

А.Л.ФРАДКОВ



АДАПТИВНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ
В СЛОЖНЫХ
СИСТЕМАХ



А.Л. ФРАДКОВ

АДАПТИВНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ
В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

БЕСПОИСКОВЫЕ
МЕТОДЫ



МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

ББК 22.18
Ф82
УДК 519.711

Ф а д к о в А.Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 296 с. — ISBN 5-02-014105-4.

Рассмотрены задачи и методы адаптивного управления в различных классах сложных систем: статических и динамических, непрерывных и дискретных, многомерных, многосвязных, нелинейных; в условиях нестационарности и неопределенности параметров объекта и среды. Описываются методы анализа и синтеза адаптивных систем, основанные на идеях построения функций Ляпунова, декомпозиции систем путем разделения разнотемповых движений и систематического использования компьютеров. Проводится сравнение различных подходов, и даются практические рекомендации по выбору алгоритмов адаптивного управления. Иллюстрирующие примеры относятся к задачам адаптивного управления ядерными энергетическими комплексами, экологическими и социальными системами.

Для специалистов в области теории управления, прикладной математики, системного анализа.

Табл. 14. Ил. 34. Библиогр. 260 назв.

Р е ц е н з е н т
доктор технических наук В.Н. Буков

ФБ СПбГПУ



0000478911

Ф 1402050000-090
053(02)-90 171.90

ISBN 5-02-014105-4

6970542

© Издательство "Наука".
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1990

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Список обозначений и сокращений	9
Глава 1. Задачи и методы адаптивного управления	11
§ 1.1. Особенности задачи управления в сложных системах	11
§ 1.2. Постановка задачи синтеза адаптивной системы управления	14
§ 1.3. Методы синтеза адаптивных систем	20
1.3.1. Точные методы (20). 1.3.2. Приближенные методы (25).	
1.3.3. Автоматизированный синтез (26).	
§ 1.4. Обсуждение	26
Глава 2. Алгоритмы скоростного градиента	28
§ 2.1. Задача синтеза непрерывного алгоритма адаптации	28
§ 2.2. Построение алгоритмов скоростного градиента	30
2.2.1. Алгоритмы скоростного градиента для локального целевого функционала (30). 2.2.2. Алгоритмы скоростного градиента для интегрального целевого функционала (32). 2.2.3. Алгоритмы скоростного псевдоградиента (32). 2.2.4. Комбинированные алгоритмы (33).	
§ 2.3. Условия применимости и свойства базовых алгоритмов скоростного градиента	34
2.3.1. Условия применимости АСГ (34). 2.3.2. Оценки качества синтезированных систем (39). 2.3.3. Идентифицирующие свойства АСГ (39).	
§ 2.4. Робастные алгоритмы скоростного градиента	41
2.4.1. Грубость и робастность базовых АСГ (41). 2.4.2. Огрубление АСГ (43).	
§ 2.5. Алгоритмы скоростного градиента в стохастических, нестационарных системах и при фазовых ограничениях	47
§ 2.6. Алгоритмы скоростного градиента в задачах децентрализованного управления	49
§ 2.7. Алгоритмы скоростного градиента при неявно заданной модели объекта	52
§ 2.8. Другие модификации алгоритмов скоростного градиента	54
§ 2.9. Обсуждение результатов. Локальные или интегральные?	55
Глава 3. Синтез непрерывных адаптивных систем	58
§ 3.1. Этапы синтеза адаптивных систем	58
§ 3.2. Синтез систем с явной эталонной моделью	62
3.2.1. Системы с параметрической адаптацией (62). 3.2.2. Системы	

с сигнальной адаптацией (65).	3.2.3. Системы с сигнально-параметрической адаптацией (66).
§ 3.3. Синтез систем с неявной эталонной моделью	3.3.1. Базовая структура адаптивной системы с неявной эталонной моделью (АСНЭМ) (72).
	3.3.2. Примеры АСНЭМ (74).
	3.3.3. Синтез АСНЭМ с учетом возмущений (78).
	3.3.4. Многосвязные АСНЭМ (80).
§ 3.3.5. Сигнально-параметрические АСНЭМ (82).	
§ 3.4. Системы идентификации	
§ 3.5. О несепарабельных функциях Ляпунова	
§ 3.6. Сигнальные или параметрические ?	
Глава 4. Синтез дискретных адаптивных систем	
§ 4.1. Задачи адаптивного управления статическими объектами	
§ 4.2. О выборе метода синтеза адаптивной системы	
§ 4.3. Метод рекуррентных целевых неравенств	
§ 4.4. Метод стохастической аппроксимации	
§ 4.5. Многошаговые алгоритмы адаптации	
§ 4.6. Адаптивное управление статическими объектами: задача слежения	
§ 4.7. Адаптивное управление статическими объектами: задача оптимизации	
§ 4.8. Адаптивное управление статическими объектами с неявно заданной характеристикой	
§ 4.9. Адаптивное управление конечными объектами (адаптивный выбор вариантов)	
§ 4.10. Адаптивное управление линейными динамическими объектами	
4.10.1. Задача слежения (128).	4.10.2. Задача регулирования (130)
§ 4.11. Детерминированные или стохастические?	
Глава 5. Декомпозиция адаптивных систем на основе разделения движений	
§ 5.1. Методы разделения движения в адаптивных системах	
5.1.1. Первая схема разделения движений для непрерывных систем (138).	5.1.2. Первая схема разделения движений для дискретных систем (141).
5.1.3. Вторая схема разделения движений (142).	
§ 5.2. Условия применимости и оценки точности разделения движений в адаптивных системах	
5.2.1. Условия применимости алгоритмов скоростного градиента в сингулярно-возмущенных системах (144).	5.2.2. Дискретизация алгоритмов скоростного градиента (150).
5.2.3. Сходимость градиентных алгоритмов при зависимых входах (152).	
§ 5.3. Методика синтеза адаптивных систем управления объектами с разделяющимися движениями. Примеры	
§ 5.4. Дискретные или непрерывные ?	
Глава 6. Автоматизация анализа и синтеза адаптивных систем управления	
§ 6.1. Методика синтеза адаптивных систем управления	
§ 6.2. Программные средства анализа и синтеза адаптивных систем управления	
§ 6.3. Пример. Выбор алгоритма управления	
6.3.1. Предварительный отбор алгоритмов (178).	6.3.2. Отбор по результатам моделирования (181).
§ 6.4. Автоматизация сравнительного анализа алгоритмов управления	
§ 6.5. Экспертные адаптивные регуляторы	
§ 6.6. Адаптивные или неадаптивные?	
Глава 7. Адаптивное управление комплексами с ядерными реакторами	
§ 7.1. Задачи адаптивного управления комплексами с ядерными реакторами	

7.1.1. Общая характеристика задач адаптивного управления комплексами с ядерными реакторами (198). 7.1.2. Математические модели процессов в реакторах (202).	
§ 7.2. Адаптивная оптимизация статического распределения мощности в реакторе	204
7.2.1. Постановка задачи (204). 7.2.2. Алгоритмы управления и адаптации(205). 7.2.3. Структура и функционирование адаптивной системы управления (208).	
§ 7.3. Адаптивное управление динамическим распределением мощности в реакторе	209
§ 7.4. Синтез адаптивной системы регулирования температуры перегретого пара для энергоблока с ядерным пароперегревом	211
7.4.1. Постановка задачи(211).7.4.2. Алгоритм адаптивного управления (212).7.4.3. Результаты моделирования (214).	
§ 7.5. Обсуждение	216
Глава 8. Адаптивное управление в системных исследованиях	217
§ 8.1. Адаптивное управление процессами миграции	217
8.1.1. Управление численностью населения в регионе (218). 8.1.2. Управление процессом межрегиональной миграции (221).	
§ 8.2. Адаптивное регулирование степени загрязненности водоема	222
§ 8.3. Адаптивное управление квалификационной структурой трудовых ресурсов	226
§ 8.4. Обсуждение	231
Заключение	232
Приложение 1. Доказательства теорем глав 2 – 5	234
Приложение 2. Теорема о решении условных матричных неравенств	254
Приложение 3. Теоремы двойственности в невыпуклых экстремальных задачах	261
Приложение 4. Описание инstrumentальной программной системы АВАНС	263
П.4.1. Общие сведения о системе(263).П.4.2. Особенности синтаксиса языка АВАНС (263). П.4.3. Оператор описания системы SYST(264).	
П.4.4. Оператор моделирования SIM (266). П.4.5. Оператор минимизации MIN(268). П.4.6. Макросредства языка АВАНС (269). П.4.7. Описание сложных систем (270).	
Приложение 5. Алгоритмы скоростного градиента и принципы эволюции систем	273
Комментарии и библиографические указания	279
Список литературы	283

ПРЕДИСЛОВИЕ

*В родстве со всем, что есть, уверясь
И знаясь с будущим в быту,
Нельзя не впасть к концу, как в ересь,
В неслыханную простоту.*

*Но мы пощажены не будем,
Когда ее не утаим.
Она всего нужнее людям,
Но сложное понятней им.*

Б. Пастернак

Эта книга родилась на стыке двух разделов современной науки об управлении: теории адаптивных систем и теории сложных систем. Первая теория имеет дело с задачами, в которых для построения управления традиционными методами недостаточно априорной или текущей информации. В задачах, пытающих вторую теорию, традиционные методы "не работают" из-за чрезмерной сложности описания объекта или цели управления. К сожалению, универсального правила, позволяющего отличить адаптивную систему от неадаптивной, а сложную – от простой, по-видимому, не существует, вследствие чего невозможно однозначно определить предмет книги. Тем не менее, каждая из названных теорий имеет свое "лицо", определяемое используемыми методами решения задач. В теории адаптивных систем развиваются методы, направленные на улучшение качества системы в ходе ее функционирования за счет изменения (адаптации) алгоритма управления. Методология теории сложных систем безошибочно узнается по двум признакам: использованию декомпозиции – расчленения исходной задачи на несколько более простых, решаемых по отдельности, и широкому использованию в ходе решения ЭВМ. "Лицо" книги, предлагаемой вниманию читателя, определяется сочетанием перечисленных методологических приемов.

Задачи, встающие сегодня перед разработчиком системы управления, все чаще требуют для своего решения обеих методологий. Действительно, в длинном ряду неприятных особенностей, характеризующих сложность системы (многомерность, многосвязность, нелинейность, нестационарность, стохастичность и т.д.), неопределенность часто оказывается на первом месте: сложность задаче придает недостаток информации о ней. Среди таких задач можно назвать задачи управления непрерывными технологическими процессами, энергетическими комплексами, движущимися объектами (летательными аппаратами, судами, транспортными и манипуляционными роботами и т.п.). Новый и перспективный класс образуют задачи, возникающие в системных исследованиях (управление развитием городских и региональных систем, управление в агрокосистемах, распределение водных и энергетических ресурсов и т.д.).

Методы адаптивного управления в сложных системах на сегодняшний день уже достаточно развиты. В книге делается попытка собрать вместе и рассмотреть с единых позиций основные из них, тем самым заполнив пробел, имеющийся в монографической литературе. Изложены методы, предназначенные для синтеза системы управления — наиболее ответственного этапа проектирования, связанного с выбором структуры системы, расчетом ее параметров. Упор при этом делается на беспоисковые методы, отличающиеся быстродействием и достаточной простотой реализации.

Книга начинается с формальной постановки задачи синтеза адаптивной системы и обзора существующих подходов к ее решению. Затем излагается метод скоростного градиента — общая схема синтеза алгоритмов управления и адаптации в непрерывных системах, позволяющая распространить существующие методы беспоисковой самонастройки на нелинейные и нестационарные системы. В главе 3 метод скоростного градиента применяется к синтезу алгоритмов адаптивного управления с эталонной моделью. Эти алгоритмы отличаются простотой реализации и широкой областью применимости, что особенно важно при управлении многомерными и многосвязными объектами. Рассматриваются параметрические, сигнальные и сигнально-параметрические алгоритмы в системах с явной и неявной эталонной моделью. Глава 4 посвящена синтезу дискретных адаптивных систем управления, основой которого являются градиентные методы. Особое внимание уделено задачам регулирования и оптимизации статических объектов, имеющим важные применения в АСУ технологическими процессами.

В главе 5 рассматриваются приближенные декомпозиционные методы анализа и синтеза сложных адаптивных систем. Декомпозиция осуществляется методами разделения разнотемповых движений в системе: методом усреднения и методом сингулярных возмущений. Приводятся процедуры синтеза систем по упрощенным моделям, условия применимости систем и оценки их точности.

Глава 6 посвящена применению ЭВМ при анализе и синтезе адаптивных систем. Описывается инструментальная программная система автоматизации анализа и синтеза (АВАНС), разработанная в Ленинградском механическом институте (ЛМИ). Входной язык системы АВАНС удобен для описания, моделирования и оптимизации сложных иерархических систем, состоящих из соединенных линейных и нелинейных, динамических и статических подсистем. Имеющиеся макросредства позволяют пользователю модифицировать входной язык, создавать лаконичные персонально-ориентированные диалекты. Системы, подобные АВАНСу, дают возможность создать диалоговую среду решения на ЭВМ задач данной предметной области. Развиваясь, они переходят в класс систем искусственного интеллекта, в частности в экспертные системы, примеры которых также рассмотрены в главе 6.

Последующие главы иллюстрируют применение описанных методов в задачах адаптивного управления ядерными исследовательскими и энергетическими комплексами и эколого-экономическими системами; они могут служить источником примеров и упражнений.

На протяжении всей книги систематически эксплуатируется идея функции Ляпунова — функции состояния динамической системы, производ-

ная (приращение) которой вдоль траекторий системы удовлетворяет тем или иным неравенствам. Как видно из доказательств теорем, функции Ляпунова применяются в книге для определения структуры алгоритма управления, условий устойчивости системы, оценки ее точности и, наконец, оценки чувствительности по отношению к структурным возмущениям.

Автор старался сделать стиль и уровень изложения основного материала доступным для инженера-исследователя, считая, что читателя не должны смущать математические формулировки результатов, если они сопровождаются содержательными разъяснениями. По существу, для работы с книгой достаточно владения линейной алгеброй, математическим анализом и теорией автоматического управления в объеме вузовских курсов. В то же время для читателя, ведущего самостоятельные исследования, могут оказаться полезными доказательства теорем, помещенные в приложениях.

Хочется сделать еще одно замечание. В решении любой прикладной задачи, кроме теоретиков, владеющих методами решения, и практиков – хозяев задачи, должны участвовать еще и "посредники", осуществляющие связь между теми и другими и называемые обычно системными аналитиками. Эти люди должны уметь правильно поставить (формализовать) задачу, выбрать метод ее решения из числа предложенных теоретиком, проанализировать результаты и, возможно, вернуться к поиску нового варианта. Роль системных аналитиков часто недооценивается, специальных книг для них крайне мало, а ведь от них в первую очередь зависит успех решения. Для этой категории читателей, прежде всего, будут полезны главы 1, 6, а также последние параграфы глав 2, 3, 4, 5.

Решающее влияние на развитие исследований автора, представленных в книге, оказали его учителя В.А. Якубович, Д.П. Деревицкий, а также участники семинара по адаптивным системам при Ленинградском правлении Союза научных и инженерных обществ СССР. Ряд результатов получен во время работы в Ленинградском филиале института машиноведения АН СССР. Первоначальный замысел книги был одобрен А.А. Вороновым и Ю.С. Попковым. Коллеги автора по совместной работе на кафедрах вычислительной техники и систем автоматического управления ЛМИ Б.Р. Андриевский, В.Н. Уткин и другие любезно предоставили ряд материалов. Целый ряд весьма полезных замечаний сделал В.Н. Буков, тщательнейшим образом просмотревший рукопись. Всем, так или иначе помогавшим в работе над книгой, автор приносит глубокую благодарность.

Июнь, 1988 г.

A. Фрадков

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

Матрица размера $m \times n$, или $m \times n$ -матрица – это матрица, имеющая m строк и n столбцов.

$x = \text{col}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ – вектор (столбец) размерности n с компонентами $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$. Эта запись будет использоваться и в случае, когда составляющие $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ вектора x сами являются векторами: при этом вектор x будет представлять собой набор всех компонент своих составляющих, "вытянутый" в столбец.

$x \in \mathbb{R}^n - x$ – вещественный n -мерный вектор;

A^T – транспонированная матрица A . Если x – вектор (столбец), то x^T – строка,

$x^T y$ – скалярное произведение векторов x, y , т.е. $x^T y = \sum_{i=1}^n x^{(i)} y^{(i)}$ при $x = \text{col}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$, $y = \text{col}(y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$.

x_s^t – совокупность значений функции $x(k)$ при $s \leq k \leq t$ (в зависимости от контекста k может задавать как дискретное, так и непрерывное время).

$\text{rank } A$ – ранг матрицы A .

$\det A$ – определитель квадратной матрицы A .

$\text{Sp } A$ – след квадратной матрицы A (сумма элементов главной диагонали).

$\|A\|$ – евклидова норма матрицы или вектора A (квадратный корень из суммы квадратов всех компонентов).

$\|x\|_H$ – квадратичная норма, порожденная симметричной матрицей H : $\|x\|_H^2 = x^T H x$.

$\text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – диагональная матрица с элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ на главной диагонали.

$I_n = \text{diag}\{1, \dots, 1\}$ – единичная матрица порядка n . Иногда, если это не вызывает недоразумений, индекс n будет опускаться.

Запись $A > 0$ означает, что симметричная матрица A положительно определена, т.е. $x^T A x > 0$ при $x \neq 0$.

Гурвицовой матрицей (гурвицевым многочленом) называется матрица (многочлен), все собственные числа которой (все корни которого) имеют отрицательные вещественные части. Если A – симметричная, т.е. $A = A^T$, то $\lambda_{\min}(A) \leq x^T A x \leq \lambda_{\max}(A)$, где $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ – соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа.

Запись $\alpha_t = O(\beta_t)$ ($\alpha_t = o(\beta_t)$) при $t \rightarrow t_0$ означает, что порядок величины α_t не больше (меньше), чем порядок β_t при $t \rightarrow t_0$.

$L\{F_1, \dots, F_k\}$ – линейное подпространство, порожденное векторами F_1, \dots, F_k .

$\sup\{x \in M: P(x)\}$ – точная верхняя грань величин $x \in M$, обладающих свойством $P(x)$.

$\text{Pr}_\Omega\{x\}$ – проекция точки (вектора) x на множество Ω , т.е. точка множества Ω , ближайшая к точке x (в евклидовой норме).

$\nabla f(x)$ – градиент функции нескольких переменных: вектор (столбец) из частных производных функции $f(x)$ по компонентам вектора x .

$\nabla_x f(x, y), \nabla_y f(x, y)$ – градиенты по соответствующей части компонент.

$\nabla^2 f(x)$ – матрица вторых производных функции $f(x)$.

$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k$ – верхний предел числовой последовательности $\{\varphi_k\}$ (наибольший из пределов ее подпоследовательностей).

$P\{S\}$ – вероятность случайного события S .

M_φ – математическое ожидание (среднее значение) случайной величины φ .

$M\{f(x, \varphi)/x\}$ или $M_\varphi f(x, \varphi)$ – условное математическое ожидание при фиксированном значении x , понимаемое как неслучайная функция от x .

п.н.

$x_k \xrightarrow{\text{п.н.}} x_*$ – x_k стремится к x_* с вероятностью единица (почти наверно).

p – оператор дифференцирования по времени: $p x(t) = dx(t)/dt = \dot{x}(t)$.

Основные сокращения:

АдСУ – адаптивная система управления;

АСГ – алгоритм скоростного градиента;

АСУ – автоматизированная система управления;

АСУ ТП – АСУ технологическим процессом;

КСА – конечно-сходящийся алгоритм;

ОНО – обобщенный настраиваемый объект;

ОУ – объект управления;

РЦН – рекуррентные целевые неравенства;

ЦУ – цель управления;

ЭМ – эталонная модель.

Глава 1

ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

На основе анализа особенностей задач управления в сложных системах формулируется общая постановка задачи синтеза адаптивной системы управления. Даётся краткий обзор существующих (ручных и автоматизированных) методов решения поставленной задачи.

§ 1.1. Особенности задач управления в сложных системах

Термин "сложная система" все чаще встречается в лексиконе разработчиков и исследователей систем управления. Обычно его употребление означает наличие особенностей, осложняющих решение задач анализа и синтеза системы. Перечислим основные из этих особенностей.

К сложным системам, как правило, относят автоматизированные системы управления технологическими процессами (АСУ ТП), научными исследованиями (АСНИ), гибкими автоматизированными производствами (СУ ГАП) и т.п., имеющие большое число датчиков, локальных контуров регулирования и исполнительных устройств. Такие системы характеризуются большой размерностью векторов входа, выхода и состояния, т.е. описываются *многомерными* моделями. Часто эта особенность сочетается с пространственной протяженностью объекта управления (например, в энергетических, городских, транспортных, экономических, экологических системах). и тогда модель объекта имеет *распределенные параметры*, т.е. описывается уравнениями в частных производных. Управляющие воздействия в каждой локальной подсистеме могут (например, с целью упрощения) вырабатываться по информации о состоянии данной подсистемы, т.е. *децентрализованно*. Для упрощения разработки алгоритмов управления многомерными объектами широко используется *декомпозиция* – расщепление исходной задачи на несколько более простых, решаемых независимо.

Следующей особенностью, существенной при построении высококачественных систем управления, является *неопределенность характеристик* объекта управления и внешних воздействий, т.е. неполнота априорной и текущей информации об их параметрах. Причины неопределенности разнообразны: отсутствие "хороших" математических моделей объекта управления (ОУ) на стадии проектирования, отсутствие или недостаточность сведений о возможных условиях работы системы, сложность или дороговизна измерения режимных факторов и т.д. Кроме

того, при эксплуатации системы параметры ОУ и среды функционирования могут изменяться непредвиденным заранее образом и тогда *нестационарность* выступает как один из видов неопределенности. К числу факторов неопределенности в АСУ ТП относятся: изменение режимов работы оборудования (например, нагрузки), нестабильность характеристик сырья и топлива, загрязнение и износ оборудования (в том числе – износ регулирующих органов), старение катализатора и т.д. В системах управления ГАП основным фактором неопределенности является изменение номенклатуры выпускаемых изделий [107]. Для повышения качества управления в период эксплуатации необходимо учитывать имеющуюся неопределенность на этапе проектирования системы, разработки алгоритмов ее функционирования.

Важная тенденция развития автоматизированных систем состоит в расширении сферы их применения. Автоматизированные системы начинают применяться для управления процессами в экономике, экологии, агротехнике и других областях. Сколько-нибудь точные математические модели этих процессов зачастую отсутствуют либо требуют для своего получения длительных и дорогостоящих экспериментов. Таким образом, важность проблемы управления сложными объектами в условиях неопределенности еще возрастает.

Одним из наиболее перспективных путей решения этой проблемы является применение методов адаптации. В адаптивных системах управления информация об объекте и внешних воздействиях собирается в ходе эксплуатации, сразу же обрабатывается и используется для выработки управляющих воздействий. Это позволяет повысить качество управления в условиях неопределенности и нестационарности параметров объекта и среды функционирования.

Стохастичность поведения также является важной чертой, характеризующей сложные объекты управления. Эта черта обусловлена часто не столько наличием каких-то специальных источников случайных помех, сколько неизбежным обилием всякого рода второстепенных (с точки зрения цели управления) процессов. Непредсказуемость поведения удобнее рассматривать как действие случайного фактора, чем разбираться в механизмах второстепенных процессов, протекающих в объекте [154].

Кроме названных причин, существенное влияние на динамику объекта управления может оказывать *нелинейность* его математической модели. Необходимость учсть нелинейности вызывается ростом точности описания процессов в объекте управления, в свою очередь, обусловленным повышенными требованиями к точности системы управления. Переход к нелинейным моделям объекта целесообразен в условиях повышенной маневренности системы, когда среднее время смены режима работы становится сравнимым со временем переходных процессов. Кроме того, нелинейности встречаются при описании исполнительных элементов (зоны нечувствительности, люфты, ограничения и т.п.), а также в моделях статических объектов при построении систем советчиков оператору.

Действие всех перечисленных факторов приводит к тому, что существующие методы построения систем управления зачастую не позволяют добиться требуемого качества их работы (табл. 1.1). Так, например, современные требования к системам регулирования энергоблоков тепло-

Таблица 1.1

Фактор сложности системы	Трудности, порождаемые фактором сложности	Пути преодоления трудностей
1 Большое число переменных входа, выхода и состояния объекта. Распределенность параметров объекта и среды	Рост затрат на расчет и реализацию управления	Упрощение модели ОУ и цели управления (декомпозиция, агрегирование). Упрощение структуры алгоритма управления (децентрализация, иерархизация)
2 Широкая область изменения параметров объекта и условий его функционирования (неопределенность)	Снижение качества и потеря устойчивости систем	Введение контура адаптации
3 Стохастичность, нелинейность, нестационарность объекта и условий его функционирования	"	Усложнение структуры алгоритма управления
4 Неполнота измеряемой информации	"	Введение наблюдателей и фильтров в алгоритм управления

электростанций включают устойчивую работу в диапазоне нагрузок от 30 до 100 % от номинальной при обеспечении точности регулирования основных регулируемых величин 0,3 – 3,0 % от заданных значений. Особенно жесткие требования предъявляются к качеству регулирования температуры пара по тракту, поскольку точность поддержания этой величины существенно влияет на экономичность и надежность работы энергоблока. Так, снижение температуры пара на 10 °C вызывает перерасход топлива на 0,2 %; повышение температуры пара снижает долговечность пароперегревателя [87] и т.д. Снижение средней погрешности регулирования температуры пара с 11 до 6 °C приводит к уменьшению среднего числа отказов парогенератора мощностью 300 МВт с 6,0 до 4,6 отказов корпуса на блок в год [36].

Существующие методы расчета настроек регуляторов по характеристикам энергоблока на 100 %- и 70 %-й нагрузке не обеспечивают при работе на 30 %-й нагрузке не только требуемого качества, но иногда и устойчивости системы. Расчет же по характеристикам на 30 %-й нагрузке (по "наихудшему" варианту) приводит к затягиванию переходных процессов на больших нагрузках и, в конечном итоге, к снижению экономичности и срока службы турбинного оборудования [54].

Применяемое в ряде случаев изменение настроек регуляторов в функции режимных переменных решает данную задачу лишь частично, поскольку не учитывает дрейфа параметров энергоблока в ходе эксплуатации вследствие шлакования котлов, нестабильности характеристик топлива, износа регулирующих органов, заноса рабочих поверхностей турбины солями и т.д. [53, 54].

Высокие требования предъявляются и к системам следящих приборов современных механических устройств (манипуляционных и транс-

портных роботов, станков с ЧПУ и т.д.). Так, следящие приводы манипуляционных роботов должны обеспечивать точность рассогласования программных и реальных значений угловых координат не более $0,01 \dots 0,05$ град; время переходных процессов не более $0,1 \dots 1$ с; устойчивость при существенных возмущениях, вызванных многократными (в десятки раз) изменениями нагрузки [8].

В аналогичных условиях работают системы управления многими сложными технологическими процессами в различных отраслях. Рассмотрим, например, АСУ энергетическими и исследовательскими комплексами, включающими ядерный реактор. Среди задач, возлагаемых на АСУ комплексом, важнейшую роль играет задача управления распределением мощности (энергораспределением) в активной зоне реактора. Успешное решение этой задачи повышает экономичность и эффективность, а также безопасность работы реактора. Препятствием к повышению качества управления энергораспределения является сложность реактора как объекта управления. Причинами, обуславливающими сложность, являются: большое число регулируемых переменных и органов регулирования (до нескольких сотен); распределенность параметров реактора; существенная нелинейность характеристик реактора, в частности, характеристики "реактивность – мощность", проявляющаяся в маневренных режимах; наконец, неопределенность параметров и нестационарность нейтронно-физических процессов в реакторе. К числу факторов неопределенности следует отнести выгорание топлива, отравление продуктами распада и температурные эффекты [63, 174].

Существующие системы далеко не всегда справляются с перечисленными трудностями. Как отмечено в [63], "оптимальное управление энергораспределением требует создания адаптивной системы управления". Аналогичные выводы можно сделать и для других классов технологических процессов [49, 132, 166, 205].

Таким образом, разработка алгоритмов адаптивного управления в сложных системах имеет большое практическое значение. Разработка алгоритма управления соответствует этапу синтеза системы – наиболее ответственному этапу ее создания. На этапе синтеза происходят выбор структуры и расчет параметров алгоритма управления, проверка и уточнение алгоритма по результатам моделирования (вычислительного эксперимента). Методам синтеза адаптивных систем управления и посвящена эта книга.

Прежде, чем переходить к анализу существующих методов синтеза адаптивных систем, дадим постановку задачи синтеза.

§ 1.2. Постановка задачи синтеза адаптивной системы управления

Опишем сначала задачу синтеза адаптивной системы управления на содержательном уровне. Рассмотрим объект управления, на который влияют измеряемые возмущения $r = r(t)$, неизмеряемые возмущения $\varphi = \varphi(t)$ и управляющие воздействия $u = u(t)$. Наблюдению доступны выходные переменные $y = y(t)$. Поведение объекта зависит также от ряда неизвестных параметров, совокупность которых обозначим

Рис. 1.1. Структура адаптивной системы управления

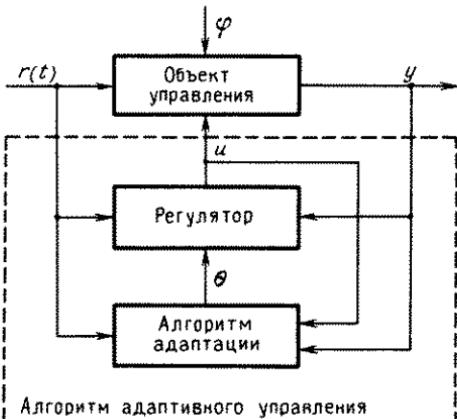
через ξ . Задано множество Ξ возможных значений ξ , определяющее класс допустимых объектов и возмущений. Задана также цель управления, определяющая желаемое поведение объекта.

Требуется определить (синтезировать) алгоритм вычисления управляющих воздействий, использующий измеряемые величины, не зависящий от $\xi \in \Xi$ и обеспечивающий для любого $\xi \in \Xi$ достижение заданной цели управления.

Вектор неизвестных параметров ξ обычно состоит из коэффициентов уравнений, составляющих математическое описание объекта, а также из коэффициентов, определяющих изменение внешних воздействий (состояния среды). Точные значения этих коэффициентов могут быть недоступны измерению, или их измерение может требовать значительных затрат времени и средств. Кроме того, вектор ξ может содержать абстрактные параметры, описывающие неизмеряемые возмущения, обусловленные неточностью описания объекта. Во всех случаях вектор ξ будем считать *квазистационарным* [138]: постоянным или меняющимся медленно (меньше, чем происходят динамические процессы в объекте и изменение внешних воздействий). Множество (класс) Ξ характеризует имеющуюся априорную информацию об объекте: чем меньшими сведениями о параметрах объекта располагает разработчик системы, тем более "обширным" является множество Ξ .

Описанная задача является задачей управления в условиях неопределенности. Ее можно было бы решать поэтапно: вначале изучить объект с целью определения неизвестных параметров, а затем, используя полученную информацию, одним из традиционных методов найти алгоритм управления. Однако такая стратегия управления требует дополнительного времени на изучение объекта, что приводит к задержке в принятии решений. Кроме того, поэтапная стратегия неприменима в нестационарных условиях: во время проведения экспериментов и тем более впоследствии параметры объекта и среды могут измениться, а качество построенной системы может нарушиться.

Более совершенной стратегией управления является адаптивная стратегия, состоящая в одновременном изучении объекта и управлении им. При адаптивном подходе правило определения управляющих воздействий автоматически изменяется в процессе работы. Общий алгоритм адаптивного управления имеет двухуровневую структуру (рис. 1.1). Алгоритм 1-го уровня (*алгоритм регулирования* или *алгоритм основного контура*) зависит от вектора параметров θ ; при каждом $\xi \in \Xi$ он должен обеспечивать (при соответствующем выборе $\theta = \theta_*(\xi)$) достижение цели



управления. Алгоритм 2-го уровня (*алгоритм адаптации*) должен изменять (настраивать) вектор θ таким образом, чтобы обеспечить достижение цели управления при неизвестном $\xi \in \Xi$. Совокупность алгоритмов регулирования и адаптации будем называть *алгоритмом адаптивного управления*, а динамическую систему, состоящую из объекта и устройства, реализующего алгоритм адаптивного управления, – *адаптивной системой управления* (АдСУ).

Задачи адаптивного управления можно разделить на два класса. В одном случае вид алгоритма регулирования задан заранее с точностью до параметров и требуется определить лишь алгоритм адаптации (синтез при фиксированной структуре алгоритма регулирования). В другом случае вид алгоритма регулирования также подлежит определению (синтез при свободной структуре алгоритма регулирования).

Переходя к более точным формулировкам, сузим рассматриваемые классы объектов управления и алгоритмов. Пусть сначала, для определенности, время дискретно: $t = t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, 2, \dots$, а входные и выходные величины в объекте непрерывны, точнее $u_k \in R^n$, $y_k \in R^l$, $r_k \in R^s$ (величины, относящиеся к моменту t_k , будем снабжать индексом k). Объект будем описывать уравнением состояния, определяющим изменение во времени вектора состояния объекта $x_k \in R^n$. Кроме того, в описание объекта входит уравнение наблюдения, определяющее зависимость вектора $y_k \in R^l$ от состояния и входных величин. Таким образом, математическая модель объекта в соответствии с рис. 1.1 имеет вид

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k, r_k, \varphi'_k, \xi), \quad (1.1)$$

$$y_k = G(x_k, u_k, r_k, \varphi''_k, \xi), \quad (1.2)$$

где $F(\cdot)$, $G(\cdot)$ – некоторые функции, векторы φ'_k , φ''_k отражают действие возмущений на объект и на процесс измерений. Отметим, что в (1.1) могут входить уравнения, описывающие исполнительные, измерительные, корректирующие устройства и т.п. так, что (1.1) описывает всю неизменяющую часть системы управления ("обобщенный объект" [94]).

Заметим также, что в частном случае правая часть (1.1) может не зависеть от x_k . Такие модели используются, когда переходные процессы в объекте отсутствуют или время их затухания меньше времени изменения внешних воздействий. В этом случае модель (1.1) не учитывает динамики объекта, т.е. является *статической*. В этом случае можно заменить x_{k+1} на x_k в левой части (1.1) и, подставляя (1.1) в (1.2), получить модель объекта в виде уравнения "вход – выход":

$$y_k = f(u_k, r_k, \varphi_k, \xi). \quad (1.3)$$

При описании сложных технологических процессов статическая модель объекта часто задается неявной зависимостью

$$\Phi(y_k, u_k, r_k, \varphi_k, \xi) = 0. \quad (1.4)$$

Алгоритмы управления и адаптации также будем записывать в виде уравнений состояния

$$u_k = U(u_{k-1}, y_k, r_k, \theta_k), \quad (1.5)$$

$$\theta_{k+1} = \Theta(\theta_k, y_k, u_k, r_k), \quad (1.6)$$

где $\theta_k \in R^N$. Таким образом, динамика всей системы описывается уравнениями (1.1), (1.2), (1.5), (1.6), в которых функции $F(\cdot)$, $G(\cdot)$ заданы (с точностью до неизвестных параметров ξ), а функции $U(\cdot)$, $\Theta(\cdot)$ подлежат определению.

Перейдем к описанию целей управления (ЦУ). В простейшем случае ЦУ задается в виде целевого неравенства

$$Q_{k+1} \leq \Delta, \quad (1.7)$$

где Q_k – значение некоторого целевого функционала, вычисленное в момент времени k , $\Delta \geq 0$ – порог. Чаще всего $Q_k = Q(y_k)$, где $Q(y)$ – оценочная функция. Выбирать функцию $Q(y)$ нужно так, чтобы желаемое поведение объекта соответствовало малым значениям $Q(y)$. Например, в задаче поддержания выходной переменной объекта $y_{k+1} \in R^1$ на заданном уровне y_* можно взять $Q(y) = (y - y_*)^2$. Кроме самого факта сходимости состояния объекта к заданным значениям, цель управления может выражать и динамику сходимости (например, скорость сходимости).

Распространенным способом задания динамических характеристик адаптивной системы управления является использование так называемой *эталонной модели*: вспомогательной динамической системы, обладающей желаемой реакцией на внешние воздействия. Цель управления при этом состоит в таком выборе управляющих воздействий, чтобы состояние объекта приближалось с течением времени к состоянию эталонной модели. Например, эталонная модель может задаваться "эталонным" разностным уравнением

$$x_{k+1}^M = A_M x_k^M + b_M r_k.$$

Коэффициенты модели – матрица A и вектор b_M выбираются так, чтобы изменение x_{k+1}^M под действием изменений задающего воздействия r_k носило желаемый характер. При этом цель управления может быть задана в виде (1.7) при $Q_k = \|x_k - x_k^*\|^2$. Возможно, что значение целевого функционала в момент k зависит от всей предшествующей траектории системы, т.е. *) $Q_k = Q_k[x_0^k, u_0^k, \xi]$. Другие варианты задания цели управления будут рассмотрены ниже. При случайном характере внешних воздействий будем задавать ЦУ в виде

$$MQ(y_{k+1}) \leq \Delta. \quad (1.8)$$

Как уже было сказано, на первых шагах функционирования системы цель управления может не выполняться из-за недостатка априорной информации о характеристиках объекта и внешних воздействиях. Поэтому в задачах адаптивного управления следует требовать, чтобы цель достигалась асимптотически: при достаточно большом k . Таким образом, приходим к заданию цели в виде предельных целевых неравенств

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q(y_{k+1}) \leq \Delta, \quad (1.9)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} MQ(y_{k+1}) \leq \Delta. \quad (1.10)$$

*) Напомним, что через x_s^k обозначается набор значений x_0, \dots, x_k , представляющий траекторию процесса x_s при $0 \leq s \leq k$; смысл обозначения u_s^k аналогичен.

Можно также задать в качестве цели сходимость в область за конечное время (конечную сходимость): выполнение для некоторого $k_* > 0$ неравенств

$$Q_{k+1}(y_{k+1}) \leq \Delta \text{ при } k = k_*, k_* + 1, \dots \quad (1.11)$$

Теперь можно дать точную постановку задачи синтеза адаптивной системы управления.

Определение 1.1. Система (1.1), (1.2), (1.5), (1.6) называется *адаптивной в классе Ξ по отношению к цели управления*; заданной одним из неравенств (1.9) – (1.11), если для любого $\xi \in \Xi$ и любых начальных условий x_0, u_0, θ_0 соответствующее неравенство выполняется. ■

Задача синтеза адаптивной системы управления при свободной структуре алгоритма регулирования состоит в определении (по уравнениям (1.1), (1.2), классу Ξ и цели управления) алгоритма регулирования (1.5) и алгоритма адаптации (1.6), не зависящих от $\xi \in \Xi$, так, чтобы система (1.1), (1.2), (1.5), (1.6) была адаптивна в классе Ξ по отношению к заданной цели. Аналогично ставится задача синтеза при фиксированной структуре алгоритма регулирования (1.5).

Отметим, что начальные условия в приведенной постановке считаются произвольными, что говорит о высоком уровне априорной неопределенности. На практике начальные значения настраиваемых параметров определяются на основе априорных (предварительных) оценок параметров объекта. Тем не менее эти оценки могут быть достаточно далеки от истинных значений, и на начальных шагах процесса управления следует считаться с возможностью нарушения целевых неравенств.

Отметим также, что с точки зрения практики достижения в системе асимптотических целей (1.9) – (1.11) явно недостаточно: система может считаться работоспособной, только если цель достигается за приемлемое время. Однако требование произвольности начальных условий приводит к тому, что априорные оценки времени адаптации оказываются слишком грубыми. Поэтому как при изложении различных методов синтеза, так и непосредственно при синтезе удобно "разделить трудности": отложить вопрос оценки времени адаптации и решать его на этапе выбора параметров регулятора. Соответственно рассмотрение этого вопроса отложим до главы 6.

Отметим, наконец, что при рассмотрении методов синтеза АдСУ (т.е. в главах 1 – 5) удобно не различать математическую модель объекта (системы) управления и собственно объект (систему), т.е. реальный процесс или устройство. Вопрос о соответствии модели реальному процессу должен решаться при разработке конкретной системы (см. главы 6 – 8).

Постановка задачи охватывает традиционные, "неадаптивные" задачи управления. В "неадаптивном" случае параметры объекта предполагаются известными, т.е. множество допустимых объектов Ξ состоит из одного элемента. Нетривиальные задачи адаптивного управления возникают тогда, когда "размер" множества Ξ (уровень неопределенности) достаточно велик и традиционные методы синтеза регуляторов оказываются непригодными, т.е. не существует фиксированного θ такого, что цель управления достижима при всех $\xi \in \Xi$ [10].

Приведенная постановка допускает развитие. В частности, может возникнуть необходимость учета ограничений на переменные состояния системы, задаваемых в виде неравенств

$$R(x_k, u_k, \theta_k) \leq 0, \quad (1.12)$$

где $R(\cdot)$ – функция ограничений. Система (1.1), (1.2), (1.5), (1.6) будет в этом случае называться адаптивной в классе Ξ , если для любого $\xi \in \Xi$ при всех $k = 0, 1, 2, \dots$ выполняются ограничения (1.12) и выполняется целевое неравенство (1.9) или (1.10) при $k \geq k_*$.

В рамках приведенной схемы можно рассматривать также нестационарные задачи, когда вектор неизвестных параметров ξ меняется во времени, т.е. $\xi = \xi(k)$. При этом вектор "идеальных" параметров регулятора θ , также зависит от времени: $\theta_* = \theta_*(k)$.

В нестационарных задачах вектор настраиваемых параметров θ_k должен для достижения цели "отслеживать" дрейф неизвестных параметров, приспосабливаясь к изменяющимся условиям. Ясно, что такое поведение системы возможно лишь при медленном изменении $\xi(k)$ по сравнению с изменением состояния объекта x_k , когда в измерениях x_k накапливается достаточно информации о дрейфе $\xi(k)$. При этом быстрые процессы управляются первым уровнем системы – *регулятором*, а медленные изменения параметров отслеживаются вторым уровнем – *адаптором*. Двухуровневая структура алгоритма адаптивного управления находится в соответствии с разделением движений объекта на быстрые (координатные) и медленные (параметрические).

Предположение о медленности изменения неизвестных параметров (*гипотеза квазистационарности*) практически означает, что параметры объекта считаются постоянными, "замороженными". Если же темп изменения $\xi(k)$ сравним с темпом процессов в объекте и темпом изменения внешних воздействий, то целесообразно задаваться параметризованным классом законов дрейфа $\xi(k)$ (моделью дрейфа) и параметры закона считать новыми неизвестными (но постоянными) параметрами. (Например, $\xi(k) = \xi' + \xi''k$, где ξ', ξ'' – новые неизвестные.) Тем самым задача сводится к квазистационарной.

Аналогичным образом ставится задача синтеза АдСУ, функционирующей в непрерывном времени. В этом случае будем описывать объект уравнениями

$$\dot{x} = F(x, u, t, \xi), \quad y = G(x, u, t, \xi), \quad (1.13)$$

где $x \in R^n$, $y \in R^l$, $u \in R^m$, $t \geq 0$, а цель управления задавать соотношением

$$Q_t \leq \Delta \text{ при } t \geq t_*, \quad (1.14)$$

где $Q_t = Q_t[x_0^t, u_0^t, \xi]$ – целевой функционал. В большинстве случаев $Q_t[\cdot]$ представляет собой функцию текущего состояния объекта: $Q_t = Q(x(t), t)$ (локальный функционал).

Задача синтеза АдСУ состоит в нахождении алгоритма управления из заданного класса двухуровневых алгоритмов вида

$$u(t) = U_t[y_0^t, u_0^t, \theta_0^t], \quad (1.15)$$

$$\theta(t) = \Theta_t[y_0^t, u_0^t, \theta_0^t], \quad (1.16)$$

обеспечивающего достижение цели (1.14) в системе (1.13), (1.15), (1.16) для любого $\xi \in \Xi$. Здесь $U_t[\dots]$, $\Theta_t[\dots]$ – некоторые операторы. Аналогично случаю дискретного времени может быть фиксировано время адаптации t_* , заданы дополнительные фазовые ограничения и т.п.

Описанная постановка относится к классу детерминистских, поскольку в ней требуется выполнение цели на каждой траектории системы. Если АдСУ функционирует в стохастической среде, то цель (1.14) заменяется "усредненной" целью

$$MQ_t \leq \Delta \quad \text{при } t \geq t_* . \quad (1.17)$$

Если операторы (1.15), (1.16) не обладают последствием, а случайные факторы, действующие на объект (1.13), описываются процессом белого шума, то математическая модель объекта имеет вид стохастического дифференциального уравнения (уравнения Ито [196])

$$dx = F_0(x, u, t, \xi)dt + F_1(x, u, t, \xi)dw(t), \quad (1.18)$$

где $w(t)$ – винеровский случайный процесс.

Наконец, уравнения, аналогичные (1.2)–(1.5), можно выписать и для случая, когда пространства входов, выходов и состояний ОУ конечны, т.е. для объектов, дискретных по состоянию. Этот класс объектов соответствует автоматным моделям и процессам, описываемым управляемыми марковскими цепями.

§ 1.3. Методы синтеза адаптивных систем

1.3.1. Точные методы. В соответствии с двухуровневой структурой АдСУ процедура синтеза разбивается на два этапа: *синтез основного контура* и *синтез контура адаптации* [39, 138]. Сначала синтезируется основной контур так, чтобы обеспечить достижение цели управления (ЦУ) в предположении, что параметрические возмущения постоянны и известны. Структура основного контура должна обеспечивать достижение ЦУ при любых возможных значениях $\xi \in \Xi$. Это означает, что для любого $\xi \in \Xi$ должен существовать такой вектор "идеальных" значений настраиваемых параметров $\theta_*(\xi)$, что в системе при $\theta(t) = \theta_*(\xi)$ достигается ЦУ. Если основной контур, удовлетворяющий этому условию, удалось синтезировать, то для решения исходной задачи достаточно найти алгоритм адаптации (1.6) или (1.16) так, чтобы обеспечить сходимость

$$\theta(t) \rightarrow \theta_*(\xi) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (1.19)$$

Часто оказывается достаточным удовлетворить (1.19) в каком-нибудь ослабленном смысле, лишь бы достигаемая при этом вспомогательная цель (цель адаптации) обеспечивала достижение исходной ЦУ.

Проанализируем сначала существующие методы синтеза основного контура. Широкое распространение получил метод, основанный на *условиях инвариантности* [70, 138]. Пусть для определенности время непрерывно, а ЦУ задается при помощи эталонной модели

$$\dot{x}_M = F_M(x_M, r(t)), \quad (1.20)$$

где $x_M \in R^n$ – вектор состояния модели, $r(t) \in R^s$ – вектор измеряемых

внешних воздействий. Будем искать управляющее воздействие $u(t)$ как решение уравнения

$$F(x, u, t, \xi) = F_m(x, r), \quad (1.21)$$

выражающего совпадение уравнений замкнутой системы и эталонной модели при любых изменениях параметров $\xi \in \Xi$ (такой подход называют еще *методом эталонной модели*). Решение (1.21) (если оно существует) имеет вид

$$u_*(t) = U_*(x(t), r(t), t, \xi) \quad (1.22)$$

и может быть названо "идеальным" управлением. Разрешимость (1.21) является основным условием применимости метода. Для линейного объекта управления (ОУ) условия разрешимости выражаются линейными соотношениями между коэффициентами ОУ и коэффициентами эталонной модели (*условия идеальной подследующей модели, или условия Эрцбергера [225], условия адаптируемости [150, 205], условия согласованности эталонной модели и ОУ [178]* и др.).

Другой метод синтеза основного контура – *метод модального управления*. При модальном синтезе идеальное управление выбирается так, чтобы обеспечить заданные показатели затухания переходных процессов [25, 62, 178] (например, заданные собственные числа линейного основного контура). Иногда метод модального управления накладывает меньше ограничений, чем метод инвариантности, но в ряде случаев (например, для линейных ОУ канонического вида) они совпадают.

Третий метод – *оптимальный синтез основного контура*. Он состоит в том, что ЦУ переформулируется как оптимизация некоторого асимптотического (при $t \rightarrow \infty$) показателя качества. Задача оптимизации решается аналитически, и найденная структура берется в качестве структуры основного контура. Большая часть работ этого направления относится к квадратичным целевым функционалам, соответствующим задаче стабилизации, и линейным дискретным ОУ [177, 178] (в этих случаях легче получить аналитическое решение оптимальной задачи). В работах [103, 161] рассматривалась детерминистская постановка ([161] – прямой подход, [103] – идентификационный подход), а в работах [177, 178, 201, 216, 227] – стохастические постановки, основанные на идентификационном подходе. Для непрерывных ОУ получил распространение метод, связанный с применением идентификационного подхода и критерия обобщенной работы [29, 95, 96]. Этот метод развит и для нелинейных ОУ.

Синтез идеального закона регулирования является лишь первым этапом синтеза основного контура. Вторым, завершающим этапом является выбор настраиваемых параметров. На этом этапе анализируется вид идеального закона (1.22). Как правило, правая часть (1.22) зависит от ξ не непосредственно, а через некоторые функции $c_j^*(\xi)$, $j = 1, \dots, N_1$ ("существенные параметры", в терминологии [178]). Например, эта зависимость может быть линейной:

$$u_*(t) = \sum_{j=1}^{N_1} c_j^*(\xi) \psi_j(x(t), r(t), t), \quad (1.23)$$

где $\psi_j(\cdot)$ – известные функции, значения которых доступны измерению.

Соотношение типа (1.23) используется для выбора структуры основного контура на основе прямого или идентификационного (непрямого) подхода.

При *прямом подходе* реальный закон регулирования получается при замене неизвестных постоянных коэффициентов $c_j^*(\xi)$ настраиваемыми $\theta_j = \theta_j(t)$, так что уравнение регулятора имеет вид

$$u(t) = \sum_{j=1}^{N_1} \theta_j \psi_j(x(t), r(t), t). \quad (1.24)$$

При *идентификационном подходе* в качестве настраиваемых параметров берутся оценки неизвестных параметров: $\theta = \hat{\xi}$; уравнение регулятора приобретает вид

$$u(t) = \sum_{j=1}^{N_1} c_j^*(\theta) \psi_j(x(t), r(t), t). \quad (1.25)$$

В обоих случаях синтез основного контура заканчивается составлением уравнения так называемого *обобщенного настраиваемого объекта* (ОНО) [138], приводимого к виду

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{F}(\tilde{x}, \theta, t, \xi), \quad (1.26)$$

где $\tilde{x} \in R^n$ – вектор состояния ОНО, который может включать состояния собственно ОУ, исполнительных, измерительных и корректирующих устройств, регулятора основного контура, настраиваемой модели ОУ и т.д.; $\theta \in R^N$ – вектор настраиваемых параметров.

Усложнение задач управления заставляет разрабатывать методы синтеза АдСУ с упрощенной структурой. К их числу следует отнести *системы с неявной эталонной моделью* [3, 10, 146, 178, 181, 197]. Для выбора структуры системы используется как прямой [3, 10, 181, 197], так и идентификационный [146, 205] подходы, результаты применяются к важным случаям ПИ- и ПИД-регуляторов в основном контуре [14, 146, 205].

Перейдем к методам синтеза алгоритма адаптации, начав с непрерывных систем. Для линейных ОУ широкое распространение получили метод функций Ляпунова (см. [4, 27, 91, 138, 178, 197, 248]), а также библиографию в [39, 57, 134, 178, 240]), метод гиперустойчивости [239], градиентный метод с использованием функций чувствительности [51, 78, 90, 93, 163]. Перечисленные методы применяются к синтезу алгоритмов в дифференциальной форме (алгоритмов параметрической адаптации) [71, 91, 138], комбинированных (сигнально-параметрических) алгоритмов [25, 139, 239], алгоритмов в конечной форме (алгоритмов сигнальной адаптации) [25, 172, 246]. Центр тяжести исследований лежит в области учета возмущений и неполноты измерений, упрощения алгоритмов, ускорения их сходимости и т.д.

Что касается управления нелинейными ОУ в условиях неопределенности, то интенсивные работы в этой области развернулись лишь в последние годы. Достаточно общие результаты получены методами теории бинарных систем [65–67], теории систем с разрывным управлением [151, 173], управления по вектору скорости [40], минимаксного подхода к управлению и наблюдению [103, 104]. Продолжаются исследования поисковых алгоритмов [77, 89, 116, 153].

В 1976 г. А.А. Красовский [95, 96] установил для задачи идентификации с адаптивной моделью общий вид алгоритма адаптации, оптимального по критерию обобщенной работы. Оптимальный алгоритм описывается функциональным рядом и в чистом виде нереализуем, однако в первом приближении он совпадает с хорошо известными беспоисковыми градиентными алгоритмами [78, 163]. Если взять второе приближение и предположить высокочастотность входного сигнала и квазистационарность процесса настройки, то получится семейство алгоритмов, частные случаи которых синтезировались ранее с помощью квадратичных функций Ляпунова. Именно, для случая гладкого целевого функционала $Q(x)$ и уравнения ОНО вида (1.26) алгоритм [96] имеет вид

$$\dot{\theta} = -\Gamma \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta} \right)^T \nabla_x Q$$

или, в эквивалентной записи,

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla_{\theta} \dot{Q}, \quad (1.27)$$

где $\dot{Q} = \tilde{F}^T \nabla_x Q(\cdot)$ – скорость изменения $Q(\cdot)$ вдоль траекторий ОНО, $\Gamma = \Gamma^T > 0$ – положительно-определенная матрица. Исследования алгоритмов типа (1.27), названных в [184, 185] "алгоритмами скоростного градиента", разделились на две ветви: поисковую и беспоисковую. Ю.И. Неймарк и его ученики изучали свойства адаптивных систем при реализации алгоритма (1.27) в виде автоматного поискового оптимизатора [89, 126], а также дискретную форму (1.27) [88]. Беспоисковый алгоритм (1.27) и его модификации исследовались в работах [18, 57, 123, 178, 184–191, 198]. Были получены критерии применимости огрубленных алгоритмов в условиях возмущений [123, 178], нестационарности объекта [57], наличия фазовых ограничений [18], условия сходимости настраиваемых параметров (1.19) [178]. Исследованы алгоритмы с интегральным целевым функционалом [167, 184], в дискретизованной [57] и конечной [189, 190] формах, при наличии запаздывания [198] и сингулярных возмущений [133, 145, 186]. В работах [11, 12, 184] показано, что схема (1.27) охватывает широкий класс беспоисковых алгоритмов адаптации и идентификации, синтезированных ранее методом функций Ляпунова (см. главу 3).

В задачах адаптивного управления с дискретным временем большинство результатов относится к линейным ОУ. Основной контур выбирается из условий адаптируемости к эталонной модели или оптимальности по квадратичным критериям. В детерминистской постановке эффективные и простые алгоритмы адаптации градиентного типа синтезированы при помощи метода рекуррентных целевых неравенств [175, 178, 207, 210]. Ряд новых алгоритмов получен в рамках минимаксного подхода [103], а также метода адаптации по скорости убывания функции Ляпунова [88]. В стохастических задачах наиболее детально изучены метод стохастической аппроксимации и рекуррентные модификации метода наименьших квадратов [102, 140–142, 176, 177, 200, 216, 227]. Алгоритмы для нелинейных ОУ предлагались в [210] (для детерминистского варианта) и в [80] (для стохастического варианта). Сравнение различных методов приведено в обзорах [134, 157, 201, 233].

Развивается подход к синтезу дискретных алгоритмов адаптации по упрощенной непрерывной модели (непрерывному прототипу) [52, 55–57, 102, 238, 242]. Методы адаптивного управления объектами, дискретными по пространству и по времени (методы адаптивного выбора вариантов), развиваются на основе теории марковских цепей и вероятностных итеративных алгоритмов. Состояние этого направления отражено в монографиях [122, 165].

Наконец, отдельно следует рассмотреть методы адаптивного управления статическими объектами. Основными типами целей управления здесь являются:

- приближение выходной величины ОУ к заданному процессу (задача слежения);
- приближение выходной величины или некоторой функции от нее к максимально (минимально) возможному значению (задача оптимизации).

В основу классификации методов управления статическими объектами в условиях неопределенности удобно положить уровень требуемой априорной и текущей информации о математической модели ОУ, а также тип возмущений (детерминированный или стохастический). К первой группе относятся методы, использующие минимальную априорную информацию о статической характеристике ОУ (монотонность, унимодальность, выпуклость и т.п.). Для детерминированных задач эти методы основаны на численных алгоритмах решения систем уравнений и неравенств [130] (задача слежения) и поисковых алгоритмов оптимизации [141] (задача оптимизации). В стохастическом случае основой являются вероятностные итеративные алгоритмы [135, 141, 142, 199–202, 238].

Другая группа методов основана на построении в окрестности текущей (опорной) точки локальной модели ОУ по результатам серии "пробных" шагов. Как правило, используются наиболее простые модели — линейные по приращениям координат:

$$f(u) = \sum_{i=1}^m \theta_i(u_i - \bar{u}_i) + f(\bar{u}) + \varphi.$$

Для гладких функций $\theta_i = \partial f / \partial u^{(i)}$, т.е. построение локальной модели состоит в оценивании градиента $\nabla_u f(u)$. После оценивания параметров локальной модели делается "рабочий" шаг по модели, т.е. на основании собранной информации. Затем процедура повторяется в новой опорной точке и т.д. К этому классу относятся многие поисковые методы [116, 135, 141, 154, 157] методы планирования экстремальных экспериментов [110] и т.д.

Наконец, наибольшую априорную информацию используют методы, основанные на глобальной параметризованной модели ОУ, т.е. на задании вида (структуре) статической характеристики ОУ с точностью до конечного числа неизвестных параметров $\xi \in \Xi$. Структура математической модели часто оказывается известной по физическому смыслу задачи (например, во многих задачах АСУ ТП), и ее учет может повысить эффективность алгоритмов. В частности, появляется возможность использовать при синтезе системы принцип управления по возмущению.

Тип применяемых методов зависит от количественного уровня неопределенности, т.е. от "размера" множества Ξ . При относительно "небольшом"

Здесь применяются методы управления с обратной связью [69, 83, 135], в противном случае используются принципы параметрической адаптации [57, 59, 132, 199]. В задаче слежения методы параметрической адаптации разработаны, в основном, для явных линейных моделей ОУ [57, 132]. В задаче оптимизации известные результаты либо относятся к достаточно узким классам моделей (например, к линейным [69, 83]), либо требуют выполнения трудно проверяемых условий [59]. Методы решения задач используют, в основном, градиентный подход. При анализе и выборе метода решения нужно иметь в виду, что возмущения во многих практических задачах вызваны, в первую очередь, погрешностями модели ОУ и поэтому не обладают устойчивыми статистическими свойствами.

1.3.2. Приближенные методы. Несмотря на наличие множества результатов по синтезу АдСУ, ряд важных практических задач до сих пор не имеет удовлетворительного решения. Это объясняется тем, что условия применимости точных методов во многих практических случаях не выполняются. Наибольшие трудности обычно вызывает сложность математической модели ОУ (включая модели внешних воздействий) – высокий порядок уравнений, нелинейность, нестационарность, стохастичность и т.д. Поэтому для практики представляет интерес развитие и обоснование приближенных декомпозиционных методов синтеза, основанных на упрощении модели объекта и синтезе по упрощенной модели.

Отметим, что для обоснования правомерности упрощения недостаточно оценивать степень изменения уравнений ОУ. Поскольку поведение ОУ в первую очередь определяется управляющими воздействиями, необходимо иметь утверждения о связи свойств исходной и упрощенной АдСУ в целом, с учетом алгоритма управления. С практической точки зрения системы, синтезированные по упрощенной модели ОУ, обладают следующими дополнительными преимуществами:

- упрощается структура управляющего устройства, а значит, и его реализация;
- упрощается и ускоряется расчет АдСУ вследствие упрощения модели ОУ и уменьшения разброса ее параметров (в частности, постоянных времени);
- повышается грубость (робастность) и помехоустойчивость АдСУ;
- снижаются требования к измеряемой информации.

Основой упрощения системы и декомпозиции задачи синтеза АдСУ являются методы теории возмущений [38, 120, 136, 256], методы скалярных и векторных функций Ляпунова [39, 109, 112, 113] и др. Для построения упрощенной модели ОУ используются линеаризация, понижение порядка уравнений ОУ, отbrasывание возмущений и т.п. Мощным методом является разделение движений (процессов) в ОУ на быстрые и медленные с переходом к редуцированной модели для медленных движений. Центральное место среди методов разделения движений занимают метод усреднения, ведущий начало от работ Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [99], Б. Ван дер Поля [33] и развивающий в настоящее время Н.Н. Боголюбовым, Ю.А. Митропольским и их учениками, а также метод сингулярных возмущений, фундаментальные результаты по обоснованию которого принадлежат Н.Н. Красовскому [86, 97], Л.С. Понtryагину [144], А.Н. Тихонову [170] и их ученикам (см., например, обзоры и монографии [32,

34, 117, 118, 120]). Методы разделения движений развивались применительно к задачам теории управления [38, 44, 114, 136, 173, 253–255], они применялись также к анализу отдельных классов адаптивных систем непрерывного [90, 123, 125, 168, 229–232] и дискретного [81, 238, 242, 245, 257] времени. Известны и другие методы построения упрощенных моделей адаптивных систем [92, 163, 168].

Анализ перечисленных результатов показывает, что для применения к задачам анализа и синтеза адаптивных систем управления сложными нелинейными объектами требуется установить условия близости свойств исходной и упрощенной систем на бесконечном промежутке для случаев, когда упрощенная система не является равномерно асимптотически устойчивой, а ее правые части растут сверхлинейно. Кроме того, в практических задачах требуются оценки допустимой величины малого параметра.

1.3.3. Автоматизированный синтез. Даже сочетание точных и приближенных методов может не обеспечить разработку высококачественной системы управления в приемлемые сроки: решение практических задач оказывается невозможным без применения ЭВМ и средств автоматизированного проектирования. Вопросы автоматизированного проектирования систем управления в последние годы интенсивно разрабатываются [7, 128, 162]. Задача автоматизированного синтеза относится к функционально-структурному уровню проектирования [128]. Вследствие многофункциональности она, по-видимому, недоступна полной формализации и должна решаться в режиме диалога "проектировщик – ЭВМ". Таким образом, необходима разработка соответствующего математического и программного обеспечения, направленного на устранение промежуточных звеньев между проектировщиком и ЭВМ.

В настоящее время автоматизация структурного синтеза систем находится еще на начальном этапе. Основной эффект приносит автоматизация расчета, коррекции и оптимизации параметров алгоритмов управления на основе аналитических методов и моделирования на ЭВМ. Поэтому математическое и программное обеспечение существующих систем автоматизированного синтеза АдСУ в первую очередь облегчает составление заданий для ЭВМ на описание проектируемой системы и действий по ее расчету, моделированию и оптимизации [7, 148, 131]. Однако уже начаты работы по автоматизации сравнения и выбора вариантов структур систем на основе методов искусственного интеллекта (теории нечетких систем [129, 221], фреймовых моделей [127], экспертных систем [147]).

§ 1.4. Обсуждение

Анализ особенностей задач управления в сложных системах показывает, что адекватные им методы должны быть применимы к многомерным, нелинейным, стохастическим объектам. Сложность реализации алгоритмов управления должна расти медленно по сравнению с размерностью задачи. С этой точки зрения перспективно применение беспоисковых методов I-го порядка на основе схем градиента и скоростного градиента.

Попытка учета слишком многих факторов в структуре алгоритма управления может привести к чрезмерному усложнению системы и, как

следствие, к потере качества, трудностям реализации и т.д. Поэтому, кроме точных методов, приобретают важное значение и приближенные методы, основанные на синтезе по упрощенной модели задачи (декомпозиция, децентрализация и т.д.).

Наконец, для решения задач адаптивного управления в сложных системах необходимы методические и программные средства автоматизации синтеза адаптивных систем. Эти средства должны облегчать и ускорять проведение типовых расчетов, моделирования, параметрической оптимизации систем, сравнения и выбора алгоритмов в режиме диалога с ЭВМ.

Методам и средствам точного, приближенного и автоматизированного синтеза адаптивного управления и посвящены последующие главы книги.

Глава 2

АЛГОРИТМЫ СКОРОСТНОГО ГРАДИЕНТА

Излагается общий подход к синтезу систем управления динамическими объектами на основе алгоритмов скоростного градиента (АСГ). Эти алгоритмы являются непрерывными аналогами градиентных алгоритмов и предписывают изменять управляющие (настраиваемые) переменные пропорционально градиенту скорости изменения целевого функционала в силу уравнения объекта. В зависимости от задания исходной математической модели объекта АСГ могут применяться как для синтеза основного контура адаптивной системы управления, так и для синтеза контура адаптации. Описываются варианты АСГ, соответствующие различным типам целевых функционалов, а также алгоритмы комбинированных типов. Предложены способы огрубления АСГ для обеспечения их работоспособности в условиях возмущений и нестационарности объекта. Рассмотрены АСГ в задачах децентрализованного управления и в задачах с неявно заданной моделью объекта. Для всех описанных алгоритмов установлены условия их применимости, при которых в замкнутой системе достигается заданная цель управления (ЦУ).

§ 2.1. Задача синтеза непрерывного алгоритма адаптации

Исходными данными для синтеза алгоритма адаптации являются уравнение обобщенного настраиваемого объекта (1.26) (далее называемого для краткости "объект") и цель управления. Будем считать, что объект задан уравнением

$$\dot{x} = F(x, \theta, t), \quad (2.1)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния объекта, $\theta \in R^m$ – вектор управления (настраиваемых параметров), вектор-функция $F(\cdot)$ определена при всех $x \in R^n$, $\theta \in R^m$, $t \geq 0$, кусочно-непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x , θ . Зависимость $F(\cdot)$ от неизвестных параметров ξ будем опускать, поскольку в данной главе это не вызовет недоразумений.

Цель управления, в соответствии с § 1.3, зададим в виде

$$Q_t \leq \Delta \quad \text{или} \quad t > t_*, \quad (2.2)$$

где Q_t – целевой функционал (постоянные Δ , t_* могут быть заданы или нет, в зависимости от конкретной задачи). Будем различать два типа целевых функционалов: локальный и интегральный. *Локальным* называется функционал вида $Q_t = Q(x(t), t)$, где $Q(x, t)$ – скалярная функция $n+1$ переменных. Функционал вида

$$Q_t = \int_0^t R(x(s), \theta(s), s) ds,$$

где $R(x, \theta, t)$ – скалярная функция $n + m + 1$ переменных, будем называть *интегральным*.

Становится задача: определить алгоритм управления (адаптации) $\theta(t) = \Theta_t[x_0^t, \theta_0^t]$ (2.3)

так, чтобы в системе (2.1), (2.3) достигалась ЦУ (2.2) и все ее траектории оставались ограниченными при $t \geq 0$.

Подчеркнем общность поставленной задачи. В качестве ЦУ (2.2) может фигурировать исходная цель управления или же некоторая вспомогательная цель, выражающая требования к синтезируемому алгоритму адаптации (цель адаптации). Уравнение (2.1) также может относиться к различным системам. Более того, в одной и той же системе управления модель (2.1) может использоваться для описания различных частей системы так, что переменные x, θ могут иметь различный смысл. Введение такого унифицированного описания позволяет единообразно ставить и решать задачи синтеза как основного контура, так и контура адаптации.

Например, при $n = m = 1$ описание ОУ скалярным уравнением

$$\tau \dot{x} + x = bu(t), \quad (2.4)$$

где $u(t) \in R^1$ – искомый входной сигнал, эквивалентное заданию передаточной функции $W_{OY}(p) = b/(tp + 1)$, приводится к виду (2.1) при

$$\theta = u, \quad F(x, \theta, t) = -\frac{x}{\tau} + b \frac{\theta}{\tau}.$$

Если же к ОУ (2.4) подключить линейный регулятор

$$u = c(x - x_*(t)), \quad (2.5)$$

где $x_*(t) \in R^1$ – задающее воздействие (уставка, командный сигнал), и ставить задачу определения коэффициента усиления $c = c(t)$, то уравнение (2.1) будет выглядеть иначе. Действительно, уравнение замкнутой системы (уравнение основного контура) получается при подстановке (2.5) и (2.4) и имеет вид

$$\dot{x} = -\frac{x}{\tau} + \frac{cb[x - x_*(t)]}{\tau}. \quad (2.6)$$

Входом в (2.6) следует считать величину c . После переобозначения $c \rightarrow \theta$ уравнение (2.6) приводится к форме (2.1), однако будет описывать уже не линейную, а билинейную систему, для которой задача синтеза управления будет соответствовать задаче синтеза контура адаптации для исходного объекта (2.4).

Учитывая сказанное, далее в этой главе будем называть сформулированную задачу *задачей управления*, уравнения (2.1) – *объектом управления* (ОУ), а соотношение (2.3) – *алгоритмом управления* (АУ). При этом нет необходимости уточнять, о каком контуре системы управления идет речь (об основном контуре или контуре адаптации), различать реальный объект (процесс) и его математическую модель, а также учитывать способ реализации алгоритма управления (анalogовый или цифровой).

Заметим, что как (2.4), так и (2.6) описывают объекты, линейные по входам. Этот класс объектов играет важную роль в задачах синтеза адаптивных систем. В общем случае уравнение линейной по входам системы будем записывать в виде

$$\dot{x} = A(x, t) + B(x, t)\theta, \quad (2.7)$$

где $A(x, t)$ – n -вектор, $B(x, t)$ – $n \times m$ -матрица. Уравнение (2.7) можно переписать также в виде

$$\dot{x} = A(x, t) + \sum_{i=1}^m B_i(x, t)\theta_i, \quad (2.8)$$

где θ_i – компоненты вектора $\theta \in R^m$; $B_i(x, t) \in R^n$ – столбцы матрицы $B(x, t)$.

§ 2.2. Построение алгоритмов скоростного градиента

2.2.1. Алгоритмы скоростного градиента для локального целевого функционала. Пусть ЦУ (2.2) задана при помощи локального целевого функционала $Q_t = Q(x(t), t)$. Для построения алгоритма управления (2.3) вычислим скалярную функцию $\dot{Q}_t = \omega(x, \theta, t)$ – скорость изменения Q_t в силу уравнения ОУ (2.1):

$$\omega(x, \theta, t) = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + [\nabla_x Q(x, t)]^T F(x, \theta, t).$$

Затем найдем градиент $\omega(x, \theta, t)$ по входным переменным

$$\nabla_\theta \omega(x, \theta, t) = \left[\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right]^T = \left[\frac{\partial F}{\partial \theta} \right]^T \nabla_x Q(x, t).$$

Наконец, зададим алгоритм изменения $\theta(t)$ дифференциальным уравнением

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Gamma \nabla_\theta \omega(x, \theta, t), \quad (2.9)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$ – симметричная положительно определенная матрица, например, $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, $\gamma_i > 0$. Алгоритм (2.9) естественно называть *алгоритмом скоростного градиента* (АСГ), поскольку в нем изменение $\theta(t)$ происходит пропорционально градиенту скорости изменения Q_t . Интегрируя (2.9) на промежутке $[0, t]$, можно записать АСГ в форме (2.3) с интегральным оператором $\Theta_t[\cdot]$. Общая структура системы управления с алгоритмом (2.9) изображена на рис. 2.1.

Происхождение алгоритма (2.9) можно объяснить следующим образом. Для достижения ЦУ (2.2) желательно изменять $\theta(t)$ в направлении уменьшения Q_t . Однако Q_t не зависит от $\theta(t)$, и найти такое направление затруднительно (в частности, это связано с нахождением функций чувствительности). Вместо этого можно пытаться уменьшить \dot{Q}_t , стремясь к выполнению неравенства $\dot{Q}_t < 0$, означающего уменьшение Q_t . Функция $\dot{Q}_t = \omega(x, \theta, t)$ уже явно зависит от θ , что и позволяет написать алгоритм (2.9).

