Аналитически-численный метод анализа нелинейных моделей динамических систем

Ю. А. Бычков[1], Е. Б. Соловьева[2], С. В. Щербаков[3]
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
[1]rimelena@yahoo.com, [2]selenab@hotbox.ru, [3]gz52@pskovsobranie.ru

Аннотация. **Рассмотрены детерминированные, нелинейные, неавтономные, с сосредоточенными параметрами математические модели динамических объектов в виде систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Предложен аналитически-численный метод решения указанных систем уравнений, основанный на применении обобщённых функций, регулярные составляющие которых описываются рядами Тейлора. Представлена процедура нахождения параметров колебательных режимов в динамических моделях с учётом регулярности и устойчивости этих режимов.**

Ключевые слова: математическая модель; динамическая система; аналитически-численный метод; система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

I. Введение

Метод математического моделирования – наиболее мощный среди современных методов исследования окружающего мира. Замещая реальные объекты и явления их математическими моделями, мы приобретаем возможность получения подробной и наглядной информации о существе внутренних и внешних взаимосвязей моделируемого объекта, его качественных характеристиках и количественных показателях [1]–[7].

Задача построения конструктивной модели исследуемого объекта или явления чрезвычайно сложна и многогранна, ибо «создание удачной новой модели – всегда крупное достижение соответствующей науки, а иногда и целый этап в её развитии» [7].

Разработанный аналитически-численный метод совместного математического моделирования и расчёта динамических систем [7] существенно расширяет возможности математического моделирования сложных нелинейных объектов [1]–[6].

Аналитически-численный метод предназначен для анализа и параметрического синтеза детерминированных, нелинейных, неавтономных, с сосредоточенными или распределёнными параметрами моделей динамических систем. В данном методе выполняются: варьирование степени полинома Тейлора и адаптация шага расчёта при анализе модели, контроль уровней предельных абсолютных локальной и полной погрешностей расчёта для моделей с сосредоточенными параметрами [7].

Предложенный метод даёт ответы на следующие основные вопросы:

- какую необходимую и достаточную сложность математического описания модели динамической системы требует специфика выполняемых исследований и допускает выбранный для этих исследований математический аппарат;
- в каком классе функций нужно искать решения уравнений динамики сформированной модели;
- какая форма математического описания искомых решений целесообразна и предпочтительна;
- каким образом в заданном временном интервале исследовать существование и единственность искомого решения уравнения динамики модели, а также выяснить возможность его получения с помощью выбранного математического аппарата;
- как оценить асимптотические свойства динамических моделей;
- каким образом найти параметры колебательных режимов в динамических моделях, а также исследовать регулярность и устойчивость таких режимов.

II. Матричная модель исследуемых динамических систем

Рассмотри математические модели детерминированных динамических систем, учитывающие неавтономности и нелинейности моделируемых объектов; разрывы первого рода для воздействий; разрывы первого и второго рода для координат фазового пространства модели и производных от них. Случайные изменения параметров моделей и воздействий, а также распределённые параметры моделей исключены из рассмотрения.

Динамика выделенного класса моделей описывается обыкновенными, неавтономными, нелинейными интегрально-дифференциальными уравнениями с нестационарными коэффициентами и детерминированными правыми частями. Система уравнений, в которой все координаты фазового пространства модели имеют определённый смысл и доступны наблюдению, записывается в матричной форме [7]:

$$\mathbf{A}(D, D^{-1})\,\mathbf{X}(t) = \mathbf{G}(D, D^{-1})\,\mathbf{F}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{F}, t), \qquad (1)$$

где D – оператор обобщённого дифференцирования по независимой переменной моделирования *t*; D^{-1} – оператор интегрирования по *t* до переменного верхнего предела *t*, нижний предел которого есть предначальный момент времени в каждом интервале интегрирования; $\mathbf{A}(D, D^{-1})$ – квадратная матрица размером $L_x \times L_x$ с полиномиальными элементами $a_{l,k}(D)$; $\mathbf{G}(D, D^{-1})$ – матрица размером $L_x \times L_f$ с полиномиальными элементами $g_{l,k}(D)$; $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{F}(t)$ – матрицы-столбцы координат фазового пространства модели и внешних воздействий соответственно; $\mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{F}, t)$ – матрица-столбец со строками в виде сумм произведений следующих сомножителей: времени, нестационарных коэффициентов, классических производных любого порядка и интегралов любой кратности, начиная с нулевого (нулевой), относительно фазовых координат (искомых решений) и внешних воздействий (при этом все сомножители имеют произвольные дробно-рациональные степени).

