zeta} = G\zeta + lv, \quad (1.15)$$

$$v = \theta^T \zeta, \quad (1.16)$$

где  $G$  – произвольная  $q \times q$  гурвицева матрица, образующая с  $q \times 1$  вектором  $l$  полностью управляемую пару;  $\theta = h^T M^{-1}$  – вектор постоянных коэффициентов; вектор состояния  $\zeta \in \mathbb{R}^q$  связан с вектором состояния  $\chi$  модели (1.4), (1.5) соотношением подобия

$$\zeta = M\chi, \quad (1.17)$$

а  $q \times q$  матрица  $M$  является решением матричного уравнения

$$M\Gamma - GM = lh^T. \quad (1.18)$$

*Доказательство леммы 1.1.* Так как спектры матриц  $G$  и  $\Gamma$  не пересекаются, пара  $(h^T, \Gamma)$  является полностью наблюдаемой, а пара  $(G, l)$  – полностью управляемой, то уравнение (1.18) имеет единственное невырожденное решение [10]. Продифференцируем (1.17) в силу уравнения (1.4):

$$\dot{\zeta} = M\Gamma\chi.$$

С учетом (1.18) можно записать

$$\dot{\zeta} = M\Gamma\chi = GM\chi + lh^T\chi = G\zeta + l\delta,$$

откуда следует справедливость (1.15). Далее, подставляя  $\chi = M^{-1}\zeta$  в (1.5), непосредственно получаем (1.16).

Другими словами, лемма 2.1 устанавливает, что модель (1.4), (1.5) является подобной модели (1.15), (1.16) которую будем называть *канонической формой генератора возмущения*.

Сформулируем ряд следствий из леммы 2.1, касающихся свойств регулярного возмущения  $v$ . Эти свойства будут в дальнейшем использованы при построении алгоритмов наблюдения и управления.

*Следствие 1.1  $i$ -я Производная сигнала  $v(t)$  может быть представлена в виде:*

$$v^{(i)} = \vartheta_i^T \zeta,$$

где  $\zeta$  – вектор состояния модели (1.15);  $\vartheta_i^T = \theta^T (G + l\theta^T)^i \in \mathbb{R}^q$  – вектор постоянных коэффициентов.

*Следствие 1.2 Для любого полинома  $\alpha(p)$  оператора дифференцирования  $p = d/dt$  справедливо следующее соотношение:*

$$\alpha(p)[v(t)] = \vartheta^T \zeta,$$

где  $\zeta$  – вектор состояния модели (1.15);  $\vartheta \in \mathbb{R}^q$  – вектор постоянных коэффициентов.

*Следствие 1.3 Пусть*

$$\bar{v}(t) = W(p)[v(t)], \quad (1.19)$$

где  $W(p)$  – асимптотически устойчивая передаточная функция. Тогда “отфильтрованное” возмущение  $\bar{v}(t)$  может быть представлено в виде:

$$\bar{v}(t) = \theta^T \bar{\zeta}, \quad (1.20)$$

где регрессор  $\bar{\zeta}$  является вектором состояния модели

$$\dot{\bar{\zeta}} = G\bar{\zeta} + l\bar{v}. \quad (1.21)$$

*Доказательство следствия 1.3.* Преобразуя сигналы левой и правой части уравнения (1.16) с помощью динамического звена  $W(p)$ , непосредственно получаем (1.20), где

$$\bar{\zeta} = W(p) \left[ (pI - G)^{-1} l[v(t)] \right];$$

$(pI - G)^{-1}l$  является передаточной матрицей (вектор-столбцом) модели (1.15). С учетом перестановочности линейных стационарных операторов последнее равенство можно записать в виде:

$$\bar{\zeta} = (pI - G)^{-1}l \left[ W(p)[v(t)] \right],$$

что эквивалентно (1.21).

*Следствие 1.4  $i$ -я производная сигнала  $\bar{v}(t)$  (1.19) может быть представлена в виде:*

$$\bar{v}^{(i)} = \vartheta_i^T \bar{\zeta},$$

где  $\bar{\zeta}$  – вектор состояния модели (1.21);  $\vartheta_i = \theta^T (G + l\theta^T)^i \in \mathbb{R}^q$  – вектор постоянных коэффициентов.

*Следствие 1.5 Для любого полинома  $\alpha(p)$  и сигнала  $\bar{v}(t)$  (1.19) справедливо соотношение*

$$\alpha(p)[\bar{v}(t)] = \vartheta^T \bar{\zeta},$$

где  $\bar{\zeta}$  – вектор состояния модели (1.21);  $\vartheta \in \mathbb{R}^q$  – вектор постоянных коэффициентов.

## 1.2 Управление при известных внешних воздействиях

С целью полноты изложения, в параграфе кратко представлены задачи и методы оценки, компенсации и слежения в том случае, когда модель генератора (1.4)–(1.5) является априорно известной с точностью до начальных условий.

### 1.2.1 Постановка задач оценки, компенсации и слежения

Будем рассматривать класс объектов управления вида:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + d(x)\delta, \quad (1.22)$$

$$y = h(x), \quad (1.23)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния;  $u$  – сигнал управления;  $y$  – регулируемая переменная;  $\delta$  – неизмеряемое возмущение;  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $d(x)$  и  $h(x)$  – вектор-функции и скалярная функция векторного аргумента. Дополнительные требования к  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $d(x)$  и  $h(x)$  будут сформулированы по мере необходимости.

Будем полагать, что внешнее возмущение  $\delta(t)$  удовлетворяет допущению 1.1. Тогда могут быть сформулированы следующие задачи, имеющие самостоятельный практический интерес.

**Задача 1 (оценка внешнего возмущения).** Полагая вектор состояния  $x$  объекта управления (1.22)–(1.23) доступным для прямых измерений, необходимо построить оценку возмущения  $\hat{\delta}(t)$ , обеспечивающую:

1) выполнение условия асимптотической оценки

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\delta(t) - \hat{\delta}(t)) = 0 \quad \text{при} \quad \Delta(t) \equiv 0;$$

2) малую установившуюся ошибку оценки возмущения при малой нерегулярной составляющей  $\Delta(t) \neq 0$ .

Приведенная выше задача оценки внешнего возмущения может быть переформулирована на случай доступности прямым измерениям только регулируемой переменной  $y$ , и недоступности прямым измерениям всего вектора состояния  $x$ .

В задачах слежения за задающим воздействием практический интерес представляет оценка старших производных сигнала задания.

**Задача 2 (оценка производных сигнала задания).** Пусть допущение 1.1 с точностью до замены  $\delta(t)$  на  $g(t)$  описывает свойства задающего воздействия. Требуется построить оценки сигнала задания  $\hat{g}(t)$  и его производных  $\hat{g}^{(i)}(t)$ , обеспечивающие

1) выполнение условий асимптотической оценки

$$\lim_{t \rightarrow 0} (g^{(i)}(t) - \hat{g}^{(i)}(t)) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad \text{при} \quad \Delta(t) \equiv 0;$$

2) малые установившиеся ошибки оценки при малой нерегулярной составляющей  $\Delta(t) \neq 0$ .

**Задача 3 (компенсация внешнего возмущения).** Полагая вектор состояния  $x$  объекта управления (1.22)–(1.23) доступным для прямых измерений, необходимо построить закон управления  $u = U(x)$ , обеспечивающий:

1) выполнение условия асимптотической стабилизации

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0 \quad \text{при} \quad \Delta(t) \equiv 0;$$

2) малую установившуюся ошибку стабилизации при малой нерегулярной составляющей  $\Delta(t) \neq 0$ .

Аналогично задаче оценки, задача компенсации возмущений может быть переформулирована для случая управления по выходной переменной  $y$ .

Наконец сформулируем задачу слежения за внешним сигналом задания. Для этого будем полагать, что в объекте (1.22)-(1.23) внешнее возмущение отсутствует (т. е.  $\delta(t) \equiv 0$ ), а допущение 1.1 с точностью до замены  $\delta(t)$  на  $g(t)$  описывает свойства задающего воздействия.

**Задача 4 (слежение за сигналом задания).** Необходимо построить закон управления с обратной связью по регулируемой переменной  $u = U(y, g)$  (в случае управления по выходу), или с обратной связью по состоянию  $u = U(x, g)$  (в случае управления по состоянию), обеспечивающий:

1) выполнение условия асимптотического слежения

$$\lim_{t \rightarrow 0} (g(t) - y(t)) = 0 \quad \text{при} \quad \Delta(t) \equiv 0;$$

2) малую установившуюся ошибку слежения при малой нерегулярной составляющей  $\Delta(t) \neq 0$ .

Ниже будут представлены методы решения сформулированных задач оценки, компенсации и слежения для различных типов линейных и нелинейных объектов.

## 1.2.2 Оценка возмущения

Рассмотрим решение сформулированной в п. 1.2.1 задачи 1 для линейного объекта вида:

$$\dot{x} = Ax + bu + d\delta, \quad (1.24)$$

$$y = c^T x, \quad (1.25)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния;  $u$  – сигнал управления;  $y$  – регулируемая переменная;  $\delta$  – неизмеряемое возмущение;  $A$ ,  $b$ ,  $d$  и  $c$  – матрица и

векторы известных постоянных коэффициентов соответствующих размерностей.

Будем сначала решать задачу оценки возмущения в предположении, что вектор состояния  $x$  недоступен прямым измерениям. Тогда целесообразно использовать *расширенный наблюдатель*, позволяющий одновременно оценить состояние объекта управления  $x$  и внешнее возмущение  $\delta$ . Для этого запишем *расширенную модель системы*, содержащую объект управления (1.24)–(1.25) и генератор возмущения (1.4)–(1.5):

$$\dot{x}_P = A_P x_P + b_P u + d_P \Delta, \quad (1.26)$$

$$y = c_P^T x_P, \quad (1.27)$$

где  $x_P^T = [x^T \ \chi^T]$  –  $n + q$ -мерный вектор состояния расширенной модели,

$$A_P = \begin{bmatrix} A & dh^T \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}, \quad b_P = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_P = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_P^T = [c^T \ 0].$$

Расширенный наблюдатель описывается уравнениями, представляющими собой расширенную модель системы, замкнутую обратными связями по ошибке наблюдения:

$$\dot{\hat{x}}_P = A_P \hat{x}_P + b_P u + k_H (y - c_P^T \hat{x}_P), \quad (1.28)$$

где  $\hat{x}_P^T = [\hat{x}^T \ \hat{\chi}^T]$  – оценка расширенного вектора состояния, первые  $n$  координат которого являются оценкой вектора состояния объекта управления  $\hat{x}$ , а последние  $q$  координат – оценкой вектора состояния модели генератора возмущения  $\hat{\chi}$ . Вектор коэффициентов обратных связей по ошибке наблюдения  $k_H$  выбран таким образом, что матрица замкнутой системы  $A_{P\Sigma} = A_P - k_H c_P^T$  является гурвицевой. Начальные условия в уравнениях (1.28) могут быть выбраны произвольными, например, нулевыми (т. е.,  $\hat{x}_P(0) = 0$ ).

Тогда искомая оценка возмущения определяется выражением:

$$\hat{\delta}(t) = h^T \hat{\chi}(t). \quad (1.29)$$

Для анализа свойств наблюдателя (1.28)–(1.29) введем в рассмотрение ошибку наблюдения  $e_H = y - c_P^T \hat{x}_P$  и ошибки наблюдения расширенного состояния  $\varepsilon_H = x_P - \hat{x}_P$ . Тогда, дифференцируя  $\varepsilon_H$  с учетом



(1.26)–(1.27) и (1.28), получаем

$$\begin{aligned}\dot{e}_H &= A_{P\Sigma}\varepsilon_H + d_P\Delta, \\ e_H &= c_P^T \varepsilon_H\end{aligned}$$

или

$$e_H = W_{P\Sigma}(p)\Delta, \quad (1.30)$$

где  $W_{P\Sigma}(p) = c_P^T(pI - A_{P\Sigma})^{-1}d_P$  – передаточная функция замкнутой системы по ошибке наблюдения.

В силу гурвицевости матрицы  $A_{P\Sigma}$  передаточная функция  $W_{P\Sigma}(p)$  является асимптотически устойчивой, откуда непосредственно следует выполнение целевых условий сформулированной задачи наблюдения (см. задачу 1 в п. 1.2.1).

В том случае, когда вектор состояния объекта управления доступен прямым измерениям, использовать расширенный наблюдатель (1.28), строящий оценку и вектора состояния и возмущения, является нецелесообразным. В этих условиях применяют наблюдатель только возмущения  $\delta$ , т. е. *редуцированный наблюдатель*. К настоящему времени предложено несколько схем редуцированных наблюдателей. Рассмотрим две из них.

Первая схема для построения оценки возмущения использует оценку вектора состояния  $\chi$ , полученную для исходной модели (1.4). Сформируем искомую оценку  $\hat{\chi}$  в виде:

$$\hat{\chi} = z + k_H \bar{c}^T x, \quad (1.31)$$

где  $q \times 1$  вектор постоянных коэффициентов  $k_H$  выбран таким образом, что матрица  $\Gamma_H = \Gamma - k_H h^T$  является гурвицевой,  $q \times 1$  вектор постоянных коэффициентов  $\bar{c}$  удовлетворяет условию

$$\bar{c}^T d = 1, \quad (1.32)$$

а вектор  $z \in \mathbb{R}^q$  генерируется вспомогательным динамическим фильтром

$$\dot{z} = \Gamma_H z + \left( \Gamma_H k_H \bar{c}^T - k_H \bar{c}^T A \right) x - k_H \bar{c} b u \quad (1.33)$$

с произвольными начальными условиями. Оценка возмущения формируется по правилу:

$$\hat{\delta}(t) = h^T \hat{\chi}(t). \quad (1.34)$$

Тогда можно показать, что редуцированный наблюдатель, описываемый уравнениями (1.31)–(1.34) обеспечивает выполнение целевых условий задачи 1 из п. 1.2.1. Для этого введем в рассмотрение ошибку оценки вектора состояния генератора возмущения:  $\varepsilon = \chi - \hat{\chi}$ . Дифференцируя последнее выражение по времени с учетом (1.3)–(1.5), (1.24), (1.31)–(1.34) после элементарных математических преобразований получаем

$$\dot{\varepsilon} = \Gamma_H \varepsilon - k_H \Delta,$$

откуда, в частности, следует, что с течением времени  $\hat{\chi}(t) \rightarrow \chi(t)$  при  $\Delta(t) \equiv 0$ , и, как следствие, достижение целевых условий задачи 1.

Вторая схема редуцированного наблюдателя предполагает использование оценки состояния канонической формы генератора возмущения (1.15). Сформируем искомую оценку  $\hat{\zeta}$  в виде:

$$\hat{\zeta} = \eta + Nx, \quad (1.35)$$

где  $q \times q$  матрица  $M$  является решением уравнения (1.18),  $q \times n$  матрица  $N$  удовлетворяет условию

$$Nd = l, \quad (1.36)$$

а вектор  $\eta \in \mathbb{R}^q$  генерируется вспомогательным динамическим фильтром

$$\dot{\eta} = G\eta + (GN - NA)x - Nbu \quad (1.37)$$

с произвольными начальными условиями. Оценка возмущения формируется по правилу:

$$\hat{\delta}(t) = h^T M^{-1} \hat{\zeta}(t). \quad (1.38)$$

Для доказательства выполнения наблюдателем (1.35)–(1.38) целевых условий задачи 1 из п. 1.2.1 введем в рассмотрение ошибку оценки вектора состояния канонической формы генератора возмущения:

$$\varepsilon = \zeta - \hat{\zeta}.$$

Дифференцируя последнее выражение по времени с учетом (1.3), (1.15), (1.24), (1.35)–(1.38) после элементарных математических преобразований получаем

$$\dot{\varepsilon} = G\varepsilon - l\Delta,$$

откуда, в частности, следует, что с течением времени  $\hat{\zeta}(t) \rightarrow \zeta(t)$  при  $\Delta(t) \equiv 0$ , и, как следствие, достижение целевых условий задачи 1.

Близкой в постановочном плане к задаче наблюдения возмущения является задача оценки старших производных сигнала задания, т. е. задача 2 из п. 1.2.1. Структура генератора производных сигнала задания непосредственно определяется следствием 1.1 из леммы 1.1. А именно, генератор производных содержит вспомогательный динамический фильтр

$$\dot{\eta} = G\eta + lg \quad (1.39)$$

и блок расчета оценки производных

$$\hat{g}_i = \theta \left( G + l\theta^T \right)^i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.40)$$

где  $\hat{g}_i$  – оценка  $i$ -й производной сигнала  $g$ , а  $G$ ,  $M$ ,  $l$  и  $\theta$  определяются условиями леммы 1.1. Нетрудно убедиться, что генератор (1.39)–(1.40) обеспечивает решение задачи 2 оценки производных сигнала задания.

### 1.2.3 Компенсация возмущения

#### Синтез регулятора в пространстве состояний

Рассмотрим решение задачи компенсации возмущения (т.е. решение задачи 3 из п. 1.2.1) в случае управления по вектору состояния  $x$  объекта (1.24) в предположении, что  $b = d$ . При этом возможно использования двух принципиально различных методов. Первый метод *комбинированного управления* предусматривает построение оценки возмущения (с помощью специального наблюдателя) и последующую компенсацию возмущения с использованием полученной оценки. Второй метод *управления по отклонению* предусматривает построение стабилизирующего управления для расширенной модели ошибки, включающей в свою структуру модель генератора возмущения.

При комбинированном управлении алгоритм управления имеет вид:

$$u = -k_x^T x - \hat{\delta}, \quad (1.41)$$

где вектор коэффициентов обратных связей  $k_x$  выбирается таким образом, чтобы матрица замкнутой системы  $A_\Sigma = A - bk_x^T$  была бы гурвицевой, а оценка возмущения  $\delta$  формируется одним из наблюдателей, представленных в п. 1.2.2.

Алгоритм управления по отклонению определяется выражением:

$$u = -k_x^T x - k_\xi^T \xi, \quad (1.42)$$

где вектор  $\xi \in \mathbb{R}^q$  генерируется вспомогательным фильтром

$$\dot{\xi} = \Gamma \xi + \bar{l} y \quad (1.43)$$

с произвольными начальными условиями. При этом вектор постоянных коэффициентов  $\bar{l}$  выбирается таким образом, чтобы пара  $(\Gamma, \bar{l})$  была управляемой.

Для определения правила расчета коэффициентов обратных связей  $k_x$  и  $k_\xi$  сформируем расширенную модель ошибки, нулевой значение вектора состояния которой будет означать, в частности, выполнение поставленной цели управления. Введем в рассмотрение вспомогательную ошибку:

$$\varepsilon = \xi + \overline{M} \chi, \quad (1.44)$$

где  $\chi$  – вектор состояния генератора возмущения (1.4), а  $q \times q$  матрица  $\overline{M}$  удовлетворяет уравнениям:

$$-k_\xi \overline{M} = h^T, \quad \overline{M} \Gamma - \Gamma \overline{M} = 0.$$

Тогда можно видеть, что

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \Gamma \xi + \bar{l} y + \overline{M} \Gamma \chi \pm \Gamma \overline{M} \chi = \\ &= \Gamma \varepsilon + \bar{l} y + (\overline{M} \Gamma - \Gamma \overline{M}) \chi = \Gamma \varepsilon + \bar{l} c^T x \end{aligned} \quad (1.45)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b \left( -k_x^T x - k_\xi^T \xi + h^T \chi \right) = \\ &= Ax + b \left( -k_x^T x - k_\xi^T \xi - k_\xi^T \overline{M} \chi \right) = \\ &= Ax + b \left( -k_x^T x - k_\xi^T \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Объединяя уравнения (1.45) и (1.46), получаем расширенную модель ошибки

$$\dot{\bar{x}} = \overline{A} \bar{x} + \overline{b} k^T \bar{x}, \quad (1.47)$$

где  $\bar{x}^T = [x^T \quad \xi^T]$  –  $n + q$ -мерный вектор состояния расширенной модели,  $\bar{k}^T = [k_x^T \quad k_\xi^T]$  – расширенный вектор коэффициентов обратных связей,

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ \bar{l}c^T & \Gamma \end{vmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{vmatrix} b \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, задача компенсации возмущения сведена к задаче стабилизации расширенной модели ошибки (1.47). Следовательно коэффициенты обратных связей  $k_x$  и  $k_\xi$  управления (1.42) могут быть выбраны методом модального регулятора из условия гурвицевости матрицы замкнутой расширенной системы  $\bar{A}_\Sigma = \bar{A} - \bar{b}\bar{k}^T$ .

Можно также показать, что алгоритм управления (1.42), (1.42) обеспечивает компенсацию внешнего регулярного возмущения, приведенного к выходу объекта управления, т. е. для объекта вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \\ y &= c^T x + \delta. \end{aligned}$$

### Синтез регулятора “вход-выход”

Будем теперь рассматривать линейный динамический объект, математическая модель которого описывается уравнением вида

$$\alpha(p)y(t) = k\beta(p)(u(t) + \delta(t)), \quad (1.48)$$

где  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования,  $\alpha(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \alpha_{n-2}p^{n-2} + \dots + \alpha_0$  и  $\beta(p) = p_m + \beta_{m-1}p^{m-1} + \beta_{m-2}p^{m-2} + \dots + \beta_0$  – известные нормированные полиномы,  $k$  – “высокочастотный” коэффициент усиления,  $u(t)$  – сигнал управления,  $\delta(t)$  – внешнее возмущение, удовлетворяющее допущению 1.1. Дополнительно полагается, что полином  $\beta(p)$  является гурвицевым.

Рассматриваемая задача состоит в синтезе управления, обеспечивающего стабилизацию объекта (1.48) и, дополнительно, выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{при} \quad \Delta(t) \rightarrow 0. \quad (1.49)$$

Учтем, что в силу допущения 1.1, возмущение  $\delta(t)$  имеет изображение Лапласа вида

$$F(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \Delta(s) + \frac{\psi(s)}{\varphi(s)}, \quad (1.50)$$

где  $s$  – комплексная переменная,  $\Delta(s) = \mathcal{L}\{\Delta(t)\}$  – изображение Лапласа нерегулярной составляющей,  $\frac{\psi(s)}{\varphi(s)} = \mathcal{L}\{v(t)\}$  – изображение Лапласа регулярной составляющей, а  $\psi(s)$  и  $\varphi(s)$  – известные полиномы степени  $\mu$  и  $\mu_\psi \leq \mu$ , соответственно.

Синтез искомого управления основан на решении полиномиального уравнения специального вида. Поэтому приведем сначала вспомогательный математический результат, устанавливающий достаточные условия существования и единственности решения.

**Утверждение 1.1** [5, 8] Пусть заданы произвольные нормированные полиномы

$$A(p) = p^M + a_{M-1}p^{M-1} + a_{M-2}p^{M-2} + \dots + a_0,$$

$$B(p) = p^N + b_{N-1}p^{N-1} + b_{N-2}p^{N-2} + \dots + b_0,$$

где  $M > N$ . Тогда существуют единственные полиномы:

$$R(p) = r_{N-1}p^{N-1} + r_{N-2}p^{N-2} + \dots + r_0,$$

$$D(p) = p^{M-N} + d_{M-N-1}p^{M-N-1} + d_{M-N-2}p^{M-N-2} + \dots + d_0,$$

удовлетворяющие уравнению

$$A(p) = B(p)D(p) + R(p). \quad (1.51)$$

Доказательство утверждения и конструктивное правило вычисления коэффициентов полиномов  $R(p)$  и  $D(p)$  приведены в [5].

Сформируем искомое управление в виде:

$$u = -\frac{1}{k} \frac{R(p)}{\beta(p)D(p)\varphi(p)} y, \quad (1.52)$$

где полиномы

$$R(p) = r_{n+\mu-1}p^{n+\mu-1} + r_{n+\mu-2}p^{n+\mu-2} + \dots + r_0, \quad (1.53)$$

$$D(p) = p^{n-m-1} + d_{n-m-2}p^{n-m-2} + d_{n-m-3}p^{n-m-3} + \dots + d_0, \quad (1.54)$$

являются решениями уравнения

$$A(p) = \alpha(p)\varphi(p)D(p) + R(p) \quad (1.55)$$

с произвольным гурвицевым полиномом

$$\begin{aligned} A(p) = & p^{2n+\mu-m-1} + a_{2n+\mu-m-2}p^{2n+\mu-m-2} \\ & + a_{2n+\mu-m-3}p^{2n+\mu-m-3} + \dots + a_0. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Выбор размерностей полиномов  $A(p)$ ,  $D(p)$  и  $R(p)$  (см. уравнения (1.53), (1.54) и (1.55)) обосновывается следующим образом. Сравнивая (1.51) и (1.55), находим, что  $B(p) = \alpha(p)\varphi(p)$ , откуда получаем  $N = n + \mu$  и, следовательно,  $\dim R(p) = n + \mu - 1$ . Для физической реализуемости управления (1.52) степень числителя передаточной функции  $R(p)/\beta(p)D(p)\varphi(p)$  не должна превышать степени ее знаменателя. Минимальный динамический порядок регулятора обеспечивается при выполнении равенства  $\dim R(p) = \dim \beta(p)D(p)\varphi(p)$ , откуда непосредственно получаем  $\dim D(p) = n - m - 1$ . Наконец, из условия  $\dim A(p) = \dim \alpha(p)\varphi(p)D(p)$  находим  $\dim A(p) = 2n + \mu - m - 1$ .

Таким образом, с учетом подстановок  $B(p) = \alpha(p)\varphi(p)$ ,  $N = m + \mu$ ,  $M = 2n + \mu - m - 1$  из утверждения 1.1 следует существование единственных полиномов (1.53) и (1.54), удовлетворяющих равенству (1.55).

Для исследования свойств замкнутой системы, запишем ее уравнения:

$$\begin{cases} \alpha(p)y(t) &= k\beta(p)(u(t) + \delta(t)), \\ k\beta(p)D(p)\varphi(p)u(t) &= -R(p)y(t). \end{cases} \quad (1.57)$$

Вычисляя преобразования Лапласа, находим:

$$\begin{cases} \alpha(s)Y(s) + Q(s) &= k\beta(s)(U(s) + \Delta(s) + \frac{\psi(s)}{\varphi(s)}), \\ k\beta(s)D(s)\varphi(s)U(s) &= -R(s)Y(s) + Z(s), \end{cases} \quad (1.58)$$

где  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ ,  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  – образы Лапласа регулируемой переменной и сигнала управления, а  $Q(s)$  и  $Z(s)$  – полиномы, зависящие от начальных условий. Проведя несложные математические преобразования с учетом равенства (1.55), получим:

$$Y(s) = \frac{Z(s) - Q(s)D(s)\varphi(s) + k\beta(s)D(s)\psi(s) + k\beta(s)D(s)\varphi(s)\Delta(s)}{A(s)}.$$

Вычисляя обратное преобразование Лапласа, находим:

$$y(t) = \frac{k\beta(p)D(p)\varphi(p)}{A(p)}\Delta(t) + \sigma(t), \quad (1.59)$$

где сигнал

$$\sigma(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Z(s) - Q(s)D(s)\varphi(s) + k\beta(s)D(s)\psi(s)}{A(s)} \right\}$$

экспоненциально затухает в силу гурвицевости полинома  $A(p)$ . Таким образом, доказаны следующие свойства замкнутой системы.

**Теорема 1.1** Пусть выполняется допущение 1.1. Тогда регулятор (1.52) обеспечивает стабилизацию объекта (1.48) и, дополнительно, выполнение целевого условия (1.49).

**Замечание 1.1** Из (1.59) следует, что полином  $A(p)$  является характеристическим полиномом замкнутой системы, и, таким образом, его корни определяют динамику переходных процессов.

**Замечание 1.2** При вычислении передаточной функции замкнутой системы  $\frac{k\beta(p)D(p)\varphi(p)}{A(p)}$  происходит сокращение общего сомножителя числителя и знаменателя, представленного полиномом  $\beta(p)$  (он входит в знаменатель передаточной функции регулятора (1.52)). Поэтому корни полинома  $\beta(p)$  определяют свойства неуправляемой и ненаблюдаемой динамики замкнутой системы. Именно этим определяется требование гурвицевости полинома  $\beta(p)$ .

В работе [5] показано, что регулятор (1.52) обеспечивает выполнение сформулированной цели управления также и для объекта вида

$$\alpha(p)y(t) = k\beta(p)u(t) + \delta(t), \quad (1.60)$$



т. е., когда внешнее возмущение действует не на вход, а на выход объекта управления.

*Пример 1.4.* Рассмотрим неустойчивый объект управления

$$y(t) = \frac{p+3}{p^3+3p^2-6p-8} (u(t) + \delta(t)),$$

где  $d(t) = \Delta(t) + 10 \sin t$ . Тогда  $\mu = 2$ ,  $M = 6$ ,  $N = 5$  и  $\varphi(p) = p^2 + 1$ . Выберем полином  $A(p)$  вида

$$A(p) = p^6 + 10.5p^5 + 49.9p^4 + 107.2p^3 + 140.7p^2 + 98.5p + 28.7.$$

Найдем полиномы  $D(p)$  и  $R(p)$ , являющиеся решениями уравнения (1.55):

$$R(p) = 32.4p^4 + 149.7p^3 + 184.2p^2 + 151.5p + 88.7, \quad D(p) = p + 7.5.$$

Тогда закон управления (1.52) принимает вид:

$$u(t) = \frac{32.4p^4 + 149.7p^3 + 184.2p^2 + 151.5p + 88.7}{(p+3)(p+7.5)(p^2+1)} y(t).$$

## 1.2.4 Слежение за командным генератором

### Синтез регулятора в пространстве состояний

Рассмотрим решение задачи слежения за сигналом задания  $g(t)$  (т.е. решение задачи 4 из п. 1.2.1) при управлении по вектору состояния  $x$  объектом

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{1.61}$$

$$y = c^T x \tag{1.62}$$

в случае доступности прямым измерениям вектора состояния  $\chi$  командного генератора (1.4)-(1.5) регулярной составляющей  $v(t)$  сигнала задания  $g(t) = \Delta(t) + v(t)$ .