Можно также рассматривать АСГ как непрерывный аналог или "идеализированный" вариант дискретного градиентного алгоритма, поскольку при малом шаге дискретизации градиент от целевой функции, совпадающий с градиентом ее приращения, приближается по направлению к градиенту скорости изменения целевой функции в силу ОУ [57, 89]. Наконец, к алгоритму (2.9) можно прийти от алгоритмов управления, оптимальных по критерию обобщенной работы [95, 96] (в этом случае (2.9) получается как второе приближение к оптимальному алгоритму в предположении

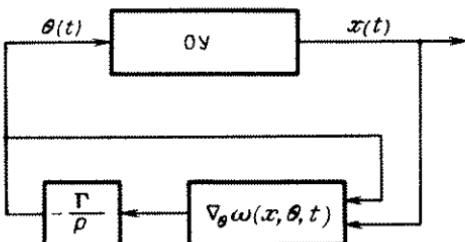


Рис. 2.1. Структура системы управления с алгоритмом (2.9)

высокочастотности внешних воздействий и квазистационарности процесса настройки).

В качестве примера (он понадобится и в дальнейшем) выпишем АСГ для задачи регулирования линейного по входам ОУ (2.7) при целевой функции

$$Q(x, t) = 0,5 [y - y_*(t)]^T H [y - y_*(t)], \quad (2.10)$$

где $y = G(x, t) \in R^l$; $y_*(t) \in R^l$ – задающее воздействие (желаемая траектория выхода), $G(x, t)$ – гладкая вектор-функция, H – $l \times l$ -матрица. Скорость изменения $Q(x, t)$ будет равна

$$\omega(x, \theta, t) = [y - y_*(t)]^T H [C^T A(x, t) + C^T B(x, t) \theta - \dot{y}_*(t)], \quad (2.11)$$

где $C = C(x, t) = \partial G(x, t) / \partial t$, а скоростной градиент и АСГ примут вид соответственно

$$\nabla_\theta \omega(x, \theta, t) = B(x, t)^T CH [y - y_*(t)], \quad (2.12)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Gamma B(x, t) CH [y - y_*(t)]. \quad (2.13)$$

В качестве матрицы усиления Γ часто берется диагональная ($\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}$) или скалярная ($\Gamma = \gamma I$) матрица (γ_i , γ – положительные числа). Алгоритм (2.13) представляет собой хорошо известный интегральный закон регулирования.

Соотношения (2.10)–(2.13) будут использоваться в дальнейшем при синтезе алгоритмов адаптации в конкретных задачах. Отметим, что для построения систем на основе АСГ требуется выполнение условий, гарантирующих применимость алгоритмов (достижение ЦУ) и их реализуемость (правая часть (2.9) не должна зависеть от неизвестных и неизмеряемых величин). Условия применимости АСГ устанавливаются ниже (§ 2.3), а реализуемость должна проверяться в каждой конкретной задаче с учетом ее специфики (см. гл. 3).

2.2.2. Алгоритмы скоростного градиента для интегрального целевого функционала. Если целевой функционал интегральный, т.е.

$$Q_t = \int_0^t R(x(s), \theta(s), s) ds,$$

то скорость его изменения независимо от вида уравнения ОУ равна $R(x, \theta, t)$. Поэтому АСГ имеет вид

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Gamma \nabla_{\theta} R(x, \theta, t), \quad (2.14)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$. Алгоритм (2.14) по структуре совпадает с алгоритмом наискорейшего спуска для функции $R(x, \theta, t)$. Как правило, именно эта функция является исходной при синтезе алгоритма, а цель функционирования системы состоит в ее уменьшении. Алгоритм (2.14) осмыслен (нетривialен), если $R(x, \theta, t)$ явно зависит от управления. В противном случае (т.е., если $R = R(x, t)$) следует применить алгоритм (2.9) для локального функционала $Q_t = R(x(t), t)$.

Выпишем частный случай алгоритма (2.14) для задач с квадратичной целевой функцией вида

$$R(x, \theta, t) = 0,5 \delta^2(x, \theta, t), \quad (2.15)$$

где

$$\delta(x, \theta, t) = \theta^T z(x, t) - \theta_*^T z(x, t)$$

— невязка между некоторой скалярной выходной переменной $y(t) = \theta^T z(x(t), t)$ и ее желаемым значением $y_*(t) = \theta_*^T z(x(t), t)$. К таким задачам относятся многие задачи идентификации, в которых θ — вектор оценок параметров настраиваемой модели ОУ, θ_* — вектор истинных значений параметров, $z(x, t)$ — вектор наблюдаемых величин. Алгоритм (2.14) в случае (2.15) имеет вид

$$\frac{d\theta}{dt} = -\delta(x(t), \theta(t), t) \Gamma z(x(t), t). \quad (2.16)$$

2.2.3. Алгоритмы скоростного псевдоградиента. Алгоритм управления (2.3) может конкретизироваться не только в *дифференциальной*, но и в *конечной* форме. АСГ в конечной форме имеет вид

$$\theta(t) = \theta_0 - \Gamma \nabla_{\theta} \omega(x(t), \theta(t), t), \quad (2.17)$$

где θ_0 — некоторое начальное (опорное) значение управления.

Введем более общую структуру

$$\theta(t) = \theta_0 - \gamma \psi(x(t), \theta(t), t), \quad (2.18)$$

где $\gamma > 0$ — скалярный множитель шага (коэффициент усиления), а вектор-функция $\psi(x, \theta, t)$ удовлетворяет условию *псевдоградиентности*

$$\psi(x, \theta, t)^T \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) \geq 0, \quad (2.19)$$

и назовем (2.18) *алгоритмом скоростного псевдоградиента*. Запись (2.18) является, вообще говоря, уравнением относительно $\theta(t)$. Всюду в даль-

нейшем будем предполагать, что это уравнение однозначно разрешимо при данном θ_0 и любых x, t . Для этого достаточно, например, чтобы функция $\psi(x, \theta, t)$ не зависела явно от управления или удовлетворяла условию Липшица

$$\|\psi(x, \theta, t) - \psi(x, \bar{\theta}, t)\| \leq L \|\theta - \bar{\theta}\| \quad \text{при } L < 1.$$

Очевидно, (2.17) является частным случаем (2.18), поскольку $\psi(\cdot) = \Gamma \nabla_\theta \omega(\cdot)$ удовлетворяет (2.19). Однако (2.18) включает и другие структуры, например, *знаковый алгоритм*

$$\theta(t) = \theta_0 - \gamma \operatorname{sign} \nabla_\theta \omega(x(t), \theta(t), t), \quad (2.20)$$

где знак вектора понимается покомпонентно:

$$\text{если } \theta = \operatorname{col}(\theta_1, \dots, \theta_m), \text{ то } \operatorname{sign} \theta = \operatorname{col}(\operatorname{sign} \theta_1, \dots, \operatorname{sign} \theta_m).$$

В качестве примера выпишем алгоритм скоростного градиента в конечной форме для линейного ОУ (2.4) и квадратичной целевой функции $Q(x) = 0.5(y - y_*)^2$ при $\theta \in R^1$, $y \in R^1$. Считая $\theta_0 = 0$, получим алгоритм (2.17) в виде $\theta(t) = -\gamma(y(t) - y_*)$, представляющем собой классический пропорциональный закон регулирования. Алгоритм (2.20) принимает вид $\theta(t) = -\gamma \operatorname{sign}(y(t) - y_*)$, т.е. задает релейный закон регулирования. В дальнейшем алгоритм (2.20) нам понадобится для линейно-квадратичной задачи (2.7), (2.13):

$$\theta(t) = \theta_0 - \gamma \operatorname{sign} [B(x, t)^T C H(y - y_*(t))]. \quad (2.21)$$

Отметим, что правая часть (2.21) не зависит от управления, т.е. условие однозначной разрешимости для (2.21) выполнено.

2.2.4. Комбинированные алгоритмы. Выписанные выше алгоритмы можно использовать во всевозможных сочетаниях. Наиболее употребительными из них являются: *алгоритм с локально-интегральным функционалом*

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Gamma \nabla_\theta [\omega(x, \theta, t) + \alpha R(x, \theta, t)], \quad (2.22)$$

являющийся АСГ по отношению к функционалу

$$Q(\cdot) + \alpha \int_0^t R(\cdot) ds,$$

и АСГ в конечно-дифференциальной форме:

$$\frac{d[\theta + \gamma \psi(x, \theta, t)]}{dt} = -\Gamma \nabla_\theta \omega(x, \theta, t). \quad (2.23)$$

Наконец, наиболее общей формой АСГ является

$$\frac{d[\theta + \gamma \psi(x, \theta, t)]}{dt} = -\Gamma \nabla_\theta [\omega(x, \theta, t) + \alpha R(x, \theta, t)]. \quad (2.24)$$

Алгоритм (2.24) становится более наглядным в частном случае, если взять

$$\psi(x, \theta, t) = \nabla_\theta \omega(x, \theta, t), \quad R(x, \theta, t) = 0.5 \|\theta - \bar{\theta}\|^2, \quad \Gamma = \beta I,$$

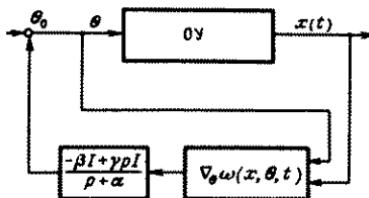
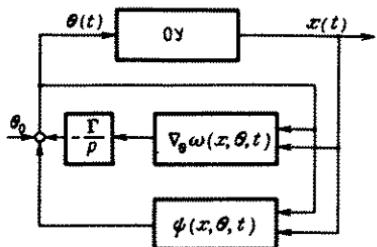


Рис. 2.2. Структура системы управления с конечно-дифференциальным АСГ (2.23)

Рис. 2.3. Структура системы управления с интегро-дифференцирующим АСГ (2.25)

где $\bar{\theta}$ – некоторый постоянный вектор. Тогда $\nabla_\theta R(x, \theta, t) = \theta - \bar{\theta}$ и, меняя местами вторые слагаемые в (2.24), алгоритм можно представить в виде

$$\frac{d[\theta - \bar{\theta} + \alpha(\theta - \bar{\theta})]}{dt} = -\beta \nabla_\theta \omega - \frac{\gamma d(\nabla_\theta \omega)}{dt}. \quad (2.25)$$

Соотношение (2.25) задает закон преобразования вектора $\nabla_\theta \omega(x, \theta, t)$ в вектор поправки к управлению $\theta - \bar{\theta}$. Очевидно, этот закон является линейным и может быть описан передаточной матрицей

$$W(p) = -\frac{\beta I + \gamma p I}{p + \alpha},$$

т.е. алгоритму (2.25) соответствует матричное интегро-дифференцирующее звено [38]. Структурная схема системы управления с алгоритмом (2.23) представлена на рис. 2.2, а с алгоритмом (2.25) – на рис. 2.3.

§ 2.3. Условия применимости и свойства базовых алгоритмов скоростного градиента

2.3.1. Условия применимости АСГ. Условиями применимости алгоритмов управления будем называть условия утверждений о достижении в системе ЦУ, ограниченности ее траекторий и, возможно, наличии каких-либо дополнительных свойств. Перечислим основные условия применимости алгоритма (2.24) и его частных случаев к задаче управления объектом (2.1), поставленной в § 2.1.

Условие А1 (условие гладкости). Функции $F(\cdot)$, $\nabla_\theta \omega(\cdot)$ непрерывны по x, θ , кусочно-непрерывны по t и локально ограничены равномерно по $t \geq 0$, т.е. для любого $\beta > 0$ существует $C(\beta)$ такое, что

$$\|F(x, \theta, t)\| + \|\nabla_\theta \omega(x, \theta, t)\| \leq C(\beta)$$

при $\|x\| \leq \beta$, $\|\theta\| \leq \beta$, $t \geq 0$.

Условие В1 (условие роста для локального целевого функционала). Функция $Q(x, t)$ неотрицательна, равномерно непрерывна в любой области вида $\{(x, t) : \|x\| \leq \beta, t \geq 0\}$ и удовлетворяет соотношению

$$\inf_{t \geq 0} Q(x, t) \rightarrow +\infty \text{ при } \|x\| \rightarrow \infty.$$

Условие С (условие выпуклости). Функция $\omega(x, \theta, t)$ выпукла по $\theta \in R^m$, т.е. для любых θ, θ', x, t выполнено неравенство
 $\omega(x, \theta', t) - \omega(x, \theta, t) \geq (\theta' - \theta)^T \nabla_\theta \omega(x, \theta, t)$. (2.26)

Условие Д1 (условие достижимости ЦУ для локального целевого функционала). Существует вектор $\theta_* \in R^m$, непрерывная, строго возрастающая при $Q \geq 0$ скалярная функция $\rho(Q) > 0$ такая, что $\rho(0) = 0$, и скалярная функция $\mu(t)$, $t \geq 0$, такая, что

$$\int_0^\infty \mu(t) dt < \infty,$$

удовлетворяющие для любого решения $x(t)$ уравнения (2.1) при всех $t \geq 0$ неравенству

$$\omega(x(t), \theta_*, t) \leq -\rho(Q(x(t), t)) + \mu(t)$$
. (2.27)

Поясним смысл введенных предположений. Условие А1 для локального целевого функционала требует гладкой зависимости правой части (2.1) от входов и гладкости функции $Q(x, t)$. При этом равномерность по $t \geq 0$ означает в конкретных задачах ограниченность внешних воздействий. Выполнение условия А1 гарантирует справедливость локальной теоремы существования и единственности решения системы (2.1), (2.9).

Условия В1 и С (роста и выпуклости) требуются для установления глобальных свойств системы. Например, для квадратичной целевой функции

$$Q(x, t) = [x - \bar{x}(t)]^T H(t) [x - \bar{x}(t)]$$

условие В1 выполнено, если вектор $\bar{x}(t)$ ограничен, а матрица $H(t)$ равномерно по t положительно определена: $H(t) \geq \delta I > 0$. Можно ослабить условие В1, заменив его требованием:

Условие В2. Из ограниченности Q_t на решениях системы, включающей ОУ (2.1) и соответствующий алгоритм управления, вытекает ограниченность $x(t)$.

Требование неотрицательности Q_t малоограничительно, так как Q_t можно изменить на любую константу: это требование равносильно ограничности Q_t снизу: $\inf_t Q_t > -\infty$. Условие С, очевидно, выполняется для линейного по входам объекта (2.7). Условие Д1 гарантирует достижение цели управления при $\theta = \theta_*$: легко показать, что из (2.27) следует выполнение в системе (2.1) при $\theta = \theta_*$ соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) = 0$$
. (2.28)

т.е. выполнение ЦУ (2.2) для любого $\Delta > 0$. Частным случаем Д1 является

Условие Д2. Существуют вектор $\theta_* \in R^m$ и число $\alpha_0 > 0$ такие, что $\omega(x, \theta_*, t) \leq -\alpha_0 Q(x, t)$.

При выполнении Д2 для $\theta = \theta_*$ выполнено неравенство $Q_t \leq Q_0 e^{-\alpha_0 t}$, более сильное, чем (2.28). Таким образом, Д2 означает экспоненциальную стабилизируемость ОУ относительно функции $Q(\cdot)$ и обычно выполняется в линейно-квадратичных задачах.

Сформулируем утверждение об условиях применимости алгоритма (2.9) к задаче стабилизации объекта (2.1).

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия A1, B1, C, D1. Тогда любое решение $x(t)$, $\theta(t)$ системы (2.1), (2.9) с начальными условиями $x(0) = x_0$, $\theta(0) = \theta_0$ ограничено и удовлетворяет (2.28), а также неравенству

$$\begin{aligned} Q(x(t), t) + 0.5 \|\theta(t) - \theta_*\|_{\Gamma^{-1}}^2 + \int_0^t \rho(Q(x(s), s)) ds &\leq \\ &\leq Q(x_0, 0) + 0.5 \|\theta_0 - \theta_*\|_{\Gamma^{-1}}^2 + \int_0^\infty \mu(t) dt. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Доказательство теоремы 2.1 (см. Приложение) проводится с использованием функции Ляпунова вида

$$V(x, \theta, t) = Q(x, t) + 0.5 \|\theta - \theta_*\|_{\Gamma^{-1}}^2 + \int_t^\infty \mu(s) ds. \quad (2.30)$$

Установим свойства АСГ для интегрального целевого функционала.

Условие ДЗ (условие слабой достижимости). Существует вектор $\theta_* \in R^m$ такой, что

$$\omega(x(t), \theta_*, t) \leq \mu(t), \quad (2.31)$$

где $x(t)$ – решение (2.1), $\mu(t)$ – скалярная функция, такая, что

$$\int_0^\infty \mu(t) dt < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0.$$

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия A1, C, D3. Тогда в системе (2.1), (2.14) достигается ЦУ (2.2) при

$$Q_t = \int_0^t R(x(s), \theta(s), s) ds,$$

$$\Delta = 0.5 \|\theta_0 - \theta_*\|_{\Gamma^{-1}}^2 + \int_0^\infty \mu(t) dt,$$

а также соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(x(t), \theta(t), t) = 0. \quad (2.32)$$

Для формулировки условий применимости алгоритма скоростного градиента в конечной форме введем дополнительные предположения.

Условие A2. Для любых $\theta_0 \in R^m$, $x \in R^n$, $t \geq 0$ существует решение $\theta = \chi(x, \theta_0, t)$ уравнения (2.18), причем функции $F(\cdot)$, $\nabla_x Q(\cdot)$, $\nabla_\theta \omega(\cdot)$, $\chi(\cdot)$ локально ограничены равномерно по $t \geq 0$.

Условие G (условие строгой псевдоградиентности). Существуют числа $\beta > 0$, $\delta \geq 1$ такие, что

$$\psi(x, \theta, t)^T \nabla_\theta \omega(x, \theta, t) \geq \beta \|\nabla_\theta \omega(x, \theta, t)\|^6.$$

Отметим, что условие A2 не требует гладкости $F(\cdot)$ и $Q(\cdot)$, однако в случае разрывных систем (2.1), (2.18) нужно дополнительно предполо-

жить существование решения (в любом разумном смысле, см., например, [43]). Если разрывной является только функция $\psi(x, \theta, t)$, то дополнительные предположения не нужны, так как для построения решения системы (2.1), (2.18) можно брать любое решение уравнения (2.18). Условие G для алгоритма (2.17) выполняется при $\beta = \lambda_{\min}(\Gamma)$, $\delta = 2$, а для алгоритма (2.20) — при $\beta = 1$, $\delta = 1$.

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия $A2$, C , $D1$, G и решение системы (2.1), (2.18) существует при $t \geq 0$. Тогда если $\delta > 1$, то для любого $\Delta > 0$ существует $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\Delta) > 0$ такое, что в системе (2.1), (2.18) при $\gamma > \bar{\gamma}$ достигается ЦУ (2.2). При $\delta = 1$ существует $\bar{\gamma} > 0$ такое, что при $\gamma > \bar{\gamma}$ выполнено (2.28), т.е. ЦУ (2.2) достигается при любом $\Delta > 0$. Если, кроме того, выполнено условие $B1$ или $B2$, то все траектории системы (2.1), (2.18) ограничены.

Замечание 1. Из доказательства теоремы получаются оценки допустимого коэффициента усиления $\bar{\gamma}$. Например, при $\delta = 1$ можно брать $\bar{\gamma} = d/\beta$, где $d = \|\theta_0 - \theta_*\|$, а при $\delta > 1$ и при выполнении $D2$ можно брать

$$\bar{\gamma}(\Delta) = [d(\delta - 1)(\Delta \delta \alpha_0)^{-1}]^{\delta-1} (\delta \alpha_0)^{-1} d.$$

Замечание 2. Если $\delta = 1$, то утверждение теоремы остается справедливым при выполнении вместо $D1$ ослабленного условия достижимости $D3$.

Замечание 3. Утверждения теоремы и предыдущих замечаний распространяются на случай, когда в условии $D1$ $\theta_* = \theta_*(x, t)$, а в алгоритме (2.18) $\theta_0 = \theta_0(x, t)$. При этом дополнительно нужно потребовать выполнения неравенства

$$\sup_{\Omega_0} d(x, t) < \infty, \quad (2.33)$$

где

$$d(x, t) = \|\theta_*(x, t) - \theta_0(x, t)\|,$$

$$\Omega_0 = \bigcup_{t \geq 0} \{x: Q(x, t) \leq Q(x(0), 0) + \int_0^\infty \mu(s) ds\}.$$

Например, (2.33) выполняется, если выполнено $B1$, а функции $\theta_*(x, t)$, $\theta_0(x, t)$ локально ограничены равномерно по $t \geq 0$. Величины γ , $\bar{\gamma}$ в этом случае также могут зависеть от x, t .

Замечание 4. Формулировку теоремы 2.3 можно упростить, если допустить в алгоритме (2.18) переменный коэффициент усиления $\gamma = \gamma_t$. Степень общности теоремы не возрастет, так как множитель γ_t всегда можно включить в функцию $\psi(\cdot)$, однако формулировка становится более удобной для применения. Именно, если выполняются условия $A2$, C , $D1$, G и неравенство

$$\beta \gamma_t z_t^{\delta-1} \geq d_t,$$

где

$$d_t = \|\theta_0(x(0), 0) - \theta_*(x(t), t)\|, \quad z_t = \|\nabla_\theta \omega(x(t), \theta(t), t)\|,$$

то выполняется ЦУ (2.2) при любом $\Delta > 0$. Если, кроме того, будет выполнено условие роста $B1$ или $B2$, то все траектории системы (2.1), (2.18) будут ограничены.

Функция Ляпунова при доказательстве теоремы 2.3 берется в виде

$$V_t = Q_t + \int_t^{\infty} \mu_s ds. \quad (2.34)$$

В следующем утверждении целевой функционал — интегральный, а условие достижимости наложено в ослабленной форме.

Теорема 2.4. Пусть

$$Q_t = \int_0^t R(x(s), \theta(s), s) ds$$

и выполнены условия А2, С, Д3 и условие G при $\delta = 1$. Тогда в системе (2.1), (2.18) выполняется (2.32).

Условия применимости комбинированных алгоритмов установим для наиболее общей формы (2.24). При этом еще расширим класс возможных алгоритмов, отказавшись от условия $\Gamma > 0$. Будем считать матрицу Γ в (2.24) неотрицательной: $\Gamma = \Gamma^T \geq 0$, а в функции Ляпунова (2.30) заменим Γ^{-1} на Γ^+ — псевдообратную к матрице Γ .

Теорема 2.5. Пусть решение системы (2.1), (2.24) существует при $t \geq 0$, выполнены условия А2, В1, С, Д1 и условие псевдоградиентности (2.19) для функции $\omega(\cdot)$, имеющей вид

$$\omega(x, \theta, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + (\nabla_x Q)^T F(x, \theta, t) + \alpha R(x, \theta, t).$$

Тогда в системе (2.1), (2.24) все траектории с начальными условиями из множества

$$\Omega_0 = \{(x, \theta): (I_m - \Gamma^+ \Gamma)[\theta - \theta_* + \psi(x, \theta, 0)] = 0\}$$

ограничены и удовлетворяют ЦУ (2.28), (2.32).

Комбинированные АСГ, очевидно, включают как частные случаи и чисто дифференциальную, и конечную формы. Соответственно функция Ляпунова (2.30) после замены Γ^{-1} на Γ^+ может в частных случаях совпадать как с функцией (2.30) (при $\det \Gamma \neq 0$), так и с функцией (2.34) (при $\Gamma = \Gamma^+ = 0$, т.е. при отсутствии дифференциальной составляющей). Смысл возникающего в условии теоремы дополнительного требования о принадлежности начальных условий множеству Ω_0 состоит в том, что отклонение настраиваемых параметров от своих идеальных значений вдоль направлений, по которым не действуют дифференциальные составляющие (по направлениям из нуль-пространства Γ), должно быть ограничено (тогда возможна его компенсация за счет конечных составляющих).

В приведенных утверждениях основными условиями являются условия достижимости Д1 — Д3, говорящие о принципиальной разрешимости задачи. Теоремы 2.1—2.5 построены по единой схеме, которую качественно можно описать так. Пусть выполнены некоторые условия общего характера (гладкость, рост, выпуклость некоторой функции и т.п.), и пусть при некотором "идеальном" значении входа $\theta = \theta_*$ объект (2.1) удовлетворяет ЦУ. Тогда при подключении к объекту одного из рассмотренных алгоритмов управления в полученной системе будет достигаться ЦУ при произвольном начальном $\theta(0)$. Именно такие формулировки нужны для задач син-

теза АдСУ, в которых вектор θ_* зависит от неизвестных параметров ОУ и требуется обеспечить ЦУ при произвольных начальных отклонениях $\theta(0) = \theta_*$.

2.3.2. Оценки качества синтезированных систем. Кроме факта достижения ЦУ, траектории которого как свойство типа устойчивости, на этапе синтеза АдСУ желательно иметь хотя бы грубые, приблизительные оценки качества системы, т.е. оценки ее поведения в переходных режимах. Такие оценки помогают дать рекомендации по выбору параметров алгоритма адаптации до начала этапа моделирования системы. В ряде случаев полезную информацию дают интегральные оценки, получаемые из неравенств типа (2.29). Например, из доказательства теоремы 2.5 получается оценка

$$\begin{aligned} \int_0^t \rho(Q(x(s), s)) ds &\leq Q(x_0, 0) + 0.5 \|\theta_0 - \theta_*\| \\ &+ \gamma \psi(x_0, \theta_0, 0) \|_{\Gamma}^2 + \int_0^{\infty} \mu(t) dt. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Можно получить и локальные оценки для величин $Q_t = Q(x(t), t)$.

Теорема 2.6. Пусть выполнены условия А2, С, Д2, G и неравенство $\beta \gamma_t z_t^{\delta-1} \geq d_t$,

(в обозначениях теоремы 2.3). Тогда для решений (2.1), (2.18) справедлива оценка $Q_t \leq Q_0 e^{-\alpha_0 t}$. Если, кроме того, $\delta > 1$ и $\gamma_t > \bar{\gamma}$, где $\bar{\gamma}$ из теоремы 2.3, то справедлива оценка

$$Q_t \leq Q_0 e^{-\alpha_0 t} + \frac{\|\theta_0 - \theta_*\|(\delta - 1)}{\delta \alpha_0} \left(\frac{\|\theta_0 - \theta_*\|}{\gamma \delta \beta} \right)^{1/(\delta-1)}.$$

Теорема 2.7. Пусть выполнены условия А2, С, Д1 при $\mu(t) \equiv 0$ и условие G при $\delta = 1$. Тогда решение системы (2.1), (2.18) удовлетворяет неравенству

$$r(Q_t) \leq r(Q_0) - t, \quad (2.36)$$

где $r(Q) = \int [\rho(Q)]^{-1} dQ$ – первообразная функции $1/\rho(Q)$.

Соотношения (2.35), (2.36) позволяют оценить время достижения цели. Например, если условия теоремы 2.7 выполнены при $\rho(Q) = \alpha_0 Q$ (т.е. выполнено Д2), то $r(Q) = \alpha_0^{-1} \ln Q$ и верна оценка $Q_t \leq Q_0 e^{-\alpha_0 t}$, откуда для времени достижения ЦУ (2.2) t_* имеем оценку $t_* \leq \alpha_0^{-1} \ln (Q_0/\Delta)$. Если условия теоремы 2.7 выполнены при $\rho(Q) = \alpha_0 \sqrt{Q}$, то $\sqrt{Q_t} \leq \sqrt{Q_0} - (\alpha_0 t/2)$, откуда $t_* \leq 2\alpha_0^{-1} \sqrt{Q_0}$. (В этом случае ЦУ (2.2) даже при $\Delta = 0$ достигается за конечное время.)

2.3.3. Идентифицирующие свойства АСГ. Рассмотрим важный для многих приложений вопрос о сходимости вектора входов $\theta(t)$ к своему "идеальному" значению θ_* , т.е. вопрос о достижении в системе (2.1), (2.3) дополнительной ЦУ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_*, \quad (2.37)$$

где $\theta_* \in R^m$ – вектор, фигурирующий в условиях Д1–Д3. Этот вопрос возникает, например, в задачах идентификации, где θ_* – вектор истинных

значений параметров ОУ и выполнение (2.37) означает сколь угодно точную идентификацию параметров. В общем случае будем называть алгоритм (2.3) *идентифицирующим*, если в системе (2.1), (2.3) достигается ЦУ (2.37). (Если θ_* не единственен, т.е. имеется множество Θ_* векторов, удовлетворяющих Д1–Д3, то будем считать алгоритм идентифицирующим при $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\theta(t), \Theta_*) = 0$, где $d(\cdot, \cdot)$ – расстояние от точки до множества.)

Можно рассмотреть также более сильное свойство, состоящее в асимптотической устойчивости состояния равновесия (x_*, θ_*) системы (2.1), (2.3).

Известно, что для выполнения (2.37) в частных случаях (в линейно-квадратичных задачах) требуется достаточное разнообразие внешних воздействий на систему. Сформулируем соответствующие результаты в общем виде, ограничившись для простоты случаем линейного по входам ОУ (2.7).

Если ввести обозначение $A_*(x, t) = A(x, t) + B(x, t)\theta_*$, то уравнение (2.7) можно переписать в виде

$$\dot{x} = A_*(x, t) + B(x, t)(\theta - \theta_*). \quad (2.38)$$

Выберем в качестве алгоритма управления АСГ в дифференциальной форме (2.9), имеющей в данном случае вид

$$\dot{\theta} = -\Gamma B(x, t)^T \nabla_x Q(x, t), \quad (2.39)$$

и будем считать, что $\text{col}(x_*(t), \theta_*)$ является решением системы (2.38), (2.39), $(x_*(t))$ – решение уравнения $\dot{x} = A_*(x, t)$. Это предположение выполнено, если $\nabla_x Q(x_*(t), t) \equiv 0$, т.е. $x_*(t)$ – стационарная точка функции $Q(x, t)$.

В следующем определении формализуется понятие разнообразия векторной или матричной функции.

Определение 2.1 [57, 178]. Ограниченная при $t \geq 0$ матричная функция $\Phi(t)$ размера $m \times N$ называется *интегрально невырожденной*, если существуют положительные числа L, α, t_0 такие, что для любого $t > t_0$

$$\int_t^{t+L} \Phi(s) \Phi(s)^T ds \geq \alpha I_m. \quad (2.40)$$

Условие (2.40) означает, по существу, что столбцы матрицы $\Phi(s)$ не приближаются одновременно при $t \rightarrow \infty$ ни к какой гиперплоскости в пространстве R^m . В задачах идентификации и управления с эталонной моделью условия, аналогичные (2.40), возникали в различных формах [91, 108, 139, 165, 257, 260]. Следующее утверждение показывает эквивалентность некоторых из этих форм.

Теорема 2.8. Пусть $\Phi(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow R^m$ – вектор-функция, ограниченная вместе со своей производной. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1. $\Phi(\cdot)$ – интегрально невырожденная.

2. Существуют $T > 0, \alpha > 0, t_0 > 0$ такие, что для любых $h \in R^m$ ($\|h\| = 1$), $t > t_0$ выполнено

$$\max_{s \in [t, t+T]} \|\Phi(s)^T h\| > \alpha.$$

3. Существуют $\alpha > 0, T > 0, t_0 > 0$ такие, что для любых $t > t_0, h \in R^m$ существует $t_* \in [t, t+T]$ такое, что $\|\Phi(t_*)^T h\| \geq \alpha \|h\|$.

4. Существуют $T > 0$, $C > 0$, $t_0 > 0$ такие, что для любых $t > t_0$ существуют $t_i \in [t, t+T]$, $i = 1, \dots, m$, такие, что $\|F_t^{-1}\| \leq C$, где $F_t - m \times m$ -матрица со столбцами $\Phi(t_i)$, $i = 1, \dots, m$.

5. Для любых $\alpha > 0$, $t > t_0$, $h \in R^m$ ($\|h\| = 1$) существует $L(\alpha) > 0$ такое, что

$$\left| \int_t^{t+L(\alpha)} h^T \Phi(s) ds \right| > \alpha.$$

6. Для любых $\alpha > 0$, $t > t_0$, $h \in R^m$ ($\|h\| = 1$) существует $L(\alpha) > 0$ такое, что

$$\int_t^{t+L(\alpha)} [h^T \Phi(s)]^2 ds \geq \alpha.$$

Сформулируем условия, при которых АСГ обладает идентифицирующими свойствами. Пусть $q(t): [0, \infty) \rightarrow R^N$ — кусочно-непрерывная и кусочно-гладкая вектор-функция. Обозначим через D_q множество разрывов функций $q(t)$, $\dot{q}(t)$. Будем писать $q(t) \in B$, если: (а) функции $q(t)$, $\dot{q}(t)$ ограничены и обладают конечными пределами при $t \rightarrow t'$ для любого $t' \in D_q$ и (б) существует $\delta_q > 0$ такое, что $|t' - t''| \geq \delta_q$ для любых $t' \in D_q$, $t'' \in D_q$, $t' \neq t''$.

Теорема 2.9. [178]. Пусть выполнены условия теоремы 2.1, причем уравнение ОУ имеет вид (2.38), $x_*(t)$ — единственная точка, в которой достигается $\min_x Q(x, t)$, а функции $B(\cdot)$, $\partial B(\cdot)/\partial x$, $\partial B(\cdot)/\partial t$, $\nabla_x Q(\cdot)$ непрерывны. Если $x_*(t) \in B$, $B(x_*(t), t) \in B$, $A_*(x_*(t), t) \equiv 0$ и функция $B(x_*(t), t)$ интегрально невырожденная, то алгоритм (2.39) является идентифицирующим при любых начальных условиях $x(0)$, $\theta(0)$. Кроме того, решение $\text{col}(x_*(t), \theta_*)$ системы (2.38), (2.39) асимптотически устойчиво в целом, равномерно по ограниченному множеству начальных условий $x(t_0)$, $\theta(t_0)$ и по моменту $t_0 \geq 0$.

§ 2.4. Робастные алгоритмы скоростного градиента

2.4.1. Грубость и робастность базовых АСГ. Для современных подходов к постановке и решению задач управления характерен трезвый взгляд на точность математических моделей, имеющихся в распоряжении разработчика. Сегодня уже хорошо понятно, что анализ свойств системы, синтезированной без учета погрешностей математической модели объекта управления, как правило, оказывается неполным. Практическая ценность метода синтеза во многом определяется сохранением устойчивости и качества синтезированной системы при вариациях модели ОУ.

Если некоторое свойство системы сохраняется при достаточно малых (в определенном смысле) вариациях ее математической модели, то вслед за А.А. Андроновым [15] будем называть это свойство *грубым* по отношению к данному классу вариаций модели. В частности, можно изучать грубость различных свойств траекторий системы дифференциальных уравнений (устойчивость, диссипативность и т.д.) по отношению к добавлению в правые части детерминированных возмущений, малых в равномерной

метрике (так называемая *грубость по Л.С. Понtryгину* [15]), стохастических возмущений, малых в среднем [195], и т.д. К результатам такого рода можно также отнести теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях (грубость по отношению к малым вариациям правых частей и начальных условий) [98] и т.п.

Вместо термина "грубость" в последнее время часто используют термин *робастность*, хотя, говоря о робастности, обычно указывают еще и количественные оценки чувствительности данного свойства системы к вариациям ее математической модели [22, 38, 135]. Ниже исследуются грубость и робастность систем с алгоритмами скоростного градиента.

Проще всего обстоит дело с алгоритмами в конечной форме (2.18). Пусть ОУ описывается вместо (2.1) уравнением

$$\dot{x} = F(x, \theta, t) + \varphi(t), \quad (2.41)$$

где $\varphi(t) \in R^n$ – вектор-функция возмущений, предполагаемая ограниченной и кусочно-непрерывной. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.10. Пусть выполнены условия A2, B1, C, D1, G. Тогда для любого $\Delta > 0$ и любого ограниченного множества D существуют $\Delta_\varphi > 0$ и $\bar{\gamma} > 0$ такие, что при $x(0) \in D$, $\gamma > \bar{\gamma}$, $\|\varphi(t)\| \leq \Delta_\varphi$ в системе (2.41), (2.18) все траектории ограничены и достигается ЦУ (2.2).

Теорема 2.10 показывает, что при достаточно малом уровне аддитивных возмущений, действующих на ОУ, ограниченность траекторий системы (2.1), (2.18) сохраняется, а ЦУ (2.2) оказывается возможным обеспечить при том же Δ за счет увеличения коэффициента усиления γ в алгоритме (2.18). Из доказательства теоремы легко получить оценку допустимого уровня возмущений Δ_φ . Можно поэтому говорить о робастности алгоритма (2.18).

Еще в большей степени свойство робастности алгоритма (2.18) проявляется, если возмущение на ОУ (2.1) действует аддитивно со входом, т.е. ОУ описывается уравнением

$$\dot{x} = F(x, \theta + \varphi(t), t). \quad (2.42)$$

Например, уравнение линейного ОУ $\dot{x} = Ax + B\theta + B'\varphi(t)$ можно привести к виду (2.42), если размерности векторов θ , φ совпадают и $B = B'$. Следующее утверждение показывает, что для ОУ (2.42) возможно сохранение свойств системы при произвольном уровне возмущений.

Теорема 2.11. Пусть выполнены условия A2, C, D1, G. Тогда для любого $\Delta > 0$ и любого $\Delta_\varphi > 0$ существует $\bar{\gamma} > 0$ такое, что при $\gamma > \bar{\gamma}$, $\|\varphi(t)\| \leq \Delta_\varphi$ в системе (2.42), (2.18) все траектории ограничены и достигается ЦУ (2.2).

Полученные результаты, очевидно, справедливы и для случая, когда возмущения зависят от фазовых координат: $\varphi = \varphi(x, \theta, t)$, если только выполнены условия существования решений соответствующей системы. Аналогичные утверждения можно получить для возмущений, удовлетворяющих условию $\|\varphi(x, \theta, t)\| \leq \Delta_\varphi \rho_\varphi(\|x\|)$, где $\rho_\varphi(0) = 0$, $\rho_\varphi(Q) > 0$ при $Q > 0$ (возмущений мультипликативного типа). Таким образом, алгоритм (2.18) при естественных условиях является робастным.

Что касается АСГ в дифференциальной форме, то базовые алгоритмы (2.9) обладают робастностью только при существенных дополнительных

предположениях, т.е. в специальных случаях. Одним из таких предположений является равномерная асимптотическая устойчивость системы (2.1), (2.9), обеспечивающая, в силу известных теорем [98], ее устойчивость при постоянно действующих возмущениях. В свою очередь, устойчивость при постоянно действующих возмущениях означает, что при достаточно малом начальном отклонении состояния системы от равновесия и малом уровне возмущений достигается ЦУ (2.2), а также цель $\|\theta(t) - \theta_*\| \leq \Delta$ для сколь угодно малых $\Delta > 0$. Приведем точное утверждение для случая линейного по входам объекта.

Т е о р е м а 2.12 [178]. *Пусть выполнены условия теоремы 2.9. Тогда решение $\text{col}(x_*(t), \theta_*)$ системы (2.38), (2.39) устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

Рассмотренные случаи не исчерпывают, однако, всех практически важных ситуаций. В общем случае базовые АСГ (2.9) не обеспечивают грубость системы. Примеры негрубости систем с АСГ приводились многими авторами (см., например, [4, 178, 231, 237]). В этих примерах при сколь угодно малых по уровню возмущениях управление $\theta(t)$ неограниченно растет при $t \rightarrow \infty$, в то время как основная ЦУ (2.28) продолжает достигаться. Причина данного явления в том, что система (2.1), (2.9) находится "на границе устойчивости": производная функции Ляпунова (2.30) в силу (2.1), (2.9) не является отрицательно определенной; траектория $\text{col}(x_*(t), \theta_*)$ устойчива, но не асимптотически.

Одним из путей ликвидации негрубости системы является модификация АСГ. Примеры подсказывают два направления модификации: (а) препятствовать росту $\theta(t)$ при достаточно больших $\theta(t)$; (б) прекращать изменение $\theta(t)$ при малых значениях Q_t . Первый вариант реализуется введением в алгоритм (2.9) отрицательной обратной связи, второй — введением зоны нечувствительности. Рассмотрим эти способы подробнее.

2.4.2. Огрубление АСГ. Алгоритм скоростного градиента с аддитивной обратной связью будем записывать в виде

$$\dot{\theta} = -\Gamma[\kappa \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) + \zeta(\theta)], \quad (2.43)$$

где $\zeta(\cdot): R^m \rightarrow R^m$ — функция обратной связи, числовой коэффициент $\kappa > 0$ введен для удобства дальнейших формулировок. Будем также рассматривать алгоритм более общего вида (комбинированный)

$$\frac{d}{dt} [\theta + \psi(x, \theta, t)] = -\Gamma[\kappa \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) + \zeta(\theta + \psi(x, \theta, t))], \quad (2.44)$$

где $\psi(\cdot)$ удовлетворяет условию псевдоградиентности (2.19). Отрицательность обратной связи означает, что она препятствует чрезмерному увеличению величины $\|\theta(t)\|^2$ (или, что практически то же самое, величины $\|\theta(t) - \theta_*\|^2$, где θ_* — "идеальное управление"). Таким образом, величина $-\zeta(\theta)^T(\theta - \theta_*)$ при достаточно больших $\|\theta - \theta_*\|$ должна быть отрицательной. Наложим это требование в более удобной форме.

У с л о в и е ОС1. Существуют числа $\rho > 0, \rho' > 0$ такие, что

$$\zeta(\theta)^T(\theta - \theta_*) \geq \rho \|\theta - \theta_*\|^2 - \rho'.$$

Условию ОС1 удовлетворяет, например, функция $\zeta(\theta) = \alpha\theta$, для которой $\rho = \alpha/2, \rho' = \alpha \|\theta_*\|^2/2$. Можно также выбрать $\zeta(\theta)$ в виде $\zeta(\theta) =$

$= \alpha(\theta - \bar{\theta})$, где $\bar{\theta} \in R^m$ – некоторая априорная оценка вектора θ_* . При этом $\rho' = \alpha \|\theta - \bar{\theta}\|^2 / 2$.

Прежде чем перейти к формулировке свойств алгоритмов (2.43), (2.44), обсудим требования к заданию ЦУ в условиях возмущений. Во-первых, при задании ЦУ (2.2) уровень точности $\Delta > 0$ не может быть произвольным, а должен зависеть от уровня возмущений $\Delta_\varphi > 0$. Во-вторых, если известно, что некоторая точность $\Delta_* > 0$ достижима для ОУ (2.1) при некотором $\theta = \theta_*$, то для системы (2.41), (2.3) желательно установить ЦУ с тем же ($\Delta = \Delta_*$) или сколь угодно близким ($\Delta > \Delta_*$) уровнем точности. В третьих, желательно, чтобы в качестве Δ_* была взята минимально возможная величина, например $\Delta_* = J_*$, где $J_* = \inf_{\theta} \sup_{\varphi} \lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t)$;

тогда система обладала бы свойством оптимальности или субоптимальности (см. [178, гл. IV]). Однако в нелинейных задачах вычисление J_* , как правило, затруднено. Если же удается вычислить значение J_* , то оно оказывается зависящим от параметров ОУ, которые в задачах адаптивного управления неизвестны по смыслу задачи. Выходом из положения может быть изменение постановки задачи: вместо приближения к точной величине оптимума следует рассматривать приближение к его оценке.

В соответствии со сказанным введем следующее определение.

Определение 2.2. Пусть задан класс задач управления*) $\Xi = \{\xi\} = \{F_\xi(\cdot), \varphi_\xi(\cdot), Q_\xi(\cdot), A_\xi\}$ и пусть для любого $\xi \in \Xi$ существует алгоритм $\Theta_\xi^* \in A_\xi$ такой, что

$$J(\xi, \Theta_\xi^*) \leq \Delta_*, \quad (2.45)$$

где $J(\xi, \Theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t), x(t) – решение (2.41), (2.3). Тогда число$

Δ_* называется *оценкой оптимума функционала $J(\xi, \Theta)$ на классе Ξ* , а алгоритм управления $\Theta_\xi^*(\cdot)$, обеспечивающий для данного ξ выполнение (2.45), называется *оценочно оптимальным*. ■

Определение 2.3. Пусть задан Ξ – класс задач управления, Δ_* – оценка оптимума функционала $J(\xi, U)$ и число $\xi > 0$. Алгоритм управления Θ_ϵ вида (2.3), обеспечивающий для любого $\xi \in \Xi$ выполнение неравенства $J(\xi, \Theta_\epsilon) \leq \Delta_* + \epsilon$, называется *оценочно ϵ -оптимальным в классе Ξ* .

Подчеркнем, что в определении 2.3 не требуется, чтобы алгоритм Θ_ϵ принадлежал множеству A_ξ , что, на первый взгляд, делает задачу отыскания оценочно ϵ -оптимального алгоритма тривиальной. В действительности в конкретных задачах к Θ_ϵ предъявляются дополнительные требования. Например, в задачах адаптивного управления требуется, чтобы искомый алгоритм не зависел от ξ , т.е. был один и тот же для всех $\xi \in \Xi$. Могут также накладываться ограничения на измеряемые величины, на выдаваемые управление и т.д.

Рассмотрим класс Ξ задач управления, определяемый следующими требованиями:

*) Каждая задача управления определяется видом правых частей уравнения (2.41) $F(\cdot), \varphi(\cdot)$, целевой функцией $Q(\cdot)$ и множеством $A = \{\Theta(\cdot)\}$ допустимых алгоритмов управления (2.3).

- функции $F(\cdot), Q(\cdot)$ удовлетворяют условиям А2, В1, С, Д2;
- функция $Q(\cdot)$ удовлетворяет неравенству $\|\nabla_x Q(\cdot)\| \leq \alpha, Q(\cdot)^\sigma$ для некоторых $\alpha_1 > 0, 0 \leq \sigma < 1$;
- функция $\varphi(\cdot)$ ограничена: $\|\varphi(t)\| \leq \Delta_\varphi$;
- множество A_ξ состоит для всех ξ из алгоритмов, выдающих постоянные управления: $\theta(t) \equiv \theta \in R^m$.

Покажем, что любое число Δ_* , удовлетворяющее неравенству

$$\left(\frac{\Delta_\varphi \alpha_1}{\alpha_0} \right)^{1/(1-\sigma)} \leq \Delta_*, \quad (2.46)$$

есть оценка оптимума функционала $J(\xi, \Theta) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t)$ на классе Ξ .

Для этого вычислим скорость изменения $Q(x(t), t)$ в силу (2.41), (2.3) при $\Theta: \theta(t) \equiv \theta_*$, где $\theta_* \in R^m$ – "идеальное" управление из условия Д1. Пользуясь легко проверяемым неравенством*)

$$-\alpha_0 Q + \Delta_\varphi \alpha_1 Q^\sigma \leq -\alpha_0 (1 - \sigma) [Q - (\Delta_\varphi \alpha_1 / \alpha_0)^{1/(1-\sigma)}],$$

имеем

$$\dot{Q}_t \leq \omega(x, \theta_*, t) + (\nabla_x Q)^T \varphi(t) \leq -\alpha_0 Q + \Delta_\varphi \alpha_1 Q^\sigma \leq -\alpha_0 (1 - \sigma) (Q - \Delta_*),$$

откуда $J(\xi, \Theta) \leq \Delta_*$.

Отметим, что неравенство (2.46) точное: например, при

$$n = m = 1, F(x, \theta) = ax + b\theta,$$

$$Q(x) = |x|^\sigma, |\varphi(t)| \leq \Delta_\varphi$$

неравенство $J(\xi, \Theta) \leq (\Delta_\varphi \alpha_1 / \alpha_0)^{1/(1-\sigma)}$ обращается в равенство при $\varphi(t) \equiv \Delta_\varphi$.

В соответствии со сказанным обозначим через $\Xi_1(\Delta_*)$ класс задач управления, определенный выше, если при заданном Δ_* выполняется (2.46).

Основное свойство АСГ с отрицательной обратной связью состоит в том, что он обеспечивает оценочную ϵ -оптимальность системы (2.41), (2.44) во введенном классе $\Xi_1(\Delta_*)$ для любого $\epsilon > 0$. Приведем точное утверждение.

Теорема 2.13. Для любой задачи из класса $\Xi_1(\Delta_*)$ при алгоритме (2.44), удовлетворяющем условиям (2.19) и ОС1 при $2\rho\lambda \geq \alpha_0(1 - \sigma)$, $\lambda = \lambda_{\min}(\Gamma)$, система (2.41), (2.44) диссипативна. При $\kappa > \kappa_0$, где $\kappa_0 = 2\rho [\epsilon \alpha_0(1 - \sigma)]^{-1}$, алгоритм (2.44) является оценочно ϵ -оптимальным в классе $\Xi_1(\Delta_*)$.

Следствие. Для любой задачи из $\Xi_1(\Delta_*)$ при выполнении условий (2.19), ОС1, $2\rho\lambda \geq \alpha_0(1 - \sigma)$ для решений системы (2.41), (2.44)

) Для проверки достаточно вычислить $\sup_{Q \geq 0} f(Q)$, где $f(Q) = -\alpha_0 \sigma Q + \Delta_\varphi \alpha_1 Q^\sigma$. Дифференцируя и решая уравнение $f'(Q_) = 0$, получим при $0 \leq \sigma < 1$, что

$$f(Q) \leq f(Q_*) = \alpha_0(1 - \sigma)(\Delta_\varphi \alpha_1 / \alpha_0)^{1/(1-\sigma)},$$

что и требуется.

справедлива оценка

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) \leq \Delta_* + 2\rho' [\kappa \alpha_0 (1 - \sigma)]^{-1}. \quad \blacksquare$$

Недостатком описанного способа огрубления является существенное искажение управления при малых $\nabla_\theta \omega(x, \theta, t)$ (при $\nabla_\theta \omega(\cdot) \equiv 0$, $\xi(\theta) = \theta - \bar{\theta}$ в алгоритме (2.43) $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \bar{\theta}$ независимо от предыстории процесса $x(t)$). Для преодоления этого недостатка выбирают $\xi(\theta) = 0$ на ограниченном множестве, включающем "идеальное" управление θ_* . Изменение $\xi(\theta)$ на ограниченном множестве не влияет, очевидно, на справедливость условия ОС1, в котором может измениться лишь величина ρ' . Например, можно взять

$$\xi(\theta) = \begin{cases} \alpha(\theta - \bar{\theta}), & \text{при } \|\theta - \bar{\theta}\| \geq d, \\ 0, & \text{при } \|\theta - \bar{\theta}\| < d. \end{cases} \quad (2.47)$$

При таком выборе неравенство в условии ОС1 будет выполняться для $\rho = \alpha/2$, $\rho' = \alpha(\|\bar{\theta} - \theta_*\| + d)^2/2$.

Для повышения эффективности закона обратной связи (2.47) целесообразно повышать штраф за выход из шара $\{\theta : \|\theta - \bar{\theta}\| \leq d\}$, т.е. увеличивать величину α . Соображения практической реализуемости заставляют вводить, кроме того, ограничение по $\|\xi(\theta)\|$ (насыщение). Устремляя $\alpha \rightarrow \infty$, приходим к знаковой обратной связи ($A > 0$)

$$\xi(\theta) = \begin{cases} A \operatorname{sign}(\theta - \bar{\theta}), & \text{при } \|\theta - \bar{\theta}\| \geq d, \\ 0 & \text{при } \|\theta - \bar{\theta}\| < d. \end{cases} \quad (2.48)$$

Другой способ огрубления базовых АСГ – введение в них зоны нечувствительности по целевой функции. *АСГ с зоной нечувствительности по целевой функции имеет вид*

$$\dot{\theta} = \begin{cases} -\Gamma \nabla_\theta \omega(x, \theta, t), & \text{при } Q(x, t) \geq \Delta, \\ 0, & \text{при } Q(x, t) < \Delta. \end{cases} \quad (2.49)$$

Условия применимости алгоритма (2.49) даются следующей теоремой.

Теорема 2.14 [178]. Для любой задачи управления из класса $\Xi_1(\Delta_*)$ при $\Delta_* < \Delta$ в системе (2.41), (2.49) все траектории ограничены и достигается ЦУ (2.2).

Аналогичный результат справедлив и для алгоритма, в котором зона нечувствительности введена по неравенству (см. [178, § 2.4])

$$\frac{dQ}{dt} + \rho Q \leq \rho \Delta.$$

§ 2.5. Алгоритмы скоростного градиента в стохастических, нестационарных системах и при фазовых ограничениях

При разработке алгоритмов управления в сложных системах необходимо уметь оценивать действие факторов, которые не отражаются в математических моделях, применяемых для синтеза. К числу таких факторов в первую очередь относятся случайные помехи и нестационарность. Ниже устанавливаются условия применимости АСГ с учетом указанных факторов.

Если случайная помеха, приведенная к выходу ОУ, является равномерно ограниченной (по времени по реализациям) функцией, то для исследования АСГ можно использовать результаты, приведенные выше (§ 2.4). Однако часто более реалистичной гипотезой является ограниченность помехи в среднем (как правило, в среднеквадратическом) или представление ее в виде процесса белого шума. При этом ЦУ ставится относительно усредненных величин, в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{MQ(x(t), t)} \leq \Delta. \quad (2.50)$$

Покажем, что огрубленные АСГ сохраняют работоспособность и в этой ситуации. Для определенности рассмотрим дифференциальный алгоритм (2.43) и ОУ, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением Ито [45, 196]

$$dx = F(x, \theta, t) dt + R(x, \theta, t) dW(t), \quad (2.51)$$

где $W(t) = \text{col}(W_1(t), \dots, W_k(t))$ — k -мерный стандартный винеровский процесс, $R(\cdot)$ — матрица размера $n \times k$. Содержательно уравнение (2.51) описывает процесс в динамической системе (2.1), возмущаемой белыми шумами с матрицей интенсивностей $R(\cdot)$. Алгоритм (2.43) перепишем в виде

$$d\theta = -\Gamma[\kappa \nabla_\theta \omega(x, \theta, t) + \xi(\theta)] dt. \quad (2.52)$$

Задача состоит в том, чтобы установить ограниченность в среднеквадратическом решении системы стохастических дифференциальных уравнений (2.51), (2.52) и получить оценку вида (2.50). Для формулировки соответствующих утверждений приходится наложить условия А, В, Д и ОС в усиленных формах:

Условие А3. Выполнено условие А1, и для некоторого $L > 0$ выполнено неравенство

$$\|\nabla_\theta \omega(x, \theta, t) - \nabla_\theta(x, \theta', t)\| \leq L \|\theta - \theta'\|.$$

Условие В3. Функция $Q(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию В1 и неравенствам

$$\|\nabla_x^2 Q(x, t)\| < r, \quad Q(x, t) \geq r_1 \|x\|^2 - r_2$$

для некоторых положительных r, r_1, r_2 .

Условие Д4. Существует $\theta_* \in R^m$ и числа $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0$ такие, что $-\alpha_1[1 + Q(x, t)] \leq \omega(x, \theta, t) \leq -\alpha_0 Q(x, t)$.

Условие ОС2. Существуют положительные числа $\rho, \rho', \rho_1, \rho'_1$ такие, что

$$\rho \| \theta - \theta_* \|^2 - \rho' \leq \zeta(\theta)^T (\theta - \theta_*) \leq \rho_1 \| \theta - \theta_* \|^2 + \rho'_1.$$

По аналогии с § 2.4 обозначим через $\Xi_2(\Delta_*)$ класс задач управления, определяемый требованиями:

- выполнены условия А3, В3, С, Д4;

- интенсивность стохастических возмущений в (2.51) ограничена:

$$\| R(x, \theta, t) \| \leq \Delta_\varphi;$$

- множеством A_ξ является для всех ξ множество алгоритмов, выдающих константы: $\theta(t) \equiv \theta \in R^m$;

- для всех ξ выполнено неравенство $r \Delta_\varphi^2 / (2\alpha_0) \leq \Delta_*$.

Теорема 2.15. Для любой задачи из класса $\Xi_2(\Delta_*)$ система (2.51), (2.52) при $\zeta(\theta)$, удовлетворяющем ОС2 и $2\rho \geq \alpha_0$, диссипативна в среднеквадратическом. При $k > k_0$, где $k_0 = \rho' / (\epsilon \alpha_0)$, алгоритм (2.52) оценочно ϵ -оптимален.

Следствие. Пусть выполнены условия А3, В3, С, Д4, ОС2 и неравенства $\| R(x, \theta, t) \| \leq \Delta_\varphi$, $2\rho \geq \alpha_0$, $\lambda = \lambda_{\min}(\Gamma)$. Тогда для решений системы (2.51), (2.52) справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} M Q(x(t), t) \leq \frac{r \Delta_\varphi^2}{2\alpha_0} + \frac{\rho'}{k\alpha_0}. \quad (2.53)$$

При исследовании работоспособности АСГ в нестационарных условиях следует различать два типа нестационарностей (дрейфов). Наличие нестационарностей первого типа не влечет зависимости от времени "идеального" управления θ_* : ЦУ достигается при $\theta_* = \text{const}$. Естественно назвать такие задачи *квазистационарными*; до сих пор рассматривались именно они (несмотря на зависимость от времени правых частей уравнений ОУ).

В задачах второго типа (существенно нестационарных) идеальное управление зависит от времени: $\theta_* = \theta_*(t)$. Часто такие задачи удается свести к квазистационарным введением подходящей модели дрейфа [57, 82] с неизвестными, но постоянными параметрами, усложнив соответствующим образом алгоритм управления. Если же такое преобразование почему-либо не проводится, то возникает вопрос: как изменятся свойства синтезированной системы, если ее параметры будут изменяться во времени некоторым неизвестным образом? Ясно, что ответ должен зависеть от величины скорости дрейфа параметров. Будем считать эту величину ограниченной и в зависимости от нее оценивать установившуюся точность достижения ЦУ. В соответствии с этим необходимо ввести новый вариант условия достижимости и новый класс задач управления.

Условие Д5. Существует непрерывно дифференцируемая функция $\theta_*(t) \in R^m$ и положительные числа $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$ такие, что

$$\omega(x, \theta_*(t), t) \leq -\alpha_0 Q(x, t), \quad \|\theta_*(t)\| \leq \beta_0, \quad \|\dot{\theta}_*(t)\| \leq \beta_1.$$

Обозначим через $\Xi_3(\Delta_*)$ класс задач управления, определяемый требованиями:

- выполнены условия А1, В1, С, Д5;

- интенсивность возмущений в (2.41) ограничена: $\|\varphi(t)\| \leq \Delta_\varphi$;

— для любого $\xi \in \Xi$ A_ξ есть множество алгоритмов, выдающих непрерывно дифференцируемые функции, ограниченные вместе со своей производной;

— для любого $\xi \in \Xi$ выполнено неравенство (2.46).

Теорема 2.16. Для любой задачи из класса $\Xi_3(\Delta_*)$ система (2.41), (2.43) при $\xi(\theta)$, удовлетворяющей ОС1 и $2\rho\lambda > \alpha_0(1-\sigma)$, диссипативна. При $\kappa > \kappa_0$, где

$$\kappa_0 = \left[2\rho' + \frac{\beta}{\lambda(2\rho\lambda - \alpha_0(1-\sigma))} \right] [\epsilon\alpha_0(1-\sigma)]^{-1},$$

алгоритм (2.43) оценочно ϵ -оптимален.

Можно выписать, аналогично следствиям из теорем 2.13, 2.15, оценку предельного множества по целевой функции.

Постановка многих практических задач включает задание ограничений на состояния и входы ОУ, которые должны выполняться вдоль всех траекторий синтезированной системы. Если ограничения задаются некоторым выпуклым множеством Θ в пространстве входов, содержащем идеальное управление θ_* , то удовлетворить им можно введением в алгоритм проектора на Θ . Условия применимости для этого случая вытекают из результатов § 2.4. Если же ограничения зависят от фазовых координат ОУ, то задача усложняется.

Установим условия применимости АСГ при наличии фазовых ограничений вида

$$G(x, \theta, t) \geq 0, \quad (2.54)$$

определеняющих области Ω_t в пространстве $\{x, \theta\}$. Эти условия позволяют найти сочетания параметров и начальных условий системы, при которых ее траектории не выходят из областей Ω_t , т.е. когда наличие ограничений не влияет на работу алгоритма. Для простоты рассмотрим ОУ (2.1) с базовым алгоритмом (2.9) и ЦУ (2.28).

Теорема 2.17. Пусть выполнены условия А1, В1, С, Д1, а также неравенство

$$\inf_{V(x, \theta, t) \leq V_0} G(x, \theta, t) \geq 0 \quad \forall t > 0, \quad (2.55)$$

где $V(\cdot)$ — функция (2.30), $V_0 = V(x(0), \theta(0), 0)$. Тогда все траектории системы (2.1), (2.9) ограничены и удовлетворяют ЦУ (2.28) и соотношением $G(x(t), \theta(t), t) \geq 0$.

Аналогичные утверждения справедливы и для других вариантов АСГ.

§ 2.6. Алгоритмы скоростного градиента в задачах децентрализованного управления

Важное место в проблематике теории управления в сложных системах занимают задачи децентрализованного управления. Если исходная система (ОУ) допускает разбиение на ряд взаимодействующих подсистем, то алгоритм децентрализованного управления каждой подсистемой вырабатывает управляющее воздействие по информации о состоянии только данной подсистемы, без учета состояния других подсистем. При этом синтезу управления предшествует упрощение задачи, заключающееся в отbrasы-

вании связей между подсистемами. Для решения вопроса о применимости подобного подхода необходим анализ работоспособности синтезированной системы с учетом взаимодействий [38]. Ниже исследуется применимость для синтеза децентрализованного управления алгоритмов скоростного градиента.

Рассмотрим систему S , состоящую из l взаимодействующих подсистем S_i , динамика каждой из которых описывается уравнением

$$\dot{x}_i = F_i(x_i, \theta_i, t) + h_i(x, \theta, t), \quad i = 1, \dots, l, \quad (2.56)$$

где $x_i \in R^{n_i}$ — вектор состояния, $\theta_i \in R^{m_i}$ — вектор входов (настраиваемых параметров) подсистемы, $x = \text{col}(x_1, \dots, x_l) \in R^n$, $\theta = \text{col}(\theta_1, \dots, \theta_l) \in R^m$ — совокупные векторы состояния и входов системы, $n = \sum n_i$, $m = \sum m_i$. Вектор-функция $F_i(\cdot)$ характеризует собственную динамику подсистемы S_i , а вектор $h_i(\cdot)$ описывает связи (взаимодействия) между подсистемами.

Пусть для S_i задана целевая функция $Q_i(x_i, t)$ и цель управления состоит в выполнении соотношений

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_i(x_i(t), t) = 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad (2.57)$$

(считаем $Q_i(x_i^*(t), t) \equiv 0$) где $x_i^*(t) = \arg \min_x Q_i(x, t)$. Децентрализованный алгоритм скоростного градиента имеет вид

$$\dot{\theta}_i = -\Gamma_i \nabla_{\theta_i} \omega_i(x_i, \theta_i, t), \quad i = 1, \dots, l, \quad (2.58)$$

где

$$\omega_i(x_i, \theta_i, t) = \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \nabla Q_i(x_i, t)^T F_i(x_i, \theta_i, t),$$

$\Gamma_i = \Gamma_i^T > 0$, $m_i \times m_i$ -матрица. Сформулируем условия достижения цели (2.57) в системе (2.56), (2.58).

Теорема 2.18. Пусть выполнены следующие группы условий.

1. Функции $F_i(\cdot)$ непрерывны по x_i, t , непрерывно дифференцируемы по θ_i и локально ограничены по $t > 0$; функции $\omega_i(x_i, \theta_i, t)$ выпуклы по θ_i ; существуют векторы $\theta_i^* \in R^{m_i}$ и скалярные возрастающие функции $\kappa_i(Q)$, $\rho_i(Q)$ такие, что $\kappa_i(0) = \rho_i(0) = 0$, $\kappa_i(Q) \rightarrow +\infty$ при $Q \rightarrow +\infty$

$$\omega_i(x_i, \theta_i^*, t) \leq -\rho_i(Q_i(x_i, t)) \quad (2.59)$$

и $Q_i(x_i, t) \geq \kappa_i(\|x_i - x_i^*(t)\|)$.

2. Функции $h_i(x, \theta, t)$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$|\nabla_{x_i} Q_i(x_i, t)^T h_i(x, \theta, t)| \leq \sum_{j=1}^l \mu_{ij} \rho_j(Q_j(x_j, t)), \quad (2.60)$$

где матрица $M = I$ гурвицева*, $M = \{\mu_{ij}\}$, $\mu_{ij} > 0$, I — единичная матрица.

Тогда система (2.56), (2.58) асимптотически устойчива в целом по переменным $x_i - x_i^*(t)$, все ее траектории удовлетворяют (2.57) и ограничены.

* Для матриц M с неотрицательными внедиагональными элементами необходимым и достаточным условием гурвицевости является выполнение условий Севастьянова–Котелянского [38]: положительность главных миноров матрицы $I - M$.

Первая группа условий теоремы обеспечивает достижение ЦУ (2.57) в каждой изолированной подсистеме, а вторая группа условий определяет допустимую степень взаимосвязей подсистем. Сопоставление (2.59) и (2.60) позволяет назвать связи, удовлетворяющие (2.60), связями однородного типа, поскольку ослабление взаимодействий вблизи равновесия пропорционально соответствующим характеристикам подсистем.

Например, если взаимосвязи линейны ($R_i(x) = \sum_{j=1}^l h_{ij}x_j$), целевые функции квадратичны ($Q_i(x_i) = x_i^T R_i x_i$) и для подсистем выполнено условие достижимости Д2 ($\rho_i(Q_i) = \alpha_i Q_i$), то неравенство (2.60) также выполняется, причем для оценки μ_{ij} можно воспользоваться неравенствами

$$2|x_i^T R_i \sum_{j=1}^l h_{ij}x_j| \leq \|R_i\| \sum_{j=1}^l \|h_{ij}\| \left(\beta_{ij} \|x_i\|^2 + \frac{1}{\beta_{ij}} \|x_j\|^2 \right),$$

$$\|x_i\|^2 \leq \alpha_i \lambda_i^{-1} \rho_i(Q_i)$$

при $\lambda_i = \lambda_{\min}(R_i)$ и подходящих $\beta_{ij} > 0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теорем о коннективной устойчивости [38], причем вектор-функция Ляпунова системы образуется из функций Ляпунова подсистем:

$$V_i(x_i, \theta_i, t) = Q_i(x_i, t) + \frac{1}{2} \|\theta_i - \theta_i^*\|_{\Gamma_i^{-1}}^2. \quad (2.61)$$

Рассмотрим теперь взаимодействия неоднородного типа, подчиняющиеся вместо (2.59) ослабленным неравенствам

$$|\nabla_{x_i} Q_i(x_i, t)^T h_i(x, \theta, t)| \leq \sum_{j=1}^l \mu_{ij} \rho_j(Q_j(x_j, t)) + d_i, \quad (2.62)$$

где $d_i > 0$, $i = 1, \dots, l$. Цель (2.52) при этом также ослабляется и состоит в сходимости траекторий в ограниченное предельное множество, алгоритм (2.58) огрубляется различными способами (см. § 2.4). Приведем утверждение о свойствах системы для алгоритма, огрубленного введением зоны нечувствительности по целевой функции:

$$\dot{\theta}_i = \begin{cases} -\Gamma_i \nabla_{\theta_i} \omega_i(x_i, \theta_i, t) & \text{при } Q_i(x_i(t), t) > \Delta_i, \\ 0 & \text{при } Q_i(x_i(t), t) \leq \Delta_i. \end{cases} \quad (2.63)$$

Теорема 2.19. Пусть выполнены условия теоремы 2.18 с заменой (2.59) на (2.62), причем $\lim_{Q \rightarrow \infty} \rho_i(Q) = \infty$, $i = 1, \dots, l$, и пусть Δ_i в (2.63) выбраны из условий $\rho_i(\Delta_i) > r_i$, где $r = (I - M)^{-1}d$, $r = \text{col}(r_1, \dots, r_l)$, $d = \text{col}(d_1, \dots, d_l)$. Тогда все траектории системы (2.56), (2.63) ограничены и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} Q_i(x_i(t), t) \leq \Delta_i, \quad i = 1, \dots, l. \quad (2.64)$$

§ 2.7. Алгоритмы скоростного градиента при неявно заданной модели объекта

В ряде практических задач управления и адаптации в энергетике, радиоэлектронике и других отраслях исходная математическая модель объекта не имеет вида уравнений состояния (2.1), а задана в неявной форме, например, в виде системы конечных и дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, y, \theta, t), \quad (2.65)$$

$$0 = G(x, y, \theta, t), \quad (2.66)$$

где $x \in R^n$, $y \in R^l$, $\theta \in R^m$, причем $F(\cdot) \in R^n$, $G(\cdot) \in R^l$ – гладкие функции, а цель управления имеет вид (2.2) при $Q_t = \tilde{Q}(x(t), y(t), t)$. Обычно при синтезе алгоритма управления стараются привести задачу к явной форме (2.1), (2.2), разрешив (2.66) относительно y и подставив найденное значение в уравнение (2.65) и в целевую функцию $Q(\cdot)$. После этого можно использовать известные методы (например, описанные выше). Однако для приложений удобнее пользоваться алгоритмами и условиями их применимости непосредственно в исходных терминах. Ниже приводится распространение метода скоростного градиента на объекты вида (2.65), (2.66) на примере алгоритмов в дифференциальной форме (2.9). Введем следующее предположение.

Условие R. Уравнение (2.66) для любых x, θ, t имеет единственное решение $y = \eta(x, \theta, t)$, причем функция $\eta(\cdot)$ непрерывно дифференцируема по x, θ и непрерывна по $t \geq 0$, а матрица $\partial G / \partial y$ не вырождена при $y = \eta(x, \theta, t)$.

Рассмотрим сначала случай, когда приведенная целевая функция $Q(x, \theta, t) = Q(x, \eta(x, \theta, t), t)$ не зависит от θ (например, когда не зависит от θ функция $G(\cdot)$ или функция $\tilde{Q}(\cdot)$ не зависит от y). В этом случае АСГ записывается на основании теоремы о неявной функции. Действительно, из (2.66) и условия R имеем

$$0 = \frac{\partial G}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial t},$$

откуда

$$\dot{y} = \dot{\eta}(x, \theta, t) = - \left[\frac{\partial G}{\partial y} \right]^{-1} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial G}{\partial t} \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \omega(x, \theta, t) = \frac{\partial Q}{\partial x} F(\cdot) + \frac{\partial Q}{\partial y} \left[\frac{\partial G}{\partial y} \right]^{-1} \left[\frac{\partial G}{\partial x} F(\cdot) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial G}{\partial t} \right] + \frac{\partial Q}{\partial t} = \psi(x, t)^T F(x, y, \theta, t) + \chi(x, t), \end{aligned}$$

где

$$\psi(x, t) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^T - \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^T \left[\frac{\partial G}{\partial y} \right]^{-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)^T,$$

$$\chi(x, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial y} \left[\frac{\partial G}{\partial y} \right]^{-1} \frac{\partial G}{\partial x}.$$

Учитывая, что $\nabla_\theta \omega = [\partial \omega / \partial \theta]^T$, АСГ (2.9) можно записать в виде

$$\dot{\theta} = -\Gamma \left[\frac{\partial F}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial G}{\partial \theta} \right)^T \left[\frac{\partial G}{\partial y} \right]^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^T \right] \psi(x, t). \quad (2.67)$$

Применяя теорему 2.1, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.20. Пусть функции $F(\cdot), G(\cdot)$ удовлетворяют условиям A1, B1, C, D1, выполнено условие R и функции $\psi(\cdot), \chi(\cdot)$ не зависят от θ . Тогда все решения системы (2.65) – (2.67) ограничены и достигается ЦУ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) = 0.$$

Перейдем к рассмотрению случая, когда $\tilde{Q}(x, \eta(x, \theta, t), t)$ зависит от θ . Специфика этого случая в том, что между входом объекта $\theta(t)$ и "целевой" переменной Q_t имеется прямая связь. Это значит, что изменение θ может, вообще говоря, вызывать соответствующее изменение Q_t мгновенно и независимо от динамики объекта (2.65), (2.66), т.е. задача переходит в класс статических. Как правило, это обстоятельство не отвечает существу задачи и для восстановления адекватности постановки необходимо разорвать прямую связь.

Разрыв прямой связи достигается введением дополнительной инерционности в уравнение ОУ или в целевую функцию. Например, повысить инерционность ОУ можно, если заменить (2.66) на соотношение

$$\epsilon \dot{y} = -y + \eta(x, \theta, t), \quad (2.68)$$

где $y(0) \in R^I$, $\epsilon > 0$. При $\epsilon = 0$ уравнение (2.68) равносильно (2.66). Другой способ состоит в замене (2.66) уравнением

$$\epsilon H \dot{y} = G(x, y, \theta, t), \quad (2.69)$$

где $I \times I$ -матрица H (стабилизирующий множитель) вводится для обеспечения асимптотической устойчивости собственных движений (2.69). Например, можно положить $H = \partial G / \partial y$, что в случае линейной по y функции $G(\cdot)$ эквивалентно способу (2.68).