Полиномы $a_{l,k}(D)$, $g_{l,k}(D)$ формируются согласно выражениям:

$$a_{l,k}(D) = \sum_{m=-M}^{M} a_{l,k}^{[m]}(t) D^m,$$
$$g_{l,k}(D) = \sum_{m=-M}^{M} g_{l,k}^{[m]}(t)\, D^m,$$

где m – порядок дифференцирования (при $m > 0$) и интегрирования (при $m < 0$) по переменной *t*. Отдельные или все коэффициенты в представленных полиномах могут быть равны нулю.

Строка str_u с номером u, $u \in [1, L_x]$ матрицы $\mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{F}, t)$ по определению [7] записывается как:

$$\mathrm{str}_u\ \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{F}, t) = \sum_{v=1}^{V_u} t^{k_{u,v}} h_{u,v}(t) \times$$
$$\times \prod_{l=1}^{L} \prod_{n=-N_{u,v}}^{N_{u,v}} \left(D^n x_l(t)\right)^{k_{u,v}^{l,n}}, \qquad (2)$$

где $L = L_x + L_f$; $k_{u,v}, k_{u,v}^{l,n} \in Q$, Q – множество рациональных чисел; $N_{u,v} \in Z$, Z – множество целых чисел.

В формуле (2) перебор координат фазового пространства модели и воздействий упорядочен так, что

$$x_l(t) = \begin{cases} x_l(t) \text{ для } \forall\, l \in [1, L_x], \\ f_l(t) \text{ для } \forall\, l \in [L_x + 1, L]. \end{cases}$$

Нижний предел операторов интегрирования D^{-n}, $n \in \left[-N_{u,v}, N_{u,v}\right]$ в выражении (2) (в отличие от так же обозначенных операторов в матрицах $\mathbf{A}(D, D^{-1})$ и $\mathbf{G}(D, D^{-1})$) есть начальный момент времени в каждом интервале интегрирования.

III. Вычислительная процедура аналитически-численного метода

Класс функций, в котором находятся решения уравнения (1), определяется с учетом изменения внешних воздействий и координат фазового пространства в нелинейных неавтономных моделях. Процессы в динамических системах протекают в фазовом пространстве координат, доступных наблюдению и регистрации. В общем случае эти процессы характеризуют [7]:

- разрывы первого рода для дифференцируемых фазовых координат модели и внешних воздействий;
- разрывы второго рода для фазовых координат;
- чередование временных интервалов быстрого и медленного изменения координат фазового пространства;
- неустойчивость фазовых координат в конечных или полубесконечных временных интервалах.

Для корректного учёта негладкостей процессов в динамических системах, например, при дифференцировании разрывов, решения уравнения (1) необходимо искать в классе обобщённых функций, в виде сумм сингулярных и регулярных составляющих [7]:

$$x_l(t) = x_l^-(t) + x_l^+(t) = \sum_{j=0}^{-J_l} S_{l,j}\ \delta_j(t) + \sum_{i=0}^{\infty} R_{l,i}\ t^i / i! \qquad (3)$$

где $x_l^-(t)$, $x_l^+(t)$ – сингулярная и регулярная составляющие решения $x_l(t)$ соответственно; $\delta_j(t)$ – импульсная функция; $S_{l,j}$ – весовые коэффициенты импульсных функций, определённые в начальной точке с абсциссой $t = 0^+$ для рассматриваемого интервала расчёта; $R_{l,i}$ – коэффициенты степенного ряда с центром разложения в той же точке.

Для поиска решения $x_r(t)$ уравнения (1) в классе обобщённых функций (3) с регулярными составляющими $x_r^+(t)$, $r = 1, 2, ..., L_x$, описанными функционально-степенными рядами, разработан аналитически-численный метод.

Вычислительная процедура метода включает аналитическую и численную части, описание которых представлено ниже.