Используем алгоритм комбинированного управления вида:

$$u = k^T \varepsilon + k_\chi^T \chi, \tag{1.63}$$

где  $n$ -мерный вектор коэффициентов обратных связей  $k$  выбирается из условия гурвицевости матрицы замкнутой системы  $A_{\Sigma} = A - bk^T$ , вектор ошибки состояния  $\varepsilon$  формируется по правилу

$$\varepsilon = \overline{M}\chi - x, \quad (1.64)$$

а  $q$ -мерный вектор прямых связей  $k_{\chi}$  и  $n \times q$ -мерная матрица  $\overline{M}$  являются решениями уравнений

$$h^T = c^T \overline{M}, \quad \overline{M}\Gamma - A\overline{M} = bk_{\chi}. \quad (1.65)$$

Для доказательства свойств замкнутой системы продифференцируем ошибку состояния (1.65) с учетом (1.4), (1.61) и (1.63):

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \overline{M}\Gamma\chi - Ax - bk_T\varepsilon - bk_{\chi}^T \pm A\overline{M}\chi = \\ &= A_{\Sigma}\varepsilon + \left(\overline{M}\Gamma - A\overline{M} - bk_{\chi}^T\right)\chi. \end{aligned} \quad (1.66)$$

С учетом (1.65) получаем:

$$\dot{\varepsilon} = A_{\Sigma}\varepsilon,$$

откуда следует стремление ошибки  $\varepsilon$  к нулевому значению при  $t \rightarrow \infty$ . Далее можно видеть, что

$$g - y = h^T - c^T x = c^T \overline{M}\chi - c^T x = c^T \varepsilon$$

откуда непосредственно следует выполнение целевых условий задачи 4.

### Синтез регулятора “вход-выход”

Будем теперь рассматривать линейный динамический объект, математическая модель которого описывается уравнением вида

$$\alpha(p)y(t) = k \beta(p)u(t), \quad (1.67)$$

где, как и в модели (1.48),  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования,  $\alpha(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \alpha_{n-2}p^{n-2} + \dots + \alpha_0$  и  $\beta(p) = p_m + \beta_{m-1}p^{m-1} +$

$\beta_{m-2}p^{m-2} + \dots + \beta_0$  – известные нормированные полиномы,  $k$  – “высокочастотный” коэффициент усиления,  $u(t)$  – сигнал управления. Дополнительно полагается, что полином  $\beta(p)$  является гурвицевым, вектор состояния состояния  $\chi$  командного генератора (1.4)-(1.5) регулярной составляющей  $v(t)$  сигнала задания  $g(t) = \Delta(t) + v(t)$  прямым измерениям не доступен.

Сформируем управление в виде:

$$u = \frac{1}{k} \frac{\gamma(p)}{D(p)\beta(p)} \left( \bar{g} - \frac{R(p)}{\gamma(p)} y \right), \quad (1.68)$$

где  $\gamma(p)$  – произвольный нормированный гурвицев полином степени  $n - 1$ , нормированный полином  $D(p)$  степени  $n - m - 1$  и полином  $R(p)$  степени  $n - 1$  являются решениями уравнения

$$\gamma(p)\alpha^*(p) = \alpha(p)D(p) + R(p) \quad (1.69)$$

с произвольным гурвицевым нормированным полиномом  $\alpha^*(p) = p^{n-m} + \alpha_{n-m-1}^*p^{n-m-1} + \alpha_{n-m-2}^*p^{n-m-2} + \dots + \alpha_0$ , а сигнал  $\bar{g}(t)$  формируется по правилу

$$\bar{g} = \hat{g}_{n-m} + \alpha_{n-m-1}^* \hat{g}_{n-m-1} + \alpha_{n-m-2}^* \hat{g}_{n-m-2} + \dots + \alpha_0 g. \quad (1.70)$$

При этом оценки  $\hat{g}_i$   $i$ -х производных сигнала задания  $g$  ( $i = 1, 2, \dots, n - m - 1$ ) генерируются наблюдателем (1.39), (1.40).

Особо отметим, что с учетом утверждения 1.1 существуют единственные полиномы  $R(p)$  и  $D(p)$  указанных размерностей, удовлетворяющие уравнению (1.69).

Для доказательства свойств замкнутой системы подставим (1.68) в (1.67) с учетом (1.69). После элементарных преобразований получим

$$y = \frac{1}{\alpha^*(p)} \bar{g}. \quad (1.71)$$

Так как при  $\Delta(t) \equiv 0$   $\hat{g}_i \rightarrow g^{(i)}$  при  $t \rightarrow \infty$ , то  $\bar{g} \rightarrow \alpha^*(p)g$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда из (1.71) непосредственно следует выполнение целевых условий задачи 4.

## 1.3 Управление при неизвестных внешних воздействиях

### 1.3.1 Постановка задач адаптивной оценки, слежения и компенсации

Будем теперь рассматривать модель внешнего воздействия в качестве параметрически неопределенной. Как отмечалось выше, это существенно расширяет класс функций, описываемых генератором фиксированной размерности и, как следствие, уменьшает объем априорной информации о внешних сигналах, необходимый для синтеза замкнутой системы управления.

В случае параметрически неопределенной модели генератора, с целью компенсации внешних возмущений (или асимптотического слежения за задающим сигналом) можно использовать специальные методы адаптивного управления. В самой общей формулировке, принцип адаптивного управления состоит в компенсации априорных неопределенностей объекта управления и внешней среды (например, возмущения) за счет автоматической - *адаптивной* - подстройки регулятора в ходе рабочего функционирования системы. Другими словами, адаптивные системы восполняют нехватку априорной информации об объекте управления и внешней среде в ходе рабочего функционирования. Отличительной чертой адаптивных систем является наличие дополнительной обратной связи, образованной цепью настройки параметров регулятора. Такая обратная связь получила название *параметрической*, в отличие от *сигнальной* обратной связи, образованной самим регулятором, вырабатывающим сигнал управления. Параметрическая обратная связь формируется *алгоритмом адаптации*, вырабатывающим *настраиваемые параметры* регулятора.

В настоящей работе будут представлены адаптивные решения задач 1-4, сформулированных в п. 1.2.1, в предположении, что внешнее ограниченное воздействие  $\delta(t)$  удовлетворяет допущению 1.1 и следующим дополнительным условиям.

**Допущение 1.2** Будем полагать, что:

- размерность  $q$  модели внешнего воздействия (1.4), (1.5) является известной, а коэффициенты матрицы  $\Gamma$  и вектора  $h$  – неизвестными;

- все собственные значения матрицы  $\Gamma$  модели (1.4), (1.5) являются простыми и лежат на мнимой оси;
- вектор состояния  $\chi$  модели (1.4), (1.5) недоступен прямым измерениям.

В настоящее время методы адаптивного управления являются достаточно хорошо разработанными и для целого ряда задач доведены до инженерных методов синтеза систем управления. Однако применение стандартных алгоритмов *адаптивного управления* к задачам *адаптивной компенсации* возмущений сталкивается с двумя принципиальными трудностями.

Во-первых, генератор возмущений представляет собой неуправляемую динамическую подсистему, что не позволяет непосредственно использовать стандартные методы адаптивного *управления* неопределенными объектами. Решение указанной проблемы, представленное в настоящей монографии, основано на использовании специального класса наблюдателей возмущений, позволяющих привести внешнее возмущение к форме линейной регрессионной модели с неизвестными параметрами и базисными функциями (элементами регрессора), формируемыми в процессе рабочего функционирования системы.

Во-вторых, параметрически неопределенная модель генератора возмущений фиксированной размерности описывает хотя и достаточно широкий, но все же ограниченный класс функций времени. При этом в подавляющем большинстве практических случаев возмущение наряду с доминирующей регулярной составляющей содержит и нерегулярную составляющую, которую нельзя параметризовать соответствующим образом. Влияние не учтенных на этапе синтеза малых возмущений на устойчивость адаптивных систем проиллюстрируем следующими примерами.

*Пр и м е р 1.5.* Рассмотрим задачу стабилизации скалярного объекта

$$\dot{x} = \theta x + u, \quad (1.72)$$

где  $x \in \mathbb{R}^1$  – регулируемая переменная;  $u$  – сигнал управления;  $\theta$  – неизвестный постоянный параметр (т. е.  $\dot{\theta} = 0$ ). Выберем управление

$$u = -kx - \hat{\theta}x, \quad (1.73)$$

где  $k > 0$  – постоянный коэффициент обратной связи;  $\hat{\theta}$  – настраиваемый параметр, вырабатываемый алгоритмом адаптации. В соответствии с известными методами адаптивного управления, алгоритм адаптации выбирается в виде динамической (интегральной) обратной связи

$$\dot{\hat{\theta}} = \Theta(x), \quad (1.74)$$

структура  $\Theta(x)$  которой определяется с помощью подходящей функции Ляпунова. Традиционно используют квадратичную функцию вида

$$V(x, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2, \quad (1.75)$$

где  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  – параметрическая ошибка;  $\gamma > 0$  – произвольный постоянный коэффициент. Подставляя (1.73) в (1.72) и принимая во внимание, что  $\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$ , получаем следующую модель замкнутой системы в координатах  $x$  и  $\tilde{\theta}$  (так называемую *модель ошибки*):

$$\dot{x} = -kx + \tilde{\theta}x, \quad (1.76)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Theta(x). \quad (1.77)$$

Тогда производная по времени функции Ляпунова (1.75) в силу уравнений (1.76) и (1.77) принимает вид:

$$\dot{V}(x, \tilde{\theta}) = -kx^2 + \tilde{\theta}x^2 - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\Theta(x).$$

Очевидно, что при выборе  $\Theta(x) = \gamma x^2$  получаем:

$$\dot{V}(x, \tilde{\theta}) = -kx^2 \leq 0, \quad (1.78)$$

откуда следует устойчивость по Ляпунову нулевого состояния равновесия  $(x, \tilde{\theta}) = (0, 0)$ , а также (по теореме Ла-Салля) выполнение равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Другими словами, алгоритм адаптивного управления:

$$u = -kx - \hat{\theta}x, \quad (1.79)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma x^2 \quad (1.80)$$

обеспечивает асимптотическую стабилизацию параметрически неопределенного объекта (1.72) для любых  $k > 0$ ,  $\gamma > 0$  и произвольных начальных условий  $x(0)$  и  $\hat{\theta}(0)$ .

*Пример 1.6.* Используем теперь адаптивное управление (1.79) и (1.80) для стабилизации параметрически неопределенного объекта, подверженного воздействию внешнего ограниченного возмущения  $\Delta(t)$ :

$$\dot{x} = \theta x + u + \Delta. \quad (1.81)$$

При этом модель ошибки принимает вид:

$$\dot{x} = -kx + \tilde{\theta} + \Delta, \quad (1.82)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma x^2. \quad (1.83)$$

Тогда, вычисляя производную по времени функции Ляпунова (1.75) в силу уравнений (1.82) и (1.83), получаем:

$$\dot{V}(x, \tilde{\theta}) = -kx^2 + x\Delta \leq -kx^2 + \|\Delta\|_{\infty}|x|.$$

Так как  $\dot{V} < 0$  при  $|x| > \|\Delta\|_{\infty}/k$ , то регулируемая переменная  $x$  является ограниченной. Однако параметрическая ошибка  $\tilde{\theta}$ , а следовательно, и настраиваемый параметр  $\hat{\theta}$  могут неограниченно расти при малых значениях  $x$ , когда  $|x| < \|\Delta\|_{\infty}/k$  и  $\dot{V} > 0$ . Поэтому, несмотря на ограниченность  $x$ , при наличии внешних возмущений может наблюдаться *неограниченный параметрический дрейф*. Данное теоретическое положение было проиллюстрировано множеством числовых примеров [6, 16, 30]. Так, если

$$\Delta(t) = (1+t)^{-1/8} \left[ 1 - \theta(1+t)^{-1/4} - \frac{3}{8}(1+t)^{-5/4} \right], \quad (1.84)$$

то при  $k = 1$ ,  $\gamma = 1/4$ ,  $\hat{\theta}(0) = 0$  и  $x(0) = 1$  получаем:

$$x(t) = (1+t)^{-3/8}, \quad \hat{\theta}(t) = (1+t)^{1/4} - 1. \quad (1.85)$$

Из уравнений (1.84), (1.85) легко видеть, что  $\Delta(t) \rightarrow 0$ ,  $x(t) \rightarrow 0$ , а  $\hat{\theta}(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким образом, пример демонстрирует неограниченный параметрический дрейф в задаче стабилизации объекта управления первого порядка с одним неизвестным параметром и затухающим внешним возмущением. Безусловно, такая ситуация является неприемлемой с практической точки зрения.

Обобщая результат, полученный в примере, можно сказать, что традиционные алгоритмы адаптации “интегрального типа” не являются грубыми по отношению к неучтенным на этапе синтеза внешним возмущениям: даже бесконечно малые (в смысле некоторого критерия) возмущения при определенных условиях могут вызвать неустойчивость замкнутой системы управления. Особо отметим, что данный недостаток заложен в самом методе синтеза адаптивных систем, так как производная функции Ляпунова является только функцией *знакопостоянной отрицательной* (см. (1.78)), а не *определенно отрицательной* и, как следствие, алгоритм адаптивного управления (1.79) и (1.80) не обеспечивает равномерной асимптотической устойчивости по *всем* переменным.

Поэтому особый интерес представляет задача синтеза специальных алгоритмов адаптации, сохраняющих свою работоспособность при наличии в возмущении нерегулярной компоненты.

### 1.3.2 Этапы синтеза адаптивных систем

Рассмотрим основные этапы синтеза системы адаптивного управления объектом вида:

$$\dot{x} = f(x, u, \delta), \quad (1.86)$$

где  $x$  – вектор состояния,  $u$  – сигнал управления,  $\delta$  – внешнее возмущение, удовлетворяющее допущениям 1.1 и 1.2. Пусть цель управления состоит:

– в обеспечении асимптотического слежения вектора состояния  $x$  за *эталонным состоянием*  $x^*$  при условии отсутствия нерегулярной составляющей возмущения, т. е. в выполнении условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad \text{при } \Delta(t) \equiv 0, \quad (1.87)$$

где  $e = x^* - x$  – ошибка управления;

– в обеспечении малой ошибки управления  $e$  при малой  $\Delta(t)$ .



В частном случае, эталонное состояние может быть нулевым, что соответствует задаче стабилизации. В общем случае, эталонное состояние определяет желаемое поведение объекта управления и может, например, генерироваться эталонной моделью или генератором программной траектории. Отметим также, что представленная задача может быть переформулирована в терминах не всего вектора состояния, а выходной переменной  $y$ .

*Этап 1: синтез наблюдателя возмущения.* Особенностью рассматриваемой задачи является выполнение цели управления (1.87) в условиях воздействия заранее неизвестного и неизмеряемого внешнего возмущения  $\delta$ . Поэтому, ставится задача адаптивной компенсации не *параметрических*, а *сигнальных* возмущений. В этом случае, как правило, предлагается осуществить *непосредственную параметризацию* возмущения, сведя его неопределенность к набору неизвестных постоянных параметров, т. е. представить возмущение  $\delta(t)$  в виде:

$$\delta(t) = \sum_{i=1}^m \theta_i \omega_i(t), \quad (1.88)$$

где  $\omega_i(t)$  – известные базисные функции, а  $\theta_i$  – неизвестные постоянные параметры. Очевидно, что данный подход имеет ограниченное практическое значение, так как оставляет открытым вопрос о выборе базисных функций. Например, такая методика не может быть непосредственно использована для параметризации гармонического возмущения  $\delta(t) = A \sin \psi t$  неизвестной частоты  $\psi$ .

Более гибкие возможности для адаптивной компенсации возмущений обеспечивает *косвенная параметризация*, основанная на применении метода внутренней модели. При этом детерминированное возмущение  $\delta(t)$  рассматривается в качестве выхода модели возмущения (1.4), (1.5) с неизвестными параметрами.

Непосредственное распространение известных методов адаптивного управления на возмущенные системы с параметрически неопределенными командными генераторами представляет собой нетривиальную задачу, так как динамическая модель (1.4), (1.5) является неуправляемой. Поэтому необходимо проведение специальной (косвенной) параметризации, позволяющей свести параметрическую неопределенность модели возмущения (1.4), (1.5) к параметрической неопределенности самого возмущения  $\delta(t)$ .

Излагаемый в настоящей главе подход предусматривает использование специального наблюдателя

$$\omega = \Omega(x, u) \quad (1.89)$$

и позволяет привести внешнее возмущение  $\delta(t)$  к виду (1.88), где базисные функции  $\omega(t)$  формируются наблюдателем (1.89) в процессе рабочего функционирования системы управления.

Тогда, модель объекта управления (1.86) может быть переписана в виде:

$$\dot{x} = f(x, u, \omega, \theta, \Delta), \quad (1.90)$$

где  $\theta^T = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m]$  – постоянный вектор неизвестных параметров,  $\omega^T = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m]$  – вектор базисных функций, формируемых наблюдателем (1.89).

Таким образом, сигнальная неопределенность объекта (1.86) при  $\Delta(t) \equiv 0$  сведена к параметрической неопределенности вектора  $\theta$ .

*Замечание 1.3* В общем случае вектор  $\theta$  может также содержать неизвестные параметры самого объекта управления.

*Этап 2: синтез ненастраиваемого регулятора.* В предположении, что параметры  $\theta$  являются известными синтезируется регулятор

$$u = U(x, x^*, \omega, \theta), \quad (1.91)$$

обеспечивающий выполнение сформулированного целевого условия. Регулятор может быть синтезирован любым методом современной теории управления.

*Этап 3: формирование настраиваемого регулятора.* Закон управления (1.91) физически нереализуем, так как содержит неизвестные параметры  $\theta$ . Поэтому, в соответствии с принципом адаптивного управления, неизвестные параметры  $\theta$  в регуляторе (1.91) заменяются настраиваемыми параметрами  $\hat{\theta}$ , генерируемыми алгоритмом адаптации. Таким образом, адаптивный регулятор будет описываться уравнениями

$$u = U(x, x^*, \omega, \hat{\theta}), \quad (1.92)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Theta(x, x^*, \omega, e), \quad (1.93)$$

где структура алгоритма адаптации  $\Theta(x, x^*, \omega, e)$  будет определена на следующем этапе.

*Этап 4: синтез модели ошибки.* Подставляя (1.92) в (1.90) и дифференцируя выражения для *сигнальной*  $e = x - x^*$  и *параметрической*  $\theta = \theta - \hat{\theta}$  ошибок, получаем *модель ошибок замкнутой системы*

$$\dot{e} = \Phi(e, x^*, \omega, \tilde{\theta}, \Delta), \quad (1.94)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Theta(x, x^*, \omega, e), \quad (1.95)$$

*Этап 5: синтез алгоритма адаптации.* Наиболее разработанным методом синтеза алгоритма адаптации (т. е. определения его структуры  $\Theta(x, x^*, \omega, e)$ ) является *метод функций Ляпунова*. В соответствии с данным методом, выбирается подходящая функция Ляпунова  $V(e, \tilde{\theta})$  и вычисляется ее производная в силу уравнений модели ошибки (1.94), (1.95). Далее, на основе анализа выражения для  $\dot{V}(e, \tilde{\theta})$  выбирается структура алгоритма адаптации  $\Theta(x, \omega, e)$ , обеспечивающая достижение заданных свойств устойчивости замкнутой системы. Данный этап синтеза адаптивных систем является наиболее сложным и “творческим”, так как не существует универсальных методов выбора “подходящих” функций Ляпунова.

### 1.3.3 Базовые алгоритмы адаптации

Среди представленных выше этапов синтеза адаптивных систем принципиально новым, с точки зрения классической теории управления, является этап синтеза алгоритма адаптации. Для его упрощения является желательным получить некоторые базовые (стандартные) структуры алгоритмов с известными свойствами, являющиеся применимыми для возможно более широких классов задач адаптивного управления. Такие базовые алгоритмы адаптации синтезируются на основе *канонических моделей ошибки*. К ним относятся: статическая модель ошибки, динамическая модель ошибки с измеряемым состоянием и динамическая модель ошибки с измеряемым выходом.

*Статическая модель ошибки* описывается уравнением:

$$\varepsilon = \omega^T \tilde{\theta} + \delta, \quad (1.96)$$

где  $\varepsilon$  – *сигнальная ошибка*, минимизация которой определяет цель управления,  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  – *вектор параметрических ошибок*,  $\theta$  – век-

тор неизвестных параметров,  $\hat{\theta}$  – вектор настраиваемых параметров, генерируемый алгоритмом адаптации,  $\omega$  – вектор известных функций (регрессор),  $\delta$  – внешнее возмущение. В общем случае, модель (1.96) является нелинейной, и регрессор  $\omega$  может зависеть от сигнальной и параметрической ошибок, т. е.  $\omega = \omega(\varepsilon, \hat{\theta}, t)$ .

Статическая модель ошибки канонического вида (1.96) появляется в задачах идентификации линейных моделей, а также в задачах адаптивного управления по выходной переменной. В теории идентификации она получила название *линейной регрессионной модели*.

Базовый (стандартный) алгоритм адаптации модели (1.96) имеет вид:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \omega \varepsilon, \quad (1.97)$$

где  $\gamma > 0$  – коэффициент адаптации.

**Утверждение 1.2** Алгоритм адаптации (1.97) при любых  $\gamma > 0$  и для любых начальных условий  $\hat{\theta}(0)$  обеспечивает модели (1.96) следующие свойства:

- 1) если возмущение  $\delta(t)$  экспоненциально затухает, то параметрическая ошибка  $\tilde{\theta}(t)$  является ограниченной;
- 2) если, дополнительно, регрессор  $\omega(t)$  является ограниченным, то дополнительно к (1) выполняется целевое условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0; \quad (1.98)$$

- 3) если, дополнительно, существуют такие положительные числа  $T$  и  $\alpha$ , что для всех  $t > 0$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau > \alpha I, \quad (1.99)$$

то дополнительно к (1) и (2) вектор настраиваемых параметров  $\hat{\theta}(t)$  экспоненциально сходится к истинному значению  $\theta$ .

Обсудим свойства базового алгоритма адаптации (1.97), сформулированные в утверждении 1.2.

Прежде всего, отметим, что системы адаптивного управления, в общем случае, являются нелинейными. Поэтому, тот факт, что даже исчезающее со временем внешнее возмущение не влияет на свойства устойчивости замкнутой адаптивной системы должен быть строго доказан. С другой стороны, как будет показано ниже, почти во всех случаях адаптивного управления модель сигнальной ошибки замкнутой системы будет содержать экспоненциально затухающие компоненты, порожденные ненулевыми начальными условиями объектов управления и наблюдателей, использующихся в схемах управления. Пункт (1) утверждения показывает, что базовый алгоритм адаптации (1.97) обеспечивает ограниченность параметрической ошибки даже при наличии *экспоненциально* затухающего возмущения. Вообще, этот результат не может быть расширен даже на случай затухающего, но неэкспоненциально, возмущения – см. пример 1.5. В дальнейшем, с учетом пункта (1) утверждения 1.2 и чтобы избежать рутинных выкладок, мы не будем учитывать экспоненциально затухающие возмущения при доказательстве свойств устойчивости адаптивных систем.

Из пункта (2) следует, что для обеспечения целевого условия (1.98) регрессор  $\omega(t)$  должен быть ограничен. Поэтому доказательство ограниченности регрессора является одним из основных пунктов в исследовании свойств устойчивости адаптивных систем.

Отметим также, что скорость сходимости по сигнальной ошибке  $\varepsilon$  сложным образом зависит от коэффициента адаптации  $\gamma$ . Так, скорость сходимости растет с увеличением  $\gamma$  только для его малых значений. После некоторого порогового значения, дальнейшее увеличение  $\gamma$  приводит к усилению колебательности переходных процессов и, в конечном итоге, к замедлению скорости сходимости. Несмотря на предпринятые попытки получить универсальные аналитические оценки влияния коэффициента адаптации на скорость сходимости, существенных результатов в этой области не достигнуто.

Наконец отметим, что в общем случае выполнение целевого условия (1.98) не гарантирует *сходимости по параметрам*, т. е. выполнение равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0. \quad (1.100)$$

Как следует из пункта (3) утверждения, для сходимости по параметрам необходимо выполнение дополнительного условия (1.99), накладываемого на свойства регрессора, и получившего название *условия*

неисчезающего возбуждения. Неравенство (1.99) означает, что на любом интервале времени  $[t, t + T]$  вектор  $\omega(t)$  интегрально отделен от нуля, т. е. значение соответствующего интеграла больше положительно определенной матрицы  $\alpha I$  (в скалярном случае – больше положительной константы  $\alpha$ ). Для выполнения условия (1.99) регрессор  $\omega(t)$  должен быть “частотно богатым”. В частности,  $n$ -мерная вектор-функция  $\omega(t)$  удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения (1.99), если ее координаты  $\omega_i(t)$  являются гармоническими функциями с различными частотами. Отметим, что в конкретных задачах адаптивного управления регрессор  $\omega(t)$  сложным образом может зависеть от сигнальной и параметрической ошибок, а также от переменных состояния объекта управления. Поэтому, доказательство выполнения условия (1.99) для конкретных схем адаптивного управления является нетривиальной задачей.

Вернемся к проблеме влияния внешнего возмущения  $\delta(t)$ . Используя тот же подход, что и в примере 1.5, можно показать, что внешнее возмущение  $\delta(t)$  (которое экспоненциально не затухает) может привести к неограниченному параметрическому дрейфу в системе (1.96), (1.97), т. е. к потере устойчивости замкнутой адаптивной системы.

С середины 80-х годов XX века все больше внимание исследователей привлекает проблема обеспечения работоспособности адаптивных систем при наличии внешних неучтенных возмущений. К настоящему времени предложено несколько так называемых *робастных* (*грубых*) алгоритмов адаптивной настройки. В основе всех предложенных модификаций лежит общая идея о замене алгоритмов адаптации “чисто интегрального типа” (1.97) алгоритмами, близкими по своим свойствам к интегральным, но позволяющим избежать неограниченного роста настраиваемых параметров. Робастные алгоритмы адаптации могут быть получены посредством введения в интегральные алгоритмы зоны нечувствительности или отрицательной параметрической обратной связи.

Базовая схема робастного алгоритма адаптации с отрицательной параметрической обратной связью для статической модели ошибки (1.96) описывается уравнением:

$$\hat{\theta} = \gamma \omega \varepsilon - \sigma \hat{\theta}, \quad (1.101)$$

где  $\gamma > 0$  – коэффициент адаптации,  $\sigma > 0$  – коэффициент параметри-

ческой обратной связи.

*Утверждение 1.3 Робастный алгоритм адаптации (1.101) при любых  $\gamma > 0$ ,  $\sigma > 0$  и для любых начальных условий  $\hat{\theta}(0)$  обеспечивает модели (1.96) следующие свойства:*

- 1) если возмущение  $\delta(t)$  ограничено, то параметрическая ошибка  $\hat{\theta}(t)$  экспоненциально сходится к установившемуся ограниченному множеству  $D_\theta$ ;*
- 2) если, дополнительно, регрессор  $\omega(t)$  является ограниченным, то дополнительно к (1) сигнальная ошибка  $\varepsilon$  экспоненциально сходится к ограниченному множеству  $D_\varepsilon$ .*

Таким образом, робастный алгоритм адаптации (1.101) обеспечивает в условиях внешних возмущений ограниченность параметрической ошибки и ее экспоненциальную сходимость к компактному множеству  $D_\theta$ . При некоторых дополнительных условиях это, в свою очередь, гарантирует ограниченность сигнальной ошибки (т.е. ошибки управления).

Робастные алгоритмы адаптации с параметрической обратной связью  $-\sigma\hat{\theta}$  были предложены К. Нарендрой с соавторами в 1971 г. (см. обзор [22]). Позже данные алгоритмы были представлены в статье П. Иоанноу и П. Кокотовича [16], где получили название “ $\sigma$ -модификации”.

Важным вопросом, касающимся основных свойств робастных алгоритмов адаптации, является вопрос об условиях, при которых обеспечивается малая установившаяся ошибка управления (т.е. малая сигнальная ошибка). Авторы статьи [16] сделали предположение, что малая ошибка достигается при достаточно малых значениях  $\sigma$ . Однако в работе [15] было показано, что уменьшение  $\sigma$  ведет к возможности возникновения так называемого *взрывного эффекта*, состоящего в редких “всплесках” сигнальной ошибки (например, ошибки стабилизации или ошибки слежения) значительной амплитуды. Поэтому в работе [15] было сделано заключение, что при малых  $\sigma$  обеспечивается малое *среднее* значение установившейся ошибки, но не ее амплитуды. Данный факт мотивировал большое количество работ, направленных на устранение взрывного эффекта при малых  $\sigma$ .

Итак, робастные алгоритмы сохраняют свою работоспособность (в смысле ограниченности сигналов) даже при наличии внешних возмущений. Однако ценой, заплаченной за это, является ненулевая установившаяся ошибка, возникающая даже при отсутствии возмущения, что является их основным недостатком. Смягчить этот недостаток можно соответствующим образом, модифицировав структуру робастного алгоритма адаптации.