Способ (2.69) естественно использовать, когда "алгебраическая" часть модели ОУ (2.66) возникла из-за пренебрежения некоторыми малыми постоянными времени, т.е. исходная модель ОУ описывается сингулярно-возмущенными уравнениями (см. гл. 5). В обоих приведенных способах пространство состояний ОУ расширяется: вектор x заменяется на $\tilde{x} = \text{col}(x, y)$. После разрешения (2.68) или (2.69) относительно \dot{y} модель ОУ приводится к основной явной форме (2.1).

Еще один способ расширения пространства состояний ОУ заключается в переходе к новому вектору входов $\tilde{\theta} \in R^m$ по правилу

$$\dot{\theta} = \tilde{\theta}. \quad (2.70)$$

Уравнение (2.70) добавляется к уравнениям ОУ (2.65), (2.66), т.е. x заменяется на $\tilde{x} = \text{col}(x, \theta)$.

Наконец, для разрыва прямой связи можно исходный целевой функционал заменить слаженным, например, по формуле

$$\dot{\bar{Q}}_t = -\alpha \bar{Q}_t + \beta \tilde{Q}(x, \eta(x, \theta, t), t). \quad (2.71)$$

При $\alpha = 0$, $\beta = 1$ слаживание (2.71) соответствует замене локального функционала $\tilde{Q}(\cdot)$ интегральным, а при $\alpha = \beta = \epsilon^{-1}$ слаживающим фильтром является апериодическое звено. Поскольку соотношение (2.71) определяет скорость изменения целевого функционала, АСГ будет соответствовать задаче с интегральным целевым функционалом

$$\dot{\theta} = -\Gamma \beta \nabla_{\theta} \tilde{Q}(x, \eta(x, \theta, t), t). \quad (2.72)$$

Условия применимости алгоритма (2.72) вытекают из теоремы 2.5. Отметим, что, в силу (2.71), ослабленное условие достижимости ДЗ для функционала

$$Q_t = \int_0^t \tilde{Q}(\dots) ds$$

эквивалентно обычному условию Д1 для функционала \bar{Q}_t .

Важным частным случаем конечно-дифференциальных моделей объектов являются дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производных:

$$\Phi(x, \dot{x}, \theta, t) = 0. \quad (2.73)$$

К классу (2.73) относятся узловые модели электрических цепей [128], уравнения Лагранжа и Лагранжа–Максвелла, описывающие механические и электромеханические системы [4, 25] и т.д. Для приведения (2.73) к виду (2.65), (2.66) достаточно положить $y = \dot{x} \in R^n$ и записать уравнения

$$\dot{x} = y, \quad 0 = \Phi(x, y, \theta, t). \quad (2.74)$$

В данном случае

$$F(x, y, \theta, t) = y, \quad G(x, y, \theta, t) = \Phi(x, y, \theta, t),$$

и, значит, АСГ (2.67) для $Q_t = Q(x(t), t)$ имеет вид

$$\dot{\theta} = \Gamma \frac{\partial \Phi^T}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} \right]^{-1} \nabla_x Q(x, t). \quad (2.75)$$

Аналогично выводятся АСГ в конечной и комбинированной формах, а также условия их применимости.

§ 2.8. Другие модификации алгоритмов скоростного градиента

Обобщение ряда существующих алгоритмов адаптации приводит к различным модификациям алгоритмов скоростного градиента. Одна из модификаций состоит в введении матриц усиления $\Gamma = \Gamma(x(t), \theta(t), t)$, зависящих от траектории процесса. Например, работоспособность АСГ сохраняется при выполнении условия двусторонней ограниченности [91] $0 < \Gamma^- \leq \Gamma(\cdot) \leq \Gamma^+$. Другая модификация – введение нормирующего

множителя — приводит к алгоритму

$$\dot{\theta} = -\Gamma \frac{\nabla_{\theta} \dot{Q}_t}{\mu + \|\nabla_{\theta} \dot{Q}_t\|^2}, \quad \mu > 0. \quad (2.76)$$

Еще одна модификация — введение дополнительного контура настройки матрицы Γ :

$$\dot{\theta} = -\frac{\Gamma \nabla_{\theta} \dot{Q}_t}{\mu + (\nabla_{\theta} \dot{Q}_t)^T (I + \Gamma) (\nabla_{\theta} \dot{Q}_t)}, \quad (2.77)$$

$$\dot{\Gamma} = -\frac{\Gamma (\nabla_{\theta} \dot{Q}_t) (\nabla_{\theta} \dot{Q}_t)^T \Gamma}{\mu + (\nabla_{\theta} \dot{Q}_t)^T (I + \Gamma) (\nabla_{\theta} \dot{Q}_t)} + \Gamma_0(t), \quad (2.78)$$

где $\Gamma(0) = \kappa I > 0$. Структура алгоритма (2.77), (2.78) напоминает алгоритм фильтрации Калмана. Слагаемое $\Gamma_0(t)$ в (2.78) вводят, чтобы избежать вырождения $\Gamma(t)$ (29).

Наконец, следует упомянуть об алгоритмах, обеспечивающих изменение настраиваемых параметров вдоль многообразия G (например, вдоль границы некоторой области). Модификация АСГ в этом случае состоит в проектировании направления движения на касательную плоскость L_t к многообразию в текущей точке:

$$\dot{\theta} = -\text{Pr}_{L_t} \{ \Gamma \nabla_{\theta} \dot{Q}_t \}, \quad \theta(0) \in G. \quad (2.79)$$

Если, например, многообразие G задается уравнением $g(\theta) = 0$, то касательная гиперплоскость L_t описывается уравнением $\nabla g(\theta(t))^T (\theta - \theta(t)) = 0$. Надо сказать, однако, что для аналоговой реализации формула (2.79) неудобна (за исключением простейших случаев), а в дискретизованной форме АСГ применяется проектирование непосредственно на множество G (см. главы 4, 5):

$$\theta_{k+1} = \text{Pr}_G \{ \theta_k - \Gamma \nabla_{\theta} \dot{Q}_{t_k} \}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.80)$$

§ 2.9. Обсуждение результатов. Локальные или интегральные?

Метод скоростного градиента позволяет распространить на нелинейные и нестационарные объекты ряд известных методов синтеза алгоритмов управления и адаптации (см. главу 3). Этот метод связан с принципом оптимального демпфирования переходных процессов [73]. Действительно, направление скоростного градиента характеризуется следующим экстремальным свойством: приращение управления $\Delta\theta$ в направлении скоростного градиента (т.е. в соответствии с алгоритмом (2.17)) приводит к наибольшему убыванию скорости изменения Q по сравнению с другими приращениями, подчиненными ограничению $\|\Delta\theta\| \leq \epsilon$ (при достаточно малом ϵ). Аналогичное свойство для знакового алгоритма (2.20) имеет место при покоординатном ограничении $|\Delta\theta_i| \leq \epsilon$. Кроме того, условия применимости алгоритмов оптимального демпфирования [73, 151] совпадают с условиями достижимости АСГ, записанными в экстремальном виде.

мальной форме, например с условиями Д1, Д3 при $\mu(t) \equiv 0$:

$$\inf_{\theta} \sup_{x, t} \frac{\omega(x, \theta, t)}{\rho(Q(x, t))} < 0, \quad \inf_{\theta} \sup_{x, t} \omega(x, \theta, t) < 0. \quad (2.81)$$

Соотношения (2.81) выражают тот факт, что для применимости АСГ нужна достижимость ЦУ при постоянном (но неизвестном!) векторе θ_* . Очевидно, что применение АСГ требует вычисления первых производных функций $Q(\cdot)$ по переменным x , т.е. метод скоростного градиента можно отнести к методам 1-го порядка.

Для обсуждения возможностей метода полезно рассмотреть следующий простой пример. Пусть объект описывается двумя уравнениями $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$ так, что $x = \text{col}(x_1, x_2)$. Входом ОУ является $u(t)$, т.е. $\theta = u$, а целевая функция имеет вид $Q(x) = x^2$. Тогда $\dot{Q} = 2x_1x_2$, $\nabla_u \dot{Q} = 0$, следовательно, АСГ формально неприменимы, так как не выполняются условия теорем главы 2. Этот пример следует отнести к вырожденным, "критическим" случаям, в которых нужен переход к методам 2-го и более высоких порядков. Такие методы можно строить при помощи АСГ. Действительно, если принять \dot{Q} за новую целевую функцию $Q_1(x_1, \dot{x}_2)$, то можно вычислить $\dot{Q}_1 = \ddot{Q}$ и использовать алгоритм $\dot{u} = -\Gamma \nabla_u \dot{Q}$, где $\nabla_u \dot{Q} = 2x_1$, т.е. перейти к "ускоренческому" градиенту.

Решающую роль в оценке возможностей АСГ играет число, которое можно назвать степенью (порядком) сглаживания задачи. Степень сглаживания задачи d можно определить как наименьшее целое число n , при котором функция $Q^{(n)}$ (n -я производная в силу ОУ от целевой функции) явно зависит от θ , т.е. $\nabla_\theta Q^{(d)} \neq 0$. Для непосредственной применимости АСГ нужно, чтобы $d = 1$. В частности, для линейных ОУ условие $d = 1$ выделяет так называемые "мееровские" структуры [114], устойчивые при сколь угодно большом коэффициенте обратной связи. Для АСГ, соответственно, имеет место устойчивость при сколь угодно большой матрице усиления Γ . Если $d = 0$, то задача становится статической и для применения АСГ нужно вводить дополнительные инерционные звенья (фильтры) в объект или целевую функцию, см. § 2.7.

Если $d \geq 2$, то, наоборот, степень сглаживания задачи слишком велика и надо ее снижать, переходя к новому ЦУ, например, дифференцируя $Q(\cdot)$ (см. выше) или отбрасывая малолинерционные звенья в ОУ (см. главу 5). Однако более перспективный способ — изменить структуру основного контура и, возможно, целевую функцию так, чтобы удовлетворить условию достижимости. Например, в рассмотренном примере можно взять $u = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$, $\theta = \text{col}(\theta_1, \theta_2)$ — новый вход ОУ, и положить $Q_2 = x_1^2 + x_2^2$. Тогда вывод АСГ дает (при диагональной Γ)

$$\dot{\theta}_1 = -\gamma_1 x_1 x_2, \quad \dot{\theta}_2 = -\gamma_2 x_2^2,$$

причем в новой задаче выполняется условие достижимости Д1 и ее степень сглаживания равна 1. Таким образом, преобразование целевого функционала (в частности, переход от локального функционала к интегральному или наоборот) служит средством приведения порядка сглаживания задачи к 1-му, т.е. средством обеспечения применимости метода скоростного градиента.

Можно было бы усомниться в необходимости применения АСГ на том основании, что АСГ применимы лишь тогда, когда объект можно сделать устойчивым при сколь угодно большом коэффициенте усиления, т.е. без новых обратных связей. Однако следует учесть, что минимальный коэффициент усиления, обеспечивающий устойчивость, неизвестен, потому что он зависит от неизвестных параметров объекта. В то же время выбор коэффициентов усиления "с запасом" часто неприемлем при практической реализации.

Трудности могут возникнуть, если измерению доступен не весь вектор состояния и для восстановления недостающих переменных в систему приходится ставить дополнительные фильтры (наблюдатели), а также если вектор скоростного градиента оказывается зависящим от неизвестных параметров. Пути преодоления этих трудностей специфичны для каждой конкретной задачи.

Практика применения АСГ показывает, что дифференциальные составляющие алгоритма осуществляют отслеживание параметрических возмущений, относительно медленно меняющихся в широких пределах. В то же время конечные составляющие позволяют ослабить действие достаточно быстрых возмущений, если они изменяются в относительно узком диапазоне.

На основе метода скоростного градиента можно дать рекомендации по выбору структуры основного контура (см. ниже, § 3.1), т.е., в конечном итоге, метода дает единый подход к синтезу основного контура и контура адаптации системы. В этом смысле метод скоростного градиента соизведен основному положению теории бинарных систем [65–67], предписывающему применение единого принципа регулирования по отклонению для синтеза как координатных, так и операторных обратных связей.

СИНТЕЗ НЕПРЕРЫВНЫХ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ

Описывается общая методика синтеза непрерывных беспоисковых адаптивных систем управления нелинейными динамическими объектами, использующая при синтезе контура адаптации метод скоростного градиента. Приводятся примеры синтеза адаптивных систем управления с явной и неявной эталонной моделью, а также систем идентификации. Основные результаты по синтезу непрерывных беспоисковых адаптивных систем представлены в виде таблиц.

§ 3.1. Этапы синтеза адаптивных систем

Целью синтеза АдСУ, как уже было сказано, является определение алгоритма из заданного класса допустимых алгоритмов управления, обеспечивающего достижение заданной ЦУ для любого ОУ из заданного класса. Последовательность действия при синтезе АдСУ обычно состоит из пяти этапов.

Этап 1. Подготовка исходных данных (формализованное описание задачи). Исходными данными для синтеза АдСУ являются:

- математическая модель объекта управления;
- цель управления;
- класс допустимых алгоритмов управления.

Математическую модель ОУ следует привести к виду уравнений состояния

$$\dot{x} = F(x, u, t, \xi) + \varphi(x, u, t, \xi), \quad (3.1)$$

где $\xi \in \Xi$ – набор неизвестных параметров ОУ. Обычно в $F(\cdot)$ включают конечное число параметров, наиболее существенно влияющих на динамику ОУ. Функция $F(\cdot)$ представляет главную составляющую правой части (3.1), функция $\varphi(\cdot)$ отражает действие неизмеряемых возмущений, для которых известны лишь оценки их уровня и которые отбрасываются при первоначальном синтезе. Другими словами, к функции $F(\cdot)$ алгоритм управления должен "подстраиваться", а от функции $\varphi(\cdot)$ – "отстраиваться". Успех "подстройки" обусловливается медленностью изменения параметра ξ (квазистационарностью ОУ) и адаптивными свойствами алгоритма, а успех "отстройки" – свойствами грубости (робастности).

Цель управления необходимо задать в виде (2.2) или (2.28), подбрав подходящий функционал Q_t , в соответствии с основными предъяв-

ляемыми к системе требованиями (по точности, быстродействию, помехоустойчивости, технологическим и экономическим ограничениям и т.п.). Если имеется несколько возможных вариантов, из них выбирают наиболее предпочтительный по критериям простоты реализации и обоснования синтезированной системы. Если таких функционалов оказывается несколько (например, множество квадратичных функций $x(t)^T H x(t)$ при различных матрицах $H > 0$), то можно ставить задачу синтеза алгоритма из условия существования целевого функционала заданного вида (см. ниже).

Класс допустимых алгоритмов управления определяется исходя из возможностей технической реализации: набора доступных измерению переменных, возможностей исполнительных устройств, имеющихся вычислительных ресурсов. Однако для облегчения решения при первоначальном синтезе класс допустимых алгоритмов желательно брать как можно шире (например, предполагаются измеряемыми все необходимые переменные).

Этап 2. Выбор структуры регулятора (синтез основного контура системы). В классе допустимых алгоритмов выбирается параметрический подкласс алгоритмов, имеющих вид

$$u(t) = U[x_0^t, u_0^t, \theta], \quad (3.2)$$

где θ – конечномерный вектор параметров. Алгоритм (3.2) должен быть таким, что для каждого $\xi \in \Xi$ существует "идеальный" набор $\theta_*(\xi)$, обеспечивающий при $\varphi(\cdot) \equiv 0$ выполнение какого-либо из условий достижимости Д1–Д5 (в первую очередь проверяются наименее ограничительные условия Д3, Д1). Таким образом, "идеальные" параметры θ_* в (3.2) являются либо функциями от ξ , либо непосредственно компонентами вектора ξ .

Для облегчения выбора алгоритма (3.2) можно ставить вспомогательные цели. Например, в системах с эталонной моделью (ЭМ) ставится новая цель: удовлетворить тождеству

$$F(x, u, t, \xi) = F_m(x, t), \quad (3.3)$$

где $F_m(\cdot)$ – заданная вектор-функция, определяющая желаемую динамику системы. По-существу (3.3) является условием параметрической инвариантности [138]. Если (3.3) разрешимо относительно управления, то при устойчивой ЭМ $\dot{x}_m = F_m(x_m, t)$ соответствующее условие достижимости будет выполнено, причем в качестве целевого функционала $Q_t(\cdot)$ можно взять функцию Ляпунова ЭМ. Поэтому, разрешая (3.3), можно получить идеальный закон управления.

Условия разрешимости (3.3) относительно управления носят структурный характер; для линейно квадратичных задач они хорошо известны (критерий идеальной подслеживающей модели [225, 239], условия адаптируемости [150, 205], условия согласованности [25, 178]). Можно использовать и другие методики синтеза основного контура (см., например, [25, 39, 139, 205]).

Этап 3. Выбор настраиваемых параметров. На данном этапе неизвестные параметры заменяются настраиваемыми. При прямом подходе в качестве настраиваемых выступает вектор θ параметров алгоритма (3.2). При идентификационном подходе – вектор $\hat{\xi}$ оценок неизвестных па-

метров ОУ. Итогом этапа является уравнение обобщенного настраиваемого объекта (ОНО) (см. гл. 1), входом которого считается вектор настраиваемых параметров. Желательно, чтобы уравнение ОНО было линейно относительно входов. При прямом подходе уравнение ОНО описывает замкнутую систему (3.1), (3.2) с входом θ .

При идентификационном подходе дополнительно составляется уравнение настраиваемой модели

$$\dot{x}_M(t) = F(x_M, u, t, \hat{\xi}) \quad (3.4)$$

и уравнение ОНО образуется из (3.1), (3.4), причем входом ОНО считается $\hat{\xi}$, а "старое" управление $u(t)$ считается заданной функцией времени. Кроме того, вводится новая ЦУ (цель адаптации), выражающая близость динамики ОУ (3.1) и модели (3.4) и задаваемая, например, функционалом

$$Q(x_M, t) = Q(x(t) - x_M),$$

в который явно входит решение (3.4) (случай явной настраиваемой модели), или функционалом

$$\tilde{Q}(x, \hat{\xi}, t) = Q(\dot{x}(t) - F(x(t), u(t), t, \hat{\xi}))$$

(случай неявной настраиваемой модели). Здесь $Q(\cdot) \geq 0$ — выпуклая функция, $Q(0) = 0$. Выбор подхода определяет структуру АдСУ: при прямом подходе алгоритм адаптивного управления имеет вид

$$u(t) = U[x_0^t, u_0^t, \theta(t)], \quad (3.5)$$

$$\theta(t) = \Theta'[x_0^t, u_0^t, \theta_0^t], \quad (3.6)$$

при идентификационном —

$$u(t) = U[x_0^t, u_0^t, \theta_*(\hat{\xi}(t))], \quad (3.7)$$

$$\hat{\xi}(t) = \Theta''[x_0^t, u_0^t, \hat{\xi}_0^t]. \quad (3.8)$$

Нахождение операторов Θ' или Θ'' — задача следующего этапа.

Следует отметить, что системы прямого и идентификационного типа бывает иногда трудно различить. Пусть, например, ОУ описывается уравнением $A(p)y = B(p)u$, а ЦУ задается уравнением эталонной модели $A_M(p)y = B_M(p)r(t)$, где y, u, r — скаляры, A, A_M, B, B_M — многочлены от оператора дифференцирования $p = d/dt$. Тогда уравнение ОУ можно переписать в виде

$$A_M(p)y = B(p)u + C(p)y,$$

где $C(p) = A_M(p) - A(p)$, откуда видно, что если задать регулятор соотношением

$$B(p)u + C(p)y = B_M(p)r(t),$$

то ЦУ будет достигаться. Следовательно, в качестве настраиваемых параметров можно выбрать оценки неизвестных коэффициентов многочленов $B(p)$, $C(p)$, которые можно интерпретировать и как параметры ОУ, и как параметры регулятора!

Это замечание справедливо и в общей задаче управления нелинейным объектом, описываемым уравнением неявного типа

$$\Phi(\dot{x}, x, u, \xi) = 0,$$

если ЦУ задана эталонным уравнением $\Phi_m(\dot{x}, x, t) = 0$. При этом естественно искать управляющее воздействие из соотношения

$$\Phi(\dot{x}, x, u, \theta) = \Phi_m(\dot{x}, x, t),$$

где $\theta = \theta(t)$ — вектор текущих оценок ξ , определяемый из условия достижения цели адаптации $\Phi(\dot{x}, x, u, \theta) = 0$. Тогда цели управления и адаптации, очевидно, совпадут, а прямой подход совпадет с идентификационным. Такое совпадение имеет место, и если ЦУ состоит в приближении $x(t)$ к $x_m(t)$ — решению эталонной модели $\Phi_m(\dot{x}_m, x_m, t) = 0$. Нужно только потребовать грубости эталонной модели в том смысле, что для любого $\epsilon > 0$ существуют $\delta > 0$, $t_* > 0$ такие, что из

$$\|\Phi_m(\dot{x}_m, x_m, t) - \Phi_m(\dot{x}, x, t)\| \leq \delta$$

для всех $t \geq 0$ следует, что $\|x(t) - x_m(t)\| \leq \epsilon (t > t_*)$.

Этап 4. Выбор алгоритма адаптации. Алгоритм адаптации (3.8) или (3.6) выбирается в классе алгоритмов скоростного градиента. Исходным является описание ОНО и новая ЦУ — цель адаптации (при прямом подходе совпадающая с исходной ЦУ). В соответствии с результатами главы 2, если возмущения в (3.1) отсутствуют, то в качестве алгоритма адаптации берется один из базовых алгоритмов (2.9), (2.14), (2.18), (2.24) или их частных случаев (см. § 2.2). Если возмущениями пренебречь нельзя, то используются огрубленные алгоритмы (2.43), (2.44), (2.49), см. § 2.4.

Этап 5. Определение условий применимости и предварительный расчет параметров АдСУ. Исследование и выбор параметров алгоритмов, структура которых выбрана на предыдущем этапе, производится при помощи теорем 2.1–2.20, определяющих условия достижения и оценки скорости достижения различных ЦУ.

По описанной методике, при различных ОУ и ЦУ, методом скоростного градиента можно провести синтез и обоснование широкого класса беспоисковых непрерывных алгоритмов адаптивного управления. Многие из них нашли применение при решении практических задач.

Ниже проводятся синтез и обоснование нескольких типичных схем АдСУ. Другие алгоритмы и условия их применимости представлены в таблицах. Для простоты предполагается, что неизмеряемые возмущения и фазовые ограничения отсутствуют (в противном случае нужно использовать, в соответствии с результатами § 2.4, огрубленные АСГ). Неизвестные параметры считаются постоянными, а все переменные состояния ОУ — доступными измерению.

§ 3.2. Синтез систем с явной эталонной моделью

Обширным классом беспоисковых адаптивных систем управления являются адаптивные системы с моделями – эталонными и настраиваемыми. В них модель выступает как заданное динамическое звено (явно реализованное в системе или присутствующее в ней неявно в виде заданных коэффициентов, уставок), воплощающее требования к системе по окончании процесса адаптации.

Рассмотрим адаптивные системы с явной ЭМ, в которых цель адаптации совпадает с целью управления и состоит в обеспечении близости поведения системы к поведению ЭМ. Важный вопрос о выборе ЭМ рассматривается не будет: он может быть решен методами классической теории управления [37, 135].

3.2.1. Системы с параметрической адаптацией. Рассмотрим сначала задачу так называемой "непосредственной адаптации" (задачу параметрического управления), когда настройке доступны не коэффициенты регулятора, а непосредственно коэффициенты уравнений объекта. Таким образом, речь идет только о синтезе контура адаптации, т.е. этапы 1–3 схемы § 3.1 в данном случае отсутствуют, и ОУ совпадает с ОНО.

Пусть ОУ описывается уравнением

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)r(t), \quad (3.9)$$

где $x = x(t) \in R^n$ – вектор состояния объекта, $r(t) \in R^m$ – вектор задающих воздействия, $n \times n$ -матрица A и $n \times m$ -матрица B – неизвестные параметры объекта, $n \times n$ -матрица ΔA и $n \times m$ -матрица ΔB – настраиваемые коэффициенты. Таким образом, вектор неизвестных параметров $\xi = \text{col}(A, B)$ и настраиваемых параметров $\theta = \text{col}(\Delta A, \Delta B)$ имеют одинаковую размерность $N = n(m + n)$. Цель управления – обеспечить стремление вектора $x(t)$ к вектору состояния ЭМ $x_M(t) \in R^n$, являющемуся решением уравнения

$$\dot{x}_M = A_M x_M + B_M r(t), \quad (3.10)$$

где $n \times n$ -матрица A_M и $n \times m$ -матрица B_M заданы, причем матрица A_M – гурвицева.

Для синтеза алгоритма адаптации методом скоростного градиента выберем локальный квадратичный функционал $Q_t = e^T H e$, где $e = e(t) = x(t) - x_M(t)$ – вектор ошибки, $H = H^T > 0$ – положительно определенная $n \times n$ -матрица, выбор которой будет уточнен ниже. Цель управления примет вид (2.28). Для вывода алгоритма адаптации вычислим сначала функцию $\dot{Q}_t = \omega(x, \theta, t)$. Дифференцируя в силу (3.9), (3.10), получим

$$\dot{Q}_t = e^T H [(A + \Delta A)x + (B + \Delta B)r(t) - A_M x_M - B_M r(t)].$$

Далее дифференцируем по настраиваемым параметрам (с учетом правил дифференцирования сложной функции и соотношения $\nabla f(z) = [\partial f / \partial z]^T$):

$$\nabla_{\Delta A} \dot{Q}_t = H e x^T, \quad \nabla_{\Delta B} \dot{Q}_t = H e r(t)^T.$$

Наконец, выпишем алгоритм скоростного градиента (2.9), полагая для

простоты $\Gamma = \gamma I_N$, $\gamma > 0$ (I_N – единичная матрица):

$$\frac{d\Delta A}{dt} = -\gamma H e x^T, \quad \frac{d\Delta B}{dt} = -\gamma H e r(t)^T. \quad (3.11)$$

Для нахождения условий работоспособности синтезированной системы (этап 5) проверим условия теоремы 2.1. Условие выпуклости здесь выполнено в силу линейности \dot{Q} , по ΔA , ΔB . Условие достижимости Д2 будет выполнено при $\mu(t) \equiv 0$, если положить $\theta_* = \text{col}(A_m - A, B_m - B)$ и матрицу $H > 0$ выбрать по заданной гурвицовой матрице A_m как решение уравнения Ляпунова $HA_m + A_m^T H = -R$, где в качестве R можно взять любую симметричную положительно определенную матрицу.

Действительно, при этом

$$\omega(x, \theta, t) = e^T H A_m e = \frac{1}{2} e^T R e \leq -\frac{\alpha_0}{2} e^T H e$$

для достаточно малого $\alpha_0 > 0$. Условие роста В1 будет выполнено при ограниченном $x_m(t)$, т.е. при ограниченном задающем воздействии $r(t)$. Из теоремы 2.1 следует, что для любого объекта вида (3.9) цель управления $e(t) \rightarrow 0$ достигается, если A_m гурвицева, а $r(t)$ ограничена. Таким образом, класс адаптивности Ξ состоит из всех объектов (3.9).

Отметим, что при тех же условиях, как следует из теоремы 2.5, применимы и конечно-дифференциальные алгоритмы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\Delta A + \psi_A(x, t)] &= -\gamma H_A e x^T, \\ \frac{d}{dt} [\Delta B + \psi_B(x, t)] &= -\gamma H_B e r(t)^T, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где в соответствии с (2.17), (2.20) может быть, например,

$$\psi_A(x, t) = H_A e x^T, \quad \psi_B(x, t) = H_B e r(t)^T$$

либо

$$\psi_A(x, t) = \text{sign}(H_A e x^T), \quad \psi_B(x, t) = \text{sign}(H_B e r(t)^T).$$

Установим теперь условия, при которых алгоритм (3.11) является идентифицирующим, т.е. $A + \Delta A \rightarrow A_m$, $B + \Delta B \rightarrow B_m$ при $t \rightarrow \infty$. Вычитая (3.10) из (3.9), получим уравнение ошибки:

$$\dot{e} = A_m e + (A + \Delta A - A_m)(e + x_m) + (B + \Delta B - B_m)r(t).$$

Вводя соответствующие обозначения, видим, что полученное уравнение является частным случаем (2.38), причем строки матрицы $B(x_*(t), t)$ из (2.38) образованы из компонент векторов $x_m(t)$, $r(t)$ и нулей. Нетрудно проверить, что условия теоремы 2.9 будут выполнены, если вектор-функция $\text{col}(x_m(t), r(t))$ является интегрально невырожденной, т.е. ЭМ (3.10) достаточно полно возбуждается входным воздействием $r(t)$. В частности, можно показать [178], что алгоритм (3.11) является идентифицирующим, если ЭМ управляема, а спектр функции $r(t)$ содержит не менее n частот.

Аналогичные результаты справедливы и в случае, когда настройке доступны не все коэффициенты уравнения объекта (3.9), например, если настраиваются параметры линейного регулятора. При этом класс адаптивности Ξ сужается: он будет состоять из объектов, коэффициенты которых A, B представимы в виде $A = A_M + \Delta A, B = B_M + \Delta B$, где в матрицах $\Delta A, \Delta B$ на месте неперестраиваемых коэффициентов стоят нули. Для того, чтобы реальные объекты попали в этот класс Ξ , необходимо специальным образом выбирать структуру основного контура и эталонной модели.

Пусть например, ОУ описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.13)$$

а ЦУ задается в виде $Q_t \rightarrow 0$, где $Q_t = e^T He$ – локальный функционал, $e(t) = x - x_M(t)$, $x_M(t)$ – траектория эталонной модели (3.10). Тогда

$$\dot{Q}_t = e^T H(Ax + Bu - A_M x_M - B_M r),$$

а равенство (3.3) примет вид

$$Ax + Bu - A_M x_M - B_M r = A_M e. \quad (3.14)$$

Для синтеза основного контура (этап 2) предположим, что для любых $x, x_M \in R^n, r \in R^m$ уравнение (3.14) разрешимо относительно $u \in R^m$. Можно показать [150, 205, 239], что это условие эквивалентно существованию $m \times n$ -матрицы K_A^* и $m \times m$ -матрицы K_B^* таких, что

$$A_M - A = BK_A^*, \quad B_M = BK_B^*, \quad (3.15)$$

или соотношениям $A - A_M \in \mathcal{L}(B), B_M \in \mathcal{L}(B)$ ($\mathcal{L}(B)$ – линейное пространство матриц, столбцы которых являются линейными комбинациями столбцов матрицы B), или соотношением

$$\text{rank}\{B, B_M\} = \text{rank}\{B, A_M - A\} = \text{rank } B. \quad (3.16)$$

Будем называть (3.16) *условиями адаптируемости* (см. § 1.3). При выполнении (3.16) решение (3.14) u_* задается формулой

$$u_* = K_A^* x + K_B^* r, \quad (3.17)$$

где $K_A^* = B^T (A_M - A), K_B^* = B^T B_M$, B^T – матрица, псевдообратная к матрице B . Формула (3.17) определяет структуру основного контура, которая в задаче параметрической адаптации задается соотношением

$$u = K_A x + K_B r \quad (3.18)$$

при векторе настраиваемых параметров $\theta = \text{col}(K_A, K_B)$. При этом выполнено условие достижимости Д2 для $\theta_* = \text{col}(K_A^*, K_B^*)$ и матрицы H , выбранной из уравнения Ляпунова $HA_M + A_M^T H = -R$. Алгоритм адаптации, аналогичный (3.11), имеет вид

$$\dot{K}_A = -\gamma B^T H e x^T, \quad K_B = -\gamma B H e r^T \quad (3.19)$$

и может включать аналогично (3.12) конечные составляющие.

Класс адаптивности синтезированной АдСУ определяется условиями адаптируемости (3.16), ограниченности $r(t)$ и гурвицевости матрицы A_M . Практически алгоритмы (3.11), (3.19) сохраняют работоспособность, если изменение параметрических рассогласований происходит в широких

пределах, но сравнительно медленно. При быстрых возмущениях их работоспособность теряется. Для борьбы с этим явлением используются сигнальные алгоритмы адаптации.

3.2.2. Системы с сигнальной адаптацией. Системами с сигнальной адаптацией принято называть системы, в которых для борьбы с неопределенностью к управляющему воздействию добавляется специальный сигнал (сигнал адаптации). Сигнальные алгоритмы могут относиться как к классу конечных АСГ, так и к классу АСГ в дифференциальной форме.

Снова рассмотрим задачу управления объектом (3.13), но на этапе 3 АДСУ выберем в качестве настраиваемых параметров непосредственно вход $u(t)$ объекта (3.13) (т.е. $\theta = u$) и перейдем к синтезу алгоритма адаптации (этап 4) в классе АСГ в конечной форме. В данном случае

$$\nabla_u \omega(x, u, t) = B^T H e$$

и алгоритмы (2.17), (2.20) принимают вид

$$u(t) = -\Gamma B^T H e, \quad (3.20)$$

$$u(t) - \gamma \operatorname{sign}(B^T H e) \quad (3.21)$$

(для простоты считаем, что $u_0 = 0$, Γ – положительно определенная матрица, а γ – положительное число). Для обоснования синтезированных алгоритмов (этап 5) воспользуемся теоремой 2.3 с учетом замечаний. Рассмотрим, например, алгоритм (3.21), для которого условие сильной псевдоградиентности G выполнено при $\delta = \beta = 1$. Условия А2, В1 будут выполняться, если $r(t)$ – ограниченная функция, так как функция $\psi(x, u, t) = \operatorname{sign}(B^T H e)$ не зависит от u . Условие выпуклости выполняется в силу линейности (3.13) по входам. Выполнено также условие Д2 при $\mu(t) \equiv 0$, $\alpha_0 = \lambda_{\min}(R)/\lambda_{\max}(H)$. Из (3.17) и замечаний 1, 3 к теореме следует, что $d < \infty$, все траектории системы (3.13), (3.21) ограничены и ЦУ (2.28) выполняется при $\gamma > d$, где

$$d = \sup_{\Omega_0} \|u_*(x, t)\|, \quad \Omega_0 = \cup\{x: e^T H e \leq Q_0\},$$

$$Q_0 = e(0)^T H e(0).$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} d &\leq \sup_{e^T H e \leq Q_0} (\|K_B r(t)\| + \|K_A x\|) \leq \\ &\leq \sup_{t \geq 0} \sup_{\bar{\Omega}_t} (\|K_B\| \cdot \|r(t)\| + \|K_A\| \cdot \|x(t)\|), \end{aligned}$$

где

$$\bar{\Omega}_t = \{x: \|x\| \leq \sqrt{Q_0/\lambda_{\min}(H)} + \|x_M(t)\|\}.$$

В свою очередь, для выполнения неравенства $\gamma > d$ достаточно выполнения неравенства $\gamma > \bar{d}$, где

$$\bar{d} = \bar{\beta} [\bar{\beta}_M \bar{r} + \bar{\alpha} (\bar{x}_M + \sqrt{Q_0/\lambda_{\min}(H)})], \quad (3.22)$$

$$\bar{\beta} \geq \|B^T\|, \quad \bar{r} \geq \|r(t)\|, \quad \bar{\beta}_M \geq \|B_M\|,$$

$$\bar{\alpha} \geq \|A - A_M\|, \quad \bar{x}_M \geq \|x_M(t)\|.$$

Аналогично доказывается, что при тех же предположениях алгоритм (3.20) обеспечивает в системе (3.13), (3.20) ЦУ (2.2) при любом $\Delta > 0$, если выбрать $\Gamma \geq \gamma_0 I$, где $\gamma_0 > 0$ достаточно велико. Отметим, что полученные выводы и оценки сохраняются и для нелинейных и нестационарных объектов (3.13), когда $A = A(x, t)$, $B = B(x, t)$, лишь бы выполнялось условие адаптируемости (3.16).

Рассмотрим теперь в той же задаче другой вариант структуры основного контура. Учитывая соотношение (3.17), выберем основной контур в виде (3.18) и будем считать вектором настраиваемых параметров набор всех элементов матриц K_A , K_B ($\theta = \text{col}(K_A, K_B)$). Очевидно, уравнение ОНО будет иметь вид $\dot{x} = Ax + B(x, t)\theta$, где $\bar{B}(x, t) = \text{col}(B^T, Bx^T)$, причем условие достижимости Д2 будет выполнено при $\theta_* = \text{col}(K_B^*, K_A^*)$. Переходя к синтезу алгоритма адаптации, получим из (2.17), (2.20) следующие алгоритмы:

$$K_B = -\gamma B^T H e r^T, \quad K_A = -\gamma B^T H e x^T, \quad (3.23)$$

$$K_B = -\gamma \text{sign}(B^T H e r^T), \quad K_A = -\gamma \text{sign}(B^T H e x^T). \quad (3.24)$$

Отметим, что подстановка (3.23), (3.24) в (3.18) приводит к алгоритмам управления вида

$$u = -\gamma(\|r(t)\|^2 + \|x(t)\|^2)B^T H e, \quad (3.25)$$

$$u = -\gamma\left(\sum_{i=1}^m |r_i(t)| + \sum_{i=1}^n |x_i(t)|\right)B^T H e. \quad (3.26)$$

Применяя для обоснования теорему 2.3, получим, например, для алгоритма (3.24), что ЦУ (2.28) будет выполнено при $\gamma > d$, где

$$d = \sup \sqrt{\|K_B^*\|^2 + \|K_A^*\|^2} \leq \sup \|B^*(x, t)\| \sqrt{\|A - A_M\|^2 + \|B_M\|^2}.$$

Аналогично синтезируются алгоритмы для других целевых функционалах, например, при $Q(x, t) = \sum_{i=1}^n |e_i|$, при интегральном функционале (2.15) и т.д. При этом для обоснования используются теоремы 2.3, 2.4.

3.2.3. Системы с сигнально-параметрической адаптацией. К другому классу адаптивных систем с эталонной моделью (ЭМ) можно прийти, если перераспределить составляющие закона идеального управления (3.17), задав структуру основного контура в виде

$$u = K_A x + K_B r + u_s \quad (3.27)$$

и выбрав вектор настраиваемых параметров $\theta = \text{col}(K_A, K_B, u_s) \in R^{mn+m^2+m}$ (u_s – сигнальная составляющая). Вновь выбирая целевую функцию $Q_t = 0.5 e^T H e$, вычислим компоненты скоростного градиента

$$\nabla_{K_A} Q_t = B^T H e x^T, \quad \nabla_{K_B} Q_t = B^T H e r^T, \quad \nabla_{u_s} Q_t = B^T H e. \quad (3.28)$$

Если в алгоритме адаптации (2.24) положить $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, I_m, \gamma_2 I_{m^2}, 0_m\}$, а алгоритм для сигнальной составляющей взять в конечной форме (2.20),

Таблица 3.1

Алгоритмы адаптации и управления в системах с явной эталонной моделью

№№ пп.	Уравнения объекта; вектор управления	Целевой функцио- наль	Алгоритм управления при $\Gamma = \gamma I$	Условия сходимости; результат	Форма алгоритмов		Литература	
					конечная			
					знак.	линей.		
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Алгоритмы параметрической адаптации

1	a) настройка коэф- фициентов регу- лятора $\dot{x} = Ax + Bu,$ $\dot{x}_M = A_M x_M + B_M r(t),$ $e = x - x_M;$ $u = k_r r(t) + k_x x,$ $\theta = \text{col}(k_r, k_x)$	$Q = \frac{1}{2} e^T P e,$ $P = P^T > 0$	$k_r = -\gamma \text{sign}(B^T P e r^T),$ $k_x = -\gamma \text{sign}(B^T P e x^T)$	A_M — гурвицева $PA_M + A_M^T P = -R,$ $R = R^T > 0,$ $\gamma > \ B^T\ \sqrt{\ A - A_M\ ^2 + \ B_M\ ^2},$ $\text{rank } B = \text{rank}\{B, B_M\} =$ $= \text{rank}\{B, A_M - A\};$ $e(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$		+	[138]
---	--	---	---	---	--	---	-------

2	"	"	$\frac{dk_r}{dt} = -\gamma B^T P e r^T,$ $\frac{dk_x}{dt} = -\gamma B^T P e x^T$	A_M — гурвицева, $\gamma > 0,$ $\text{rank } B = \text{rank}\{B, B_M\} =$ $= \text{rank}\{B, A_M - A\};$ $e(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$		+	[71, 184]
---	---	---	---	---	--	---	-----------

Таблица 3.1 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	"	"	$\frac{dk_r}{dt} = -\gamma B^T P e r^T - \gamma_1 \frac{d}{dt} \text{sign}(B^T P e r^T),$ $\frac{dk_x}{dt} = -\gamma B^T P e x^T - \gamma_1 \frac{d}{dt} \text{sign}(B^T P e x^T)$	A_M — гурвицева, $\gamma > 0, \gamma_1 > 0,$ $\text{rank } B = \text{rank } \{B, B_M\} =$ $= \text{rank } \{B, A_M - A\};$ $e(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$				[138]
4	"	"	$\frac{dk_r}{dt} = -\gamma B^T P e r^T - \gamma_1 \frac{d}{dt} (B^T P e r^T),$ $\frac{dk_x}{dt} = -\gamma B^T P e x^T - \gamma_1 \frac{d}{dt} (B^T P e x^T)$	A_M — гурвицева, $\gamma > 0, \gamma_1 > 0,$ $\text{rank } B = \text{rank } \{B, B_M\} =$ $= \text{rank } \{B, A_M - A\};$ $e(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$				[25, 239]
5	б) настройка коэффициентов уравнения состояния $\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)r(t),$ $\dot{x}_M = A_M x_M + B_M r(t),$ $e = x - x_M,$ $\theta = \text{col}(\Delta A, \Delta B)$	$Q = e^T P e$ $P = P^T > 0$	$\frac{d\Delta A}{dt} = -\gamma P e x^T,$ $\frac{d\Delta B}{dt} = -\gamma P e r^T$	A_M — гурвицева, $\gamma > 0;$ $e(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$				[71, 239]

6

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta A}{dt} &= -\gamma P e x^T - & A_M - \text{гурвицова}, \\ &- \gamma_1 \frac{d}{dt} P e x^T; & \gamma > 0, \gamma_1 > 0; \\ \frac{d\Delta B}{dt} &= -\gamma P e r^T - & e(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty \\ &- \gamma_1 \frac{d}{dt} P e r^T \end{aligned} \quad + \quad + \quad [239]$$

Алгоритмы сигнальной адаптации

$$\begin{aligned} 7 \quad \dot{x} &= Ax + Bu, & u = -\gamma \operatorname{sign}(B^T Pe), & A^* - \text{гурвицова}, \\ \dot{x}_M &= A_M x_M + B_M r(t), & \gamma = \gamma_x |x| + \gamma_r |r|, & \gamma_x > \|B^*(A_M - A)\|, \\ e &= x - x_M, & |x| = \sum_{i=1}^n |x_i|, & \gamma_r > \|B^* B_M\|, \\ \theta &= u & |r| = \sum_{j=1}^m |r_j| & \operatorname{rank} B = \operatorname{rank}\{B, B_M\} = \\ &&&= \operatorname{rank}\{B, A_M - A\}; \\ &&&e(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad + \quad [138, 172, 240]$$

Алгоритмы систем с переменной структурой

$$\begin{aligned} 8 \quad \dot{x} &= Ax + Bu, & u = -\gamma \operatorname{sign}(GB)^T s, & A^* - \text{гурвицова}, \\ \dot{x}_M &= A_M x_M + B_M r(t), & \gamma = \gamma_{x_M} |x_M| + \gamma_r |r| + & A^* = [I_n - B(GB)^{-1}G] A_M \\ e &= x - x_M, & + \gamma_e |e| & \det GB \neq 0, \\ s &= Ge, & & \gamma_{x_M} \geq \| (GB)^{-1} G A \|, \\ \theta &= u & & \gamma_r > \| (GB)^{-1} G B_M \|, \\ &&& \gamma_e > \| (GB)^{-1} G (A_M - A) \|, \\ &&& \operatorname{rank} B = \operatorname{rank}\{B, B_M\} = \\ &&&= \operatorname{rank}\{B, A_M - A\}; \\ &&&e(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad + \quad [173]$$

Таблица 3.1 (окончание)

то адаптивный регулятор будет описываться соотношениями (3.27) при

$$u_s = -\gamma |e| \operatorname{sign} B^T H e, \quad (3.29)$$

$$\dot{K}_A = -\gamma_1 B^T H e x^T, \quad \dot{K}_B = -\gamma_2 B^T H e r^T,$$

где $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma > 0$.

Для проверки условия достижимости положим

$$K_A^* = B^*(A_m - A), \quad K_B^* = B^*B_m,$$

$$u_s = B^*(A_m - G)e, \quad \theta_* = \operatorname{col}(K_A^*, K_B^*, u_s).$$

Тогда

$$\dot{Q}_t |_{\theta = \theta_*} = -e^T H G e \leq -\alpha_0 Q_t, \quad (3.30)$$

и, следовательно, условие Д2 будет выполнено при произвольной гурвицовой матрице G и соответствующем $\alpha_0 > 0$. Матрица $H > 0$ в целевой функции выбирается как решение неравенства Ляпунова $HG + G^T H < 0$.

Матрица G определяет динамику процесса адаптации, которая в данной структуре может задаваться независимо от динамики ЭМ. Участвующая в (3.29) матрица B , вообще говоря, неизвестна. Однако можно показать, что АдСУ сохранит работоспособность, если заменить в (3.29) матрицу B на любую матрицу того же размера \bar{B} , связанную с B соотношением $\bar{B} = \bar{K}B$, где \bar{K} — положительно определенная $m \times m$ -матрица. В частности, можно заменить в (3.29) B на B_m , если выполнены условия адаптируемости (3.15) при некоторой положительно определенной K_B^* .

Из теоремы 2.5 следует, что при выполнении перечисленных условий и при $\gamma > \|B^*(A_m - A)\|/\rho$ система (3.13), (3.27), (3.29) асимптотически устойчива по переменным ошибки $e(t)$ и все ее траектории при отсутствии помех ограничены. Если помехами пренебречь нельзя, следует пользоваться огрубленными АСГ и результатами § 2.4.

Основные существующие структуры адаптивных систем с явной ЭМ представлены в таблице 3.1.

С ростом размерности векторов входа, выхода и состояния ОУ реализация адаптивных систем с явной ЭМ становится все более громоздкой. Упрощению структуры системы препятствует условие адаптируемости (3.16). В следующем параграфе описываются адаптивные системы с неявной ЭМ, позволяющие за счет ослабления условия адаптируемости снизить требования к структуре основного контура и к полноте измеряемой информации.

§ 3.3. Синтез систем с неявной эталонной моделью

В описываемых ниже системах ЭМ представлена набором параметров адаптивного регулятора: коэффициентов некоторого "эталонного" дифференциального уравнения, решения которого обладают желаемым качеством переходных процессов. При этом мера расхождения реального и эталонного процессов вводится как невязка правых частей соответствующих уравнений, т.е. без вычисления их решений.

3.3.1. Базовая структура адаптивной системы с неявной эталонной моделью (АСНЭМ). Рассмотрим ОУ, описываемый уравнениями состояния

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = L^T x, \quad (3.31)$$

где $x = x(t) \in R^n$ – вектор состояния ОУ, $u = u(t) \in R^l$ – скалярное управление, $y = y(t) \in R^l$ – вектор измеряемых выходов, $A = A(\xi)$, $B = B(\xi)$, $L = L(\xi)$ – параметры ОУ, зависящие от $\xi \in \Xi$. Регулятор задан линейный с настраиваемыми коэффициентами

$$u = \theta(t)^T y(t), \quad (3.32)$$

где $\theta(t) \in R^l$. Поставим задачу: найти алгоритм адаптации

$$\dot{\theta} = F(y(t)) \quad (3.33)$$

так, чтобы для любого $\xi \in \Xi$ в системе (3.31), (3.33) достигалась ЦУ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (3.34)$$

и траектории системы $\{x(t), \theta(t)\}$ были ограничены. Таким образом, рассматривается задача синтеза системы, адаптивной в классе Ξ по отношению к ЦУ (3.34) при заданной структуре (3.32) основного контура. ЦУ (3.34) соответствует требованию устойчивости АдСУ; обеспечение заданного качества будет осуществляться за счет выбора ее параметров.

Подставленную задачу будем решать методом скоростного градиента. Для этого зададим ЦУ (3.34) соотношением $Q(x(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, где $Q(x) = 0,5 x^T H x$ – оценочная функция, $H = H^T > 0$ – положительно определенная $n \times n$ -матрица. Найдем функцию $\omega(x, \theta, \xi)$ – производную $Q(x)$ в силу (3.31), а затем $\nabla_\theta \omega(x, \theta, \xi)$. Имеем

$$\omega(x, \theta, \xi) = x^T H(Ax + B\theta^T y), \quad (3.35)$$

$$\nabla_\theta \omega(x, \theta, \xi) = x^T H B y. \quad (3.36)$$

Поскольку алгоритм адаптации должен использовать только величины, входящие в $y(t)$, в (3.36) скаляр $x^T H B$ должен быть функцией вектора выходов $y(t)$. Но как $x^T H B$, так и $y = L^T x$ линейны по x , поэтому $x^T H B$ должен быть линейной комбинацией выходов, т.е. $B^T H x = g^T L^T x$ для некоторого $g \in R^l$ и любого $x \in R^n$. А это означает, что $H B = L g$. Мы пришли к алгоритму адаптации

$$\dot{\theta} = -g^T y(t) \Gamma y(t), \quad (3.37)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$ – $l \times l$ -матрица. Структурная схема АдСУ (3.31), (3.32), (3.37) представлена на рис. 3.1. Чтобы получить условия достижения ЦУ в системе (3.31), (3.32), (3.37), воспользуемся теоремой 2.1. Условия А1, В1, очевидно, выполнены, так как правые части системы и функция $Q(x)$ суть гладкие функции, не зависящие от t . Условие выпуклости справедливо в силу линейности по θ правой части (3.35). Проверим условие достижимости Д1. Оно будет выполнено, если существует вектор $\theta_* \in R^l$ такой, что $x^T H(A + B\theta_*^T L^T)x < 0$ при $x \neq 0$. При этом нет нужды находить H , θ_* , поскольку алгоритм (3.37) от них не зависит. Достаточно лишь знать, что такие матрица и вектор существуют. Таким образом, возникает следующая алгебраическая задача.

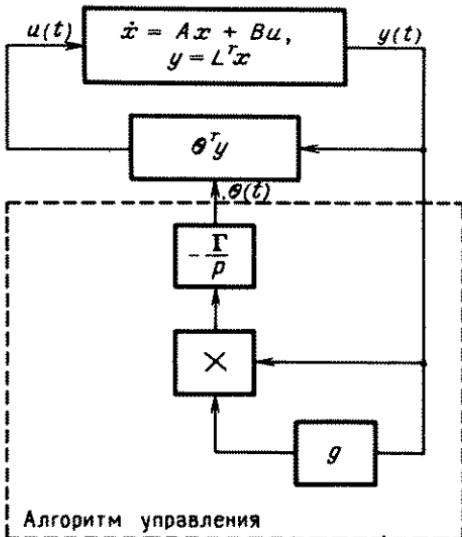


Рис. 3.1. Структура АдСУ с неявной эталонной моделью

Даны $n \times n$ -матрица A , $n \times l$ -матрица L , векторы $B \in R^n$, $g \in R^l$. Требуется найти условия существования $n \times n$ -матрицы $H = H^T > 0$ и вектора $\theta_* \in R^l$ таких, что

$$HA_* + A_*^T H < 0, \quad HB = Lg, \quad A_* = A + B\theta_*^T L^T.$$

Решение задачи дается теоремой П2.1 (см. [181, 183]), помещенной в приложении 2, доказательство которой опирается на частотную теорему [43, 206]. Теорема П2.1 позволяет сформулировать основной результат данного пункта, которому предпошли определение.

Определение 3.1. Пусть дробно-рациональная функция $x(\lambda)$ имеет вид $x(\lambda) = r^T (\lambda I_n - P)^{-1} q$, т.е. является передаточной функцией линейной системы $\dot{x} = Px + qu$, $y = r^T x$, где $x \in R^n$, u , $y \in R^l$. Функция $x(\lambda)$ называется *строго минимально-фазовой*, если ее числитель $\beta(\lambda) = \alpha(\lambda)x(\lambda)$, где $\alpha(\lambda) = \det(\lambda I - P)$ является гурвицевым (устойчивым) многочленом степени $n - 1$ с положительными коэффициентами.

Теорема 3.1 [181]. *Система (3.1), (3.2), (3.7) адаптивна в классе Ξ по отношению к ЦУ (3.4) и все ее траектории ограничены, если для любого $\xi \in \Xi$ функция $g^T W(\lambda)$ строго минимально-фазовая, где $W(\lambda) = L^T (\lambda I_n - A)^{-1} B$ – передаточная 1×1 -матрица ОУ (3.1).*

Замечания.

1. Многочлен-числитель функции $g^T W(\lambda)$ можно представить в виде $G(\lambda) = g^T h(\lambda)$, где $h(\lambda) = \alpha(\lambda) W(\lambda)$, $\alpha(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$. Таким образом, условия работоспособности адаптивной системы выражаются через передаточную матрицу-столбец $W(\lambda)$ (от входа u к выходу y) и через характеристический многочлен ОУ $\alpha(\lambda)$. Эти условия не зависят от способа приведения уравнений объекта к виду (3.1). Более того, для проверки условий теоремы вообще не нужно приводить уравнения объекта к ви-

ду (3.1), достаточно лишь знать, что это можно сделать. Но, как известно (см. [79]), любая передаточная матрица из правильных дробно-рациональных функций может быть реализована системой (3.1). Это обстоятельство будет использоваться в дальнейшем.

2. В теореме не требуется ни управляемости, ни наблюдаемости ОУ (3.1). Поэтому числитель и знаменатель $W(\lambda)$ могут иметь общие множители. Однако в условиях теоремы эти множители обязаны быть гурвицевыми в силу гурвицевости многочлена $G(\lambda)$ и условия на его степень.

3. Как известно, у гурвицева многочлена все коэффициенты имеют одинаковый знак. Поэтому при проверке условий теоремы достаточно проверять положительность не всех коэффициентов $G(\lambda)$, а хотя бы одного из них, например, старшего.

В соответствии с результатами главы 2 условия теоремы 3.1 достаточны для существования у системы (3.31) – (3.33) функции вида

$$V(x, \theta) = x^T H x + (\theta - \theta_*)^T H_1 (\theta - \theta_*), \quad (3.38)$$

где $H = H^T > 0$ – $n \times n$ -матрица, $H_1 = H_1^T > 0$ – $l \times l$ -матрица, $\theta_* \in R^l$, обладающей свойством

$$\dot{V}(x, \theta) < 0 \text{ при } x \neq 0. \quad (3.39)$$

Оказывается, эти условия являются и необходимыми [181].

Теорема 3.2. Пусть $W(\lambda) \neq 0$. Для существования у системы (3.31) – (3.33) функции Ляпунова вида (3.38) со свойством (3.39) необходимо и достаточно, чтобы алгоритм адаптации имел вид (3.37), а многочлен $G(\lambda)$ был гурвицевым степени $n - 1$ с положительными коэффициентами.

Теорема 3.2 показывает, что алгоритмами вида (3.37) исчерпываются все алгоритмы, которые могут быть получены с помощью функции Ляпунова вида (3.38), и синтезировать еще какие-либо алгоритмы, используя функцию (3.38) со свойством (3.39), невозможно.

К алгоритму (3.37) можно также прийти, выбирая в схеме скоростного градиента оценочную функцию в виде $Q(x) = (g^T y)^2 = (g^T L^T x)^2$. Эта оценочная функция – вырожденная: она не удовлетворяет условию роста В1. Тем не менее можно показать, что выполнено условие В2, т.е. работоспособность системы (3.31), (3.32), (3.37) можно обосновать с помощью вырожденной функции Ляпунова. Такой подход оказывается более удобным для введения в систему зоны нечувствительности с целью обеспечения ее работоспособности в условиях помех.

3.3.2. Примеры АСНЭМ. Теорема 3.1 позволяет синтезировать и обосновывать работоспособность аддитивных систем с различными структурами основного контура. Некоторые примеры приведены в табл. 3.2 (см. также [57, 178]).

Рассмотрим более подробно два алгоритма аддитивного регулирования выхода скалярного ОУ, описываемого уравнением

$$A(p)\psi(t) = B(p)u(t), \quad (3.40)$$

где $\psi(t) \in R^1$ – регулируемая переменная, $p = d/dt$.

$$A(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i, \quad B(p) = \sum_{i=0}^k b_i p^i.$$

Если измерению доступны $\psi(t)$ и $l - 1$ ее производных, то, как показано в [57, 178], соответствующий частный случай алгоритма (3.32), (3.37) обеспечивает достижение ЦУ $\psi^{(i)}(t) \rightarrow 0$, $i = 0, 1, \dots, l - 1$, если ОУ (3.40) минимально-фазовый и $k + l = n$.

Пусть теперь измерению доступны выход объекта $\psi(t)$, $l - 1$ его производных и промежуточная переменная $\mu(t)$, связь которой со входом объекта задается передаточной функцией $W_1(\lambda) = B_1(\lambda)/A_1(\lambda)$, где $A_1(\lambda), B_1(\lambda)$ – многочлены степеней n_1, k_1 соответственно ($n_1 \leq n, k_1 \leq k$). Таким образом, вектор выходов ОУ имеет вид $y = \text{col}(\psi, \dots, \psi^{(l-1)}, \mu)$.

Найдем алгоритм адаптации коэффициентов $\theta = \text{col}(\theta_0, \dots, \theta_l)$ линейного регулятора

$$u(t) = \sum_{i=0}^{l-1} \theta_i \psi^{(i)} + \theta_l \mu. \quad (3.41)$$

Для этого, согласно результату п. 3.3.1, определим передаточную матрицу ОУ (от управления к измеряемым координатам). Она имеет вид

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{l-1} \\ \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)} \\ \frac{B_1(\lambda)}{A_1(\lambda)} \end{bmatrix} = \frac{1}{A(\lambda)A_1(\lambda)} \begin{bmatrix} B(\lambda)A_1(\lambda) \\ \lambda B(\lambda)A_1(\lambda) \\ \vdots \\ \lambda^{l-1} B(\lambda)A_1(\lambda) \\ B_1(\lambda)A(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Алгоритм адаптации (3.37) принимает соответственно форму

$$\dot{\theta} = -\delta(t) \Gamma y(t), \quad (3.43)$$

где

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \bar{g}(p)\psi(t) + g_l \mu(t), \quad \bar{g}(\lambda) = \bar{g}^\top \pi_l(\lambda), \\ \pi_l(\lambda) &= \text{col}(1, \lambda, \dots, \lambda^{l-1}), \quad \bar{g} = \text{col}(g_0, \dots, g_{l-1}). \end{aligned}$$

Многочлен $G(\lambda)$ записывается в виде

$$G(\lambda) = B(\lambda)A_1(\lambda)\bar{g}(\lambda) + g_l B_1(\lambda)A(\lambda). \quad (3.44)$$

Согласно теореме 3.1 условия применимости адаптивного регулятора (3.41), (3.43) состоят в том, что многочлен (3.44) – гурвицев степени $n - 1$ с положительными коэффициентами. Легко показать, что эти условия будут иметь место, если многочлены $B(\lambda), A_1(\lambda), \bar{g}(\lambda)$ – гурвицевы, выполняются условия на степени $n_1 = k_1 + 1, k + l = n - 2$, а величина g_l достаточно мала и имеет соответствующий знак. Таким образом, за счет введения в алгоритм управления промежуточной переменной можно сократить число требуемых производных от регулируемого выхода ОУ.

На практике встречаются ситуации, когда структура действующего на ОУ регулятора основного контура недостаточна для применимости АдСУ, синтезированной в п. 3.3.1 вследствие невозможности подключения дополнительных сигналов от датчиков (например, в силу технических

Таблица 3.2
Алгоритмы адаптивных систем с неявной эталонной моделью

№	Уравнения ОУ; вектор управления (настраиваемых параметров)	Целевой функционал	Алгоритм управления (адаптации) при $\Gamma = \gamma I$	Условия сходимости; результат	Форма алгоритмов		Литература	
					конечная			
					знак.	лин.		
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Алгоритмы параметрической адаптации

1	$\dot{x} = Ax + Bu, y = L^T x,$ $W(\lambda) = L^T (\lambda I_n - A)^{-1} B, \quad Q = \frac{1}{2} x^T H x,$ $u = c^T y, \theta = c \in R^l$	"	$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \delta(t) y,$ $H = H^T > 0,$ $HB = Lg$	$\delta(t) = g^T y$	$g^T W(\lambda) -$ строго ми- нимально-фазовая; $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty,$ $c(t) \rightarrow \text{const}$	"	+	[181]
2	$\dot{x} = Ax + Bu, y = L^T x,$ $u = cg^T y, \theta = c \in R^l$	"	$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma (g^T y)^2$	"	"	"	+	[198]
3	$A(p)\psi = B(p)u,$ $y = \text{col}(\psi, \dots, \psi^{(l-1)}), \quad Q = \frac{1}{2} (x - x_*)^T \times$ $d(p)r(t)), \quad \times H(x - x_*), \quad \delta(t) = g^T y - d(p)r$ $u = \theta^T y, \theta \in R^{l+1}$ $g^T L^T x_* =$ $= d(p)r(t)$	$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \delta(t) y,$ $m+l=n,$ $\int_0^\infty r^{(i)}(t) ^2 dt < \infty,$ $i=1, \dots, l;$ $x(t) - x_*(t) \rightarrow 0$	$G(p), B(p), d(p) -$ гур- вищевы многочлены, $m+l=n,$ $\int_0^\infty r^{(i)}(t) ^2 dt < \infty,$ $i=1, \dots, l;$ $x(t) - x_*(t) \rightarrow 0$	"	"	"	+	[10, 178]

Алгоритмы сигнально-параметрической адаптации

4	$\dot{x} = Ax + Bu,$ $S = Cx, D = CB;$ $u = Kx + u_s,$ $\theta = \text{col}(K, u_s) \in R^{n+1}$	$Q = \frac{1}{2} \ S\ ^2$ $\frac{dK}{dt} = -\gamma_1 DSx^T -$ $- \gamma_2 \frac{d}{dt} \{DSx^T\},$ $u_s = -\gamma_0 x \text{sign } DS$	$CW(p)$ – строго мини- мально-фазовая, $\gamma_0 >$ $> \ D^{-1}C(A+I)^T\ ;$ $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$	$+$ $+$ $+$	$[11, 12]$
---	---	---	--	-------------------	------------

5	$"$ $Q = \int_0^t \ \dot{S}(\tau) -$ $- GS(\tau)\ ^2 d\tau,$ G – гурвицева	$\frac{dK}{dt} = -\gamma_1 D(\dot{S} - GS) \times$ $\times x^T - \gamma_2 \frac{d}{dt} D \times$ $\times (\dot{S} - GS)x^T,$ $u_s = -\gamma_0 S \times$ $\times \text{sign } D(\dot{S} - GS)$	$CW(p)$ – строго мини- мально-фазовая, $\gamma_0 > \ D^{-1}G\ ;$ $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$	$+$ $+$ $+$	$[167]$
---	---	---	---	-------------------	---------

или конструктивных ограничений, при использовании типовых промышленных регуляторов и т.п.). В то же время в контуре адаптации возможность использования необходимых сигналов зачастую имеется. Исследуем возможность использования в подобных случаях алгоритмов п. 3.3.1

Рассмотрим снова ОУ (3.40), и пусть в основном контуре используется закон

$$u(t) = \sum_{i=0}^{l-2} \theta_i \psi^{(i)} = \bar{\theta}^T \bar{y}, \quad (3.45)$$

а алгоритм адаптации описывается уравнением

$$\dot{\bar{\theta}} = -[g(p)\psi]\bar{\Gamma}\bar{y}, \quad (3.46)$$

где $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}^T > 0$ – положительно-определенная $(l-1) \times (l-1)$ -матрица, $\bar{y} = \text{col}(\psi, \dots, \psi^{(l-2)})$, $g(\lambda) = \sum_{i=0}^{l-1} g_i \lambda^i$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.3. Система (3.40), (3.45), (3.46) адаптивна в классе Ξ по отношению к ЦУ (3.34) и все ее траектории ограничены, если для любого $\xi \in \Xi$ многочлены $g(\lambda)$, $B(\lambda)$ гурвицевы и выполнены соотношения

$$l+k=n, \quad b_0 g_0 > 0, \quad a_{n-1} > \frac{g_{l-2}}{g_{l-1}} + \frac{b_{k-1}}{b_k}. \quad (3.47)$$

Теорема 3.3 показывает, что при некоторых условиях обоснованно редуцирование основного контура АдСУ: уменьшение на единицу числа используемых в нем производных при сохранении вида эталонного уравнения $g(p)\psi = 0$ в контуре адаптации.

3.3.3. Синтез АСНЭМ с учетом возмущений. Если на ОУ (3.31) действуют аддитивные возмущения, т.е. ОУ описывается вместо (3.31) уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varphi(x, u, t), \quad y = L^T x, \quad (3.48)$$

то, в соответствии с результатами § 2.4, можно использовать адаптивный регулятор с отрицательной обратной связью в алгоритме адаптации:

$$u = \theta^T y, \quad \dot{\theta} = -\Gamma[\kappa(g^T y)y + \alpha(\theta - \bar{\theta})], \quad (3.49)$$

где $\kappa > 0$, $\alpha > 0$, $\bar{\theta} \in R^l$ – априорная оценка вектора "идеальных" параметров θ_* . Из теоремы 2.13 следует, что при $\|\varphi(x, u, t)\| \leq \Delta_\varphi$ система (3.48), (3.49) диссипативна, а при достаточно больших $\kappa > 0$ установившаяся ошибка стабилизации близка к минимально возможной при заданном уровне помех. Положим $\Delta_x = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\|$, где $x(t)$ – решение (3.48),

(3.49); $Q(x) = 0.5 x^T H x$. Очевидно, функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.13, причем параметры, определяющие класс $\Xi_1(\Delta_*)$, в данном случае принимают значения: $\sigma = 0.5$, $\alpha_1^2 = \lambda^+$, $\alpha_0 = 2\alpha_*$, где $\lambda^+ = \lambda_{\max}(H)$, α_* – степень устойчивости матрицы $A_* = A + B\theta_*^T L^T$. Вычисляя

оценки точности из теоремы 2.13, имеем

$$\Delta_x^2 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Q(x(t))}{\lambda^-} \leq \frac{\Delta_\varphi^2 \alpha_*^2}{(\alpha_0^2 \lambda^-)} + \frac{\epsilon}{\lambda^-},$$

где $\lambda^- = \lambda_{\min}(H)$, $\epsilon > 0$, откуда, учитывая, что $\sqrt{p+q} \leq \sqrt{p} + q/2\sqrt{p}$, получим оценку

$$\Delta_x \leq \sqrt{\frac{\lambda^+}{\lambda^-}} \frac{\Delta_\varphi}{2\sigma_*} + \frac{\epsilon\sigma_*}{\Delta_\varphi \sqrt{\lambda^+ \lambda^-}}, \quad (3.50)$$

справедливую, если параметры в (3.49) удовлетворяют неравенствам

$$\kappa > \frac{\alpha \|\bar{\theta} - \theta_*\|^2}{\epsilon\sigma_*}, \quad \alpha\lambda > \sigma_*, \quad (3.51)$$

где $\lambda = \lambda_{\min}(\Gamma)$. Отметим, что для приближенного вычисления вместо σ_* можно брать степень устойчивости (наименьшее из расстояний нулей до мнимой оси) многочлена $G(p) = g^T a(p)$ — числителя передаточной функции $g^T W(p)$. Это следует из того, что $n-1$ собственных чисел матрицы $A_* = A + B\theta_*^T L^T$ при $\theta_* = -\mu g$, $\mu \rightarrow +\infty$ стремятся к нулям $G(p)$.

Аналогично получается оценка точности алгоритма (3.49) в задаче стабилизации нестационарного объекта. Пусть скорость изменения вектора "идеальных" параметров $\theta_*(t)$ ограничена величиной β_1 . Из теоремы (2.16) следует, что алгоритм (3.49) обеспечит оценку ошибки (3.50) при выполнении неравенств

$$\kappa > \frac{\alpha \|\bar{\theta} - \theta_*\|^2}{\epsilon\sigma_*} + \frac{\beta_1}{\epsilon\lambda\sigma_*^2}, \quad \alpha\lambda > 2\sigma_*. \quad (3.52)$$

Аналогичные оценки можно получить из теоремы 2.15 для случая, когда $\varphi(\cdot)$ — стохастическое возмущение типа белого шума.

Другой возможный способ огрубления — введение различных зон нечувствительности. Алгоритм (3.37) с зоной нечувствительности по $Q(x)$ имеет вид

$$u = \theta^T y, \quad \dot{\theta} = \begin{cases} -g^T y \Gamma y, & x^T H x \geq 2\Delta \\ 0, & x^T H x < 2\Delta. \end{cases} \quad (3.53)$$

Для применимости (3.53) к ОУ достаточно выполнения естественного условия $\Delta > \Delta_* = \Delta_\varphi^2 \lambda^+ / 4\sigma_*^2 \lambda^-$, т.е. для выбора Δ можно пользоваться оценкой (3.50). Если оценка матрицы H , входящей в (3.53), затруднительна, удобнее применять алгоритм с зоной нечувствительности "по невязке":

$$u = \theta^T y, \quad \dot{\theta} = \begin{cases} -g^T y \Gamma y, & |g^T y| > \Delta, \\ 0, & |g^T y| < \Delta. \end{cases} \quad (3.54)$$

В системе (3.48), (3.49) достигается ЦУ $\lim_{t \rightarrow \infty} |g^T y(t)| \leq \Delta$. Расчет до-

пустимой величины Δ производится на основе известных оценок решения $y(t)$ вспомогательной линейной системы $g^T y(t) = f(t)$ при $|f(t)| \leq \Delta$. Именно, должно выполняться неравенство $\Delta > \Delta_*$, где Δ_*^2 — оценка предельной точности на классе объектов, по целевой функции $\delta^2 = (g^T y)^2$. Из теоремы 2.13 верна оценка

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |g^T y(t)| \leq \Delta_* \leq \frac{\|Lg\|}{\eta} \Delta_\varphi, \quad (3.55)$$

где, как и в (3.51), η — степень устойчивости многочлена $g^T a(\lambda)$ ($\eta \approx \alpha_*$). Можно показать, что $\|Lg\| \leq |g^T a(1)|$.

Оценку (3.55) можно уточнить для частного случая скалярного объекта (3.40), когда $g^T y(t) = G(p)\psi(t)$. В этом случае оценку предельной точности АСНЭМ удается записать в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t)| \leq \frac{|G(1) \cdot B(1)| \Delta_\varphi}{\mu_G \min\{\eta_G, \eta_B\}}, \quad (3.56)$$

где η_G, η_B — степени устойчивости многочленов $G(\lambda), B(\lambda)$, $\mu_G = \prod_{i=1}^l \operatorname{Re} \lambda_i(G)$.

Полученные оценки используются при предварительном расчете параметров системы. Пусть, например, синтезируется редуцированный адаптивный ПИ-регулятор с неявной ЭМ 2-го порядка:

$$u = \frac{\theta_1}{p} \psi + \theta_2 \dot{\psi}, \quad \dot{\theta}_1 = -\gamma_1 \delta(t) \frac{1}{p} \psi - \alpha \theta_1, \quad (3.57)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\gamma_2 \delta(t) \psi - \alpha \theta_2, \quad \delta(t) = T_m^2 p \psi + 2\xi T_m \psi + p^{-1} \psi.$$

ЭМ задается многочленом $G(p) = T_m^2 p^2 + 2\xi T_m p + 1$ со степенью устойчивости $\eta_G = \xi T_m^{-1}$. При синтезе модель ОУ должна быть приближена уравнением 2-го порядка, например

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \psi = k_0 u + \varphi(t). \quad (3.58)$$

Тогда из соотношений (3.56) и теорем 3.3, 2.13 получаем оценку качества системы и условия на ее параметры, гарантирующие работоспособность:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t)| \leq \frac{(T_m^2 + 2\xi T_m + 1) k_0 \Delta_\varphi}{\eta_G^3 T_1 T_2}, \quad (3.59)$$

$$2\eta_G < T_1^{-1} + T_2^{-1}, \quad \alpha \gamma_i > \eta_G. \quad (3.60)$$

3.3.4. Многосвязные АСНЭМ. Распространим результаты § 3.1 на многосвязные системы, т.е. на объекты с несколькими управляющими воздействиями. Для описания ОУ и регулятора сохраним уравнения (3.31), (3.32), в которых будем считать, что $u(t) \in R^m$, $m \geq 1$, $\theta = l \times m$ -матрица, B — $n \times m$ -матрица. Передаточная матрица $W(\lambda) = L^T(\lambda I - A)^{-1}B$ теперь

будет иметь порядок $I \times m$. В случае $m > 1$ вместо алгоритма (3.37) будем рассматривать алгоритм

$$\dot{\theta}_j = -(g_j^T y) \Gamma_j y, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.61)$$

где θ_j — столбцы матрицы настраиваемых параметров θ , $g_j \in R^I, j = 1, \dots, m$, $\Gamma_j = \Gamma_j^T > 0 - I \times I$ -матрицы. В алгоритме (3.61) для настройки каждого столбца матрицы θ , по существу, используется алгоритм вида (3.37), параметры которого (вектор g_j и матрица Γ_j) свои для каждого столбца.