В аналитической части метода для заданных или предварительно вычисленных предначальных условий формируем описания искомых решений уравнения (1) в виде обобщённых функций (3). Сингулярные составляющие этих решений, если они существуют в начальный для выбранного шага расчёта момент времени, представляем в замкнутой форме в виде суммы импульсных функций с весовыми коэффициентами. Границы областей, содержащих точные значения этих весовых коэффициентов, определяют предельные абсолютные погрешности в предначальных условиях. Регулярные составляющие искомых решений непрерывны и имеют описания в виде рядов Тейлора в пределах выбранного шага расчёта.

В численной части метода заменяем ряды полиномами Тейлора. Заданный уровень предельной локальной погрешности расчёта определяет степени полиномов. Далее вычисляем приближённые значения регулярных составляющих решений в замкнутой форме и оцениваем абсолютные локальные и полные погрешности их расчёта. В результате для каждой регулярной составляющей решения уравнения (1) в любой дискретный момент времени t_k из заданного интервала исследования выделяем две точки, отвечающие заданным предначальным условиям и определяющие нижнюю и верхнюю границы области, содержащей неизвестное точное значение этой регулярной составляющей.

Таким образом, сущность аналитически-численного метода состоит в замещении динамических систем детерминированными, неавтономными, нелинейными моделями с сосредоточенными нестационарными параметрами и в последующем поиске решений уравнений их динамики в виде обобщённых функций, регулярные составляющие которых описаны рядами Тейлора.

Процедура метода с аналитической и численной частями состоит в пошаговом (с оценкой) построении динамических процессов в математических моделях.

Верхняя оценка для абсолютной полной погрешности $|\Delta x_l^+(t_k, I_l)|$ расчёта приближенного значения искомого решения $x_l^+(t_k)$ формируется в следующем виде:

$$|\Delta x_l^+(t_k, I_l)| = (1 + h_k \chi_{l,k}) |\Delta x_l^+(0^+, I_l)| + |\Delta x_l^+(h_k, I_l)|, \quad (4)$$

где $\chi_{l,k}$ – коэффициент, учитывающий неточность начальных условий на шаге расчёта t_k, $k \geq 2$.

Используя приближённое значение искомого решения и вычисленную оценку (4), строим область, включающую неизвестное точное значение регулярной составляющей искомого решения уравнения (1).

На первых двух шагах расчёта процедура выделения одномерных областей, содержащих неизвестные точные значения регулярных составляющих решений $x_1^+(t_k)$, $x_2^+(t_k)$ в дискретные моменты времени t_k, иллюстрирована на рис. 1–3.

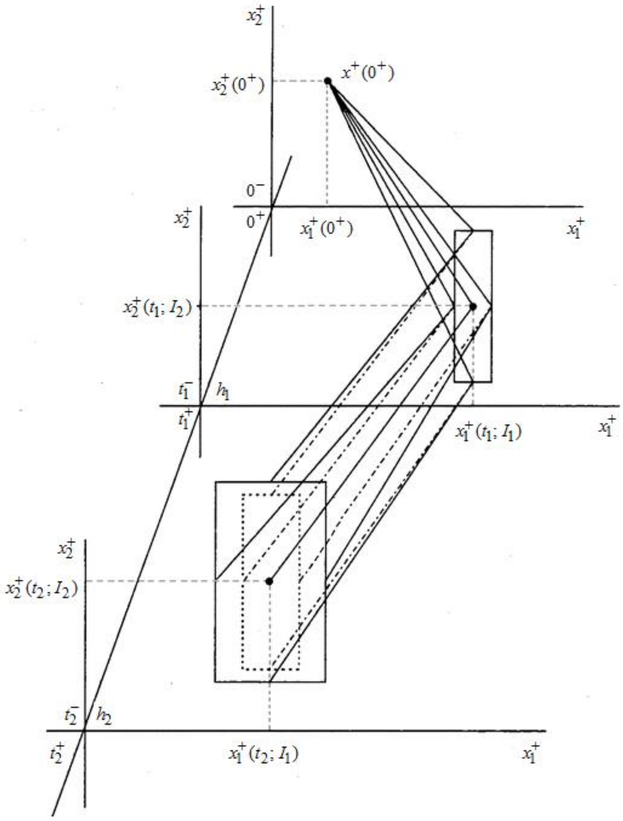

Рис. 1. Координатно-временное пространство для $x_1^+(t_k)$, $x_2^+(t_k)$ на двух первых шагах расчёта