Базовая схема модифицированного робастного алгоритма адаптации с отрицательной параметрической обратной связью для статической модели ошибки (1.96) описывается уравнением:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \omega \varepsilon - \sigma(\hat{\theta}), \quad (1.102)$$

где  $\gamma > 0$  – коэффициент адаптации, а функция  $\sigma(\hat{\theta})$  определяется следующими выражениями:

$$\sigma(\hat{\theta}) = \begin{cases} 0, & |\hat{\theta}| < \theta^*, \\ |\hat{\theta}|/\theta^* - 1, & \theta^* \leq |\hat{\theta}| \leq 2\theta^*, \\ 1, & |\hat{\theta}| > 2\theta^* \end{cases} \quad (1.103)$$

с произвольной положительной константой  $\theta^*$ .

Смысл введенной модификации состоит в том, что при небольших значениях настраиваемых параметров (т.е. при  $|\hat{\theta}| < \theta^*$ )  $\sigma(\hat{\theta}) = 0$  и параметрическая обратная связь отключена, что обеспечивает достижение нулевой ошибки управления (в условиях отсутствия внешних возмущений и ограниченности регрессора). Если настраиваемые параметры начинают расти (что, например, может быть вызвано влиянием внешнего возмущения), включается отрицательная параметрическая обратная связь, предотвращающая неограниченный рост настраиваемых параметров. Специальный вид функции  $\sigma(\theta)$  обеспечивает непрерывный (без разрывов) характер параметрической обратной связи.

Более строго свойства модифицированного алгоритма формулируются следующим образом.

*Утверждение 1.4 Робастный алгоритм адаптации (1.102), (1.103) при любых  $\gamma > 0$  и для любых начальных условий  $\hat{\theta}(0)$  обеспечивает модели (1.96) следующие свойства:*



- 1) если возмущение  $\delta(t)$  ограничено, то параметрическая ошибка  $\hat{\theta}(t)$  экспоненциально сходится к установившемуся ограниченному множеству  $D_\theta$  при любых  $\theta^* > 0$ ;
- 2) если, дополнительно, регрессор  $\omega(t)$  является ограниченным, то дополнительно к (1) сигнальная ошибка  $\varepsilon$  экспоненциально сходится к ограниченному множеству  $D_\varepsilon$ ;
- 3) если, дополнительно, возмущение  $\delta(t)$  экспоненциально затухает и  $\theta^* > |\theta|$ , то параметрическая ошибка ограничена и выполняет целевое условие (1.98);
- 4) если, дополнительно, регрессор  $\omega(t)$  удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения (1.99), то дополнительно к (3) вектор настраиваемых параметров  $\hat{\theta}(t)$  экспоненциально сходится к истинному значению  $\theta$ .

Доказательство утверждения непосредственно следует из утверждений 1.2 и 1.3.

Перейдем теперь к рассмотрению динамической модели ошибки с измеряемым состоянием вида:

$$\dot{e} = Ae + b\omega^T \tilde{\theta}, \quad (1.104)$$

где  $e$  – вектор сигнальных ошибок (вектор ошибки управления),  $A$  – гурвицева матрица,  $b$  – вектор постоянных коэффициентов (матрица  $A$  и вектор  $b$  полагаются известными),  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  – вектор параметрических ошибок,  $\theta$  – вектор неизвестных параметров,  $\hat{\theta}$  – вектор настраиваемых параметров, генерируемый алгоритмом адаптации,  $\omega$  – вектор известных функций (регрессор).

Динамическая модель ошибки (1.104) появляется в задачах адаптивного управления по состоянию. Базовый (стандартный) алгоритм адаптации модели (1.104) имеет вид

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \omega b^T P e, \quad (1.105)$$

где симметрическая положительно определенная матрица  $P$  является решением уравнения

$$A^T P + P A = -Q \quad (1.106)$$

с произвольной симметрической положительно определенной матрицей  $Q$ . Для доказательства свойств устойчивости замкнутой модели (1.104)–(1.106) используем функцию Ляпунова

$$V(e, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}.$$

Вычисляя ее производную по времени в силу уравнений (1.104)–(1.106), получим

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} e^T (A^T P + P A) e + \tilde{\theta}^T \omega b^T P e - \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} = -\frac{1}{2} e^T Q e \leq 0,$$

откуда следует устойчивость по Ляпунову состояния равновесия  $(e, \tilde{\theta}) = (0, 0)$  и выполнение целевого условия.

*Динамическая модель ошибки с измеряемым выходом* имеет вид

$$\dot{e} = A e + b \omega^T \tilde{\theta}, \quad (1.107)$$

$$\varepsilon = c^T e, \quad (1.108)$$

где  $e$  – недоступный прямым измерениям вектор состояния модели ошибки,  $\varepsilon$  – измеряемая ошибка слежения,  $A$ ,  $b$  и  $c$  – гурвицева матрица и векторы известных постоянных коэффициентов. Рассматриваемая задача состоит в выборе такого правила настройки параметров  $\hat{\theta}$ , чтобы бы все сигналы в замкнутой системе были ограниченными, и дополнительно выполнялось целевое условие (1.100).

Динамическая модель ошибки канонического вида (1.107), (1.108) появляется в задачах адаптивного управления по выходной переменной.

Очевидно, что модель (1.107), (1.108) может быть переписана в виде

$$\varepsilon = H(s) \omega^T \tilde{\theta}, \quad (1.109)$$

где передаточная функция  $H(s)$  определяется выражением

$$H(s) = c^T (sI - A)^{-1} b. \quad (1.110)$$

Исследуем сначала условия применимости стандартного алгоритма адаптации (1.105). Очевидно, что данный алгоритм в общем случае является неприменимым, так как вектор состояния модели ошибки  $e$

недоступен прямым измерениям. Однако если удалось бы выбрать матрицу  $P$  таким образом, что

$$b^T P = c^T, \quad (1.111)$$

то алгоритм адаптации (1.105) принял бы вид

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \omega \varepsilon. \quad (1.112)$$

Алгоритм (1.112) является физически реализуемым, так как в нем используются только измеряемые сигналы.

Таким образом, условием применимости базового алгоритма адаптации вида (1.112) является существование симметрической положительно определенной матрицы  $P$ , удовлетворяющей одновременно двум уравнениям (1.106) и (1.111). В свою очередь, такая матрица может быть найдена не для всех моделей ошибки (1.107), (1.108), а только для моделей со *строго положительно вещественной* передаточной функцией.

*Утверждение 1.5<sup>1</sup> Симметрическая положительно определенная матрица  $P$ , являющаяся решением одновременно двух уравнений (1.106) и (1.111), существует только в том случае, если передаточная функция модели ошибки (1.110) является строго положительно вещественной (СВП).*

СПВ-функции<sup>2</sup> являются асимптотически устойчивыми, а вносимый ими фазовый сдвиг не превышает  $90^0$ . Насколько ограничительным является требование строгой положительной вещественности? Для ответа на этот вопрос учтем, что СПВ передаточная функция не может иметь относительную степень, выше единицы (что определяется требованием предельного фазового сдвига в  $90^0$ ). Очевидно, что класс динамических систем с единичной относительной степенью является достаточно узким, и в него не попадают математические модели большинства реальных технических устройств. Таким образом, базовый алгоритм адаптации (1.112) может быть использован только в частных случаях и необходимо получение универсальных алгоритмов адаптации, применимых ко всему классу моделей ошибки вида (1.107), (1.108).

<sup>1</sup> в литературе по теории автоматического управления данное утверждение известно под названием лемма Якубовича-Калмана [6].

<sup>2</sup> т.е. строго положительно вещественные передаточные функции.

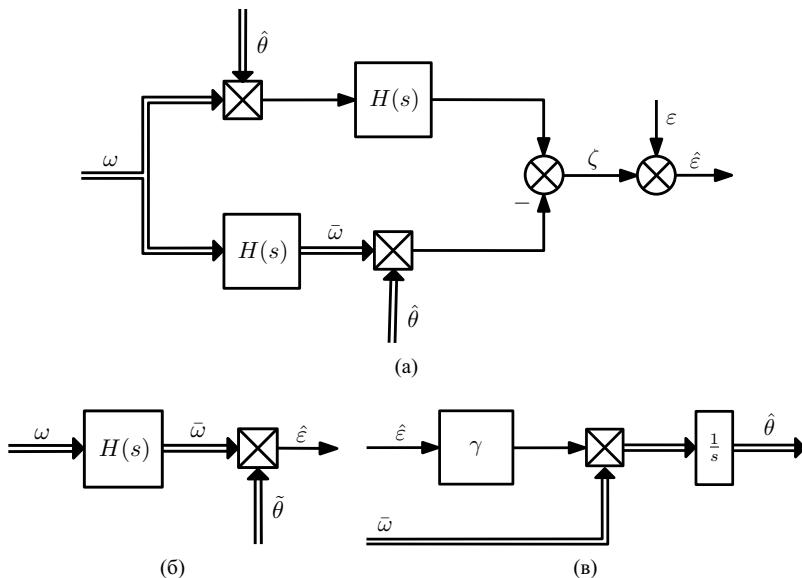


Рис. 1.1. Схема расширения сигнала ошибки (а), эквивалентная модель ошибки (б) и соответствующий ей базовый алгоритм адаптации (в)

В настоящее время предложено несколько различных решений задачи синтеза универсальных алгоритмов адаптации для динамической модели ошибки с измеряемым выходом. Мы остановимся только на методе *расширенной ошибки*. В соответствии с данным методом формируется дополнительный сигнал коррекции

$$\zeta = H(s)\omega^T(t)\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}^T(t)H(s)\omega(t), \quad (1.113)$$

и сигнал *расширенной ошибки*

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \zeta, \quad (1.114)$$

где  $H(s)$  – передаточная функция модели ошибки (1.110). Структура схемы расширения приведена на рис. 1.1а.

Каковы свойства расширенной ошибки? Подставляя выражения для  $\varepsilon$  и  $\zeta$  из (1.109) и (1.113) в (1.114), получим

$$\hat{\varepsilon} = H(s)\omega^T(t) \left( \theta - \hat{\theta}(t) \right) + H(s)\omega^T(t)\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}^T(t)H(s)\omega(t).$$

Учтем, что в силу свойств линейных систем и стационарности вектора  $\theta$  он может быть вынесен за символ передаточной функции  $H(s)$ :

$$\hat{\varepsilon} = \theta^T H(s) \omega(t) - H(s) \omega^T(t) \hat{\theta}(t) + H(s) \omega^T(t) \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}^T(t) H(s) \omega(t).$$

После элементарных преобразований окончательно получаем (см. рис. 1.1б)

$$\hat{\varepsilon} = \bar{\omega}^T \tilde{\theta}, \quad (1.115)$$

где  $\bar{\omega}(t) = H(s) \omega(t)$  – отфильтрованный регрессор. Таким образом, для расширенной ошибки слежения  $\hat{\varepsilon}$  получили статическую модель ошибки стандартного вида. Поэтому для адаптивной настройки модели (1.115) можно использовать стандартный алгоритм (1.97), который в данном случае принимает вид (см. рис. 1.1в)

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \bar{\omega} \hat{\varepsilon}. \quad (1.116)$$

Таким образом, полностью алгоритм адаптации модели (1.107), (1.108) будет описываться уравнениями (1.113), (1.114) и (1.116).

В следующих параграфах будет показано, как базовые структуры алгоритмов адаптации могут быть использованы при решении конкретных задач управления неопределенными объектами.

### 1.3.4 Адаптивная компенсация возмущений

Рассмотрим объект управления

$$\dot{x} = Ax + b(u + \delta), \quad (1.117)$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор состояния, доступный прямым измерениям,  $u$  – сигнал управления,  $\delta$  – внешнее ограниченное возмущение. Пусть известная матрица  $A$  и известный вектор  $b$  образуют полностью управляемую пару  $(A, b)$ .

Будем считать, что возмущение  $\delta$  может быть представлено в виде выхода линейного генератора

$$\dot{w} = \Gamma w, \quad (1.118)$$

$$\delta = d^T w, \quad (1.119)$$

где  $w$  –  $q$ -мерный вектор состояния генератора,  $\Gamma$  –  $q \times q$  постоянная матрица,  $d$  –  $q \times 1$  вектор постоянных коэффициентов. Ни само возмущение  $\delta$ , ни вектор состояния генератора  $w$  не являются доступными для измерений.

Рассматриваемая задача управления состоит в асимптотической стабилизации нулевого значения вектора состояния  $x$  в условиях действия внешнего возмущения  $\delta$ .

В классической теории управления данная задача решается в предположении, что параметры генератора (1.118), (1.119) известны (т. е. известны матрица  $\Gamma$  и вектор  $d$ ). При этом все множество возможных реализаций возмущения  $\delta(t)$  определяется только различными начальными условиями  $w(0)$ . Однако на практике, как правило, приходится сталкиваться с ситуацией, когда заранее известен только достаточно широкий класс возможных возмущений  $\delta(t)$ , а не их точный вид. С математической точки зрения такая ситуация означает, что генератор (1.118), (1.119) является параметрически неопределенным. Это мотивирует использование методов адаптивного управления для компенсации внешнего неточно известного возмущения.

При синтезе управления будем считать выполненными следующие условия:

- параметры матрицы  $\Gamma$  и вектора  $d$  являются неизвестными, а размерность генератора  $q$  известна;
- пара  $(d^T, \Gamma)$  является полностью наблюдаемой;
- собственные значения матрицы  $\Gamma$  являются различными и лежат на мнимой оси.

Последнее условие гарантирует ограниченность возмущения  $\delta$  и, как следствие, является необходимым для обеспечения ограниченности сигнала управления  $u$ .

Построим сначала неадаптивное управление в предположении, что параметры генератора (1.118) и (1.119) точно известны. Для этого введем модель (1.118), (1.119) к некоторой удобной форме.

Выберем произвольную  $q \times q$  гурвицеву матрицу  $G$ ,  $q \times 1$  вектор  $l$ , образующий с матрицей  $G$  полностью управляемую пару, и введем в рассмотрение линейное преобразование координат

$$\chi = Mw, \quad (1.120)$$

где  $q \times q$  матрица  $M$  является решением уравнения

$$M\Gamma - G M = l d^T. \quad (1.121)$$

Тогда генератор (1.118), (1.119) в координатах  $\chi$  принимает вид

$$\dot{\chi} = G\chi + l\delta, \quad (1.122)$$

$$\delta = \theta^T \chi, \quad (1.123)$$

где  $\theta$  – вектор постоянных коэффициентов.

Действительно, так как спектры матриц  $\Gamma$  и  $G$  не пересекаются, пара  $(d^T, \Gamma)$  является полностью наблюдаемой, а пара  $(G, l)$  является полностью управляемой, то уравнение (1.121) имеет единственное невырожденное решение. Продифференцируем (1.120) в силу уравнения (1.118)

$$\dot{\chi} = M\Gamma w.$$

С учетом (1.121) можно записать

$$\dot{\chi} = M\Gamma w = G M w + l d^T w = G\chi + l\delta,$$

откуда следует справедливость (1.122). Далее из (1.119) и (1.120) имеем

$$\delta = d^T w = d^T M^{-1} \chi = \theta^T \chi,$$

где  $\theta^T = d^T M^{-1}$ .

Таким образом, доказана справедливость представления (1.122), (1.123). Особо отметим, что в рамках рассматриваемой задачи матрица  $\Gamma$  и вектор  $d$  являются неизвестными и, поэтому, матрица преобразования координат  $M$  и вектор  $\theta$  также являются неизвестными. Другими словами, в модели (1.122), (1.123) неопределенность внешнего возмущения  $\delta$  сведена к неопределенности вектора постоянных параметров  $\theta$ .

Представление (1.122), (1.123) позволяет построить наблюдатель вектора состояния генератора  $\chi$ . Сформируем оценку в виде

$$\hat{\chi} = \eta + N x, \quad (1.124)$$

где  $q \times n$  матрица  $N$  удовлетворяет равенству

$$N b = l, \quad (1.125)$$

а  $q$ -мерный вектор  $\eta$  является состоянием динамической модели вида

$$\dot{\eta} = G\eta + (GN - NA)x - lu. \quad (1.126)$$

Тогда для любых начальных условий  $\chi(0)$ ,  $\hat{\chi}(0)$  и  $x(0)$  справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\chi(t) - \hat{\chi}(t)) = 0. \quad (1.127)$$

Действительно, введем в рассмотрение вектор ошибки оценки состояния генератора

$$\sigma = \chi - \hat{\chi} = \chi - \eta - Nx.$$

Продифференцируем последнее выражение в силу уравнений (1.117), (1.122) и (1.126). Получим

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= G\chi + l\delta - G\eta - GNx + NAx + lu - NAx - Nbu - Nb\delta \\ &= G\chi - G\eta - GNx, \end{aligned}$$

или окончательно

$$\dot{\sigma} = G\sigma.$$

Так как матрица  $G$  является гурвицевой, то последнее уравнение означает, что с течением времени ошибка  $\sigma$  стремится к нулевому значению. В свою очередь это доказывает справедливость равенства (1.127).

Таким образом, с учетом полученных результатов модель объекта управления (1.117) может быть переписана в виде

$$\dot{x} = Ax + b(u + \theta^T \hat{\chi}), \quad (1.128)$$

где оценка  $\hat{\chi}$  формируется наблюдателем (1.124), (1.126).

Анализ выражения (1.128) мотивирует следующий выбор алгоритма адаптивного управления

$$u = -k^T x - \hat{\theta}^T \hat{\chi}, \quad (1.129)$$

где  $n$ -мерный вектор постоянных коэффициентов  $k$  выбран таким образом, что матрица замкнутой системы  $A_{\Sigma} = A - bk^T$  является гурвицевой, а  $q$ -мерный вектор настраиваемых параметров  $\hat{\theta}$  формируется алгоритмом адаптации, который будет синтезирован позже.



Расчет вектора коэффициентов обратных связей  $k$  может быть осуществлен, например, методом модального регулятора. Для синтеза алгоритма адаптации, получим модель ошибки замкнутой системы, подставив (1.129) в (1.128)

$$\dot{x} = A_{\Sigma}x + b\hat{\chi}^T\tilde{\theta}. \quad (1.130)$$

Легко видеть, что модель (1.130) с точностью до обозначений является стандартной динамической моделью ошибки с измеряемым состоянием (см. формулу (1.104)). Поэтому для настройки параметров  $\tilde{\theta}$  может быть использован базовый алгоритм адаптации (1.105), который в данном случае принимает вид

$$\dot{\tilde{\theta}} = \gamma\hat{\chi}b^TPx, \quad (1.131)$$

где симметрическая положительно определенная матрица  $P$  является решением уравнения

$$A_{\Sigma}^TP + PA_{\Sigma} = -Q \quad (1.132)$$

с произвольной симметрической положительно определенной матрицей  $Q$ .

Таким образом, регулятор, обеспечивающий адаптивную компенсацию внешнего заранее неизвестного возмущения  $\delta$ , действующего на объект (1.117), содержит в своей структуре следующие блоки (рис. 5.12): наблюдатель возмущения (1.124) и (1.126), собственно настраиваемый регулятор (1.129) и алгоритм адаптации (1.131).

Свойства замкнутой системы могут быть сформулированы следующим образом. Для любых начальных условий  $x(0)$ ,  $w(0)$  и  $\eta(0)$  и произвольного положительного коэффициента  $\gamma$  адаптивный регулятор (1.124), (1.126), (1.129) и (1.131) обеспечивает асимптотическую стабилизацию нулевого значения вектора состояния  $x$  объекта управления (1.117), подверженного воздействию внешнего заранее неизвестного возмущения  $\delta$ , генерируемого моделью (1.118), (1.119).

### 1.3.5 Числовой пример

Рассмотрим задачу стабилизации нулевого значения вектора состояния объекта управления

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 5x_2, \quad (1.133)$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 + u + \delta, \quad (1.134)$$

где возмущение  $\delta$  представляет собой гармоническую функцию с заранее неизвестной амплитудой, частотой и фазой. Очевидно, что в рассматриваемом случае порядок генератора (1.118), (1.119) равен двум (т. е.  $q = 2$ ), а матрица  $A$  и вектор  $b$  модели (1.117) имеют вид

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, b = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Выберем желаемые корни замкнутой системы  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = -4$  и с помощью команды **place(A,B,P)** библиотеки Control System Toolbox пакета MatLab рассчитаем вектор коэффициентов обратных связей

$$k^T = [3, 2 \quad 9].$$

Тогда модальный регулятор

$$u = -k^T x = -3, 2x_1 - 9x_2 \quad (1.135)$$

при отсутствии внешних возмущений (т. е. при  $\delta(t) \equiv 0$ ) будет обеспечивать асимптотическую стабилизацию нулевого значения вектора состояния (рис. 1.2а, 1.2б). Однако воздействие внешнего возмущения вызывает появление ненулевой установившейся ошибки (рис. 1.2в, 1.2г).

Для синтеза регулятора с адаптивной компенсацией внешнего возмущения выберем

$$G = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{vmatrix}, l = \begin{vmatrix} 0 \\ 25 \end{vmatrix}, N = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{vmatrix}, Q = \begin{vmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

Решая матричное уравнение (1.132), получим

$$P = \begin{vmatrix} 28,7 & 17,8 \\ 17,8 & 15,7 \end{vmatrix}.$$

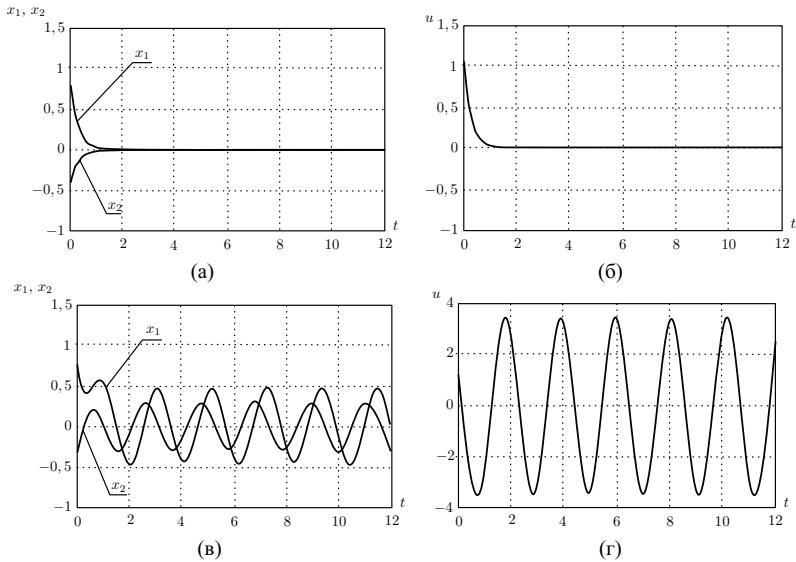


Рис. 1.2. Процессы стабилизации в системе, замкнутой модальным регулятором (1.135): (а), (б):  $\delta(t) = 0$ ; (в), (г):  $\delta(t) = 2 \sin 3t$

Тогда алгоритм адаптивного управления (1.124), (1.126), (1.129) и (1.131) принимает вид:

$$\hat{\chi}_1 = \eta_1, \hat{\chi}_2 = \eta_2 + 25x_2, \quad (1.136)$$

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2 + 25x_2, \dot{\eta}_2 = -25\eta_1 - 10\eta_2 - 50x_1 - 325x_2 - 25u, \quad (1.137)$$

$$u = -3, 2x_1 - 9x_2 - \hat{\theta}_1\hat{\chi}_1 - \hat{\theta}_2\hat{\chi}_2, \quad (1.138)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma\hat{\chi}_1(17, 8x_1 + 15, 7x_2), \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma\hat{\chi}_2(17, 8x_1 + 15, 7x_2). \quad (1.139)$$

Результаты моделирования переходных процессов в адаптивной системе приведены на рис. 1.3 и демонстрируют обеспечение асимптотической стабилизации нулевого значения вектора состояния в условиях воздействия внешнего заранее неизвестного возмущения  $\delta$ .

Особо отметим, что синтезированный адаптивный регулятор (1.136)–(1.139) будет обеспечивать асимптотическую стабилизацию объекта (1.137) для *всех* возмущений выделенного класса – т. е. для

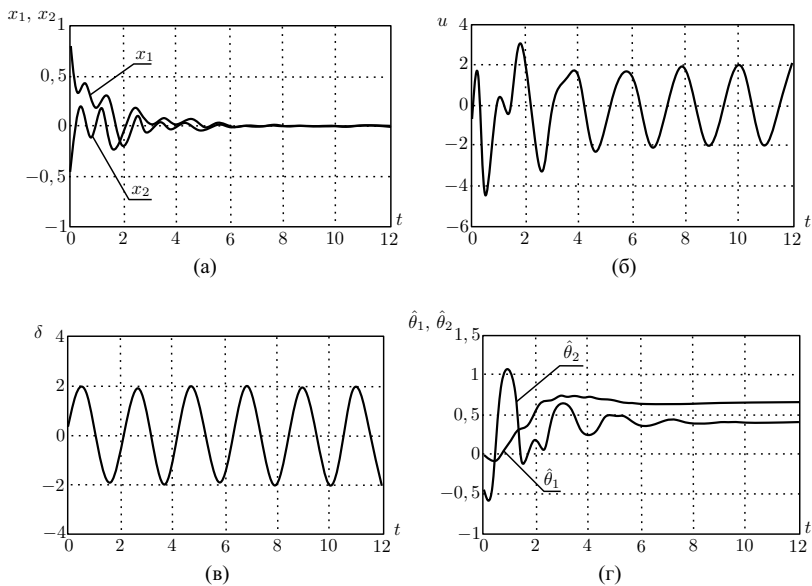


Рис. 1.3. Процессы стабилизации в системе, замкнутой адаптивным регулятором (1.136)–(1.139), при  $\delta(t) = 2 \sin 3t$ ,  $\gamma = 0, 1$ ,  $\eta_1(0) = \eta_2(0) = \hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_2(0) = 0$

любых гармонических функций с заранее неизвестной амплитудой, частотой и фазой. Это положение иллюстрируется рисунком 1.4, где приведены результаты моделирования замкнутой адаптивной системы, подверженной воздействию различных возмущений выделенного класса:

$$\delta(t) = 2 \quad \text{при } 0 \leq t < 15, \quad (1.140)$$

$$\delta(t) = 1,5 \sin 4t \quad \text{при } 15 \leq t < 35, \quad (1.141)$$

$$\delta(t) = 2 \sin 2t \quad \text{при } 35 \leq t < 50. \quad (1.142)$$

Как видно из графиков, каждый раз при изменении вида возмущающего воздействия и после завершения переходного процесса (после подстройки адаптивного регулятора) в системе устанавливается нулевое значение вектора состояния  $x$ .

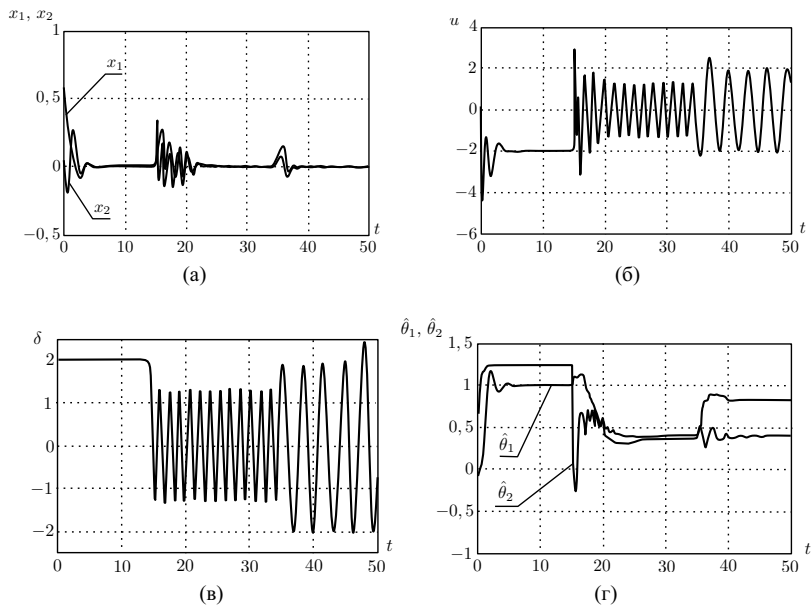


Рис. 1.4. Процессы стабилизации в системе, замкнутой адаптивным регулятором (1.136)–(1.139), при при воздействии изменяющегося внешнего возмущения  $\delta(t)$

# Глава 2

## Адаптивная оценка мультигармонических сигналов

Данная глава посвящена методу построения адаптивного наблюдателя и идентификации параметров мультигармонического сигнала, включая общее смещение, частоту и амплитуду каждой гармоники. Такая проблема возникает при решении задачи компенсации параметрически не определенного возмущения, имеющего квазигармоническую структуру, и требует рассмотрения в рамках отдельной главы, где представлен анализ алгоритма идентификации параметров мультигармонического сигнала, доступного для измерения.

Наибольший интерес представляют задачи, где частота или частоты мультигармонического сигнала не известны. Однако, в большинстве работ, посвященных синтезу алгоритмов идентификации частоты в непрерывном времени, не обсуждается или отсутствует теоретическое обоснование увеличения быстродействия параметрической сходимости, что, в свою очередь, также можно отнести к нерешенным задачам идентификации частот периодических сигналов. Предлагаемый в данной главе алгоритм идентификации имеет динамический порядок, равный  $3k$ , где  $k$  — число гармоник, что, в свою очередь, улучшает наиболее известные результаты, опубликованные в [24–27, 35].