Приведем формулировки утверждений, являющихся распространением теорем 3.1–3.2 на случай $m > 1$. Для формулировки понадобится следующее определение, обобщающее определение 3.1.

Пусть $P(\lambda)$ — $m \times m$ -матрица из правильных дробно-рациональных функций от λ , имеющая вид $P(\lambda) = S_1^T (\lambda I_n - R)^{-1} S_2$, где $R - n \times n$ -матрица, $S_1, S_2 - n \times m$ -матрицы, I_n — единичная $n \times n$ -матрица. Положим

$$\delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - R), \quad \varphi(\lambda) = \delta(\lambda) \det P(\lambda), \quad \Gamma = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda P(\lambda).$$

Можно показать, что $\varphi(\lambda)$ — многочлен степени не выше $n - m$ со старшим членом $\lambda^{n-m} \det \Gamma$.

Определение 3.2. Матрица $P(\lambda)$ называется *минимально-фазовой*, если многочлен $\varphi(\lambda)$ гурвицев. Матрица $P(\lambda)$ называется *строго минимально-фазовой*, если многочлен $\varphi(\lambda)$ гурвицев, а матрица Γ симметрична и положительно определена.

Введенное определение минимально-фазовой матрицы согласуется с известным в теории автоматического управления понятием минимально-фазового звена [84]. Минимально-фазовая матрица в смысле определения 3.2 — это не что иное, как передаточная матрица многомерного минимально-фазового звена.

Отметим, что, в частности, когда $m = 1$, и, следовательно, $P(\lambda) = \varphi(\lambda)/\delta(\lambda)$, где $\varphi(\lambda)$ — многочлен степени не выше $n - 1$, минимально-фазовость функции $P(\lambda)$ означает, что ее числитель гурвицев. При этом строгая минимально-фазовость $P(\lambda)$, в соответствии с определением 3.1, означает, что $\varphi(\lambda)$ — гурвицев многочлен степени $n - 1$ с положительными коэффициентами.

Обозначим через G $I \times m$ -матрицу со столбцами g_1, \dots, g_m . Справедливы следующие утверждения, обобщающие теоремы 3.1, 3.2 на случай $m > 1$.

Теорема 3.4. Система (3.31), (3.32), (3.61) адаптивна в классе Ξ по отношению к ЦУ (3.4), если класс Ξ определяется условием: для любого $\xi \in \Xi$ матрица $\tau G^T W(\lambda)$ — строго минимально-фазовая при некоторой $\tau = \text{diag}\{\tau_1, \dots, \tau_m\}, \tau_j > 0$.

Теорема 3.5. Пусть передаточная матрица ОУ не равна нулю тождественно, а ранг матрицы B равен m . Для существования у системы (3.31) – (3.33) функции Ляпунова вида

$$V(x, \theta) = x^T H x + \sum_{j=1}^m (\theta_j - \theta_{j*})^T H_j (\theta_j - \theta_{j*}), \quad (3.62)$$

где $H = H^T > 0$ – $n \times n$ -матрица, $H_j = H_j^T > 0$, $j = 1, \dots, m-l$ – $l \times l$ -матрицы, $\theta_1, \theta_2, \dots$ – столбцы матриц θ , θ_* соответственно, причем $\dot{V}(x, \theta) < 0$ при $x \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы алгоритм адаптации имел вид (3.61), а матрица $\tau G^T W(\lambda)$ была строго минимально-фазовая при некоторой $\tau = \text{diag}\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$, $\tau_j > 0$.

Теоремы 3.4, 3.5 доказываются аналогично теоремам 3.1, 3.2 с использованием теоремы П. 2.1 (см. [183]).

В соответствии с определением строгой минимально-фазовой матрицы, класс адаптивности Ξ определяется условиями:

1. $\delta(\lambda) \det G^T W(\lambda)$ – гурвицев многочлен.

2. Матрица τG симметрична и положительно определена, где

$$G = G_*^T, \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda W(\lambda) = G^T L^T B.$$

Отметим, что первое условие равносильно гурвицевости многочлена $\delta(\lambda) \det G^T W(\lambda)$.

Проверка условия строгой минимально-фазовости упрощается, если $m = l$, а ОУ описывается уравнением

$$A(p)y = B(p)u, \quad (3.63)$$

где y, u – l -векторы,

$$A(\lambda) = I_l \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} A_i \lambda^i, \quad B(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \lambda^i,$$

A_i, B_i – квадратные матрицы порядка $l \times l$. Передаточная матрица ОУ (3.63) равна $W(\lambda) = [A(\lambda)]^{-1} B(\lambda)$, при этом $\delta(\lambda) = \det A(\lambda)$. Так как $m = l$ и матрицы $G, B(\lambda), A(\lambda)$ – квадратные, то

$$\det \tau G^T W(\lambda) = \det \tau \cdot \det G \cdot \det B(\lambda) [\det A(\lambda)]^{-1},$$

откуда видно, что минимально-фазовость матрицы $\tau G^T W(\lambda)$ равносильна гурвицевости многочлена $\det B(\lambda)$. Далее $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda W(\lambda) = B_{n-1}$, т.е. строгая

минимально-фазовость равносильна гурвицевости $\det B(\lambda)$, симметричности и положительной определенности матрицы $\tau G B_{n-1}$. Если, например, $B_{n-1} = \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_l\}$, то можно положить $\tau = I_l$, $G = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$, где $\text{sign } \gamma_i = \text{sign } \beta_i$, т.е. для синтеза адаптивной системы стабилизации достаточно знать знаки элементов матрицы B_{n-1} .

Приведенные результаты распространяются на нелинейные многосвязные системы; при доказательстве используются теоремы двойственности в невыпуклых экстремальных задачах (см. приложение 3, а также [180]).

3.3.5. Сигнально-параметрические АСНЭМ. Отметим некоторые общие черты систем с переменной структурой (табл. 3.3) [173] и систем с неявной ЭМ (табл. 3.2). В том и в другом случае вводится мера близости процесса к желаемому (невязка $\delta = g^T u$ или $s = Cx$), а синтез системы управления осуществляется в два этапа. На первом этапе обеспечивается устойчивое движение неявной ЭМ $g^T u = 0$ (устойчивое движение по поверхности скольжения $Cx = 0$). На втором этапе обеспечиваются условия схо-

Таблица 3.3

Алгоритмы систем с переменной структурой

Уравнения ОУ; вектор управления	Целевой функционал	Алгоритм управления при $\Gamma = \gamma I$	Условия сходимости; результат	Форма алгоритмов		Литература
				конечная знак.	диф. лин.	
1 $\dot{x} = Ax + Bu,$ $S = C^T x;$ $\theta = u$	$Q = \frac{1}{2} \ S\ ^2$	$u = -\gamma \operatorname{sign} S,$ $\gamma = \gamma_0 x $	$C^T W(p) - \text{строго}$ минимально-фа- $\text{зовая},$ $\gamma_0 > \ C^T +$ $+ (C^T B)^{-1} C^T A\ ;$ $x(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$		+	[173]
2 $\dot{x} = Ax + Bu,$ $S = C^T x, u = Kx;$ $\theta = K$	$Q = \frac{1}{2} \ S\ ^2$	$K = -\gamma \operatorname{sign}(Sx^T)$	$C^T W(p) - \text{строго}$ минимально-фазо- $\text{вая},$ $\gamma > \ (C^T B)^{-1} C^T A +$ $+ C^T\ ;$ $x(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$		+	[173]

димости из любой точки фазового пространства и поверхности нулевой "невязки" (к поверхности скольжения). Выбор уравнений движения неявной ЭМ и выбор поверхности скольжения производится аналогично. Для решения задачи второго этапа в системах с переменной структурой используются алгоритмы конечной формы (табл. 3.3), а в системах с неявной ЭМ — дифференциальные алгоритмы (3.37).

Рассмотрим системы, в которых сочетаются оба способа управления и которые можно назвать системами с сигнально-параметрическими алгоритмами адаптации и неявной эталонной моделью (*сигнально-параметрическими АСНЭМ*). Пусть уравнение ОУ имеет вид

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t). \quad (3.64)$$

Зададим целевой функционал в виде $Q_t = \frac{1}{2} \| s \|^2$, где $s = Cx$, и цель управления — в виде $Q_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда, действуя по схеме скоростного градиента, получим

$$\dot{Q}_t = \omega(x, \theta, t) = s(t)^T (CAx(t) + CBu(t)). \quad (3.65)$$

Структуру основного контура выберем в виде

$$u(t) = Kx(t) + u_s(t), \quad (3.66)$$

т.е. вектор настраиваемых параметров $\theta = \text{col}(K, u_s)$. Вычислив градиент по настраиваемым параметрам, получим

$$\nabla_K \omega(x, \theta, t) = (CB)^T s(t) x^T, \quad \nabla_{u_s} \omega(x, \theta, t) = (CB)^T s(t).$$

Закон настройки параметров выберем в конечной форме (2.20). Тогда закон управления примет вид

$$\begin{aligned} u(t) &= K(t)x(t) - \gamma \text{sign}[(CB)^T s(t)], \\ K(t) &= -\gamma_1(CB)^T s(t) x(t)^T. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Для обоснования работоспособности системы (3.64), (3.67) воспользуемся теоремой 2.3. Условие строгой псевдоградиентности § 2.3 в данном случае выполняется и при $\delta = 1$, и при $\delta = 2$. Условие однозначной разрешимости выполняется, так как

$$\psi_1(x, \theta, t) = \text{sign}(CB)^T s(t) \quad \text{и} \quad \psi_2(x, \theta, t) = (CB)^T s(t) x(t)$$

не зависят от u . Условие выпуклости выполнено в силу линейности ОУ. Условие достижимости Д1 выполнено при

$$\rho(Q) = \alpha_0 \sqrt{Q}, \quad k_* = -(CB)^{-1} CA, \quad u_*^s = -\alpha_0 (CB)^{-1} \text{sign} s,$$

если $\det CB \neq 0$. Из замечания 4 к теореме 2.3 следует, что ЦУ $Q_t \rightarrow 0$ достигается, если

$$\gamma > \frac{\alpha_0 \| (CB)^{-1} \|}{\rho}, \quad \gamma_1 > \frac{\| (CB)^{-1} CA \|^2}{\rho \alpha_0}.$$

Условие роста В1 в данном случае не выполнено, и, следовательно, более сильная ЦУ $x_t \rightarrow 0$ может не достигаться. Следующее утверждение, легко выводимое из [178, лемма 7.Д.1], показывает что если ОУ (3.64) строго минимально-фазовый, то выполнено условие роста В2, а значит, и ЦУ $x_t \rightarrow 0$.

Лемма 3.1. Пусть система $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, где $x \in R^n$, $y \in R^l$, $u \in R^m$, — вполне управляемая и строго минимально-фазовая. Тогда из

$$y_t \rightarrow 0, \quad \int_0^\infty \|y(t)\|^2 dt < \infty$$

следует, что $x(t) \rightarrow 0$, а из $\|y(t)\| \leq \text{const}$ следует, что $\|x(t)\| \leq \text{const}$.

Отдельно рассмотрим случай, когда закон настройки K в (3.67) выходит в чисто дифференциальной или в конечно-дифференциальной форме. В этом случае в качестве базовой структуры алгоритмов скоростного градиента следует выбирать структуру (2.24) при $\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, где $\Gamma_1 = \gamma_1 I$, $\gamma_1 > 0$. Тогда закон управления примет вид

$$u(t) = K(t)x(t) - \gamma \operatorname{sign}(CB)^T s(t), \quad (3.68)$$

$$\dot{K} = -\gamma_1(CB)^T s(t)x(t). \quad (3.69)$$

Условия применимости алгоритмов (3.68), (3.69) для системы (3.64) вытекают из теоремы 2.5. Нетрудно проверить, что все условия теоремы 2.5 выполняются и $Q_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, если

$$\gamma = \gamma(t) = \gamma_0 \|x(t)\|, \quad \gamma_0 > \|(CB)^{-1}(CA + C)\| \rho^{-1}.$$

С целью повышения быстродействия в контуре параметрической обратной связи закон настройки $K(t)$ (3.69) рекомендуется брать в конечно-дифференциальной форме

$$\frac{d}{dt} [K + \gamma_2(CB)^T s(t)x^T(t)] = -\gamma_1(CB)^T s(t)x(t)^T. \quad (3.70)$$

Следует отметить, что сигнально-параметрические АСНЭМ обладают высоким быстродействием, простотой в реализации и сохраняют свою работоспособность в условиях параметрических и координатных возмущений, изменяющихся быстро и в достаточно широких пределах. Однако, как показывают данные моделирования, при наличии сильных параметрических и координатных возмущений переходные процессы в контурах параметрической и сигнальной настройки носят существенно колебательный характер. Избавиться от колебаний "невязки" в соответствующих контурах настройки позволяет использование в законах регулирования производной $\dot{s}(t)$ от вектор-функции "невязки" $s(t)$. Такие алгоритмы синтезируются при помощи интегральных целевых функционалов (табл. 3.2). "Платой" за снижение колебаний ошибки регулирования является необходимость использования реальных дифференцирующих устройств в системах управления.

В рассмотренных системах возможны и другие варианты выбора целевых функционалов, например, можно брать

$$Q_t = |s(t)|, \quad Q_t = \int_0^{\infty} |\dot{s}(\tau) + ds(\tau)| d\tau.$$

Путем применения схемы скоростного градиента получаются алгоритмы управления, которые будут обеспечивать в системе те или иные динамические свойства.

§ 3.4. Системы идентификации

Хотя прямой и идентификационный подходы к синтезу АдСУ часто оказываются эквивалентными (§ 3.1), большинство известных результатов по синтезу и обоснованию непрерывных АдСУ относится к прямому подходу. Некоторые непрерывные алгоритмы идентификации приведены в табл. 3.4. Остановимся подробнее на двух типичных методах оценивания параметров ОУ (в конечной и дифференциальной формах). Выбор регулятора и обоснование работоспособности системы в целом рассматриваться не будут.

Рассмотрим задачу идентификации при полном измерении состояния ОУ, описываемого уравнением

$$\dot{x} = A_* x + B_* u, \quad (3.71)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$. Для синтеза устойчивого алгоритма идентификации берется настраиваемая модель в виде [62, 248]

$$\dot{x}_M = G x_M + (A - G)x + Bu, \quad (3.72)$$

где $x_M \in R^n$ – состояние модели; G – некоторая $n \times n$ -матрица. Зададим цель управления $Q_t \rightarrow 0$, где $Q = \frac{1}{2} e^T H e$, $e = x_M - x$, $H = H^T > 0$. Очевидно,

$$\dot{Q} = e^T H [Ge + (A - A_*)x + (B - B_*)u]. \quad (3.73)$$

Вычисляя скоростной градиент, придем к алгоритму идентификации в дифференциальной форме:

$$\dot{A} = -\gamma H e x^T \quad \dot{B} = -\gamma H e u. \quad (3.74)$$

Условие достижения цели управления выводится из теоремы 2.1. Из соотношения (3.73) следует, что если выбрать $A = A_*$, $B = B_*$, а матрицу H найти как решение неравенства Ляпунова $HG + G^T H < 0$, то условия достижимости Д2 при $\rho(Q) = -\alpha_0 Q$ выполняются. Применяя теорему 2.1, получим, что цель $Q_t \rightarrow 0$ достигается, если матрица $H = H^T > 0$ найдена из неравенства Ляпунова, а вектор $x(t)$ ограничен. Последнее выполняется, например, если A_* гурвицева, а входное воздействие $u(t)$ ограничено.

В рассмотренной задаче можно поставить и более сильную цель

$$A(t) \rightarrow A_*, \quad B(t) \rightarrow B_*. \quad (3.75)$$

Таблица 3.4
Алгоритмы идентификации

Уравнения объекта: вектор настраивае- емых параметров	Функционал	Алгоритм идентификации	Условия сходимости; результат	Форма алгоритмов		Литература
				конечная знак.	диф. лин.	
	$\dot{x} = Ax + Br(t)$, $Q = e^T Pe$.	$\frac{dA_M}{dt} = -\gamma Pe x_M^T$,	A – гурвицева,			
1	$\dot{x}_M = A_M x_M + B_M r(t)$, $e = x - x_M$, $\theta = \text{col}(A_M, B_M)$	$P^T > 0$, $P = P^T$ $\frac{dB_M}{dt} = -\gamma Pe r^T$	$PA + A^T P < 0$; $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$		+	[205, 240]
2	$\dot{x}_M = Gx_M + (A - G)x +$ $+ Br(t)$, $\dot{x} = A_0 x + B_0 r(t)$, $e = x_M - x$, $\theta = \text{col}(A, B)$	$Q = e^T Pe$, $P = P^T > 0$ $\frac{dA}{dt} = -\gamma((Pe x^T) + \Lambda_1 A)$, G – гурвицева;	$\ e(t)\ \leq \text{const}$ $\frac{dB}{dt} = -\gamma((Pe r^T) + \Lambda_2 B)$, $\Lambda_1, \Lambda_2 > 0$		+	[62, 248]
3	$A = \begin{bmatrix} \alpha & I_{n-1} \\ 0 & \ddots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix}$, $A_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0 & I_{n-1} \\ 0 & \ddots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $d = [0 \dots 01]^T$, $Pd = 0$, $\theta = \text{col}(\alpha, \beta)$	$Q = e^T Pe$ $\frac{d\alpha}{dt} = -\gamma P^T ex$, $\frac{d\beta}{dt} = -\gamma P^T er$	G – гурвицева, $\text{Re } P^T (j\omega I_n - G)^{-1} d \geq$ $\geq \frac{\epsilon}{1 + \omega^2}$, $\epsilon > 0$; $e(t) \rightarrow 0$		+	[157]

Таблица 3.4 (продолжение)

Уравнения объекта; вектор настраиваемых параметров	Функционал	Алгоритм идентификации	Условия сходимости; результат	Форма алгоритмов		Литература	
				конечная			
				знак.	лин.		
4	$\dot{x}_M = Gx_M + b \sum_j [c'_j y_j(t) + c''_j u_j(t)]$, $y_j = W_j(p) y$, $u_j = W_j(p) u$, $\dot{x} = Gx + b \sum_j [a_j y_j(t) + \beta_j u_j(t)]$, $j = 1, \dots, n$, $e = x_M - x$, $\theta = \text{col}(c'_j, c''_j)$	$Q = e^T Pe$, $P = P^T > 0$	$\frac{dc'_j}{dt} = -\gamma P^T e y_j$, $\frac{dc''_j}{dt} = -\gamma P^T e u_j$	G – гурвицева, $\operatorname{Re} p^T (i\omega I_n - G)^{-1} b \geq \frac{\epsilon}{1 + \omega^2}$, $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$		[27, 248]	
5	$\dot{x}_M = f(x, \theta, t) + Ge$, $\dot{x} = f(x, \theta_*, t)$, $e = x_M - x$	$Q = e^T Pe$, $P = P^T > 0$	$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \left[\frac{\partial f}{\partial \theta}(x, \theta, t) \right]^T Pe$	G – гурвицева; точка $(e = 0, \theta = \theta_*)$ асимптотически устойчива по e		[57]	

$A(p)y = B(p)u,$ $Q = \int_0^t \delta^2(s) ds \quad \frac{dQ_M}{dt} = -\gamma \delta(t) p^j y_1,$ $H(\lambda) = \text{гурвицев мно-}$
 $H(p)y_1 = y, H(p)u_1 = u,$ $\delta(s) = A_M(p)y_1(s) -$ $j = 0, 1, \dots, n-1,$ $\delta(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$
 $6 \quad - B_M(p)u_1(s).$ $\frac{db_M}{dt} = -\gamma \delta(t) p^k u_1,$ $[241]$
 $A_M(\lambda) = \lambda^n +$
 $+ Q_{Mn-1}\lambda^{n-1} + \dots$ $k = 0, 1, \dots, m$
 $\dots + Q_M 0,$
 $B_M(\lambda) = b_{Mm}\lambda^m + \dots$
 $\dots + b_M 0,$
 $\theta = \text{col}(Q_M, b_M)$

$\dot{x} = Ax + bu,$ $Q = s^T s$ $\frac{d\bar{A}}{dt} = -\gamma s x^T,$ $s(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty$
 $\dot{y} = \bar{A}x + \bar{B}u + v,$ $7 \quad s = x - y,$ $\frac{d\bar{B}}{dt} = -\gamma s u^T,$ $v = -\gamma \text{sign } s$
 $\theta = \text{col}(\bar{A}, \bar{B}, v)$ $[173]$

означающую сходимость оценок неизвестных параметров. Применяя теорему 2.9, получим, что для достижения цели (3.75) достаточно интегральной невырожденности вектор-функции $\text{col}(x(t), u(t))$. Например, цель (3.75) будет достигаться, если ОУ (3.71) управляем, а спектр функции $u(t)$ содержит не менее n частот [178, 248].

Рассмотрим теперь алгоритмы идентификации на скользящих режимах. Для ОУ (3.71) выберем настраиваемую модель

$$\dot{\bar{y}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} u + v, \quad (3.76)$$

где матрицы \bar{A} и \bar{B} необходимо определить по наблюдаемым векторам состояния x и управления u ; v — дополнительный сигнал, введение которого обеспечивает скользящий режим на многообразии $s = 0$, где $s = x - \bar{y}$. Алгоритм настройки матриц \bar{A} и \bar{B} построим на основе схемы скоростного градиента, задавая цель управления $Q_t \rightarrow 0$, где $Q = 0,5s^T s$. Тогда

$$\dot{Q} = s^T [(A - \bar{A})x + (B - \bar{B})u - v], \quad (3.77)$$

и, выбирая в качестве настраиваемых параметров вектор $\text{col}(\bar{A}, \bar{B}, v)$, придем к конечно-дифференциальному алгоритму идентификации на скользящих режимах:

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = -\gamma s x^T, \quad \frac{d\bar{B}}{dt} = -\gamma s u^T, \quad v = -\gamma \text{sign } s. \quad (3.78)$$

Условия достижения цели управления следуют из теоремы 2.1. Нетрудно показать, что при $\bar{A} = A_+$, $\bar{B} = B_+$, $v = -\alpha_0 \text{sign } s$ условие достижимости Д2 цели управления выполняется, так как при этом $\dot{Q} = -\alpha_0 \sqrt{Q}$. Если на многообразии $s = 0$ возникает скользящий режим, то компоненты матриц \bar{A} и \bar{B} стремятся к компонентам матриц A и B согласно теореме 2.9. В отличие от методов, рассмотренных в предыдущих параграфах и основанных на использовании эталонных моделей, здесь не делаются предположений об их асимптотической устойчивости.

§ 3.5. О несепарабельных функциях Ляпунова

Подавляющее большинство существующих методов обоснованного синтеза АдСУ опирается (явно или скрыто) на построение функции Ляпунова — функции $V(x, \theta)$ от расширенного состояния системы, удовлетворяющей, вместе со своей производной в силу системы, некоторым неравенствам. Например, для задач регулирования линейных ОУ с ЦУ $x(t) \rightarrow 0$ обычно берутся квадратичные функции, удовлетворяющие неравенствам

$$V(x, \theta) > 0 \text{ при } x \neq 0, \theta \neq \theta_+, \dot{V}(x, \theta) < 0 \text{ при } x \neq 0 \quad (3.79)$$

(см. (3.39)). Естественно ожидать, что чем более широкий класс функций Ляпунова используется при синтезе, тем больше будет построено новых алгоритмов. Подтверждение тому дает, например, метод скоростного градиента (глава 2), который позволяет синтезировать алгоритмы адап-

ции для нелинейных и нестационарных объектов за счет использования неквадратичных функций Ляпунова.

Попытаемся получить новые алгоритмы за счет расширения класса традиционных квадратичных функций Ляпунова в другом направлении. Функции Ляпунова, которые использовались при синтезе АдСУ до сих пор, были представлены в виде $V(x, \theta) = V_1(x) + V_2(\theta)$, т.е. являлись сепарабельными (они разбиваются на две функции, каждая из которых зависит от своих переменных). Попробуем снять ограничение сепарабельности. Для определенности рассмотрим синтез АСНЭМ (§ 3.3) и вместо сепарабельной функции (3.38) возьмем квадратичную функцию общего вида

$$V(x, \theta) = x^T H_0 x + x^T H_{01}(\theta - \theta_*) + (\theta - \theta_*)^T H_1(\theta - \theta_*), \quad (3.80)$$

включающую попарные произведения переменных $x, \theta - \theta_*$ с коэффициентами, образующими $n \times l$ -матрицу H_{01} . Следующая теорема показывает, что при этом действительно могут получиться новые алгоритмы.

Теорема 3.6. *Пусть $W(\lambda) \neq 0$. Для того, чтобы система (3.31) – (3.33) обладала функцией Ляпунова (3.80) со свойствами (3.79), необходимо и достаточно, чтобы алгоритм адаптации (3.33) имел вид*

$$\dot{\theta} = -g^T y \Gamma u + D y, \quad (3.81)$$

причем $\Gamma = \Gamma^T > 0$, функция $g^T W(\lambda)$ строго минимально-фазовая, а матрица D удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} DL^T A_*^{-1} B &= 0, \\ LDL^T A_*^{-1} + (A_*^{-1})^T LD^T L^T &= 0, \end{aligned} \quad (3.82)$$

где $A_* = A + B\theta_*^T L^T$. При выполнении условий теоремы в системе (3.31), (3.32), (3.81) достигается ЦУ (3.34).

Аналогичные алгоритмы могут быть построены и для других задач адаптивного управления (системы с явной ЭМ, системы идентификации и т.д.). Алгоритмы типа (3.81) отличаются от алгоритмов скоростного градиента "линейным членом" Dy . Однако на $l \times l$ -матрицу D наложены довольно жесткие ограничения в виде $n(n+3)/2$ линейных однородных уравнений (3.82).

Приведем пример, показывающий, что эти уравнения могут иметь нетривиальные решения. Пусть наблюдаются все переменные состояния ОУ, а уравнения ОУ записаны в канонической форме, т.е. $L = I_n$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ -a^T & \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$y = x = \text{coi}(\sigma, \dots, \sigma^{(n-1)}).$$

Тогда очевидно, решение (3.82) имеет вид $D = GA_*$, $G = -G^T$ – кососимметрическая матрица, такая, что $GB = 0$. С учетом вида A, B , получаем

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \bar{G} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где \bar{G} – произвольная кососимметрическая $(n-1) \times (n-1)$ -матрица.

Таким образом, при $n = 2$ имеется только тривиальное решение $D = 0$, т.е. новых алгоритмов не получается.

При $n = 3$ имеется однопараметрическое семейство решений

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и приводящее к алгоритму адаптивного управления

$$\begin{aligned} u(t) &= \theta_0 \sigma + \theta_1 \dot{\sigma} + \theta_2 \ddot{\sigma}, & \dot{\theta}_0(t) &= -\gamma_0 \delta(t) \sigma - d \ddot{\sigma}, \\ \dot{\theta}_1(t) &= -\gamma_1 \delta(t) \dot{\sigma} + d \dot{\sigma}, & \dot{\theta}_2(t) &= -\gamma_2 \delta(t) \ddot{\sigma}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

где $\delta(t) = \sigma + g_1 \dot{\sigma} + g_2 \ddot{\sigma}$.

При $n > 3$ разнообразие структур новых алгоритмов быстро возрастает.

§ 3.6. Сигнальные или параметрические?

Перед читателем предстала вереница различных структур адаптивных систем. Что в них общего и что различного? Какую структуру выбрать для конкретной задачи, и что делать, если ни одна из существующих не подходит? Ответы на эти вопросы дать непросто: ведь представленные здесь алгоритмы создавались различными авторами в течение более чем 20 лет; различия проявляются даже в терминологии. Общность изложенным методам придает то, что они относятся к одному направлению в теории АдСУ. Это направление изучает беспоисковые системы, синтезированные в непрерывном времени на основе функций Ляпунова. Изложение различных алгоритмов с единых позиций выявило ряд их общих свойств.

Основной тип ЦУ для таких систем — задание эталонной модели (желаемого качества переходных процессов); основной тип возмущений — детерминированные (хотя системы способны функционировать в случайных условиях, корреляционная структура возмущений в них не учитывается, а возмущения подавляются методами огрубления*). Эти общие свойства вытекают из того, что типичные режимы работы этих АдСУ — чаще переходные, чем установившиеся (см. ниже § 4.10, табл. 4.2).

Таблицы 3.1—3.4, содержащие сведения о различных алгоритмах адаптации и управления, читатель легко может продолжить, заполняя пустые клетки различными формами алгоритмов. При этом условия сходимости и свойства новых алгоритмов можно предсказывать, исходя из результатов главы 2. Переядем к анализу различий в свойствах структур АдСУ, знание которых необходимо для правильного выбора алгоритма при синтезе системы.

Прямой и идентификационный подходы. В соответствии с методикой синтеза АдСУ (§ 3.1) структура основного контура может выбираться на основе либо прямого, либо идентификационного (непрямого) подхода. При определенных условиях эти подходы могут оказаться эквивалентными, хотя идентификационный применим в более сложных ситуациях.

* Методы огрубления и оценки точности огрубленных систем рассмотрены в главе 2 и поэтому в данной главе не представлены.

Таблица 3.5
Количество настраиваемых параметров АдСУ

Типы АдСУ	Число настраиваемых параметров		
	Общий случай	Примеры	
		$n = 4,$ $m = 2$	$n = 8,$ $m = 4$
АдСУ с неявной ЭВМ	m^2	4	16
АдСУ с явной ЭМ	$m(n+m+1)+n$	18	60
АдСУ Нарендры [249]	$m^2(2n+m)+n$	44	328

Подчеркнем, что выбор идентификационного подхода определяет тип основного контура АдСУ и не требует обязательной идентификации параметров ОУ (т.е. сходимости оценок параметров ОУ к их истинным значениям). Для придания системе требуемого качества часто достаточно достижения ЦУ, хотя, конечно, идентифицирующие свойства придают системе дополнительные возможности (см. п. 2.3.3).

Явная и неявная эталонные модели. Следующая дилемма, возникающая при синтезе: явная ЭМ или неявная? Системы с неявной ЭМ проще в реализации, но обладают меньшей точностью. Они предъявляют меньше требований к ОУ (ослабляется условие адаптируемости), но больше требований к возмущению (при не огрубленном алгоритме адаптации оно должно стремиться к установленвшемуся; огрубление же алгоритма приводит к снижению точности). Наконец, в системах с неявной ЭМ меньше настраиваемых параметров.

В табл. 3.5 представлены количества настраиваемых параметров для трех типов адаптивных регуляторов применительно к ОУ (3.63): для системы с неявной ЭМ (3.6.1), системы с явной ЭМ (3.19) и для адаптивного регулятора без измерения производных, предложенного в [249] (n – размерность вектора состояния ОУ, m – размерность векторов входа и выхода ОУ). Видно, что разница в сложности реализации алгоритмов быстро растет с ростом сложности ОУ. Конечно, можно возразить, что при реализации регуляторов на современных микропроцессорных средствах порядок регулятора как мера сложности реализации утрачивает свое значение. Это так. Но чем сложнее закон управления, тем менее помехоустойчив регулятор, его реализующий. Кроме того, в более сложном регуляторе больше регулировочных (настроек) параметров, что осложняет их правильный подбор (настройку).

Сигнальные и параметрические алгоритмы адаптации. Когда дело доходит до выбора алгоритма адаптации, возникает новая дилемма: брать алгоритм сигнальный или параметрический? Принято считать, что сигнальные алгоритмы применяются для подавления возмущений (координатных или параметрических), которые меняются быстро, но диапазон их изменения относительно узок. Наоборот, параметрическая адаптация – средство борьбы с возмущениями, которые меняются медленно (гипотеза квазистационарности), но зато в широком (теоретически неограниченном) диапазоне. Однако эти выводы нуждаются в уточнении.

Дело в том, что традиционно для настройки параметров регуляторов использовались алгоритмы в дифференциальной форме, а для формирования дополнительного сигнала адаптации — алгоритмы в конечной форме. Однако вполне можно для настройки параметров использовать конечные алгоритмы, а для сигнальной адаптации — дифференциальные. Но тогда принципиальная разница между сигнальными и параметрическими алгоритмами исчезает, как показывает следующий пример.

Пусть закон регулирования в основном контуре имеет вид

$$u = \theta_1 \sigma + \theta_2 \dot{\sigma} + \theta_3, \quad (3.84)$$

где σ — регулируемая величина, θ_1, θ_2 — настраиваемые параметры, θ_3 — дополнительный сигнал адаптации. На первый взгляд, структура (3.84) должна порождать сигнально-параметрические алгоритмы адаптации. Однако при синтезе АдСУ возможно введение (для удобства) обозначения $y = \text{col}(\sigma, \dot{\sigma}, 1)$. Тогда закон (3.84) придется записать в виде $u = c^T y$, где $c = \text{col}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ — вектор настраиваемых параметров, а алгоритм адаптации отнести к классу параметрических.

С другой стороны, если алгоритм параметрической адаптации для настройки θ_1, θ_2 имеет конечную форму, то весь алгоритм адаптации можно отнести к сигнальным! Действительно, пусть алгоритм адаптации имеет вид

$$\bar{\theta}_i = \psi_i(\sigma, \dot{\sigma}) + \bar{\theta}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.85)$$

где $\bar{\theta}_i = \text{const}$ — начальные (опорные) значения величин. Подставляя (3.85) в (3.84), приведем (3.84) к виду

$$u(t) = \bar{\theta}_1 \sigma + \bar{\theta}_2 \dot{\sigma} + \tilde{\theta}_3, \quad (3.86)$$

в котором $\bar{\theta}_1$ и $\bar{\theta}_2$ не меняются, а аддитивная составляющая

$$\tilde{\theta}_3 = \Psi(\sigma, \dot{\sigma}) = \sigma \psi_1(\sigma, \dot{\sigma}) + \dot{\sigma} \psi_2(\sigma, \dot{\sigma}) + \bar{\theta}_3,$$

которая может быть названа "сигнальной", только и подвергается изменению.

Представляется формально более правильным относить все алгоритмы, рассмотренные в данной главе, к сигнально-параметрическим, а на этапе синтеза алгоритма адаптации учитывать, что конечная и дифференциальная формы алгоритмов соответствуют различным типам возмущений и придают синтезированной системе различные свойства (гл. 2). В конкретной задаче следует подбирать веса конечной и дифференциальной составляющих с целью достижения компромисса между их влиянием. При этом можно добиться снижения требований к каждой составляющей и сужения границ изменения переменных.

Отметим, что описание сигнальных и параметрических алгоритмов в единых терминах дает основу для сопоставления АСНЭМ и систем с переменной структурой, которые на самом деле имеют много общего (см. § 3.3.5).

Развитие методов непрерывного адаптивного управления далеко от завершения. Недостаточно ясны, например, взаимосвязи между адаптивными системами и системами, в которых слабая зависимость динамических свойств от изменения параметров объекта достигается не за счет вве-

дения отдельного контура адаптации, а путем специального выбора структуры основного контура*).

Не прекращаются поиски новых модификаций алгоритмов адаптации. Интересен, например, способ огрубления алгоритмов в системах с эталонной моделью, приводящей к алгоритму [250]

$$\dot{\theta} = -\gamma B^T H e x^T - \alpha |B^T H e| \theta. \quad (3.87)$$

По утверждению авторов [250], этот способ слабее искажает переходные процессы в системе, чем обычная линейная отрицательная обратная связь.

Наконец, еще не исчерпаны возможности метода функций Ляпунова. Расширение класса используемых при синтезе функций Ляпунова приводит, как показано в § 3.5, к новым алгоритмам.

В заключение отметим, что при разработке алгоритмов адаптивного управления в конкретных задачах синтез еще не является окончательным этапом, по крайней мере, в силу следующих причин:

- найденные теоретические условия применимости алгоритма могут не выполняться на практике;
- в синтезированном алгоритме могут потребоваться неизвестные по условию параметры или недоступные измерению переменные;
- теоретические оценки качества могут оказаться грубыми и не дающими необходимой информации о динамике системы;
- теоретически могут оказаться применимыми несколько вариантов алгоритмов, из которых необходимо выбрать наиболее приемлемый;
- принятый способ практической реализации требует изменения алгоритма (например, дискретизации при реализации на ЦВМ).

Методика разработки алгоритмов, направленная на преодоление перечисленных трудностей, должна включать приемы приближенного решения задач и опираться на широкое использование ЭВМ для моделирования системы и выбора из большого числа вариантов. Отложим описание такой методики до главы 6.

*). За рубежом такие системы часто называют *робастными*. Обычно в них явно или скрыто используется идея "большого коэффициента усиления".

Глава 4

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются задачи управления, в которых управляющее воздействие изменяется в дискретные моменты времени (например, при реализации алгоритма управления на ЦВМ). Математическая модель ОУ, используемая при синтезе, также считается дискретной. Подробно рассматриваются классы нелинейных статических ОУ при целях управления, соответствующих задачам слежения и оптимизации, а также класс минимально-фазовых линейных динамических ОУ при цели, соответствующей задаче слежения. Отдельно рассмотрены задачи, в которых дискретно (конечно) множество значений управляющего воздействия. Синтез АдСУ осуществляется на основе алгоритмов адаптации градиентного типа, с использованием метода рекуррентных целевых неравенств и метода стохастической аппроксимации. Проводится сравнение различных подходов к синтезу дискретных АдСУ.

§ 4.1. Задачи адаптивного управления статическими объектами

Начнем с того, что несколько сузим класс возможных задач дискретного адаптивного управления. Будем считать, что из всего промежутка функционирования системы управления можно выделить относительно короткие периоды, в которые происходят существенные изменения режимов работы ОУ и которые настолько редки, что для описания процесса смены режимов можно использовать нелинейные статические модели ОУ. В остальное время система функционирует вблизи постоянного или мало меняющегося режима, и для ее синтеза оказывается возможным использовать линейные динамические модели ОУ. Методы адаптивного управления для этих двух классов ОУ наиболее развиты, поэтому в данной главе будут рассмотрены именно они.

Задачи управления объектами в статике возникают, когда ОУ обладает свойствами устойчивости (самовыравнивания) и скорость затухания его переходных процессов выше наивысшей возможной скорости изменения внешних (задающих и возмущающих) воздействий. Кроме того, целесообразно ставить задачу управления как статическую при наличии существенного запаздывания в измерении и управлении, когда учет динамики ОУ не дает существенного выигрыша в качестве управления. В соответствии с общей постановкой главы 1, будем считать, что ОУ описывается уравнением

$$y_k = f(u_k, r_k, \xi) + \varphi_k, \quad (4.1)$$

где $u_k \in R^m$ – управляющее воздействие, $r_k \in R^s$ – измеряемое возму-

щение, $\varphi_k \in R^l$ – неизмеряемое возмущение, $y_k \in R^l$ – измеряемый выход ОУ (индексом k снабжены значения переменных в момент времени t_k), $\xi \in \Xi \subset R^N$ – конечномерный вектор неизвестных параметров, Ξ – известное выпуклое множество.

Особенностью модели (4.1) является конечность числа неизвестных параметров и аддитивность возмущений φ_k , природа которых может быть различной. Если, например, φ_k порождены помехами измерений, то они могут обладать теми или иными полезными статистическими свойствами: центрированностью, независимостью, а возможно, и нормальностью. Однако часто φ_k порождены неточностью выбранной модели ОУ, полезными статистическими свойствами не обладают и характеризуются лишь уровнем, определяющим величину погрешности модели.

В соответствии со сказанным рассмотрим два типа задач, которые условно назовем детерминированными и стохастическими. В детерминированных задачах φ_k считаются ограниченными по уровню:

$$\|\varphi_k\| \leq \Delta_\varphi. \quad (4.2)$$

В стохастических задачах φ_k считаются случайными, центрированными ($M\varphi_k = 0$), независимыми и ограниченными в среднеквадратическом: $M\varphi_k^2 \leq \sigma^2$. Возможны более сложные гипотезы о возмущениях, учитывающие, например, их коррелированность. Возможны и возмущения комбинированного типа: $\varphi_k = \varphi'_k + \varphi''_k$, где φ'_k – детерминированные, а φ''_k – стохастические. Методы решения для более сложных случаев можно строить на основе методов, описываемых ниже.

Как уже отмечалось в главе 1, основные типы целей управления для статических ОУ соответствуют задачам слежения и оптимизации. В детерминированной задаче слежения под ЦУ будем понимать выполнение при всех $k = 0, 1, 2, \dots$ следующих ограничений:

$$u_k \in U_k, \quad (4.3)$$

где U_k – множество допустимых на k -м шаге управлений, и выполнение при достаточно больших k следующих целевых неравенств:

$$\|y_k - y_k^*\| \leq \Delta \text{ при } k > k_*, \quad (4.4)$$

где y_k^* – желаемое значение выхода ОУ в момент t_k . В стохастическом случае ставится ЦУ

$$M \|y_k - y_k^*\|^2 \leq \Delta^2 \text{ при } k > k_*. \quad (4.5)$$

или ее "выборочный" вариант

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|y_i - y_i^*\|^2 \leq \Delta^2 \text{ при } k > k_*. \quad (4.6)$$

Цели (4.4)–(4.6) ставятся, когда статическая характеристика ОУ $f(\cdot)$ является монотонной по управлению функцией в допустимой области. Другой класс задач порождают объекты с экстремальным характером статической характеристики, для которых ставятся оптимизационные цели. Для формализации таких задач вводится показатель качества оптимизации на k -м шаге $P_k(y)$. В детерминированном варианте ЦУ задается

ограничениями (4.3) и целевыми неравенствами

$$P_k(y_k) \leq P_k^* + \Delta_P \text{ при } k > k_*, \quad (4.7)$$

где

$$P_k^* = \inf_{u \in U_k} \sup_{\|\varphi\| \leq \Delta_\varphi} P_k(f(u, r_k, \xi) + \varphi),$$

Δ_P – погрешность оптимизации. В стохастическом случае (4.7) заменяется на неравенства

$$MP_k(y_k) \leq P_k^* + \Delta_P \text{ при } k > k_*, \quad (4.8)$$

где теперь

$$P_k^* = \inf_{u \in U_k} MP_k(f(u, r_k, \xi) + \varphi_k).$$

Заметим, что цели (4.7) и (4.8) соответствуют принятым в исследовании операций критериям оптимизации в условиях неопределенности [35]: минимаксному критерию и критерию среднего риска. Однако поставленные задачи принципиально отличаются от задач математического программирования, в которых целевая функция (функционал) одна и та же на всех шагах процесса. Особенность процессов управления в том, что они всегда разворачиваются в реальном времени, вследствие чего целевая функция в задачах управления может меняться от шага к шагу с изменением внешних условий (например, при изменении r_k). Тем не менее идеи, лежащие в основе методов математического программирования, находят применение при синтезе АдСУ (см. ниже).

Отметим также, что задачу слежения формально можно рассматривать как частный случай задачи оптимизации при выборе, например, $P_k(y) = \|y - y_k^*\|^2$. Однако решать задачу оптимизации сложнее, и использование соответствующих методов целесообразно лишь в случае, когда методы решения задачи слежения оказываются непригодными (например, не существует $u_k \in U_k$, обеспечивающего точное решение $y_k = y_k^*$). Обратно, задачу оптимизации можно свести к задаче слежения для вспомогательного выхода – величины

$$\bar{y}_k = \frac{\partial}{\partial u} P_k(f(u_k, r_k, \xi) + \varphi_k) \text{ при } \bar{y}_k^* = 0.$$

Однако значения \bar{y}_k непосредственно не измеряются, и упростить решение таким способом, как правило, не удается.

§ 4.2. О выборе метода синтеза адаптивной системы

Для решения поставленных задач можно было бы, игнорируя имеющуюся информацию о структуре модели ОУ, применять методы прямой оптимизации (поиска) [77, 83, 116, 141, 154]. В поисковых методах по измерениям y_k (реакция ОУ на приложенное воздействие u_k) после нескольких пробных шагов определяется поправка $\Delta u_{k+1} = u_{k+1} - u_k$ так, чтобы приблизиться к "идеальному" (оптимальному) управлению u_k^* , обеспечивающему достижение ЦУ.

Однако поисковый подход требует постоянного приложения к ОУ пробных воздействий, что часто является нежелательным по техническим

условиям или соображениям безопасности. Кроме того, каждое изменение внешних воздействий r_k или желаемого значения выхода y_k^* приводит к изменению u_k^* , и поиск приходится начинать заново.

Использование при управлении параметризованной модели ОУ (4.1) позволяет заменить поиск часто меняющегося u_k^* оцениванием редко меняющегося вектора ξ , а текущее управление u_k рассчитывать по модели ОУ. Таким образом, учет априорной информации о структуре модели ОУ дает возможность повысить быстродействие системы управления, перейдя от управления "по отклонению" к комбинированному управлению.

Процесс синтеза для дискретных адаптивных систем разбивается на те же этапы, что и для непрерывных систем (см. главу 3). Соответственно, возможны два подхода к выбору структуры системы: прямой и идентификационный. Прямой подход удобно применять, когда идеальный закон управления $u_k^* = U(r_k, \theta_*)$ (\S 3.1) легко находится в явном, аналитическом виде (в основном для линейно-квадратичных задач). Если же идеальное управление определяется на каждом шаге численно (алгоритмически), например, в ходе численной оптимизации, то становится затруднительным вычисление градиента целевой функции при построении алгоритма адаптации.

Поэтому для нелинейных ОУ основным следует считать идентификационный подход, при котором в качестве вектора настраиваемых параметров берется вектор текущих оценок неизвестных параметров объекта ξ . Другими словами, текущая настраиваемая модель ОУ имеет вид

$$\hat{y}_k = f(u_k, r_k, \theta_k), \quad (4.9)$$

где \hat{y}_k – прогнозируемое значение выхода ОУ, θ_k – вектор оценок параметров ОУ. Для синтеза алгоритма адаптации при идентификационном подходе ставится вспомогательная цель (цель адаптации): приближение выхода текущей модели ОУ (4.9) к выходу ОУ (4.1). Для формализации этой цели вводится целевая функция, например, в виде $Q(\hat{y}_k) = \|y_k - \hat{y}_k\|^2$. Далее подставляется \hat{y}_k из (4.9), чтобы выразить целевую функцию через настраиваемые параметры:

$$Q_k(\theta) = \|y_k - f(u_k, r_k, \theta)\|^2. \quad (4.10)$$

После этого цель адаптации может быть записана в виде

$$Q_k(\theta_k) \leq \epsilon, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

(в детерминированном случае) или в виде

$$MQ_k(\theta_k) \leq \epsilon, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

(в стохастическом случае).

Совокупность функций $Q_k(\theta)$ обладает важным свойством: существует вектор $\theta_* \in \Xi$ такой, что при замене θ_k на θ_* и при подходящем выборе ϵ в (4.11) или (4.12) соответствующие неравенства окажутся выполненными при всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Действительно, достаточно положить $\theta_* = \xi$, $\epsilon = \Delta_\varphi^2$, где Δ_φ – уровень возмущений в (4.1). Это свойство, означающее, грубо говоря, что различные функции $Q_k(\theta)$ имеют (приближенно) общую точку минимума, является следствием квазистационар-

ности задачи и позволяет синтезировать алгоритм адаптации на основе методов математического программирования (в первую очередь – на основе методов 1-го порядка). Перейдем к изложению методов синтеза алгоритмов адаптации.

§ 4.3. Метод рекуррентных целевых неравенств

Основные идеи метода рекуррентных целевых неравенств (РЦН) были изложены в работах В.А. Якубовича [207, 208] и впоследствии интенсивно развивались (см. [211] и библиографию в [178]). Суть метода заключается в том, что цель (адаптации или управления) записывается в виде бесконечной системы "целевых" неравенств, которые могут не задаваться заранее, а формироваться в процессе управления "рекуррентно" (т.е. каждое неравенство может зависеть от предыдущих). В качестве алгоритма адаптации берется алгоритм, доставляющий за конечное число шагов решение всего бесконечного "хвоста" системы неравенств, так называемый *конечно-сходящийся алгоритм* (КСА) [207].

Применение метода РЦН разбивается на два этапа: а) построение системы РЦН; б) построение КСА для решения системы РЦН. Действия на первом этапе зависят от специфики задачи и могут потребовать достаточно изощренных преобразований исходного описания ОУ и ЦУ так, чтобы исключить неизвестные и недоступные измерению величины и обеспечить выполнение условий применимости КСА, сохранив при этом первоначальный смысл задачи. Примеры построения РЦН для различных задач адаптивного управления будут приведены в последующих параграфах главы.

Сейчас рассмотрим второй этап – построение КСА для решения системы целевых неравенств (4.11) безотносительно к ее происхождению. Если каждая из функций $Q_k(\theta)$ выпукла, то для построения КСА можно воспользоваться идеей методов проекции градиента (см., например, [141]). Соответствующий алгоритм имеет вид

$$\theta_{k+1} = \begin{cases} \text{Pr}_{\Xi} \{ \theta_k - \gamma_k \nabla_{\theta} Q_k(\theta_k) \}, & \text{при } Q_k(\theta_k) > \epsilon, \\ \theta_k & \text{при } Q_k(\theta_k) \leq \epsilon, \end{cases} \quad (4.13)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, γ_k – скалярный или матричный множитель шага, Pr_{Ξ} – проектор на множество Ξ . Множество Ξ должно быть выпуклым и замкнутым. Для простоты вычислений стараются задавать простые множества Ξ : параллелепипед, симплекс, шар и т.д. Условия применимости алгоритма (4.13) и правила выбора γ_k содержатся в следующей теореме.

Теорема 4.1 [57, 178]. Пусть существуют $\theta_* \in \Xi$ и $\epsilon_* < \epsilon$ такие, что $Q_k(\theta_*) < \epsilon_*$, для всех $k = 0, 1, 2, \dots$ и при $\theta \in \Xi$, $Q_k(\theta) > \epsilon$ выполнено для всех $k = 0, 1, 2, \dots$ какое-либо из неравенств

$$(\theta_* - \theta)^T \nabla_{\theta} Q_k(\theta) \leq \epsilon_* - \epsilon, \quad (4.14a)$$

$$(\theta_* - \theta)^T \nabla_{\theta} Q_k(\theta) \leq Q_k(\theta_*) - Q_k(\theta). \quad (4.14b)$$

Пусть для любого $\rho > 0$ и любых $k = 0, 1, 2, \dots$ при $\|\theta - \theta_*\| \leq \rho$ и $Q_k(\theta) > \epsilon$ выполнено неравенство $\|\nabla_{\theta} Q_k(\theta)\|^2 \leq k(\rho)$. Пусть

в алгоритме (4.13)

$$\gamma_k = \gamma \mu_k \| \nabla_{\theta} Q_k(\theta)_k \|^{-2}, \quad 0 < \gamma < 2 \left(1 - \frac{\epsilon_*}{\epsilon} \right), \quad (4.15)$$

где $\mu_k = \epsilon$ при выполнении (4.14а) и $\mu_k = Q_k(\theta_k)$ при выполнении (4.14б).

Тогда для любого $\theta_0 \in \Xi$ существует $k_* > 0$ такое, что при $k > k_*$ неравенства (4.11) выполняются и $\theta_k \equiv \text{const}$, т.е. алгоритм (4.13) – КСА. Число исправлений (нарушений целевого неравенства) не превосходит величины

$$\frac{\| \theta_0 - \theta_* \|^2 \cdot k (\| \theta_0 - \theta_* \|)}{\gamma (2\epsilon - 2\epsilon_* - \epsilon\gamma)}.$$

Геометрический смысл алгоритма (4.13) прост: при нарушении текущего целевого неравенства (4.11) вектор настраиваемых параметров смещается по направлению нормали к множеству $\{\theta : Q_k(\theta) \leq Q_k(\theta_k)\}$. Это ведет к уменьшению расстояния до θ_* на положительную, отделенную от нуля величину, т.е. функция $V(\theta) = \|\theta - \theta_*\|^2$ может быть взята в качестве функции Ляпунова для алгоритма (4.13). Для выпуклых функций $Q_k(\theta)$ выполняется любое из неравенств (4.14). Заметим еще, что число исправлений алгоритма не совпадает с временем адаптации k_* (временем окончательного достижения ЦУ) и не дает оценку скорости сходимости алгоритма.

На практике обычно стараются построить математическую модель ОУ (4.1) линейной по параметрам, а целевую функцию выбрать квадратичной. Если это удается, то целевые неравенства (4.11) принимают вид

$$\| F_k^T \theta - y_k \|^2 < \epsilon^2, \quad (4.16)$$

где $N \times l$ -матрицы F_k и l -векторы y_k доступны измерению. При этом конкретизируется алгоритм (4.13):

$$\theta_{k+1} = \begin{cases} \Pr_{\Xi} \left\{ \theta_k - \gamma \frac{\| \delta_k \|^2}{\| F_k \delta_k \|^2} F_k \delta_k \right\} & \text{при } \| \delta_k \| > \epsilon, \\ \theta_k & \text{при } \| \delta_k \| \leq \epsilon, \end{cases} \quad (4.17)$$

где $\delta_k = F_k^T \theta_k - y_k$ – "невязка". В частности, при $l = 1$, когда неравенство (4.16) задает "полосу" в пространстве $\{\theta\}$, алгоритм (4.13) выглядит еще проще:

$$\theta_{k+1} = \begin{cases} \Pr_{\Xi} \{ \theta_k - \gamma \delta_k F_k \| F_k \|^2 \} & \text{при } |\delta_k| > \epsilon, \\ \theta_k & \text{при } |\delta_k| \leq \epsilon. \end{cases} \quad (4.18)$$

Алгоритм (4.18) получил известность под названием "полоска" [175, 178].

Из теоремы 4.1 следует, что (4.17) – конечно-сходящийся алгоритм решения неравенств (4.16), если существуют $\theta_* \in \Xi$, $\epsilon_* < \epsilon$ такие, что $\| F_k^T \theta_* - y_k \| \leq \epsilon_*$, и, кроме того, $\| F_k \| \leq k$, $0 < \gamma < 2(1 - \epsilon_*/\epsilon)$. При этом число исправлений алгоритма не превосходит величины

$$\frac{\| \theta_0 - \theta_* \|^2 \cdot k}{\epsilon \gamma [2(1 - \epsilon_*/\epsilon) - \gamma]}.$$

Если выполняется условие $2\epsilon_* < \epsilon$, то в (4.17), (4.18) можно брать $\gamma = 1$; тогда алгоритм (4.18) состоит в проектировании θ_k на середину полосы, определяемой (4.16), что при $\epsilon = 0$ совпадает с известным алгоритмом Качмажа для решения систем линейных уравнений.

Исходная задача может содержать ограничения, например, вида (4.3). При подстановке в (4.3) u_k возникают дополнительные неравенства относительно θ_k :

$$P_k(\theta) \leq 0, \quad (4.19)$$

выделяющие множества $\Pi_k \subset R^N$. Неравенства (4.19), называемые безусловными, отличаются тем, что они должны выполняться при любых $k = 0, 1, 2, \dots$. Для учета (4.19) в алгоритме (4.13) проектирование на множество Ξ заменяется проектированием на множество $\Pi_k \cap \Xi$, а в условия теоремы 4.1 вводится дополнительное требование $\theta_* \in \Pi_k$ для всех k . Можно также рассматривать (4.19) как целевые дополнительные неравенства с использованием для их решения того же самого алгоритма (4.13). При этом, однако, нужно выбирать величину шага γ так, чтобы при $\theta = \theta_k$ выполнялось (4.19). Известны различные способы ускорения сходимости алгоритма (4.13). Например, при решении РЦН (4.16) целесообразно чередовать неравенство (4.16) с "разностным" неравенством

$$\|(F_k - F_{k-1})^\top \theta - y_k + y_{k-1}\| \leq 2\epsilon,$$

что повышает "разнообразие" векторов градиентов текущих целевых функций [54]. Еще более эффективен переход к многошаговым алгоритмам.

Опишем еще один класс алгоритмов решения целевых неравенств, в основе которого лежат идеи неявных вычислительных процедур [20, 160]. Как известно, неявные численные методы (например, методы численного решения дифференциальных уравнений) обладают расширенной областью устойчивости; многие неявные методы устойчивы при произвольной длине шага, что обуславливает их применимость для решения систем с большим разбросом постоянных времени ("жестких", "плохо обусловленных" задач). По аналогии с неявными численными методами введем *неявные алгоритмы адаптации* [187]. Неявный аналог градиентного алгоритма (4.13) имеет вид

$$\theta_{k+1} = \begin{cases} \Pr_{\Xi} \{\bar{\theta}_{k+1}\} & \text{при } \beta_k(\bar{\theta}_{k+1}) > \epsilon, \\ \theta_k & \text{при } \beta_k(\bar{\theta}_{k+1}) \leq \epsilon, \end{cases} \quad (4.20)$$

где

$$\beta_k(\theta) = Q_k(\theta) + 0.5 \gamma_k \|\nabla Q_k(\theta)\|^2,$$

$\bar{\theta}_{k+1}$ – решение уравнения

$$\bar{\theta}_{k+1} = \theta_k - \gamma_k \nabla Q_k(\bar{\theta}_{k+1}). \quad (4.21)$$

Для применения алгоритма (4.20) необходимо на каждом шаге решать систему, вообще говоря, нелинейных уравнений (4.21), что приводит к большему, чем для явных методов, объему вычислений. В общем случае для решения системы (4.21) можно воспользоваться, например, методом Ньютона, быструю сходимость которого обеспечивает хорошее начальное

приближение (θ_k или результат применения явной формулы (4.13)). В частных случаях объем вычислений удается сократить за счет преобразования формулы (4.21) к явному виду. Например, для линейной по параметрам модели ОУ и целевых неравенств (4.16) имеем $\nabla Q_k(\theta_k) = 2F_k\delta_k$, где $\delta_k = F_k^T\theta_k - y_k$ и уравнение (4.21) оказывается линейным относительно $\bar{\theta}_{k+1}$:

$$[I_N + 2\gamma_k F_k F_k^T] \bar{\theta}_{k+1} = \theta_k - 2\gamma_k F_k y_k.$$

Пользуясь формулой обращения матриц

$$[I_N + ab^T]^{-1} = I_l - a[I_l + b^T a]^{-1} b^T, \quad (4.22)$$

где $a, b - N \times l$ -матрицы, для нахождения $\bar{\theta}_{k+1}$ получаем соотношение

$$\bar{\theta}_{k+1} = \theta_k - F_k [I_l (2\gamma_k)^{-1} + F_k^T F_k]^{-1} \delta_k. \quad (4.23)$$

Применение алгоритма (4.20), (4.23) требует обращения на каждом шаге $l \times l$ -матрицы, где l – число выходов ОУ. Для ОУ со скалярным выходом ($l = 1$), когда F_k – столбец, процедура обращения матрицы исключается. Формула (4.23) принимает вид

$$\bar{\theta}_{k+1} = \theta_k - \frac{\delta_k}{(2\gamma_k)^{-1} + \|F_k\|^2} F_k. \quad (4.24)$$

Алгоритм (4.24) для частного случая $\gamma_k \equiv \gamma > 0$ был предложен в работах [132, 152].

Явный вид решения уравнения (4.21) можно выписать и для квадратичной целевой функции

$$Q_k(\theta) = 0.5(\theta - \theta_k^0)^T H_k (\theta - \theta_k^0),$$

где $H_k = H_k^T > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда

$$\bar{\theta}_{k+1} = [I_N + \gamma_k H_k]^{-1} (\theta_k + \gamma_k H_k \theta_k^0).$$

Можно сформулировать следующее общее утверждение, дающее условия применимости алгоритма (4.20).

Теорема 4.2. Пусть $Q_k(\theta)$ – выпуклые, неотрицательные, дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем

$$\|\nabla^2 Q_k(\theta)\| \leq q \text{ при } \theta \in \Xi. \quad (4.25)$$

Пусть существуют числа $\gamma > 0$, $\epsilon_* < \epsilon$ и вектор $\theta_* \in \Xi$ такие, что

$$Q_k(\theta_*) \leq \epsilon_*, \quad \gamma_k \geq \gamma, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.26)$$

Тогда существует $k_* > 0$ такое, что $\theta_k \equiv \text{const}$ при всех $k > k_*$ и выполнены неравенства

$$\beta_k(\bar{\theta}_{k+1}) < \epsilon, \quad Q_k(\theta_k) \leq 2\epsilon + q\gamma_k. \quad (4.27)$$

Следствие. Если выполнены условия теоремы 4.1 и условие (4.25), то алгоритм (4.20) при $\gamma_k \geq \gamma > 0$ обеспечивает достижение целей (4.27).

Теорема 4.2 показывает, что для неявных алгоритмов отсутствует ограничение сверху на длину шага, что может быть использовано для ускорения

сходимости на начальных шагах работы алгоритма. Иногда полезны комбинированные явно-неявные схемы, например, с заменой (4.21) уравнением

$$\bar{\theta}_{k+1} = \theta_k - \gamma'_k \nabla Q_k(\theta_k) - \gamma''_k \nabla Q_k(\bar{\theta}_{k+1}). \quad (4.28)$$

В качестве алгоритмов адаптации можно использовать и другие алгоритмы решения целевых неравенств (4.11) [169, 175, 178, 179].

§ 4.4. Метод стохастической аппроксимации

Первые алгоритмы стохастической аппроксимации были предложены в работах Роббинса – Монро [252] и Кифера – Вольфовича [235]. В 60-х годах Я.З. Цыпкин [199] обратил внимание на то, что многие алгоритмы адаптации и обучения могут рассматриваться как процедуры метода стохастической аппроксимации. Это обстоятельство стимулировало многочисленные исследования и применения метода.

Стochasticкий подход применим, когда помехи φ_k являются случайными, так что имеет смысл ставить ЦУ (4.12). Для построения алгоритма адаптации делается дополнительное предположение: $Q_k(\theta) = Q(z_k, \theta)$, где z_k – набор переменных, которые можно считать случайными величинами. Далее вводится функция средних потерь $\bar{Q}(\theta)$. Если правомерно предположение о том, что $MQ_k(\theta)$ не зависит от k (например, если z_k одинаково распределены), то полагается $\bar{Q}(\theta) = MQ_k(\theta)$. В противном случае полагается $\bar{Q}(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_k(\theta)$ (если предел существует). После этого задача обеспечения ЦУ (4.12) заменяется задачей поиска $\inf_{\theta} \bar{Q}(\theta)$, векторы $\nabla Q_k(\theta)$ рассматриваются как статистические оценки градиента $\nabla \bar{Q}(\theta)$ и строится алгоритм градиентного типа

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \gamma_k \nabla Q_k(\theta), \quad (4.29)$$

где $\gamma_k > 0$ – скалярный или матричный множитель шага. Таким образом, случайными считаются не только "помехи" φ_k , но и другие внешние факторы, т.е. векторы r_k в (4.1). Строго говоря, для написания алгоритма (4.29) гипотезы о стохастичности r_k , φ_k не требуется: алгоритм (4.29) отличается от (4.13) только отсутствием проектора на Ξ . Однако стохастичность нужна для обоснования свойств алгоритма.

Типичный результат о сходимости и скорости сходимости алгоритма (4.29) содержится в следующей теореме.

Теорема 4.3 [141]. Пусть $\nabla Q_k(\theta_k) = \nabla \bar{Q}(\theta_k) + \eta_k$, где $\{\eta_k\}$ – последовательность случайных независимых векторов, $M\eta_k = 0$, $M\|\eta_k\|^2 \leq \sigma^2$. Пусть функция $\bar{Q}(\theta)$ – гладкая, сильно выпуклая и выполнены неравенства

$$\|\nabla \bar{Q}(\theta)\|^2 \geq b(\bar{Q}(\theta) - Q_*), \quad \|\nabla \bar{Q}(\theta) - \nabla \bar{Q}(\theta')\| \leq L\|\theta - \theta'\|, \quad (4.30)$$

где $b > 0$, $L > 0$, $Q_* = \inf_{\theta} \bar{Q}(\theta)$.

Тогда, если $\gamma_k \equiv \gamma$, $0 < \gamma < 2/L$, то

$$M\bar{Q}(\theta_k) \leq Q_* + \frac{L\gamma\sigma^2}{b(2-L\gamma)} + (\bar{Q}(\theta_0) - Q_*)q^k. \quad (4.31)$$

где $q = 1 - b\gamma(1 - L\gamma/2)$. Если $\gamma_k = \gamma/(k+1)$, $\gamma > 1/b$, то $Q_k \xrightarrow{u.h.} Q_*$, где $Q_* = \arg \min_{\theta} \bar{Q}(\theta)$ и выполнено неравенство

$$M\bar{Q}(\theta_k) \leq Q_* + \frac{L\gamma^2 \sigma^2}{2(k+1)(b\gamma - 1)} + \sigma \left(\frac{1}{k+1} \right). \quad (4.32)$$

Из теоремы можно сделать вывод о том, что сделанные предположения о стохастичности задачи позволяют достигать более тонкой ЦУ: минимизация с вероятностью 1 функции средних потерь. Однако за это приходится платить снижением скорости сходимости: при выборе $\gamma_k = \gamma/(k+1)$ (а такой выбор, как показано, например, в [141], является в известном смысле оптимальным), асимптотическая скорость достижения ЦУ из экспоненциальной (при $\gamma_k \equiv \gamma$) становится степенной. Скорость сходимости алгоритма (4.29) сохраняется, если учесть в нем ограничения путем введения в правую часть (4.29) проектирования на выпуклое множество Ξ .

Весьма ограничительным в теореме 4.3 является предположение о независимости случайных воздействий φ_k . Оно практически исключает из рассмотрения задачи идентификации и управления динамическими объектами. В последние годы во многих работах по анализу стохастических итеративных алгоритмов это предположение существенно ослаблено. Среди таких работ можно выделить три основных направления:

- использование мартингальных и квазимартингальных методов, теории больших уклонений [34, 91a];
- использование приемов "декорреляции" и оценивания "цветных" возмущений, порождаемых при прохождении независимых возмущений через устойчивые линейные системы (фильтры) [140, 176, 177], см. также § 4.10;
- использование упрощенных (усредненных) моделей алгоритмов адаптации [57, 102, 245] (см. также гл. 5).

Третье направление можно назвать декомпозиционным. В нем накладывается больше ограничений на задачу, но получаются более детальные сведения о скорости сходимости и других динамических свойствах алгоритмов.

Наконец, в следующем параграфе показано, что переформулировка цели адаптации в терминах "аккумулирующих" неравенств [50] позволяет решать задачи со стохастическими (ограниченными в среднеквадратическом) помехами φ_k , не накладывая никаких дополнительных предположений о стохастических свойствах измеряемых воздействий r_k .

§ 4.5. Многошаговые алгоритмы адаптации

В рассмотренных выше алгоритмах адаптации коррекция вектора настраиваемых параметров осуществлялась в направлении $\nabla Q_k(\theta_k)$ – градиента текущей целевой функции в текущей точке. Получаемые "одношаговые" алгоритмы просты и требуют минимальной дополнительной памяти, что позволяет использовать их в задачах весьма высокой размерности. Однако скорость сходимости их бывает недостаточна. Для ускорения работы алгоритмов идут на их усложнение за счет учета информации о прошлых наблюдениях и действиях системы. Такие алгоритмы требуют расширения памяти и называются *многошаговыми*.

Таблица 4.1
Многошаговые алгоритмы адаптации

Текущая целевая функция (ЦФ)	Глубина памяти $p + q$	Векторы, определяющие направление шага	Выбор величины шага			
			Минимизация ЦФ		Градиентный шаг	
			Без порога	С порогом	Без порога	С порогом
1 $Q_k(\theta)$	1	$\nabla Q_k(\theta_k)$	Алгоритм Качмажа	"Полоска" (при $\gamma = 1$)	Алгоритм Робинса–Монро (4.29)	Алгоритм "полоска" (4.18)
2 $Q_k(\theta)$	$p + 1$ $(1 \leq p \leq N)$	$\nabla Q_k(\theta_k), \dots, \nabla Q_{k-p}(\theta_{k-p})$	Алгоритм Аведьянина (4.33) [219]			
3 $Q_k(\theta)$	$p + 1$ $(1 \leq p \leq N)$	$\nabla Q_k(\theta_k), \theta_k, \dots, \theta_{k-p}$	Алгоритм Михайловой–Чиркова [119]	Алгоритм Тимофеева [169]		
4 $Q_k(\theta)$	2	$\nabla Q_k(\theta_k), \theta_k - \theta_{k-1}$	Метод сопряженных градиентов (4.36)			
5 $\frac{1}{N} \sum_{k-N+1}^k Q_i(\theta)$	$N + 1$	$\nabla Q_k(\theta_k), \dots, \nabla Q_{k-N}(\theta_{k-N})$	Скользящий МНК (4.40)			

Классифицировать многошаговые алгоритмы можно так же, как и одношаговые:

- по способу выбора направления шага коррекции настраиваемых параметров;
- по способу выбора величины шага.

Направление k -го шага определяется некоторой совокупностью величин (векторов или матриц), порождающих подпространство L_k , в пространстве настраиваемых параметров так, что очередная поправка $\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k$ берется из L_k . Подпространство L_k может порождаться предыдущими оценками $\theta_{k-1}, \theta_{k-2}, \dots$, вычисленными в них градиентами целевой функции и т.д. Размерность L_k определяет глубину памяти алгоритма.

Выбор величины шага по L_k может производиться из условия минимизации некоторой вспомогательной целевой функции $I_k(\theta)$, путем наискрайшего спуска в направлении проекции на L_k градиента $\nabla Q_k(\theta_k)$, путем последовательного отсечения множеств, заведомо не содержащих решений, и т.п. В каждом случае может вводиться или не вводиться порог (зона нечувствительности). Некоторые многошаговые алгоритмы адаптации приведены в таблице 4.1.

Рассмотрим, с учетом сказанного, некоторые классы алгоритмов адаптации (см. табл. 4.1). Пусть $I_k(\theta) = Q_k(\theta)$, $L_k = \mathcal{L}\{\nabla Q_k(\theta_k)\}$. Тогда получаем алгоритмы § 4.3, 4.4. Если выбрать θ_{k+1} оптимально в смысле $\min I_k(\theta)$ на L_k , то получим алгоритм Качмажа; введение зоны неустойчивости отвечает алгоритму "полоска" (4.18) при $\gamma = 1$; к алгоритмам градиентного типа относятся "полоска" в общем случае и алгоритм стохастической аппроксимации (4.29). Наконец, на последовательном сужении множества неопределенности основан, например, метод половинного деления, где $N = 1$, $\Omega_k = [a_k, b_k]$ – интервал, $\theta_k = (a_k + b_k)/2$ (на k -м шаге метода вычисляется производная $Q'_k(\theta_k)$, и, в зависимости от ее знака, в качестве Ω_{k+1} выбирается либо левая, либо правая половина Ω_k).

Пусть теперь

$$L_k = \mathcal{L}\{\nabla Q_k(\theta_k), \nabla Q_{k-1}(\theta_{k-1})\},$$

т.е.