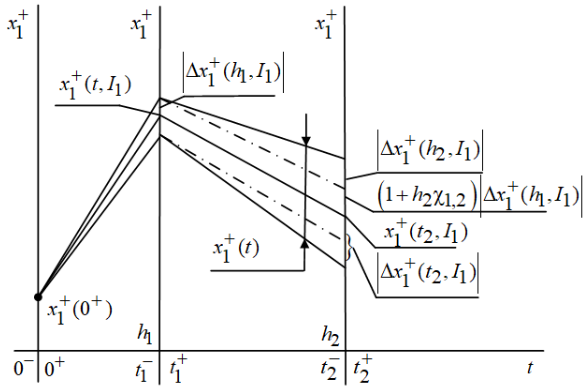

Рис. 2. Проекция координатно-временного пространства на плоскость $x_1^+(t_k)$.

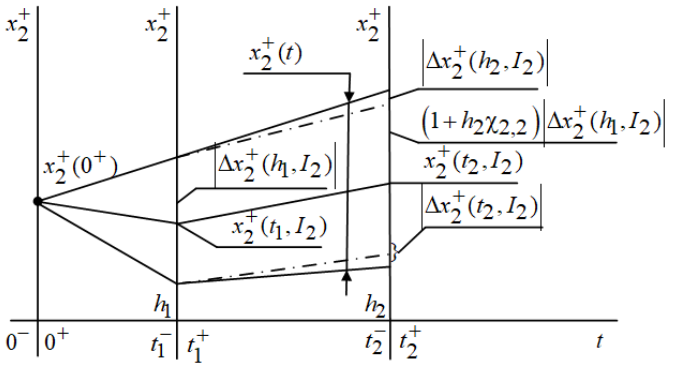

Рис. 3. Проекция координатно-временного пространства на плоскость $x_2^+(t_k)$

На рис. 1 показано координатно-временное пространство для двух фазовых координат, на рис. 2 и рис. 3 – проекции координатно-временного пространства на плоскости $x_1^+(t_k)$ и $x_2^+(t_k)$ соответственно.

IV. Заключение

Аналитически-численный метод применим для анализа детерминированных, нелинейных, неавтономных, с сосредоточенными параметрами моделей динамических систем.

Рассмотренный метод обладает следующими достоинствами [7]:

- Решения уравнений динамики сформированной модели описываются обобщёнными функциями с регулярными составляющими в виде рядов (полиномов) Тейлора.
- Существование и единственность решения уравнения динамики модели (1) и возможность его получения с помощью выбранного математического аппарата доказаны в рамках рядов Тейлора.
- Разработаны процедуры нахождения параметров колебательных режимов в динамических моделях, а также исследованы регулярности и устойчивости таких режимов.

Верхние оценки абсолютной локальной, относительной локальной и абсолютной полной погрешностей расчёта, полученные в дискретные моменты времени из заданного интервала, позволяют строить области, содержащие неизвестные точные значения решений уравнения динамики модели (1) и удовлетворяющие различным оценочно-временным показателям предельной погрешности расчёта.

Список литературы

[1] Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

[2] Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[3] Butcher J.C. Numerical methods for ordinary differential equations in the 20th century // Journal of computational and applied mathematics, 2000, no. 125. pp. 1-29.

[4] Deuflhard P., Bornemann F. Scientific Computing with Ordinary Differential Equations. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 2002.

[5] Hilborn R.C. Chaos and nonlinear dynamics. New York: Oxford University Press, 2004.

[6] Computational methods for modelling of nonlinear systems / Ed.: A. Torokhti and P. Howlett. New York: Elsevier, 2007.

[7] Analysis of mathematical models of continuous and discrete non-linear systems / U.A. Bichkov, U.M. Inshakov, E.B. Solovyeva, S.A. Scherbakov. St. Petersburg: Saint-Petersburg Electrotechnical University “LETI”, 2017.