Алгоритм обладает адаптивными свойствами по отношению к изменению параметров сигнала и робастными свойствами по отношению к нерегулярным составляющим сигнала. Изменяя параметры алгоритма идентификации можно управлять скоростью сходимости оценок к их истинным значениям.

Рассмотренный алгоритм идентификации обеспечивает экспоненци-

альную сходимость к нулю ошибки оценивания частоты смещенного синусоидального сигнала. Алгоритм идентификации параметров смещенного синусоидального сигнала обобщен на случай мультигармонической функции времени.

## 2.1 Алгоритм адаптивной идентификации параметров смещенного синусоидального сигнала

### 2.1.1 Постановка задачи

Рассматривается измеряемый сигнал вида

$$y(t) = \sigma + \mu \sin(\omega t + \phi), \quad (2.1)$$

содержащий постоянную составляющую  $\sigma$  и гармоническую составляющую с частотой  $\omega$ , амплитудой  $\mu$  и фазовым сдвигом  $\phi$ . Константы  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\mu$  и  $\phi$  являются неизвестными.

**Допущение 2.1** Частота гармонической составляющей сигнала  $y(t)$  не меньше некоторого известного числа  $\omega_0$ , т.е.  $\omega \geq \omega_0$ .

**Допущение 2.2** Считается, что значение времени  $t$  с момента запуска алгоритма известно.

Сформулируем цель управления как решение задачи синтеза алгоритма идентификации, обеспечивающего для любых  $\sigma$ ,  $\phi$ ,  $\mu$  и  $\omega > 0$  выполнения условий

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\omega - \hat{\omega}(t)| = 0, \quad (2.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\sigma - \hat{\sigma}(t)| = 0, \quad (2.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mu - \hat{\mu}(t)| = 0, \quad (2.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi - \hat{\phi}(t)| = 0, \quad (2.5)$$

где  $\hat{\omega}(t)$  — текущая оценка частоты  $\omega$ ,  $\hat{\sigma}(t)$  — текущая оценка смещения  $\sigma$ ,  $\hat{\mu}(t)$  — текущая оценка амплитуды  $\mu$ ,  $\hat{\phi}(t)$  — текущая оценка фазового сдвига  $\phi$ .

### 2.1.2 Алгоритм идентификации частоты смещенного гармонического сигнала

Известно [1, 9, 31, 32], что для генерирования сигнала (2.1) можно использовать дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{y}(t) = -\theta \dot{y}(t), \quad (2.6)$$

где

$$\theta = -\omega^2. \quad (2.7)$$

Следуя результатам [1, 9, 31, 32], представим следующую лемму.

*Лемма 2.1 Для линейного фильтра второго порядка*

$$\xi(s) = \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2} y(s), \quad \lambda > 0, \quad (2.8)$$

и для сигнала (2.1) справедливо следующее выражение:

$$\ddot{\xi}(t) = \theta \dot{\xi}(t) + \varepsilon(t), \quad (2.9)$$

где функции  $\dot{\xi}(t)$  и  $\ddot{\xi}(t)$  — переменные состояния линейного фильтра (2.8)

$$\dot{\xi}(s) = \frac{\lambda^2 s}{(s + \lambda)^2} y(s), \quad (2.10)$$

$$\ddot{\xi}(s) = \frac{\lambda^2 s^3}{(s + \lambda)^2} y(s), \quad (2.11)$$

и  $\varepsilon(t)$  — экспоненциально затухающая функция.

*Доказательство леммы 2.1.* Выполняя преобразование Лапласа для (2.6), имеем

$$s^3 y(s) = \theta s y(s) + Q(s), \quad (2.12)$$

где  $s$  — комплексная переменная,  $y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  — образ Лапласа переменной  $y(t)$ , а полином  $Q(s)$  обозначает сумму всех начальных условий. Умножая обе части (2.12) на комплексное число  $\frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2}$ , получим

$$s^3 \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2} y(s) = \theta s \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2} y(s) + \frac{\lambda^2 Q(s)}{(s + \lambda)^2}. \quad (2.13)$$



Выполняя обратное преобразование Лапласа для (2.13) с учетом (2.8), имеем

$$\ddot{\xi}(t) = \theta \dot{\xi}(t) + \varepsilon(t), \quad (2.14)$$

где  $\varepsilon(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\lambda^2 Q(s)}{(s+\lambda)^2} \right\}$  — экспоненциально затухающая функция с экспоненциально затухающими производными, что и требовалось доказать.

*Замечание 2.1* Поскольку экспоненциально затухающая функция времени  $\varepsilon(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\lambda^2 Q(s)}{(s+\lambda)^2} \right\}$  зависит от параметра  $\lambda$ , то с увеличением значения  $\lambda$  можно ускорять процесс сходимости  $\varepsilon(t)$  к нулю.

В следующей теореме представлен адаптивный алгоритм идентификации частоты  $\omega$  сигнала (2.1), основанный на подходах [1, 9, 31, 32].

**Теорема 2.1** Алгоритм адаптации вида

$$\hat{\omega}(t) = \sqrt{|\hat{\theta}(t)|}, \quad (2.15)$$

$$\hat{\theta}(t) = \chi(t) + k \dot{\xi}(t) \ddot{\xi}(t), \quad (2.16)$$

$$\dot{\chi}(t) = -k \dot{\xi}^2(t) \hat{\theta}(t) - k \ddot{\xi}^2(t), \quad (2.17)$$

где  $k > 0$ , функции  $\xi(t)$ ,  $\dot{\xi}(t)$  и  $\ddot{\xi}(t)$  определены в лемме 2.1, обеспечивает экспоненциальную сходимость к нулю ошибки оценивания  $\tilde{\omega}(t) = \omega - \hat{\omega}(t)$ :

$$|\tilde{\omega}(t)| \leq \rho e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.18)$$

где  $\rho$  и  $\beta$  — положительные числа.

**Доказательство теоремы 2.1.** Рассмотрим модель ошибки оценивания с учетом леммы 2.1

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}}(t) &= \dot{\theta} - \dot{\hat{\theta}}(t) \\ &= -\dot{\chi}(t) - k \ddot{\xi}^2(t) - k \dot{\xi}(t) \ddot{\xi}(t) \\ &= k \dot{\xi}^2(t) \hat{\theta}(t) + k \ddot{\xi}^2(t) - k \ddot{\xi}^2(t) - k \dot{\xi}(t) \ddot{\xi}(t) \\ &= k \dot{\xi}^2(t) \hat{\theta}(t) - k \dot{\xi}^2(t) \theta - k \dot{\xi}(t) \varepsilon(t) \\ &= -k \dot{\xi}^2(t) \tilde{\theta}(t) - k \dot{\xi}(t) \varepsilon(t). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова [9, 31, 32]

$$V(t) = \frac{1}{2}f(t)\tilde{\theta}^2(t), \quad (2.20)$$

где  $f(t)$  — положительная функция, ограниченная сверху и снизу

$$0 < C_1 \leq f(t) \leq C_2 < \infty, \quad (2.21)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы, которые будут определены далее при анализе. Дифференцируя (2.20), имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{1}{2}\dot{f}(t)\tilde{\theta}^2(t) + f(t)\tilde{\theta}(t)\dot{\tilde{\theta}}(t) \\ &= \frac{1}{2}\dot{f}(t)\tilde{\theta}^2(t) - kf(t)\dot{\xi}^2(t)\tilde{\theta}^2(t) - kf(t)\dot{\xi}(t)\tilde{\theta}(t)\varepsilon(t) \\ &\leq \frac{1}{2}\dot{f}(t)\tilde{\theta}^2(t) - kf(t)\dot{\xi}^2(t)\tilde{\theta}^2(t) + \frac{1}{2}kf(t)\left(\dot{\xi}^2(t)\tilde{\theta}^2(t) + \varepsilon^2(t)\right) \\ &= \frac{1}{2}\dot{f}(t)\tilde{\theta}^2(t) - \frac{1}{2}kf(t)\dot{\xi}^2(t)\tilde{\theta}^2(t) + \frac{1}{2}kf(t)\varepsilon^2(t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из (2.40) получим

$$\dot{\xi}(t) = \mu_\xi \omega \cos(\omega t + \phi_\xi) + \epsilon_1(t), \quad (2.23)$$

где  $\epsilon_1(t) \triangleq \dot{\epsilon}_\xi(t)$ ,  $|\epsilon_1(t)| \leq \rho_1 e^{-\beta_1 t}$  — экспоненциально затухающая функция времени. Откуда

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^2(t) &= \mu_\xi^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \phi_\xi) + 2\mu_\xi \omega \cos(\omega t + \phi_\xi)\epsilon_1(t) + \epsilon_1^2(t) \\ &= \frac{1}{2}\mu_\xi^2 \omega^2 + \frac{1}{2}\mu_\xi^2 \omega^2 \cos(2\omega t + 2\phi_\xi) + 2\mu_\xi \omega \cos(\omega t + \phi_\xi)\epsilon_1(t) \\ &\quad + \epsilon_1^2(t). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Подставляя (2.24) в (2.22), имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \frac{1}{2}\dot{f}(t)\tilde{\theta}^2(t) - \frac{1}{2}k\mu_\xi^2 \omega^2 \frac{1}{2}f(t)\tilde{\theta}^2(t) + \frac{1}{2}kf(t)\varepsilon^2(t) - \frac{1}{2}kf(t)\tilde{\theta}^2(t) \\ &\quad \times \left( \frac{1}{2}\mu_\xi^2 \omega^2 \cos(2\omega t + 2\phi_\xi) + 2\mu_\xi \omega \cos(\omega t + \phi_\xi)\epsilon_1(t) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_1^2(t) \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Выберем функцию  $f(t)$  так, что

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) = & k f(t) \left( \frac{1}{2} \mu_{\xi}^2 \omega^2 \cos(2\omega t + 2\phi_{\xi}) + 2\mu_{\xi} \omega \cos(\omega t + \phi_{\xi}) \epsilon_1(t) \right. \\ & \left. + \epsilon_1^2(t) \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Достаточно воспользоваться частным решением (2.26) в виде

$$f(t) = e^{g(t)}, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} g(t) = & k \int_0^t \left( \frac{1}{2} \mu_{\xi}^2 \omega^2 \cos(2\omega \tau + 2\phi_{\xi}) + 2\mu_{\xi} \omega \cos(\omega \tau + \phi_{\xi}) \epsilon_1(\tau) \right. \\ & \left. + \epsilon_1^2(\tau) \right) d\tau. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Рассмотрим функцию  $g(t)$  для того, чтобы найти ограничения для  $f(t)$  сверху и снизу.

$$\begin{aligned} g(t) = & \frac{1}{2} k \mu_{\xi}^2 \omega (\sin(2\omega t + 2\phi_{\xi}) - \sin(2\phi_{\xi})) \\ & + 2k \int_0^t (\mu_{\xi} \omega \cos(\omega \tau + \phi_{\xi}) \epsilon_1(\tau) + \epsilon_1^2(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} |g(t)| \leq & \frac{1}{2} k \mu_{\xi}^2 \omega (1 - \sin(2\phi_{\xi})) + 2k \mu_{\xi} \omega \int_0^t |\epsilon_1(\tau)| d\tau + 2k \int_0^t \epsilon_1^2(\tau) d\tau \\ \leq & k \mu_{\xi}^2 \omega + 2k \mu_{\xi} \omega \rho_1 \int_0^t e^{-\beta_1 \tau} d\tau + 2k \rho_1^2 \int_0^t e^{-2\beta_1 \tau} d\tau \\ = & k \mu_{\xi}^2 \omega + 2k \mu_{\xi} \omega \frac{\rho_1}{\beta_1} (1 - e^{-\beta_1 t}) + 2k \frac{\rho_1^2}{2\beta_1} (1 - e^{-2\beta_1 t}) \\ \leq & k \mu_{\xi}^2 \omega + \frac{2k \mu_{\xi} \omega \rho_1}{\beta_1} + \frac{k \rho_1^2}{\beta_1} \\ = & C_3 < \infty, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где  $\rho_1$  и  $\beta_1$  — положительные числа,  $C_3$  — неотрицательная константа.

На основе неравенства  $-|g(t)| \leq g(t) \leq |g(t)|$  легко получить иско-  
мые границы  $f(t)$  в виде (2.21), где  $C_1 = e^{-C_3}$  и  $C_2 = e^{C_3}$ .

Подстановка (2.26) в (2.25) дает

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\frac{1}{2} k \mu_{\xi}^2 \omega^2 \frac{1}{2} f(t) \tilde{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} k f(t) \varepsilon^2(t) \\ \leq & -C_4 V(t) + C_5 e^{-\beta_2 t}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где

$$C_4 = \frac{1}{2}k\mu_\xi^2\omega^2, \quad C_5 = \frac{1}{2}kC_2\rho_2,$$

$\epsilon_2(t) = \varepsilon^2(t)$  — экспоненциально затухающая функция,  $|\epsilon_2(t)| \leq \rho_2 e^{-\beta_2 t}$ , а  $\rho_2$  и  $\beta_2$  — положительные числа.

Используя принцип сравнения [18] для (2.31), получим

$$V(t) \leq V(0)e^{-C_4 t} + C_5 e^{-C_4 t} \int_0^t e^{(C_4 - \beta_2)\tau} d\tau. \quad (2.32)$$

Если  $\beta_2 = C_4$ , то можно выбрать  $\beta_2$  из условия  $0 < \beta_2 < C_4$ , не нарушив экспоненциально затухающего вида функции  $\epsilon_2(t)$ . Так или иначе, из (2.32) можно получить

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V(0)e^{-C_4 t} + \frac{C_5}{C_4 - \beta_2} (e^{-\beta_2 t} - e^{-C_4 t}) \\ &\leq \rho_3 e^{-\beta_3 t}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где  $\rho_3 = V(0) + \left| \frac{C_5}{C_4 - \beta_2} \right|$  и  $\beta_3 = \min \{C_4, \beta_2\}$ . Из (2.20), (2.21) и (2.33) получим

$$\tilde{\theta}(t) \leq \sqrt{\frac{2}{C_1}} \sqrt{V(t)} \leq \sqrt{\frac{2\rho_3}{C_1}} e^{-\frac{1}{2}\beta_3 t}. \quad (2.34)$$

Покажем, что ошибка оценивания частоты  $\tilde{\omega}(t) = \omega - \hat{\omega}(t)$  в алго-

ритме (2.15) экспоненциально затухает:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}(t) &= \sqrt{|\theta|} - \sqrt{|\hat{\theta}(t)|} \\
 &= \sqrt{|\tilde{\theta}(t) + \hat{\theta}(t)|} - \sqrt{|\hat{\theta}(t)|} \\
 &\leq \sqrt{|\tilde{\theta}(t)|} + \sqrt{|\hat{\theta}(t)|} - \sqrt{|\hat{\theta}(t)|} \\
 &\leq \sqrt{|\tilde{\theta}(t)|}.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}(t) &= \sqrt{|\theta|} - \sqrt{|\theta - \tilde{\theta}(t)|} \\
 &\geq \sqrt{|\theta|} - \sqrt{|\theta|} - \sqrt{|\tilde{\theta}(t)|} \\
 &\geq -\sqrt{|\tilde{\theta}(t)|}.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Из (2.35) и (2.36) нетрудно видеть, что

$$|\tilde{\omega}(t)| \leq \sqrt{|\tilde{\theta}(t)|} \leq \rho e^{-\beta t}. \tag{2.37}$$

Мы получили соотношение для ошибки оценивания (2.18), где  $\rho = \sqrt[4]{\frac{2\rho_3}{C_1}}$  и  $\beta = \frac{1}{4}\beta_3$ . Таким образом, адаптивный идентификатор частоты (2.15)–(2.17) обеспечивает экспоненциальную сходимость к нулю ошибки оценивания  $\tilde{\omega}(t)$ . Теорема 2.1 доказана.

*Замечание 2.2 Показатель экспоненты в (2.37) зависит только от параметров  $\lambda$  и  $k$ :  $\beta = \beta(\lambda, k)$ . При увеличении  $\lambda$  и  $k$  увеличивается значение  $\beta$ . Следовательно, управляя значениями параметров алгоритма идентификации  $\lambda$  и  $k$  можно регулировать скорость сходимости ошибки оценивания  $\tilde{\omega}(t)$  к нулю. При устремлении  $\lambda$  и  $k$  к бесконечности время переходного процесса при идентификации частоты стремится к нулю.*

*Замечание 2.3 Выражение (2.37) показывает, что модуль ошибки оценивания ограничен затухающей экспонентой. При рассмотрении аддитивной нерегулярной ограниченной составляющей  $\delta_0(t) \in$*

$L_\infty$  в сигнале (2.1)

$$y(t) = \sigma + \mu \sin(\omega t + \phi) + \delta_0(t), \quad (2.38)$$

легко показать, что ошибка оценивания частоты будет ограничена константой, зависящей от амплитуды аддитивной компоненты

$$|\tilde{\omega}(t)| \leq \rho_1 e^{-\beta_1 t} + C_\omega, \quad (2.39)$$

где  $C_\omega$  — положительная константа, зависящая от амплитуды аддитивной компоненты  $\delta_0(t)$ . Это говорит о робастных свойствах алгоритма идентификации (2.15)–(2.17) частоты по отношению к нерегулярной составляющей возмущения.

### 2.1.3 Алгоритм идентификации смещения, амплитуды и фазы

В этом подразделе будет представлен алгоритм идентификации смещения, амплитуды и фазы смещенного гармонического сигнала на основе оценки частоты  $\hat{\omega}(t)$ . Сигнал (2.1) является суммой постоянного смещения  $\sigma$  и гармонической функции  $\mu \sin(\omega t + \phi)$ .

Так как фильтр (2.8) линейный, то реакция на гармоническое воздействие будет также гармонической функцией с той же частотой. Аналогично для постоянного воздействия. Так как полином  $(s + \lambda)^2$  гурвицев, то для входного сигнала (2.1) выходная переменная фильтра (2.8) имеет вид

$$\xi(t) = \sigma_\xi + \mu_\xi \sin(\omega t + \phi_\xi) + \varepsilon_\xi(t), \quad (2.40)$$

где  $\sigma_\xi$  — смещение,  $\mu_\xi$  — амплитуда,  $\phi_\xi$  — фазовый сдвиг и  $\varepsilon_\xi(t)$  — экспоненциально затухающая функция с экспоненциально затухающими производными.

Следуя результатам [1, 9, 31, 32], имеем

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \left[ \frac{\lambda^2}{(p + \lambda)^2} \right] \sigma + \left[ \frac{\lambda^2}{(p + \lambda)^2} \right] \delta(t) \\ &= \xi_1(t) + \xi_2(t) + \varepsilon_\xi(t), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\xi_1(t) = \sigma, \quad (2.42)$$

$$\xi_2(t) = L_\xi \delta \left( t + \frac{\varphi_\xi}{\omega} \right), \quad (2.43)$$

$p = d/dt$  — оператор дифференцирования,  $\left| \frac{\lambda^2}{(j\omega + \lambda)^2} \right|_{\omega=0} = 1$  — положительный передаточный коэффициент для постоянного входного сигнала,  $L_\xi = \left| \frac{\lambda^2}{(j\omega + \lambda)^2} \right|$  и  $\varphi_\xi = \arg \frac{\lambda^2}{(j\omega + \lambda)^2}$  — положительный передаточный коэффициент и фазовый сдвиг для гармонического входного сигнала с частотой  $\omega$ , действующего на фильтр (2.8),  $j = \sqrt{-1}$  — комплексное число,  $\varepsilon_\xi(t)$  — экспоненциально затухающая функция.

В следующей лемме представлены наблюдатели переменных  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  и  $\dot{\xi}_2(t)$ .

*Лемма 2.2 Наблюдатель компонент смещенного гармонического сигнала (2.41), являющегося выходной переменной фильтра (2.8)*

$$\hat{\xi}_1(t) = \xi(t) - \hat{\xi}_2(t), \quad (2.44)$$

$$\hat{\xi}_2(t) = -\frac{\ddot{\xi}(t)}{\eta^2(t)}, \quad (2.45)$$

$$\eta(t) = \begin{cases} \hat{\omega}(t) & \text{для } \hat{\omega}(t) \geq \omega_0, \\ \omega_0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.46)$$

$$\hat{\xi}_3(t) = \dot{\xi}(t), \quad (2.47)$$

где  $\omega_0$  — известная нижняя граница частоты  $\omega$ , а функции  $\xi(t)$ ,  $\dot{\xi}(t)$  и  $\ddot{\xi}(t)$  определены в лемме 2.1, обеспечивает экспоненциальную сходимость к нулю ошибок наблюдения  $\tilde{\xi}_1 = \xi_1 - \hat{\xi}_1$ ,  $\tilde{\xi}_2 = \xi_2 - \hat{\xi}_2$  и  $\tilde{\xi}_3 = \dot{\xi}_2 - \hat{\xi}_3$ .

*Доказательство леммы 2.2.* Дифференцируя (2.41) два раза, имеем:

$$\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}_1(t) + \dot{\xi}_2(t) = \dot{\xi}_2(t) + \varepsilon_{\dot{\xi}}(t), \quad (2.48)$$

$$\ddot{\xi}(t) = \ddot{\xi}_2(t) + \dot{\xi}_3(t) = -\omega^2 \xi_2(t) + \varepsilon_{\ddot{\xi}}(t), \quad (2.49)$$

где  $\varepsilon_{\dot{\xi}}$  и  $\varepsilon_{\ddot{\xi}}$  — экспоненциально затухающие функции. Откуда

$$\xi_2(t) = -\frac{\ddot{\xi}(t)}{\omega^2} + \frac{\varepsilon_{\ddot{\xi}}(t)}{\omega^2}, \quad (2.50)$$

$$\dot{\xi}_2(t) = \dot{\xi}(t) - \varepsilon_{\dot{\xi}}(t). \quad (2.51)$$

Следовательно,

$$\tilde{\xi}_2(t) = \xi_2(t) - \hat{\xi}_2(t) = -\frac{\ddot{\xi}(t)}{\omega^2} + \frac{\varepsilon_{\ddot{\xi}}(t)}{\omega^2} + \frac{\ddot{\xi}(t)}{\eta^2(t)}. \quad (2.52)$$

Так как функция  $\ddot{\xi}(t)$  ограничена,  $\ddot{\xi}_2(t)$  также ограничена. Из теоремы 2.1 следует, что  $\hat{\omega}(t)$  экспоненциально стремится к  $\omega$ , таким образом,  $\hat{\xi}_2(t)$  экспоненциально стремится к нулю. Из (2.41), (2.44) имеем  $\hat{\xi}_1 = -\hat{\xi}_2 - \varepsilon_\xi$ , откуда следует, что  $\hat{\xi}_1(t)$  ограничена и экспоненциально стремится к нулю. Из (2.45) и (2.48) получим  $\hat{\xi}_3 = -\varepsilon_\xi$ , следовательно, лемма 2.2 доказана.

Располагая оценками компонент выходной переменной фильтра (2.8), нетрудно оценить искомые параметры смещенного гармонического сигнала (2.1). Заметим, что в силу (2.42) переменная  $\hat{\xi}_1(t)$  является оценкой смещения  $\sigma$ . В следующем утверждении представлен алгоритм идентификации амплитуды  $\mu$  и фазы  $\phi$  сигнала  $y(t)$ .

*Утверждение 2.1 Алгоритм идентификации амплитуды  $\mu$  и фазы  $\phi$  вида*

$$\hat{\mu}(t) = \frac{\hat{\mu}_\xi(t)}{\hat{L}_\xi(t)}, \quad \hat{\phi}(t) = \left( -\hat{\varphi}_\xi(t) + \hat{\phi}_\xi(t) \right) \bmod 2\pi, \quad (2.53)$$

$$\hat{\mu}_\xi(t) = \sqrt{\hat{\xi}_2^2(t) + \left( \frac{\hat{\xi}_3(t)}{\eta(t)} \right)^2}, \quad (2.54)$$

$$\hat{\phi}_\xi(t) = \left( \text{sign}(\hat{\xi}_2(t)) \arccos \left( \frac{\hat{\xi}_3(t)}{\hat{\mu}_\xi(t)\eta(t)} \right) - \hat{\omega}(t)t \right) \bmod 2\pi, \quad (2.55)$$

$$\hat{L}_\xi(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \hat{\omega}^2(t)}, \quad \hat{\varphi}_\xi(t) = -\arccos \left( \frac{\lambda^2 - \hat{\omega}^2(t)}{\lambda^2 + \hat{\omega}^2(t)} \right) \quad (2.56)$$

обеспечивает ограниченность и экспоненциальную сходимость к нулю ошибок оценивания  $\tilde{\mu} = \mu - \hat{\mu}$  и  $\tilde{\phi} = \phi - \hat{\phi}$ , где оценка частоты  $\hat{\omega}(t)$  определяется адаптивным алгоритмом идентификации (2.15)–(2.17), функции  $\hat{\xi}_1(t)$ ,  $\hat{\xi}_2(t)$ ,  $\hat{\xi}_3(t)$  и  $\eta(t)$  определены в лемме 2.2. Переменные  $\hat{\mu}_\xi$  и  $\hat{\phi}_\xi$  являются оценками  $\mu_\xi$  и  $\phi_\xi$  в (2.40) соответственно, а  $\hat{L}_\xi$  и  $\hat{\varphi}_\xi$  являются оценками  $L_\xi$  и  $\varphi_\xi$  соответственно. Дополнительные переменные вводятся для упрощения доказательства утверждения.

*Доказательство утверждения 2.1.* Из (2.43) следует, что

$$\xi_2(t) = L_\xi \mu \sin(\omega t + \phi + \varphi_\xi), \quad (2.57)$$



откуда имеем соотношения

$$\mu_\xi = L_\xi \mu, \quad \phi_\xi = \phi + \varphi_\xi. \quad (2.58)$$

Для определения  $\mu$  и  $\phi$  предварительно найдем значения  $\mu_\xi$ ,  $\phi_\xi$ ,  $L_\xi$  и  $\varphi_\xi$

Дифференцируя  $\xi_2(t)$ , имеем

$$\dot{\xi}_2(t) = \mu_\xi \omega \cos(\omega t + \phi_\xi). \quad (2.59)$$

Легко показать, что

$$\sqrt{\xi_2^2(t) + \left(\frac{\dot{\xi}_2(t)}{\omega}\right)^2} = \mu_\xi(t). \quad (2.60)$$

В самом деле

$$\begin{aligned} \sqrt{\xi_2^2(t) + \left(\frac{\dot{\xi}_2(t)}{\omega}\right)^2} &= \sqrt{\mu_\xi^2 \sin^2(\omega t + \phi_\xi) + \mu_\xi^2 \cos^2(\omega t + \phi_\xi)} \\ &= \mu_\xi(t), \end{aligned} \quad (2.61)$$

где использовано основное тригонометрическое тождество  $\sin^2(\omega t + \phi_\xi) + \cos^2(\omega t + \phi_\xi) = 1$ .

Далее определим значение фазы  $\phi_\xi$ , выразив эту переменную из системы уравнений

$$\begin{cases} \xi_2(t) = \mu_\xi \sin(\omega t + \phi_\xi), \\ \dot{\xi}_2(t) = \mu_\xi \omega \cos(\omega t + \phi_\xi). \end{cases} \quad (2.62)$$

Значение функций  $\arcsin(\cdot)$  и  $\arccos(\cdot)$  изменяются в диапазоне  $\pi$ , в то время как реальное значение фазовой переменной функции  $\sin(\cdot)$  или  $\cos(\cdot)$  может меняться в пределах  $2\pi$ . Будем рассматривать фазовую переменную  $(\omega t + \phi_\xi)$  по модулю  $2\pi$  и искать решение на интервале  $(-\pi; \pi]$ . Если функция  $\sin(\cdot)$  отрицательна, значит фазовую переменную следует определять на интервале  $(-\pi; 0)$ , иначе на интервале  $[0; \pi]$ . Из системы (2.62) с учетом предыдущих рассуждений имеем

$$\omega t + \phi_\xi = \text{sign}(\xi_2(t)) \arccos\left(\frac{\dot{\xi}_2(t)}{\mu_\xi \omega}\right). \quad (2.63)$$

Так как значение времени  $t$  растет неограниченно, то при определении  $\phi_\xi$  на основе (2.63) следует пользоваться функцией деления по модулю:

$$\phi_\xi = \left( \text{sign}(\xi_2(t)) \arccos\left(\frac{\dot{\xi}_2(t)}{\mu_\xi \omega}\right) - \omega t \right) \bmod 2\pi. \quad (2.64)$$

Для определения  $\mu_\xi$  и  $\phi_\xi$  мы использовали недоступные для измерения переменные. однако у нас построены все необходимые наблюдатели, обеспечивающие экспоненциальную сходимость оценок к истинным значениям. Вместо  $\omega$ ,  $\xi_2(t)$ ,  $\dot{\xi}_2(t)$  и  $\mu_\xi$  подставим в (2.60) и (2.64) значения оценок  $\hat{\omega}(t)$  (или  $\eta(t)$  для исключения деления на ноль),  $\hat{\xi}_2(t)$ ,  $\hat{\xi}_3(t)$  и  $\hat{\mu}_\xi(t)$  соответственно и получим соотношения (2.54) и (2.55). Рассматривая ошибки оценивания для (2.54) и (2.55), нетрудно убедиться в том, что ошибки  $\tilde{\mu}_\xi = \mu_\xi - \hat{\mu}_\xi$  и  $\tilde{\phi}_\xi = \phi_\xi - \hat{\phi}_\xi$  ограничены и экспоненциально стремятся к нулю.