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \alpha_k \nabla Q_k(\theta_k) + \beta_k \nabla Q_{k-1}(\theta_{k-1}), \quad (4.33)$$

где α_k, β_k – числовые коэффициенты. Критерием оптимальности выбора α_k, β_k является соотношение

$$\min_{\alpha_k, \beta_k} I_k(\theta_{k+1}) \quad (\text{например, } I_k(\theta) = Q_k(\theta) + Q_{k-1}(\theta)).$$

Для линейно-квадратичных задач (4.16) при $l = 1$ можно найти в явном виде коэффициенты α_k, β_k в (4.33), одновременно минимизирующие как $Q_k(\theta_{k+1})$, так и $Q_{k-1}(\theta_{k+1})$. При этом коэффициенты α_k, β_k ищутся из уравнений

$$F_k^T \theta_{k+1} - y_k = 0, \quad F_{k-1}^T \theta_{k+1} - y_{k-1} = 0, \quad (4.34)$$

решение которых дается формулами

$$\alpha_k = \frac{(y_k - F_k^T \theta_k) \|F_{k-1}\|^2 - (y_{k-1} - F_{k-1}^T \theta_k) F_k^T F_{k-1}}{\|F_k\|^2 \cdot \|F_{k-1}\|^2 - (F_k^T F_{k-1})^2}, \quad (4.35)$$

$$\beta_k = \frac{(y_{k-1} - F_{k-1}^T \theta_k) \|F_k\|^2 - (y_k - F_k^T \theta_k) F_k^T F_{k-1}}{\|F_k\|^2 \cdot \|F_{k-1}\|^2 - (F_k^T F_{k-1})^2}.$$

Геометрические соображения показывают (рис. 4.1), что 2-х шаговый алгоритм (4.33), (4.35) эффективнее одношагового: одновременное ре-

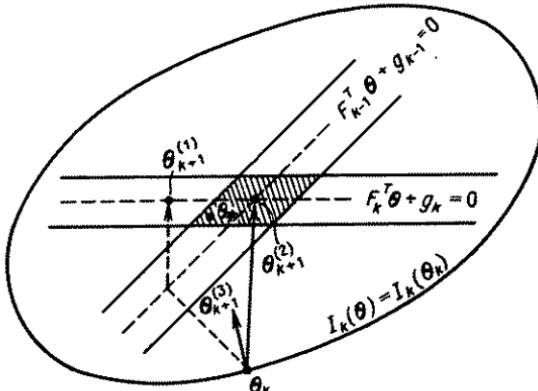


Рис. 4.1. Сравнение одношаговых и двухшаговых алгоритмов: $\theta_{k+1}^{(1)}$ – оценка по алгоритму Качмажа ("полоска"); $\theta_{k+1}^{(2)}$ – оценка по алгоритму с минимизацией суммарной функции невязки; $\theta_{k+1}^{(3)}$ – оценка по алгоритму с шагом по градиенту суммарной функции невязки

шение двух уравнений (4.34) быстрее приближает к цели, чем последовательное, а при $N = 2$ за один шаг приводит к выбору θ_{k+1} в окрестности θ_* . Алгоритм (4.33) можно обобщить до p -шагового ($1 \leq p \leq N$) [219].

Другие 2-х шаговые алгоритмы получаются, если взять $L_k = \mathcal{L}(\nabla Q_k(\theta_k), \theta_k - \theta_{k-1})$, а θ_{k+1} искать в виде

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \alpha_k \nabla Q_k(\theta_k) + \beta_k (\theta_k - \theta_{k-1}) \quad (4.36)$$

или в виде

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \alpha_k \nabla Q_k(\theta_k) + \beta_k \theta_k. \quad (4.37)$$

Если α_k, β_k ищутся из условия минимизации $I_k(\theta)$, то алгоритм (4.36) совпадает с методом сопряженных градиентов [141], а алгоритм (4.37) для линейно-квадратичной задачи при α_k, β_k , определяемых из (4.34), совпадает с алгоритмом [119]. Модификации алгоритмов (4.36), (4.37) для линейно-квадратичной задачи решения целевых неравенств (4.16) при $l = 1$ рассматривались в [169].

Сравнение скоростей сходимости алгоритма (4.37) и алгоритма Качмажа, проведенное по их усредненным непрерывным моделям (см. § 5.4), показало, что оба алгоритма сходятся со скоростью геометрической про-

грессии, причем увеличение показателя сходимости, вызванное единичным повышением глубины памяти и переходом от одномерной минимизации на каждом шаге к двумерной, эквивалентно уменьшению на единицу числа оцениваемых параметров. Таким образом, рост числа дополнительных параметров алгоритма эквивалентен (по скорости сходимости) снижению числа оцениваемых параметров*). Поэтому вызывает интерес случай $\dim L_k = N$. При этом подпространства L_k (в случае общего положения) совпадают со всем пространством настраиваемых параметров $\{\theta\} = R^N$, вследствие чего различные структуры алгоритмов отличаются лишь выбором целевой функции $I_k(\theta)$.

Рассмотрим линейно-квадратичную задачу (4.16) при $l = 1$. Тогда можно удовлетворить одновременно N соотношениям

$$F_i^T \theta - y_i = 0, \quad i = k, \dots, k - N + 1. \quad (4.38)$$

Решение (4.38) эквивалентно нахождению нулевого минимума скользящей среднеквадратичной ошибки

$$I_k(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^k \|F_i^T \theta - y_i\|^2, \quad (4.39)$$

т.е. мы получаем алгоритм скользящего метода наименьших квадратов (МНК). Минимизация (4.39) имеет смысл и при $l > 1$. Формула для расчета θ_{k+1} может быть преобразована к рекуррентному виду

$$\begin{aligned} g_{k-1} &= P_{k-1} F_{k-N} [F_{k-N}^T P_{k-1} F_{k-N} - 1]^{-1}, \\ R_{k-1} &= P_{k-1} - g_{k-1} F_{k-N}^T P_{k-1}, \\ \gamma_{k-1} &= R_{k-1} F_k [F_k^T R_{k-1} F_k + 1]^{-1}, \\ P_k &= R_{k-1} - \gamma_{k-1} F_k^T R_{k-1}, \\ \theta_k &= \theta_{k-1} + g_{k-1} y_{k-N} + \gamma_{k-1} [y_k + F_k^T (\theta_{k-1} + g_{k-1} y_{k-N})], \end{aligned} \quad (4.40)$$

где P_k , R_k — $N \times N$ -матрицы, q_k , γ_k — $N \times l$ -матрицы, y_k — l -векторы.

Наконец, классический алгоритм МНК получается, если в качестве минимизируемой на k -м шаге функции взять полную среднеквадратичную ошибку

$$I_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|F_i^T \theta - y_i\|^2. \quad (4.41)$$

Рекуррентные формулы МНК имеют вид

$$\begin{aligned} \theta_k &= \theta_{k-1} + \Gamma_k F_k (y_k - F_k^T \theta_{k-1}), \\ \Gamma_k &= \Gamma_{k-1} - \Gamma_{k-1} F_k (1 + F_k^T \Gamma_{k-1} F_k)^{-1} F_k^T \Gamma_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Формулы (4.40), (4.42) применимы при невырожденных Γ_k , т.е. при $k \geq N$. Для реализации начальных шагов (при $k < N$) осуществляется проек-

*.) Отметим, что утверждения о конечности и квадратичной сходимости метода сопряженных градиентов и его аналогов в задачах адаптации теряют силу, так как целевая функция $Q_k(\theta)$ меняется от шага к шагу.

тирование θ_k на подпространство $L_k = \mathcal{L}\{F_1, \dots, F_k\}$. Соответствующие формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} &= \theta_k + \gamma_k d_k (y_{k+1} - F_{k+1}^T \theta_k), \\ d_k &= F_{k+1} - \Phi_k^T g_k, \quad g_k = \Gamma_k \Phi_k F_{k+1}, \\ \gamma_k &= \frac{1}{F_{k+1}^T d_k}, \quad \Phi_{k+1} = \begin{bmatrix} \Phi_k \\ F_{k+1}^T \end{bmatrix}, \\ \Gamma_{k+1} &= \begin{bmatrix} \Gamma_k + \gamma_k g_k g_k^T & -\gamma_k g_k \\ -\gamma_k g_k & \gamma_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Отметим, что если регуляризовать алгоритм введением зоны нечувствительности по условию $\|y_k - F_k^T \theta_k\| < \epsilon$ в (4.40), (4.42), (4.43) (для алгоритма (4.43) варианты таких модификаций описаны в [169, 175]), то будут обеспечены линейная независимость отобранных векторов F_i и оценка числа обусловленности матрицы Γ_N .

Сопоставляя алгоритмы скользящего (4.40) и "полного" (4.42) МНК, можно сказать, что полный МНК лучше сглаживает стохастические помехи, но хуже работает в нестационарных условиях. Действительно, за счет стремления к нулю коэффициента усиления Γ_k МНК, как и алгоритм стохастической аппроксимации, теряет при $k \rightarrow \infty$ способность отслеживать дрейф неизвестных параметров. При практическом применении алгоритмов с накоплением для нестационарных задач нужно либо периодически восстанавливать начальные значения коэффициентов усиления Γ_k , γ_k , либо использовать целевую функцию

$$I_k(\theta) = \sum_{i=1}^k \lambda^i Q_{k-i}(\theta) \frac{1-\lambda}{1-\lambda^k}, \quad 0 < \lambda < 1,$$

с "забыванием" (дисконтированием) прошлых наблюдений: это — метод взвешенных наименьших квадратов [176]. Можно, наконец, обходиться алгоритмами с конечным временем накопления, как, например, скользящий МНК. Однако если есть дополнительная информация о дрейфе параметров (модель дрейфа), то целесообразно учесть ее в структуре алгоритма адаптации [57, 82].

В работе [50] предложен следующий алгоритм, градиентный по отношению к функции (4.41) и обладающий зоной нечувствительности:

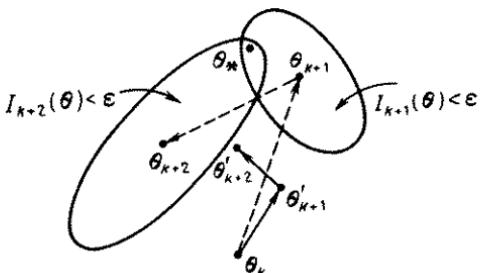
$$\begin{aligned} G_{k+1} &= G_k + \frac{1}{k+1} (F_{k+1} F_{k+1}^T - G_k), \\ g_{k+1} &= g_k + \frac{1}{k+1} (F_{k+1} y_{k+1} - g_k), \\ \rho_{k+1} &= \rho_k + \frac{1}{k+1} (\|y_{k+1}\|^2 - \rho_k), \\ \mu_{k+1} &= \theta_k^T G_{k+1} \theta_k - 2g_{k+1}^T \theta_k + \rho_{k+1}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$z_{k+1} = G_{k+1} \theta_k - g_{k+1},$$

$$\theta_{k+1} = \begin{cases} \Pr_{\Xi} \left| \theta_k - \frac{\gamma \mu_{k+1}}{\|z_{k+1}\|^2} z_{k+1} \right|, & \text{при } \mu_{k+1} > \epsilon^2, \\ \theta_k, & \text{при } \mu_{k+1} \leq \epsilon^2, \end{cases}$$

где G_k – $N \times N$ -матрица, g_k, z_k – N -векторы, ρ_k, μ_k – скаляры. Начальные условия $G_0, g_0, \rho_0, \theta_0$ можно брать, например, нулевыми. Смысл

Рис. 4.2. Сравнение МНК и алгоритма решения аккумулирующих неравенств (4.44): $\theta_{k+1}, \theta'_{k+2}$ – оценки по алгоритму (4.44); θ_{k+1} , θ_{k+2} – оценки по МНК



формул (4.44) становится ясным, если заметить, что "усредненная" целевая функция (4.41) квадратична по θ и может быть представлена в виде

$$I_k(\theta) = \theta^T G_k \theta + 2g_k^T \theta + \rho_k,$$

где G_k, g_k, ρ_k подчиняются рекуррентным уравнениям (4.44). При этом $\mu_k = I_k(\theta_k)$, $z_k = \nabla I_k(\theta_k)$.

Таким образом, (4.44) представляет собой градиентный алгоритм типа "полоска" с зоной нечувствительности по целевой функции (4.41). В отличие от обычной "полоски" алгоритм (4.44) решает вместо исходных неравенств (4.16) "аккумулирующие" неравенства $I_k(\theta) < \epsilon^2$, накапливающие информацию о прошлом.

Аккумулирующие неравенства задают систему эллипсоидов в пространстве настраиваемых параметров. Обычный МНК, соответствующий движению в центры эллипсоидов, в данном случае может быть неприменим (рис. 4.2).

Важно, что для конечной сходимости (4.44) не требуется равномерной ограниченности возмущений $\varphi_k = F_k^T \theta_* - y_k$ в левой части (4.16). Оказывается, для этого достаточно, чтобы возмущения были ограничены в среднеквадратическом, т.е. чтобы были выполнены неравенства

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|F_i^T \theta_* - y_i\|^2 \leq \epsilon_*^2 \quad (4.45)$$

при достаточно больших k . Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.4 [50]. Если $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|F_i\|^2 \leq \kappa$ и выполнены условия (4.45) при некотором $\theta_* \in R^N$ и при $\epsilon_* < \epsilon$, то алгоритм (4.44)

при $0 < \gamma < 2(1 - \epsilon_*/\epsilon)$ является КСА решения неравенств $I_k(\theta) < \epsilon^2$ для $I_k(\theta)$ вида (4.41).

Отметим, что (4.45) может быть выполнено и в стохастическом случае, например, если φ_k независимы и $M\|\varphi_k\|^2 \leq \Delta_\varphi^2 \leq \epsilon_*^2$. Таким образом, теорема 4.4 показывает, что при переходе к многошаговым алгоритмам возможен компромисс между детерминистским и стохастическим подходами.

В заключение параграфа опишем еще один многошаговый метод, который может рассматриваться как глубокое обобщение метода половинного деления. Это так называемый *алгоритм эллипсоидов* [141, 211]. При применении алгоритма эллипсоидов считается заданной априорная информация в виде начального эллипса $E_0 = \{\theta: (\theta - \theta_0)^T G_0^{-1}(\theta - \theta_0) \leq 1\}$, покрывающего "идеальный" вектор θ_* , вместе с окрестностью $E_* = \{\theta: \|\theta - \theta_*\| < \epsilon_*\}$.

Пусть к k -му шагу построен текущий эллипс $E_k = \{\theta: (\theta - \theta_k)^T G_k^{-1}(\theta - \theta_k) \leq 1\}$ с центром в текущей оценке θ_k , который покрывает E_* . На k -м шаге вычисляется градиент $\nabla Q_k(\theta_k)$ и проверяется целевое неравенство $Q_k(\theta_k) \leq \Delta$. Если оно выполнено — эллипс не меняется: $E_{k+1} = E_k$. В противном случае строится новый эллипс E_{k+1} как эллипс G_{k+1} наименьшего объема, описанный вокруг пересечения E_k и полупространства $\{\theta: \nabla Q_k(\theta_k)^T(\theta - \theta_k) \leq 0\}$. Формулы для вектора θ_{k+1} и $N \times N$ -матрицы G_{k+1} имеют вид [211]

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \frac{G_k z_k}{(N+1)\sqrt{z_k^T G_k z_k}}, \quad z_k = \nabla Q_k(\theta_k),$$

$$G_{k+1} = \frac{N^2}{N^2 - 1} \left[G_k - \frac{2G_k z_k z_k^T G_k}{(N+1)z_k^T G_k z_k} \right].$$

Известно [211], что верхняя граница числа исправлений r_3 для алгоритма (4.46) есть

$$r_3 = N(\ln \rho_N^{-1})^{-1} \ln \xi,$$

где

$$\rho_N = \frac{N}{N+1} \left(\frac{N}{\sqrt{N^2 - 1}} \right)^{N-1}, \quad \xi = \frac{\|\theta_0 - \theta_*\|}{\Delta}$$

— мера начальной неопределенности, $r_3 = [2N^2 + O(1)] \ln \xi$ при $N \rightarrow \infty$. Сопоставление с теоремой 4.1 (см. ниже § 4.11) показывает, что алгоритм (4.46) проигрывает градиентному алгоритму (4.13) при большой размерности θ , но является более предпочтительным при малых N и больших ξ .

В заключение параграфа заметим, что по аналогии с усредненной целевой функцией $I_k(\theta) = M Q_k(\theta)$ в детерминированном случае можно ввести функцию $I_k(\theta) = \max_{1 \leq i \leq k} Q_i(\theta)$ и свести задачу к задаче линейного или квадратичного программирования. Однако получаемые алгоритмы будут эффективны лишь при небольших k ввиду трудностей их рекуррентной реализации.

В целом можно сказать, что многошаговые алгоритмы более сложны в реализации, но если эта сложность преодолена, то их применение предпочтительней, поскольку они обладают более высоким быстродействием. Кроме того, многошаговые алгоритмы работают лучше одношаговых в плохо обусловленных задачах.

§ 4.6. Адаптивное управление статическими объектами: задача слежения

Применим изложенные выше алгоритмы к синтезу адаптивных систем управления нелинейными статическими ОУ, описываемыми уравнением (4.1): $y_k = f(u_k, r_k, \xi) + \varphi_k$. Цель управления будем задавать соотношением (4.4) (в детерминированном случае) или (4.5) (в стохастическом случае). В соответствии с § 4.2 выберем для решения задачи идентификационный подход и будем пользоваться для расчета текущего управления текущей моделью ОУ $\hat{y}_k = f(u_k, r_k, \theta_k)$. Именно, будем подавать на вход ОУ вектор u_k , найденный из соотношений

$$y_k^* = f(u_k, r_k, \theta_k), \quad u_k \in U. \quad (4.47)$$

(Этот прием работает, если решение (4.47) существует. В противном случае нужно сводить задачу к оптимизационной с критерием качества $\min \|y_k^* - f(u, r_k, \theta_k)\|$.)

Для синтеза алгоритма адаптации, как указано в § 4.2, возьмем целевую функцию (4.10) и запишем цель адаптации в виде (4.11), рассматривая сначала только детерминированный случай. Важно отметить, что при выборе управления из (4.47) цель (4.11), если положить $\epsilon = \Delta^2$, полностью совпадает с исходной целью управления (4.4). Поэтому для решения задачи осталось построить алгоритм адаптации модели ОУ, обеспечивающий достижение цели (4.11). В качестве таких алгоритмов можно брать алгоритмы, описанные в § § 4.3, 4.5. Пусть для определенности выбран градиентный алгоритм (4.13), (4.15), тогда с учетом (4.10) алгоритм адаптации для данной задачи можно записать в виде

$$\theta_{k+1} = \begin{cases} \Pr\left\{\theta_k - \gamma \frac{\|\delta_k\|^2}{\|W_k^\top \delta_k\|^2} W_k^\top \delta_k\right\} & \text{при } \|\delta_k\| > \Delta, \\ \theta_k & \text{при } \|\delta_k\| \leq \Delta, \end{cases} \quad (4.48)$$

где $\delta_k = y_k - y_k^*$, $W_k = \frac{\partial f}{\partial \theta}(u_k, r_k, \theta_k)$.

Таким образом, синтезированная АдСУ описывается соотношениями (4.47), (4.48).

Функционирует синтезированная система следующим образом. В момент t_k измеряются r_k , y_k^* и вычисляется u_k как решение (4.47). Вычисленное значение u_k подается на ОУ, и после окончания переходного процесса измеряется выход ОУ y_k . Затем по алгоритму (4.48) происходит коррекция настраиваемых параметров, и вычисляется θ_{k+1} . В момент t_{k+1} действия повторяются. В качестве начального значения на-

страиваемых параметров выбирается априорная оценка $\theta_0 \in \Xi$ вектора "истинных" параметров ОУ $\xi \in \Xi$.

Таким образом, синтезированная АдСУ относится к классу комбинированных (рис. 4.3), причем в основном контуре реализован принцип управления по возмущению, а замыкание системы осуществляется через контур адаптации. Условия применимости системы даются следующей теоремой.

Теорема 4.5. Пусть

1°. Для любых $\theta \in \Xi$ и любых y_k^* существует u_k , удовлетворяющее (4.40).

2°. Функция (4.10) выпукла по $\theta \in \Xi$ для любых $r_k \in R$, $u_k \in U$, y_k^* .

3°. Вектор $W_k^T \delta_k$ в (4.48) ограничен для любых $r_k \in R$, $u_k \in U$, $\theta \in \Xi$.

Тогда в системе (4.1), (4.47), (4.48) при $\|\varphi_k\| \leq \Delta_\varphi < \Delta$ и $0 < \gamma < 2(1 - \Delta_\varphi/\Delta)$ достигается ЦУ (4.4).

Отметим, что теорема не гарантирует сходимости процесса идентификации параметров ОУ, т.е. сходимости $\theta_k \rightarrow \xi$. Для выполнения условия

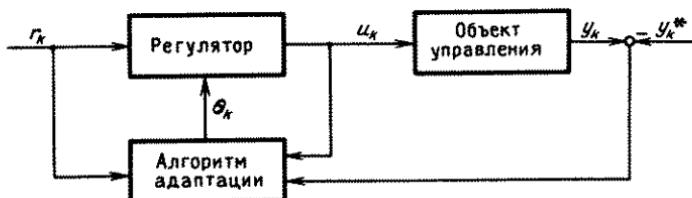


Рис. 4.3. Структура адаптивной системы управления статическим объектом

разрешимости 1° необходимо (в случае общего положения) равенство размерностей входа и выхода ОУ: $m = l$.

Рассмотрим подробнее частный случай, когда модель ОУ линейно зависит от настраиваемых параметров:

$$\hat{y}_k = \sum_{i=1}^N f_i(u_k, r_k) \theta^{(i)}, \quad (4.49)$$

где $\theta = \text{col}(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(N)})$. Пусть для простоты $m = l = 1$. Алгоритм (4.48) принимает вид

$$\theta_{k+1} = \begin{cases} \Pr_{\Xi} \left\{ \theta_k - \gamma \frac{y_k - y_k^*}{\|F_k\|^2} F_k \right\} & \text{при } |y_k - y_k^*| > \Delta, \\ \theta_k & \text{при } |y_k - y_k^*| \leq \Delta, \end{cases}$$

где $F_k = \text{col}(f_1(u_k, r_k), \dots, f_N(u_k, r_k))$. Условие 2° теоремы 4.5 будет выполнено в силу линейности (4.49) по θ . Из теоремы 4.5 следует, что

если уравнение

$$y_k^* = \sum_{i=1}^N f_i(u_k, r_k) \theta^{(i)}$$

разрешимо относительно $u_k \in U$ для любых y_k^*, r_k, θ , множество Ξ ограничено, а функции $f_i(\cdot)$ ограничены на $U \times R$, то ЦУ (4.4) достигается за конечное число шагов при любом $\xi \in \Xi$.

Рассмотрим теперь случай стохастических возмущений φ_k . Алгоритм основного контура (4.47) не меняется, а алгоритм адаптации возьмем в виде (4.29) при $\gamma_k = \gamma/(k+1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Если выполнены предположения о независимости r_k , невырожденности и ограниченности ковариационной матрицы вектора $\bar{f}_k = \text{col}\{f_i(r_k, u_k)\}$, т.е.

$$0 < bI \leq M\bar{f}_k\bar{f}_k^T \leq LI, \quad (4.50)$$

то по теореме 4.3 будет достигаться ЦУ (4.12), где

$$\bar{Q}(\theta) = M \|y_k^* - F_k^T \theta\|^2 + M \|\varphi_k\|^2,$$

$$Q_* = \inf_{\theta \in \Xi} \bar{Q}(\theta) + M \|\varphi_k\|^2.$$

При этом, если величины $\Delta, M \|\varphi_k\|^2$ известны, то можно выбирать $\gamma_k \equiv \gamma$, что повышает, в соответствии с (4.31), скорость сходимости алгоритма.

Однако условия стохастичности и независимости векторов r_k могут оказаться слишком ограничительными или трудно проверяемыми. Кроме того, для проверки условий теоремы 4.3 нужно подставлять в (4.50) в соответствии с (4.47) u_k как функцию от θ_k , аналитическое выражение для которой удается получить лишь в простейших случаях [57].

Преодолеть эти трудности можно, применяя алгоритм (4.44), для которого не нужно искусственного требования стохастичности r_k , а достаточно лишь ограниченности r_k в среднем. Из теорем 4.4, 4.5 следует, что алгоритм (4.44), (4.47) обеспечит достижение при достаточно больших k ЦУ

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|y_i^* - F_i^T \theta_i\|^2 \leq \Delta^2 \quad (4.51)$$

при $\Delta^2 > \Delta_\varphi^2 = M \|\varphi_k\|^2$, $0 < \gamma < 2(1 - \Delta_\varphi/\Delta)$. ЦУ (4.51) с практической точки зрения мало отличается от (4.4).

Заметим, что если имеется дополнительная информация о стохастичности r_k или о том, что левая часть (4.51) приближается при больших k к некоторой квадратичной функции $\bar{Q}(\theta)$, то можно применить МНК (4.42). Несмотря на то, что асимптотические оценки порядка скорости сходимости МНК и метода стохастической аппроксимации совпадают [141], практически для квадратичной функции $\bar{Q}(\theta)$ МНК сходится быстрее [157].

§ 4.7. Адаптивное управление статическими объектами: задача оптимизации

Синтез адаптивных систем оптимизации на основе идентификационного подхода осложняется тем, что алгоритм адаптации должен работать в замкнутом контуре управления. В этих условиях алгоритм адаптации, как правило, не обладает идентификационными свойствами: не вырабатывает достаточно точных оценок параметров ОУ (недостаточно разнообразие входных переменных алгоритма). При введении в алгоритм адаптации зоны нечувствительности, характерной для метода рекуррентных целевых неравенств (РЦН), осуществляется частичное размыкание контура, что в задаче регулирования, как показано в § 4.6, обеспечивает достижение цели за счет достаточно точного оценивания выходов ОУ. Однако в задаче оптимизации оценивание выходов не связано непосредственно с достижением ЦУ и для синтеза АдСУ приходится привлекать дополнительные идеи.

Приводимые ниже алгоритмы адаптивной оптимизации основаны на том, что для достижения оптимизационной ЦУ достаточно уметь оценивать частные производные от целевой функции по управляющим воздействиям. В свою очередь, требуемая точность оценивания производных достигается специальным выбором алгоритмов управления и адаптации: для синтеза алгоритма адаптации производится переход к модели ОУ "в приращениях", а основные шаги коррекции управляющих воздействий производятся в направлении координатных осей.

Перейдем к описанию алгоритма адаптивного управления и условий его применимости. В соответствии с § 4.2 алгоритм управления имеет двухуровневую структуру. Алгоритм первого уровня (алгоритм основного контура) реализует один из трех возможных типов управляющих воздействий:

1. Рабочие шаги:

$$u_k = \begin{cases} \Pr_U \{ u_{k-1} - \alpha z_k e_{j_k} \} & \text{при } |z_k| > \kappa, \\ u_{k-1} & \text{при } |z_k| \leq \kappa, \end{cases} \quad (4.52)$$

где

$$z_k = \frac{\partial f(u_{k-1}, r_k, \theta_k)}{\partial u^{(j_k)}};$$

$$j_k = k - m \cdot \text{entier}\left(\frac{k}{m}\right) + 1;$$

$\text{entier}(\cdot)$ – целая часть числа; m – размерность пространства управлений; α, κ – параметры алгоритма; θ_k – вектор текущих оценок неизвестных параметров. Модель ОУ считается заданной в виде

$$y_k = f(u_k, r_k, \xi) + \varphi_k. \quad (4.53)$$

2. Пробные шаги:

$$u_{k+l} = \begin{cases} \Pr_U \{ u_k - (-1)^l \beta e_s \} & \text{при } 1 \leq l \leq 2m, \\ \underset{1 \leq r \leq 2m+1}{\operatorname{argmin}} y_{k+r} & \text{при } l = 2m+1, \end{cases} \quad (4.54)$$

где $s = \text{entier}\left(\frac{l+1}{2}\right)$, e_s — s -й орт пространства R^m , β — величина пробного шага. Пробные шаги выполняются сериями по $2m+1$ шагов.

3. Полные шаги:

$$u_k = \underset{u \in U}{\operatorname{argmin}} f(u, r_k, \theta_k). \quad (4.55)$$

Поиск u_k осуществляется каким-либо из методов оптимизации (удобно, как и в случаях рабочих и пробных шагов, использовать метод проекции градиента [141]). Точность решения задачи оценивается по величине производных от статической характеристики по любому допустимому направлению*), т. е. используется следующее условие окончания шага:

$$|p^T \nabla_u f(u_k, r_k, \theta_k)| < \delta \|p\|, \quad (4.56)$$

где p — произвольное допустимое направление, $\delta < \kappa$.

При построении алгоритма адаптации вспомогательную цель запишем в виде

$$|\delta_k(\theta_k)| < \Delta, \quad (4.57)$$

где

$$\delta_k(\theta) = y_k - y_{k-1} - f(u_k, r_k, \theta) + f(u_{k-1}, r_{k-1}, \theta).$$

Величина Δ для разрешимости неравенства (4.57) должна удовлетворять неравенству

$$\Delta > 2\Delta_\varphi. \quad (4.58)$$

Для достижения цели адаптации (4.57) будем использовать алгоритмы (4.13), (4.15), принимающие вид

$$\theta_{k+1} = \begin{cases} \Pr_{\Xi} \left\{ \theta_k - \gamma \frac{\delta_k(\theta_k)}{\|\nabla_\theta \delta_k(\theta_k)\|^2} \nabla_\theta \delta_k(\theta_k) \right\} & \text{при } |\delta_k(\theta_k)| > \Delta, \\ \theta_k & \text{при } |\delta_k(\theta_k)| \leq \Delta. \end{cases} \quad (4.59)$$

Схему работы алгоритма (4.52)–(4.59) можно описать следующим образом (рис. 4.4). В момент времени t_k проверяется условие $r_k = r_{k-1}$ (точнее, $|r_k - r_{k-1}| < \delta_r$) и при его невыполнении делается полный шаг (4.55). В противном случае проверяется условие

$$\theta_{k+1-i} = \theta_k, \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad (4.60)$$

и, если оно выполняется, делается полный шаг (4.55). При невыполнении (4.60) проверяется условие

$$|z_{k-i}| < \kappa, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.61)$$

и при его выполнении начинается или продолжается серия пробных шагов (4.54). В остальных случаях выполняются рабочие шаги (4.52). После

* Допустимым направлением в точке $u \in U$ относительно выпуклого множества U называется [141] вектор вида $u' - u$, где $u' \in U$.

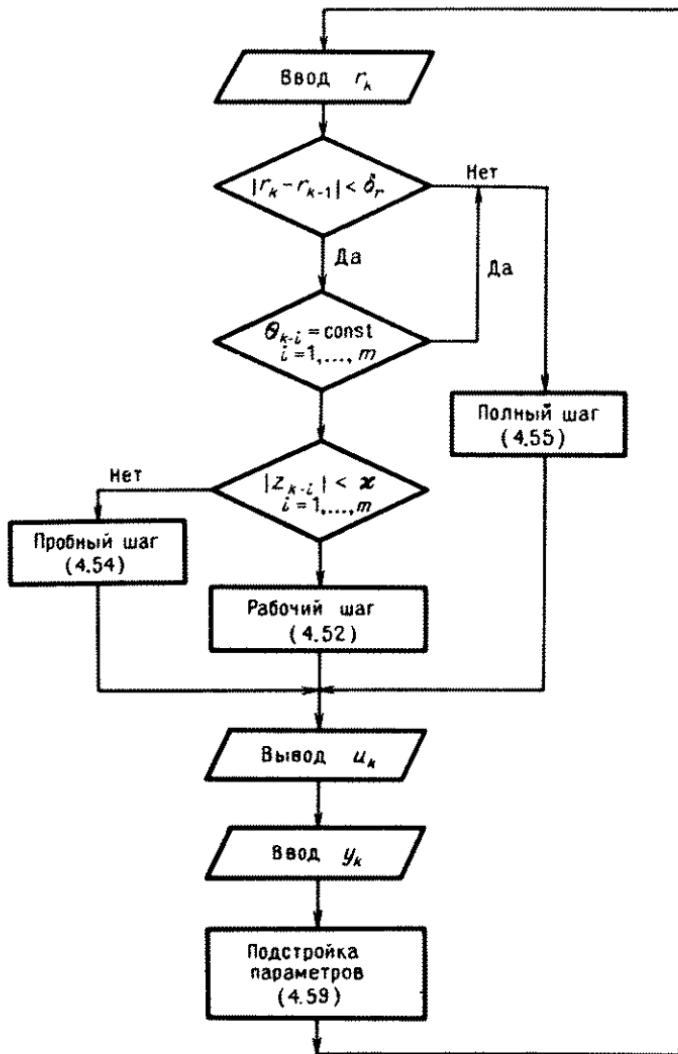


Рис. 4.4. Блок-схема алгоритма аддативной оптимизации статического объекта

выдачи управлений и измерения выходных переменных ОУ осуществляется коррекция оценок параметров объекта по алгоритму (4.59). Начальные значения векторов управлений и оценок параметров $u_0 \in U$, $\theta_0 \in \Xi$ выбираются на основе априорной информации.

Поясним смысл описанного алгоритма управления. В начальные моменты времени, когда модель объекта известна недостаточно точно, применяются "осторожные" покоординатные шаги (4.52). Выбор покоординатных направлений спуска преследует две основные цели. Во-первых, обеспечивается раздельная оценка каждой из составляющих вектора $\nabla_u f(u_{k-1}, r_k, \theta_k)$ градиента. Во-вторых, поникаются требования к

точности оценивания градиента: знания знака каждой частной производной достаточно для движения в сторону экстремума. Необходимость введения зоны нечувствительности обусловлена неточностью знания модели.

Необходимость введения пробных шагов (4.54) определяется следующим:

1. При использовании только рабочих шагов (4.52) возможно "заедание" в точке достаточно удаленной от точки экстремума, если оценки производных $|\partial f(u_{k-1}, r_k, \theta_k)/\partial u^{(j_k)}|$, в силу погрешностей в контуре адаптации, станут меньше κ (рис. 4.5). Пробные шаги позволяют сдвинуться с "мертвой точки" за счет коррекции оценок.

2. Аналогично, во время пробных шагов алгоритм адаптации "чувствует" изменения вектора ξ .

Полные шаги (4.55) дают решение задачи оптимизации по модели "до конца". На объект при этом выдается только управление, соответствующее оптимальному, рассчитанному по модели. Полные шаги целесообразно применять в тех случаях, когда изменяется вектор r_k (для того, чтобы максимально отработать возникающее в этот момент времени возмущение). Кроме того, применение полных шагов в те моменты времени, когда коэффициенты модели определены достаточно точно (в смысле цели адаптации), позволяет увеличить быстродействие алгоритма. Однако параметр алгоритма n_θ , определяющий время между полными шагами, должен быть достаточно большим, чтобы исключить эффект "заедания" (см. рис. 4.5). Из формулы конечных приращений, полагая $r_k = r_{k-1}$, имеем

$$y_k - y_{k-1} = \nabla_u f(\bar{u}_k, r_k, \xi)^T (u_k - u_{k-1}) + \varphi_k - \varphi_{k-1},$$

где $\bar{u}_k \in [u_{k-1}, u_k]$, т.е. величина $y_k - y_{k-1}$ определяется проекцией вектора градиента на направление последнего изменения управления.

Таким образом, использование цели адаптации (4.57) в сочетании с покоординатной коррекцией управлений позволяет, при достаточно редких изменениях r_k , оценивать каждую из составляющих вектора градиента. Решающее значение для сходимости алгоритма адаптивной оптимизации имеет применение для настройки параметров модели алгоритма метода РЧН (4.59). Наличие в этом алгоритме зоны нечувствительности позволяет прекращать настройку в те моменты времени, когда ее ход могут нарушить помехи, частично размыкая таким образом кон-

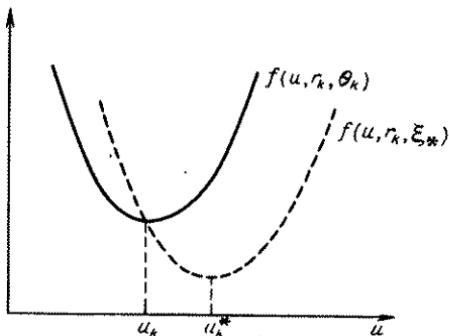


Рис. 4.5. Пример "заедания" алгоритма адаптивной оптимизации

тур управления. Этот прием в сочетании с использованием пробных шагов позволяет отказаться от более сложной цели — идентификации параметров ОУ, достижение которой требует более существенного размыкания контура управления и, следовательно, снижения быстродействия алгоритма оптимизации.

Условия применимости описанного алгоритма сформулируем для идеализированного случая, когда r_k за время адаптации не меняется, т.е. $r_k \equiv r$, и полные шаги (4.55), (4.56) не применяются.

Теорема 4.6. Пусть выполнены следующие условия:

1. Функция $|\delta_k(\theta)|^2$ выпукла по θ для всех $u_{k-1}, u_k \in U, r_{k-1} = r_k \in R, \theta \in \Xi$.

2. Вектор-функция $\nabla \delta_k(\theta)$ ограничена, т.е. существует число $q > 0$ такое, что для всех $u_{k-1}, u_k \in U, r_{k-1} = r_k \in R, \theta \in \Xi$ верно $\|\nabla_\theta \delta_k(\theta)\| \leq q$.

3. Функция $f(u, r, \theta)$ дважды дифференцируема по u , причем для всех $u \in U, r \in R, \theta \in \Xi$ выполняется неравенство

$$\rho' I \leq \nabla_u^2 f(u, r, \theta) \leq \rho'' I, \quad 0 < \rho' \leq \rho'' < \infty. \quad (4.62)$$

Тогда алгоритм управления (4.52)–(4.54), (4.57)–(4.59) при

$$0 < \gamma < 2 \left(1 - \frac{2\Delta\varphi}{\Delta}\right), \quad \kappa^2 > 8\Delta\rho'',$$

$$\alpha = \frac{1}{2\rho''}, \quad \beta = 2\sqrt{\Delta/\rho''}$$

обеспечивает достижение ЦУ (4.7) для

$$\Delta_P = \frac{m(\kappa + 2\sqrt{\Delta\rho''})^2}{2\rho'}.$$

В случае стохастических возмущений φ_k переход к аккумулирующим целевым неравенствам типа (4.51) нарушает (в отличие от задачи слежения) связь между исходной и вспомогательной целями. Поэтому степень обоснованности применения алгоритма (4.44) снижается и остается применять для оптимизации алгоритмы стохастической аппроксимации и МНК, накладывая дополнительные (также, впрочем, малообоснованные) предположения о случайности и независимости выходов r_k и о невырожденности ковариационной матрицы (4.50).

Перейдем к рассмотрению более сложных задач, когда множества допустимых управлений U_k не заданы заранее, а могут меняться в зависимости от условий работы системы. Будем считать, что U_k задается ограничениями в виде неравенств, причем функции, задающие ограничения, известны с точностью до конечного числа параметров, а их значения измеряются с некоторой (ограниченной) погрешностью. Задачи такого типа встречаются, например, при оптимизации режимов технологических процессов, когда требуется обеспечить максимальный выход продукта при заданных ограничениях на его качество в условиях неполноты информации о математической модели процесса.

Не умаляя общности, будем считать, что модель ОУ имеет вид

$$y_{jk} = f_j(u_k, r_k, \xi_j) + \varphi_{jk}, \quad (4.63)$$

где $|\varphi_{jk}| \leq \Delta_{\varphi_j}$, причем выход y_0 нужно минимизировать, а остальные выходы не должны превосходить заданных значений. На языке целевых неравенств задача может быть formalизована как обеспечение ЦУ

$$f_0(u_k, r_k, \xi_0) \leq f_k^* + \Delta_0 \quad (4.64)$$

при ограничениях

$$f_j(u_k, r_k, \theta_0) \leq \Delta_j, \quad j = 1, \dots, l, \quad (4.65)$$

$$u_k \in U, \quad (4.66)$$

где $\Delta_j > 0, j = 0, 1, \dots, l$;

$$f_k^* = \inf_u \{f_0(u, r_k, \xi_0) : u \in U_k, f_j(u, r_k, \xi_j) \leq 0, j = 1, \dots, l\}. \quad (4.67)$$

Опишем алгоритм адаптивного управления для поставленной задачи [105], основанный на использовании модифицированной функции Лагранжа и градиентного алгоритма Эрроу – Гурвица. В данном случае модифицированная функция Лагранжа имеет вид

$$M_k(u, \lambda, \mu) = f_0(u, r_k, \xi_0) + \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^m \{[\lambda_j + \mu f_j(u, r_k, \xi_j)]_+^2 - \lambda_j^2\}, \quad (4.68)$$

где $\lambda_j > 0$ – двойственные переменные, $\mu > 0$ – параметр, $[f]_+$ – проекция f на множество $\{f \geq 0\}$. В основном контуре системы вычисляются u_k по формулам (4.52)–(4.56), в которых функция $f(\cdot)$ заменена на $M_k(u, \lambda_k, \mu)$, а также изменяется вектор λ_k по правилу

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} [\lambda_k + z_k^\lambda]_+, & \text{при } z_k^\lambda > \kappa_\lambda, \\ \lambda_k & \text{при } z_k^\lambda \leq \kappa_\lambda, \end{cases} \quad (4.69)$$

где $\kappa_\lambda > 0$ – параметр алгоритма. При этом один шаг по λ делается после серии из m шагов по $u^{(j)}$. В контуре адаптаций используются работающие независимо алгоритмы вида (4.13), (4.15) для оценивания каждого из векторов ξ_0, \dots, ξ_l , причем в качестве целевых берутся как неравенства (4.11) при $Q_k(\theta)$ вида (4.10), так и разностные неравенства (4.57). Схема взаимодействия контуров аналогична рис. 4.4, а условия применимости алгоритма формулируются аналогично теореме 4.6 (см. [105]).

§ 4.8. Адаптивное управление статическими объектами с неявно заданной характеристикой

В настоящем параграфе рассматриваются задачи управления статическими объектами, математическая модель которых задается неявной зависимостью вход – выход, т.е. в виде, не разрешенном относительно выходных переменных

$$\Phi(y_k, u_k, r_k, \xi) + \varphi_k = 0, \quad (4.70)$$

где $\Phi(\cdot)$ – известная l -мерная вектор-функция; остальные обозначения те же, что и в (4.1). Может показаться, что уравнение (4.70) не заслуживает отдельного рассмотрения: ведь обычно его можно разрешить относительно u_k и, таким образом, свести (4.70) к (4.1). Однако уравнение (4.70) часто оказывается более просто (например, линейно) зависящим от неизвестных параметров ξ . При этом упрощается как структура алгоритмов управления, так и условия их применимости.

Более того, даже если исходная модель ОУ задана в форме (4.1), может оказаться выгодным свести ее к форме (4.70), выполнив какое-либо преобразование переменных. Например, пусть ОУ описывается уравнением

$$y = c_1 e^{c_2 u}, \quad (4.71)$$

где $u, y \in R^1$, параметры $c_1, c_2 \in R^1$ неизвестны. Правая часть (4.71) зависит от c_1, c_2 сложным образом, что затрудняет их оценивание. Ситуация упростится, если, прологарифмировав (4.71), свести его к уравнению

$$\ln y - \xi_1 - \xi_2 u = 0, \quad (4.72)$$

линейно зависящему от новых неизвестных параметров $\xi_1 = \ln c_1, \xi_2 = c_2$.

По существу, описание в форме (4.70) возникает каждый раз, когда переменные, относительно которых записана исходная ЦУ, не совпадают с переменными, которые фигурируют в цели адаптации. Ниже будут рассмотрены задачи, в которых переход от одних переменных к другим возможен и взаимно однозначен, т.е. (4.70) приводимо к явному виду (4.1). Это требование в несколько усиленной форме выражено следующим условием.

Условие А (условие разрешимости). Для любых $u \in U, r \in R, \xi \in \Xi$ при $\|\varphi\| \leq \Delta_\varphi$ существует единственное решение $y = x(u, r, \varphi, \xi)$ уравнения $\Phi(y, u, r, \xi) + \varphi = 0$, причем функция $x(\cdot)$ непрерывно дифференцируема и $\|\partial x / \partial \varphi\| \leq L$ при $u \in U, r \in R, \xi \in \Xi, \|\varphi\| \leq \Delta_\varphi$.

Например, для ОУ (4.72) условие А выполнено, если множества допустимых значений переменных u, ξ_1, ξ_2 ограничены. Это следует из того, что если выразить y из уравнения

$$\ln y - \xi_1 - \xi_2 u + \varphi = 0,$$

то получим

$$y = e^{\xi_1} e^{-\varphi} e^{\xi_2 u}, \text{ откуда } |\partial y / \partial \varphi| = e^{\xi_1} + \xi_2 u e^\varphi.$$

Заметим, что если условие А выполнено, то на основании теоремы о производной неявной функции в качестве L можно взять

$$L = \sup \left\{ \left\| \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]^{-1} \right\| : \|\Phi(y, u, r, \xi)\| \leq \Delta_\varphi \right\}. \quad (4.73)$$

Прежде, чем переходить к решению задачи, отметим, что для ОУ с неявно заданной характеристикой (4.70) стирается грань между прямым и идентификационным подходами к синтезу АдСУ. Действительно, уравнение (4.70), с одной стороны, можно рассматривать как соотношение,

позволяющее по заданному u_k найти y_k . При этом (4.70) – уравнение ОУ, а ξ – вектор параметров ОУ. С другой стороны, можно считать, что с помощью (4.70) по заданному y_k вычисляется u_k , подача которого на ОУ приведет к значению выхода y_k . Тогда (4.70) – это описание регулятора, а ξ – вектор параметров регулятора. Следовательно, подход к решению задачи, описанный в § 4.2 и состоящий в замене вектора ξ в (4.70) на вектор оценок θ_k , может быть с равным основанием назван как прямым, так и идентификационным. Этот подход и будет рассмотрен ниже на примере задачи слежения (задачи оптимизации рассматриваются аналогично).

Уравнение (4.47), определяющее алгоритм основного контура, в данном случае заменяется на

$$\Phi(y_k^*, u_k, r_k, \theta_k) = 0, \quad u_k \in U. \quad (4.74)$$

Алгоритм адаптации (4.13), (4.15) записывается для целевого неравенства (4.11), где

$$Q_k(\theta) = \|\Phi(y_k, u_k, r_k, \theta)\|. \quad (4.75)$$

Условия применимости АдСУ аналогичны теореме 4.5 и имеют следующий вид.

Теорема 4.7 [106]. Пусть выполнено условие A и следующие условия.

1. Функция (4.75) выпукла по θ , а функция $\|\nabla Q_k(\theta)\|$ ограничена для любых $u \in U, r_k \in R, \theta \in \Xi$ и любых y_k , определяемых из (4.70) при $\|\varphi_k\| \leq \Delta_\varphi$.

2. Уравнение $\Phi(y_k^*, u_k, r_k, \theta) = 0$ имеет решение $u_k \in U$ для любых $\theta \in \Xi, r_k \in R$ и любых y_k .

Тогда в системе (4.70), (4.74), (4.75), (4.13), (4.15) достигается цель (4.4), если $\epsilon = \Delta/L, \Delta_\varphi < \Delta, 0 < \gamma < 2(1 - \Delta_\varphi/\Delta)$.

Аналогичное утверждение верно, если потребовать выполнения (4.25) и заменить алгоритм (4.13) на (4.20); при этом ЦУ (4.4) будет выполняться для

$$\Delta = L \sqrt{2\epsilon^2 + q} \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k, \quad \Delta_\varphi < \Delta.$$

Отметим, что число уравнений в системе (4.74) равно l , а число неизвестных – m . Поэтому условие 2 теоремы (условие разрешимости задачи слежения), вообще говоря, выполнено, только если размерность множества U не меньше чем l .

Полученный алгоритм аддитивного управления и условия его применимости распространяются на ОУ с измерением промежуточных выходов, имеющие математическую модель

$$\Phi(y_k, w_k, u_k, r_k, \xi) = 0, \quad (4.76)$$

где $w_k \in R^{l_1}$ – вектор промежуточных измеряемых выходов, $\Phi(\cdot) \in R^{l_1 \times l_1}$. При этом алгоритм адаптации можно брать в виде (4.13) или (4.20) при $Q_k(\theta) = \|\Phi(y_k, w_k, u_k, r_k, \theta)\|^2$, а для нахождения управления u_k на k -м шаге решать систему $m + l_1$ уравнений

$$\Phi(y_k^*, \hat{w}_k, u_k, r_k, \theta_k) = 0, \quad u_k \in U, \quad (4.77)$$

где $\hat{w}_k \in R^{l_1}$ – вектор прогнозируемых по текущей модели значений выходов. Как и для ОУ (4.70), система (4.77) однозначно разрешима, вообще говоря, только при $m = l$.

Условия применимости алгоритма вполне аналогичны условиям теоремы 4.7. При этом условие А для ОУ вида (4.76) означает существование решений

$$y_k = \chi_1(u_k, r_k, \varphi_k, \xi), \quad w_k = \chi_2(u_k, r_k, \varphi_k, \xi)$$

уравнений (4.76) и выполнение неравенства $\|\partial \chi_1 / \partial \varphi\| \leq L$. Для нахождения L можно использовать (4.73).

§ 4.9. Адаптивное управление конечными объектами (адаптивный выбор вариантов)

Множество U допустимых управлений для сложного объекта не обязательно представляет собой континуум: оно может быть и конечным. Например, объект может функционировать лишь в конечном числе возможных режимов, или U подвергается дискретизации в связи с необходимостью цифровой реализации, и т.д. Объекты с конечным множеством $U = \{v_1, \dots, v_m\}$ будем называть *конечными*.

Пусть выход ОУ – скалярная величина, имеющая смысл показателя качества управления, и при выборе на k -м шаге $u_k = v_j$ измеряется значение выхода $y_k = q_j + \varphi_k$, где q_j – величина "потерь" при выборе управления v_j , φ_k – неизвестное возмущение или помеха измерений. В соответствии с общей постановкой главы I и § 4.1, возможно задание цели управления

$$y_k < \Delta \text{ при } k > k_*, \quad (4.78)$$

(в случае детерминированных φ_k) или

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i < \Delta \text{ при } k > k_*, \quad (4.79)$$

$$My_k < \Delta \text{ при } k > k_*, \quad (4.80)$$

(в случае стохастических φ_k). Если при этом задать $\Delta = q_* + \Delta_q$, где $q_* = \min q_i$, то можно трактовать цели (4.78)–(4.80) как минимизацию с заданной точностью потерь, измеряемых на k -м шаге с погрешностью φ_k . Таким образом, задача состоит в оптимальном выборе из конечного числа возможных вариантов в условиях неопределенности.

Поставленная задача в стохастическом случае имеет богатую историю, восходящую к работам Г. Роббинса по теории статистических решений и М.Л. Цетлина по исследованию поведения автоматов в случайных средах. В отличие от задач, рассмотренных в этой главе ранее, на пространствах входов и выходов ОУ не задано никаких алгебраических или топологических структур, вследствие чего не удается наложить на целевые функции (штрафы) упрощающие предположения (выпуклость, квадратичность, унимодальность и т.п.). Поэтому известные алгоритмы решения поставленной задачи относятся к классу переборных. Однако в детерминированном и стохастическом случаях перебор проводится по-разному.

При детерминированных возмущениях вся доступная информация об ОУ получается после однократного перебора всех возможных действий v_j , $j = 1, \dots, m$. После этого, т.е. при $k \geq m$, следует выбирать $u_k = v_{j_*}$, где $j_* = \underset{1 \leq k \leq m}{\operatorname{argmin}} q_k$. При этом задача оптимизации будет решена с точностью $\Delta_q = 2\Delta_\varphi$ ("по функционалу").

Если же помехи φ_k случайны, то однократного перебора может оказаться недостаточно; повторение испытаний, накопление и усреднение результатов позволяют повысить точность оптимизации, т.е. достичь более сложных целей. При этом появляется возможность сделать многократный перебор направленным: чаще выбирать те действия, которые дают меньшие потери. Тем самым достигается сокращение общего числа испытаний, требуемого для достижения заданной точности. Опишем кратко два подхода к синтезу АдСУ конечным стохастическим объектом [122, 165].

Первый подход опишем в случае бинарных потерь, когда выход ОУ принимает только два значения, например, $y_k = 0$ (успех) и $y_k = 1$ (неудача). Если $M\varphi_k = 0$, то тогда $q_j = M\{y_k: u_k = v_j\}$ — вероятность неудачи при j -м действии. Алгоритм управления представляется конечным детерминированным автоматом, на вход которого подается y_k , а состояния разбиты на m подмножеств (ветвей) по n состояний, причем в состояниях из j -й ветви автомат выбирает j -е действие, подсчитав (путем сдвига вдоль ветви) число неудач, идущих подряд.

Функция переходов автомата устроена так, что переход в состояния другой ветви происходит после n неудач подряд, по принципу "от добра добра не ищут". (Могут быть и другие правила, например, если число успехов, идущих подряд, меньше числа идущих подряд неудач.) Нетрудно понять, что такой автомат будет выбирать чаще то действие, при котором больше вероятность успеха. Увеличивая "глубину памяти" (т.е. число n), можно добиться сколь угодно малой асимптотической (при $k \rightarrow \infty$) ошибки

$$e_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i - q_*,$$

т.е. обеспечить субоптимальность системы.

Данный подход распространяется и на случай небинарных потерь, если известен отрезок $[a, b]$, содержащий все возможные значения выходов y_k . Действительно, такие потери можно свести к бинарным, если ввести новый выход \tilde{y}_k , по правилу: $\tilde{y}_k = 1$ с вероятностью $(y_k - a)/(b - a)$ и $\tilde{y}_k = 0$ с вероятностью $(b - y_k)/(b - a)$.

Другой подход — использование рандомизированных алгоритмов, задаваемых стохастическими автоматами. Состоянием такого автомата является вероятностный вектор $P_k = \operatorname{col}(p_k^{(1)}, \dots, p_k^{(m)})$, где $p_k^{(j)} \geq 0$,

$\sum_{j=1}^m p_k^{(j)} = 1$, причем $p_k^{(j)}$ имеет смысл вероятности выбора j -го действия на k -м шаге. В зависимости от наблюденной величины y_k вероятности $p_k^{(j)}$ пересчитываются так, чтобы увеличить вероятность действия, вызвавшего меньшие потери. На языке адаптивных систем механизм случайного

выбора действия соответствует регулятору, настраиваемые параметры которого задаются вектором p_k .

Алгоритм адаптации p_k может строиться из условия убывания в среднем некоторой функции, связанной с потерями. Опишем, следуя [122], один из таких алгоритмов, так называемый *проекционный алгоритм*, не требующий бинарности потерь. Правило пересчета p_k имеет вид

$$p_{k+1} = \text{Pr}_{\Xi_k} \left\{ p_k + \gamma_k \frac{y_k - \delta}{e(u_k)^T p_k} e(u_k) \right\}, \quad (4.81)$$

где

$$\Xi_k = S_{\epsilon_k}, \quad S_{\epsilon} = \{ p \in R^m : \sum_{j=1}^m p^{(j)} = 1, p^{(j)} \geq \epsilon \}$$

— "суженный" симплекс, $e(u_k)$ — m -мерный вектор, у которого j -я компонента равна 1, если $u_k = v_j$, и нулю — в противном случае, δ , $\{\epsilon_k\}$, $\{\gamma_k\}$ — параметры алгоритма. Пусть $M\varphi_k = 0$, т.е. $q_j = M u_k$. Усредненное выражение в фигурных скобках в (4.81) при фиксированном p_k , видим, что среднее приращение Δp_k пропорционально градиенту функции средних потерь

$$Q(p) = \sum_{j=1}^m q_j p^{(j)}, \quad (4.82)$$

причем $M u_k = M Q(p_k)$.

Сформулируем утверждение о сходимости и скорости сходимости алгоритма (4.81).

Теорема 4.8. [122]. Пусть помехи φ_k независимы,

$$M\{\varphi_k | u_k = v_j\} = 0, \quad M\{\varphi_k^2 | u_k = v_j\} \leq \sigma_j^2 < \infty$$

и $\min q_j$ достигается при единственном $j = j_*$. Пусть параметры алгоритма (4.81) выбраны в виде

$$\gamma_k = \frac{\gamma}{(k+1)^\kappa}, \quad \epsilon_k = \frac{\epsilon}{(k+1)^\nu}, \quad (4.83)$$

где $0 < \epsilon < 1/m$, $0 < \nu < 2\kappa - 1$, $\kappa \leq 1$.

Тогда для любого $p_1 \in S_{\epsilon_1}$ и любого $\Delta > 0$ с вероятностью 1 выполняется ЦУ (4.78), (4.80) и соотношения

$$p_k \xrightarrow{\text{п.н.}} p_*, \quad O(p_k) \xrightarrow{\text{п.н.}} q_*(p_* = e(v_{j_*})).$$

Кроме того, для некоторых $d > 0$, $0 < \theta \leq 2/3$ справедливо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^\theta M \|p_k - p_*\|^2 \leq d,$$

причем $\theta = 2/3$ при $\kappa = 1$, $\nu = 1/3$.

Учитывая неравенства

$$(Q(p) - q_*)^2 \leq \|p - p_*\|^2 \sum_{j \neq j_*} (q_j - q_*)^2, \quad (4.84)$$

из теоремы можно сделать вывод, что алгоритм (4.81) обеспечивает ско-

рость достижения ЦУ (4.80) порядка $1/\sqrt{k}$. Достижение ЦУ имеет место и при неединственности $\min_j q_j$.

Как и для других рекуррентных алгоритмов, стремление обеспечить сходимость (4.81) в точку экстремума приводит к замедлению скорости сходимости алгоритма. Если брать в (4.81) постоянные величины шагов, то можно получить экспоненциальные оценки скорости сходимости, но уже не в "точку", а в "область".

Теорема 4.9. Пусть выполнены условия теоремы 4.8 с заменой (4.83) на $\gamma_k \equiv \gamma$, $\epsilon_k \equiv \epsilon$, причем величины $\epsilon, \gamma/\epsilon$ достаточно малы.

Тогда алгоритм (4.81) обеспечивает достижение ЦУ (4.80) при

$$\Delta_q = \delta'' \sqrt{m} (m\epsilon + \psi_* \gamma / (4\delta' \epsilon)) + o(\epsilon + \gamma/\epsilon)$$

и выполнение неравенства

$$My_k - q_* \leq \Delta_q + c(1 - \delta' \gamma/2)^k, \quad (4.85)$$

где

$$\delta'' = \max_j (q_j - q_*), \quad \delta' = \min_{j \neq j_*} (q_j - q_*),$$

$$\psi_* = q_*^2 + \sigma_{j_*}^2, \quad c = \|p_0 - p_\epsilon\| \delta'' \sqrt{m},$$

$$p_\epsilon = \operatorname{argmin}_{p \in S_\epsilon} O(p).$$

$o(\epsilon + \gamma/\epsilon)$ — величина более высокого порядка малости, чем $\epsilon + \gamma/\epsilon$.

Другие алгоритмы адаптивного выбора вариантов (в частности, для задач с ограничениями), а также алгоритмы адаптивного управления марковскими цепями (т.е. конечными динамическими объектами) рассмотрены в [122, 165].

§ 4.10. Адаптивное управление линейными динамическими объектами

Как уже было сказано в начале главы, при изложении методов дискретного адаптивного управления динамическими объектами мы ограничимся классом линейных объектов, мотивируя это тем, что существенные изменения режима работы системы, требующие учета нелинейности ОУ, происходят сравнительно редко и позволяют при управлении ими ограничиться статической моделью ОУ.

Учет инерционности ОУ существенно осложняет синтез АдСУ; основные изменения касаются структуры основного контура системы. Исходя из структуры основного контура и вида ЦУ, целесообразно выделить два класса задач (табл. 4.2). Первый класс — задачи управления в переходных, динамических режимах (задачи слежения), в которых ЦУ связана с точной отработкой изменяющегося задающего воздействия. В таких задачах возмущение воздействия меньше влияют на систему, чем задающие (другими словами, велико отношение "сигнал/шум"), а ЦУ удобнее всего задавать при помощи эталонной модели — вспомогательной системы, определяющей желаемые переходные процессы в замкнутой системе. Второй класс — задачи управления в установившихся режимах (задачи регули-

Таблица 4.2

Характеристики задач дискретного адаптивного управления

Характеристика	Тип	
	Задача слежения	Задача регулирования
Характерные режимы	Переходные (динамические)	Установившиеся (стационарные)
Возмущения	Детерминированные	Стохастические
Отношение "сигнал/шум"	Велико	Мало
Методы синтеза основного контура	Методы эталонной модели	Методы оптимального управления
Подход к выбору структуры системы	Прямой или идентификационный	Идентификационный

рования), когда задающее воздействие постоянно и основная задача системы – подавлять действие возмущений (отношение "сигнал/шум" мало). В таких задачах естественно ставить ЦУ, обеспечивающие оптимальное подавление возмущений, и в основном контуре использовать оптимальные регуляторы.

Реальные различия между задачами регулирования и слежения во многом условны: как правило, в ходе функционирования ОУ встречаются и переходные, и установившиеся режимы. Тем не менее, эти различия обусловили наличие двух основных типов адаптивных систем, рассматриваемых ниже. Поскольку оба подхода достаточно полно освещены в литературе (см., например, [57, 157, 178, 134, 201]) и даже имеются работы по их сравнению [233, 243], ограничимся одним, достаточно типичным примером АдСУ каждого класса.

Начнем с описания ОУ, которое одинаково для обеих задач. Линейный дискретный динамический ОУ удобно описывать уравнениями "вход – выход", включающими непосредственно наблюдаемые выходы ОУ y_k, y_{k-1}, \dots и имеющими вид

$$A(q^{-1})y_{k+1} = B(q^{-1})u_k + C(q^{-1})\varphi_k, \quad (4.86)$$

где $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot)$ – многочлены, q^{-1} – оператор задержки на один шаг ($q^{-1}x_k = x_{k-1}$):

$$A(\lambda) = 1 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n, \quad B(\lambda) = b_p\lambda^p + \dots + b_m\lambda^m,$$

$$C(\lambda) = 1 + c_1\lambda + \dots + c_n\lambda^n.$$

Коэффициенты многочленов A, B, C считаем неизвестными: $\xi = \text{col}(a_1, \dots, a_n, b_p, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n)$, при этом $b_p \neq 0$ (т.е. величина запаздывания p – известна).

4.10.1. Задача слежения. В переходных (динамических) режимах возмущение обусловлено скорее неточностью модели ОУ, чем случайными внешними воздействиями. Поэтому будем считать возмущения детерминированными, а для синтеза алгоритма адаптации использовать метод РЦН. Для систем с эталонной моделью и ЦУ типа слежения, как

отмечалось в § 3.1, 4.8, прямой и идентификационный подход приводят к эквивалентным структурам.

Пусть r_k — задающее воздействие. Введем функцию невязки

$$\delta_k = G(q^{-1})y_{k+1} - D(q^{-1})r_k, \quad (4.87)$$

где $G(\cdot)$, $D(\cdot)$ — заданные многочлены. Если $\delta_k = 0$, то движение ОУ подчиняется уравнению эталонной модели

$$G(q^{-1})y_{k+1} = D(q^{-1})r_k. \quad (4.88)$$

Выберем линейный закон регулирования в основном контуре

$$u_k = \theta_k^T z_k, \quad (4.89)$$

где

$$z_k = \text{col}(y_k, \dots, y_{k-n+1}, u_{k-p}, \dots, u_{k-m}, D(q^{-1})r_k),$$

$$\theta_k = \text{col}(\theta_k^{(1)}, \dots, \theta_k^{(n+m-p+2)}).$$

При этом будет существовать $\theta_* \in \Xi$ такое, что при $\theta_k = \theta_*$ уравнения замкнутой системы (4.86), (4.89) совпадут с эталонной моделью с точностью до помехи $C(q^{-1})\varphi_k$.

Алгоритм адаптации возьмем в виде (4.18) ("полоска") для целевой функции $Q_k = |\delta_k|$ при δ_k вида (4.87):

$$\theta_k = \begin{cases} \theta_k - \gamma \frac{\delta_k}{\|z_k\|^2} z_k, & \text{при } |\delta_k| > \Delta, \\ \theta_k, & \text{при } |\delta_k| \leq \Delta. \end{cases} \quad (4.90)$$

Теорема 4.10. Пусть ОУ (4.86) минимально-фазовый, эталонное уравнение (4.88) асимптотически устойчиво (все нули многочленов $\lambda^{-p}B(\lambda)$, $G(\lambda)$ лежат в области $|\lambda| > 1$), возмущения в (4.86) ограничены: $|C(q^{-1})\varphi_k| \leq \Delta_\varphi$, где $\Delta_\varphi < \Delta$, а запаздывание в ОУ минимально ($p = 1$). Пусть в алгоритме (4.90) $\gamma = \bar{\gamma}(\text{sign } b_1)/\beta$, где $0 < \bar{\gamma} < 2(1 - \Delta_\varphi/\Delta)$, $\beta > |b_1|$ — известная верхняя граница коэффициента усиления ОУ.

Тогда для любых начальных условий в системе (4.86)–(4.90) все ее траектории ограничены и существует $k_* > 0$ такое, что достигается ЦУ

$$|\delta_k| < \Delta \text{ при } k > k_*. \quad (4.91)$$

Отметим, что если помехи φ_k стохастические, независимые и удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k c_j M \varphi_j^2 \leq \Delta_\varphi^2 < \Delta^2$$

то можно вместо алгоритма (4.90) в теореме 4.10 применить алгоритм (4.44), который обеспечит достижение ЦУ

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k |\delta_j|^2 < \Delta^2.$$

Это следует из теоремы 4.4.

4.10.2. Задача регулирования. Опишем, следуя [177], адаптивную систему оптимального регулирования для случая стохастических независимых возмущений φ_k со свойствами $M\varphi_k = 0$, $M\varphi_k^2 = \sigma_\varphi^2 > 0$, $\sup_k M|\varphi_k|^4 < \infty$. В качестве ЦУ выберем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |y_i|^2 \leq I_*, \quad (4.92)$$

где

$$I_* = \inf_{U_D} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |y_i|^2,$$

U_D – множество допустимых законов управления (неупреждающих стратегий), для которых верхний предел в левой части (4.92) конечен. Искомая адаптивная стратегия должна быть допустимой и, кроме того, не должна зависеть от вектора параметров ОУ: $\xi = \text{col}(a_1, \dots, b_p, \dots, c_1, \dots)$.

Как хорошо известно (см. [133, 135, 178]), если ОУ (4.86) минимально-фазовый (нули многочлена $\lambda^{-P}B(\lambda)$ лежат вне единичного круга), то существует оптимальный закон управления, являющийся линейным и описываемый уравнением

$$\alpha(q^{-1})u_k = \beta(q^{-1})y_k, \quad (4.93)$$

где коэффициенты многочленов $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ ищутся из многочленного уравнения (см. ниже). Принимая идентификационный подход к построению АдСУ, будем задавать закон управления на k -м шаге соотношением

$$B_k(q^{-1})F_k(q^{-1})u_k = q^{-P}G_k(q^{-1})y_k + e_k, \quad (4.94)$$

где многочлены $F_k(\lambda)$, $G_k(\lambda)$ ищутся из уравнений

$$A_k(\lambda)F_k(\lambda) - \lambda^P C_k(\lambda) = G(\lambda), \quad (4.95)$$

$A_k(\lambda)$, $B_k(\lambda)$, $C_k(\lambda)$ – текущие оценки многочленов в описании ОУ (4.86), а $\{e_k\}$ – "пробный" возмущающий процесс, независимый от процесса $\{\varphi_k\}$ и обладающий свойствами

$$M e_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} M|e_k|^4 = 0.$$

Для завершения синтеза АдСУ осталось указать алгоритм адаптации: построения вектора θ_k текущих оценок коэффициентов многочленов $A_k(\lambda)$, $B_k(\lambda)$, $C_k(\lambda)$. Искомый алгоритм должен обладать идентифицирующим свойством: обеспечивать сходимость $\theta_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$. Для построения алгоритма адаптации введем обозначения

$$w_{k-1} = \text{col}(-y_k, \dots, -y_{k-n}, u_k, \dots, u_{k-n}, \tilde{\varphi}_k, \dots, \tilde{\varphi}_{k-r})$$

и приведем уравнение ОУ (4.86) к форме "обновления" [176]:

$$y_{k+1} = w_k^T \xi + [C(q^{-1}) - 1] [\varphi_{k+1} - \tilde{\varphi}_{k+1}] + \varphi_{k+1}, \quad (4.96)$$

удобной для построения прогнозирующей модели ОУ. Случайные величины $\tilde{\varphi}_k$, интерпретируемые как оценки возмущений φ_k , будут построены далее. В качестве алгоритма адаптации выберем вариант проекционного

алгоритма стохастической аппроксимации:

$$\begin{aligned}\theta_{k+1} &= \Pr_{\Xi} \{\theta_k + \gamma_k w_k (y_{k+1} - w_k^T \theta_k)\}, \\ \gamma_{k+1}^{-1} &= \gamma_k^{-1} + \|w_k\|^2 + 1, \quad \gamma_0 = 1, \\ \tilde{w}_k &= w_k - w_{k-1}^T [\theta_{k-1} + \gamma_{k-1} w_{k-1} (y_k - w_{k-1}^T \theta_{k-1})].\end{aligned}\tag{4.97}$$

Теорема 4.11 [177]. Пусть выполнены следующие условия.

1. Для любого $\xi \in \Xi$ многочлены $A(\lambda), B(\lambda)$ не имеют общих корней при $|\lambda| < 1$.

2. $A(\lambda) \neq 0$ при $|\lambda| = 1$.

3. $C(\lambda) \neq 0$ при $|\lambda| \leq 1$ и $\operatorname{Re} C(\lambda) > 0$ при $|\lambda| = 1$.

4. $M |e_k|^2 > \kappa / \ln(k+1)$ ($\kappa > 0$).

Тогда для любого $\theta_0 \in \Xi$ алгоритм (4.97) – идентифицирующий

п.н. $(\theta_k \rightarrow \xi)$, а в системе (4.94)–(4.97) для любого $\xi \in \Xi$ достигается ЦУ (4.92).

"Пробный" сигнал e_k вводится, чтобы обеспечить "разнообразие" входов в алгоритм, требуемое для сходимости оценок к оцениваемым величинам.

Теорема 4.11 распространяется (см. [177]) на ОУ с векторным входом и выходом, а также на более сложные оптимизируемые функционалы, когда y_k^2 в (4.92) заменяется на квадратичную форму

$$g_0 y_k^2 + g_1 y_k u_k + g_2 u_k^2.$$

§ 4.11. Детерминированные или стохастические?

В отличие от непрерывного случая, где многие из существующих алгоритмов удается вложить в рамки одной сравнительно общей схемы (см. главы 2, 3), в дискретном адаптивном управлении конкурируют несколько различных методов и подходов. Выше были рассмотрены одношаговые и многошаговые, детерминированные и стохастические алгоритмы, применяющиеся для решения задач регулирования, слежения и оптимизации. Относительная простота этих алгоритмов позволяет рекомендовать их для управления сложными (многомерными, нелинейными) объектами в условиях неопределенности.

Однако разнообразие существующих подходов к адаптации приводит к тому, что для решения одной и той же задачи оказывается возможным применить несколько различных методов. Поэтому становится актуальной проблема сравнения методов и выбора из них наиболее подходящего. Примеры сравнительного анализа методов, приведенные в главах 2, 3, опирались на соображения общего характера. Для практики желательно иметь более обоснованные рекомендации. На протяжении данной главы сопоставлялись два подхода к построению алгоритма адаптации: детерминистский и стохастический. Попытаемся вывести из этих сопоставлений рекомендации по выбору алгоритмов.

Прежде всего – о правомерности таких рекомендаций. Она вытекает из того, что в каждой реальной задаче возмущение содержит и случайные, и неслучайные составляющие. Однако для того, чтобы выявить требуемые статистические свойства возмущения, не хватает как априорной, так и

текущей, т.е. измеряемой информации. Поэтому формализация задачи, в рамках того или иного подхода, искажает свойства реального процесса, и значит, оба подхода следует считать равноправными. Более того, различие между детерминированным и стохастическим случаями условно: реальные возмущения ограничены, даже если они случайны. И наоборот, детерминированные возмущения могут проявлять свойства случайных и обладать статистической устойчивостью.

Поэтому остается воспринимать детерминистский и стохастический подходы как вычислительные рецепты, аналогичные минимаксному и байесовскому подходам в теории статистических решений и обладающие аналогичными достоинствами и недостатками. С одной стороны, детерминистские алгоритмы ориентируются на "наихудший" случай, не используют дополнительную априорную информацию о возмущениях и, таким образом, остаются на уровне "гарантированного результата". С другой стороны, усреднение помех с учетом того, что их значения слабо связаны в разные моменты времени, приводит к повышению (в среднем) точности работы системы. Понятно, однако, что строгое соблюдение стохастической гипотезы невозможно (тем более, что в ней требуется еще стохастичность входов r_k). Таким образом, между двумя крайними вариантами простирается бездна промежуточных, которые на самом деле и реализуются. На какой из этих вариантов рассчитывать при выборе алгоритма?

По-видимому, требуемые при выборе исследования (как теоретические, так и экспериментальные) должны включать не только сравнительный анализ каждого алгоритма в рамках каждой из возможных гипотез, но и анализ нескольких промежуточных случаев, чтобы оценить степень влияния нарушений исходных гипотез на работу алгоритмов. Попытаемся провести такой анализ для алгоритмов метода рекуррентных целевых неравенств и метода стохастической аппроксимации, основываясь на оценках скорости сходимости алгоритмов, приведенных в настоящей главе.

Рассмотрим задачу аддитивной идентификации статического объекта в условиях помех. Пусть объект описан соотношением $y_k = \theta_*^T x_k + \varphi_k$, а настраиваемая модель — соотношением $\hat{y}_k = \theta_k^T x_k$, где $\theta_k \in R^N$ — текущая оценка вектора неизвестных параметров $\theta_* \in R^N$, $x_k \in R^N$ — вектор наблюдений (входов объекта). Будем считать, что возмущение φ_k является смесью детерминированной составляющей φ'_k , изменяющейся на $[-\Delta_\varphi, \Delta_\varphi]$, и случайной составляющей φ''_k , $M[\varphi'_k] = 0$, $M[\varphi''_k]^2 = \sigma^2$, распределенной на $[-\Delta_\varphi, \Delta_\varphi]$, т.е.

$$\varphi_k = \alpha \varphi'_k + (1 - \alpha) \varphi''_k, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (4.98)$$

Очевидно $|\varphi_k| \leq \Delta_\varphi$ для всех $\alpha \in [0, 1]$. Пусть входы x_k не зависят от φ_k и одинаково распределены.

Задаваясь ЦУ (4.11), (4.12) при целевой функции $Q_k(\theta) = \|(\theta_* - \theta)^T x_k + \varphi_k\|^2$, в соответствии с § 4.3, 4.4 приходим к алгоритмам вида

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \gamma_k \delta_k x_k, \quad (4.99)$$

где $\delta_k = y_k - \hat{y}_k$ — невязка, причем в стохастическом случае величина шага γ_k выбирается в виде $\gamma_k \equiv \gamma$ (алгоритм А1) или $\gamma_k = \gamma/(k+1)$ (ал-

горитм А2), а метод РЦН предписывает брать $\gamma_k = \gamma / \|x_k\|^2$ при $|\delta_k| > \Delta$, $\gamma_k = 0$ при $|\delta_k| \leq \Delta$ (алгоритм А3). Для формирования критериев сравнения введем показатели текущей погрешности

$$Q_k = \sup_{|\varphi'_s| \leq \Delta_\varphi} M Q_k(\theta_k), \quad (4.100)$$

$$\rho_k = \sup_{|\varphi'_s| \leq \Delta_\varphi} M \|\theta_k - \theta_*\|^2 \quad (4.101)$$

и будем сравнивать алгоритмы по величине погрешностей в установившемся режиме

$$\rho_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k, \quad Q_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_k \quad (4.102)$$

и в переходном режиме: $\rho_k - \rho_\infty$. Чтобы получить наиболее наглядные результаты, предположим, что векторы x_k равномерно распределены на сфере $S_k = \{x: \|x\|^2 = k\}$, так что

$$Mx_k = 0, \quad Mx_k x_k^T = \frac{\kappa}{N}, \quad M \frac{x_k x_k^T}{\|x_k\|^2} = \frac{1}{N}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что для алгоритмов А1, А2 справедливы соотношения

$$Q_k = \frac{\kappa}{N} \rho_k + d_\alpha, \quad (4.103)$$

$$\rho_{k+1} = \rho_k - \frac{\kappa}{N} \gamma_k (2 - \kappa \gamma_k) \rho_k + \frac{\kappa^2}{N} \gamma_k d_\alpha,$$

а для алгоритма А3 справедливы соотношения

$$Q_k = \max \left\{ \frac{\kappa}{N} \rho_k + d_\alpha, \Delta^2 \right\}, \quad (4.104)$$

$$\rho_{k+1} \leq \rho_k - \left[\frac{\gamma}{N} (2 - \gamma) \rho_k - \frac{\gamma^2 d_\alpha}{\kappa} \right] P_k,$$

где

$$d_\alpha = \sup_{|\varphi'_s| < \Delta_\varphi} M \varphi^2 = \alpha^2 \Delta_\varphi^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma^2,$$

$$P_k = M\{P\{|\delta_k| > \Delta\} | \theta_k\}.$$

Результаты расчета показателей сравнения по формулам (4.103), (4.104) приведены в таблице 4.3.

В результате сравнения можно сделать следующие выводы.

1. Все алгоритмы имеют предельную точность Q_∞ порядка d_α (А1 и А3 достигают ее при малых γ , причем А3 – при $\Delta < \Delta_\varphi$).

2. По скорости сходимости А2 проигрывает остальным алгоритмам. Например, при $N = 4$, $\kappa\gamma = 4$ алгоритм А2 обеспечивает уменьшение ρ_k в 100 раз за $k = 100$ шагов, в то время как применение А1 даже при меньших γ ($\kappa\gamma = 1$) дает уменьшение ρ_k в 100 раз за $k = 20$ шагов.

Таблица 4.3
Характеристики градиентных алгоритмов

Алгоритмы	Условия сходимости	Оценки точности		
		Установившийся режим		Переходный режим
		ρ_∞	Q_∞	$\rho_k - \rho_\infty$
A1 (с постоянным шагом, $\gamma_k \equiv \gamma$)	$0 < \gamma < \frac{2}{\kappa}$	$\frac{\kappa \gamma d_\alpha}{2 - \kappa \gamma}$	$\left[\frac{\kappa^2 \gamma}{N(2 - \kappa \gamma)} + 1 \right] d_\alpha$	$\frac{\kappa \gamma (2 - \kappa \gamma)}{N} k$
A2 (Роббинс – Монро, $\gamma_k = \gamma/(k+1)$)	$\gamma > \frac{N}{2\kappa}$	0	d_α	$\frac{\rho_0 \kappa^2 \gamma^2 d_\alpha}{(2\kappa \gamma - N)(k+1)}$
A3 (“плоская”) $\gamma_k =$ $= \begin{cases} \gamma \ x_k\ ^{-2}, \\ \delta_k > \Delta \\ 0, \delta_k \leq \Delta \end{cases}$	$0 < \gamma < 2$	$\frac{N \gamma d_\alpha}{\kappa(2 - \gamma)}$	$\max \left\{ \frac{2d_\alpha}{2 - \gamma}, \Delta^2 \right\}$	

3. Результаты сравнения слабо зависят от величины α , т.е. от соотношения между интенсивностями детерминированной и стохастической составляющих возмущения. Однако сама предельная точность зависит от α ; ее наименьшее значение

$$\min_{0 \leq \alpha \leq 1} d_\alpha = \frac{\sigma^2 \Delta^2 \varphi}{\sigma^2 + \Delta_\varphi^2}.$$

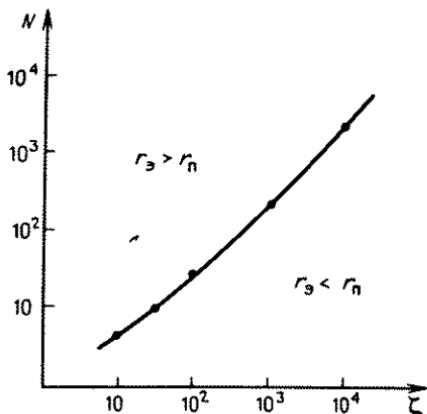
достигается при $\alpha = \sigma^2 / (\sigma^2 + \Delta_\varphi^2)$.

4. Результаты сравнения сильно зависят от задания настроечных параметров алгоритмов (γ , Δ и других). Неточная настройка параметров может сыграть большую роль, чем неверный выбор алгоритма.

5. Правильность настройки алгоритмов определяется выбранным критерием сравнения. Например, при небольшом числе шагов и невысокой требуемой точности следует оптимизировать переходный режим ($\gamma = \kappa^{-1}$ для A1, $\gamma = N\kappa^{-1}$ для A2), а при большом количестве наблюдений за процессом можно настраивать алгоритмы по оптимуму установившейся погрешности, т.е. брать γ в A1 и A3 достаточно малым. В общем случае необходима настройка по компромиссным критериям.

В проведенном сравнении не прослежено влияние ряда факторов, важных для практики: степени коррелированности компонент вектора входов (числа обусловленности матрицы $M x_k x_k^T$), степени зависимости между x_k и x_l при $k \neq l$ и т.д. К сожалению, учет дополнительных факторов и условий сделал бы результаты сравнения труднообозримыми.

Рис. 4.6. Области эффективности алгоритмов "полоска" и "эллипсоид"



Иногда повысить наглядность результатов сравнения можно, если перейти к анализу по косвенным критериям. В качестве примера приведем, следуя [163, 211], результаты сравнения конечно-сходящихся алгоритмов решения неравенств: алгоритма "полоска" (4.18), алгоритма эллипсоидов (4.46), и, для полноты, алгоритма полного перебора.

Рассмотрим систему целевых неравенств (4.16) без каких-либо предположений о статистических свойствах их параметров (наблюдений). Будем сравнивать алгоритмы решения неравенств по критерию минимума оценки числа исправлений, т.е. по критерию минимума наибольшего возможного числа нарушений неравенства в ходе работы алгоритма. Оценка числа исправлений для алгоритма "полоска" была приведена в теореме 4.1 и зависит от выбора множителя шага γ . Для оптимального выбора $\gamma = 1 - \epsilon_* / \epsilon$ оценка имеет вид

$$r_p \leq \xi^2, \quad (4.105)$$

где

$$\xi = \|\theta_0 - \theta_*\| \left[\frac{\epsilon}{\kappa} \left(1 - \frac{\epsilon_*}{\epsilon} \right) \right]^{-1} = \frac{\|\theta_0 - \theta_*\|}{\rho_*}$$

— мера начальной неопределенности задачи. Величина ξ характеризует сложность задачи и показывает, во сколько раз нужно сократить расстояние между θ_0 и θ_* , чтобы с гарантией достичь цели (4.16).

Легко проверить, что при $\xi = 1$, например, все неравенства (4.16) будут выполнены для $\theta = \theta_0$, т.е. задача тривиальна: адаптация не нужна. Оценка числа исправлений алгоритма эллипсоидов, полученная в [211], приведена в § 4.5 и имеет вид

$$r_e \leq [2N^2 + \theta(1)] \ln \xi, \quad (4.106)$$

где N — число настраиваемых параметров (размерность задачи). Чтобы оценить число исправлений алгоритма полного перебора r_{pp} , заметим, что r_{pp} есть количество проб, которые нужно сделать в шаре радиуса $\|\theta_0 - \theta_*\|$ для того, чтобы хотя бы одна из них попала в любой шар радиуса ρ_* . Это количество не меньше, чем отношение объемов N -мерных кубов со сторонами $\|\theta_0 - \theta_*\|, \rho_*$:

$$r_{pp} \geq \left(\frac{\|\theta_0 - \theta_*\|}{\rho_*} \right)^N = \xi^N. \quad (4.107)$$

Полученные оценки оказались зависящими всего лишь от двух параметров задачи: ξ и N . Поэтому результаты сравнения можно представить

в виде областей эффективности каждого алгоритма на плоскости $\{\zeta, N\}$ – множеств, на которых данный алгоритм превосходит остальные по данному критерию (рис. 4.6).

Анализ результатов сравнения дает следующие выводы.

1. Превосходство алгоритма "полоска" и алгоритма эллипсоидов над полным перебором быстро растет с ростом N, ζ .

2. Алгоритм эллипсоидов оказывается наиболее эффективным для задач с небольшой размерностью, но с большой начальной неопределенностью, а "полоска" – наоборот. (Этот вывод характерен для сравнения одноступенчатых и многоступенчатых алгоритмов.)

Разумеется, оценка числа исправлений не совпадает с числом шагов до достижения цели k_* (временем адаптации), однако косвенно характеризует его. Поскольку оценки (4.105), (4.106) точны (можно построить задачи, на которых они достигаются) и при сравнении алгоритмы ставились в равные условия, есть основания руководствоваться результатами сравнения при выборе алгоритма.

В заключение заметим, что практически выбор алгоритма может зависеть и от других факторов, в том числе от таких, как количество наблюдений процесса и частота их следования на интервале функционирования объекта. Например, стохастический подход эффективен при большом числе наблюдений (тысячи, десятки тысяч), когда, прежде, чем скажется нестационарность процесса, успеет сработать механизм усреднения. При высокой частоте дискретизации процесса может оказаться невозможным применение многоступенчатых алгоритмов, если реализующее их вычислительное устройство не успеет вычислить новое значение управляющего воздействия за период между измерениями.

Глава 5

ДЕКОМПОЗИЦИЯ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ.

Рассматриваются задачи анализа и синтеза адаптивного управления в сложных системах и их приближенное решение методами декомпозиции, основанными на разделении разнотемповых движений в АдСУ. Исследуются две основных схемы разделения движений в АдСУ:

- а) движения основного контура считаются быстрыми по сравнению с движениями в контуре адаптации;
- б) в движениях основного контура выделяются быстрые и медленные составляющие.

Приводятся процедуры построения упрощенной модели системы, основанные на методах усреднения и сингулярных возмущений. Формулируются условия применимости и оценки точности методов разделения движений, в том числе условия устойчивости и диссипативности сингулярно-возмущенных и дискретизованных систем. На основе полученных результатов выводятся условия применимости методом скоростного градиента для синтеза АдСУ сингулярно-возмущенными и дискретизованными нелинейными объектами, а также методика приближенного синтеза АдСУ.

§ 5.1. Методы разделения движения в адаптивных системах

Трудности решения прикладных задач синтеза и анализа адаптивного управления зачастую связаны со сложностью математических моделей ОУ: нелинейностью, стохастичностью, высоким порядком уравнений. Для преодоления трудностей применяются методы декомпозиции, состоящие в разделении исходной задачи на ряд более простых, решаемых независимо. Декомпозиция при синтезе АдСУ может состоять в замене исходной задачи соответствующей задачей для упрощенной модели ОУ. При декомпозиции на этапе анализа упрощенная модель строится для всей анализируемой системы. В обоих случаях для развития метода декомпозиции необходимо:

- а) разработать процедуры построения упрощенных моделей;
- б) установить условия осуществимости и оценки точности декомпозиции, позволяющие судить о свойствах исходной системы по соответствующим свойствам упрощенной системы.

Отметим, что в реальных задачах декомпозиция осуществима, как правило, приближенно и имеет смысл говорить лишь о приближенном соответствии свойств исходной и упрощенной систем. Такой подход позволяет расширить сферу применимости точных методов.

Наибольшее применение находят методы декомпозиции, основанные на выделении "сильных" и отбрасывании "слабых" факторов, определяющих динамику системы [38, 136, 254]. В качестве "слабых" выступают

факторы, порождающие быстро затухающие, быстро колеблющиеся, случайные центрированные составляющие процессов в системе. Упрощенная модель, получаемая при отбрасывании быстрых составляющих, описывает медленные процессы (движения) в системе. Правомерность такого подхода к декомпозиции определяется возможностью разделения движений в системе по темпам протекания. Разнотемповость может порождаться внутренними особенностями системы (наличие малоинерционных звеньев в ОУ, действие малых случайных возмущений и т.п.) или вводится искусственно, путем включения в систему звеньев с большими коэффициентами усиления, разрывными характеристиками и т.п. В обоих случаях можно трактовать декомпозицию как выделение в фазовом пространстве системы некоторых множеств, попадание траектории в которые соответствует желаемым свойствам или требуемому упрощению системы. Траектории системы быстро приближаются к выделенным множествам, а последующее медленное движение обеспечивает приемлемые свойства системы в целом.

При синтезе АдСУ разделение движений играет важную роль. Сама возможность адаптации, приспособления регулятора к изменению параметров объекта и среды существует лишь постольку, поскольку эти параметры меняются достаточно медленно по сравнению с измеряемыми величинами – переменными состояния объекта и среды. Чтобы извлечь из измерений нужную информацию о неизвестных параметрах, регулятору требуется некоторое время, и за это время параметры не должны заметно измениться. Поэтому еще на этапе постановки задачи управления прежде всего выделяются быстрые переменные (координаты ОУ), на которые воздействует основной контур регулятора, и медленные переменные (параметры), изменения которых отслеживаются контуром адаптации. Таким образом, разделение разнотемповых движений является инструментом декомпозиции динамических систем.

Перейдем к рассмотрению основных схем и методов разделения движений в АдСУ.

5.1.1. Первая схема разделения движений для непрерывных систем. В первой схеме разделения движений считается, что настраиваемые параметры меняются медленно по сравнению с координатами объекта. Для формализации этого предположения в алгоритм адаптации введем малый параметр $\epsilon > 0$, так чтобы динамика всей системы описывалась уравнениями

$$\dot{x} = F(x, \theta, t), \quad (5.1)$$

$$\dot{\theta} = \epsilon \Psi(x, \theta, t) \quad (5.2)$$

с начальными условиями $x(0)$, $\theta(0)$. Уравнение (5.1) описывает обобщенный настраиваемый объект (ОНО), а уравнение (5.2) – алгоритм адаптации (см. главу 2).

Предположение о малости ϵ правомерно далеко не всегда; обычно, наоборот, стараются увеличить скорость адаптации. Однако действие различного рода помех (возможно, и не учитываемых моделью (5.1), (5.2)) препятствует ускорению процесса адаптации. Если реальная величина ϵ оказывается настолько малой, что в системе возникает эффект разделения движений, то для построения упрощенной системы можно восполь-

зоваться методом усреднения [117, 120]. Для этого нужно найти решение $\bar{x}(\theta, t)$ вырожденной системы

$$\frac{d\bar{x}(\theta, t)}{dt} = F(\bar{x}(\theta, t), \theta, t), \quad (5.3)$$

$$\theta = \text{const}, \quad \bar{x}(\theta, 0) = x(0),$$

получаемой из (5.1), (5.2) при $\epsilon = 0$, и составить усредненное уравнение

$$\dot{\bar{\theta}} = \bar{\Psi}(\theta), \quad \bar{\theta}(0) = \theta(0), \quad (5.4)$$

правая часть которого имеет вид

$$\bar{\Psi}(\theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Psi(\bar{x}(\theta, t), \theta, t) dt. \quad (5.5)$$

(Предполагается, что предел в (5.5) существует и не зависит от $x(0)$.)

Обоснование применимости метода усреднения дается теоремами Н.Н. Боголюбова [117, 118]. Первая теорема Боголюбова говорит о том, что если правые части (5.1), (5.2) гладкие и ограниченные в некоторых областях, содержащих решения усредненной системы (5.4) и вырожденной системы (5.3), а предел в (5.5) равномерен по θ , то решение исходной системы $\theta(t)$ стремится при $\epsilon \rightarrow 0$ к решению $\bar{\theta}(t)$ усредненной системы (5.4) равномерно на промежутке $[0, L/\epsilon]$ длиной порядка $1/\epsilon$. При дополнительном предположении о достаточно быстром стремлении к пределу в (5.5) (со скоростью порядка $1/T$) можно получить оценку близости

$$\|\theta(t) - \bar{\theta}(t)\| \leq L_1 \epsilon \quad \text{при } 0 \leq t \leq L_2/\epsilon. \quad (5.6)$$

Вторая теорема Боголюбова (теорема об усреднении на бесконечном промежутке) устанавливает, что при дополнительном условии равномерной асимптотической устойчивости усредненной системы (5.4) решения $\theta(t)$ и $\bar{\theta}(t)$ остаются близкими при всех $t > 0$.

Метод усреднения распространен на различные классы систем, в том числе и на стохастические системы [34, 45, 117, 195]. Для стохастических систем вида (5.1), (5.2) правую часть усредненного уравнения (5.4) можно определить соотношением

$$\bar{\Psi}(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} M \{ \Psi(\bar{x}(\theta, t), \theta, t) \}, \quad (5.7)$$

а близость решений $\theta(t)$ и $\bar{\theta}(t)$ имеет место в среднеквадратическом смысле:

$$M \{ \sup_{0 \leq t \leq L_2/\epsilon} \| \theta(t) - \bar{\theta}(t) \|^2 \} \leq L_1 \epsilon. \quad (5.8)$$

Между стохастическим и детерминированным случаями имеется тесная связь. Действительно, для усреднения в детерминированном случае требуется существование предела (5.5). В стохастическом случае вывод оценок типа (5.8) также опирается на существование предела (5.5) (уже в вероятностном смысле). Но при существовании предела (5.7) соотношение (5.5) эквивалентно закону больших чисел для процесса (5.3) и обеспечивается условиями слабой зависимости значений $\bar{x}(\theta, t)$ и $\bar{x}(\theta, s)$ при больших $|t - s|$ (условия перемешивания). В обоих случаях проверка (5.5), (5.7)

обычно сводится к проверке устойчивости вырожденного уравнения (5.3) и наличия свойств почти периодичности или перемешивания у внешних воздействий.

Отметим, что на возможность применения метода усреднения к анализу алгоритмов адаптации (алгоритмов скоростного градиента) указывалось в [123]. В работах [90, 125] метод усреднения применялся к анализу адаптивных систем управления объектами 2-го порядка, а в работе [168] – к анализу адаптивных систем с эталонной моделью, синтезированных при помощи метода функций Ляпунова (см. также § 5.3). Близкие способы построения приближенных моделей процессов адаптации рассмотрены также в [92, 163].

Другой способ упрощения систем с разделяющимися движениями основан на применении метода сингулярных возмущений [32, 120, 170, 253]. Предположим, что обобщенный настраиваемый объект (ОНО) описывается уравнением

$$\epsilon \dot{x} = F(x, \theta, t), \quad (5.9)$$

а алгоритм адаптации – уравнением

$$\dot{\theta} = \Psi(x, \theta, t). \quad (5.10)$$

Система (5.9), (5.10) по сравнению с вырожденной системой

$$0 = F(x, \theta, t), \quad (5.11)$$

$$\dot{\theta} = \Psi(x, \theta, t), \quad (5.12)$$

получаемой при $\epsilon = 0$, имеет повышенный порядок (в отличие от (5.1), (5.2)), что дает основания назвать ее сингулярно-возмущенной по отношению к (5.11), (5.12). Наличие в (5.9) малого параметра $\epsilon > 0$ при производных означает, что переменные $x(t)$ являются "быстрыми": скорость их изменения пропорциональна величине $1/\epsilon$. При малом ϵ и естественных дополнительных предположениях в системе (5.9), (5.10) возникает эффект "пограничного слоя": быстрые движения быстро затухают, приближаясь к решению $\bar{x}(\theta, t)$ уравнения (5.11), а медленные движения $\theta(t)$ оказываются близки к решению $\bar{\theta}(t)$ уравнения пониженного порядка (редуцированной системы):

$$\dot{\bar{\theta}} = \Psi(\bar{x}(\bar{\theta}, t), \bar{\theta}, t), \quad \bar{\theta}(0) = \theta(0). \quad (5.13)$$

Точный результат дается теоремой А.Н. Тихонова [170], основное условие которой состоит в том, чтобы $\bar{x}(\theta, t)$ было устойчивым изолированным состоянием равновесия так называемой присоединенной системы:

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x, \theta, t), \quad (5.14)$$

в которой θ, t фиксированы.

Формально исходные системы для метода усреднения и для метода сингулярных возмущений различны, но систему (5.9), (5.10) можно привести к виду (5.1), (5.2), перейдя к "быстрому" времени τ с помощью замены $t = \epsilon\tau$. Это можно сделать двумя способами: либо непосредственно подстановкой в уравнения $t = \epsilon\tau$, либо, считая t новой фазовой переменной, дополнить систему (5.9), (5.10) уравнением $dt/d\tau = \epsilon$ и свести таким об-

разом нестационарную систему к стационарной. В обоих случаях к преобразованной системе можно применить метод усреднения, но результаты будут, вообще говоря, различными.

При первом способе перехода метод усреднения приводит к стационарной упрощенной системе (5.4), тогда как метод сингулярных возмущений приводит к нестационарной системе (5.13), построить которую проще, а исследовать — сложнее. При втором способе метод усреднения даст ту же упрощенную систему, что и метод сингулярных возмущений. При этом обнаруживается, что теорема Тихонова аналогична первой теореме Боголюбова и может быть выведена из нее.

Так же можно получить и аналог второй теоремы Боголюбова: близость траекторий сингулярно-возмущенной системы к траекториям равномерно асимптотически устойчивой упрощенной системы сохраняется на бесконечном промежутке времени. Результаты усреднения при обоих способах совпадают лишь в случае, когда правые части (5.9), (5.10) не зависят явно от t . В системах управления этот случай соответствует задаче регулирования.

Приведенные рассуждения относятся к асимптотике решений исходной и упрощенной системы при $\epsilon \rightarrow 0$. В конкретных задачах величина ϵ всегда конечна, и выбор метода разделения движений зависит в первую очередь от частоты изменения внешних воздействий. Если темп изменения внешних воздействий меньше темпа переходных процессов в ОНО, то быстрые движения успевают приблизиться к квазистатическим движениям $\bar{x}(\theta, t)$, и можно применять метод сингулярных возмущений. В противном случае следует применять более универсальный метод усреднения. В обоих случаях основными условиями применимости методов являются:

а) устойчивость ОНО при всех возможных значениях вектора θ ;

б) более низкий темп процесса адаптации по сравнению с темпом процессов в ОНО.

5.1.2. Первая схема разделения движений для дискретных систем. Эффект усреднения может возникать и в системах дискретных, описываемых разностными уравнениями. Здесь механизм усреднения иной и основан на малости приращений процессов за один шаг. Эти малые приращения, складываясь в большом количестве, усредняются. Наибольшее применение находит первая схема разделения движений.

Рассмотрим систему

$$x_{k+1} = F(x_k, \theta_k, \varphi_k), \quad (5.15)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \epsilon_k \Psi(x_k, \theta_k), \quad (5.16)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$; $x_k \in R^n$ — вектор состояния ОНО, $\theta_k \in R^m$ — вектор настраиваемых параметров, $\epsilon_k > 0$ — коэффициенты шага алгоритма адаптации, $\varphi_k \in R^s$ — вектор возмущений (детерминированных или стохастических). Применение метода усреднения к анализу системы (5.15), (5.16) состоит в нахождении $x_k(\theta)$, решения порождающего уравнения

$$x_{k+1}(\theta) = F(x_k(\theta), \theta, \varphi_k), \quad x_0(\theta) = x_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.17)$$

и построения усредненной системы

$$\bar{\theta}_{k+1} = \bar{\theta}_k + \epsilon \bar{\Psi}(\bar{\theta}_k), \quad \bar{\theta}_0 = \theta_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.18)$$

$$\bar{\Psi}(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \Psi(x_k(\theta), \theta). \quad (5.19)$$

Если φ_k случайны, то вместо (5.19) пользуются соотношением

$$\Psi(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} M\{\Psi(x_k(\theta), \theta)\}. \quad (5.20)$$

Пределы в (5.19), (5.20) должны существовать при любых $\theta \in \Theta$, где Θ некоторая область, содержащая траекторию усредненной системы (5.18). Можно показать, что при выполнении некоторых дополнительных условий (в частности, условия Липшица на правые части (5.15), (5.16) и равномерной по $\theta \in \Theta$ сходимости в (5.19), (5.20)) при $0 \leq k \leq T/\epsilon$ в детерминированном случае справедлива оценка

$$\|\theta_k - \bar{\theta}_k\| \leq K\epsilon. \quad (5.21)$$

а в стохастическом случае — оценка

$$M \max_{0 \leq k \leq T/\epsilon} \|\theta_k - \bar{\theta}_k\|^2 \leq K\epsilon, \quad (5.22)$$

$$\text{где } K > 0, \epsilon = \max_{0 \leq k \leq T/\epsilon} \epsilon_k.$$

Выше упрощенная система, как и исходная, являлась дискретной. Однако в приложениях часто удобнее использовать непрерывную упрощенную систему (так называемую *непрерывную модель* [55–57, 242–245])

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \Psi(\bar{\theta}), \quad \bar{\theta}(0) = \theta_0, \quad (5.23)$$

где $\bar{\Psi}(\theta)$ определяется, как и ранее, из (5.19) или (5.20). Для сопоставления решений исходной системы (5.15), (5.16) и непрерывной системы (5.23) вводятся моменты времени $t_k = \sum_{i=0}^{k-1} \epsilon_i$. Оказывается, при некоторых условиях справедливы неравенства

$$\|\theta_k - \theta(t_k)\| \leq K\epsilon, \quad 0 \leq t_k \leq T, \quad (5.24)$$

в детерминированном случае и

$$M \max_{0 \leq t_k \leq T} \|\theta_k - \theta(t_k)\|^2 \leq K\epsilon \quad (5.25)$$

в стохастическом случае. Точные утверждения приведены работах [55–57].

Таким образом, порядок погрешности аппроксимации для непрерывной упрощенной системы (5.23) сохраняется, но зато система становится стационарной: в правую часть (5.23) ϵ_k не входит. Это облегчает как аналитическое, так и численное исследование системы (например, шаг численного интегрирования (5.23) можно брать отличным от ϵ_k).

5.1.3. Вторая схема разделения движений. Вторая схема разделения движений относится к случаю, когда быстрые и медленные составляющие можно выделить в движении ОНО (основного контура системы). Например, описание собственного объекта управления может содержать мало-

инерционные звенья, слабо влияющие на динамику основного процесса. Вторая схема применяется, прежде всего, в задачах синтеза регулятора по упрощенной модели объекта. В таких задачах усреднение по времени нежелательно, поскольку изменения внешних воздействий происходят в темпе основных (медленных) процессов в объекте. Поэтому целесообразно пользоваться методом сингулярных возмущений. В пользу такого выбора говорят и то обстоятельство, что формально процедура метода сингулярных возмущений применима к незамкнутым системам, т.е. упрощение описания ОУ можно производить заранее, до определения алгоритмов управления и адаптации.

При описании схемы применительно к адаптивным системам будем считать для определенности, что алгоритм адаптации относится к классу алгоритмов скоростного градиента. Пусть ОУ описывается уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, \theta, t), \quad (5.26a)$$

$$\epsilon \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, \theta, t), \quad (5.26b)$$

где $x_1 = x_1(t) \in R^{n_1}$ — вектор медленных переменных, $x_2 = x_2(t) \in R^{n_2}$ — вектор быстрых переменных, $\theta = \theta(t) \in R^m$ — вектор настраиваемых параметров, $F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$ — вектор-функции соответствующих размерностей. Пусть цель управления задана при помощи гладкой целевой функции $Q(x, t)$, где $x = \text{col}(x_1, x_2)$, и имеет вид

$$Q(x_1(t), t) \leq \Delta \quad \text{при} \quad t \geq t_*. \quad (5.27)$$

Процедура синтеза алгоритма скоростного градиента по упрощенной модели ОУ состоит в следующем. Система (5.26) заменяется упрощенной (редуцированной), для построения которой в (5.26b) полагается $\epsilon = 0$. Редуцированная модель ОУ имеет вид

$$\dot{x}_1 = \bar{F}(x_1, \theta, t), \quad x_2 = \eta(x_1, \theta, t), \quad (5.28)$$

где $\eta(x_1, \theta, t)$ — решение уравнения $\bar{F}(x_1, \theta, t) = 0$ (будем считать, что это решение существует и единственno); $\bar{F}(x_1, \theta, t) = F_1(x_1, \eta(x_1, \theta, t), \theta, t)$. Целевую функцию также следует редуцировать, положив $\bar{Q}(x_1, t) = Q(x_1, \eta(x_1, \theta, t), t)$. Будем считать, что редуцированная целевая функция не зависит от настраиваемых параметров, так как в противном случае выбор $\theta(t)$ был бы тривиальным:

$$\theta(t) = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} Q(x_1, \eta(x_1, \theta, t), t).$$

Это предположение выполнено, например, если $Q(\cdot)$ не зависит от x_2 (что соответствует использованному в [229, 231] условию "слабой наблюдаемости" быстрых переменных).

Выписывая алгоритм скоростного градиента для редуцированной модели ОУ, получим

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla_{\theta} \omega(x_1, \theta, t), \quad (5.29)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$ – положительно определенная $m \times m$ -матрица,

$$\omega(x_1, \theta, t) = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} (x_1, t) + (\nabla_x \bar{Q})^T \bar{F}(x_1, \theta, t)$$

(функция $\bar{Q}(\cdot)$ предполагается непрерывно дифференцируемой). Заключительный этап синтеза состоит в проверке условий работоспособности синтезированной системы. Для редуцированной системы (5.28), (5.29) основные из этих условий состоят в выпуклости по θ функции $\omega(\cdot)$ и существовании вектора $\theta_* \in R^m$ такого, что система (5.28) при $\theta = \theta_*$ экспоненциально устойчива по отношению к функции $\bar{Q}(\cdot)$, т.е. $\omega(x_1, \theta_*, t) \leq -\alpha \bar{Q}$ при некотором $\alpha > 0$. Их выполнение обеспечивает в системе (5.28), (5.29) достижение ЦУ $\bar{Q}(x_1(t), t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Однако, несмотря на выполнение ЦУ в редуцированной системе, в исходной сингулярно-возмущенной системе (5.26), (5.29) ЦУ может нарушаться вплоть до возникновения неустойчивости (см. примеры в [229, 231]). Поэтому для применения описанного метода синтеза необходимо выполнение дополнительных условий, включающих, в частности, малость параметров ϵ . Такие условия являются важной составной частью метода и устанавливаются ниже.

§ 5.2. Условия применимости и оценки точности разделения движений в адаптивных системах

Перейдем к формулировке условий применимости методов разделения движений. Прежде всего это условия, при выполнении которых о качественных свойствах исходной системы (например, устойчивости, диссипативности) можно судить по соответствующим свойствам ее упрощенной модели. Кроме того, представляют интерес оценки значений функционалов от траекторий исходной системы через значения функционалов от траекторий упрощенной системы.

Если разделение движений проводится по первой схеме, причем как исходная, так и упрощенная системы функционируют непрерывно во времени, то для большинства практических задач оказывается достаточно условий, доставляемых классическими теоремами Н.Н. Боголюбова, Н.Н. Красовского, А.Н. Тихонова и их обобщениями [31, 86, 109, 117, 118, 120, 144]. Поэтому ниже устанавливаются условия разделимости движений в других вариантах: для задач адаптивного управления сингулярно-возмущенными ОУ и для задач синтеза дискретного алгоритма адаптации по непрерывной модели. Исследуются градиентные алгоритмы и алгоритмы скоростного градиента, применяемые во многих практических задачах.

5.2.1. Условия применимости алгоритмов скоростного градиента в сингулярно-возмущенных системах. Как уже было отмечено, известные результаты по обоснованию метода сингулярных возмущений либо относятся к конечному промежутку времени (теорема А.Н. Тихонова, 1-я теорема Н.Н. Боголюбова), либо требуют равномерной асимптотической устойчивости редуцированной системы (2-я теорема Н.Н. Боголюбова и ее обобщения). В задачах же адаптивного управления асимптотическая устойчивость системы (5.28), (5.29) зачастую имеет место лишь по переменным

x_1 . Кроме того, в известных результатах обычно делаются предположения о глобальной липшицевости или ограниченности правых частей редуцированной системы, а в задачах адаптивного управления правые части уравнений включают попарные произведения переменных и удовлетворяют условию Липшица только локально*). Сформулируем условия применимости метода скоростного градиента (см. п.5.1.3), ограничиваясь сначала стационарными задачами.

Теорема 5.1. Пусть функции $F_1(\cdot), Q(\cdot), F_2(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемы, не зависят от t и удовлетворяют следующим условиям:

1. Для любых x_1, θ существует единственный корень $\bar{x}_2 = \eta(x_1, \theta)$ уравнения $F_2(x_1, \bar{x}_2, \theta) = 0$, причем функция $\eta(x_1, \theta)$ дважды непрерывно дифференцируема.

2. Функция $\omega(x_1, \theta)$ выпукла по θ , и существуют векторы $x_1^* \in R^n, \theta_* \in R^m$ и числа $\alpha_i > 0, i = 0, 1, 2$, такие, что

$$\omega(x_1, \theta_*) \leq -\alpha_0 \bar{Q}(x_1),$$

$$\alpha_1 \|x_1 - x_1^*\| \leq \|\nabla_{x_1} \bar{Q}\| \leq \alpha_2 \|x_1 - x_1^*\|$$

и $\partial_1 \eta(x_1^*, \theta) = 0$, где

$$\partial_1 \eta(w) = \left[\frac{\partial \eta(w)}{\partial w} \right]^T F(w), \quad w = \text{col}(x_1, \theta)$$

— производная в силу редуцированной системы,

$$F(w) = \text{col} \{ F_1(x_1, \eta(x_1, \theta), \theta), -\Gamma \nabla_\theta \omega(x_1, \theta) \}.$$

3. Существуют непрерывно дифференцируемая функция $V_2(\tilde{x}_2)$, где $\tilde{x}_2 = x_2 - \eta(x_1, \theta)$, и числа $\beta_i > 0, i = 0, 1, 2$ такие, что

$$\partial_2 V_2 \leq -\beta_0 \|\tilde{x}_2\|^2, \quad \beta_1 \|\tilde{x}_2\| \leq \|\nabla V_2\| \leq \beta_2 \|\tilde{x}_2\|,$$

где

$$\partial_2 V_2 = [\nabla V_2(\tilde{x}_2)]^T F_2(x_1, \tilde{x}_2 + \eta(x_1, \theta), \theta)$$

— производная функции $V_2(\cdot)$ в силу присоединенной системы $\dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, \theta)$.

Тогда:

1. Для любого ограниченного множества D начальных условий (5.26), (5.29) существует число $\epsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \epsilon < \epsilon_0$ траектории (5.26), (5.29) ограничены и удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = x_1^*,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_2(t) - \eta(x_1(t), \theta(t))] = 0.$$

*.) Вектор-функция $f: R^{n_1} \times R^{n_2} \rightarrow R^{n_3}$ называется локально липшицевой по x , если для любого компактного множества $Z \subset R^{n_1} \times R^{n_2}$ существует число $L = L(Z) > 0$ такое, что $\|f(x, y) - f(x', y)\| \leq L \|x - x'\|$ при $(x, y) \in Z, (x', y) \in Z$. Вектор-функция $f: R^{n_1} \times R^{n_2} \times T \rightarrow R^{n_3}$ называется локально липшицевой по x равномерно по $t \in T \subset R^{n_3}$, если соответствующее неравенство выполняется при всех $t \in T$, при чем константа $L(Z)$ не зависит от $t \in T$.

2. Положим $B_R = \{(x_1, x_2, \theta) : V_1(x_1, \theta) \leq R\} \subset R^{n+m}$, где

$$V_1(x_1, \theta) = \bar{Q}(x_1) + 0,5 \|\theta - \theta_*\|_{\Gamma^{-1}}^2, \quad (5.30)$$

и пусть величина

$$L_1(R) = \sup_{B_R} \left\| \frac{\partial F_1(x_1, x_2, \theta)}{\partial x_2} \right\|$$

конечна для любого $R > 0$. Если

$$(x(0), \theta(0)) \in D_R = \left\{ (x_1, x_2, \theta) : V_1(x_1, \theta) + \frac{\alpha_1 L_1(R)}{\beta_1 L_2(R)} V_2(\tilde{x}_2) \leq R \right\},$$

то в качестве ϵ_0 можно взять

$$\epsilon_0(R) = \frac{\alpha_0 \alpha_1 \beta_0 \beta_1}{\beta_2 L_1(R) (\alpha_2 L_2(R) + \alpha_0 \alpha_1 L_3(R))}, \quad (5.31)$$

где

$$L_2(R) = \sup_{B_R} \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} (\partial_1 \eta(x_1, \theta)) \right\|, \quad L_3(R) = \sup_{B_R} \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \eta(x_1, \theta) \right\|.$$

Следствие. Если $\alpha_0 \alpha_1 L_3(R) \ll \alpha_2 L_2(R)$, то (5.31) можно приблизенно представить в виде

$$\epsilon_0(R) \approx k_1 k_2 (k_{12} k_{21})^{-1}, \quad (5.32)$$

где коэффициенты $k_1 = \alpha_0 \alpha_1 / \alpha_2$, $k_2 = \beta_0 \beta_1 / \beta_2$ пропорциональны степеням устойчивости медленной и быстрой подсистем, а числа $k_{12} = L_2(R)$, $k_{21} = L_1(R)$ отражают взаимное влияние подсистем (силу перекрестных связей).

Поясним условия теоремы. Условие 2 гарантирует экспоненциальную устойчивость по x_1 редуцированной системы (5.28), (5.29) при некотором $\theta = \theta_*$. Условие 3 означает экспоненциальную устойчивость в целом быстрой подсистемы (5.26), рассматриваемой изолированно, при фиксированных x_1, θ (присоединенной системы). Условие независимости от t правых частей (5.26), (5.29), как показывают примеры [229, 231], нельзя отбросить. В системах с эталонной моделью, в частности, оно означает постоянство задающего воздействия.

Смысл утверждения теоремы в том, что если быстрая подсистема (5.26) экспоненциально устойчива в целом, а редуцированная модель ОНО (5.28) экспоненциально устойчива по x_1 при некотором $\theta = \theta_*$, то алгоритм (5.29) обеспечивает при достаточно малом $\epsilon > 0$ стабилизацию исходного ОНО (5.26) по x_1, x_2 . Допустимая степень малости ϵ зависит от начальных условий $x(0), \theta(0)$, что объясняется отсутствием ограничений на скорость роста (нелипшицевостью) правых частей (5.26), (2.29). Таким образом, действие сингулярных возмущений достаточно малого "уровня" не нарушает достижения ЦУ (5.27), т.е. система оказывается грубой по отношению к сингулярным возмущениям.

Ситуация меняется, если на ОНО действуют совместно с сингулярными аддитивные (входные) ограниченные возмущения. Известен целый ряд примеров, показывающих, что система может терять устойчивость при дей-

ствии сколь угодно малых аддитивных возмущений даже в отсутствие сингулярных возмущений. В главе 2 описаны способы огрубления алгоритмов скоростного градиента с целью придания системе грубоści: введение отрицательных обратных связей и зоны нечувствительности. Ниже будет показано, что оба этих способа обеспечивают сохранение работоспособности синтезированных систем в условиях совместного действия ограниченных и сингулярных возмущений, а также параметрических возмущений (нестационарности ОНО).

Пусть исходный ОНО описывается вместо (5.26) уравнениями

$$\dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2, \theta, t) + \varphi(t), \quad (5.33a)$$

$$\epsilon \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2, \theta, t), \quad (5.33b)$$

где $\varphi(t) \in R^n$ – вектор-функция возмущений. Редуцированная модель ОНО имеет вид

$$\dot{x}_1 = \bar{F}(x_1, \theta, t) + \varphi(t), \quad x_2 = \eta(x_1, \theta, t). \quad (5.34)$$

Рассмотрим две модификации алгоритма скоростного градиента:

а) алгоритм с параметрической обратной связью

$$\dot{\theta} = -\Gamma [\kappa \nabla_{\theta} \omega(x_1, \theta, t) + \xi(\theta)], \quad (5.35)$$

где ξ – вектор-функция обратной связи, $\kappa > 0$ – коэффициент уровня обратной связи;

б) алгоритм с зоной нечувствительности

$$\dot{\theta} = \begin{cases} -\Gamma \nabla_{\theta} \omega(x_1, \theta, t) & \text{при } \bar{Q}(x_1, t) \geq \Delta, \\ 0 & \text{при } \bar{Q}(x_1, t) < \Delta. \end{cases} \quad (5.36)$$

Обозначим через $\Xi_c(\Delta_*)$ класс задач управления (см. п. 2.2.2) таких, что функции $F(\cdot) = \text{col}(F_1(\cdot), F_2(\cdot))$, $Q(\cdot)$ удовлетворяют условиям А2, В1, С, Д2 главы 2; для функции $\bar{Q}(\cdot)$ выполнено неравенство $\|\nabla_x \bar{Q}(\cdot)\| \leq \alpha_1 \bar{Q}^\sigma$ для некоторых $\alpha_1 > 0$, $0 \leq \sigma < 1$; функция $\varphi(\cdot)$ ограничена: $\|\varphi(t)\| \leq \Delta_\varphi$. Множество A_ξ состоит из алгоритмов, выдающих постоянные функции $\theta(t) \equiv \theta$; выполняется соотношение

$$\left(\frac{\Delta_\varphi \alpha_1}{\alpha_0} \right)^{1/(1-\sigma)} \leq \Delta_*.$$

В главе 2 было показано (теорема 2.13), что при отсутствии сингулярных возмущений алгоритм аналогичный (5.35) обеспечивает диссипативность системы вида (5.34), (5.35) и оценочную δ -оптимальность при достаточно большом $\kappa > 0$. Аналогичный результат верен и при наличии сингулярных возмущений.

Теорема 5.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.13 и условие 3 теоремы 5.1, а также условия:

1. Для некоторых $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$, $\Delta_* > 0$ справедливы неравенства

$$\alpha_2 \|x_1 - x_1^*(t)\| \leq Q(x, t)^{1-\sigma} \leq \alpha_3 \|x_1 - x_1^*(t)\|, \quad \|x_1^*(t)\| \leq \Delta_*.$$

2. Равномерно по $t \geq 0$ функции $I_1(x_1, x_2, \theta, t)$ локально определены по x_2 , функции $I(x_1, \theta, t)$, $\eta(x_1, \theta, t)$ локально определены по x_1 , θ , функции

ции $\bar{F}(x_1, \theta, t)$, $\eta(x_1, \theta, t)$, $\partial_1 \eta(x_1, \theta, t)$ локально ограничены, где $\partial_1 \eta(\cdot)$ – производная функции $\eta(\cdot)$ в силу редуцированной системы (5.34), (5.35).

Тогда:

1. Для любых $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ и любого ограниченного множества D начальных условий системы (5.33), (5.35) существуют числа $\kappa_0 > 0$, $\epsilon_0(\kappa) > 0$ такие, что при $\kappa > \kappa_0$, $0 < \epsilon < \epsilon_0(\kappa)$ траектории системы ограничены и она оценочно Δ_1 -оптимальна в классе $\Xi_\epsilon(\Delta_*)$, т.е. выполняется ЦУ (5.27) при $\Delta = \Delta_* + \Delta_1$. Кроме того, выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}_2(t)\| \leq \Delta_2.$$

Для величины κ_0 справедлива оценка

$$\kappa_0 = \frac{2\rho'}{[\Delta_1 \alpha_0(1-\sigma)]^{-1}}.$$

2. Если $D \subset D_R$, где $D_R = \{(x, c) : \|x_1\| \leq R, \|\tilde{x}_2\| \leq R, \|c\| \leq R\}$, то для величины $\epsilon_0(\kappa)$ справедлива оценка

$$\epsilon_0 = \beta_0 [\beta_2 \max_{1 \leq i \leq 5} \epsilon_i]^{-1}, \quad (5.37)$$

где

$$\epsilon_1 = 4\alpha_0(1-\sigma), \quad \epsilon_2 = 2\beta_1 L_1(R_2) L_3(R_2, \kappa)/\beta_2,$$

$$\epsilon_3 = 2\beta_1 L_2(\Delta_1)(\Delta_2 \beta_2)^{-1/2},$$

$$\epsilon_4 = 4\alpha_1 \beta_1 R_1^\sigma L_1(\Delta_1) L_2(\Delta_1) [\alpha_0(1-\sigma) \beta_2 (\Delta_1 - \Delta_*)]^{-1},$$

$$\epsilon_5 = \frac{\epsilon_1}{4} + \frac{\epsilon_2}{2} + [\alpha_1 R_1^\sigma L_1(R_2) + \beta_1 L_2(R_2)]^2 [\epsilon_1 \beta_2 (R - \Delta_*)]^{-1},$$

$$R_1 = \alpha_3 (R + \Delta_x)^{1/(1-\sigma)} + (2\kappa\lambda)^{-1} (R + \|\theta_*\|)^2 + \beta_1 R^2,$$

$$R_2 = \max \{ \Delta_x + (\alpha_2^{-1} R_1)^{1-\sigma},$$

$$\|\theta_*\| + \sqrt{2R_1 \kappa \|\Gamma\|}, \quad \sqrt{\beta_2^{-1} R_1} \},$$

$L_1(R)$ – константа Липшица по x_2 функции $F_1(x_1, x_2, \theta, t)$ на множестве D_R ; $L_2(R)$, $L_3(R, \kappa)$ – верхние границы функций $\left\| \frac{\partial \eta}{\partial x_2}(\cdot) \right\|$, $\|\partial_1 \eta(\cdot)\|$ соответственно на множестве D_R . Кроме того, при $0 < \epsilon < \epsilon_0$ для любого $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} Q(x_1(t), t) &\leq \frac{\Delta + \Delta_*}{2} + \frac{2L_1(R_2)L_2(R_2)\beta_3}{\alpha_0(1-\sigma)\beta_0} \epsilon + \\ &+ \left[R_1 - \Delta_* + \frac{4L_1(R_2)\sqrt{R_1}\beta_3}{\beta_0 + 4\alpha_0(1-\sigma)\beta_3\epsilon} \right] e^{-\alpha_0 t(1-\sigma)}, \\ \|\tilde{x}_2(t)\| &\leq \frac{2L_2(R_2)\beta_3}{\beta_0\sqrt{\beta_2}} \epsilon_0 + \left[\sqrt{\frac{R_1}{\beta_2}} - \frac{2L_2(R_2)\beta_2}{\beta_0\sqrt{\beta_2}} \right] e^{-\beta_0 t/4\beta_3\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Теорема 5.3. Пусть выполнены условия теоремы 5.2 при $\sigma = 1/2$. Тогда для любых $\Delta > \Delta_*$, $\Delta_2 > 0$, $R > 0$ существуют $\epsilon_0 > 0$, $t_* > 0$ такие,

что при $0 < \epsilon < \epsilon_0$ траектории системы (5.33), (5.35), выходящие из множества D_R , ограничены и удовлетворяют при $t > t_*$ соотношениям $Q(x_1(t), t) \leq \Delta$, $\|\tilde{x}_2(t)\| \leq \Delta_2$.

Доказательство теорем 5.1–5.3 основано на принципе сравнения [113] с использованием двух функций Ляпунова и метода Н.Н. Красовского [97]. Утверждение, близкое к утверждению 1 теоремы 5.2, сформулировано в [186], а аналогичные ему результаты для частных случаев линейного ОУ имеются в [178, 229, 231]. Теоремы показывают, что для достаточно малого $\epsilon > 0$ алгоритмы (5.35), (5.36) обеспечивают в сингулярно-возмущенной системе достижение ЦУ, сколь угодно близкой к исходной ЦУ (5.27); т.е. система сохраняет субоптимальность. При этом допустимая степень малости ϵ зависит от начальных условий и может быть оценена по формуле (5.37).

Заметим еще, что в ряде задач алгоритм адаптации в сингулярно-возмущенной системе зависит от x_2 (т.е. отличается от (5.35) или (5.36)) за счет замены в нем $\Delta_\theta \omega(x_1, \theta, t)$ на некоторую гладкую функцию $\Phi(x_1, x_2, \theta, t)$, совпадающую с $\Delta_\theta \omega(x_1, \theta, t)$ в редуцированной системе:

$$\Phi(x_1, \eta(x_1, \theta, t), \theta, t) = \nabla_\theta \omega(x_1, \theta, t).$$

Например, такой случай имеет место, когда к быстрым переменным относятся переменные состояния измерительных устройств. Из доказательства легко усмотреть, что теорема 5.2 при этом остается в силе.

Утверждения теорем 5.2, 5.3 распространяются также на случай, когда присоединенная подсистема не является асимптотически устойчивой, но обладает экспоненциально устойчивым предельным циклом. При этом для построения редуцированной системы следует усреднять правые части (5.33a) вдоль предельного цикла (5.33b), а для доказательства использовать метод [144].

Наконец, сформулируем условия применимости алгоритмов скоростного градиента в задачах децентрализованного управления сложными сингулярно-возмущенными системами. Будем считать, что взаимосвязями между быстрыми переменными подсистем можно пренебречь, так что динамика ОУ описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= F_i(x_i, z_i, \theta_i, t) + h_i(x, z, \theta, t), \\ \epsilon z_i &= G_j(x_i, z_i, \theta_i, t), \quad i = 1, \dots, l. \end{aligned} \tag{5.39}$$

где $x_i \in R^{n_i}$, $z_i \in R^{m_i}$, $\theta_i \in R^{N_i}$ – векторы медленных переменных, быстрых переменных и настраиваемых параметров подсистем, соответственно, $x = \text{col}(x_1, \dots, x_l)$, $z = \text{col}(z_1, \dots, z_l)$, $\theta = \text{col}(\theta_1, \dots, \theta_l)$; $\epsilon > 0$ – малый параметр (см. § 2.6). Редуцированную модель системы получим, полагая $\epsilon = 0$, $h_i(\cdot) \equiv 0$, а соответствующий алгоритм скоростного градиента будет иметь вид (2.58) при

$$\omega_i(x_i, \theta_i, t) = \frac{\partial Q_i}{\partial t} + (\nabla_{x_i} Q_i)^T F(x_i, \theta_i, t), \tag{5.40}$$

где $\bar{F}_i(x_i, \theta_i, t) = F_i(x_i, \eta(x_i, \theta_i, t), \theta_i, t)$, $\bar{z}_i = \eta(x_i, \theta_i, t)$ – корень уравне-

ния $G_i(x_i, \bar{z}_i, \theta_i, t) = 0$. Будем считать, что однозначная функция $\eta(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема.

Сформулируем условия применимости алгоритма (2.58), (5.40) для однородных возмущений в стационарных задачах, когда правые части системы (5.39), (2.58), (5.40) не зависят от t и, кроме того, $Q_i = Q_i(x_i)$.

Теорема 5.4. Пусть выполнены следующие условия:

1. Условия 1 теоремы 2.18 при $\rho_i(Q) = \alpha_i Q$ ($\alpha_i > 0$).

2. Условия 2 теоремы 2.18.

3. Быстрые подсистемы экспоненциально устойчивы в целом, т.е. существуют гладкие функции $\tilde{V}_i(\tilde{z}_i)$, где $\tilde{z}_i = z_i - \eta_i(x_i, \theta_i)$, и положительные числа $\beta_i, \sigma'_i, \sigma''_i$ такие, что

$$\frac{d\tilde{V}_i}{dt} \leq -\beta_i \|\tilde{z}_i\|^2, \quad \sigma'_i \|\tilde{z}_i\| \leq \|\nabla \tilde{V}_i(\tilde{z}_i)\| \leq \sigma''_i \|\tilde{z}_i\|,$$

где

$$\frac{d\tilde{V}_i}{dt} = (\nabla \tilde{V}_i)^T G_i(x_i, \tilde{z}_i + \eta_i(x_i, \theta_i), \theta_i).$$

Тогда для любого ограниченного множества D начальных условий для системы (5.39), (2.58), (5.50) существует число $\epsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \epsilon < \epsilon_0$ траектории системы ограничены и удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x_i^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z}_i(t) = 0. \quad (5.41)$$

Утверждение теоремы вытекает из теорем 2.18, 5.1. Аналогичный результат справедлив для неоднородных взаимодействий. В обоих случаях можно получить оценки ϵ_0 , пропорциональные степеням устойчивости быстрой и медленной подсистем.

5.2.2. Дискретизация алгоритмов скоростного градиента. При синтезе дискретной АдСУ с помощью ее непрерывной упрощенной модели в соответствии со схемой п. 5.1.2 возникает вопрос о сохранении свойств непрерывной системы при дискретизации алгоритмов управления и адаптации. Для решения этого вопроса можно использовать метод, развитый в [55–57] и позволяющий установить, в частности, что если непрерывная упрощенная модель системы обладает свойством экспоненциальной диссипативности, то исходная дискретизованная система предельно диссипативна при $\epsilon_k \rightarrow 0$ и оценка предельного множества приближается к соответствующей оценке для непрерывной модели.

Ниже под экспоненциальной диссипативностью системы $\dot{z} = F(z, t)$, $z \in R^N$ будем понимать существование гладкой функции $V(z)$, вектора $z_* \in R^N$ и чисел $\beta_i > 0, i = 1, 2, 3, 4$, таких, что

$$\begin{aligned} \dot{V}(z, t) &\leq -\alpha V(z, t) + \beta_1, \quad \|\nabla^2 V(z, t)\| \leq \beta_2, \\ \beta_3 \|z - z_*\| &\leq \|\nabla_* V(z, t)\| \leq \beta_4 \|z - z_*\|. \end{aligned} \quad (5.42)$$

При выполнении (5.42) справедливо неравенство $\|z(t)\| \leq K_1 e^{-\alpha t} + K_2$. Систему (5.15), (5.16) будем называть предельно диссипативной при $\epsilon \rightarrow 0$, если в фазовом пространстве системы X существуют семейство множеств $D_0(\epsilon)$ со свойством $\bigcup_{\epsilon > 0} D_0(\epsilon) = X$ и ограниченное множество

D_∞ такие, что все траектории при $0 < \epsilon_k \leq \epsilon$, $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k = \infty$, $\epsilon > 0$, выходящие из множества $D_0(\epsilon)$, погружаются в множество D_∞ .

Применение метода [55–57] и результатов главы 2 позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема 5.5. Рассмотрим класс задач управления Ξ_5 , определяемый следующими требованиями:

ОУ описывается уравнением

$$\dot{x} = F(x, \theta, t) + \varphi(t), \quad (5.43)$$

где $\|\varphi(t)\| \leq \Delta_\varphi$, выполнены условия, задающие класс $\Xi_1(\Delta_*)$ (см. теорему 2.13); целевая функция $Q(x, t)$ удовлетворяет неравенству $\|\nabla^2 Q(x, t)\| \leq \alpha_2$.

Пусть алгоритм адаптации является дискретизованным алгоритмом скоростного градиента

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \epsilon \Gamma [\kappa \nabla_\theta \omega(x_k, \theta_k, t_k) + \zeta(\theta_k)], \quad (5.44)$$

где $x_k = x(t_k)$, $\theta_k = \theta(t_k)$, $t_k = k\epsilon$, $k = 0, 1, 2, \dots$, функция обратной связи $\zeta(\theta)$ удовлетворяет условию (2.53) при $2\rho\lambda_{\min}(\Gamma) \geq \alpha_0(1-\sigma)$.

Тогда для любой задачи из класса Ξ_5 система (5.43), (5.44) предельно диссипативна при $\epsilon \rightarrow 0$ и, кроме того, для некоторого $c = c(\kappa, \|x(0)\|, \|\theta_0\|)$ справедлива оценка

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) \leq \Delta_* + \frac{\rho'}{\kappa \alpha_0(1-\sigma)} + c\epsilon. \quad (5.45)$$

В частности, для любого $\delta > 0$ существуют $\kappa_0 = \kappa_0(\delta)$, $\epsilon_0 = \epsilon_0(\kappa, \delta)$ такие, что при $\kappa > \kappa_0$, $\epsilon < \epsilon_0$ система (5.43), (5.44) оценочно δ -оптимальна в классе Ξ_5 .

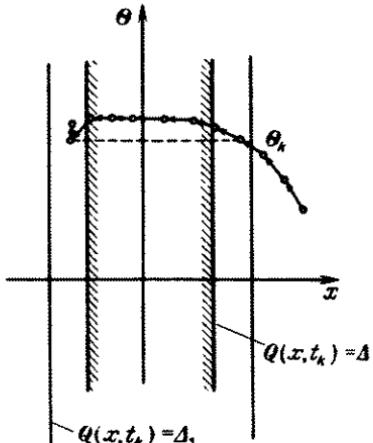
Другой способ регуляризации, заключающийся во введении в алгоритм адаптации зоны нечувствительности, не обеспечивает экспоненциальной диссипативности непрерывной системы, и теорема 5.5 оказывается неприменимой. Тем не менее, после некоторой модификации алгоритм с зоной нечувствительности сохраняет работоспособность при дискретизации. Модификация заключается во введении в алгоритм "памяти", предотвращающей возникновение нежелательных скользящих режимов. Модифицированный алгоритм адаптации определяется заданием положительных чисел Δ, Δ_1 ($\Delta < \Delta_1$) и имеет вид [57]

$$\theta_k = \begin{cases} \theta_k - \epsilon \Gamma \nabla_\theta \omega(x_k, \theta_k, t_k) & \text{при } Q(x_k, t_k) \geq \Delta, Q(x_{k-1}, t_{k-1}) \geq \Delta, \\ d_k & \text{при } Q(x_k, t_k) \geq \Delta, Q(x_{k-1}, t_{k-1}) < \Delta, \\ \theta_k & \text{при } Q(x_k, t_k) < \Delta, \end{cases} \quad (5.46)$$

$$d_{k+1} = \begin{cases} \theta_k & \text{при } Q(x_k, t_k) \leq \Delta_1, Q(x_{k-1}, t_{k-1}) > \Delta_1, \\ d_k & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5.47)$$

Геометрический смысл алгоритма (5.46), (5.47) состоит в следующем (см. рис. 5.1). В пространстве состояний $\{x, \theta\}$ аддитивной системы

Рис. 5.1. Геометрический смысл алгоритма (5.46), (5.47)



когда уравнения объекта не зависят явно от времени.

Теорема 5.6 [57]. Пусть выполнены условия A1, B1, C, D2 и неравенства

$$\|\nabla Q(x)\|^2 \leq \alpha_1 Q(x), \quad \|\nabla^2 Q(x)\| \leq \alpha_2, \quad \Delta > \frac{\Delta_\phi^2 \alpha_1}{\alpha_0^2}.$$

Тогда существуют убывающая функция $\bar{\gamma}(\cdot) > 0$ и возрастающая функция $\bar{\rho}(\cdot)$ такие, что в системе (5.43), (5.46), (5.47) при $\epsilon < \bar{\gamma}(\|z_0\|)$ достигаются цели управления:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q(x_k) \leq \Delta_1, \quad \|\theta_k\| \leq \text{const}, \quad (5.48)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t)) \leq \Delta_1 + \bar{\rho}(\|z_0\|) \epsilon. \quad (5.49)$$

5.2.3. Сходимость градиентных алгоритмов при зависимых входах. Метод усреднения можно эффективно применять к анализу дискретных стохастических систем (5.15), (5.16). Сформулируем соответствующий результат применительно к практически важному случаю, когда уравнение (5.16) описывает алгоритм градиентного типа, т.е. имеет вид

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \gamma_k \nabla_{\theta} Q(\theta_k, x_k), \quad (5.50)$$

где $Q(\cdot)$ – целевая функция, характеризующая достижение цели адаптации (см. главы 1, 4).

Существенным условием известных теорем [141] о сходимости градиентных алгоритмов является независимость входных воздействий x_k . Это условие затрудняет использование теорем в задачах управления динамическими объектами, так как в системе (5.15) векторы x_k являются, вообще говоря, стохастически зависимыми. Применение метода непрерывных моделей позволяет установить сходимость градиентных алгоритмов для случая зависимых воздействий.

Однако совсем отказаться от условия независимости не удается. Приходится требовать, чтобы последовательность входов x удовлетворяла

выделяются два множества – "трубки" $\{Q(x, t_k) < \Delta\}$ и $\{Q(x, t_k) < \Delta_1\}$. Значение вспомогательного вектора d_k ("память") полагается равным значению θ_k при входе траектории системы в "широкую трубку". Сам вектор θ_k меняется по обычному алгоритму скоростного градиента до входления в "узкую трубку", не меняется внутри "узкой трубки" и полагается равным "запомненному" значению d_k при выходе из "узкой трубки".

Условия работоспособности системы сформулируем для стационарного случая, и оценочная функция не зависит явно

так называемому *условию перемешивания*, выражающему ослабление зависимости между x_k и x_s при $|k-s| \rightarrow \infty$. Условия перемешивания в различных формах применяются в теории вероятностей при выводе предельных теорем для зависимых случайных величин. Мы будем использовать следующее определение.

Определение 5.3 [74]. Пусть η_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ — случайный процесс. Обозначим через \mathcal{A}_s^t σ -алгебру, порожденную случайными величинами η_s , $s \leq k \leq t$, где $0 \leq s \leq t \leq \infty$. Говорят, что процесс η_k удовлетворяет *условию сильного перемешивания*, если

$$\alpha_r = \sup_k \sup_{\varphi, \psi} |M_{\varphi\psi} - M_\varphi M_\psi| \rightarrow 0$$

при $r \rightarrow \infty$, где φ — случайная величина, измеримая*) относительно \mathcal{A}_0^k , ψ — случайная величина, измеримая относительно \mathcal{A}_{k+r}^∞ , причем $|\varphi| \leq 1$, $|\psi| \leq 1$. Величина α_r называется *коэффициентом перемешивания*.

Широкий класс случайных процессов, удовлетворяющих условию сильного перемешивания, образуют марковские процессы, порождаемые устойчивыми стохастическими разностными уравнениями [26, 74]. В частности, этим свойством обладает процесс $x_k \in R^n$, порожденный линейным уравнением

$$x_{k+1} = Gx_k + B\varphi_k, \quad (5.51)$$

где $\varphi_k \in R^m$ — ограниченные с вероятностью 1 независимые случайные векторы, а матрица G имеет собственные числа внутри единичного круга. Можно показать, что коэффициент перемешивания процесса (5.51) убывает экспоненциально: $\alpha_r \leq c\rho^r$, где $c > 0$, $0 < \rho < 1$.

Теорема 5.7. Пусть выполнены следующие условия:

1. Для любого θ существует $\lim_{k \rightarrow \infty} M Q(\theta, x_k) = J(\theta)$, причем функция $J(\theta)$ непрерывно дифференцируема, $J(\theta) \rightarrow +\infty$ при $\|\theta\| \rightarrow \infty$ и множество $\Omega_0 = \{\theta : \nabla J(\theta) = 0\}$ ограничено.

2. Существуют числа $L > 0$, $\kappa > 0$ и область D такие, что $\|\nabla_\theta Q(\theta, x)\| \leq \kappa$,

$$\|\nabla_\theta Q(\theta, x) - \nabla_\theta Q(\theta', x')\| \leq L \|\theta - \theta'\|$$

для любого $x \in D$, причем $x_k \in D$ с вероятностью единица.

3. Величины шагов γ_k алгоритма (5.50) удовлетворяют при некотором $p \geq 2$ условиям

$$\gamma_{k+1} \leq \gamma_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^p < \infty. \quad (5.52)$$

4. Случайный процесс x_k удовлетворяет условию сильного перемешивания с коэффициентом перемешивания α_k , причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{p-1} \alpha_k^{1/2} < \infty.$$

*) Измеримость случайной величины φ относительно σ -алгебры \mathcal{A}_s^t означает, что значения φ полностью определяются значениями η_k при $s \leq k \leq t$.

5. Почти всякая траектория θ_k содержит ограниченную подпоследовательность θ_{k_s} , $s = 1, 2, \dots$

Тогда $\theta_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \Omega_0$ при $k \rightarrow \infty$.

Можно показать, кроме того, что если все точки множества Ω_0 изолированы, то $\theta_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \theta_*$, где θ_* — один из локальных минимумов функции $J(\theta)$.

Утверждение теоремы выводится из более общего результата [57], устанавливающего условия, при которых устойчивость исходного стохастического разностного уравнения (5.16) следует из устойчивости его непрерывной модели (5.23), имеющей вид $\dot{\theta} = -\nabla J(\theta)$ для алгоритма (5.50). Для доказательства устойчивости модели используется функция Ляпунова $V(\theta) = J(\theta)$. Теорема 5.7 распространяет утверждение теоремы 4.3 на случай зависимых входов x_k и многоэкстремальных функционалов $J(\theta)$. Кроме того, допускается более медленное убывание величин шагов алгоритма, поскольку условия (5.52) слабее стандартных условий Роббинса — Монро (дополнительное требование монотонности γ_k с практической точки зрения несущественно). Например, последовательность $\gamma_k = 1/(k+1)^\beta$ удовлетворяет (5.52) для некоторого $p \geq 2$ при $0 < \beta \leq 1$, а для $p = 2$ — лишь при $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$.

§ 5.3. Методика синтеза адаптивных систем управления объектами с разделяющимися движениями. Примеры

Полученные результаты дают возможность сформулировать методику синтеза адаптивных систем управления объектами с разделяющимися движениями. Методика развивается на несколько этапов, при описании которых будем считать, что целевая функция $Q(x, t)$ и структура основного контура уже выбраны в соответствии с условиями задачи (см. § 2.3).

Этап 1. Выделение быстрых и медленных переменных. Математическая модель ОНО разбивается на быструю и медленную подсистемы, и вводится малый параметр ϵ так, чтобы уравнения ОНО приняли вид (5.26) (или вид (5.33), если нельзя пренебречь неизмеряемыми возмущениями и погрешностями модели). Если имеющейся априорной информации недостаточно для разделения движений в системе, то сравниваются величины коэффициентов уравнений (исходных или линеаризованных). Если существенной (на порядок) разницы в величинах коэффициентов не наблюдается, пытаются добиться ее при помощи преобразования переменных (например, линейной замены с целью выделения доминирующих собственных чисел ОНО [214, 253]). Наконец, в ряде случаев эффект разделения движений возникает в замкнутой системе лишь при надлежащем выборе законов управления и наблюдения в основном контуре системы [1, 25]. Тогда на данном этапе следует определить требования к соответствующим законам.

Этап 2. Редуцирование математической модели ОНО и ЦУ, синтез алгоритма адаптации. Выписываются уравнения редуцированных моделей ОНО (5.28) или (5.34). Опреде-

ляется редуцированная целевая функция $\bar{Q}(x_1, t)$. Выписывается алгоритм адаптации – алгоритм скоростного градиента в форме (5.29), (5.35) или (5.36).

Этап 3. Проверка условий применимости метода к редуцированной системе. Основное из условий применимости алгоритмов скоростного градиента – условие достижимости (условие 2 теоремы 5.1). Его выполнение подтверждает правильность выбора структуры системы, так как означает существование "идеального" регулятора, при котором ЦУ в системе достигается с экспоненциальной скоростью. Невыполнение означает необходимость вернуться к первым этапам (например, для дальнейшего упрощения модели ОНО). Проводится предварительный расчет параметров адаптивного регулятора (выбор эталонной модели, коэффициентов усиления и т.п.).

Этап 4. Проверка условий применимости метода к исходной системе. Проверка начинается с установления свойства равномерной экспоненциальной устойчивости быстрой подсистемы. Наличие этого свойства означает существование $\epsilon_0 > 0$ – границы допустимого уровня сингулярных возмущений. Чтобы оценить величину ϵ_0 , строится "быстрая" функция Ляпунова $V_2(\cdot)$ и оцениваются параметры функций $V_1(\cdot)$, $V_2(\cdot)$ – числа $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ и векторы $x_1^*(t)$, c_* . Затем для фиксированного $R > 0$ вычисляются оценки величин $L_i(R)$ и, наконец, оценка ϵ_0 в соответствии с теоремами 5.1, 5.2.

В практических задачах динамика системы искажается помехами измерений, вариациями задающего воздействия, погрешностями дискретизации при реализации алгоритма в ЦВМ и т.д. Поэтому предпочтительнее применение модифицированных алгоритмов (5.35), (5.36).

Этап 5. Уточнение параметров алгоритма по результатам моделирования на ЦВМ. Окончательный выбор параметров алгоритма адаптивного управления и заключение о его работоспособности делаются по результатам моделирования на ЦВМ. Сначала проводится серия машинных экспериментов с редуцированной моделью системы:

- корректировка предварительно рассчитанных параметров алгоритма с целью выбора базовых значений, обеспечивающих устойчивую работу системы;
- поочередные вариации параметров алгоритма от базовых значений с целью определения степени их влияния на качество системы;
- оптимизация качества системы по наиболее существенным параметрам.

Качество системы определяется как наихудшее значение какого-либо типового показателя, взятое по представительной выборке параметров неопределенности: $\xi \in \Xi$. Затем в модель системы поочередно вводятся факторы, отброшенные при редуцировании, и проводятся аналогичные серии экспериментов так, чтобы окончательную корректировку параметров алгоритма проводить по исходной модели системы. Ввиду большого объема работ по моделированию целесообразно на этом этапе использовать специализированные пакеты прикладных программ (см. главу 6).