Теперь построим алгоритм оценки значений переменных  $L_\xi$  и  $\varphi_\xi$ . Рассмотрим комплексную переменную:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{(\lambda + j\omega)^2} &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \omega^2 + 2\omega\lambda j} = \frac{\lambda^2(\lambda^2 - \omega^2 - 2\omega\lambda j)}{(\lambda^2 - \omega^2 + 2\omega\lambda j)(\lambda^2 - \omega^2 - 2\omega\lambda j)} \\ &= \frac{\lambda^2(\lambda^2 - \omega^2 - 2\omega\lambda j)}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2} \\ &= \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \omega^2)^2} (\lambda^2 - \omega^2 - 2\omega\lambda j). \end{aligned} \quad (2.65)$$

В силу (2.65) для  $L_\xi$  и  $\varphi_\xi$  имеем

$$L_\xi = \left| \frac{\lambda^2}{(j\omega + \lambda)^2} \right| = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \omega^2}, \quad (2.66)$$

$$\varphi_\xi = \arg \frac{\lambda^2}{(j\omega + \lambda)^2} = -\arccos\left(\frac{\lambda^2 - \omega^2}{\lambda^2 + \omega^2}\right). \quad (2.67)$$

Подставляя  $\hat{\omega}(t)$  вместо  $\omega$  в (2.66) (2.67) получим реализуемые алгоритмы оценки  $\hat{L}_\xi$  и  $\hat{\varphi}_\xi$  (2.56). В силу того, что оценка частоты  $\hat{\omega}(t)$  экспоненциально стремится к значению  $\omega$ , то ошибки оценивания  $\tilde{L}_\xi = L_\xi - \hat{L}_\xi$  и  $\tilde{\varphi}_\xi = \varphi_\xi - \hat{\varphi}_\xi$  ограничены и экспоненциально

стремятся к нулю. В этом легко убедиться, рассмотрев разности между истинными значениями переменных  $L_\xi$ ,  $\varphi_\xi$  и их оценками. На основе соотношений (2.58) и полученных алгоритмов оценки (2.54)–(2.56) получим (2.53). Анализ ограниченности и экспоненциальной сходимости к нулю ошибок оценивания сводится к рассмотрению разности оценок и истинных значений. На этом доказательство утверждения 2.1 заканчивается.

### 2.1.4 Числовой пример

Продemonстрируем на числовом примере работу адаптивного алгоритма идентификации всех параметров смещенного синусоидального сигнала (2.8), (2.15)–(2.17), (2.44)–(2.47), (2.53)–(2.56).

На рисунке 2.1 представлены графики переходных процессов для четырех различных сигналов  $y(t)$ , чтобы показать, что оценки сходятся к истинным значениям, независимо от самих этих значений. На рисунке 2.2 представлены графики переходных процессов для различных параметров идентификатора, чтобы показать, что, увеличивая значения параметров  $k$  и  $\lambda$ , можно ускорять процесс идентификации частоты  $\omega$ , и, как следствие, оценка остальных параметров проходит быстрее.

На рисунке 2.3 представлены графики переходных процессов для сигнала переменной формы для того, чтобы проиллюстрировать адаптивность алгоритма по отношению к изменению параметров сигнала.

На рисунке 2.4 представлены графики переходных процессов для сигнала  $y(t)$  с аддитивным экспоненциально коррелированным шумом<sup>1</sup>, чтобы продемонстрировать робастные свойства алгоритма идентификации по отношению к нерегулярной составляющей сигнала.

Рисунки 2.1–2.4 демонстрируют эффективность, адаптивные и робастные свойства разработанного метода идентификации параметров смещенного синусоидального сигнала.

---

<sup>1</sup>Экспоненциально коррелированный шум моделировался с помощью формирующего фильтра  $W(s) = \frac{1}{s+1}$ , на вход которого подавался частотно ограниченный белый шум мощностью  $N = 0,1$ .

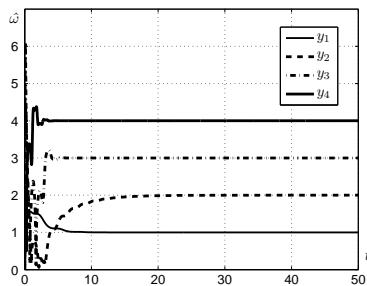
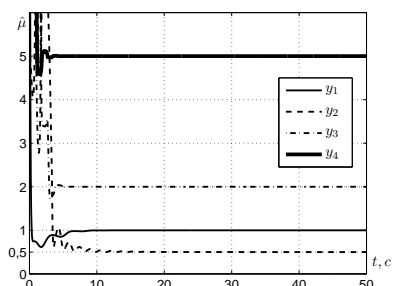
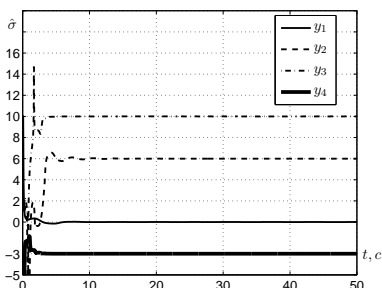
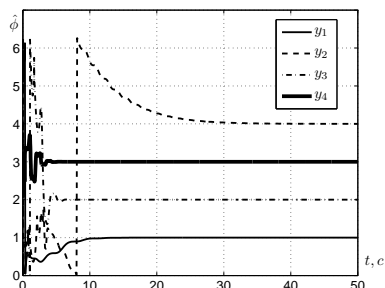
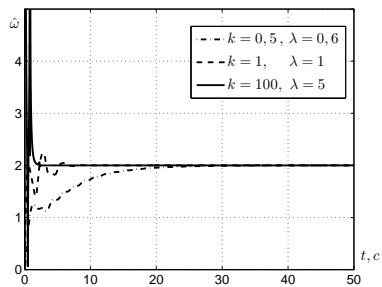
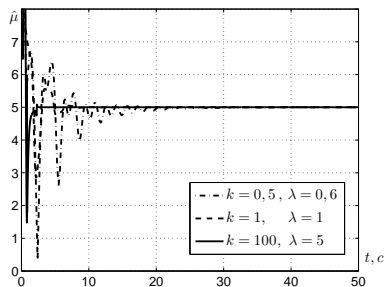
(а) Временная диаграмма оценки частоты  $\hat{\omega}(t)$ .(б) Временная диаграмма оценки амплитуды  $\hat{\mu}(t)$ .(в) Временная диаграмма оценки смещения  $\hat{\sigma}(t)$ .(г) Временная диаграмма оценки фазы  $\hat{\phi}(t)$ .

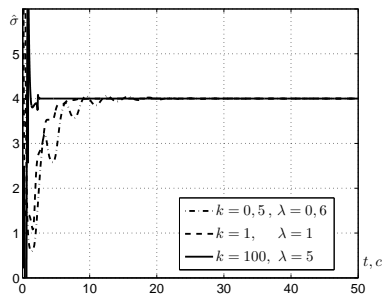
Рис. 2.1. Временные диаграммы оценки параметров сигналов  $y_1(t) = \sin(t+1)$ ,  $y_2(t) = 6 + 0,5 \sin(2t+4)$ ,  $y_3(t) = 10 + 2 \sin(3t+2)$  и  $y_4(t) = -3 + 5 \sin(4t+3)$  при коэффициентах идентификатора  $\lambda = 2$ ,  $k = 2$



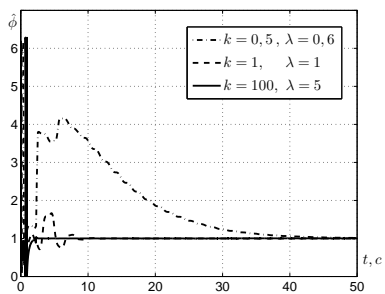
(а) Временная диаграмма оценки частоты  $\hat{\omega}(t)$



(б) Временная диаграмма оценки амплитуды  $\hat{\mu}(t)$



(в) Временная диаграмма оценки смещения  $\hat{\sigma}(t)$



(г) Временная диаграмма оценки фазы  $\hat{\phi}(t)$

Рис. 2.2. Временные диаграммы оценки параметров сигнала  $y(t) = 4 + 5 \sin(2t + 1)$  при различных коэффициентах идентификатора  $\lambda$  и  $k$

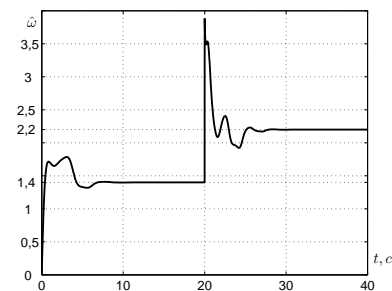
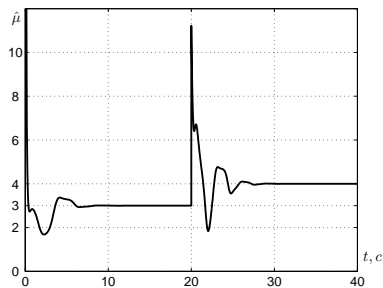
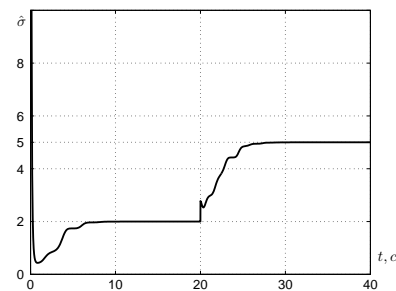
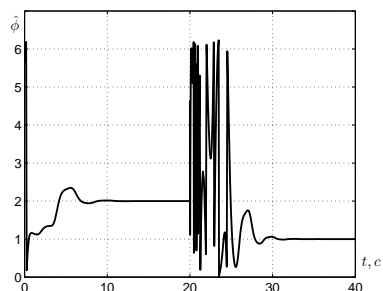
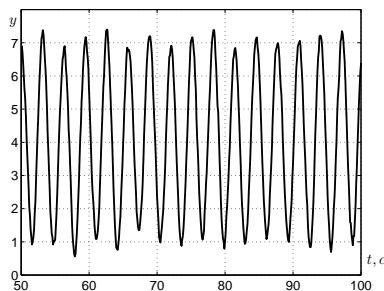
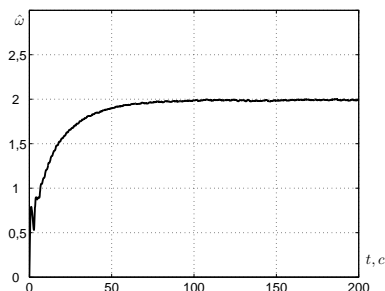
(а) Временная диаграмма оценки частоты  $\hat{\omega}(t)$ (б) Временная диаграмма оценки амплитуды  $\hat{\mu}(t)$ (в) Временная диаграмма оценки смещения  $\hat{\sigma}(t)$ (г) Временная диаграмма оценки фазы  $\hat{\phi}(t)$ 

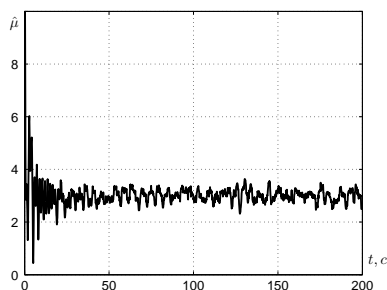
Рис. 2.3. Временные диаграммы оценки параметров сигнала  $y(t) = 2 + 3 \sin(1,4t + 2)$ , для  $0 \leq t < 20$  и  $y = 5 + 4 \sin(2,2t + 3)$ , для  $t \geq 20$  при коэффициентах идентификатора  $\lambda = 1$  и  $k = 1$



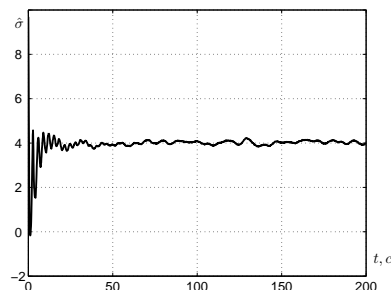
(а) Фрагмент временной диаграммы зашумленного сигнала  $y(t)$



(б) Временная диаграмма оценки частоты  $\hat{\omega}(t)$



(в) Временная диаграмма оценки амплитуды  $\hat{\mu}(t)$



(г) Временная диаграмма оценки смещения  $\hat{\sigma}(t)$

Рис. 2.4. Временные диаграммы сигнала  $y(t) = 4 + 3 \sin(2t + 2)$  с аддитивным шумом в измерении и оценки его параметров при коэффициентах идентификатора  $\lambda = 0,6$  и  $k = 0,4$

## 2.2 Алгоритм адаптивной идентификации частот и наблюдатель гармоник мультигармонического сигнала

В этом разделе рассмотрена задача идентификации параметров мультигармонического сигнала: частоты, амплитуды и начальные фазы всех гармоник. Наряду с определением постоянных параметров сигнала решена задача выделения из многокомпонентного сигнала каждой гармоники.

Для вывода результата использован подход предыдущего раздела: методика синтеза алгоритма идентификации неизвестных параметров и доказательство эффективности разработанной схемы.

### 2.2.1 Постановка задачи

Рассматривается измеряемый сигнал вида

$$y(t) = \sigma + \sum_{i=1}^k \mu_i \sin(\omega_i t + \phi_i), \quad (2.68)$$

являющийся суммой  $k$  гармоник с частотами  $\omega_i$ , амплитудами  $\mu_i$  и начальными фазами  $\phi_i$ . Константы  $\omega_i$ ,  $\mu_i$  и  $\phi_i$  являются неизвестными. Здесь и далее символ  $i$  означает номер гармоники  $i = \overline{1, k}$ .

**Допущение 2.3** Все ненулевые частоты гармоник сигнала  $y(t)$  не меньше некоторого известного числа  $\omega_0$ , т.е.  $\omega_i \geq \omega_0$ .

Сформулируем цель как решение задачи синтеза устройства оценки, обеспечивающего для любых  $\sigma$ ,  $\phi_i$ ,  $\mu_i$  и  $\omega_i > 0$  выполнения условий

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |\omega_i - \hat{\omega}_i(t)| &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} |\sigma - \hat{\sigma}(t)| &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\mu_i - \hat{\mu}_i(t)| &= 0, & \lim_{t \rightarrow \infty} |\phi_i - \hat{\phi}_i(t)| &= 0, \end{aligned} \quad (2.69)$$

где  $\hat{\omega}(t)$  — текущая оценка частоты  $\omega$ ,  $\hat{\sigma}(t)$  — текущая оценка смещения  $\sigma$ ,  $\hat{\mu}(t)$  — текущая оценка амплитуды  $\mu$ ,  $\hat{\phi}(t)$  — текущая оценка фазового сдвига  $\phi$ .



### 2.2.2 Алгоритм идентификации частот смещенного мультигармонического сигнала

Известно [3, 14], что для генерирования сигнала  $y(t)$  можно использовать дифференциальное уравнение вида

$$p(p^2 - \theta_1)(p^2 - \theta_2) \cdots (p^2 - \theta_k)y(t) = 0, \quad (2.70)$$

где  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования,  $\theta_i = -\omega_i^2$  — постоянные параметры. Перепишем уравнение (2.70):

$$p^{2k+1}y(t) = \bar{\theta}_1 p^{2k-1}y(t) + \cdots + \bar{\theta}_{k-1} p^3 y(t) + \bar{\theta}_k p y(t), \quad (2.71)$$

где параметры, полученные после раскрытия скобок в (2.70) определяются системой:

$$\begin{cases} \bar{\theta}_1 = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k, \\ \bar{\theta}_2 = -\theta_1\theta_2 - \theta_1\theta_3 - \cdots - \theta_{k-1}\theta_k, \\ \vdots \\ \bar{\theta}_k = (-1)^{k+1}\theta_1\theta_2 \cdots \theta_k. \end{cases} \quad (2.72)$$

*Замечание 2.4 Система (2.72) представляет собой формулы Виета. Так как параметры  $\theta_i, i = \overline{1, k}$  являются корнями полинома  $p^{2k} + \bar{\theta}_1 p^{2k-2} + \cdots + \bar{\theta}_{k-1} p^2 + \bar{\theta}_k$ , то, на основе значений параметров полинома  $\bar{\theta}_i, i = \overline{1, k}$ , можно однозначно определить значения корней  $\theta_i, i = \overline{1, k}$ , решив простую алгебраическую задачу.*

Переходя к изображениям Лапласа в уравнении (2.71), получаем:

$$s^{2k+1}y(s) = \bar{\theta}_1 s^{2k-1}y(s) + \cdots + \bar{\theta}_{k-1} s^3 y(s) + \bar{\theta}_k s y(s) + Q(s), \quad (2.73)$$

где  $s$  — комплексная переменная,  $y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  — образ Лапласа переменной  $y(t)$ , а полином  $Q(s)$  обозначает сумму всех членов, содержащих ненулевые начальные условия.

Умножая обе части (2.71) на комплексное число  $\frac{\lambda^{2k}}{(s+\lambda)^{2k}}$ , получим

$$\begin{aligned} s^{2k+1} \frac{\lambda^{2k}}{(s+\lambda)^{2k}} y(s) &= \bar{\theta}_1 s^{2k-1} \frac{\lambda^{2k}}{(s+\lambda)^{2k}} y(s) + \cdots + \bar{\theta}_{k-1} s^3 \frac{\lambda^{2k}}{(s+\lambda)^{2k}} y(s) \\ &+ \bar{\theta}_k s \frac{\lambda^{2k}}{(s+\lambda)^{2k}} y(s) + \frac{\lambda^{2k} Q(s)}{(s+\lambda)^{2k}}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Введем в рассмотрение вспомогательный линейный фильтр:

$$\xi(s) = \frac{\lambda^{2k}}{(s + \lambda)^{2k}} y(s). \quad (2.75)$$

Подставляя (2.75) в (2.74) и выполняя обратное преобразование Лапласа, получим:

$$\xi^{(2k+1)}(t) = \bar{\theta}_1 \xi^{(2k-1)}(t) + \dots + \bar{\theta}_k \xi^{(1)}(t) + \varepsilon_\xi(t), \quad (2.76)$$

где  $\varepsilon_\xi(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\lambda^{2k} Q(s)}{(s+\lambda)^{2k}} \right\}$  — экспоненциально затухающая функция времени, определяемая ненулевыми начальными условиями.

*Замечание 2.5* Так как экспоненциально затухающая функция  $\varepsilon_\xi(t)$  зависит от  $\lambda$ , то можно увеличить скорость сходимости этой функции к нулю, увеличивая значение  $\lambda$ .

В предыдущем разделе мы не пренебрегали экспоненциальной затухающей функцией  $\varepsilon_\xi(t)$  и доказали, что ее наличие не влияет на свойство устойчивости адаптивной схемы идентификации частоты синусоидального сигнала. Аналогично, для мультигармонического сигнала. Чтобы не перегружать пособие малозначительными формулами, пренебрегая экспоненциально затухающей составляющей  $\varepsilon_\xi(t)$ , имеем:

$$\xi^{(2k+1)}(t) = \Omega^T(t) \bar{\Theta}, \quad (2.77)$$

где  $\Omega^T(t) = [\xi^{(2k-1)}(t) \dots \xi^{(3)}(t) \xi^{(1)}(t)]$  — регрессор,  $\bar{\Theta}^T = [\bar{\theta}_1 \dots \bar{\theta}_{k-1} \bar{\theta}_k]$  — вектор неизвестных параметров.

*Утверждение 2.2 ([3, 14])* Пусть оценки вектора параметров  $\bar{\Theta}$  настраиваются следующим образом

$$\dot{\hat{\Theta}}(t) = K \Omega(t) \Omega^T(t) (\bar{\Theta} - \hat{\Theta}(t)), \quad (2.78)$$

где  $K = \text{diag}\{k_i > 0\}$ , тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\Theta} - \hat{\Theta}(t)| = 0. \quad (2.79)$$

*Доказательство утверждения 2.2.* Рассмотрим ошибку оценивания вектора параметров  $\bar{\Theta}$  следующего вида:

$$\tilde{\Theta}(t) = \bar{\Theta} - \hat{\Theta}(t). \quad (2.80)$$

Дифференцируя (2.80), получим

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Theta}}(t) &= 0 - \dot{\hat{\Theta}}(t) \\ &= -K\Omega(t)\Omega^T(t)(\bar{\Theta} - \hat{\Theta}) \\ &= -K\Omega(t)\Omega^T(t)\tilde{\Theta}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Хорошо известно, что если регрессор  $\Omega(t)$  удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения, то  $\tilde{\Theta}$  как решение уравнения

$$\dot{\tilde{\Theta}}(t) = -K\Omega(t)\Omega^T(t)\tilde{\Theta}(t)$$

экспоненциально сходится к нулю (см. Теорему 4.3.2 в [17]).

Так как сигнал  $y(t)$  содержит  $k$  гармоник разной частоты, то функция удовлетворяет условиям предельной интегральной невырожденности [6, 17]. Следовательно, для вектора невязки справедливо соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\Theta}(t) = 0, \quad (2.82)$$

откуда следует, что вектор оценки параметров  $\hat{\Theta}$  стремится к истинному значению (2.79).

Однако, алгоритм (2.78) технически не реализуем, так как содержит неизмеримый вектор  $\bar{\Theta}$ . С учетом (2.77) перепишем (2.78) в виде

$$\dot{\hat{\Theta}}(t) = K\Omega(t)(\xi^{(2k+1)} - \Omega^T(t)\hat{\Theta}(t)). \quad (2.83)$$

Переменная  $\xi^{(2k+1)}(t)$  не доступна для измерения, так как динамический порядок фильтра (2.75) равен  $2k$ .

Введем в рассмотрение вектор

$$\Upsilon(t) = \hat{\Theta}(t) - K\Omega(t)\xi^{(2k)}(t). \quad (2.84)$$

Дифференцируя (2.84), имеем

$$\begin{aligned}
 \dot{\Upsilon}(t) &= \dot{\hat{\Theta}}(t) - K\dot{\Omega}(t)\xi^{(2k)}(t) - K\Omega(t)\xi^{(2k+1)}(t) \\
 &= K\Omega(t)\xi^{(2k+1)}(t) - K\Omega(t)\Omega^T(t)\hat{\Theta}(t) \\
 &\quad - K\dot{\Omega}(t)\xi^{(2k)}(t) - K\Omega(t)\xi^{(2k+1)}(t) \\
 &= -K\Omega(t)\Omega^T(t)\hat{\Theta}(t) - K\dot{\Omega}(t)\xi^{(2k)}(t). \tag{2.85}
 \end{aligned}$$

Из (2.84) и (2.85) получим реализуемый алгоритм идентификации параметров вектора  $\hat{\Theta}$ :

$$\hat{\Theta}(t) = \Upsilon(t) + K\Omega(t)\xi^{(2k)}(t), \tag{2.86}$$

$$\dot{\Upsilon}(t) = -K\Omega(t)\Omega^T(t)\hat{\Theta}(t) - K\dot{\Omega}(t)\xi^{(2k)}(t). \tag{2.87}$$

В соответствие с замечанием 2.4, в дальнейшем будем считать, что на основе вектора оценок  $\bar{\theta}_i$  измерению доступны оценки параметров  $\theta_i$ . Частоты мультигармонического возмущения найдем из (2.70)

$$\hat{\omega}_i(t) = \sqrt{|\hat{\theta}_i(t)|}. \tag{2.88}$$

В силу выполнения целевого условия (2.79) и результата, полученного в предыдущем разделе (2.35) и (2.36), имеем соотношение для частот

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\omega_i - \hat{\omega}_i(t)| = 0. \tag{2.89}$$

### 2.2.3 Алгоритм идентификации смещения, амплитуд и фаз гармоник

В этом подразделе будет представлен алгоритм идентификации общего смещения, амплитуд и фаз всех гармоник мультигармонического сигнала на основе оценки частот  $\hat{\omega}_i(t)$ . Сигнал (2.68) является суммой постоянного смещения  $\sigma$  и синусоидальных функций  $y_i(t) = \mu_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$ .

Так как фильтр (2.75) линейный, то реакция на гармоническое воздействие будет также гармонической функцией с той же частотой. Аналогично для постоянного воздействия. Так как полином  $(s + \lambda)^{2k}$  гурвицев, то для входного сигнала (2.68) выходная переменная фильтра (2.8)

имеет вид

$$\xi(t) = \sigma_\xi + \sum_{i=1}^k \mu_{\xi i} \sin(\omega_i t + \phi_{\xi i}) + \varepsilon_\xi(t), \quad (2.90)$$

где  $\sigma_\xi$  — смещение,  $\mu_{\xi i}$  — амплитуда  $i$ -ой гармоники,  $\phi_{\xi i}$  — фазовый сдвиг  $i$ -ой гармоники и  $\varepsilon_\xi(t)$  — экспоненциально затухающая функция с экспоненциально затухающими производными.

Воспользуемся следующими соотношениями:

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \sum_{i=1}^k \xi_i(t) + \varepsilon_\xi(t), \quad (2.91)$$

$$\xi_0(t) = \left[ \frac{\lambda^{2k}}{(p + \lambda)^{2k}} \right] \sigma = \sigma, \quad (2.92)$$

$$\xi_i(t) = \left[ \frac{\lambda^{2k}}{(p + \lambda)^{2k}} \right] \delta_i(t) = L_{\xi i} \delta_i \left( t + \frac{\varphi_{\xi i}}{\omega_i} \right), \quad (2.93)$$

где  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования,  $\left| \frac{\lambda^{2k}}{(j\omega + \lambda)^{2k}} \right|_{\omega=0} = 1$  — положительный передаточный коэффициент для постоянного входного сигнала,  $L_{\xi i} = \left| \frac{\lambda^{2k}}{(j\omega + \lambda)^{2k}} \right|_{\omega=\omega_i}$  и  $\varphi_{\xi i} = \arg \frac{\lambda^{2k}}{(j\omega + \lambda)^{2k}} \Big|_{\omega=\omega_i}$  — положительный передаточный коэффициент и фазовый сдвиг для синусоидального входного сигнала с частотой  $\omega_i$ , действующего на фильтр (2.75),  $j = \sqrt{-1}$  — комплексное число,  $\varepsilon_\xi(t)$  — экспоненциально затухающая функция.

Пренебрегая экспоненциально затухающей составляющей  $\varepsilon_\xi(t)$  и дифференцируя (2.90)  $2k$  раз, получим две системы из  $k$  линейных уравнений:

$$\begin{cases} \xi^{(1)}(t) = \dot{\xi}_1(t) + \dot{\xi}_2(t) + \dots + \dot{\xi}_k(t), \\ \xi^{(3)}(t) = \theta_1 \dot{\xi}_1(t) + \theta_2 \dot{\xi}_2(t) + \dots + \theta_k \dot{\xi}_k(t), \\ \vdots \\ \xi^{(2k-1)}(t) = \theta_1^{k-1} \dot{\xi}_1(t) + \theta_2^{k-1} \dot{\xi}_2(t) + \dots + \theta_k^{k-1} \dot{\xi}_k(t) \end{cases} \quad (2.94)$$

$$\begin{cases} \xi^{(2)}(t) = \theta_1 \xi_1(t) + \theta_2 \xi_2(t) + \dots + \theta_k \xi_k(t), \\ \xi^{(4)}(t) = \theta_1^2 \xi_1(t) + \theta_2^2 \xi_2(t) + \dots + \theta_k^2 \xi_k(t), \\ \vdots \\ \xi^{(2k)}(t) = \theta_1^k \xi_1(t) + \theta_2^k \xi_2(t) + \dots + \theta_k^k \xi_k(t) \end{cases} \quad (2.95)$$

или два матричных уравнения

$$\begin{bmatrix} \xi^{(1)}(t) \\ \xi^{(3)}(t) \\ \vdots \\ \xi^{(2k-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^{k-1} & \theta_2^{k-1} & \dots & \theta_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_k(t) \end{bmatrix}, \quad (2.96)$$

$$\begin{bmatrix} \xi^{(2)}(t) \\ \xi^{(4)}(t) \\ \vdots \\ \xi^{(2k)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_k \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \dots & \theta_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^k & \theta_2^k & \dots & \theta_k^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_k(t) \end{bmatrix}, \quad (2.97)$$

откуда имеем

$$\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_k \\ \theta_1^2 & \theta_2^2 & \dots & \theta_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^k & \theta_2^k & \dots & \theta_k^k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi^{(2)}(t) \\ \xi^{(4)}(t) \\ \vdots \\ \xi^{(2k)}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.98)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^{k-1} & \theta_2^{k-1} & \dots & \theta_k^{k-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi^{(1)}(t) \\ \xi^{(3)}(t) \\ \vdots \\ \xi^{(2k-1)}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.99)$$

*Замечание 2.6* Обратные матрицы в (2.98) и (2.99) существуют, так как в силу постановки задачи измеряемый сигнал  $y(t)$  имеет  $k$  гармоник различной частоты.

Реализуемый алгоритм оценки переменных  $\xi_i(t)$  и  $\dot{\xi}_i(t)$  примет вид:

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}_1(t) \\ \hat{\xi}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\xi}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 & \cdots & \hat{\theta}_k \\ \hat{\theta}_1^2 & \hat{\theta}_2^2 & \cdots & \hat{\theta}_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^k & \hat{\theta}_2^k & \cdots & \hat{\theta}_k^k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi^{(2)}(t) \\ \xi^{(4)}(t) \\ \vdots \\ \xi^{(2k)}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}_1(t) \\ \hat{\xi}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\xi}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 & \cdots & \hat{\theta}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^{k-1} & \hat{\theta}_2^{k-1} & \cdots & \hat{\theta}_k^{k-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi^{(1)}(t) \\ \xi^{(3)}(t) \\ \vdots \\ \xi^{(2k-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

По аналогии с результатом, полученным в предыдущем разделе, представим алгоритм оценки общего смещения, амплитуд и начальных фаз всех гармоник мультигармонического сигнала  $y(t)$ .