Кроме того, оказывается полезным использование теоретических оценок, полученных в этой главе. Например, в теоремах 5.2, 5.5, 5.6 были

выведены соотношения типа

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t)) \leq a + b\epsilon, \quad (5.52)$$

где $\epsilon > 0$ – малый параметр (параметр сингулярности – в схеме п. 5.1.2, шаг дискретности – в схеме п. 5.1.3 и т.д.). Непосредственное применение формулы (5.52) затруднено, так как оценки величин a, b , вытекающие из соответствующих теорем, оказываются слишком грубыми, завышенными и зависят от неизвестных параметров ОУ. Однако можно воспользоваться эвристическим приемом, аналогичным известному правилу Рунге (методу двойного просчета) для оценки погрешности численного интегрирования [20]. Из формулы (5.52) видно, что зависимость предельной точности от ϵ линейна. Выполним моделирование системы при двух различных величинах параметра ϵ (один из процессов может соответствовать $\epsilon = 0$, т.е. редуцированной системе). Затем определим оценки \hat{a}, \hat{b} величин a, b , решая систему линейных уравнений

$$Q_i = \hat{a} + \hat{b}\epsilon_i, \quad i = 1, 2.$$

Подставляя полученные оценки в (5.52), можно оценивать точность системы при других ϵ , определять допустимый шаг дискретности и т.д.

В качестве примера применения второй схемы разделения движений проведем синтез адаптивной системы стабилизации ОУ, описываемого уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = A_1 x_1 + b_1 \tilde{u} + f(t), \quad y = L_1 x_1, \quad (5.53)$$

$$\frac{\epsilon dx_2}{dt} = A_2 x_2 + b_2 u, \quad \tilde{u} = L_2 x_2, \quad (5.54)$$

где $x_1 \in R^{n_1}; x_2 \in R^{n_2}; \tilde{u}, u \in R^1; y \in R^l; \epsilon > 0$ – малый параметр, $f(t)$ – ограниченное неизмеряемое возмущение. Уравнение (5.54) описывает малойнерционное звено (например, привод), стоящее на входе ОУ (5.53). Будем считать это звено асимптотически устойчивым, т.е. матрицу A_2 предполагать гурвицевой.

В соответствии с методикой строим упрощенное уравнение ОУ. Очевидно, $x_2^* = -A_2^{-1}b_2 u$, и, следовательно, редуцированная система имеет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = A_1 x_1 + W_2(0) b_1 u + f(t), \quad y = L_1 x_1, \quad (5.55)$$

где $W_2(\lambda) = L_2(\lambda I - A_2)^{-1}b_2$ – передаточная функция звена (5.54). Для системы (5.55) можно синтезировать адаптивный регулятор с неявной эталонной моделью (см. главу 3), описываемый уравнениями

$$u = c^T y, \quad (5.56)$$

$$\frac{dc}{dt} = -\gamma(g^T y) \Gamma y - \alpha(c - c_0), \quad (5.57)$$

где $c = c(t) \in R^l$ – вектор настраиваемых параметров, числа $\gamma > 0, \alpha > 0$.

вектор $c_0 \in R^l$ и $l \times l$ -матрица $\Gamma = \Gamma^T > 0$ – параметры регулятора. Алгоритм адаптации (5.57) является алгоритмом скоростного градиента при целевой функции $Q(x, t) = (g^T y)^2$.

Из результатов главы 3 следует, что система (5.55)–(5.57) обладает свойством экспоненциальной диссипативности, если дробно-рациональная функция $\chi(\lambda) = W_2(0)g^T L(\lambda I - A_1)^{-1}b_1$ строго минимально-фазовая (ее числитель – гурвицев многочлен степени $n - 1$ с положительными коэффициентами). При синтезе регулятора для упрощенного ОУ (5.55) о звене (5.54) требуется знать лишь знак константы $W_2(0)$. Применяя теорему 5.2, получаем, что система (5.53), (5.54), (5.56), (5.57) является предельно диссипативной при $\epsilon \rightarrow 0$, т.е. практически работоспособной при малых ϵ , если работоспособна система (5.55)–(5.57). При этом соотношения (5.38) дают оценку предельного множества исходной системы.

Продемонстрируем также применение первой схемы разделения движений на примере анализа адаптивной системы с явной эталонной моделью. Пусть объект управления описывается уравнением

$$\dot{x}_0 = Ax_0 + bu, \quad (5.58)$$

где $x_0 \in R^n$ – вектор состояния объекта, $u = u(t)$ – скалярное управляющее воздействие, вырабатываемое адаптивным регулятором

$$u = \theta^T x_0 + r, \quad (5.59)$$

$$\dot{\theta} = -\gamma(g^T e)x_0, \quad e = x_0 - x_m, \quad (5.60)$$

$$\dot{x}_m = A_m x_m + br. \quad (5.61)$$

Здесь $\theta = \theta(t) \in R^l$ – вектор настраиваемых параметров регулятора, $x_m \in R^n$ – вектор состояния эталонной модели (5.61), $r = r(t)$ – скалярное задающее воздействие; A, A_m – $n \times n$ -матрицы, $b \in R^n$, $g \in R^n$, $\gamma > 0$. Матрица параметров объекта A считается неизвестной и удовлетворяющей условию согласованности объекта и эталонной модели: существует вектор $\theta_* \in R^l$ такой, что

$$A + b\theta_* = A_m. \quad (5.62)$$

Для простоты дальнейших выкладок вектор b считается известным, а состояние объекта x_0 – доступным измерению (случай, когда эти предположения не выполнены, рассматривается аналогично).

Известно (см., например, [178]), что если матрица параметров эталонной модели A_m гурвицева, функция $r(t)$ ограничена при $t \geq 0$, а передаточная функция $\tilde{W}(\lambda) = g^T(\lambda I - A_m)^{-1}b$ строго пассивна (т.е. удовлетворяет условию $\text{Re } \tilde{W}(\lambda) \geq \delta/(1 + \omega^2)$ для некоторого $\delta > 0$ и любых $\omega \in R^1$), то в системе (5.58)–(5.61) достигается цель управления $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и все траектории системы ограничены. Известны также условия разнообразия (невырожденности, см. теоремы 2.8, 2.9), при которых коэффициенты регулятора $\theta(t)$ сходятся при $t \rightarrow \infty$ к "эталонным" значениям θ_* из условия (5.62). Однако, кроме этих сведений, проектировщику системы управления важно иметь дополнительную информацию о динамике системы (5.58)–(5.61), например, о скорости сходимости процесса настройки $\theta(t) - \theta_*$. В силу сложности аналитического исследования системы для получения этой информации обычно приходится проводить боль-

шой объем работ по моделированию, и поэтому для сокращения сроков проектирования системы желательно иметь хотя бы грубые предварительные оценки ее динамики. Такие оценки можно получить методом разделения движений.

Для применения метода введем предположение о малости параметра γ , определяющего скорость адаптации. Чтобы выписать явно упрощенную систему, зададимся классом входных воздействий $r(t)$, представимых в виде суммы конечного числа гармонических колебаний:

$$r(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n_r} \rho_k e^{j(\omega_k t + \varphi_k)}. \quad (5.63)$$

Сначала построим упрощенную систему методом усреднения. Вырожденная система (5.3) в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= (A + b\theta^T)x_0 + br, \quad \theta = \text{const}, \\ \dot{x}_M &= A_M x_M + br. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Для существования предела (5.5) приходится предполагать устойчивость системы (5.64), т.е. гурвицевость матрицы $A + b\theta^T$. В конкретных задачах это предположение может не выполняться, особенно на начальном этапе процесса адаптации, и тогда метод усреднения окажется неприменимым. Учитывая это, будем рассматривать заключительную стадию процесса адаптации и режим в ОНО (5.64), приближающийся к установившемуся. При этом, не делая большой ошибки, можно заменить $x_0(t)$ на $x_M(t)$. Учитывая, что $\dot{e} = A_M e + b(\theta - \theta_*)^T x_0$ и, следовательно,

$$g^T e = \bar{W}(p)[(\theta - \theta_M)^T x_0] = (\theta - \theta_*)^T \bar{W}(p) x_0,$$

где $p = d/dt$, имеем

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(\theta) &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (g^T e) x_0 dt = \\ &= - \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_0 [\bar{W}(p) x_0]^T dt \right] (\theta - \theta_*). \end{aligned}$$

Заменяя $x_0(t)$ на $x_M(t)$, получаем усредненное уравнение алгоритма адаптации в виде

$$\dot{\theta} = -\gamma R(\theta - \theta_*). \quad (5.65)$$

где

$$R \approx \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_M [\bar{W}(p) x_M]^T dt. \quad (5.66)$$

Поскольку в установившемся режиме

$$x_M(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n_r} W_M(j\omega_k) \rho_k e^{j(\omega_k t + \varphi_k)},$$

где $W_M(\lambda) = (\lambda I - A_M)^{-1} b$, то, выполняя интегрирование, можно запи-

сать (5.66) в виде

$$R \approx \sum_{k=1}^{n_r} \rho_k^2 [\operatorname{Re} \bar{W}(j\omega_k)] [W_M(j\omega_k) W_M(-j\omega_k)^T]. \quad (5.67)$$

Таким образом, при сделанных допущениях процесс адаптации приближенно описывается линейным уравнением (5.65) с неотрицательной (в силу пассивности функции $\bar{W}(\lambda)$) матрицей вида (5.66). Решение (5.65) имеет вид

$$\bar{\theta}(t) = \theta_* + e^{-\gamma R t} (\theta(0) - \theta_*) \quad (5.68)$$

и аппроксимирует при малых γ решение $\theta(t)$ исходной системы.

Формула (5.68) показывает, что $\bar{\theta}(t) \rightarrow \theta_*$ экспоненциально, если $R > 0$, а показатель сходимости пропорционален наименьшему собственному числу $\lambda_{\min}(R)$ матрицы R .

Выражение (5.67) для R легко вычисляется на ЭВМ и может быть использовано, например, для выбора задающего воздействия и параметров алгоритма с целью ускорения сходимости (увеличения $\lambda_{\min}(R)$). Для положительности матрицы R достаточно, чтобы $n_r \geq n$ и эталонная модель (5.61) была вполне управляема (см., например, [178], теорема 2.4.3).

Аналогичным образом строится усредненная система для случая, когда сигнал $r(t)$ является стационарным случайным процессом. Если процесс $r(t)$ получен при пропускании белого шума через формирующий фильтр с передаточной функцией $W_F(\lambda)$ так, что спектральная плотность $r(t)$ равна $|W_F(\lambda)|^2 \sigma^2$, то усредненное уравнение вновь будет иметь вид (5.65), а матрица R будет определяться соотношением

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} \bar{W}(j\omega)] [W_M(j\omega) W_M(-j\omega)^T] |W_F(j\omega)|^2 d\omega$$

и также может быть вычислена на ЭВМ по известным формулам (см., например, [133]).

Попытаемся теперь применить для упрощения системы (5.58)–(5.61) метод сингулярных возмущений. Для этого надо в (5.58), (5.59), (5.61) положить $\dot{x}_0 = \dot{x}_M = 0$, вычислить из полученных уравнений x_0, x_M и подставить полученные выражения в алгоритм адаптации (5.60). Упрощенная система будет иметь вид

$$\dot{\bar{\theta}} = -\gamma g^T A_M^{-1} b x_0^*(t) x_0^*(t)^T (\bar{\theta} - \theta_*), \quad (5.69)$$

где $x_0^*(t) = -(A + b\bar{\theta}^T)^{-1} b r(t)$. Система (5.69), в отличие от (5.65), нелинейна и нестационарна, что затрудняет ее исследование. Однако если темп изменения $r(t)$ меньше темпа процессов в объекте (5.58), так что $x_0(t) \approx \approx x_0^*(t)$, то (5.69) точнее, чем (5.65), аппроксимирует реальный процесс адаптации. Подчеркнем, что, как и в случае метода усреднения, говорить об аппроксимации можно лишь при условии гурвицевости матрицы $A + b\bar{\theta}^T$. Кроме того, не все допущения, наложенные по ходу решения, достаточно обоснованы. Тем не менее, мы получили "плохой ответ на вопрос, на который другие методы не дают никакого ответа"!

§ 5.5. Дискретные или непрерывные?

Рассматривавшиеся в этой главе результаты о декомпозиции в аддитивных системах относятся к двум способам декомпозиции. Первый способ использует методы усреднения и сингулярных возмущений и разделяет быстрые и медленные движения, оставляя описание системы непрерывным по времени. Второй способ основан на выделении эффекта дискретизации в непрерывно-дискретной системе. Для обоих способов были приведены оценки погрешности декомпозиции. К сожалению, существующие результаты в этой области не являются пока ни полными, ни окончательными. В основном они говорят о грубости систем, показывая, что при малых значениях некоторых параметров свойства исходной системы и ее упрощенной модели близки. В практических задачах величины "малых параметров" конечны и точность оценок обычно оказывается недостаточной. Тем не менее, аналог правила Рунге, описанный в § 5.3, может оказаться полезным.

Есть, однако, область применений, где и без использования оценок результаты оказываются достаточно убедительными. Это – подход к сравнительному анализу систем, состоящий в том, что в уравнения систем искусственно вводится малый параметр, затем строятся упрощенные модели систем, которые сравниваются между собой, и полученные выводы переносятся на исходные системы.

В качестве примера проведем, следуя [57], сравнение известного алгоритма Качмажа [199] и двухшагового алгоритма (4.36), предложенного в [119]. При оценивании вектора $\theta_* \in R^N$ параметров скалярного объекта $y_k = \theta_*^T x_k + \varphi_k$, где φ_k – помеха, $M\varphi_k = 0$, $M\varphi_k^2 = \sigma^2$. Очередная оценка θ' по алгоритму Качмажа является ближайшей к θ_* на прямой, проходящей через точку θ_k параллельно вектору x_k . Алгоритм [119], в отличие от этого, строит оценку θ''_{k+1} , ближайшую к θ_* на двумерной плоскости, проходящей через векторы x_k , θ_k . Оба алгоритма описываются соотношениями типа $\theta_{k+1} = \theta_k - F(x_k, y_k, \theta_k)$.

Введем эти соотношения малый параметр γ :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \gamma F(x_k, y_k, \theta_k),$$

и перейдем к усредненным непрерывным моделям вида $\dot{\theta} = A(\theta)$, где $A(\theta) = MF(x_k, y_k, \theta)$. Для простоты предположим, что векторы x_k независимы и нормально распределены, причем $Mx_k = 0$, $Mx_k x_k^T = \rho^2 I_N$. Тогда можно показать, что

$$M \frac{x_k x_k^T}{\|x_k\|^2} = \frac{1}{N} I_N.$$

Пользуясь центрированностью и независимостью помех, получим, что непрерывная модель алгоритма Качмажа имеет вид

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{N} (\theta - \theta_*). \quad (5.70)$$

Решение (5.70) строится явно:

$$\theta(t) = \theta_* + e^{-t/N} (\theta_0 - \theta_*),$$

что дает оценку скорости сходимости алгоритма Качмажа

$$\|\theta'_k - \theta_*\|^2 \approx \|\theta_0 - \theta_*\|^2 \exp\left(-\frac{2\gamma k}{N}\right). \quad (5.71)$$

Для алгоритма (4.36) получаем

$$A(\theta) = \frac{1}{N-1} (I_N - P_\theta)(\theta - \theta_*),$$

где $P_\theta = \theta\theta^T/\|\theta\|^2$ – матрица ортогонального проектирования на вектор θ . Известно [119], что для работы алгоритма (4.36) требуется выполнение начального условия $\theta_0''^T \theta_* = \|\theta_0''\|^2$. Отсюда следует, что на траекториях непрерывной модели алгоритма выполняется равенство $P_\theta(\theta - \theta_*) = 0$ и уравнение модели можно записать в виде

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{N-1} (\theta - \theta_*). \quad (5.72)$$

Таким образом, приближенная оценка скорости сходимости алгоритма (4.36) по модели (5.72) имеет вид

$$\|\theta''_k - \theta_*\|^2 \approx \|\theta_0 - \theta_*\|^2 \exp\left(-\frac{2\gamma k}{N-1}\right). \quad (5.73)$$

Сравнивая (5.71) и (5.73), видим, что переход от алгоритма Качмажа к алгоритму [119] равносителен (по скорости сходимости) уменьшению на единицу числа настраиваемых параметров. Этот вывод не зависит от величины γ .

Другие примеры анализа аддитивных систем по непрерывным моделям приведены в [57].

Сравнение алгоритмов по упрощенным моделям позволяет исключить влияние некоторых "мешающих" параметров (в примере – параметры σ^2 , ρ^2). При этом результаты сравнения становятся хоть и приближенными, но более наглядными. С другой стороны, при этом теряется возможность учета влияния упомянутых параметров.

По упрощенным моделям можно сравнивать не только алгоритмы, но и различные подходы к постановке (формализации) задач. Рассмотрим, например, объект управления, функционирующий непрерывно во времени, для которого нужно создать дискретный (реализованный на ЭВМ) алгоритм управления. Объект можно описывать как непрерывными, так и дискретными математическими моделями. Значит, если требуется синтезировать дискретный алгоритм управления, то возможны два подхода к постановке и решению задачи. Первый подход: описать ОУ дискретной моделью и непосредственно по ней построить дискретный алгоритм управления. Второй подход: описать ОУ непрерывной моделью, построить непрерывный алгоритм управления, а после этого подвергнуть его дискретизации. Какой из двух подходов выгодней? Конечно, ответ зависит от конкретной ситуации, но нельзя ли дать и общие рекомендации?

Будем исходить из того, что качество дискретной системы не ухудшается при уменьшении шага дискретности h , поскольку при этом расши-

ряется множество возможных функций управления $\{u(t)\}$. Значит, оно не может быть лучше, чем качество непрерывной системы, полученной при $h \rightarrow 0$ (в [135] на примере задач оптимального управления линейными объектами показано, что качество дискретных систем даже хуже качества непрерывных и приближается к нему при $h \rightarrow 0$). Таким образом, при любом подходе целесообразно работать в области малых h , т.е. в сфере действия метода непрерывных моделей (см. п.п. 5.1.2, 5.2.2 и [57, 244, 245]).

Для конкретности рассмотрим синтез адаптивного управления для ОУ, описанного уравнением 1-го порядка

$$\dot{y} = ay + bu + \varphi(t), \quad (5.74)$$

где все величины скалярны, $a, b, \varphi(t)$ неизвестны, причем $|\varphi(t)| \leq \Delta_\varphi$. Требуется синтезировать дискретный регулятор, выдающий $u(t) = u_k$ при $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ по измерениям $y_i = y(t_i)$, $0 \leq i \leq k$, где $t_k = kh$, $h > 0$, и обеспечивающий ЦУ

$$|y_{k+1} - r_k| \leq \Delta_y, \quad (5.75)$$

где $r_k = r(t_k)$ — задающее воздействие, $\Delta_y > 0$.

Сначала пойдем по первому пути и построим дискретную модель ОУ (5.74):

$$y_{k+1} = \bar{a}y_k + \bar{b}u_k + \varphi_k, \quad (5.76)$$

где

$$\bar{a} = e^{ah}, \quad \bar{b} = \frac{b(e^{ah} - 1)}{a}, \quad |\varphi_k| \leq \bar{\Delta}_\varphi = \frac{\Delta_\varphi(e^{ah} - 1)}{a}.$$

Чтобы синтезировать по модели (5.76) дискретный алгоритм адаптивного управления на основе результатов п. 4.10.1, необходимо задать эталонную модель (4.88) или, что то же самое, функцию невязки δ_{k+1} вида (4.87). Попробуем сначала взять $\delta_{k+1} = y_{k+1} - r_k$. Тогда линейный закон управления

$$u_k = \theta_k^T z_k, \quad (5.77)$$

где $z_k = \text{col}(y_k, r_k)$ при $\theta_k = \theta_*$, $\theta_* = \text{col}(\bar{a} \bar{b}^{-1}, \bar{b}^{-1})$, обеспечивает ЦУ (5.75) при $\Delta_y = \bar{\Delta}_\varphi$ за один шаг. Из теоремы 4.11 следует, что если θ_k в (5.77) будет вырабатываться алгоритмом адаптации (4.90), то в системе будет обеспечиваться ЦУ (5.75) при любом $\Delta_y > \bar{\Delta}_\varphi$. Однако ясно, что $\theta_* \sim h^{-1}$ при $h \rightarrow 0$, поскольку $e^{ah} - 1 \sim ah$. Поэтому в синтезированной системе при малых h могут нарушаться ограничения на управления (которые реально существуют, даже если они не включены в формальную постановку задачи). Кроме того, если ошибки измерения y_k, r_k имеют некоторый уровень d , то они приведут к ошибкам в управлении уровня dh^{-1} , что также неприемлемо. Таким образом, требование компенсации динамики ОУ за один шаг оказывается слишком жестким. Это — первый вывод из сопоставления дискретного и непрерывного подходов.

Введем непрерывную эталонную модель

$$\dot{y}^* = a_M y^* + b_M r(t), \quad (5.78)$$

дискретизация которой с шагом h дает дискретную ЭМ

$$y_{k+1}^* = \bar{a}_M y_k^* + \bar{b}_M r_k, \quad (5.79)$$

где $\bar{a}_M = e^{a_M h}$, $\bar{b}_M = b(e^{a_M h} - 1)/a_M$, и зададим невязку

$$\delta_{k+1} = y_{k+1} - \bar{a}_M y_k - \bar{b}_M r_k. \quad (5.80)$$

Тогда, если ЭМ (5.79) устойчива ($a_M < 0$), то закон (5.77) при $\theta_k = \theta_*$, $\theta_* = \text{col}((a_M - a)\bar{b}^{-1}, \bar{b}_M\bar{b}^{-1})$ обеспечивает ЦУ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |y_{k+1} - y_{k+1}^*| \leq \bar{\Delta}_\varphi (1 - \bar{a}_M)^{-1}, \quad (5.81)$$

а также ограниченность θ_* при $h \rightarrow 0$. Выпишем алгоритм адаптации (4.90) для данной задачи:

$$\theta_{k+1} = \begin{cases} \theta_k - \gamma \frac{\delta_{k+1}}{\|z_k\|^2} z_k & \text{при } |\delta_k| > \Delta, \\ \theta_k & \text{при } |\delta_{k+1}| \leq \Delta, \end{cases} \quad (5.82)$$

где $0 < \gamma < 2(1 - \bar{\Delta}_\varphi/\Delta)$, $\Delta > \bar{\Delta}_\varphi$, и построим для системы (5.74), (5.77), (5.80), (5.82) упрощенную непрерывную модель. При малых h имеем

$$\begin{aligned} \delta_{k+1} &= y_{k+1} - y_k + (1 - \bar{a}_M)y_k - \bar{b}_M r_k = \\ &= h[y(t_k) - a_M y(t_k) - b_M r(t_k)] + o(h), \end{aligned}$$

поэтому, пренебрегая членами высшего порядка малости, получим модель
 $\dot{y} = ay + bu + \varphi(t)$, $u = \theta_1 y + \theta_2 r(t)$,

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = -\gamma \delta(t) y \\ \dot{\theta}_2 = -\gamma \delta(t) r(t) \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{при } |\delta(t)| > \Delta, \\ \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0 \quad \text{при } |\delta(t)| \leq \Delta, \end{array} \right\} \quad (5.83)$$

где

$$\Delta > \bar{\Delta}_\varphi, \quad 0 < \gamma < 2(1 - \bar{\Delta}_\varphi/\Delta), \quad \delta(t) = \dot{y} - a_M y - b_M r(t).$$

Алгоритм адаптации в системе (5.83) относится к классу непрерывных алгоритмов скоростного градиента с интегральным целевым функционалом. (Это означает, кстати, что к системе (5.83) можно пройти, идя по второму пути синтеза). Наличие в $\delta(t)$ старшей производной $\dot{y}(t)$ предопределяет, с одной стороны, высокое динамическое качество системы (5.83), с другой — характер и уровень погрешности реализации. Эти выводы переносятся при помощи метода непрерывных моделей на исходную дискретно-непрерывную систему, а также могут быть распространены на многомерный случай.

Полученные результаты еще раз подтверждают замечание М.Г. Крейна о том, что "установление связей между дискретными и непрерывными системами проливает новый свет на свойства и тех и других". Таким образом, дискретный и непрерывный подход не конкурируют, а дополняют друг друга. Что же касается сравнения и выбора алгоритмов, то этому посвящена следующая глава книги.

Глава 6

АВТОМАТИЗАЦИЯ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Описывается общая методика синтеза АдСУ с использованием результатов предыдущих глав книги. Описывается комплекс программных средств анализа и синтеза АдСУ, основанный на инструментальной программной системе АВАНС и являющийся программной поддержкой методики. Приводятся примеры автоматизированного анализа и синтеза АдСУ. Изложены подходы к разработке и реализации алгоритмов управления на основе методологии нечетких множеств и экспертизных систем.

§ 6.1. Методика синтеза АдСУ

Разработчики систем управления обычно относятся к общим методикам и рецептам с изрядной долей скептицизма, справедливо полагая, что общие рецепты едва ли помогут преодолеть специфические трудности конкретной задачи. Начинающим изучать науку об управлении общие методики кажутся скучными, а специалистам — тривиальными. Если кому и окажется полезной такая методика, так это преподавателям, помогая связать изложение общих методов с конкретными примерами. Но не только интересы коллег-преподавателей заставили автора поместить этот параграф в книгу. Методика является основой для выработки общей структуры и требований к программному обеспечению анализа и синтеза АдСУ, рассмотрению которых посвящен следующий параграф. А использование согласованных методических и программных средств позволяет говорить об автоматизированной разработке алгоритмов управления, или, что то же самое, об автоматизированном проектировании алгоритмических структур систем управления.

Представленная ниже методика автоматизированного проектирования АдСУ разработана в [1] и основана на сведении исходной задачи путем ряда преобразований к более простой, для которой либо существует известное решение — прототип [52], либо удается синтезировать алгоритм управления одним из существующих методов. Таким образом, строится одно или несколько возможных решений исходной задачи (проектных вариантов). Выбор из проектных вариантов производится путем их сравнительного анализа сначала по предварительным, априорным оценкам их качества, затем по результатам моделирования на ЭВМ (вычислительных экспериментов) и, наконец, по результатам экспериментальных исследований и испытаний.

Методика автоматизированного проектирования АдСУ включает следующие этапы.

Этап 1. Содержательная постановка задачи синтеза АдСУ. На этом этапе производится классификация задачи адаптивного управления, составляется исходная математическая модель объекта управления, определяются технические требования к синтезируемой системе, а также класс допустимых алгоритмов управления.

При классификации задачи определяются основные признаки, характеризующие ее качественные особенности: входные и выходные переменные и параметры ОУ, тип модели ОУ, типы желаемых целей управления (ЦУ).

Входные переменные ОУ классифицируются на измеряемые внешние воздействия, неизмеряемые внешние воздействия (возмущения и помехи измерений), управляющие воздействия.

Выходные переменные делятся на регулируемые (в терминах которых задаются ЦУ) и промежуточные.

К *параметрам* относят величины, медленно (по сравнению с переменными) меняющиеся на отрезках времени, характерных для ОУ. При синтезе алгоритмов управления параметры считают постоянными. Для существенно нестационарных задач следует задавать параметризованные модели динамики (дрейфа) параметров, сводя тем самым задачу к стационарной [57, 82]. Параметры делятся на измеряемые и неизмеряемые (т.е. неизвестные).

При классификации переменных и параметров определяется диапазон и темп их изменений, возможная точность и период измерений.

Тип модели ОУ задается признаками: статическая – динамическая, линейная – нелинейная, стационарная – нестационарная, детерминированная – стохастическая, непрерывная – дискретная.

Основными типами целей управления являются стабилизация, регулирование, слежение (или программное управление), оптимизация.

При составлении исходной математической модели ОУ структура модели, как правило, определяется из анализа физических закономерностей, но может выводиться и из анализа экспериментальных данных.

В состав модели ОУ обычно включают модели среды (внешних воздействий), а также модели исполнительных и измерительных устройств. Наличие обратных связей по ошибке в системе управления снижает требования к точности модели ОУ. В адаптивной системе этот эффект проявляется еще сильнее за счет перестройки обратных связей. Поэтому модель ОУ должна выбираться в наиболее простом виде с минимальным числом параметров. Желательно преобразовать модель так, чтобы неизвестные параметры ξ_1, \dots, ξ_N входили в управление ОУ линейно. Класс адаптивности Ξ , характеризующий разброс возможных значений ξ , обычно задается в виде многогранника.

Технические требования к системе включают допустимые уровни ошибки в установившемся и переходном режимах, допустимые области изменения фазовых координат и управляющих воздействий, желаемый тип процессов в системе, а также функционалы, которые желательно оптимизировать.

Этап 2. Технико-экономическое обоснование. На этапе технико-экономического обоснования (ТЭО) устанавливается

техническая и экономическая целесообразность построения системы на основе принципов адаптации. Применение адаптивного подхода считается технически целесообразным, если существующие (неадаптивные) решения не обеспечивают требуемых технических характеристик системы во всем диапазоне возможных условий ее работы, а адаптивная система принципиально позволяет этого добиться. На этапе ТЭО анализ технической целесообразности сводится к проверке двойного неравенства

$$Q_* < Q_{\text{задан}} \leq Q_{\max},$$

где Q_{\max} – значение технической характеристики системы при существующем решении для наиболее неблагоприятных условий работы; $Q_{\text{задан}}$ – заданное допустимое значение технической характеристики; Q_* – значение технической характеристики при существующем решении для номинального (расчетного) режима.

Таким образом, на этапе ТЭО необходимо оценить величины Q_{\max} , Q_* для существующих решений. Это можно сделать либо аналитически, либо по результатам моделирования. Окончательный вывод о целесообразности применения адаптивной системы делается по результатам моделирования (см. ниже) после проверки для наиболее неблагоприятных условий работы неравенства:

$$Q_{\text{адапт}} < Q_{\text{задан}},$$

где $Q_{\text{адапт}}$ – значение технической характеристики адаптивной системы определяемое по результатам моделирования. При этом необходимо учитывать также требования технической реализуемости системы.

Для определения экономической целесообразности применения адаптивной системы производится оценка ожидаемого экономического эффекта с учетом следующих факторов:

- удорожание адаптивной системы из-за увеличения ее сложности;
- увеличение затрат на проектирование адаптивной системы;
- экономический эффект от повышения качества системы;
- экономический эффект от повышения надежности системы;
- экономический эффект от унификации системы, выражаящийся в сокращении затрат на проектирование, испытания, доводку и наладку системы для других однотипных процессов и для режимов, отличных от расчетного (номинального).

Этап 3. Формализация задачи. Результатом данного этапа является вариант формальной постановки (в смысле § 1.2) задачи синтеза АдСУ. Выписывается исходная модель ОУ в виде, соответствующем этапу 1 методик § 3.1, 4.2, 5.3. С учетом экспериментальных данных, если они имеются, определяется уровень возмущений $\Delta\varphi$ (погрешности модели ОУ также относят к возмущениям). Выделяется основное техническое требование к системе, исходя из которого назначается ЦУ и формируется целевая функция $Q(x, t)$ так, чтобы задать ЦУ в виде

$$Q(x(t), t) < \Delta \quad (t \geq t_*) \quad (6.1)$$

– основном для методов синтеза, рассмотренных в главах 2–5. Часть требований можно учесть, если формировать основную ЦУ на основе эталонной модели (явной или неявной). Остальные требования учитываются косвенным путем, на дальнейших этапах разработки системы.

Макроуровень

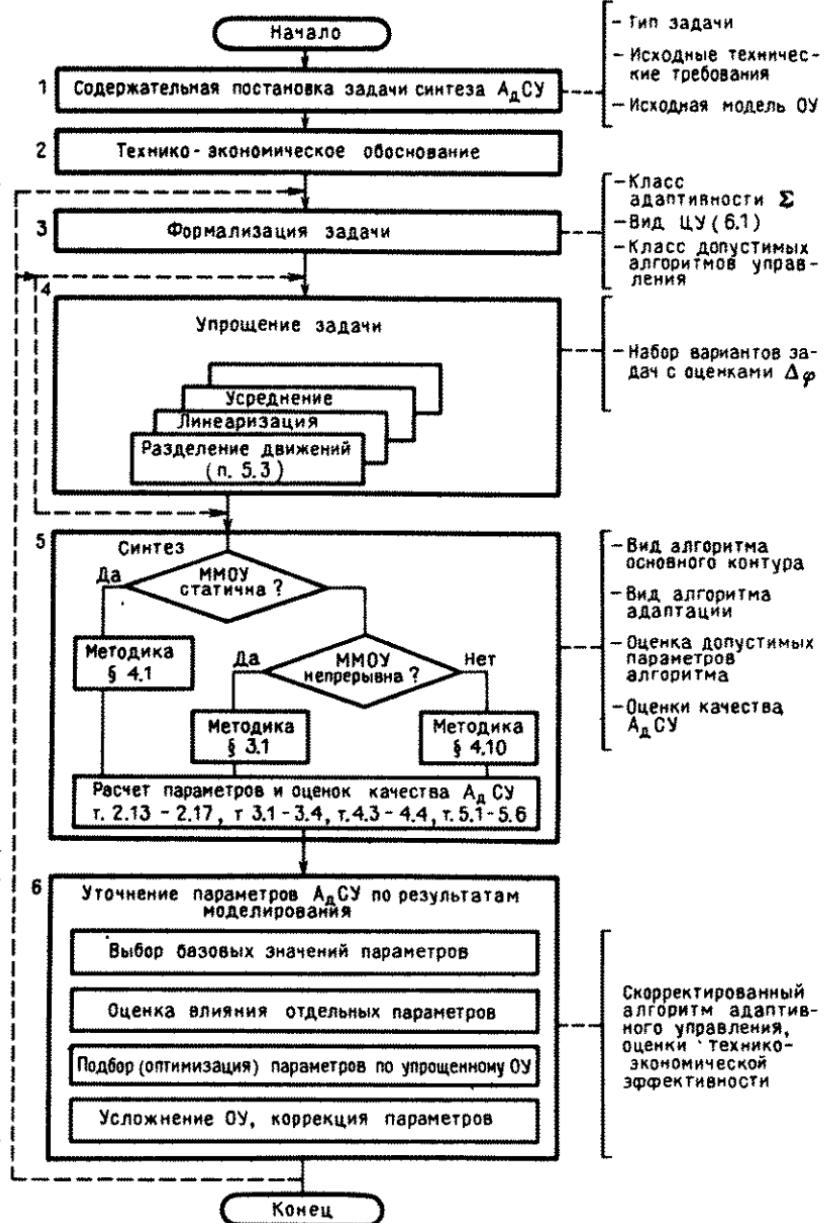


Рис. 6.1. Комплексная методика синтеза АдСУ

Таким образом, происходит переход от задачи, которую "нужно решить", к задаче, которую "можно решить". Этот переход неформален и неоднозначен, поэтому к данному этапу при разработке системы приходится неоднократно возвращаться.

Этап 4. Упрощение задачи. На этом этапе производится ряд преобразований задачи с целью упрощения ее решения. Основными видами преобразований модели ОУ являются: понижение порядка (редуцирование, выделение медленных движений), линеаризация, усреднение или отбрасывание возмущений. После каждого преобразования пересчитывается уровень возмущений Δ_φ (оценка погрешности модели ОУ). При оценке погрешности редуцирования в соответствии с этапами 1, 2 методики § 5.3, используются результаты теорем 5.1, 5.2. Для оценки эффекта отбрасывания возмущений используются результаты главы 2 (теоремы 2.13 – 2.17). Для оценки погрешности усреднения используются результаты [57].

Под преобразованием ЦУ понимается переход к другой (вторичной) ЦУ, более удобной для синтеза. Класс допустимых алгоритмов управления на данном этапе расширяется за счет ослаблений требований реализуемости (допускается использование некоторых недоступных измерению величин, нарушение ограничений на управление и т.п.). Результатом этапа является, как правило, набор вариантов формальной постановки задачи синтеза, каждый из которых используется на следующем этапе.

Этап 5. Формальный синтез. Производится выбор структуры и предварительный расчет параметров алгоритма адаптивного управления по методикам и оценкам, изложенным в главах 2 – 5. Для статических и дискретных динамических моделей ОУ используется методика § 4.1, 4.2, а для непрерывных динамических моделей ОУ – методика § 3.1. Результатами этапа являются предварительные оценки допустимых значений параметров и показателей качества для каждого варианта синтезированной системы.

Этап 6. Уточнение параметров адаптивной системы по результатам моделирования. Проводятся серии машинных экспериментов по исследованию, выбору и корректировке параметров синтезированной системы. Каждый вариант моделируется сначала в условиях упрощенной задачи, а затем, путем постепенных усложнений, в условиях исходной задачи с учетом всех ограничений. В целом этот этап аналогичен этапу 5 методики § 5.3 и соответствует микроуровню проектирования алгоритмической структуры АдСУ, подробно описанному в [1]. По результатам этапа производится сужение множества вариантов, оставляемых для продолжения разработки, и уточняются оценки их технико-экономической эффективности. Если же ни один вариант не является удовлетворительным, то происходит возврат к этапу 3 или этапу 4 для изменения либо способа упрощения, либо способа формализации задачи. Укрупненная схема описанной методики изображена на рис. 6.1.

§ 6.2. Программные средства анализа и синтеза адаптивных систем управления

Эффективность применения методики синтеза АдСУ, описанной выше, во многом определяется эффективностью поддерживающих ее программных средств. Необходимость применения ЭВМ возникает практически на всех этапах синтеза системы, и к программному обеспечению синтеза предъявляются определенные требования. Перечислим их.

В первую очередь ЭВМ применяется при имитационном моделировании, являющимся наиболее трудоемким действием при синтезе системы. Для сокращения трудоемкости следует использовать проблемно ориентированные системы моделирования со специализированными входными языками, позволяющими описывать структуру и задавать параметры моделируемой системы, задавать внешние воздействия, указывать требуемые выходные величины. На этапе упрощения задачи синтеза требуется применение программных модулей, реализующих преобразование систем (линейаризацию, редуцирование и т.п.). При оценке технико-экономической эффективности, выборе эталонной модели и т.п. необходимо рассчитывать характеристики существующих систем управления, вследствие чего в программное обеспечение необходимо включить библиотеку модулей расчета частотных и временных характеристик, нулей и полюсов, проверки устойчивости, решения матричных уравнений Ляпунова и Рикката и т.д.

Наконец, разнообразие типовых структур адаптивных систем приводит к увеличению объема перебора структур адаптивных регуляторов при анализе и синтезе. Поэтому в системе желательно иметь средства задания и модификации структуры адаптивных регуляторов, а также развитую библиотеку описаний адаптивных регуляторов.

Перечисленные требования были положены в основу разработки инструментальной программной системы АВАНС (Автоматизация Анализа и Синтеза) [1, 131, 149, 163].

Система АВАНС является надстройкой над системой программирования ПЛ/1 ОС ЕС. Сохраняя все возможности системы ПЛ/1, АВАНС предоставляет пользователю средства, позволяющие снизить трудоемкость и значительно сократить процесс подготовки к решению на ЭВМ задач из данной проблемной области. Наиболее эффективно система АВАНС может быть использована при исследовании и параметрической оптимизации сложных динамических систем, имеющих иерархическую структуру, т.е. состоящих из подсистем разного уровня вложенности. Входной язык АВАНС имеет развитые средства для описания иерархических систем и задания действий над ними. В текст на входном языке могут вставляться произвольные операторы базового языка ПЛ/1. Подсистемы в сложных системах могут описываться раздельно.

Система является открытой: состав ее операторов может быть расширен пользователем средствами самой системы. Эффективным способом такого расширения является применение макросредств. Благодаря макросредствам система АВАНС может использоваться не только в данной проблемной области, но и в качестве общего программного обеспечения для

создания диалектов языка, ориентированных на решение задач из других областей *).

Система АВАНС представляет собой пакет прикладных программ (ППП), написанных на *P*-языке, ПЛ/1, Фортран, Макро-ПЛ/1, Макро-АВАНС. Ядром системы являются микропроцессор языка АВАНС и препроцессор с языка АВАНС в Макро-ПЛ/1. Модули, выполняющие эти функции, написаны на *P*-языке. В состав системы входит определенное число загрузочных модулей, служащих для проведения вычислений (интегрирования дифференциальных уравнений, поисковой оптимизации, выполнения матричных операций и т.п.), и модулей, реализующих некоторые вспомогательные функции (например – построение таблиц, графиков). Эти модули получены трансляцией ПЛ/1- и Фортран-программ, их состав может расширяться пользователем. Базовая версия ППП АВАНС содержит модули следующих численных методов: для решения задач линейной алгебры – метод преобразований Хаусхолдера, *QR* – алгоритм и др.; для решения систем нелинейных уравнений – метод Ньютона в модификации Стефенса; для интегрирования дифференциальных уравнений – методы Эйлера, Рунге – Кутта 2-го и 4-го порядка, вариант метода Куммера и три неявных метода: модификации метода ФДН (формул дифференцирования назад); для оптимизации – метод покоординатного спуска и по две модификации методов случайного поиска и сопряженных градиентов; для идентификации – метод наименьших квадратов и алгоритм "полоска".

Библиотека системы АВАНС содержит ряд текстов на языке АВАНС (макроопределений АВАНСа), реализующих в некотором обобщенном виде описания алгоритмов аддитивного управления (аддитивных регуляторов, см. ниже). Использование библиотеки аддитивных регуляторов позволяет существенно упростить процесс генерации АВАНС-программы на различных этапах синтеза аддитивной системы. Кроме того, в библиотеку помещены макроопределения, которые могут быть использованы при решении некоторых распространенных задач (линеаризации, расчета статического режима, получения передаточных функций, частотных характеристик системы и т.д.). С помощью этих модулей увеличено число операторов языка АВАНС, расширены возможности системы. Пользователь может дополнять библиотеку макроопределений по своему усмотрению и, следовательно, создавать свои версии (диалекты) языка.

Входной проблемно-ориентированный язык системы АВАНС содержит средства описания объектов и описания действий. Объектами могут являться иерархические системы, состоящие из совокупности динамических или статических звеньев. Динамические звенья могут быть описаны обычновенными дифференциальными уравнениями (возможно – с запаздывающим аргументом) или разностными уравнениями. В систему могут входить динамические звенья разного типа (как непрерывные, так и дискретные). Линейные динамические звенья могут быть заданы передаточными функциями или уравнениями состояния.

*) В частности, с помощью макросредств можно создавать диалекты языка АВАНС, имитирующие существующие проблемно-ориентированные языки. Например, в [1] описана макросистема имитационного моделирования МАКСИМ, язык которой соответствует хорошо известному языку моделирования CSMP (ПМНП), уже более 20 лет поддерживаемому на компьютерах фирмы IBM.

Средства описания действий образуют язык описания действий процедурного типа. Входящие в него операторы позволяют задать последовательность вычислений, необходимую для получения требуемого результата. Среди операторов описания действий – операторы моделирования, оптимизации, линеаризации, расчета частотных характеристик и т.п. Кроме этих операторов, для описания действий могут использоваться любые операторы языка ПЛ/1.

Основными операторами языка АВАНС являются:

Оператор описания систем (SYST). Служит для задания структуры исследуемой системы;

Оператор моделирования (SIM). Служит для численного решения дифференциальных или разностных уравнений, описывающих рассматриваемую систему;

Оператор параметрической оптимизации (MIN). Задает процедуру поисковой оптимизации (безусловной или условной) скалярной функции по указанному набору параметров (переменных);

Макропрограммы. Являются специальными операторами, вводимыми пользователем или разработчиком системы. При обработке макропрограммы вместо него в программу включается фрагмент текста (макроопределение). Поиск макроопределения осуществляется по имени макропрограммы. При подстановке макроопределений может произойти указанная в макропрограмме замена параметров. Макроопределения могут быть созданы пользователем и располагаться либо в тексте самой программы, либо в библиотеке (пользоваться или системной).

Важнейшим компонентом специального программного обеспечения синтеза алгоритмических структур адаптивных систем является *библиотека структурированных описаний адаптивных регуляторов*, содержание которой отражает проблемную ориентацию используемого ППП на решении задач рассматриваемой предметной области. Благодаря наличию в библиотеке универсальных описаний типовых элементов адаптивных систем и стандартных связей между ними проектировщик избавляется от необходимости не только программировать уравнения, описывающие объекты и алгоритмы на каком-либо алгоритмическом языке, но и описывать проектируемую систему на входном языке ППП. Указанная возможность реализована с помощью макросредств, благодаря которым структурированные описания хранятся в некотором обобщенном виде (т.е. без указания конкретных имен, порядков, размерностей и т.п.), а необходимая информация задается при макропрограмме. При этом сами макроопределения не оформляются по каким-либо определенным правилам, а представляют собой произвольные фрагменты текстов на входном языке [1].

В Приложении 4 приведено краткое описание входного языка системы АВАНС. Функциональная структура системы представлена на рис. 6.2а, 6.2б.

Приведем пример использования системы АВАНС. Пусть требуется промоделировать (исследовать поведение во времени) адаптивную систему управления непрерывным ОУ, математическая модель которого задается дифференциальным уравнением 3-го порядка

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)y(t) = K(u(t) + f(t)). \quad (6.2)$$

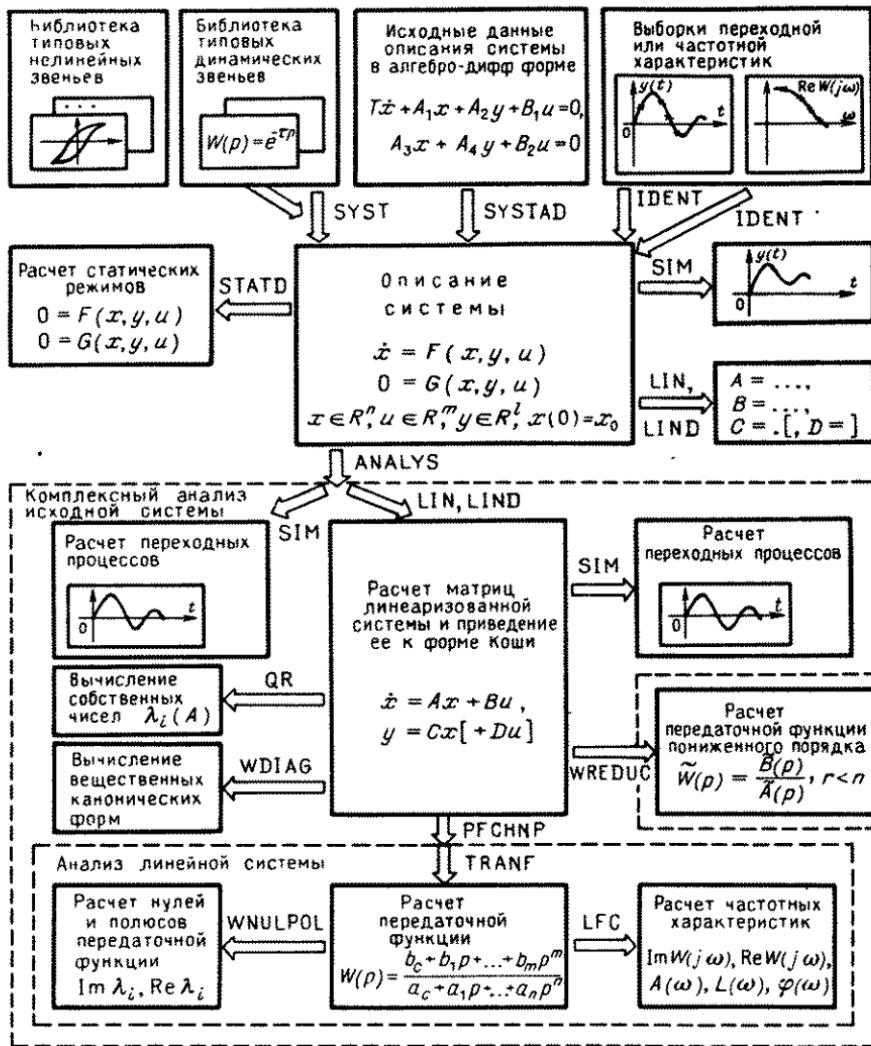


Рис. 6.2а. Функциональная структура системы АВАНС

Для управления используется дискретный регулятор из класса АСНЭМ, синтезированный по упрощенной модели ОУ 2-го порядка (§ 3.3)

$$\begin{aligned}
 u_k &= c_{1,k}(y_k - y_*) + c_{2,k}\hat{x}_{2,k} + c_{3,k}y_*, \\
 c_{1,k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{1,k} - \gamma_1 T_0 s_k(y_k - y_*), \\
 c_{2,k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{2,k} - \gamma_2 T_0 s_k\hat{x}_{2,k}, \\
 c_{3,k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{3,k} - \gamma_3 T_0 s_k y_*, \\
 s_k &= \hat{x}_{2,k} + g(y_k - y_*),
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

причем для вычисления $\hat{x}_{2,k}$ — оценки производной выхода ОУ y_k — ис-

пользуется дискретный наблюдатель:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{k+1} &= T_0 [\hat{x}_{2,k} + K_{h1}(y_k - \hat{y}_k)] + \hat{y}_k, \\ \hat{x}_{2,k+1} &= T_0 \bar{T}_1^{-1} \bar{T}_2^{-1} (-(\bar{T}_1 + \bar{T}_2) \hat{x}_{2,k} + \bar{K} u_k - \hat{y}_k) + \\ &+ T_0 K_{h2}(y_k - \hat{y}_k) + \hat{x}_{2,k},\end{aligned}\quad (6.4)$$

где $y_k = y(t_k)$ – выход ОУ (вход регулятора), $u_k = u(t)$, $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ – вход ОУ (выход регулятора), y_* – задающее воздействие, T_0 – шаг дискретизации, K , T_1 , T_2 , T_3 – параметры ОУ, \bar{K}_1 , \bar{T}_1 , \bar{T}_2 – параметры упрощенной модели ОУ, $c_{1,k}$, $c_{2,k}$, $c_{3,k}$ – настраиваемые параметры, s_k – промежуточная переменная (невязка), α , γ_1 , γ_2 , γ_3 – параметры регулятора, $K_{h,1}$, $K_{h,2}$ – параметры наблюдателя. Требуется описать систему (6.2) – (6.4) и составить задание на ее моделирование.

Очевидно, система (обозначим ее через S1) имеет иерархическую структуру и состоит из трех подсистем, которые обозначим через OB1, REG1, OBSV. Сначала составим описание каждой подсистемы по отдельности (синтаксис и семантику операторов языка АВАНС см. в Приложении 4).

ОУ описан оператором SYST в виде системы с именем OB1 (рис. 6.3). В операторе SS указано, что эта система состоит из трех апериодических звеньев первого порядка (W_1 , W_2 , W_3), знаменатели передаточных функций которых имеют степень 1, числитель – нулевую степень. В составном

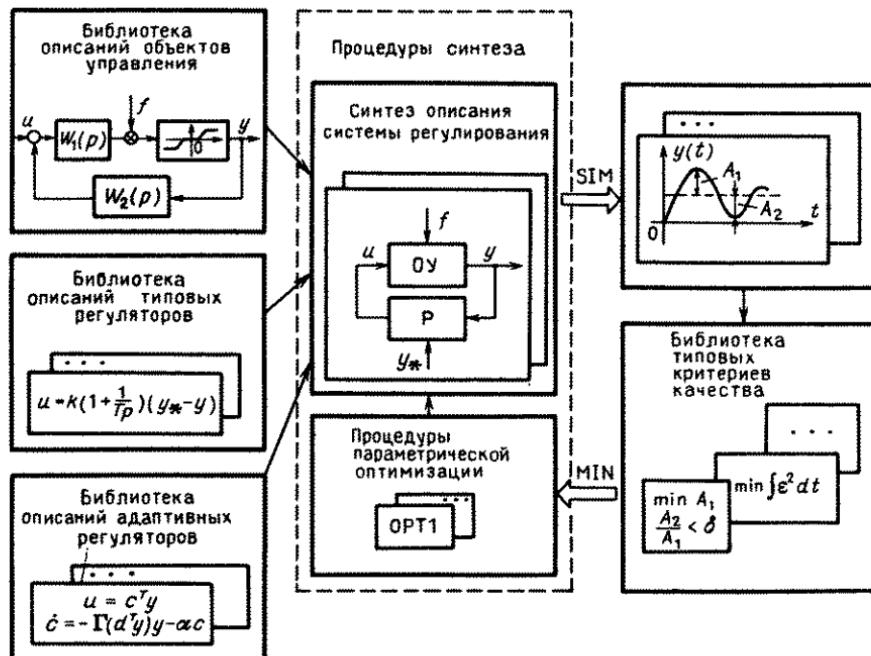
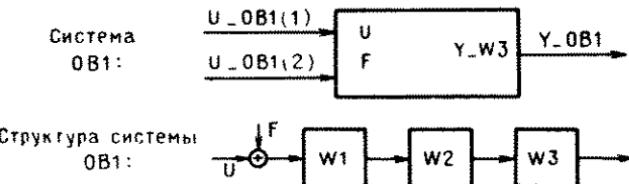


Рис. 6.26. Функциональная структура системы АВАНС

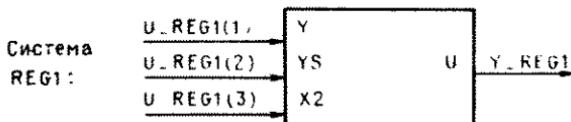


```

*SYST OB1.
&SUBS W1,1,0/W2,1,0/W3,1,0;
&INIT.
    A_W1(0),A_W2(0),A_W3(0)=1.E0;
    A_W1(1)=T1
    A_W2(1)=T2
    A_W3(1)=T3
    B_W1(0)=GK0
    B_W2(0),B_W3(0)=1,E0.
#INIT;
&INP U,F;
&OUT Y_W3;
&CON;
    U_W1=U+F;
    U_W2=Y_W1;
    U_W3=Y_W2;
#CON.
#SYST

```

Рис. 6.3 Описание объекта управления



```

* SYST REG1:
&SUBS C,3;
&INIT.
    R=1 E0 - AL*T0;
    R1=G1*T0,
    R2=G2*T0;
    K3=G3*T0
#INIT;
&INP Y,YS,X2,
&OUT U
&DIS (C) BY (T0);
    S=X2+C*(Y-YS);
    U=Y_C(1)*(Y-YS)-Y_C(2)*X2-Y_C(3)*YS;
    U_C(1)=R*Y_C(1)-R1*S*(Y-YS);
    U_C(2)=R*Y_C(2)-R1*S*X2;
    U_C(3)=R*Y_C(3)-R1*S*YS;
#DIS
#SYST

```

Рис. 6.4 Описание адаптивного регулятора

операторе INIT приведены выражения для вычисления коэффициентов передаточных функций через постоянные времени и коэффициент передачи объекта. Используется групповая операция присваивания языка ПЛ/1, допустимая внутри оператора INIT.

Коэффициент передачи объекта обозначен GK ϕ . Его значение присваивается переменной B_W1(ϕ), соответствующей чисителю передаточной функции W_1 . Аналогичные операции выполнены с постоянными времени T_1, T_2, T_3 , которые обозначены в программе через T1, T2, T3. Значения переменных GK ϕ , T1, T2, T3 должны быть заданы в вызывающей программе до описания системы.

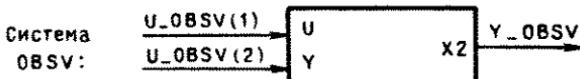
В операторе INP указано, что объект имеет два входа, которые внутри данного описания имеют имена U и F (управление $u(t)$ и возмущение $f(t)$). При обращении извне к описанию объекта эти переменные должны именоваться U_OB1(1) и U_OB1(2) соответственно. Выходом объекта, как указано в операторе OUT, является выход Y_W3 звена W3. Во внешних операторах (по отношению к описанию OB1) этот выход следует именовать Y_OB1.

Далее следуют описания связей между переменными системы. Эти описания помещены внутри составного оператора CON и представляют собой операторы присваивания языка ПЛ/1. Они задают три последовательно соединенных звена, на вход первого из которых действует управляющий сигнал и аддитивное возмущение. На этом заканчивается описание ОУ.

Описание адаптивного регулятора (6.3) оформлено в виде системы с именем REG1 (рис. 6.4). В операторе SS указано, что в систему входит три звена 1-го порядка (звеньев запаздывания на один такт). Эти звенья имеют общее имя С и не имеют параметров. Внутри оператора INIT выполняются вычисления промежуточных переменных R, R1, R2, R3. Через YS обозначено задающее воздействие y_* , через X2 – оценка $\hat{y}(t)$ – выхода наблюдателя. Параметры алгоритма $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ обозначены соответственно через AL, G1, G2, G3, а интервал квантования T_0 – через Tф. Эти параметры должны быть заданы во внешней программе раньше описания системы REG1.

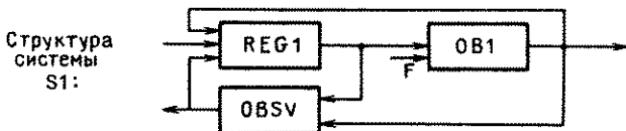
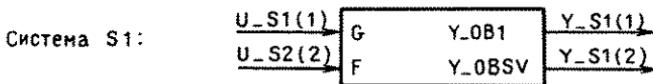
Аналогично составляется описание наблюдателя (рис. 6.5). Далее описывается замкнутая система S1: задаются связи между подсистемами в соответствии с уравнениями (6.2) – (6.4), указываются входы и выходы S1. Структура и описание S1 представлены на рис. 6.6.

Пусть моделирование системы (6.2) – (6.4) требуется выполнить при нулевых начальных условиях, при единичном задающем воздействии $y_* \equiv 1$ и при стационарном случайном возмущении $f(t)$, имеющем спектральную плотность $\varphi_f(\omega) = \sigma^2 / (T^2 \omega^2 + 1)$. Для описания возмущения подключим ко входу системы S1 формирующий фильтр – вспомогательную систему FF 1-го порядка, на вход которой подадим белый шум единичной интенсивности, генерируемый датчиком псевдослучайных чисел (процедура DRANDU). Системы S1, FF образуют расширенную систему, которой дадим имя S2. Описания подсистем S1, OB1, REG1, OBSV находятся в соответствующих разделах библиотеки и вызываются перед описанием системы S2. Задание на моделирование системы S2 дается оператором SIM, в котором указываются моменты начала и конца моделирова-



```
* SYST OBSV;
&SUBS D, 2;
&INIT;
Q1 = T0 / TT1 / TT2;
Q2 = TT1 + TT2;
#INIT;
&INP U, Y;
&OUT X2;
&DIS (D) BY (T0);
X2 = Y_D(2);
U_D(1) = T0 * (Y_D(2) + KN1 * (Y - Y_D(1)));
U_D(2) = Z + T0 * KN2 * (Y - Y_D(1));
Z = Q1 * (K * U - Q2 * Y_D(2) - Y_D(1));
#DIS;
#SYST;
```

Рис. 6.5. Описание наблюдателя



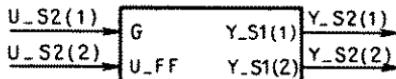
```
* SYST S1;
&SUBS OB1/OBSV/REG1;
&INP G, F;
&OUT Y_OB1, Y_OBSV;
&CON;
    U_OB1(1) = Y_REG1;
    U_OB1(2) = F;
    U_REG1(1) = Y_OB1;
    U_REG1(2) = F;
    U_REG1(3) = Y_OBSV;
    U_OBSV(1) = Y_REG1;
    U_OBSV(1) = Y_OB1;
    U_OBSV(2) = Y_OB1;
#CON;
#SYST;
```

Рис. 6.6. Описание замкнутой системы

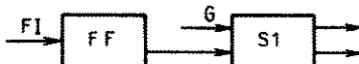
ния (интегрирования) системы, шаг интегрирования, начальные условия, внешние воздействия и вид выводимых результатов. Программа моделирования и фрагмент выведенных результатов представлены на рис. 6.7.

Приведенный пример демонстрирует простейший механизм структуризации описаний, имеющийся в системе АВАНС. Более широкие возможности структуризации как описаний, так и действий представляют макросредства. Структуризация описаний объектов и действий отвечает системному подходу к проектированию и существенно упрощает замены

Система S2:



Структура системы S2:



```

*PR0G EX1;
  GET DATA COPY;
  **OB1;
  **REG1;
  **OBSV;
  **S1;
  *SYST S2
    &SUBS S1/FF,1,0;
    &INP G, U_FF;
    &OUT Y_S1(1), Y_S1(2);
    &CON
      U_S1(1) = G;
      U_S1(2) = Y_FF;
      U_FF = FI;
    #CON;
  #SYST;
  *SIM S2 BY (0.1) T0 (1.0);
    &INFL;
    U_S2(1) = A * SIN(W * TIME);
    U_S2(2) = DRANDU(SIGMA);
  #INFL
  &PLOT BY (0.1) (Y_S1(1));
  #SIM;
*PR0G;
//GO. SYSIN DD *
A=..., W=..., SIGMA=...
//
```

Результаты моделирования системы S2:

TIME	Y_S1(1)
0,0	0,00
0,1	0,15
0,2	0,45
0,3	0,70
0,4	0,76
0,5	0,72
0,6	0,54
0,7	0,40
0,8	0,39
0,9	0,49
1,0	0,58

Рис. 6.7. Программа моделирования

моделей подсистем, параметров, начальных условий и т.д., необходимые при генерации и модификации проектных вариантов. Отметим также возможность вызова на экран кадров, подобных рис. 6.3 – 6.7, облегчающую контроль и оперативное вмешательство в процесс моделирования.

§ 6.3. Пример. Выбор алгоритма управления

Применение средств автоматизированного проектирования позволяет резко увеличить количество алгоритмов (проектных вариантов), из которых делается обоснованный выбор при разработке системы управления. Рассмотрим пример разработки алгоритма управления для ОУ, линеаризованная модель которого описывается передаточной функцией 3-го порядка (см. (6.2))

$$W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)} \quad (6.5)$$

К классу (6.5) относятся модели ряда технологических объектов с апериодическим характером переходных процессов.

Пусть параметры ОУ на двух типовых режимах, определяющих границы класса адаптивности, принимают значения, указанные в таблице 6.1, а цель управления задана в виде

$$|y(t) - y_*| < \Delta \text{ при } t > t_*, \quad (6.6)$$

где y_* — скалярное задающее воздействие, $y(t)$ — скалярный выход ОУ, $\Delta > 0$ — порог точности. Измерению доступны значения выхода ОУ $y_k =$

Таблица 6.1
Параметры ОУ на типовых режимах

Режимы	Значения параметров			
	k	T_1	T_2	T_3
1	1,0	1,0	$T_1/10$	$T_1/100$
2	1,0	1,9	$T_1/3$	$T_1/9$

$= y(t_k)$ в дискретные моменты времени $t_k = kT_0$, $k = 0, 1, 2, \dots, T_0 > 0$ — шаг дискретизации.

Попытаемся проиллюстрировать на этом примере методику проектирования адаптивной системы управления, делая упор на отбор алгоритмов по результатам моделирования.

6.3.1. Предварительный отбор алгоритмов. При выборе алгоритма управления будем учитывать возможную нестационарность ОУ, ограничения на управления, шумы измерений. Однако на начальном этапе разработки, когда происходит предварительный отбор перспективных проектных вариантов, целесообразно, наоборот, упростить модель ОУ (6.5), заменив ее апериодическим звеном 2-го порядка с передаточной функцией

$$\bar{W}(p) = \frac{\bar{K}}{(\bar{T}_1 p + 1)(\bar{T}_2 p + 1)}, \quad (6.7)$$

где \bar{K} , \bar{T}_1 , \bar{T}_2 — постоянные коэффициенты. Параметры модели (6.7) выберем соответствующими "наихудшему" режиму ОУ (6.5): $\bar{K} = 1$, $\bar{T}_1 = 1$, $\bar{T}_2 = 1/3$. Далее, в соответствии с декомпозиционным подходом главы 5 и методикой разработки алгоритмов управления, описанной в § 6.1, будем при синтезе считать время непрерывным, а производную от выхода ОУ доступной измерению.

На последующих этапах синтезированные алгоритмы дискретизуются, а для оценки производной в систему вводится идентификатор состояния (наблюдатель). Дискретизованные уравнения наблюдателя для модели ОУ (6.7) имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1} &= T_0[\hat{x}_{2k} + K_{n1}(y_k - \hat{y}_k)] + \hat{y}_k, \\ \hat{x}_{2k+1} &= T_0 A^{-1}[-B\hat{x}_{2k} - \hat{y}_k + K_{n2}] + T_0 K_{n2}(y_k - \hat{y}_k) + \hat{x}_{2k}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где \hat{x}_{2k} — оценка $\dot{y}(t_k)$, K_{n1} , K_{n2} — коэффициенты усиления наблюдателя $B = \bar{T}_1 + \bar{T}_2$, $A = \bar{T}_1 \bar{T}_2$.

Чтобы не заниматься этапом технико-экономического обоснования, включим в число рассматриваемых структур типовой линейный пропорционально-дифференциальный (ПД) регулятор, описываемый в дискретной форме уравнением

$$u_k = -K_1(y_k - y_*) - K_2 \hat{x}_{2k}, \quad (6.9)$$

где K_1, K_2 – коэффициенты регулятора *), $l = 1 + \bar{K}^{-1} \bar{K}_1^{-1}$ – поправочный коэффициент для устранения статической ошибки. Выбор будем проводить по результатам расчета типовых показателей качества на классе алгоритмов, включающем линейный закон (6.9).

Для представительности набора сравниваемых алгоритмов включим в их число основные типы алгоритмов с неявной эталонной моделью (НЭМ), рассмотренные в главе 3, а также алгоритмы с явной эталонной моделью (ЯЭМ, см. § 3.2) и алгоритм бинарных систем [65, 67].

Выпишем дискретные формы алгоритмов, участвующих в "конкурсе" (в каждый алгоритм входит еще и наблюдатель (6.8)).

а) Интегральный параметрический алгоритм с НЭМ:

$$u_k = c_{1k}(y_k - y_*) + c_{2k} \hat{x}_{2k} + c_{3k} y_*,$$

$$c_{1k+1} = (1 - \alpha T_0) c_{1k} - \gamma_1 T_0 s_k (y_k - y_*), \quad (6.10)$$

$$c_{2k+1} = (1 - \alpha T_0) c_{2k} - \gamma_2 T_0 s_k \hat{x}_{2k},$$

$$c_{3k+1} = (1 - \alpha T_0) c_{3k} - \gamma_3 T_0 s_k y_*.$$

В (6.10) и других алгоритмах адаптивного управления с НЭМ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, α – положительные параметры алгоритма, подлежащие выбору, $s_k = \hat{x}_{2k} + g(y_k - y_*)$ – функция "невязки" между объектом и НЭМ, $g = 5,0$ – постоянная, определяющая динамику НЭМ. Сама НЭМ определяется условием $s_k = 0$, или в непрерывном времени

$$\dot{y} = -g(y - y_*). \quad (6.11)$$

б) Пропорционально-интегральный параметрический алгоритм с НЭМ:

$$u_k = c_{1k}(y_k - y_*) + c_{2k} \hat{x}_{2k} + c_{3k} y_* - \gamma_4 (y_k - y_*)^2 s_k - \gamma_5 \hat{x}_{2k}^2 s_k - \gamma_6 y_*^2 s_k,$$

$$c_{1k+1} = (1 - \alpha T_0) c_{1k} - \gamma_1 T_0 s_k (y_k - y_*), \quad (6.12)$$

$$c_{2k+1} = (1 - \alpha T_0) c_{2k} - \gamma_2 T_0 s_k \hat{x}_{2k},$$

$$c_{3k+1} = (1 - \alpha T_0) c_{3k} - \gamma_3 T_0 s_k y_*.$$

*) Коэффициенты линейного регулятора выбираются так, чтобы замкнутая система на "наихудшем" режиме обладала заданной степенью устойчивости η (в данном случае $\eta = 5 \text{ с}^{-1}$). Из этих же соображений выбираются параметры эталонных моделей (см. ниже). Коэффициенты наблюдателя выбираются так, чтобы степень устойчивости подсистемы наблюдения была на порядок выше.

в) Первый сигнально-параметрический алгоритм с НЭМ:

$$\begin{aligned} u_k &= c_{1k}(y - y_*) + c_{2k}\hat{x}_{2k} + c_{3k}y_* - \gamma_0 \operatorname{sign} s_k, \\ c_{1k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{1k} - \gamma_1 T_0 s_k(y_k - y_*), \\ c_{2k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{2k} - \gamma_2 T_0 s_k\hat{x}_{2k}, \\ c_{3k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{3k} - \gamma_3 T_0 s_k y_*. \end{aligned} \quad (6.13)$$

г) Второй сигнально-параметрический алгоритм с НЭМ:

$$\begin{aligned} u_k &= c_{1k}(y_k - y_*) + c_{2k}\hat{x}_{2k} + c_{3k}y_* - \gamma_0 s_k + u_{sk}, \\ c_{1k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{1k} - \gamma_1 T_0 s_k(y_k - y_*), \\ c_{2k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{2k} - \gamma_2 T_0 s_k\hat{x}_{2k}, \\ c_{3k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{3k} - \gamma_3 T_0 s_k y_*, \\ u_{sk+1} &= (1 - \alpha T_0)u_{sk} - \gamma_4 T_0 s_k. \end{aligned} \quad (6.14)$$

д) Параметрический алгоритм с НЭМ и с производной от невязки:

$$\begin{aligned} u_k &= c_{1k}(y_k - y_*) + c_{2k}\hat{x}_{2k} + c_{3k}y_*, \\ c_{1k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{1k} - \gamma_1 T_0(\hat{s}_k - ds_k)(y_k - y_*), \\ c_{2k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{2k} - \gamma_2 T_0(\hat{s}_k - ds_k)\hat{x}_{2k}, \\ c_{3k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{3k} - \gamma_3 T_0(\hat{s}_k - ds_k)y_*, \end{aligned} \quad (6.15)$$

где $d = 5,0$, $\hat{s}_k = (s_k - s_{k-1})/T_0$ — оценка производной от невязки s_k , s_k — значение невязки на k -м шаге, s_{k-1} — значение невязки на предыдущем шаге.

е) Алгоритм сигнально-параметрической адаптации с НЭМ и производной от невязки:

$$\begin{aligned} u_k &= c_{1k}(y_k - y_*) + c_{2k}\hat{x}_{2k} + c_{3k}y_* - \gamma_0 \operatorname{sign}(\hat{s}_k - ds_k), \\ c_{1k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{1k} - \gamma_1 T_0(\hat{s}_k - ds_k)(y_k - y_*), \\ c_{2k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{2k} - \gamma_2 T_0(\hat{s}_k - ds_k)\hat{x}_{2k}, \\ c_{3k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{3k} - \gamma_3 T_0(\hat{s}_k - ds_k)y_*. \end{aligned} \quad (6.16)$$

ж) Знаковый параметрический алгоритм с НЭМ:

$$\begin{aligned} u_k &= c_{1k}(y_k - y_*) + c_{2k}\hat{x}_{2k} + c_{3k}y_*, \\ c_{1k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{1k} - \gamma_1 T_0 \operatorname{sign} s_k(y_k - y_*), \\ c_{2k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{2k} - \gamma_2 T_0 \operatorname{sign} s_k\hat{x}_{2k}, \\ c_{3k+1} &= (1 - \alpha T_0)c_{3k} - \gamma_3 T_0 \operatorname{sign} s_k y_*. \end{aligned} \quad (6.17)$$

з) Параметрический алгоритм с ЯЭМ:

$$\begin{aligned} x_{1Mk+1} &= T_0 x_{2Mk} + x_{1Mk}, \\ x_{2Mk+1} &= T_0(a_{M1} - a_{M0}x_{1Mk} + a_{M1}y_*) + x_{2Mk}, \\ e_{1k} &= y_k - x_{1Mk}, \quad e_{2k} = \hat{x}_{2k} - x_{2Mk}, \\ \delta_k &= h_{12}e_{1k} + h_{22}e_{2k}, \\ u_k &= c_{1k}y_k + c_{2k}\hat{x}_{2k} + c_{3k}y_*, \\ c_{1k+1} &= -\gamma_1 \delta_k y_k T_0 + (1 - \alpha T_0)c_{1k}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$c_{2k+1} = -\gamma_2 \delta_k \hat{x}_{2k} T_0 + (1 - \alpha T_0) c_{2k},$$

$$c_{3k+1} = -\gamma_3 \delta_k y_* T_0 + (1 - \alpha T_0) c_{3k};$$

здесь $h_{12} = 0,02$, $h_{22} = 0,052$ – последний столбец решения уравнения Ляпунова $H A_M + A_M^T H = -I$, где

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{M1} & -a_{M0} \end{bmatrix}$$

– матрица ЯЭМ, причем для соответствия динамики ЯЭМ и динамики НЭМ (6.11) берется $a_{M0} = 25$, $a_{M1} = 10$.