Наблюдатель общего смещения получим на основе (2.91):

$$\hat{\xi}_0(t) = \xi(t) - \sum_{i=1}^k \hat{\xi}_i(t). \quad (2.102)$$

Заметим, что в силу (2.92) переменная  $\hat{\xi}_0(t)$  является оценкой смещения  $\sigma$ .

Так как выполнены соотношения (2.79), (2.89), то из (2.98)–(2.102) имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\xi_0(t) - \hat{\xi}_0(t)| = 0, \quad (2.103)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\xi_i(t) - \hat{\xi}_i(t)| = 0, \quad (2.104)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\xi}_i(t) - \dot{\hat{\xi}}_i(t)| = 0. \quad (2.105)$$

Располагая оценками компонент выходной переменной фильтра (2.75)  $\xi_i(t)$  и их производными  $\dot{\xi}_i(t)$ , нетрудно оценить искомые параметры сигнала (2.68): амплитуды  $\mu_i$  и фазы  $\phi_i$  сигнала  $y(t)$ .

Алгоритм идентификации амплитуд  $\mu_i$  и фаз  $\phi_i$  имеет вид

$$\hat{\mu}_i(t) = \frac{\hat{\mu}_{\xi i}(t)}{\hat{L}_{\xi i}(t)}, \quad \hat{\phi}_i(t) = \left( -\hat{\varphi}_{\xi i}(t) + \hat{\phi}_{\xi i}(t) \right) \bmod 2\pi, \quad (2.106)$$

$$\hat{\mu}_{\xi i}(t) = \sqrt{\hat{\xi}_i^2(t) + \left( \frac{\hat{\xi}_i(t)}{\eta_i(t)} \right)^2}, \quad (2.107)$$

$$\hat{\phi}_{\xi i}(t) = \left( \text{sign}(\hat{\xi}_i(t)) \arccos \left( \frac{\hat{\xi}_i(t)}{\hat{\mu}_{\xi i}(t)\eta_i(t)} \right) - \hat{\omega}_i(t)t \right) \bmod 2\pi, \quad (2.108)$$

$$\hat{L}_{\xi i}(t) = \left| \frac{\lambda^{2k}}{(\lambda + j\hat{\omega}_i(t))^{2k}} \right|, \quad \hat{\varphi}_{\xi i}(t) = \arg \frac{\lambda^{2k}}{(\lambda + j\hat{\omega}_i(t))^{2k}}, \quad (2.109)$$

где переменные  $\eta_i(t)$  вводятся также, как и в предыдущем разделе:

$$\eta_i(t) = \begin{cases} \hat{\omega}_i(t) & \text{для } \hat{\omega}_i(t) \geq \omega_0, \\ \omega_0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.110)$$

где  $\omega_0$  — известная нижняя граница частот  $\omega_i$ .

Такой алгоритм обеспечивает ограниченность и сходимость к нулю ошибок оценивания  $\tilde{\mu}_i = \mu_i - \hat{\mu}_i$  и  $\tilde{\phi}_i = \phi_i - \hat{\phi}_i$ . Переменные  $\hat{\mu}_{\xi i}$  и  $\hat{\phi}_{\xi i}$  являются оценками  $\mu_{\xi i}$  и  $\phi_{\xi i}$  в (2.90) соответственно, а  $\hat{L}_{\xi i}$  и  $\hat{\varphi}_{\xi i}$  являются оценками  $L_{\xi i}$  и  $\varphi_{\xi i}$  соответственно.

Анализ ограниченности и сходимости к нулю ошибок оценивания сводится к рассмотрению разности оценок и истинных значений. Доказательство эффективности работы алгоритма (2.106)–(2.110) аналогично доказательству утверждения 2.1.



### 2.2.4 Числовой пример

Продemonстрируем на числовом примере работу адаптивного алгоритма идентификации всех параметров мультигармонического сигнала (2.72), (2.77), (2.86)–(2.88), (2.100)–(2.102), (2.106)–(2.109).

На рисунках 2.8а, 2.5 представлены графики переходных процессов для мультигармонического сигнала  $y(t)$ , чтобы показать, что оценки сходятся к истинным значениям.

На рисунке 2.6 представлены графики переходных процессов для другого значения параметра  $\lambda$ , чтобы показать, что, увеличивая значения этого параметра, можно ускорять процесс идентификации частот  $\omega_i$ , и, как следствие, оценка остальных параметров проходит быстрее.

На рисунках 2.8б, 2.7 представлены графики переходных процессов для сигнала переменной формы для того, чтобы проиллюстрировать адаптивность алгоритма по отношению к изменению параметров сигнала.

На рисунке 2.9 представлены графики переходных процессов для сигнала  $y(t)$  с аддитивным экспоненциально коррелированным шумом<sup>2</sup>, чтобы продемонстрировать робастные свойства алгоритма идентификации по отношению к нерегулярной составляющей сигнала.

Рисунки 2.5–2.9 демонстрируют эффективность, адаптивные и робастные свойства разработанного метода идентификации параметров мультигармонического сигнала.

---

<sup>2</sup>Экспоненциально коррелированный шум моделировался с помощью формирующего фильтра  $W(s) = \frac{1}{s+1}$ , на вход которого подавался частотно ограниченный белый шум мощностью  $N = 0,1$ .

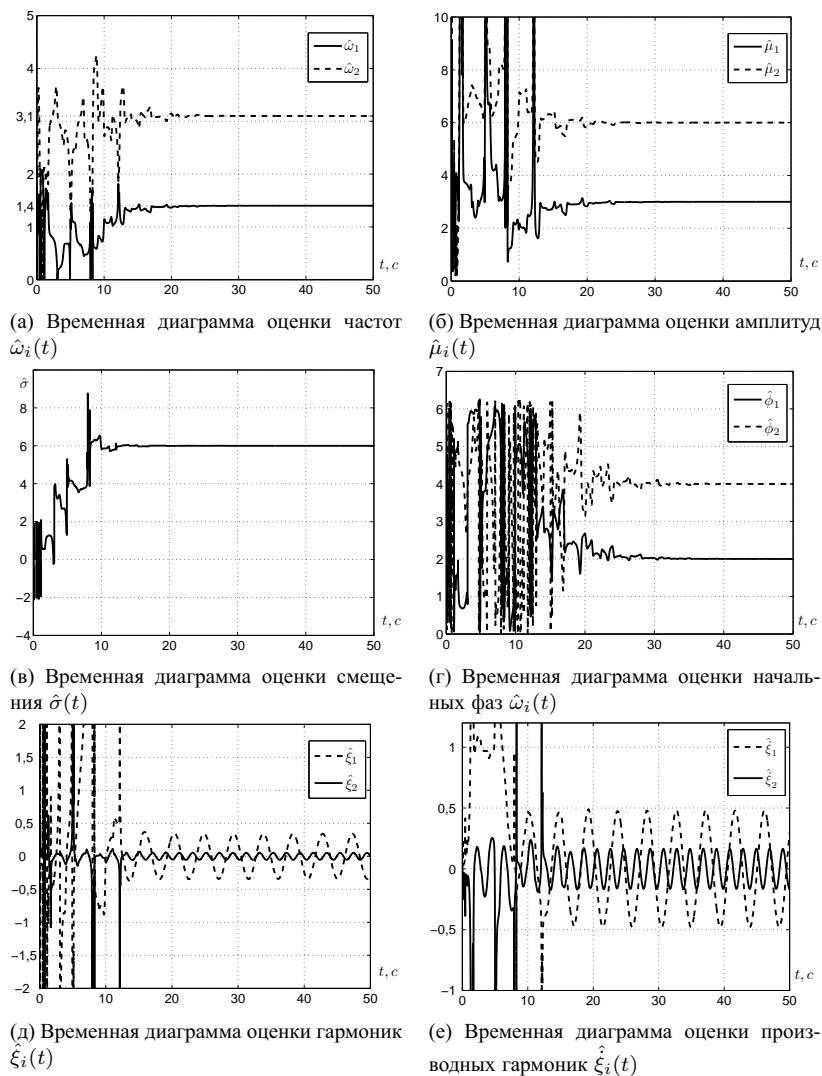


Рис. 2.5. Временные диаграммы оценки параметров сигнала  $y(t) = 6 + 3 \sin(1,4t + 2) + 6 \sin(3,1t + 4)$  и наблюдения за гармониками и их производными сигнала  $\xi(t)$  при коэффициентах идентификатора  $\lambda = 1$ ,  $k_1 = 20$ ,  $k_2 = 10$

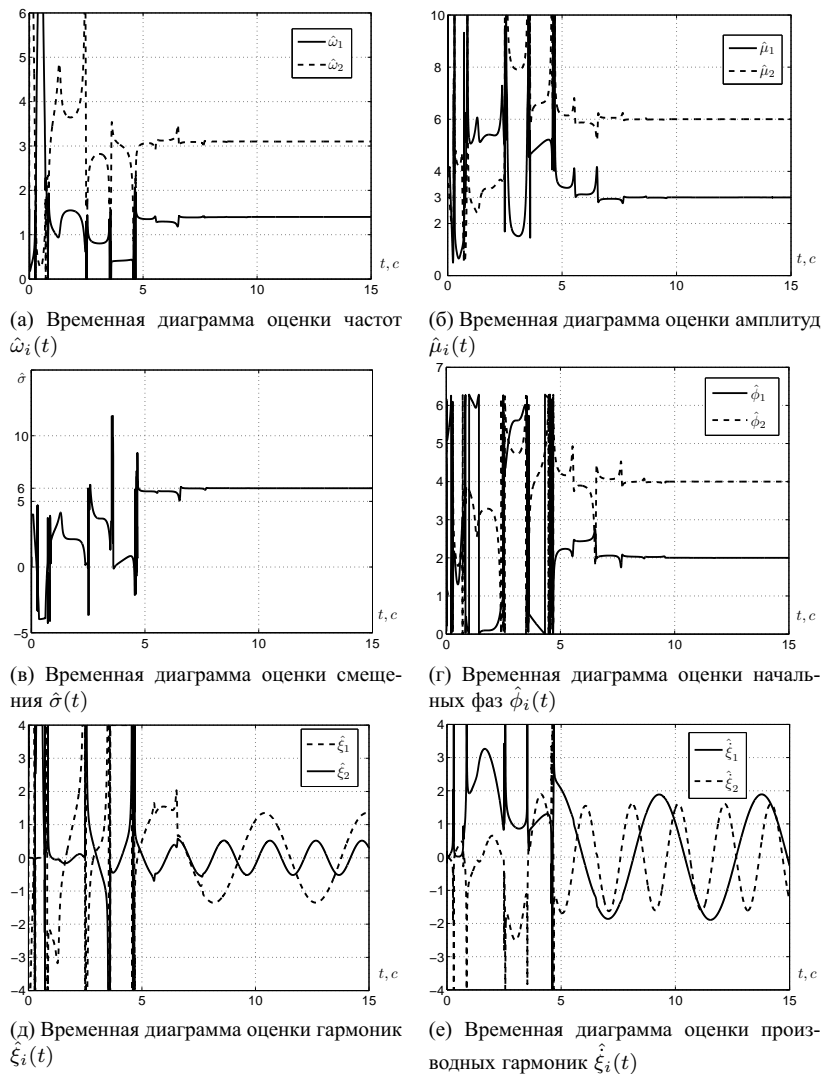


Рис. 2.6. Временные диаграммы оценки параметров сигнала  $y(t) = 6 + 3 \sin(1,4t + 2) + 6 \sin(3,1t + 4)$  и наблюдения за гармониками и их производными сигнала  $\xi(t)$  при коэффициентах идентификатора  $\lambda = 2$ ,  $k_1 = 20$ ,  $k_2 = 10$

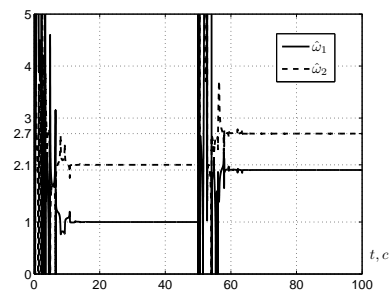
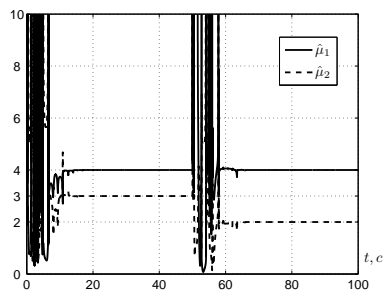
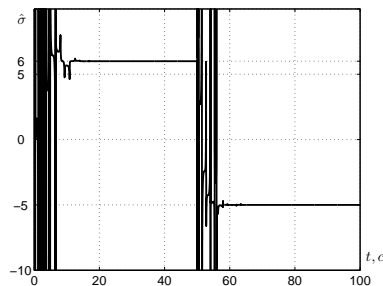
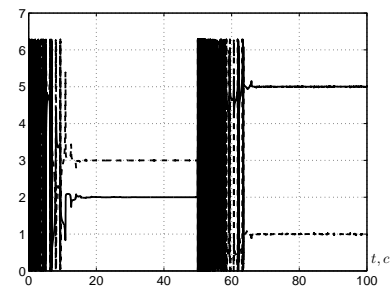
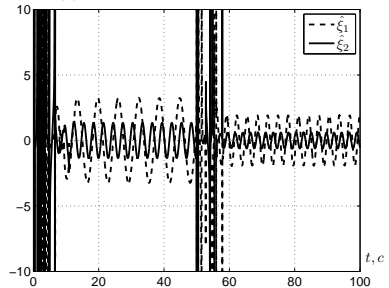
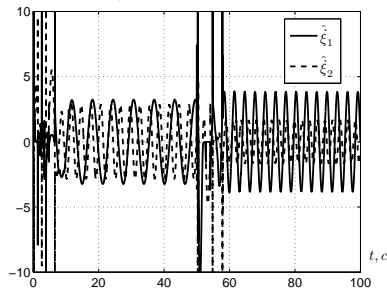
(а) Временная диаграмма оценки частот  $\hat{\omega}_i(t)$ (б) Временная диаграмма оценки амплитуд  $\hat{\mu}_i(t)$ (в) Временная диаграмма оценки смещения  $\hat{\sigma}(t)$ (г) Временная диаграмма оценки начальных фаз  $\hat{\phi}_i(t)$ (д) Временная диаграмма оценки гармоник  $\hat{\xi}_i(t)$ (е) Временная диаграмма оценки производных гармоник  $\hat{\xi}_i(t)$ 

Рис. 2.7. Временные диаграммы оценки параметров сигнала  $y(t) = 6 + 3 \sin(2,1t + 3) + 4 \sin(t + 2)$  для  $0 \leq t < 50$  и  $y = -5 + 4 \sin(2t + 5) + 2 \sin(2,7t + 1)$  для  $t \geq 50$  и наблюдения за гармониками и их производными сигнала  $\xi(t)$  при коэффициентах идентификатора  $\lambda = 2$ ,  $k_1 = 20$ ,  $k_2 = 10$

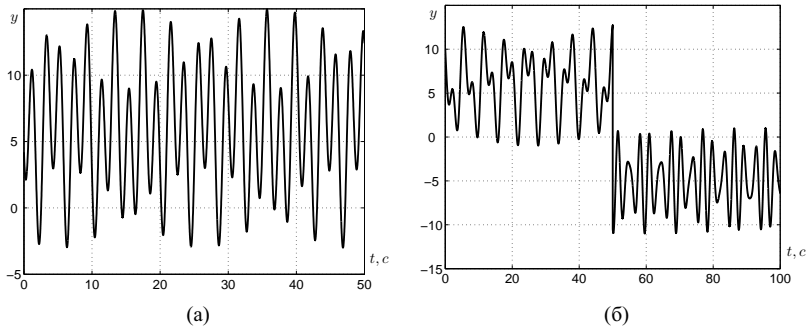
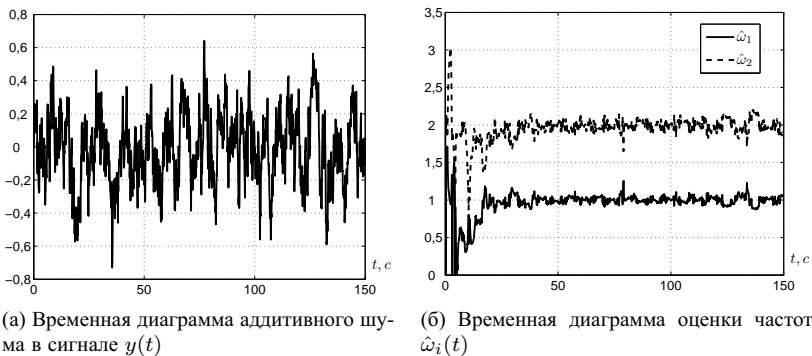


Рис. 2.8. Временные диаграммы мультигармонических сигналов  $y(t) = 6 + 3 \sin(1, 4t + 2) + 6 \sin(3, 1t + 4)$  (2.8a);  $y(t) = 6 + 3 \sin(2, 1t + 3) + 4 \sin(t + 2)$  для  $0 \leq t < 50$  и  $y = -5 + 4 \sin(2t + 5) + 2 \sin(2, 7t + 1)$  для  $t \geq 50$  (2.8б)



(а) Временная диаграмма аддитивного шума в сигнале  $y(t)$

(б) Временная диаграмма оценок частот  $\hat{\omega}_i(t)$

Рис. 2.9. Временные диаграммы аддитивного шума и оценок всех частот сигнала  $y(t) = 4 + 3 \sin(t + 3) + 4 \sin(2t + 2)$  при коэффициентах идентификатора  $\lambda = 0, 7$ ,  $k_1 = 20$ ,  $k_1 = 10$

## Глава 3

# Компенсация возмущений для систем с запаздыванием

### 3.1 Введение в проблематику

В этом разделе рассматривается задача управления неустойчивыми объектами с запаздыванием с мультигармоническим возмущением, действующим на вход и выход системы. Возмущающее воздействие характеризуется параметрической неопределенностью частот, амплитуд, начальных фаз и смещения. В разделе представлен адаптивный закон управления, который стабилизирует систему и в то же время устраняет эффект возмущений, обеспечивая стабилизацию нулевого положения равновесия и экспоненциальную сходимость к нулю всех переменных состояния.

На первом шаге синтезируется устройство оценки частот возмущения. Далее формируется наблюдатель для возмущающего воздействия, как функции времени. Затем строится закон управления, стабилизирующий объект управления с помощью предиктора для неустойчивых систем [21, 23] на основе концепции предиктора Смита [33, 34].

Известно большое количество работ, посвященных системам с запаздыванием. Наиболее важные из них связаны с входным запаздыванием в канале управления. Фундаментальные решения были представлены в [19, 20]. Однако задачи управления системами с запаздыванием и параметрически не определенными возмущениями, действующим на вход и выход объекта до сих пор остаются актуальными в силу их сложности.

Алгоритмы стабилизации для неустойчивых линейных систем с

входным запаздыванием [19,20] были модифицированы для случая компенсации неизвестных внешних возмущений и представлены в [31,32]. В этом разделе внимание будет уделено более общему случаю, когда возмущение действует на вход и выход неминимально-фазового и неустойчивого объекта, а канал управления характеризуется запаздыванием.

Проблема возмущающих воздействий, присутствующих в канале измерения может встречаться в реальных технических системах. Например, внешнее возмущение действует на объект и как-то влияет на его состояние. Регулируемые переменные значительно не изменяются, в то время как датчики обратной связи, размещенные на объекте управления, двигаются из-за внешнего возмущения. Такая проблема весьма актуальна для систем динамического позиционирования надводного судна в точке. Волновые возмущения являются причиной качки судна, антенна глобальной системы позиционирования GPS, как правило, размещается на самой верхней точке судна для лучшего приема. Из-за качки антенна GPS может перемещаться в радиусе 2-3 метров, в то время как географические координаты судна(долгота и широта) изменяются в пределах нескольких сантиметров.

Рассмотрим отдельно наиболее известные современные подходы для решения такой задачи, полученные группой итальянских ученых Р. Марино и П. Томей [24–27].

В [24] рассматривается объект управления в форме

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, \\ \dot{v}(t) &= Rv(t), v \in \mathbb{R}^{2m+1}, \\ y(t) &= cx(t) + \delta(t) = cx(t) + qv(t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

матрица с неизвестными параметрами  $R$  имеет чисто мнимые собственные числа.

В [24] синтезирован адаптивный регулятор, стабилизирующий переменные состояния  $x \in \mathbb{R}^n$  с помощью управляющего воздействия  $u(t)$ , сформированного на основе измерения только выходной переменной  $y(t) = cx(t) + \delta(t)$ . В качестве дополнения к [24] в работе [25] рассмотрена комплексная задача слежения за задающим воздействием с компенсацией неизвестных возмущений, оказывающих влияние на состояние и выходную переменную линейного стационарного неминимально-фазового объекта управления.

В этом случае рассматривался объект управления в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) + Pv, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, \\ \dot{v}(t) &= Rv(t), v \in \mathbb{R}^{2m+1},\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$e(t) = cx(t) - qv(t),\tag{3.3}$$

где  $e$  — регулируемая переменная, выходная переменная  $y = e + \delta$  доступная для измерения, и возмущение  $\delta$ , являющееся выходом динамической системы

$$\dot{w}_\delta = R_\delta w_\delta, \quad \delta = q_\delta w_\delta, \quad w_\delta \in \mathbb{R}^{r_\delta}.\tag{3.4}$$

В [26] рассмотрен минимально-фазовый объект управления вида (3.3). В [27] в развитие результата [25] авторами решена комплексная задача слежения за задающим воздействием с компенсацией неизвестных возмущений, оказывающих влияние на состояние и выходную переменную линейного стационарного минимально-фазового объекта с неизвестными параметрами.

Методы управления, предложенные в [24–26] не являются универсальными (так, например, только минимально-фазовые объекты рассмотрены в [26]) и представляются очень сложными для практической реализации. Следовательно, поиск альтернативных методов управления является актуальной проблемой.

В [13] предложен адаптивный наблюдатель для неизвестного синусоидального возмущения, действующего на выход неминимально-фазового линейного объекта. В предыдущем разделе и работах представлены усовершенствованные схемы оценивания частот мультисинусоидального сигнала [14, 31, 32].

В этом разделе будет представлен обобщающий упомянутые результаты алгоритм управления для неустойчивых систем с входным запаздыванием, параметрически не определенным мультисинусоидальным возмущением, оказывающим влияние на выходную переменную объекта.



## 3.2 Постановка задачи

Рассмотрим объект управления вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - D) + B\delta(t), \quad (3.5)$$

$$y(t) = Cx(t) + \alpha\delta(t), \quad (3.6)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — неизмеряемый вектор состояния,  $y(t) \in \mathbb{R}$  — регулируемая переменная, доступная для измерения,  $u(t) \in \mathbb{R}$  — управляющее воздействие с начальными условиями в блоке запаздывания  $u(t - D) = 0$  при  $t < D$ ,  $D \geq 0$  — известное постоянное запаздывание,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  матрицы соответствующих размерностей с известными параметрами,  $\alpha$  — известное число.

Возмущающее воздействие  $\delta(t)$  имеет вид:

$$\delta(t) = \sigma + \sum_{i=1}^k [\mu_i \sin(\omega_i t) + \nu_i \cos(\omega_i t)], \quad (3.7)$$

и представляет собой сумму  $k$  синусоид  $\delta_i(t)$  с неизвестными амплитудами  $\mu_i$  и  $\nu_i$ , частотами  $\omega_i$ , и  $\sigma$  — смещение.

Целью является поиск такого закона управления  $u(t)$ , который обеспечивает выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad (3.8)$$

с учетом следующих допущений:

**Допущение 3.1** *Параметры  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $\alpha$  известны.*

**Допущение 3.2** *Тройка матриц  $(A, B, C)$  полностью управляемая и наблюдаемая.*

**Допущение 3.3** *Нижняя граница частот известна.*

## 3.3 Оценивание частот

Первая цель — это построение устройства оценки и алгоритма компенсации возмущения. Рассмотрим линейный наблюдатель следующего

вида

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = A\hat{x}_1(t) + Bu(t - D) + L\tilde{y}_1(t), \quad (3.9)$$

$$\hat{y}_1(t) = C\hat{x}_1(t). \quad (3.10)$$

Тогда для невязки имеем

$$\tilde{x}_1(t) = x(t) - \hat{x}_1(t), \quad (3.11)$$

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = (A - LC)\tilde{x}_1(t) + B\delta(t) - L\alpha\delta(t), \quad (3.12)$$

$$\tilde{y}_1(t) = y(t) - \hat{y}(t) = C\tilde{x}(t) + \alpha\delta(t), \quad (3.13)$$

где вектор-строка  $L$  выбирается из условия гурвицевости матрицы  $A - LC$ .

Выполняя преобразование Лапаласа в (3.12), найдем изображение для невязки наблюдателя вектора состояний

$$\tilde{x}_1(s) = (sI - (A - LC))^{-1} [(B - L\alpha)\delta(s) + \tilde{x}_1(0)], \quad (3.14)$$

где  $s$  — комплексное число или оператор Лапласа,  $\tilde{x}_1(s) = \mathcal{L}\{\tilde{x}_1(t)\}$  — изображение по Лапласу для функции  $\tilde{x}_1(t)$ .

Используя (3.13) и (3.14) получим выражение для  $\tilde{y}_1(t)$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(s) &= [C(sI - (A - LC))^{-1}(B - L\alpha) + \alpha]\delta(s) \\ &\quad + C(sI - (A - LC))^{-1}\tilde{x}_1(0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из (3.7) найдем  $\delta(s)$

$$\delta(s) = \sigma \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^k \mu_i \frac{\omega_i}{s^2 + \omega_i^2} + \nu_i \frac{s}{s^2 + \omega_i^2}. \quad (3.16)$$

Так как матрица  $A - LC$  гурвицева, то после обратного преобразования Лапласа для (3.15) получим

$$\tilde{y}_1(t) = \bar{\sigma} + \bar{\varepsilon}(t) + \sum_{i=1}^k [\bar{\mu}_i \sin(\omega_i t) + \bar{\nu}_i \cos(\omega_i t)], \quad (3.17)$$

где  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\mu}_i$ ,  $\bar{\phi}_i$  — константы и  $\bar{\varepsilon}(t)$  — экспоненциально затухающая функция. Так как  $\varepsilon(t)$  — результат переходного процесса в устойчивой системе с гурвицевой матрицей состояния, то эта функция представляет

собой сумму затухающих экспонент, умноженных на константы, синусоиды или полиномиальные функции времени. Таким образом, производные этих функций также экспоненциально затухают.

Следуя методике, представленной в [9, 14, 31, 32], используем сигнал  $\tilde{y}_1$  для оценки частот возмущения. Введем в рассмотрение фильтр

$$\xi(s) = \frac{\lambda_0^{2k}}{\gamma(s)} \tilde{y}_1(s), \quad (3.18)$$

где  $\lambda_0 > 0$ ,  $\gamma(s) = s^{2k} + \gamma_{2k-1}s^{2k-1} + \dots + \gamma_1s + \gamma_0$  — гурвицев полином с  $2k$  различными собственными числами  $\lambda_j, j = 1, \dots, 2k$ . Пусть  $\gamma_0 = \lambda_0^{2k}$  и  $\lambda = \min_{j=1, \dots, 2k} \{|\operatorname{Re} \lambda_j|\}$ .

*Лемма 3.1 Для фильтра (3.18) и входного сигнала (3.17) будет выполнено соотношение*

$$\xi^{(2k+1)}(t) = \Omega^T(t)\bar{\Theta} + \varepsilon(t), \quad (3.19)$$

где  $\Omega^T(t) = [\xi^{(2k-1)}(t) \ \dots \ \xi^{(3)}(t) \ \xi^{(1)}(t)]$  — регрессор, составленный из функций  $\xi^{(j)}(t)$ , являющихся производными выходной переменной фильтра (3.18)

$$\xi^{(j)}(s) = \frac{\lambda_0^2 s^j}{\gamma(s)} \tilde{y}_1(s), \quad (3.20)$$

и  $\bar{\Theta}^T = [\bar{\theta}_1 \ \dots \ \bar{\theta}_{k-1} \ \bar{\theta}_k]$  — вектор параметров, зависящий от частот

$$\begin{cases} \bar{\theta}_1 = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_k, \\ \bar{\theta}_2 = -\theta_1\theta_2 - \theta_1\theta_3 - \dots - \theta_{k-1}\theta_k, \\ \vdots \\ \bar{\theta}_k = (-1)^{k+1}\theta_1\theta_2 \dots \theta_k. \end{cases} \quad (3.21)$$

где  $\theta_i = -\omega_i^2$ , функция  $|\varepsilon(t)| \leq \rho_0 e^{-\lambda t}$  и ее производные ограничены и экспоненциально стремятся к нулю.

*Доказательство.* Хорошо известно, что сигнал (3.17) является решением дифференциального уравнения

$$p^{2k+1}\tilde{y}_1(t) = \bar{\theta}_1 p^{2k-1}\tilde{y}_1(t) + \dots + \bar{\theta}_k p\tilde{y}_1(t) + \varepsilon_1(t), \quad (3.22)$$

где  $p = d/dt$  оператор дифференцирования,  $\varepsilon_1(t)$  — экспоненциально затухающая функция времени, связанная с  $\bar{\varepsilon}(t)$  в (3.17).

Выполняя преобразование Лапласа в (3.22), найдем

$$s^{2k+1}\tilde{y}_1(s) = \bar{\theta}_1 s^{2k-1}\tilde{y}_1(s) + \dots + \bar{\theta}_k s\tilde{y}_1(s) + d(s), \quad (3.23)$$

где полином  $d(s)$  обозначает начальные условия и члены, обусловленные функцией  $\varepsilon_1(t)$ .

Умножая (3.23) на  $\frac{\lambda_0^{2k}}{\gamma(s)}$  с учетом (3.18), получим

$$s^{2k+1}\xi(s) = \bar{\theta}_1 s^{2k-1}\xi(s) + \dots + \bar{\theta}_k s\xi(s) + \frac{\lambda_0^{2k}}{\gamma(s)}d(s). \quad (3.24)$$

После обратного преобразования Лапласа в (3.24) найдем искомое уравнение (3.19), где  $\varepsilon(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{\lambda_0^{2k}d(s)}{\gamma(s)}\}$ . В силу структуры полинома  $\gamma(s)$  функция  $\varepsilon(t)$  может быть представлена как сумма затухающих экспонент. Производные этих функций также экспоненциально стремятся к нулю.

*Замечание 3.1* Так как  $\theta_i$  является корнем полинома  $q^{2k} + \bar{\theta}_1 q^{2k-2} + \dots + \bar{\theta}_{k-1} q^2 + \bar{\theta}_k$ , где  $q$  — некоторая алгебраическая переменная, то можно рассчитать значения  $\theta_i$  на основе  $\bar{\theta}_i$ .

Алгоритм для адаптивного оценивания частот представлен в следующей теореме theorem.

**Теорема 3.1** Алгоритм настройки

$$\hat{\omega}_i = \sqrt{|\hat{\theta}_i|}, \quad (3.25)$$

где оценки  $\theta_i$  рассчитаны на основе  $\hat{\hat{\theta}}_i$ , являющихся элементами вектора  $\hat{\hat{\Theta}}$ :

$$\hat{\hat{\Theta}} = \Upsilon(t) + K\Omega(t)\xi^{(2k)}(t), \quad (3.26)$$

$$\dot{\Upsilon}(t) = -K\Omega(t)\Omega^T(t)\hat{\hat{\Theta}}(t) - K\dot{\Omega}(t)\xi^{(2k)}(t), \quad (3.27)$$

где  $K = \text{diag}\{k_i > 0, i = \overline{1, k}\}$ , обеспечивает экспоненциальную сходимость ошибок оценивания  $\tilde{\omega}_i = \omega_i - \hat{\omega}_i$  нулю:

$$|\tilde{\omega}_i(t)| \leq \rho_1 e^{-\beta_1 t}, \quad \rho_1, \beta_1 > 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.28)$$

*Доказательство.* Используя результат леммы 3.1, вычислим производную ошибки оценивания  $\ddot{\tilde{\Theta}} = \dot{\tilde{\Theta}} - \dot{\hat{\Theta}}$ :

$$\begin{aligned}
 \ddot{\tilde{\Theta}}(t) &= \dot{\tilde{\Theta}} - \dot{\hat{\Theta}}(t) \\
 &= -\dot{\Upsilon}(t) - K\dot{\Omega}(t)\xi^{(2k)} - K\Omega(t)\xi^{(2k+1)} \\
 &= K\Omega(t)\Omega^T(t)\dot{\tilde{\Theta}}(t) + K\dot{\Omega}(t)\xi^{(2k)}(t) \\
 &\quad - K\dot{\Omega}(t)\xi^{(2k)} - K\Omega(t)\xi^{(2k+1)} \\
 &= K\Omega(t)\Omega^T(t)\dot{\tilde{\Theta}}(t) - K\Omega(t)(\Omega^T(t)\bar{\Theta} + \varepsilon(t)) \\
 &= -K\Omega(t)\Omega^T(t)\ddot{\tilde{\Theta}}(t) - K\Omega(t)\varepsilon(t). \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

С использованием функции Ляпунова  $V(t) = \ddot{\tilde{\Theta}}^T K^{-1} \ddot{\tilde{\Theta}}/2$  нетрудно видеть из (3.29), что производная  $\dot{V}(t)$  является неположительной. Исходя из этого следует лишь то, что ошибка  $\ddot{\tilde{\Theta}}$  стремится к некоторому вектору констант, и необязательно к нулю.

Временно предположим, что  $\varepsilon = 0$ . Хорошо известно, что если регрессор  $\Omega(t)$  удовлетворяет условию предельной интегральной невырожденности или неисчезающего возбуждения, то  $\ddot{\tilde{\Theta}}$  как решение уравнения

$$\ddot{\tilde{\Theta}}(t) = -K\Omega(t)\Omega^T(t)\ddot{\tilde{\Theta}}(t)$$

экспоненциально стремится к нулю (см. Теорему 4.3.2 в [17]).

Так как  $|\varepsilon(t)| \leq \rho_0 e^{-\lambda t}$  — экспоненциально затухающая функция времени, то можно показать, что с учетом принципа сравнения [18] для любой экспоненциально затухающей функции  $\varepsilon$  ошибка оценивания  $\ddot{\tilde{\Theta}}$  экспоненциально сходится к нулю в системе (3.29)

$$\|\ddot{\tilde{\Theta}}(t)\| \leq \rho_2 e^{-\beta_2 t}, \quad \rho_2, \beta_2 > 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.30}$$

Согласно замечанию 3.1 зафиксируем, что вектор оценок  $\theta_i$  является доступным для системы управления на основе  $\bar{\theta}_i$ . Так как вычисление  $\theta_i$  на основе  $\bar{\theta}_i$  может быть рассмотрена как алгебраическая задача, то ошибки оценивания  $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$  также сходятся к нулю и ограничены экспоненциально затухающими функциями времени.

Частоты мультигармонического могут вычислены по формуле (3.25). Покажем, что ошибки оценивания частот  $\tilde{\omega}_i = \omega_i - \hat{\omega}_i$  для (3.25)

сходятся к нулю экспоненциально быстро (3.28)

$$\tilde{\omega}_i(t) = \sqrt{|\tilde{\theta}_i(t) + \hat{\theta}_i(t)|} - \sqrt{|\hat{\theta}_i(t)|} \leq \sqrt{|\tilde{\theta}_i(t)|}. \quad (3.31)$$

$$\tilde{\omega}_i(t) = \sqrt{|\theta_i|} - \sqrt{|\theta_i(t) - \tilde{\theta}_i(t)|} \geq -\sqrt{|\tilde{\theta}_i(t)|}. \quad (3.32)$$

$$|\tilde{\omega}_i(t)| \leq \sqrt{|\tilde{\theta}_i(t)|} \leq \rho_1 e^{-\beta_1 t}, \quad (3.33)$$

где  $\rho_1$  и  $\beta_1$  зависят от  $\rho_2$  и  $\beta_2$ .

### 3.4 Наблюдатель возмущения

На следующем шаге необходимо построить наблюдатель возмущения  $\delta(t)$  и упреждающей оценки  $\delta(t + D)$ , необходимые в задаче компенсации.

Основная проблема заключается в том, что параметры возмущения неизвестны. В первую очередь решим задачу оценки неизвестных параметров  $\sigma$ ,  $\mu_i$  и  $\nu_i$ . Используя  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\mu}_i$  и  $\hat{\nu}_i$ , будет нетрудно построить наблюдатель возмущения  $\delta(t)$  в виде

$$\hat{\delta}(t) = \hat{\sigma} + \sum_{i=1}^k [\hat{\mu}_i \sin(\hat{\omega}_i t) + \hat{\nu}_i \cos(\hat{\omega}_i t)]. \quad (3.34)$$

Второй наблюдатель для упреждающей оценки можем найти, воспользовавшись (3.34):

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(t + D) &= \hat{\sigma} + \sum_{i=1}^k [\hat{\mu}_i \sin(\hat{\omega}_i(t + D)) + \hat{\nu}_i \cos(\hat{\omega}_i(t + D))] \\ &= \hat{\sigma} + \sum_{i=1}^k [\kappa_i \sin(\hat{\omega}_i t) + \zeta_i \cos(\hat{\omega}_i t)], \end{aligned} \quad (3.35)$$

где

$$\kappa_i = \hat{\mu}_i \cos(\hat{\omega}_i D) - \hat{\nu}_i \sin(\hat{\omega}_i D), \quad (3.36)$$

$$\zeta_i = \hat{\mu}_i \sin(\hat{\omega}_i D) + \hat{\nu}_i \cos(\hat{\omega}_i D). \quad (3.37)$$

Следующий шаг и основная часть этого раздела — это синтез алгоритмов оценивания для параметров  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\mu}_i$  и  $\hat{\nu}_i$ .

Из (3.15) имеем

$$\tilde{y}_1(t) = \left[ \frac{b(p)}{a(p)} \right] \delta(t) + \bar{\varepsilon}(t), \quad (3.38)$$

где  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования, и передаточная функция

$$\frac{b(p)}{a(p)} = C(pI - (A - LC))^{-1}(B - L\alpha) + \alpha. \quad (3.39)$$

**Допущение 3.4** *Необходимо ввести дополнительное допущение о том, что полином  $b(p)$  не имеет чисто мнимых корней, то есть таких корней, действительная часть которых равна нулю.*

### 3.4.1 Выделение гармоник

Из (3.18) получим

$$\xi(t) = \left[ \frac{\lambda_0}{\gamma(p)} \right] \left( \left[ \frac{b(p)}{a(p)} \right] \delta(t) + \bar{\varepsilon}(t) \right). \quad (3.40)$$

Используя (3.40), запишем  $\xi$  в следующем виде:

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \varepsilon_2(t) + \sum_{i=1}^k \xi_i(t), \quad (3.41)$$

где  $\xi_0$  — константа,  $\xi_i$  — синусоидальная функция времени с частотой  $\omega_i$ , и  $\varepsilon_\xi$  — экспоненциально сходящаяся к нулю функция времени.

Далее найдем соотношение между  $\xi_0$ ,  $\xi_i$  и возмущением  $\delta$  с учетом (3.40), выполняя замену  $p = j\omega$ , где  $j$  — комплексная единица.

$$\xi_0(t) = \sigma \frac{b_0}{a_0}, \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= M_i \mu_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) + M_i \nu_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \\ &= \begin{bmatrix} \mu_i & \nu_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \\ M_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где

$$M_i = \left| \frac{\lambda_0}{\gamma(j\omega_i)} \frac{b(j\omega_i)}{a(j\omega_i)} \right|, \quad (3.44)$$

$$\varphi_i = \arg \left( \frac{\lambda_0}{\gamma(j\omega_i)} \frac{b(j\omega_i)}{a(j\omega_i)} \right). \quad (3.45)$$

Переменную  $\xi(t)$  представим в виде сумм гармоник:

$$\xi(t) = \xi_0 + \xi_1(t) + \xi_2(t) + \dots + \xi_k(t). \quad (3.46)$$

После дифференцирования (3.46)  $2k$  раз, получим две системы из  $k$  линейных уравнений:

$$\begin{cases} \xi^{(1)}(t) = \dot{\xi}_1(t) + \dot{\xi}_2(t) + \dots + \dot{\xi}_k(t), \\ \xi^{(3)}(t) = \theta_1 \dot{\xi}_1(t) + \theta_2 \dot{\xi}_2(t) + \dots + \theta_k \dot{\xi}_k(t), \\ \vdots \\ \xi^{(2k-1)}(t) = \theta_1^{k-1} \dot{\xi}_1(t) + \dots + \theta_k^{k-1} \dot{\xi}_k(t), \end{cases} \quad (3.47)$$

и

$$\begin{cases} \xi^{(2)}(t) = \theta_1 \xi_1(t) + \theta_2 \xi_2(t) + \dots + \theta_k \xi_k(t), \\ \xi^{(4)}(t) = \theta_1^2 \xi_1(t) + \theta_2^2 \xi_2(t) + \dots + \theta_k^2 \xi_k(t), \\ \vdots \\ \xi^{(2k)}(t) = \theta_1^k \xi_1(t) + \theta_2^k \xi_2(t) + \dots + \theta_k^k \xi_k(t). \end{cases} \quad (3.48)$$

Из (3.46) и (3.48) можем получить реализуемую схему оценивания для переменных  $\xi_0$  и  $\xi_i(t)$ :

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}_1(t) \\ \hat{\xi}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\xi}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \dots & \hat{\theta}_k \\ \hat{\theta}_1^2 & \dots & \hat{\theta}_k^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^k & \dots & \hat{\theta}_k^k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi^{(2)}(t) \\ \xi^{(4)}(t) \\ \vdots \\ \xi^{(2k)}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

и

$$\hat{\xi}_0 = \xi(t) - \sum_{i=1}^k \hat{\xi}_i(t). \quad (3.50)$$



### 3.4.2 Оценка амплитуд

Начнем этот раздел с уравнения, с помощью которого можно вычислить смещение, основываясь на (3.42) и (3.50)

$$\hat{\sigma} = \frac{a_0}{b_0} \hat{\xi}_0(t). \quad (3.51)$$

Для оценки амплитуд  $\mu_i$  и  $\nu_i$  рассмотрим уравнение (3.43). Такое уравнение является типовой регрессионной моделью, где  $\xi_i(t)$  — измеряемые функции,  $\mu_i$  и  $\nu_i$  — неизвестные искомые параметры, и  $\varsigma_i(t) = \begin{bmatrix} M_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \\ M_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \end{bmatrix}$  — регрессор.

К сожалению, регрессор  $\varsigma_i$  не может быть вычислен напрямую в силу неопределенностей  $M_i$  и  $\varphi_i$ . На следующем шаге покажем, как сделать доступным регрессор без сложных вычислений частотных функций  $M_i$  и  $\varphi_i$ .

Введем в рассмотрение вспомогательную переменную

$$\Delta(t) = \sum_{i=0}^k \sin(\omega_i t). \quad (3.52)$$

Далее рассмотрим вспомогательный фильтр

$$\vartheta(t) = \left[ \frac{\lambda_0}{\gamma(p)} \frac{b(p)}{a(p)} \right] \Delta(t). \quad (3.53)$$

*Замечание 3.2* Следует отметить, что так как передаточная функция  $\frac{\lambda_0}{\gamma(p)} \frac{b(p)}{a(p)}$  имеет относительную степень больше, чем  $2k$ , то технически возможно из фильтра (3.53) получить все производные выходного сигнала  $\vartheta(t)$  вплоть до  $\vartheta^{(2k)}(t)$ .

Нетрудно видеть, что переменная  $\vartheta(t)$  представляет собой сумму синусоид с теми же частотами  $\omega_i$  и экспоненциально затухающего члена, описывающего переходный процесс.

$$\vartheta(t) = \sum_{i=1}^k \vartheta_i(t) + \varepsilon_3(t), \quad (3.54)$$

Выполняя подобные вычисления в (3.40), (3.43), (3.44), (3.45), получим выражение для переменных  $\vartheta_i(t)$ :

$$\vartheta_i(t) = M_i \sin(\omega_i t + \varphi_i). \quad (3.55)$$

Производные  $\dot{\vartheta}_i(t)$ , соответственно, равны

$$\dot{\vartheta}_i(t) = \omega_i M_i \cos(\omega_i t + \varphi_i). \quad (3.56)$$

Используя алгоритм выделения гармоник (3.47)-(3.49), можно получить алгоритм оценивания для всех компонент регрессоров  $\varsigma_i$

$$\begin{bmatrix} \hat{\vartheta}_1(t) \\ \hat{\vartheta}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\vartheta}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \cdots & \hat{\theta}_k \\ \hat{\theta}_1^2 & \cdots & \hat{\theta}_k^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^k & \cdots & \hat{\theta}_k^k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vartheta^{(2)}(t) \\ \vartheta^{(4)}(t) \\ \vdots \\ \vartheta^{(2k)}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\dot{\vartheta}}_1(t) \\ \hat{\dot{\vartheta}}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\dot{\vartheta}}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \hat{\theta}_1 & \cdots & \hat{\theta}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^{k-1} & \cdots & \hat{\theta}_k^{k-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vartheta^{(1)}(t) \\ \vartheta^{(3)}(t) \\ \vdots \\ \vartheta^{(2k-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

*Замечание 3.3* Обратные матрицы в (3.49), (3.57) и (3.58) существуют, если возмущение  $\delta(t)$  имеет не менее  $k$  гармоник с частотами, отличными друг от друга. Так как функции  $\hat{\theta}_i$  экспоненциально сходятся к  $\theta_i$ , то нетрудно показать, что ошибки  $\tilde{\xi}_0 = \xi_0 - \hat{\xi}_0$ ,  $\tilde{\xi}_i = \xi_i(t) - \hat{\xi}_i(t)$  и  $\tilde{\dot{\xi}}_i(t) = \dot{\xi}_i(t) - \dot{\hat{\xi}}_i(t)$  также сходятся к нулю экспоненциально быстро.

Таким образом получен алгоритм вычисления компонент регрессоров  $\varsigma_i(t)$

$$\hat{\varsigma}_i^T(t) = \begin{bmatrix} \hat{\vartheta}_i(t) & \frac{\hat{\dot{\vartheta}}_i(t)}{\eta_i(t)} \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

$$\eta_i(t) = \begin{cases} \hat{\omega}_i(t), & \text{если } \hat{\omega}_i \geq \omega_0, \\ \omega_0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.60)$$

В итоге можем записать алгоритм оценивания амплитуд  $\mu_i$  и  $\nu_i$ , используя стандартный градиентный алгоритм [17] для регрессионных моделей (3.43)

$$\dot{\hat{\mu}}_i(t) = k_\mu \hat{\nu}_i(t) \left( \hat{\xi}_i(t) - \hat{\mu}_i(t) \hat{\nu}_i(t) - \hat{\nu}_i(t) \frac{\hat{\vartheta}_i(t)}{\eta_i(t)} \right), \quad (3.61)$$

$$\dot{\hat{\nu}}_i(t) = k_\nu \frac{\hat{\vartheta}_i(t)}{\eta_i(t)} \left( \hat{\xi}_i(t) - \hat{\mu}_i(t) \hat{\nu}_i(t) - \hat{\nu}_i(t) \frac{\hat{\vartheta}_i(t)}{\eta_i(t)} \right), \quad (3.62)$$

где  $k_\mu, k_\nu > 0$  и  $\eta_i(t)$  определены выше в (3.60).

Анализ ошибок оценивания  $\tilde{\mu}_i = \mu_i - \hat{\mu}_i$  и  $\tilde{\nu}_i = \nu_i - \hat{\nu}_i$  дает такие же вычисления как и в теореме 3.1 в формуле (3.29) с соответствующими выводами. С целью сокращения объема пособия сократим дублирование этого фрагмента. Заметим только, что ошибки оценивания  $\tilde{\mu}_i$  и  $\tilde{\nu}_i$  экспоненциально сходятся к нулю [17]. Такой же факт нетрудно установить для невязок  $\tilde{\delta}_1(t) = \delta(t) - \hat{\delta}(t)$  и  $\tilde{\delta}_2(t) = \delta(t + D) - \hat{\delta}(t + D)$ .

Таким образом, получено два наблюдателя  $\hat{\delta}(t)$  и  $\hat{\delta}(t + D)$ , использующие оценки  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\mu}_i$  и  $\hat{\nu}_i$ . Все необходимые алгоритмы для вычисления этих оценок представлены выше.

### 3.5 Синтез закона управления

В этом разделе представлен закон управления, который обеспечивает стабилизацию замкнутой системы и сходимости к нулю всех переменных состояния.

Регулятор выбирается в виде

$$u(t) = -\hat{\delta}(t + D) + \psi(t), \quad (3.63)$$

где наблюдатель  $\hat{\delta}(t)$  строится согласно (3.34) и  $\psi(t)$  — дополнительное управляющее воздействие, которое будет определено далее с целью стабилизации замкнутой системы.

Подставляя (3.63) в (3.5) получим

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\psi(t - D) + B\tilde{\delta}_1(t). \quad (3.64)$$

Основываясь на (3.64), рассмотрим дополнительный наблюдатель переменных состояния.

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = A\hat{x}_2 + B\psi(t - D) + L\tilde{y}_2(t), \quad (3.65)$$

$$\hat{y}_2(t) = C\hat{x}_2(t) + \alpha\hat{\delta}(t), \quad (3.66)$$

Модель невязки  $\tilde{x}_2(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  с учетом (3.5), (3.6), (3.65), (3.66) имеет вид

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = (A - LC)\tilde{x}_2(t) + B\tilde{\delta}_1(t) - L\alpha\tilde{\delta}_2(t), \quad (3.67)$$

$$\tilde{y}_2(t) = C\tilde{x}_2(t) + \alpha\tilde{\delta}_2(t). \quad (3.68)$$

Так как система (3.67) и (3.68) линейная, матрица  $A - LC$  гурвицева, и функции  $\tilde{\delta}_1(t)$  и  $\tilde{\delta}_2(t)$  экспоненциально затухают, то нетрудно видеть, что ошибки  $\tilde{x}_2(t)$  и  $\tilde{y}_2(t)$  сходятся к нулю

$$\|\tilde{x}_2(t)\| \leq \rho_4 e^{-\beta_4 t}, \quad |\tilde{y}_2(t)| \leq \rho_5 e^{-\beta_5 t}, \quad (3.69)$$

где  $\rho_4, \beta_4, \rho_5, \beta_5 > 0$ .

Таким образом, получен наблюдатель переменных состояния объекта (3.5), (3.6) такой, что все оценки экспоненциально сходятся к реальным переменным состояниям. Второй наблюдатель (3.65), (3.66) будем использовать для синтеза закона управления.

Следуя подходу [20, 31, 32], рассмотрим модель запаздывания в виде уравнения в частных производных (см. рисунок 3.1)

$$\Psi_t(z, t) = \Psi_z(z, t), \quad 0 < z < D \quad (3.70)$$

$$\Psi(D, t) = \psi(t) \quad (3.71)$$

с начальными условиями  $\Psi(z, 0) = \psi(z - D)$ . Решение такого уравнения имеет вид  $\Psi(z, t) = \psi(t + z - D)$ , и, следовательно,  $\Psi(0, t) = \psi(t - D)$  определяет запаздывающее управление. Можем переписать (3.64) в виде

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\Psi(0, t) + B\tilde{\delta}_1(t). \quad (3.72)$$

Используя алгоритм бэкстеппинг (подробно описанный в [20] и при-

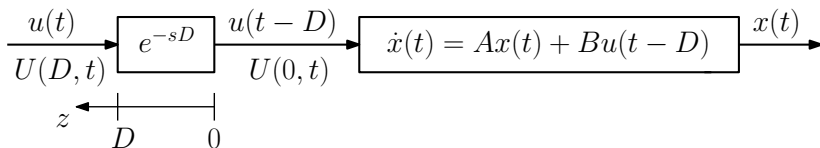


Рис. 3.1. Линейный объект с запаздыванием в канале управления

меняемый в [31, 32]), рассмотрим бэкстеппинг-преобразование

$$\begin{aligned}
 W(z, t) = & \Psi(z, t) - Ke^{Az} \hat{x}_2(t) \\
 & - K \int_0^z e^{A(z-\tau)} B \Psi(\tau, t) d\tau \\
 & + K \int_z^D e^{A(z+D-\tau)} L \tilde{Y}(\tau, t) d\tau,
 \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\tilde{Y}(z, t) = \tilde{y}_2(t + z - D), \quad (3.74)$$

$$\tilde{Y}_t(z, t) = \tilde{Y}_z(z, t), \quad (3.75)$$

$$\tilde{Y}(D, t) = \tilde{y}_2(t). \quad (3.76)$$

и закон управления

$$\psi(t) = Ke^{AD} \hat{x}_2(t) + K \int_0^D e^{A(D-\tau)} B \Psi(\tau, t) d\tau. \quad (3.77)$$

*Лемма 3.2* Бэкстеппинг-преобразование (3.73) и закон управления (3.77) преобразуют исходный объект управления (3.72) в устойчивую систему

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + BW(0, t) + B\varepsilon_2(t), \quad (3.78)$$

$$W_t(z, t) = W_z(z, t), \quad (3.79)$$

$$W(D, t) = 0, \quad (3.80)$$

где член  $w(0, t)$  сходится к нулю за конечное время, вектор-столбец  $K$  обеспечивает гурвицевость матрицы  $A + BK$ , и  $\varepsilon_2(t)$  — экспоненциально затухающий член.

*Доказательство.* Вычислим производную (3.73) по времени и

пространственной координате

$$\begin{aligned}
 W_z(z, t) &= \Psi_z(z, t) - K A e^{Az} \hat{x}_2(t) - K B \Psi(z, t) \\
 &\quad - K A \int_0^x e^{A(z-\tau)} B \Psi(\tau, t) d\tau - K e^{AD} L \tilde{Y}(z, t) \\
 &\quad + K A \int_z^D e^{A(z+D-\tau)} L \tilde{Y}(\tau, t) d\tau,
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
 W_t(z, t) &= \Psi_t(z, t) - K e^{Az} \dot{\hat{x}}_2(t) \\
 &\quad - K \int_0^z e^{A(z-\tau)} B \Psi_t(\tau, t) d\tau \\
 &\quad + K \int_z^D e^{A(z+D-\tau)} L \tilde{Y}_t(\tau, t) d\tau \\
 &= \Psi_z(z, t) - K A e^{Az} \hat{x}_2(t) - K B \Psi(z, t) \\
 &\quad - K e^{Az} B \Psi(0, t) - K e^{Az} L \tilde{Y}(D, t) \\
 &\quad + K e^{Az} B \Psi(0, t) + K e^{Az} L \tilde{Y}(D, t) \\
 &\quad - K A \int_0^z e^{A(z-\tau)} B \Psi(\tau, t) d\tau - K e^{AD} L \tilde{Y}(z, t) \\
 &\quad + K A \int_z^D e^{A(z+D-\tau)} L \tilde{Y}(\tau, t) d\tau \\
 &= W_z(z, t).
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Подстановка  $z = D$  в (3.73) дает (3.80). Выбирая  $z = 0$  в (3.73) и далее подставляя  $\Psi(0, t)$  в (3.64), получим

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + BW(0, t) + B\tilde{\delta}_1(t) \\
 &\quad - BK\tilde{x}_2(t) - BK \int_0^D e^{A(D-\tau)} L \tilde{Y}(\tau, t) d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

Из (3.69) найдем, что члены  $\tilde{x}_2(t)$  и  $\tilde{y}_2(t)$  сходятся к нулю и ограничены экспоненциально затухающими функциями времени. Такой же факт несложно установить для выражения  $K \int_0^D e^{A(D-\tau)} L \tilde{Y}(\tau, t) d\tau$ . Завершая доказательство, обозначим

$$\varepsilon_2(t) = \tilde{\delta}_1(t) - K\tilde{x}_2(t) - K \int_0^D e^{A(D-\tau)} L \tilde{Y}(\tau, t) d\tau. \tag{3.84}$$

Следуя [19, 31, 32], рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \frac{\gamma}{2} \int_0^D (1+z)W(z, t)^2 dz, \quad (3.85)$$

где  $P = P^T > 0$  — решение матричного уравнения Ляпунова

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P = -Q \quad (3.86)$$

для произвольной матрицы  $Q = Q^T > 0$ , и  $\gamma$  — положительное число.

После дифференцирования (3.85) получим

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= x^T(t)(P(A + BK) + (A + BK)^T P)x(t) \\ &\quad + 2x^T PBW(0, t) + 2x^T PB\varepsilon_2(t) \\ &\quad - \frac{\gamma}{2}W(0, t)^2 - \frac{\gamma}{2} \int_0^D W(z, t)^2 dz \\ &\leq -x^T(t)Qx(t) + \frac{4}{\gamma}x^T(t)PBB^T Px(t) \\ &\quad + \frac{\gamma}{2}\varepsilon_2^2(t) - \frac{\gamma}{2} \int_0^D W(z, t)^2 dz. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Выбирая  $\gamma = 8\lambda_{\max}(PBB^T P)/\lambda_{\min}(Q)$  найдем

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2}x^T(t)x(t) + \frac{\gamma}{2}\varepsilon_2^2(t) \\ &\quad - \frac{\gamma}{2(1+D)} \int_0^D (1+z)W(z, t)^2 dz. \end{aligned} \quad (3.88)$$

и в конечном итоге

$$\dot{V}(t) \leq -C_0 V(t) + \frac{\gamma}{2}\varepsilon_2^2(t), \quad (3.89)$$

где  $C_0 = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}, \frac{1}{1+D} \right\}$ , и  $\varepsilon_2^2(t)$  экспоненциально стремится к нулю.

Завершая анализ функции Ляпунова (3.85) для замкнутой системы, необходимо воспользоваться принципом сравнения [18]. В итоге имеем

$$|V(t)| \leq \rho_6 e^{-\beta_6 t}$$

с некоторыми константами  $\rho_6, \beta_6 > 0$ . Откуда видно, что цель управления (3.8) достигнута.

### 3.6 Числовой пример

Рассмотрим числовой пример, чтобы подробно описать процедуру синтеза регулятора.

Пусть объект управления описывается следующими дифференциальными уравнениями (3.5), (3.6), где параметры матриц  $A$ ,  $B$  и  $C$  подставлены явно в модель объекта:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \delta(t), \quad (3.90)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \delta(t), \quad (3.91)$$

где возмущающее воздействие имеет вид

$$\delta(t) = 1 + 3 \sin(0,8 t) - \cos(0,8 t), \quad (3.92)$$

и временная диаграмма функции  $\delta(t)$  показана на рисунке 3.2а

Для простоты ограничимся случаем с одной гармоникой и постоянным смещением. Целью является стабилизация нулевого положения системы  $x = 0$ .

Для начала необходимо построить устройство оценивания частоты и наблюдатель возмущающего воздействия. Для системы управления параметры функции  $\delta(t)$  в (3.92) не доступны.

Введем наблюдатель (3.9), (3.10) для выделения информации о возмущении из измеряемого сигнала  $y(t)$ .

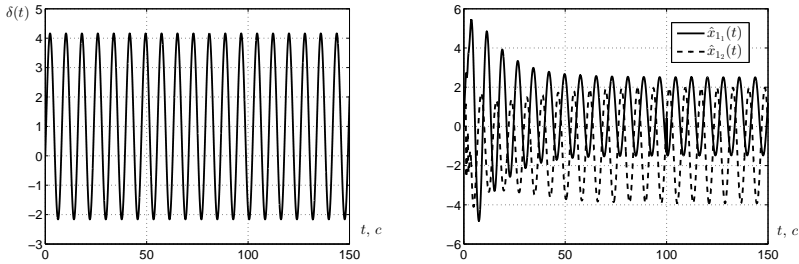
$$\dot{\hat{x}}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & -1 \end{bmatrix} \hat{x}_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t-1) + L(y(t) - \hat{y}_1(t)), \quad (3.93)$$

$$\hat{y}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}_1(t), \quad (3.94)$$

Матрица  $L$  выбирается из условия устойчивости и желаемых показателей качества для модели невязки по состоянию  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}_1(t)$ . Фактически с учетом приведенного анализа (см. (3.14)) свойства модели невязки определяются собственными числами матрицы  $(A - LC)$ . Выберем матрицу  $L^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$ . На рисунке 3.2б показан переходный процесс в наблюдателе (3.93), (3.94).

Сигнал невязки  $\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}_1(t)$  будем использовать как носитель информации о возмущении для оценки частоты и других параметров возмущения.





(а) Временная диаграмма возмущения  $\delta(t)$  (б) Процессы в наблюдателе (3.93) для переменных  $\hat{x}_1(t)$

Рис. 3.2. Временные диаграммы для возмущающего воздействия  $\delta(t) = 1 + 3 \sin(0,8t) - \cos(0,8t)$  и переменных состояния наблюдателя (3.93) (см. также (3.9))

Введем фильтр в соответствии с (3.18):

$$\xi(t) = \left[ \frac{2\lambda^2}{(p^2 + 3\lambda p + 2\lambda^2)} \right] \tilde{y}_1(t), \quad (3.95)$$

где число  $\lambda$  определяет быстродействие фильтра, а также влияет на чувствительность к дополнительным шумам, присутствующим в канале измерения и, как следствие, в сигнале  $\tilde{y}_1(t)$ . В моделировании будем использовать значение  $\lambda = 1$ . На рисунке 3.3 показана возможная схема реализации фильтра (3.95).

Теперь можно сформировать реализуемую схему оценивания неизвестной частоты  $\omega$  согласно теореме 3.1.

$$\hat{\omega}(t) = \sqrt{|\hat{\theta}(t)|}, \quad (3.96)$$

$$\hat{\theta}(t) = \chi(t) + k\dot{\xi}(t)\ddot{\xi}(t), \quad (3.97)$$

$$\dot{\chi}(t) = -k\dot{\xi}^2(t)\hat{\theta}(t) - k\ddot{\xi}^2(t), \quad (3.98)$$

где параметр  $k$  определяет быстродействие оценивателя частоты, а также чувствительность к аддитивным шумам канала измерения.

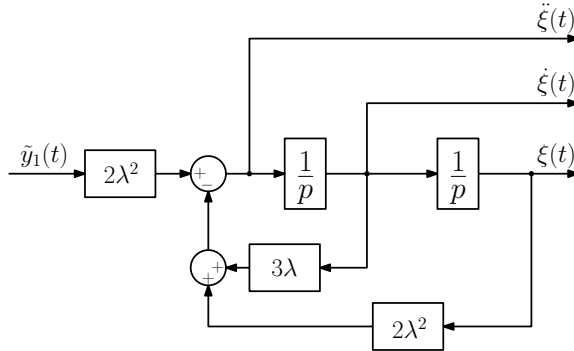


Рис. 3.3. Структурная схема фильтра (3.95)

Чтобы избежать деление на ноль при делении на оценку частоты, следует ввести следующее ограничение:

$$\hat{\omega}(t) = \omega_0, \quad \text{если } \hat{\omega} < \omega_0. \quad (3.99)$$

На рисунке 3.4а показан переходный процесс для оценки частоты  $\omega = 0,8$  при  $k = 2$  и  $\omega_0 = 0,5$ .

На следующем шаге необходимо построить устройство оценивания смещения  $\hat{\sigma}$  и амплитуд  $\mu, \nu$  возмущения  $\delta(t)$ .

Запишем выражения для расчета функций, соответствующих независимым гармоникам сигнала  $\xi(t)$  в соответствии с формулами (3.49) и (3.50). В рассматриваемом примере это оценки постоянной составляющей  $\hat{\xi}_0(t)$  и синусоидальной  $\hat{\xi}_1(t)$  с частотой  $\omega$ .

$$\hat{\xi}_1(t) = -\frac{\ddot{\xi}(t)}{\hat{\omega}^2(t)}, \quad \hat{\xi}_0(t) = \xi(t) - \hat{\xi}_1(t). \quad (3.100)$$

На рисунке 3.4б показаны переходные процессы для оценок компонент сигнала  $\xi(t)$  с разными частотами.

Для оценки смещения воспользуемся уравнением (3.42):

$$\hat{\sigma}(t) = \frac{a_0}{b_0} \hat{\xi}_0(t), \quad (3.101)$$

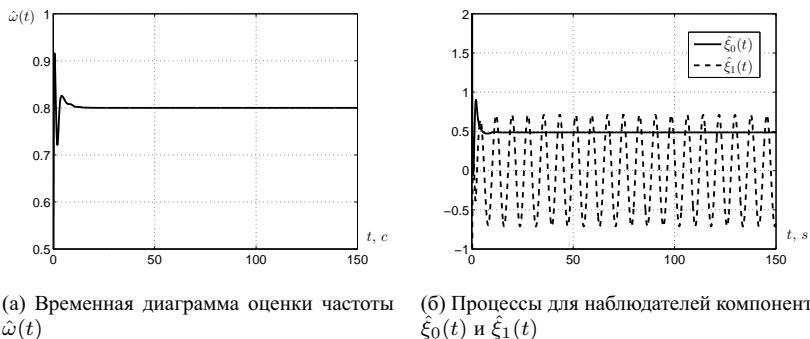


Рис. 3.4. Временные диаграммы для оценки частоты  $\omega = 0,8$  и наблюдателя гармоник сигнала  $\xi(t)$

где  $b_0 = 1,9$  и  $a_0 = 3,9$  соответствуют передаточной функции

$$\frac{b(p)}{a(p)} = C(pI - (A - LC))^{-1}(B - L\alpha) + \alpha = \frac{p^2 + p + 1,9}{p^2 + 3p + 3,9}. \quad (3.102)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную переменную (3.52)

$$\hat{\Delta}(t) = \sin(\hat{\omega}t). \quad (3.103)$$

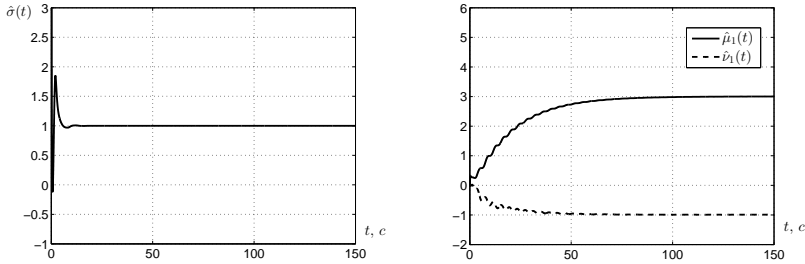
Далее рассмотрим вспомогательный фильтр (3.53)

$$\hat{v}(t) = \left[ \frac{2(p^2 + p + 1,9)}{(p^2 + 3p + 2)(p^2 + 3p + 3,9)} \right] \hat{\Delta}(t). \quad (3.104)$$

Нетрудно видеть, что структура фильтра (3.104) позволяет рассчитать не только выходной сигнал  $\hat{v}(t)$ , но и его производную  $\hat{\dot{v}}(t)$ . Имея в распоряжении функции  $\hat{v}(t)$ ,  $\hat{\dot{v}}(t)$  и  $\hat{\xi}_1(t)$ , можем построить алгоритм настройки оценок для амплитуд  $\mu$  и  $\nu$ :

$$\dot{\hat{\mu}}(t) = k_\mu \hat{v}(t) \left( \hat{\xi}_1(t) - \hat{\mu}(t)\hat{v}(t) + \hat{\nu}(t) \frac{\hat{\dot{v}}(t)}{\hat{\omega}^2(t)} \right), \quad (3.105)$$

$$\dot{\hat{\nu}}(t) = -k_\nu \frac{\hat{\dot{v}}(t)}{\hat{\omega}^2(t)} \left( \hat{\xi}_1(t) - \hat{\mu}(t)\hat{v}(t) + \hat{\nu}(t) \frac{\hat{\dot{v}}(t)}{\hat{\omega}^2(t)} \right), \quad (3.106)$$

(а) Временная диаграмма оценки смещения  $\hat{\sigma}(t)$ (б) Временная диаграмма для оценок амплитуд  $\hat{\mu}_1(t)$  и  $\hat{\nu}_1(t)$ Рис. 3.5. Временные диаграммы для оценок смещения  $\sigma = 1$  и амплитуд  $\mu = 3$ ,  $\nu = -1$ 

где можем выбрать параметры  $k_\mu = 2$  и  $k_\nu = 3$ .

На рисунке 3.5 показаны переходные процессы для оценок смещения амплитуд первой и единственной гармоники возмущения  $\delta(t)$ , определенного в (3.92).

Завершая первую часть синтеза алгоритма управления, напомним, что оценки возмущающего воздействия рассчитываются по формулам:

$$\hat{\delta}(t) = \hat{\sigma} + \hat{\mu} \sin(\hat{\omega}t) + \hat{\nu} \cos(\hat{\omega}t). \quad (3.107)$$

Второй наблюдатель для упреждающей оценки формируем в соответствии с (3.34):

$$\hat{\delta}(t + D) = \hat{\sigma} + \kappa \sin(\hat{\omega}t) + \zeta \cos(\hat{\omega}t), \quad (3.108)$$

$$\kappa = \hat{\mu} \cos(\hat{\omega}D) - \hat{\nu} \sin(\hat{\omega}D), \quad (3.109)$$

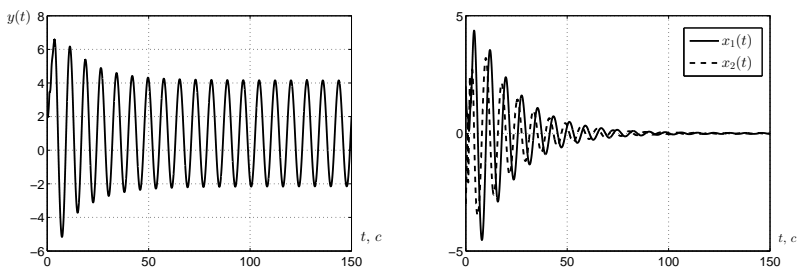
$$\zeta = \hat{\mu} \sin(\hat{\omega}D) + \hat{\nu} \cos(\hat{\omega}D). \quad (3.110)$$

Для синтеза закона управления  $u(t)$  необходимо сформировать второй наблюдатель состояния, в оценках которого будет отсутствовать влияние возмущающего воздействия.

Следуя формулам (3.65), (3.66), сформируем наблюдатель

$$\dot{\hat{x}}_2(t) = A\hat{x}_2 + B\psi(t - D) + L(y(t) - \hat{y}_2(t)), \quad (3.111)$$

$$\hat{y}_2(t) = C\hat{x}_2(t) + \alpha\hat{\delta}(t). \quad (3.112)$$



(а) Временная диаграмма измеряемого выходного сигнала  $y(t)$

(б) Временная диаграмма для переменных состояния  $x(t)$

Рис. 3.6. Переходные процессы в замкнутой системе для измеряемого возмущенного выхода  $y(t)$  и переменных состояния  $x(t)$

Завершая синтез регулятора, запишем выражение для  $u(t)$ :

$$u(t) = -\hat{\delta}(t + D) + \psi(t), \quad (3.113)$$

$$\psi(t) = Ke^{AD}\hat{x}_2(t) + K \int_{t-D}^t e^{A(t-z)} B\psi(z)dz, \quad (3.114)$$

где можем выбрать вектор-строку  $K = [2 \quad 2]$ .

На рисунке 3.6 показаны переходные процессы в замкнутой системе. Рисунок 3.6б демонстрирует, что все переменные состояния системы асимптотически стремятся к нулю, в то время как измеряемый сигнал  $y(t)$  содержит в себе компоненту возмущающего воздействия, как показано на рисунке 3.6а.

Среди основных сложностей в реализации закона управления (3.114) следует отметить два момента. Матричная экспонента  $e^{AD}$  в общем виде представляет собой сумму бесконечного, но сходящегося ряда. Существует множество способов численного расчета этой матричной функции. В частности, программная среда Matlab содержит функцию `expm(*)`.

Вторым недостатком является бесконечномерный интеграл, что означает необходимость знания функции  $\psi(t)$  в любой момент времени. Вычислить этот интеграл можно разными способами. При численном моделировании в среде Matlab может оказаться, что в силу неустойчи-

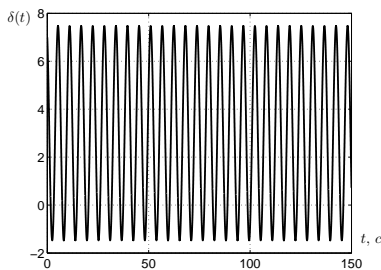
ности матрицы  $A$ , этот интеграл может быть расходящимся. Возможным способом вычисления этого интеграла может быть приближенный расчет площади криволинейной трапеции методом прямоугольников или методом трапеций. Такой способ позволяет избежать неустойчивого поведения сигнала  $\psi(t)$ , хоть и заметно осложняет процедуру формирования сигнала  $u(t)$ . Так или иначе, указанные проблемы остаются актуальными для их последующего решения более удобным или эффективным способом.

На следующих рисунках 3.7–3.10 представлены аналогичные переходные процессы, но для системы с другими параметрами:

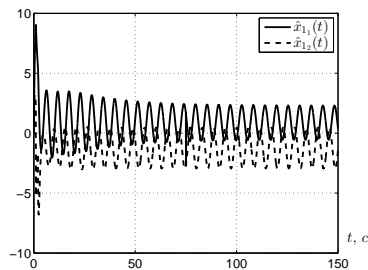
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,3 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 0,5, \quad D = 1.$$

$$\delta(t) = 3 - 2 \sin(1,1 t) + 4 \cos(1,1 t).$$

$$L = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad K^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 1, \quad k = 3, \quad k_\mu = 10, \quad k_\nu = 15.$$

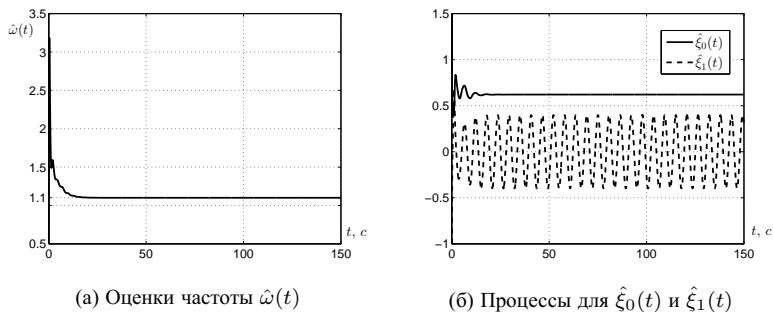
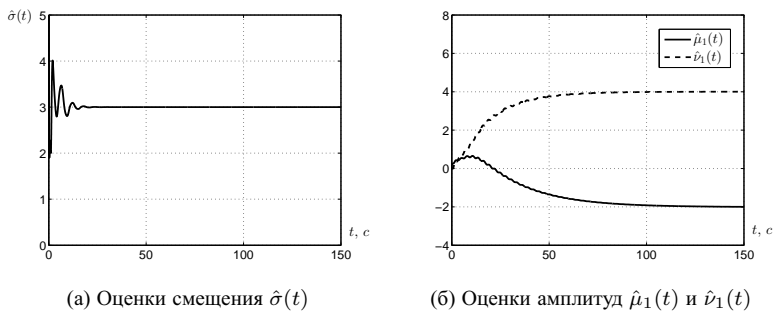
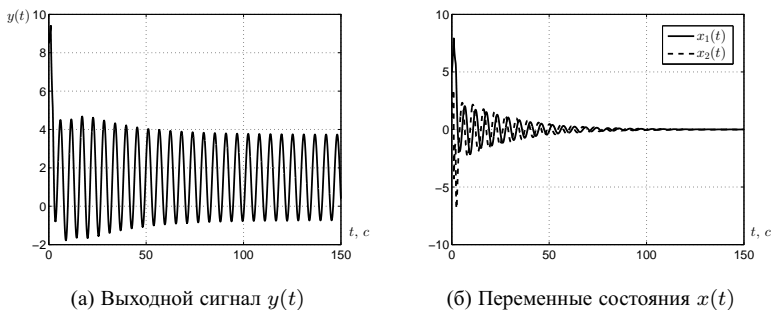


(а) Временная диаграмма возмущения  $\delta(t)$



(б) Процессы в наблюдателе (3.93) для переменных  $\hat{x}_1(t)$

Рис. 3.7. Временные диаграммы для возмущающего воздействия  $\delta(t) = 3 - 2 \sin(1,1 t) + 4 \cos(1,1 t)$  и переменных состояния наблюдателя (3.93)

Рис. 3.8. Временные диаграммы для  $\omega = 1,1$  и оценок гармоник  $\xi(t)$ Рис. 3.9. Временные диаграммы для  $\sigma = 3$  и  $\mu = -2, \nu = 4$ Рис. 3.10. Переходные процессы в замкнутой системе для измеряемого возмущенного выхода  $y(t)$  и переменных состояния  $x(t)$

# Заключение

Учебное пособие посвящено задачам оценивания и компенсации внешних мультисинусоидальных возмущающих воздействий.

В первой главе проанализирован принцип внутренней модели. Рассмотрены модели возмущающих воздействий и описана каноническая форма генератора возмущения. Представлены методы управления при известных возмущениях и параметрически не определенных. Рассмотрены базовые алгоритмы адаптации и их робастные модификации.

Во второй главе представлены алгоритмы оценивания частот мультисинусоидального измеряемого сигнала. На основе частотных методов показаны способы вычисления других неизвестных параметров: смещения, амплитуд и начальных фаз. Доказана экспоненциальная сходимость оценок к истинным значениям. Показаны робастные свойства алгоритмов по отношению к аддитивным шумам в канале измерения.

В третьей главе представлены алгоритмы управления по выходу системами с запаздыванием и внешним возмущающим воздействием, оказывающим влияние на состояние и канал измерения. Показан альтернативный способ построения наблюдателя для мультисинусоидального сигнала с неизвестными частотами. Способ оценивания амплитуд основан не на частотных свойствах динамических систем, а на интегральных методах адаптации. Показаны алгоритмы стабилизации неустойчивой системы с входным запаздыванием и компенсации неизмеряемого возмущающего воздействия.



# Литература

- [1] *Арановский С.В., Бобцов А.А., Кремлев А.С., Лукьянова Г.В.*, Робастный алгоритм идентификации частоты синусоидального сигнала // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 3. С. 1–6.
- [2] *Бобцов А.А., Пыркин А.А.*, Компенсация гармонического возмущения в условиях запаздывания по управлению // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 19–23.
- [3] *Бобцов А.А., Колюбин С.А., Пыркин А.А.*, Компенсация неизвестного мультигармонического возмущения для нелинейного объекта с запаздыванием по управлению // Автоматика и телемеханика. 2010. № 11. С. 136–148.
- [4] *Курдюков А.П.*, Основы робастного управления. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1995.
- [5] *Лукьянова Г.В., Никифоров В.О.*, Алгоритм компенсации внешних детерминированных возмущений: операторный метод синтеза // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО, 2003. № 10. С. 5–9.
- [6] *Миросиник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.*, Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб: Наука, 2000. — 549 с.
- [7] *Никифоров В.О.*, Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб: Наука, 2003.

- [8] *Острем К., Виттенмарк Б.*, Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987.
- [9] *Пыркин А.А.*, Адаптивный алгоритм компенсации параметрически неопределенного смещенного гармонического возмущения для линейного объекта с запаздыванием в канале управления // Автоматика и Телемеханика. 2010. № 8. С. 62–78.
- [10] Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В.В. Григорьев, В.Н. Дроздов, В.В. Лаврентьев, А.В. Ушаков. Л.: Машиностроение, 1983.
- [11] *Уонем М.*, Линейные многомерные системы: Геометрический подход. М.: Наука, 1980.
- [12] *Юркевич В.Д.*, Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. СПб.: Наука, 2000.
- [13] *Aranovskii S.V., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A.*, Adaptive Observer of an Unknown Sinusoidal Output Disturbance for Linear Plants // Automation and Remote Control. 2009. V. 70. N. 11. P. 1862–1870.
- [14] *Bobtsov A.A., Pyrkin A.A.*, Cancellation of unknown multiharmonic disturbance for nonlinear plant with input delay // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2012. V. 26. N. 4. P. 302–315.
- [15] *Hsu, L. and R.R. Costa*, Bursting Phenomena in Continuous-Time Adaptive Systems with a  $\sigma$ -Modification // IEEE Transactions on Automatic Control. 1987. V. 32. N. 1. P. 84–86.
- [16] *Ioannou P.A., Kokotović P.V.*, Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control // Automatica. 1984. V. 20, N. 5. P. 583–594.
- [17] *Ioannou P.A., Sun J.*, Robust adaptive control, PTR Prentice-Hall, 1996.
- [18] *Khalil H.*, Nonlinear Systems, third edition, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2002.

- [19] *Krstic M., Smyshlyaev A.*, Backstepping boundary control for first-order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays // *Systems and Control Letters*. 2008. V. 57. P. 750–758.
- [20] *Krstic M.*, Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems. – Birkhauser, 2009. – 466 p.
- [21] *Kwon W.H., Pearson A.E.*, Feedback stabilization of linear systems with delayed control // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1980. V. 25. P. 266–269.
- [22] *Luders G., Narendra K.S.* An adaptive observer and identifier for a linear system // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1973. V. 18. N. 5. P. 436–499.
- [23] *Manitius A.Z., Olbrot A.W.*, Finite spectrum assignment for systems with delays // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1979. V. 24. P. 541–553.
- [24] *Marino R., Santosuosso G., Tomei P.*, Adaptive Stabilization of Linear Systems with Outputs Affected by Unknown Sinusoidal Disturbances // *Proc. Eur. Control Conf.*, Kos, Greece. 2007. P. 129–134.
- [25] *Marino R., Santosuosso G., Tomei P.*, Regulation of Linear Systems with Unknown Additive Sinusoidal Sensor Disturbances // *Proc. 17th World Congress of IFAC*, Seoul, Korea. 2008.
- [26] *Marino R., Tomei P.*, Output Regulation for Linear Minimum Phase Systems With Unknown Order Exosystem // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 2007. V. 52. P. 2000–2005.
- [27] *Marino R., Tomei P.*, Adaptive Regulator for Uncertain Linear Minimum Phase Systems with Unknown Undermodeled Exosystems // *Proc 17th World Congress of IFAC*, Seoul, Korea. 2008.
- [28] *Nikiforov V.O.*, Adaptive servomechanism controller with an implicit reference model // *Int. J. Control*. 1997. V. 68. N. 2. P. 277–286.
- [29] *Nikiforov V.O.*, Adaptive non-linear tracking with complete compensation of unknown disturbances // *European J. Control*. 1998. V. 4. N. 2. P. 132–139.

- [30] *Nikiforov V.O.*, Robust high-order tuner of simplified structure // *Automatica*. 1999. V. 35. N. 8. P. 1409–1415.
- [31] *Pyrkin A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M.*, Rejection of sinusoidal disturbance of unknown frequency for linear system with input delay // *American Control Conference, Baltimore, USA*. 2010.
- [32] *Pyrkin A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M.*, Output control algorithm for unstable plant with input delay and cancellation of unknown biased harmonic disturbance // *9th IFAC Workshop on Time Delay System, Prague, Czech Republic*. 2010.
- [33] *Smith O.J.M.*, Closer control of loops with dead time // *Chem. Eng. Prog.* 1959. N. 53. P. 217–219.
- [34] *Smith O.J.M.*, A controller to overcome dead time // *ISA*. 1959. V. 6. P. 28–33.
- [35] *Xia X.*, Global Frequency Estimation Using Adaptive Identifiers // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2002. V. 47. P. 1188–1193.

**Миссия университета** — генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

---

## **КАФЕДРА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ**

Кафедра Систем Управления и Информатики (до 2001 г. кафедра Автоматики и Телемеханики) факультета Компьютерных Технологий и Управления была основана в 1945 г. на базе факультета Электроприборостроения ЛИТМО. На кафедре Автоматики и телемеханики ЛИТМО была возложена задача подготовки специалистов по автоматизации приборостроительной промышленности, автоматических систем управления, систем телемеханики и телеизмерений. Первый выпуск молодых инженеров состоялся в 1948 г. и составил 17 человек. Первым заведующим кафедры был крупный специалист в области систем телеизмерений, профессор Марк Львович Цуккерман.

В 1955 г. при кафедре образована научно-исследовательская лаборатории (НИЛ). В этот период основные направления научно-исследовательских работ представляли задачи автоматизации измерения и регистрации параметров кораблей во время их мореходных испытаний, а также стабилизации скорости и фазирования двигателей. Под научным руководством проф. М.Л. Цуккермана была налажена подготовка научных кадров высшей квалификации через систему аспирантуры.

С 1959 г. по 1970 кафедру возглавлял ученик М.Л. Цуккермана доцент Ефимий Аполлонович Танский. За время его руководства в научно-исследовательской работе на кафедре произошел заметный поворот к проблемам автоматизации оптико-механического приборостроения, что привело к длительному научно-техническому сотрудничеству кафедры с ЛОМО им. В.И. Ленина, в рамках которого для нужд оборонной техники была разработана целая гамма прецизионных фотоэлектрических следящих систем. В рамках научно-технического сотрудничества с НИИЭТУ кафедра приняла участие в разработке автоматической фототелеграфной аппаратуры, реализованной в виде комплекса «Газета-2».

С 1970 по 1990 г., за время руководства кафедрой известного в стране специалиста в области автоматизированного электропривода и фотоэлектрических следящих систем доктора технических наук, профессора Юрия Алексеевича

Сабинина, заметно изменилась структура дисциплин и курсов, читаемых студентам кафедры. К традиционным курсам “Теория автоматического регулирования и следящие системы”, “Теория автоматического управления, экстремальные и адаптивные системы”, “Элементы автоматики” и “Телемеханика” были добавлены дисциплины: “Теоретические основы кибернетики”, “Локальные системы управления”, “САПР систем управления” и другие. Прикладные разработки кафедры были связаны с задачами адаптивной оптики для многоэлементных зеркал оптических телескопов и коррекции волнового фронта технологических лазеров; с задачами адаптивной радиооптики применительно к проблеме управления большими полноповоротными радиотелескопами; гребного электропривода и робототехнических систем, автоматического управления процессом мягкой посадки летательных аппаратов.

С 1990 г. научно-исследовательская работа кафедры велась по федеральным целевым программам и конкурсным проектам РФФИ, Минобразования и Администрации Санкт-Петербурга. С целью расширения исследований, проводимых по теории нелинейных и адаптивных систем, роботов и микропроцессорной техники, а также активизации подготовки кадров в 1994 г. образована научная Лаборатория Кибернетики и Систем управления (руководитель проф. И.В. Мирошник). С 1994 г. существенно расширились международные контакты кафедры, участие в самых престижных международных научных мероприятиях, организации конференций и симпозиумов. С 1998 г. на базе кафедры в университете ежегодно проводится Международная студенческая олимпиада по автоматическому управлению, а с 2009 года проводится Всероссийский Фестиваль Мехатроники и Робототехники.

В 2001 г. кафедра была переименована и получила название “Кафедра Систем управления и информатики”. В 2010 г. кафедру возглавил доктор технических наук, профессор Бобцов Алексей Алексеевич, работающий в то время уже в должности декана факультета Компьютерных технологий и управления. В настоящее время кафедра является одним из ведущих российских научных и образовательных центров, ориентированным на фундаментальные и прикладные исследования в области систем автоматического управления, робототехники и прикладной информатики, подготовку высококвалифицированных специалистов XXI столетия.

Пособие подготовлено при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (Госзадание 2014/190 (проект 2118)).

Бобцов Алексей Алексеевич  
Никифоров Владимир Олегович  
Пыркин Антон Александрович

## **Адаптивное управление возмущенными системами**

### **Учебное пособие**

В авторской редакции  
Компьютерная верстка  
Дизайн обложки и иллюстраций

А.А. Пыркин, В.О. Никифоров  
А.А. Пыркин, О.И. Борисов

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати

Заказ №

Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**  
**Университета ИТМО**  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49