и) Дискретный алгоритм бинарной системы с интегральной координатно-операторной обратной связью:

$$u_k = \kappa \mu_k (|y_k - y_*| + |\hat{x}_{2k}| + |y_*|),$$

$$\mu_{k+1} = \begin{cases} -\gamma_0 \operatorname{sign} s_k + (1 - \alpha T_0) \mu_k & \text{при } |\mu_k| \leq 1, \\ -\mu_k + (1 - \alpha T_0) \mu_k & \text{при } |\mu_k| > 1. \end{cases} \quad (6.19)$$

6.3.2. Отбор по результатам моделирования

Первая группа экспериментов. Эксперименты проводятся для двух режимов (см. табл. 6.1) с целью настройки параметров алгоритмов и их предварительного отбора. Качество замкнутой системы оценивается по переходной характеристике (реакции на задающее воздействие $y_*(t) = 1$, $t \geq 0$, при нулевых начальных условиях на ОУ и алгоритм управления) по следующим показателям:

а) время переходного процесса

$$Q_1 = t_* = \min \{t_k : |y_l - y_*| \leq \Delta \text{ при } l \geq k\}$$

$$(\Delta = 0,05);$$

б) перерегулирование

$$Q_2 = \sigma = \max (y_k - y_*);$$

в) средний квадрат ошибки

$$Q_3 = D = \frac{T_0}{T} \sum_k (y_k - y_*)^2;$$

г) энергия управления

$$Q_4 = E = \frac{T_0}{T} \sum_k u_k^2;$$

д) вычислительные затраты в алгоритме на один такт (суммарное число операций сложения и умножения): $Q_5 = N$.

Настройка проводится на "наихудшем" режиме (на режиме 2) по критерию $\min t_*$ при условии $\sigma \leq 0,2$. Для простоты считается, что шаг дискретизации $T_0 = 0,1$ и параметры наблюдателя $K_{n1} = 5$, $K_{n2} = -1$ не настраиваются, а коэффициенты усиления алгоритмов γ_i равны между собой.

В качестве примера приведем процесс настройки алгоритма (6.10). Коэффициенты усиления алгоритма γ_1 , γ_2 , γ_3 одновременно увеличи-

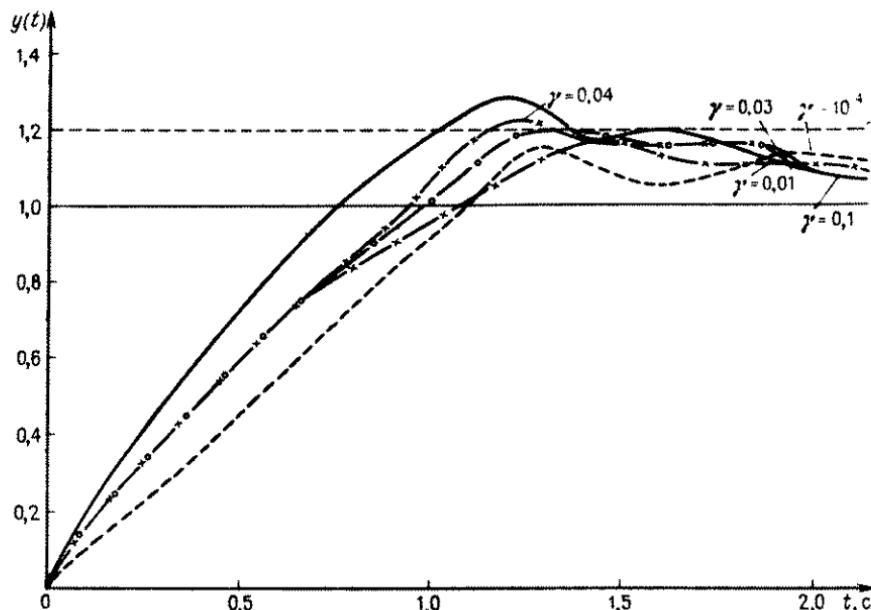


Рис. 6.8. Настройка коэффициента усиления алгоритма (6.10)

ваются, начиная с нулевого значения. При их увеличении время переходного процесса в системе снижается (значение Q_1 уменьшается). На первом шаге настройки значения γ_i ($i = 1, 2, 3$) полагались равными 0,0001, при этом перерегулирование составило $\sigma = 0,15$, а при $\gamma_i = 0,1$ значение σ выходит из заданных границ ($\sigma = 0,29$). Таким образом, искомые значения коэффициентов усиления находятся в интервале [0,0001, 0,1]. На последующих итерациях этот интервал сужается. На втором шаге мы попадаем в интервал [0,01, 0,04], и, наконец, на третьем шаге при $\gamma_i = 0,03$ показатель t_* принимает свое минимальное значение, а перерегулирование достигает значения $\sigma = 0,2$ (см. рис. 6.8).

Аналогично настраиваются остальные алгоритмы управления. Результаты первой группы экспериментов представлены в таблице 6.2.

Выход по первой группе экспериментов. По показателю D наилучшим является алгоритм (6.13), по показателю t_* алгоритм (6.9), по показателю E – алгоритм (6.18), по показателю N алгоритм (6.9).

Таким образом, первая группа экспериментов позволяет сократить число проектных вариантов, оставляя для дальнейшего рассмотрения алгоритмы (6.9), (6.13), (6.18), являющиеся парето-оптимальными по заданным критериям $Q_1 \dots Q_5$. Результатом первой группы экспериментов следует считать также подбор настроек параметров алгоритмов управления.

Вторая группа экспериментов. Во второй группе экспериментов производится проверка синтезированных систем на робастность по отношению к действию факторов, не учтенных при синтезе, при нестационарно-

Таблица 6.2
Результаты 1-й группы экспериментов

Вид алгоритма	Режим 1				Режим 2		
	t_*	D	E	N	t_*	D	E
Линейный алгоритм (6.9)	0,7	0,204	7,97	18	1,9	0,418	9,6
Параметрический И-алгоритм с НЭМ (6.10)	0,8	0,243	7,5	31	2,1	0,466	9,904
Параметрический ПИ-алгоритм с НЭМ (6.12)	0,7	0,223	7,73	43	2,0	0,435	9,44
Сигнально-параметрический с НЭМ (6.13)	0,7	0,221	8,29	34	1,8	0,441	9,87
Сигнально-параметрический с НЭМ (6.14)	0,7	0,217	7,79	46	2,0	0,433	9,37
Параметрический с НЭМ и производной (6.15)	0,8	0,244	7,56	34	2,2	0,468	9,09
Сигнально-параметрический с НЭМ и производной (6.16)	0,8	0,243	7,69	37	2,1	0,4616	9,20
Знаковый параметрический с НЭМ (6.17)	0,8	0,245	7,35	34	2,1	0,468	8,64
Параметрический с ЯЭМ (6.18)	1,1	0,296	6,81	43	3,1	0,578	6,19
Алгоритм бинарной системы (6.19)	0,8	0,24	7,45	29	2,1	0,467	8,92

сти параметров ОУ, при ограничениях на управляющее воздействие, при наличии шумов измерений и при сочетании перечисленных факторов. Соответственно, эксперименты разбиваются на четыре серии.

1) В первой серии задание на регулятор изменяется каждые 15 секунд в течение всего периода моделирования ($T = 60$ с): $y_*(t) = \text{sign} \sin(\pi t/15)$. Коэффициент усиления ОУ меняется линейно так, что $K(0) = 1,0$, $K(60) = 0,2$. Постоянная времени T_1 изменяется по закону

$$T_1(t) = 1 + M \text{sign} \sin(\pi t/30),$$

где $M = 10$ для режима 1, $M = 3$ для режима 2. Результаты первой серии экспериментов для режима 2 представлены на рис. 6.9 и в табл. 6.3, где показатели t_* , σ оценивались при каждом скачке задающего воздействия.

2) Во второй серии учитываются ограничения на управление:

$$u_k^* = \psi(u) = \begin{cases} u_{\min} & \text{при } u_{\min} \geq u, \\ u_k & \text{при } u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \\ u_{\max} & \text{при } u_{\max} \leq u. \end{cases}$$

Результаты для $u_{\min} = -2$, $u_{\max} = 2$ представлены в табл. 6.4.

Таблица 6.3
Результаты 1-й серии экспериментов

Вид алгоритма	1-й скачок		2-й скачок		3-й скачок	
	t_*	σ	t_*	σ	t_*	σ
Линейный (6.9)	2,3	0,38	3,1	0,46	—	0,47
Сигнально-параметрический с НЭМ (6.13)	2,6	0,4	3,0	0,62	4,1	0,84
Параметрический с ЯЭМ (6.18)	5,7	—	11,3	—	2,8	—

3) В третьей серии проводится моделирование с учетом помех измерений. На выход объекта подается дискретный белый шум с интенсивностью соответственно $\rho = 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 0,8$. Результаты представлены в табл. 6.5.

4) В четвертой (заключительной) серии моделирование производится при сочетании условий предыдущих трех серий экспериментов. Отноше-

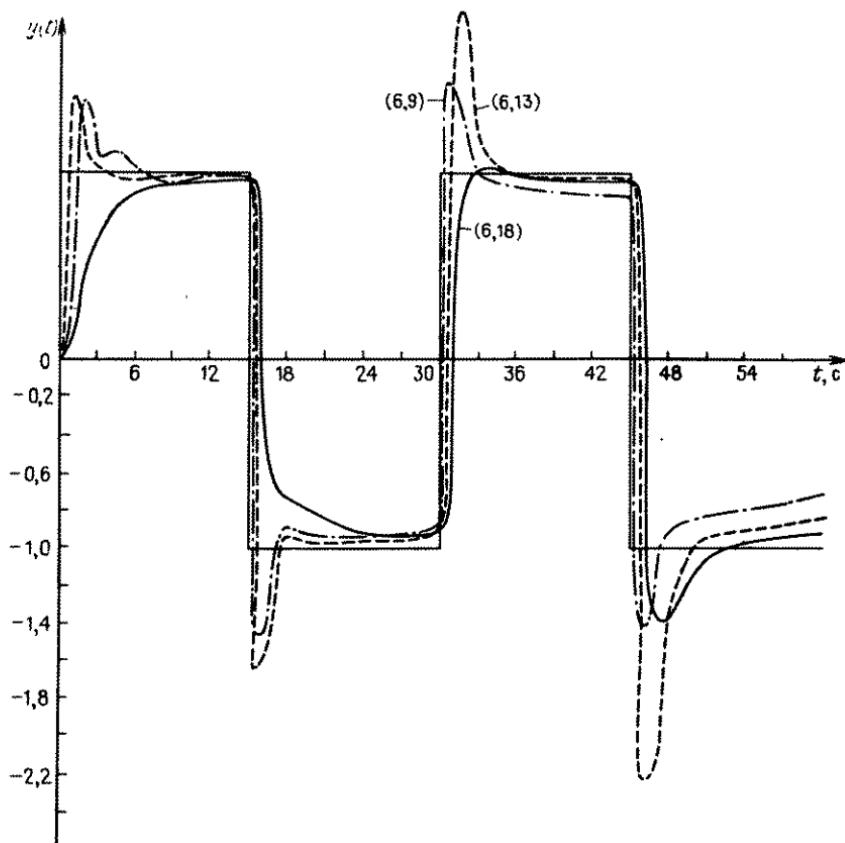


Рис. 6.9. Сравнение алгоритмов в нестационарных условиях

Вид алгоритма	4-й скачок		Терминальная ошибка	D	E
	t_*	σ			
Линейный (6.9)	—	9,41	0,28	5,05	$1,49 \cdot 10^3$
Сигнально-параметрический с НЭМ (6.13)	—	1,25	0,152	6,95	$7,22 \cdot 10^2$
Параметрический с ЯЭМ (6.18)	6	0,29	0,094	8,20	$3,21 \cdot 10^2$

Таблица 6.4
Результаты 2-й серии экспериментов

Вид алгоритма	t_*	σ	D	E
Линейный (6.9)	2,2	0,117	0,549	7,34
Сигнально-параметрический с НЭМ (6.13)	2,0	0,138	0,551	7,84
Параметрический с ЯЭМ (6.18)	3,1	—	0,587	6,12

ние дисперсии шума к полезному сигналу $\rho = 0,05$. Результаты представлены на рис. 6.10.

Выходы по второй группе экспериментов. При проведении первой серии экспериментов (в условиях нестационарности) выяснилось, что по показателю Q_3 наилучшим является линейный алгоритм (6.9), по показателю Q_4 — алгоритм (6.18) (табл. 6.3). Заметим также, что терминальная ошибка достигает своего наименьшего значения в системе с алгоритмом (6.18). Замкнутая система с линейным алгоритмом (6.9) не обладает стабильными динамическими свойствами при дрейфе параметров ОУ. Алгоритм (6.18) обеспечивает более низкое быстродействие (по сравнению с алгоритмами (6.9), (6.13)), но способен поддерживать стабильные динамические характеристики во всем диапазоне изменения параметров ОУ.

Результаты второй серии показали, что при ограничениях на управление свойства систем с линейным алгоритмом и с алгоритмом (6.13) по показателям Q_1 и Q_3 ухудшаются. Свойства системы с алгоритмом (6.18) по этим же показателям практически не изменяются (табл. 6.2 и табл. 6.4).

При проведении третьей серии экспериментов выяснилось, что при малой интенсивности шумов наилучшие результаты по показателю Q_3 достигаются в системе с линейным алгоритмом (табл. 6.5). В то же время при высокой интенсивности шумов система с алгоритмом (6.13) дает лучшие результаты по сравнению с системой с линейным алгоритмом по показателям Q_3 и Q_4 . Заметим также, что система с алгоритмом (6.18)

Таблица 6.5
Результаты 3-й серии экспериментов

Алгоритмы управления	$\rho = 0,05$			$\rho = 0,1$			$\rho = 0,2$		
	σ	D	E	σ	D	E	σ	D	E
Линейный (6.9)	0,222	0,412	9,53	0,28	0,436	9,64	0,37	0,572	10,46
Сигнально-параметрический с НЭМ (6.13)	0,225	0,432	9,87	0,255	0,451	9,9	0,53	0,599	10,69
Параметрический с ЯЭМ (6.18)	0,02	0,665	5,56	0,18	0,681	5,59	0,42	0,79	5,67

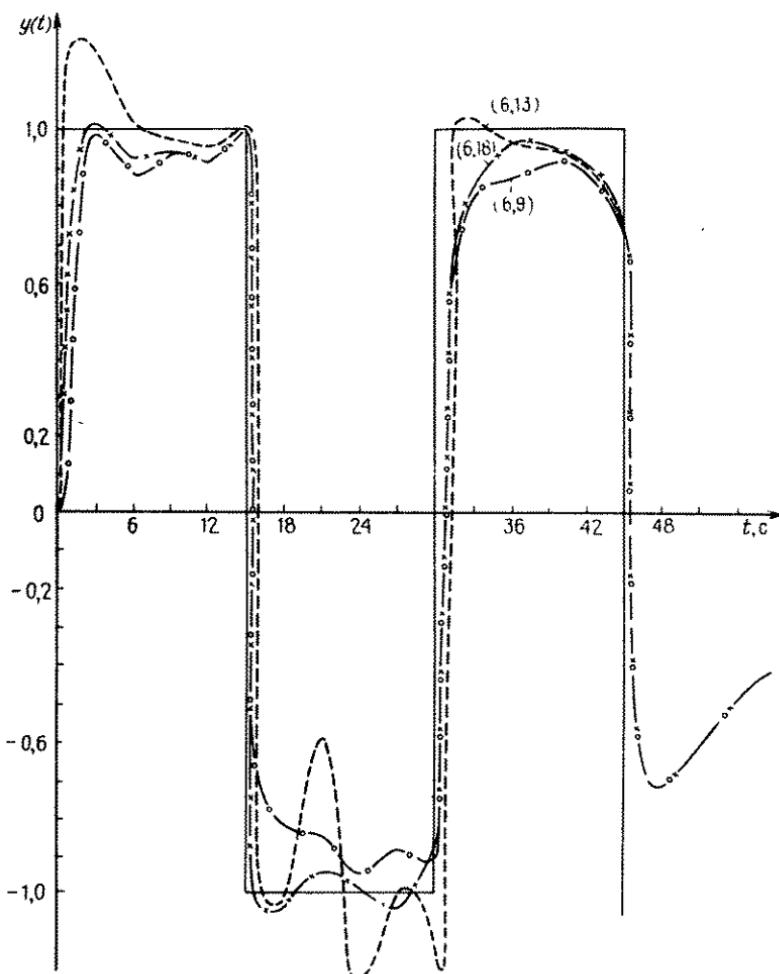


Рис. 6.10. Сравнение алгоритмов в сложных условиях

Алгоритмы управления	$\rho = 0,5$			$\rho = 0,8$		
	σ	D	E	σ	D	E
Линейный (6.9)	1,05	1,681	17,49	1,671	3,74	31,41
Сигнально-параметрический с НЭМ (6.13)	1,003	1,681	14,25	1,585	3,80	21,24
Параметрический с ЯЭМ (6.18)	1,22	1,74	6,11	10^{11}	$4,76 \times 10^{20}$	$2,83 \times 10^{26}$

в условиях высокой интенсивности шумов измерений теряет работоспособность.

Анализ результатов четвертой серии экспериментов показал, что наименьшее значение показателя Q_3 достигается в системе с линейным алгоритмом, а наилучшим алгоритмом по показателю Q_4 является алгоритм (6.18). Следует заметить, что ни одна из рассмотренных систем при наличии нестационарности параметров объекта, ограниченной на управление и шумов измерений стабильными динамическими характеристиками во всем диапазоне изменения параметров объекта не обладает (рис. 6.10). Однако напомним, что вторая группа экспериментов проводится с целью проверки лишь робастных свойств синтезированных систем (т.е. проверки работоспособности в критических условиях).

§ 6.4. Автоматизация сравнительного анализа алгоритмов управления

Рассмотренный выше пример, как и решение других задач, показывает, что при современных требованиях к качеству и срокам разработки систем управления традиционного применения ЭВМ для моделирования и оптимизации проектных вариантов оказывается недостаточно. Когда вместо 1 – 2 вариантов структур разработчик должен проанализировать 10 – 20, становится затруднительным даже простое сравнение результатов моделирования, тем более если оно выполняется по нескольким критериям. Возросшая сложность задач сравнительного анализа требует их автоматизации.

Введем некоторые определения. Пусть задан набор алгоритмов $A = \{A_1, \dots, A_N\}$ и набор вариантов условий $C = \{C_1, \dots, C_M\}$. Критерием сравнения называется отображение $K: C \rightarrow P$, где $P = \{P\}$ – множество отношений порядка*) $P \subseteq A \times A$. Таким образом, критерий сравнения – это правило, сопоставляющее каждому $C_i \in C$ отношение порядка $K(C) \subseteq A \times A$, т.е. правило, позволяющее при каждом возможном условии сравнивать алгоритмы между собой. Обычно критерий сравнения задается посредством показателя качества $Q(A_i, C_i)$ так, что при каждом

*) Т.е. рефлексивное и антисимметричное отношение.

$C_l \in C$ алгоритм A_i считается предпочтительней A_j , если $Q(A_i, C_l) < Q(A_j, C_l)$.

Областью эффективности E_i алгоритма A_i по критерию K назовем множество $E_i = \{C_l \in C: (A_i, A_j) \in K(C_l) \forall j, j \neq i\}$. Под сравнительным анализом будем понимать определение областей эффективности для каждого алгоритма по каждому заданному критерию.

Специфика этапа сравнительного анализа состоит в том, что на нем из количественных исходных данных делаются качественные выводы. Исходными данными могут быть значения ряда показателей качества функционирования системы, вычисленные по результатам ее моделирования для каждого алгоритма при каждом варианте условий эксперимента.

Другой особенностью задач сравнительного анализа является неточность, неоднозначность и субъективность исходных данных, поскольку они могут включать мнения человека-проектировщика. Выводы также могут быть неоднозначны, в силу многокритериальности задачи. Адекватный аппарат описания подобных ситуаций был предложен в 1965 г. Л. Заде и назван теорией нечетких множеств. Напомним основные понятия этой теории.

Нечеткое подмножество R множества X задается функцией $\mu_R: X \rightarrow [0, 1]$, каждое значение которой $\mu_R(x) \in [0, 1]$, и интерпретируется как степень принадлежности точки $x \in X$ этому множеству R . Для обычного (четкого) множества B : $\mu_B(x) = 1$ при $x \in B$, $\mu_B(x) = 0$ при $x \notin B$. Функция μ_R называется также функцией принадлежности множества R .

Определяются операции над нечеткими множествами: если

$$R = R_1 \cap R_2, \quad R = R_1 \cup R_2, \quad R = X \setminus R_1,$$

то соответственно *)

$$\mu_R(x) = \min\{\mu_{R_1}(x), \mu_{R_2}(x)\},$$

$$\mu_R(x) = \max\{\mu_{R_1}(x), \mu_{R_2}(x)\}, \quad \mu_R(x) = 1 - \mu_{R_1}(x).$$

Нечетким отношением R между X и Y называется нечеткое множество $R \subseteq X \times Y$, задаваемое функцией $(x, y) \mapsto \mu_R(x, y) \in [0, 1]$, характеризующей степень выполнения данного отношения. Отношение $R \subseteq X \times X$ называется *рефлексивным*, если $\mu_R(x, x) = 1$ для всех $x \in X$, *симметричным*, если $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$, и *антисимметричным*, если $\mu_R(x, y) \times \mu_R(y, x) = 0$ при $x, y \in X, x \neq y$.

Рефлексивное и симметричное отношение называется *отношением сходства*, а рефлексивное и антисимметричное – *отношением доминирования* (порядка). Если на конечном множестве $X = \{x_i\}_1^N$ задано отношение доминирования R , то можно упорядочить элементы x_i , например, сформировав функцию $v(x_i)$ (*функцию полезности*) по правилу [129]:

$$v(x_i) = \min_j \left\{ \frac{\mu_R(x_i, x_j)}{\mu_R(x_j, x_i)} \right\}. \quad (6.20)$$

*) Существуют и другие способы задания операций над нечеткими множествами.

Композицией нечетких отношений $R \subset X \times Y$ и $S \subset Y \times Z$ называется отношение $S \circ R \subset X \times Z$, определенное соотношение

$$\mu_{S \circ R}(x, z) = \sup_{y \in Y} \min\{\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)\}. \quad (6.21)$$

Правило (6.21) называется *правилом композиционного вывода*.

Если на множестве X задано нечеткое множество ограничений $\mu_G(x)$ и нечеткое множество цели $\mu_Q(x)$, то решение задачи достижения цели при ограничениях дается нечетким множеством $D = G \cap Q$, т.е.

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_Q(x)\} \quad (6.22)$$

(правило Беллмана – Заде). Нечеткость решения есть следствие нечеткости исходной задачи. Если все же требуется выбрать какое-то решение четким образом, то обычно выбирают решение, максимизирующее $\mu_D(x)$:

$$x_* = \operatorname{argmax}_{x \in X} \min\{\mu_G(x), \mu_D(x)\}. \quad (6.23)$$

В случае наличия нескольких целей и нескольких ограничений нечеткое решение описывается функцией принадлежности [129]

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_{G_1}(x), \dots, \mu_{G_m}(x), \mu_{Q_1}(x), \dots, \mu_{Q_m}(x)\}. \quad (6.24)$$

В частности, в задаче многокритериальной оптимизации $\min_x Q_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, функция принадлежности i -го нечеткого множества цели обычно формируется в виде

$$\mu_{Q_i}(x) = \frac{Q_{i*}}{Q_i(x)}, \text{ если } Q_{i*} = \inf_x Q_i(x) > 0.$$

В этом случае подход Беллмана – Заде эквивалентен введению свертки критериев по правилу

$$\bar{Q}(x) = \max_i \frac{Q_i(x)}{Q_{i*}}, \quad (6.25)$$

т.е. приводит к варианту минимаксного подхода. Однако отличие от традиционного принципа гарантированного результата [35] состоит в том, что альтернатива, минимизирующая (6.25), не объявляется единственно верной, а наряду с другими, близкими по показателю (6.25), предъявляет лицу, принимающему решение для окончательного выбора.

Перейдем к описанию формализованной модели предметной области сравнительного анализа алгоритмов управления. Базовыми понятиями, входящими в эту модель, являются алгоритмы $A1, \dots, AN$, варианты условий $C1, \dots, CM$, показатели качества $O1, \dots, OL$. Каждому алгоритму AI , $I = 1, \dots, N$, сопоставляется набор настроек параметров, который может принимать значения $\alpha_I = \{\alpha_{I1}, \dots, \alpha_{IN_I}\}$, т.е. $AI = AI(\alpha_I)$. Вариант условий CJ определяет совокупность значений параметров ОУ и внешних воздействий и, возможно, дополнительных требований, при которых может быть произведен эксперимент (вычислительный, натуральный и т.п.). Таким образом, каждому условию CJ , $J = 1, \dots, M$, сопостав-

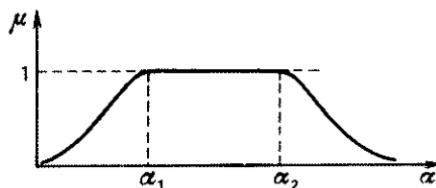


Рис. 6.11. Функция принадлежности нечеткой переменной "значение α в интервале от α_1 до α_2 "

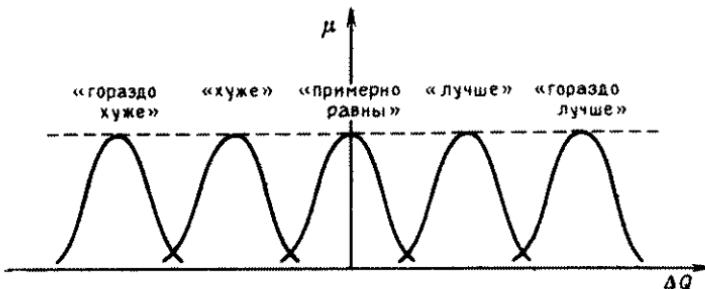


Рис. 6.12. Функции принадлежности терм-множеств лингвистической переменной "сравнение"

ляется список значений $\beta_{j1}, \dots, \beta_{jr}$, которые принимают параметры ОУ и внешних воздействий.

Показатели $QK, K = 1, \dots, L$, определяют качественные или количественные характеристики функционирования системы управления, значения которых q определяются в результате эксперимента. Таким образом, между введенными понятиями возникает отношение $R(A, C, Q, q)$, выполнение которого означает, что в результате эксперимента с алгоритмом A в условиях C показатель Q принял значение q .

Сравнительный анализ проводится на основании отношения и набора продукционных правил вида

ЕСЛИ $S1, S2, \dots$ ТО S . (6.26)

внесенных в автоматизированную систему экспертами. Здесь $S, S1, S2, \dots$ утверждения, часто в нечеткой или лингвистической форме, например "объект - слабодемпфированный", "возмущение на входе - низкочастотное", "время переходного процесса около 4 секунд" и т.п. В качестве S в продукциях (6.26), в частности, выступают нечеткие отношения предпочтения между алгоритмами с функцией принадлежности, формируемой в процессе логического вывода.

Для использования в продукционных правилах четких значений, полученных в вычислительном эксперименте, в автоматизированной системе хранится информация о функциях принадлежности. Например, на рис. 6.11 изображена функция принадлежности нечеткой переменной "значение α в интервале от α_1 до α_2 ", на рис. 6.12 - функции принадлежности терм-

множеств лингвистической переменной сравнения алгоритмов, построенные на разности значений показателя качества.

В соответствии с построенной моделью и общей методикой § 6.1 сравнительный анализ алгоритмов управления для конкретной задачи разбивается на этапы (фазы).

Фаза 1: настройка алгоритмов. Для каждого алгоритма A_1 задаются совокупность M_1 условий C_1, \dots, C_{M_1} и показатель QK_1 , и производится подбор настроек параметров $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{N_1}\}$, например, по критерию

$$\min_{\alpha} \max_{\{C_1, \dots, C_{M_1}\}} QK_1. \quad (6.27)$$

В нечеткой ситуации критерий (6.27) раскрывается в соответствии с правилом (6.23). Для сокращения вычислений берут $M_1 \ll M$.

Фаза 2: проведение экспериментов и заполнение базы данных. Производится формирование основного отношения $R(\dots)$ между введенными понятиями. Совокупность данных размещается в базе данных автоматизированной системы сравнительного анализа, заполнение которой целесообразно проводить непосредственно с выхода автоматизированной системы моделирования (§ 6.2).

Фаза 3: извлечение знаний. Сформировавшиеся в базе данных на предыдущей фазе отношения дают возможность находить ответы на некоторые вопросы об испытуемых алгоритмах. Например, стандартные механизмы поиска в базе данных позволяют отвечать на следующие вопросы:

- а) Какой алгоритм лучше в условиях C_j по критерию Q_K ? Почему?
- б) Какой алгоритм лучше в условиях C_j ? Почему?
- в) Какой алгоритм лучше по критерию Q_K ? Почему?
- г) Какой алгоритм лучше? Почему?
- д) Когда A_1 лучше, чем A_2 ?
- е) Когда A_1 лучше всех алгоритмов?

Ответ на вопрос "Какой алгоритм...?" может состоять, например, в индикации на экране списка алгоритмов, упорядоченного по убыванию степени предпочтительности. При ответе на уточняющий вопрос "Почему?" индицируется путь вывода соответствующего отношения. Отвечая на вопрос "Когда?", следует перечислить все возможные сочетания условий и значений показателей, при которых имеет место соответствующее предпочтение. Ответом на последний вопрос является указание области эффективности для алгоритма, т.е. результат сравнительного анализа.

Для реализации программной системы поддержки этапа сравнительного анализа алгоритмов управления удобно использовать инструментальные средства [115], основанные на языке логического программирования Пролог, имеющие развитые механизмы логического вывода и манипулирования данными [127].

Описанная модель предметной области сравнительного анализа и основанные на ней средства автоматизации этого этапа проектирования помогают проанализировать большие объемы данных по моделированию алгоритмов управления в сложных задачах, обоснованно выбрать алго-

ритм и определить область его эффективности. Система может развиваться: если, например, включить в нее долговременную базу данных, то она приобретет способность накапливать опыт, знания об уже решенных задачах.

§ 6.5. Экспертные адаптивные регуляторы

Автоматизированная система, описанная в предыдущем параграфе, выполняет ряд действий, которые свойственны человеку-специалисту (эксперту) в области анализа систем управления. Это позволяет отнести ее "по назначению" к одному из классов систем искусственного интеллекта – к экспертным системам (ЭС) [147]. Удобство "экспертного" способа построения сложных программных систем состоит в наличии развитых инструментальных средств (инженерии знаний) для модификации действий, выполняемых системой. ЭС могут применяться на различных этапах создания систем управления. Ниже описывается один из возможных вариантов применения ЭС на последнем этапе создания систем управления – на этапе реализации.

Известно, что по мере приближения разработки системы управления к своему завершению узнать алгоритм управления становится все трудней: он обрастает всевозможными модификациями и блокировками. При управлении технологическим процессом необходимо предусматривать ручной ввод установок регулятора, "безударный" переход с ручного управления на автоматическое и обратно, контроль и обработку аварийных и сбойных ситуаций и т.д. Для адаптивных регуляторов, предназначенных, в первую очередь, для управления многорежимными и нестационарными процессами, дополнительно возникает необходимость в начальном вводе и обновлении настраиваемых параметров, переключениях с адаптивного на запасной, базовый регулятор и т.д. Объем программ, реализующих это "обрамление", может значительно превышать объем реализации основного алгоритма управления.

Условия (правила) работы вспомогательных программ являются эвристическими: они могут меняться и уточняться при наладке системы, а иногда и на этапе эксплуатации. Трудоемкость отладки, тестирования и модификации алгоритмов и программ управления приводит к затягиванию ввода в действие систем и снижению их качества.

Положение меняется при реализации адаптивного регулятора средствами экспертных систем. Рассмотрим для определенности ЭС производственного типа, которые основаны на правилах-конструкциях типа ЕСЛИ...ТО... Основными компонентами такой ЭС являются база данных, база правил, механизм вывода, планировщик, пользовательский интерфейс.

База данных. Место хранения фактов, показаний, гипотез и целей. К фактам (априорным данным) относятся пределы измерения датчиков, пороги точности, аварийные границы и т.д. Под показаниями понимают текущие показания датчиков, сообщения технологов и операторов, результаты лабораторных измерений. Гипотезы представляют собой, в основном, различные оценки и прогнозы, вырабатываемые идентификаторами состояний и параметров процесса. Примерами целей являются: "обеспеч-

печить устойчивость", "найти оптимальный режим", "приблизиться к эталонной модели" и т.п.

База правил. Вариант базы знаний, содержащий продукцию вида

ЕСЛИ < СИТУАЦИЯ > ТО < ДЕЙСТВИЕ > (6.29)

Ситуация выражает соотношение между фактами, показаниями, гипотезами и целями из базы данных. **Действие** состоит в добавлении или изменении содержимого базы данных, включении или выключении регулятора, переключении с одного алгоритма управления или оценивания на другой, проверке работы устройства и т.п. Для сокращения времени поиска в базе правил правила объединяются в группы ("источники знаний"), содержащие знания, относящиеся к одному объекту (предмету).

Механизм вывода. Предназначен для определения по контексту (состоянию базы данных), какое правило применять следующим. В ЭС используют как *прямой вывод* (от исходного состояния к целевому), так и *обратный* (от целевого к исходному) [127].

Пользовательский интерфейс. Его можно разделить на две части. Первая — *средства развития системы* (редактор, обеспечивающий просмотр и модификацию правил); вторая — *подсистема объяснения*, выдающая по запросу пользователя справки: как выведен тот или иной факт, почему исключен алгоритм и т.д.

Перейдем к описанию примера экспертного адаптивного регулятора, начав с описания его алгоритмической структуры. Действия, выполняемые регулятором, объединяются в несколько групп, соответствующих различным источникам знаний.

1. Регулятор основного контура. В эту группу входят:

— *оптимальный линейный регулятор* (регулятор минимальной дисперсии [135, 177]) $Fu_k = Gy_k + e_k$, где F, G — многочлены от оператора задержки, e_k — шум (см. также (4.94), (4.95)); входами процедуры, реализующей оптимальный регулятор, являются y_k — выход ОУ, коэффициенты многочленов модели ОУ (4.86), степени n_F, n_G многочленов регулятора, шаг дискретности h , числовые параметры запаздывания;

— *блок контроля оптимальности*, проверяющий на некоррелированность процесс обновления $\hat{F}e_k = y_k$ (в случае нарушения оптимальности системы нарушается белошумность \hat{e}_k);

— *блок контроля колебательности*, контролирующий осциллирующую составляющую y_k (как известно, такие составляющие обуславливаются сокращением в оптимальной системе неминимально фазовых или близких к ним нулей и подавляются при увеличении запаздывания p);

— *блок оценки степеней n_F, n_G .*

2. Базовый регулятор. Типовой ПИД-регулятор с блоком расчета его параметров (по оценке критического коэффициента усиления k_c и критического времени t_c [217]).

3. Идентификатор параметров. В него входят:

— *рекуррентный алгоритм МНК* для оценки параметров ОУ $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ (его выходами являются h, p , коэффициент забывания λ , начальная оценка θ_0 , начальная матрица ковариаций ошибок $P_0 > 0$);

— *блок контроля идентифицируемости* (разнообразия рядов u_k, y_k);

— *генератор шума с дисперсией σ^2* (подключается к регулятору при недостаточном разнообразии);

Таблица 6.6

Время	\bar{u}	σ_u	\bar{y}	σ_y	Устойчивость	Тип регулятора
...	есть есть нет	(базовый, оптимальный, адаптивный)

– блок контроля скачков параметров.

4. Головная программа (монитор). Включает средства оценки средний и дисперсий процесса, блок контроля устойчивости. Возможно включение и других функций: идентификации состояния, сигнализации о необходимости настройки регулятора, контроля выхода переменных за "опасные границы" и т.д.

База данных системы содержит статические и динамические данные, состоящие из фактов, аксиом, гипотез, целей. Данные объединены в группы, отвечающие источникам знаний и называемые *списками событий*. В списки могут попадать характеристики событий, связанных с поведением объекта либо порождаемых более ранними событиями. К событиям, в частности, относятся достижение переменных и их скоростями заданных границ; команды оператора; ввод новых гипотез о процессе; модификации старых гипотез; запросы на изменение режима работы, сигналы об изменении режимов, запросы оператора на выдачу информации. Таким образом, можно сказать, что процесс оказывается "управляемым от событий".

Для каждого источника знаний ведутся таблицы данных. Например, таблица для монитора имеет вид табл. 6.6. По таблице можно ответить на вопросы: есть ли связь между \bar{u} , \bar{y} ? Включается ли адаптация после существенных изменений режима? Какие регуляторы используются чаще всего? и т.д. Изменения в таблицы данных и списки событий вносятся при изменении режима работы.

Другая важная часть базы данных – список гипотез: структурированный набор введенных утверждений об условиях работы процесса. Нижний уровень в этой структуре содержит непосредственные выводы из показаний датчиков. Например, гипотеза "ошибки управления малы" прямо выводится из списка текущих средних и дисперсий (табл. 6.6). Вывод более сложных гипотез может включать вычисления или применение эвристических правил.

Реализация. Макет описанной системы реализован [218] на ЭВМ VAX 11/780 в операционной системе VMS. ЭС написана на языке ЛИСП с использованием инструментальных средств OPS4, а численные алгоритмы – на Паскале. В системе действуют 3 параллельных процесса: ЭС, численные алгоритмы и интерфейс (рис. 6.13). Они реализованы как подпроцессы в VMS и связаны через почтовые ящики VMS (почтовый ящик – это очередь, в которой сообщения могут записываться и считываться).

Алгоритмы включают разделы инициализации, исполнения, изменения параметров и удаления, в соответствии с типами сообщений, посылаемых ЭС. Основные сообщения, получаемые ЭС, – это результаты работы алгоритмов контроля и сигналы тревоги.



Рис. 6.13. Структура экспериментального адаптивного регулятора

ЭС состоит из трех частей: *рабочая память* (база данных ЭС); *память продукции*, содержащая правила; *механизм прямого вывода*, управляющий применением правил. Механизм вывода сопоставляет условия, каждого правила с содержимым рабочей памяти, отбирая подошедшие правила. Затем выбирает одно из них и выполняется его действия. Действие может добавлять новые или исключать элементы в рабочую память: выполнять описываемые пользователем ЛИСП-функции и т.д. В макете база правил содержит около 70 правил.

Примеры правил.

Правило 5

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{СОСТОЯНИЕ : ПУСК}) \\ (\text{ЦЕЛЬ: ПИД УПРАВЛЕНИЕ}) \\ (\text{ПИД-ПАРАМЕТРЫ ЗАДАНЫ}) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\text{DELETE}) (\text{СОСТОЯНИЕ : ПУСК}) \\ (\text{ADD}) (\text{СОСТОЯНИЕ : ПИД УПРАВЛЕНИЕ}) \\ (\text{ПУСК ПИД}) \end{array} \right\}$$

Правило 12

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{СОСТОЯНИЕ} = X) \\ (\text{СИГНАЛ : ТРЕВОГА}) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\text{DELETE}) (\text{СОСТОЯНИЕ} = X) \\ (\text{ADD}) (\text{СОСТОЯНИЕ : ТРЕВОГА}) \\ (\text{ПРЕДЫДУЩЕЕ СОСТОЯНИЕ} = X) \end{array} \right\}$$

Выводы. Итоги опытной эксплуатации системы показали, что реализация ее становится более ясной, прежде всего, из-за разделения логики и алгоритмов. Другое достоинство: легкость изменения логики за счет изменения или добавления правил. Это очень удобно для макетных и исследовательских систем. Кроме того, ЭС дает возможность сочетания численных алгоритмов с опытом оператора, что особенно эффективно для сложных, многосвязных систем управления. Таким образом, предстают интересные возможности для комбинирования аналитических и эвристических подходов.

§ 6.6. Адаптивные или неадаптивные?

Какие выводы можно сделать из рассмотренных подходов к автоматизации и синтеза адаптивных систем управления? Прежде всего: средства автоматизации проектирования адаптивных систем хороши и для автоматизации проектирования систем неадаптивных! Конечно, в "адаптивном" случае в библиотеках САПР должны храниться специфические описания адаптивных регуляторов и процедуры расчета их параметров. Но в тех же библиотеках должны храниться данные и о неадаптивных регуляторах, поскольку при выборе проектного варианта сравнение с существующими решениями необходимо. С другой стороны, с точки зрения заказчика — потребителя системы управления тоже нет принципиальной разницы между адаптивными и неадаптивными системами.

В конкретной практической задаче всегда присутствует неопределенность, но насколько она окажется существенной, чтобы адаптивные структуры получили преимущество — заранее неясно. При выборе структуры системы играют роль не только критерии устойчивости и качества, но и сложность реализации, надежность, помехоустойчивость (робастность), стоимость и т.д. И, значит, при решении практической задачи следует (каждый раз заново!) беспристрастно сравнивать различные, в том числе и адаптивные подходы. Уровень созданной системы будет тем выше, чем больше вариантов было рассмотрено при проектировании, чем больше их было отброшено.

Во-вторых, выбор, который приходится делать разработчику между одним и другим алгоритмом, всегда субъективен. Для всестороннего сравнительного анализа не хватает времени и данных, те данные, что есть — неточны. Однозначного критерия выбора нет: та ЦУ, которая фигурирует в задаче синтеза, назначается исходя из удобства решения задачи и не отражает всех предъявляемых к системе требований. Большую роль при выборе алгоритма играют эвристические правила и соображения. Поэтому при разработке соответствующего программного обеспечения оказываются полезными методы и системы искусственного интеллекта, в частности экспертные системы.

Новые пути повышения качества систем управления открываются, если распространить действие эвристик и на этапы реализации и эксплуатации. При этом также оказываются эффективными экспертные системы, позволяющие легко менять и модифицировать алгоритмы управления даже в действующей системе, строить композитные системы с переключением структур в ходе эксплуатации. Однако теоретические методы исследования устойчивости и качества таких систем разработаны слабо.

Когда шла речь о сравнении адаптивных и неадаптивных систем, в первую очередь имелся в виду класс беспоисковых систем, которым в основном посвящена книга. Однако нельзя при сравнении отбрасывать без проверки и алгоритмы других классов. В подтверждение приведем пример.

Рассмотрим описанный в § 4.7 алгоритм адаптивной оптимизации статического объекта в условиях помех, включающий блок рекуррентного оценивания параметров модели целевой функции (контур адаптации) и блок пересчета подаваемых на ОУ управлений по текущим оценкам (основной контур). Пусть внешние воздействия r_k не меняются, т.е. задача стационарна. Ясно, что по сравнению с одноконтурными поисковыми методами (метод Кифера–Вольфовича, случайный поиск и т.д.) двухконтурный алгоритм § 4.7 может быть более быстродействующим. Для этого нужно, чтобы процесс в контуре адаптации сходился быстрее, чем процесс оптимизации в основном контуре; по мере приближения к точке экстремума прогноз ее положения по модели должен становиться более точным, чем поисковое движение.

Однако "наличие случайных помех уничтожает преимущество быстро сходящихся методов минимизации" [141], и скорость сходимости в обоих контурах оказывается одного порядка (даже если применять для оценивания не градиентный метод, а более эффективные многошаговые алгоритмы § 4.5). Более того, алгоритм адаптации, скорее всего, сходится даже медленнее: ведь в контуре адаптации настраивается больше параметров, чем в основном контуре! Например, если выбрана квадратичная модель целевой функции

$$Q(u) = u^T A u + u^T b + c, \quad u \in R^m,$$

то число оцениваемых параметров модели

$$N(m) = \frac{1}{2} m(m+3) + 1.$$

Значит, $N(m)$ гораздо больше, чем m ($N(4) = 15, N(5) = 21$), а ведь чем меньше параметров оценивает алгоритм, тем быстрее он сходится (§ 4.11).

Опять мы видим, что для доказательства конкурентоспособности адаптивных алгоритмов по сравнению с существующими необходимо в каждой задаче проводить дополнительные теоретические или экспериментальные исследования. Во всяком случае, при выборе структуры алгоритма следует тщательно анализировать характер неопределенности, выделяя медленные и быстрые возмущения. К медленным возмущениям алгоритм должен адаптироваться, подстраиваться, от быстрых – отстраиваться, т.е. подавлять их действие.

А как оценить время адаптации? Для предварительной оценки бывает полезным следующее эвристическое правило для алгоритмов градиентного типа: чтобы надежно оценить N параметров, необходимо сделать от $3N$ до $5N$ измерений (шагов).

Глава 7

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОМПЛЕКСАМИ С ЯДЕРНЫМИ РЕАКТОРАМИ

Настоящая глава посвящена иллюстрации методов синтеза АдСУ нелинейными объектами на примере важного класса прикладных задач: задач управления режимами энергетических и исследовательских комплексов, включающих ядерных реактор. Рассматриваются задачи, требующие для своего решения разработки эффективных алгоритмов управления распределением мощности (энергораспределением) в активной зоне реактора. В § 7.1 дается общая характеристика рассматриваемого класса задач; приводятся математические модели динамики реактора. В § 7.2 рассмотрена задача адаптивной оптимизации статического (установившегося) распределения мощности в реакторе по критерию наилучшего приближения к заданному распределению. В § 7.3 рассматриваются задачи стабилизации распределения мощности в динамике, когда алгоритм управления работает в замкнутом контуре и обеспечивает желаемые динамические свойства всей системы. В § 7.4 более подробно рассмотрена задача регулирования температуры пара перед турбиной в энергоблоке АЭС с ядерным пароперегревом. Приводятся результаты моделирования на ЭВМ, показывающие возможности адаптивного подхода.

§ 7.1. Задачи адаптивного управления комплексами с ядерными реакторами

7.1.1. Общая характеристика задач адаптивного управления комплексами с ядерными реакторами. Комплексы, в состав которых входят ядерные реакторы, находят все более широкое применение в технике. Основными типами реакторных комплексов являются энергетические и исследовательские [19, 203]. Целью функционирования энергетических комплексов является выработка энергии: электрической (АЭС), ядерной (реакторы – размножители). Исследовательские комплексы предназначены для проведения экспериментов, как правило, материаловедческих: для исследования свойств материалов и оборудования в различных радиационных, температурных и др. режимах.

Современный ядерный реактор представляет собой высокоавтоматизированный агрегат, оснащенный информационной-вычислительной системой (ИВС) на базе управляющей ЭВМ (одно- и многопроцессорной) или на распределенных микропроцессорных вычислительных средствах [19, 203].

Кроме информационных и вычислительных функций, в ИВС реализуются также функции контроля и управления. Задачи управления занимают существенное место среди задач, возлагаемых на ИВС. К их числу относятся [63, 203]:

дистанционное и автоматическое управление агрегатами и механизмами комплекса;

- автоматическое регулирование режимных параметров комплекса;
- технологические защиты;
- оптимизация технологических процессов;
- управление ходом эксперимента и обработкой его результатов и т.д.

Среди задач, которые должна решать управляющая подсистема ИВС, одну из важнейших ролей играет задача управления распределением мощности в активной зоне реактора [57, 64, 174]. Успешное решение этой задачи позволяет повысить эффективность и безопасность работы реактора. В энергетических комплексах повышение точности регулирования поля энерговыделения влечет за собой рост коэффициента использования топлива, экономичность работы реактора. Для исследовательских комплексов точность поддерживания заданного распределения мощности определяет успешный ход эксперимента. Кроме того, воздействие на систему управления и защиты (СУЗ) реактора, регулирующую распределение мощности, позволяет эффективно управлять режимом всего комплекса.

Задачи управления распределением мощности в реакторе – это типичные задачи управления в сложных системах. К числу факторов, обусловливающих их сложность, относятся:

1. Большое число регулируемых переменных. Число зон управления и контроля (участков, в каждом из которых требуется поддерживать с заданной точностью свой уровень мощности) в современных мощных реакторах измеряется сотнями и тысячами [63].

2. Большое число органов регулирования (регулирующих стержней). Оно также доходит до нескольких сотен.

3. Сложность математических моделей реактора, являющегося объектом с распределенными параметрами. Для получения технически реализуемых алгоритмов управления математическая модель реактора подвергается упрощениям.

4. Необходимость использования нелинейных моделей реактора для повышения точности регулирования. Роль фактора нелинейности возрастает при работе комплексов в маневренных режимах.

5. Решение задач управления реакторными комплексами серьезно осложняется неопределенностью параметров и нестационарностью нейтринно-физических процессов в реакторе. Причинами, обуславливающими действие этих факторов, являются выгорание топлива, отравление продуктами распада и температурные эффекты [58, 174].

Первоочередной задачей при автоматизации управления распределением мощности в реакторе является обеспечение заданного статического распределения мощности. Для энергетических комплексов желаемым распределением, как правило, является симметричное, для исследовательских – соответствующее заданному режиму эксперимента. Задача реализации статического распределения возникает, если скорость передвижения управляющих стержней меньше скорости переходных процессов. В свою очередь, замедление перемещения стержней вызывается соображениями безопасности, а также задержками в изменении регулируемых переменных. Решение задачи управления в статике затрудняется, если число управляющих стержней меньше числа регулируемых переменных. Наконец,

решение задач управления комплексом в динамике, т.е. в темпе с процессами, происходящими в объекте, позволяет повысить быстродействие системы управления. Приведем краткий обзор существующих подходов к решению перечисленных задач.

В настоящее время известно много алгоритмов управления установившимся распределением мощности в реакторе [16, 46, 63, 174, 202 и др.]. Алгоритм, описанных в [203], разработан для реактора ВВЭР-1000. Поле энерговыделений в реакторах типа ВВЭР контролируется по температуре теплоносителя на выходе из тепловыделяющих сборок. На основе коэффициента неравномерности, задаваемого в качестве установки, программой рассчитываются допустимые температуры теплоносителя на выходе из тепловыделяющих сборок и выдаются сигналы на погружение определенных управляющих сборок, содержащих поглотитель. В целях безопасности перемещение управляющих сборок осуществляется шагами фиксированной длины, а интервалы между запусками программы больше времени, необходимого для установления нового распределения мощности.

Для алгоритмов описанного типа количество шагов, требуемое для сходимости, может быть достаточно велико. Для повышения быстродействия используется статическая модель реактора. В книге [174] описана линейная статическая модель вида

$$\delta y = C \delta v, \quad (7.1)$$

где $\delta y \in R^l$ – вектор изменений энерговыделений в точках контроля, вызванных изменениями положений регулирующих стержней на величины, образующие вектор $\delta v \in R^m$; C – матрица коэффициентов передачи, зависящая от состояния и параметров реактора. Отмечается, что элементы C следует периодически обновлять по результатам активного эксперимента (например, по методу наименьших квадратов). Для выбора очередного значения δv предлагается минимизировать среднеквадратичное отклонение

$$J(v) = (y(v) - y^*)^T Q (y(v) - y^*) \quad (7.2)$$

при ограничениях

$$y = y_0 + C(v - v_0), \quad 0 \leq y \leq y^+,$$

$$v^- \leq v \leq v^+, \quad v_{AP}^- \leq v_{AP} \leq v_{AP}^+,$$

где y^* , y^+ , v^- , v^+ , v_{AP}^- , v_{AP}^+ – векторы желаемого распределения, ограничений на энерговыделения, положений стержней регулирования и стержней системы автоматического регулирования интегральной мощности.

Статика реального реактора описывается существенно нелинейными уравнениями, поэтому описанный подход правомерен лишь в достаточно малом диапазоне отклонений от опорного режима. В [63] предложена статическая модель для оптимизации энергораспределения в активной зоне большого канального энергетического реактора в виде, линейном по относительным величинам:

$$y_i = y_i^0 [1 + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} (\rho_j - \rho_j^0)], \quad i = 1, \dots, l, \quad (7.3)$$

где $y = \text{col}(y_1, \dots, y_l)$ – вектор значений мощностей в точках (зонах) контроля; $\rho = \text{col}(\rho_1, \dots, \rho_m)$ – вектор входов (управлений), которые пропорциональны реактивности стержней ($\rho_j = 0$ – стержень извлечен из активной зоны, $\rho_j = 1$ – стержень полностью введен); y_i^0, ρ_j^0 – начальные значения мощности и управлений, α_{ij} – коэффициент влияния (чувствительности) j -го стержня на мощность в i -й зоне. Цель оптимизации становится в виде

$$\min_{\rho} \max_i \frac{Q_i}{Q_{cp}} \quad (7.4)$$

при выполнении ограничений

$$Q_i \leq Q_{cp}, \quad i = 1, \dots, l, \quad \left| \sum_{j=1}^m (\rho_j - \rho_j^0) \right| \leq R,$$

$$0 \leq \rho_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Возникающая минимаксная задача сводится к задаче линейного программирования, для решений которой используется симплекс-метод. Сравнение ряда существующих методов проводится в [16, 46].

Для уточнения коэффициентов статической модели реактора в известных работах предлагается использовать результаты активного эксперимента, обрабатываемые, например, по методу наименьших квадратов. Однако на действующем объекте активный эксперимент не всегда возможен по соображениям безопасности. Поэтому представляет интерес разработка методов адаптивной оптимизации энергораспределения, работоспособных в условиях нормальной эксплуатации комплекса и позволяющих оперативно использовать результаты измерений для уточнения модели. Изложению таких методов на основе результатов главы 4 посвящен § 7.2.

Переходя к методам управления рельефом мощности реактора в динамике, заметим, что их реализация предполагает наличие системы малоинерционных датчиков поля энерговыделения (например, ионизационных камер), а также системы локальных (зонных) регуляторов, обладающих достаточным быстродействием [63, 64, 174]. Уставками для локальных регуляторов служат значения, найденные при оптимизации статического энергораспределения. Применение локальных регуляторов позволяет повысить точность поддержания заданного распределения мощности и оперативность устранения перекосов мощности, что в конечном итоге ведет к повышению экономичности и безопасности работы комплекса. Однако для этого нужно разработать эффективные алгоритмы управления. В известных реализациях систем локальных регуляторов используются простые (пропорциональные, шаговые) законы регулирования.

Дальнейшее повышение быстродействия и точности регулирования требует синтеза алгоритмов регулирования на основе моделей динамики реактора [174]. Как и в задачах управления в статике, эффективным способом борьбы с неопределенностью и нестационарностью параметров модели является применение адаптивного подхода. Однако известные алгоритмы адаптивного управления динамикой реакторных комплексов решают задачи управления интегральной мощностью и используют точечные модели реактора [222]. Ниже, в § 7.3, описан метод синтеза алгоритмов адап-

тивного управления распределением мощности в реакторе, основанный на результатах глав 2, 3. Метод использует нелинейные многоточечные модели динамики реактора и приводит к алгоритмам, реализуемым на ЦВМ.

7.1.2. Математические модели процессов в реакторах. Как уже было сказано, для повышения качества управления разработка системы управления ядерной установкой производится на основе ее математической модели. В зависимости от назначения употребляют модели разной степени сложности. Как известно, от моделей, созданных для целей управления, обычно не требуется большой точности, так как с малыми ошибками успешно борется регулятор в цепи обратной связи. Поэтому для управления распределением мощности ограничиваются простейшей распределенной моделью – одногрупповыми уравнениями диффузии с учетом запаздывающих нейтронов [47, 174]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= M^2 \Delta^2 \Phi + (K - 1 - \beta) \Phi + \sum_{q=1}^6 \lambda_q \psi_q, \\ \frac{\partial \psi_q}{\partial t} &= \beta_q \Phi - \lambda_q \psi_q, \quad q = 1, \dots, 6, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где $\Phi = \Phi(r, t)$ – поток нейтронов в точке $r = (x, y, z)$ из активной зоны, $\Sigma_a \psi_q$, λ_q , β_q – соответственно концентрация, постоянная распада и доля i -й группы ядер-излучателей запаздывающих нейтронов, ($\psi_q = \psi_q(r, t)$), $\beta = \beta_1 + \dots + \beta_6$), Δ^2 – оператор Лапласа, $K = K(r, t)$ – коэффициент размножения. В качестве граничных условий выбирается равенство потока нулю на экстраполированной границе реактора.

Уравнения (7.5) описывают динамическую систему, входом которой является функция $K(r, t)$ – коэффициент размножения, а выходом – выделяемая мощность $N = N(r, t)$, пропорциональная потоку нейтронов: $N = \alpha \Phi$. Если необходимо учесть обратную связь по мощности [174], то к (7.5) добавляются уравнения

$$K = K_u \pm K_\Phi, \quad \tau_\Phi \frac{\partial K_\Phi}{\partial t} + K_\Phi = \alpha \Phi, \quad (7.6)$$

где K_Φ – мощностная составляющая коэффициента размножения, τ_Φ – параметры, K_u – составляющая, принимаемая в качестве входа в (7.5), (7.6).

В реальных условиях количество датчиков мощности конечно и число стержней регулирования, при помощи которых изменяют коэффициент размножения, также конечно. Поэтому исходную распределенную модель целесообразно заменить упрощенной сосредоточенной (конечномерной) [47, 57, 174]. Для больших реакторов симметричной (например, цилиндрической) формы, допускающих гомогенизацию, переход к конечномерной модели удобно осуществить на основе разложения по собственным функциям (7.5) (так называемая гармоническая модель [174]).

В общем случае будем дискретизовать (7.5) по пространственным переменным. Разобъем активную зону на l участков (зон) дискретизации, мощность каждой из которых $y_i = y_i(t)$, $i = 1, \dots, l$, доступна измерению. Будем считать, что все параметры реактора усреднены по высоте, т.е. рассматриваем “плоскую” модель реактора. Пусть в активной

зоне имеется m стержней регулирования, каждый из которых влияет на нейтронное поле в одной или нескольких зонах дискретизации. Вносимая s -м стержнем реактивность есть монотонная нелинейная функция $f(u_s)$ от положения стержня u_s . В расчетах обычно пользуются зависимостью

$$f(u_s) = \sin^2 \frac{\pi u_s}{2h_s}$$

при $0 \leq u_s \leq h_s$. Таким образом, коэффициент размножения в i -й зоне K_i определяется выражением

$$K_i = \sum_{s=1}^m \bar{b}_{is} f(u_s),$$

где \bar{b}_{is} – коэффициент влияния. Дискретизуя (7.5), приходим к много точечной модели реактора:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \sum_{s=1}^m b_{is} f(u_s) y_i + \sum_{j=1}^l a_{ij} y_j + \sum_{q=1}^6 \lambda_q \psi_{qi}, \\ \dot{\psi}_{qi} &= \beta_q y_i - \lambda_q \psi_{qi}, \quad q = 1, \dots, 6, \quad i = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (7.7)$$

где коэффициенты связи b_{is} , a_{ij} определяются параметрами реактора, выбором зон и способом дискретизации (обычно большинство коэффициентов связи равны нулю). К виду (7.7) приводятся также некоторые многоточечные модели кинетики связанных реакторов [47].

Модель (7.7) можно записать в векторно-матричной форме, введя вектор состояния $x = \text{col}(y, \psi_1, \dots, \psi_6) \in R^{7l}$, где

$$y = \text{col}(y_1, \dots, y_l), \quad \psi_q = \text{col}(\psi_{q1}, \dots, \psi_{ql}), \quad q = 1, \dots, 6.$$

При этом (7.7) примет вид

$$\dot{x} = Ax + B(y)f(u), \quad y = Lx, \quad (7.8)$$

где

$$u = \text{col}(u_1, \dots, u_m), \quad f(u) = \text{col}(f(u_1), \dots, f(u_m)),$$

$$L = [\mu I_l | 0 | \dots | 0 |],$$

$$A = \begin{bmatrix} \{a_{ij}\} & \lambda_1 I_l & \dots & \lambda_6 I_l \\ \beta_1 I_l & \lambda_1 I_l & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \beta_6 I_l & 0 & \dots & \lambda_6 I_l \end{bmatrix}, \quad B(y) = \begin{bmatrix} b_{11} y_1 & \dots & b_{1m} y_l \\ \dots & & \dots \\ b_{l1} y_l & \dots & b_{lm} y_l \\ 0 & & \dots \\ 0 & & \dots \end{bmatrix}.$$

Для учета обратной связи по мощности к (7.7) следует присоединить уравнение (7.6), дискретизованное очевидным образом. Модели динамики всей установки, включающей реактор, получаются добавлением к (7.6), (7.7) уравнений внешних контуров. При достаточно точной работе систем регулирования внешних контуров можно в первом приближении пренебречь их влиянием на нейтронно-физические процессы и

использовать уравнение динамики внешних контуров в виде

$$\dot{z} = \tilde{F}(z, y, \tilde{u}, t), \quad (7.9)$$

где компоненты векторов $z = z(t)$, $\tilde{u} = \tilde{u}(t)$ являются переменными состояния и управления для внешних контуров. Чтобы описать статику процессов, в (7.6) – (7.9) следует приравнять нулю производные по времени. При этом (7.7) принимает вид

$$0 = \bar{A}y + B(y)f(u), \quad (7.10)$$

где

$$\bar{A} = \{\bar{a}_{ij}\}, \quad \bar{a}_{ij} = a_{ij}, \quad i \neq j, \quad \bar{a}_{ii} = a_{ii} + \sum_{q=1}^6 \beta_q, \quad i = 1, \dots, l.$$

Поскольку статический режим реализуется автоматическим регулятором при постоянном уровне интегральной мощности, к (7.10) следует добавить уравнение

$$\sum_{i=1}^l y_i = y_\Sigma, \quad (7.11)$$

где y_Σ – заданный уровень интегральной мощности реактора. Отметим, что при учете обратной связи по мощности вместо (7.10), (7.11) используется система уравнений

$$\sum_{j=1}^l \bar{a}_{ij} y_j + \bar{a}_{ii} y_i^2 + [\sum_{s=1}^m b_{is} f(u_s)] y_i = 0, \quad (7.12)$$

$$\sum_{i=1}^l y_i = y_\Sigma, \quad i = 1, \dots, l.$$

Приведенные упрощенные модели статики и динамики реактора будут использованы далее для синтеза алгоритмов адаптивного управления.

§ 7.2. Адаптивная оптимизация статического распределения мощности в реакторе

7.2.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу оптимизации поля энерговыделения реактора в статике. Критерий оптимальности задается как наилучшее среднеквадратическое приближение к желаемому полю при выполнении ограничений на положения стержней регулирования и мощности в зонах контроля. Так как мощность контролируется в конечном числе зон (точек), желаемое распределение будем задавать конечным набором значений – вектором $u^* = \text{col}(u_1^*, \dots, u_l^*)$, к которому следует приблизить вектор $u = \text{col}(u_1, \dots, u_l)$ измеренных значений мощности в зонах.

Модель статики реактора выберем в виде (7.10), (7.11). В силу однородности по параметрам (7.10) можно разделить на a_{ii} и считать тем самым $a_{ii} = 1$. Для учета возможных погрешностей модели введем в (7.10) аддитивные ограниченные возмущения и окончательно запишем уравнения

модели в виде

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{j \neq i} a_{ij} y_j + y_i \sum_{s=1}^m b_{is} f(u_s) + \varphi_i, \\ i &= 1, \dots, l, \\ \sum_{i=1}^l y_i &= y_\Sigma, \quad y_i = 0, \quad i = 1, \dots, l, \end{aligned} \tag{7.13}$$

где $|\varphi_i| \leq \Delta_\varphi$, $\varphi = \text{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_l)$. При фиксированных положениях стержней u_1, \dots, u_m система (7.13) содержит $l+1$ уравнение относительно l неизвестных y_1, \dots, y_l . Поэтому одна из компонент вектора $u = \text{col}(u_1, \dots, u_m)$ (для определенности u_m) должна задавать положение стержня автоматического регулирования, обеспечивающего выполнение (7.11). Таким образом, (7.13) следует рассматривать как систему $l+1$ уравнений с $l+1$ неизвестным y_1, \dots, y_l, u_m . В векторной записи (7.13) принимает вид

$$\bar{\Phi}(\bar{y}, \bar{u}, \varphi, \xi) = 0, \tag{7.14}$$

где $\bar{y} = \text{col}(y_1, \dots, y_l, u_m) \in R^{l+1}$, $\bar{u} = \text{col}(u_1, \dots, u_{m-1}) \in R^{m-1}$, $\xi = \text{col}\{a_{ij}, b_{ij}\}$ – вектор параметров ОУ.

Введем множества ограничений

$$\begin{aligned} U &= \{\bar{u}: \bar{u}_s \leq u_s \leq u_s^+, s = 1, \dots, m\}, \\ Y &= \{\bar{y}: \bar{y}_i \leq y_i \leq y_i^+, i = 1, \dots, l, u_m^- \leq u_m \leq u_m^+\} \end{aligned}$$

и предположим, что для любых $u \in U$ при $\|\varphi\| \leq \Delta_\varphi$ система (7.14) имеет единственное решение $\bar{y}(u) \in Y$ (это предположение физически вполне естественно). Поставим задачу оптимизации функции $J(u)$ с заданной точностью Δ_1 :

$$J(u^{(k)}) \leq J_* + \Delta_1, \quad u^{(k)} \in U, \quad \bar{y}(u^{(k)}, \varphi^{(k)}, \xi) \in Y \tag{7.15}$$

при $k > k_*$, где

$$J(\bar{u}) = \sup [\bar{y}(u) - y^*]^\top Q [\bar{y}(u) - y^*],$$

$$J_* = \inf \{J(u) \text{ при } u \in U, \bar{y}(u) \in Y\}.$$

Если бы вектор параметров реактора $\xi = \text{col}\{a_{ij}, b_{is}\} \in R^{l(l+m-1)}$ был известен, то задачу (7.15) можно было решать одним из известных методов оптимизации (нелинейного программирования) [141]. Однако, как показано выше, на практике эти параметры известны неточно и могут меняться в некоторых пределах, т.е. $\xi \in \Xi$, где Ξ – известное множество. Воспользуемся методами синтеза адаптивных систем оптимизации нелинейных статических объектов на основе идентификационного подхода и метода рекуррентных целевых неравенств, изложенных в § 4.7.

7.2.2. Алгоритмы управления и адаптации. Введем вектор оценок параметров ОУ $\theta = \text{col}(\hat{a}_{ij}, \hat{b}_{is}) \in R^{l(l+m-1)}$, $i, j = 1, \dots, l$, $s = 1, \dots, m$, $j \neq i$, зададим настраиваемую модель ОУ

$$\Phi(\bar{y}, u, 0, \theta) = 0, \tag{7.16}$$

где $\Phi(\cdot)$ аналогично (7.14) определяется из (7.13). Учитывая наличие

погрешностей, зададим цель адаптации неравенствами

$$|y_i^{(k)} + \sum_{j \neq i} \hat{a}_{ij} y_j^{(k)} + y^{(k)} \sum_{s=1}^m \hat{b}_{is} f(u_s^{(k)})| < \Delta_2, \quad i = 1, \dots, l. \quad (7.17)$$

Если ввести векторы

$$\theta_i = \text{col}(\hat{a}_{i1}, \dots, \hat{a}_{il}, \hat{b}_{i1}, \dots, \hat{b}_{im}) \in R^{l+m-1},$$

$$z_i^{(k)} = \text{col}(y_1^{(k)}, \dots, y_l^{(k)}, y_i^{(k)} f(u_1^{(k)}), \dots, y_i^{(k)} f(u_m^{(k)})),$$

то можно переписать (7.17) в компактном виде:

$$|y_i^{(k)} + \theta_i^\top z_i^{(k)}| < \Delta_2, \quad i = 1, \dots, l. \quad (7.18)$$

Для построения оценок $\theta_i^{(k)}$ выбирается конечно-сходящийся алгоритм решения неравенств (7.18) типа "полоска" (4.18) или неявного типа

$$\theta_i^{(k+1)} = \begin{cases} \text{Pr}_{\Xi_i} \left\{ \theta_i^{(k)} - \frac{\delta_i^{(k)}}{\gamma + \|z_i^{(k)}\|^2} z_i^{(k)} \right\}, & |\delta_i^{(k)}| \geq \Delta_2, \\ \theta_i^{(k)}, & |\delta_i^{(k)}| < \Delta_2, \end{cases} \quad (7.19)$$

где $\delta_i^{(k)} = y_i^{(k)} + \theta_i^{(k)\top} z_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, l$, $k = 0, 1, 2, \dots, \Xi_i$ — проекция множества Ξ на подпространство $\{\theta_i\}$. Отметим, что в силу структуры активной зоны большинство элементов a_{ij} , b_{is} являются нулями (существенно взаимное влияние лишь близлежащих зон и стержней). Нулевые компоненты целесообразно не включать в векторы $z_i^{(k)}$, $\theta_i^{(k)}$; при этом существенно снижается количество оцениваемых параметров.

Алгоритм управления (оптимизации) в основном контуре можно выбирать по-разному. Рассмотрим сначала частный случай, когда $m = 1 = l$ и в каждой зоне имеется стержень регулирования (или группа стержней, двигающихся синхронно), влияющий на мощность только в данной зоне. Это значит, что в (7.13) $b_{is} = 0$ при $i \neq s$. В этом случае, соответствующем по терминологии главы 1, задаче сложения, положения стержней $u_1^{(k)}, \dots, u_{m-1}^{(k)}$, будем искать из уравнения $\Phi(\bar{y}^*, u^{(k)}, 0, \theta^{(k)}) = 0$, означающего совпадение прогнозируемого по модели распределения мощности с желаемым.

Поскольку условие $\sum_{i=1}^l y_i^* = y_\Sigma$ выполняется в силу выбора y^* , получаем систему

$$\sum_{j \neq i} \hat{a}_{ij}^{(k)} y_j^* + y_i^* \hat{b}_{ii} f(u_i^{(k)}) = 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad (7.20)$$

имеющую в силу введенного предположения решение

$$u_i^{(k)} = f^{-1} \left(- \frac{\sum_{j \neq i} \hat{a}_{ij}^{(k)} y_j^* + y_i^*}{y_i^* \hat{b}_{ii}^{(k)}} \right). \quad (7.21)$$

Вычисленные из (7.21) величины $u_i^{(k)}$ с учетом ограничений $u_s^- \leq u_i \leq u_s^+$

подаются на объект. Таким образом, синтезированный алгоритм адаптивного управления имеет вид (7.19), (7.21).

Пусть теперь $m = 1 < l$, т.е. полное совпадение реального и желаемого распределений, вообще говоря, невозможно. В этом случае приходится применять итерационный алгоритм оптимизации. В соответствии с § 4.7 алгоритм поиска управлений включает три типа шагов.

а) "Полный" шаг:

$$u^{(k)} = \arg \min_{u \in U, \bar{y}(u, \theta^{(k)}) \in Y} J(u),$$

где $\bar{y}(u, \theta^{(k)})$ – решение уравнения модели

$$\Phi(\bar{y}, u, 0, \theta^{(k)}) = 0. \quad (7.22)$$

б) "Рабочий" шаг в направлении орта e_{jk} :

$$u^{(k)} = \begin{cases} P_{1u}\{u^{(k-1)} + \alpha d_k e_{jk}\}, & |d_k| > \kappa, \\ u^{(k-1)}, & |d_k| \leq \kappa, \end{cases}$$

где d_k – частная производная $J(\cdot)$ по u_{jk} , найденная по модели (7.22).

в) "Пробный" шаг длины β в направлении орта $\pm e_{jk}$.

Рабочий и пробный шаги соответствуют передвижению в каждый момент только одного стержня, что согласуется с требованиями безопасности установки. Выбор передвигаемого стержня, т.е. орта e_{jk} , может быть, например, циклическим.

Для построения оценок используется алгоритм (7.19) с учетом перехода к модели "в приращениях", т.е. замены цели адаптации (7.18) целью

$$(y_k^{(i)} - y_{k-1}^{(i)}) - [\theta_k^{(i)}]^T (z_k^{(i)} - z_{k-1}^{(i)}) < \Delta_r, \quad i = 1, \dots, l. \quad (7.23)$$

Нахождение минимума целевой функции по модели при полном шаге, а также выполнение рабочего шага требует вычисления частных производных от функции $J(\bar{u})$, определяемой через неявную модель (7.16). Для этого можно использовать следующие соотношения. Пусть

$$J(u) = [y(u) - y^*]^T Q [y(u) - y^*],$$

где $y(u)$ – решение уравнения $\Phi(y, u) = 0$. Тогда $\nabla J(u)$ имеет вид

$$\nabla J(u) = 2 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} \right]^T \left(\left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]^{-1} \right)^T Q (y(u) - y^*). \quad (7.24)$$

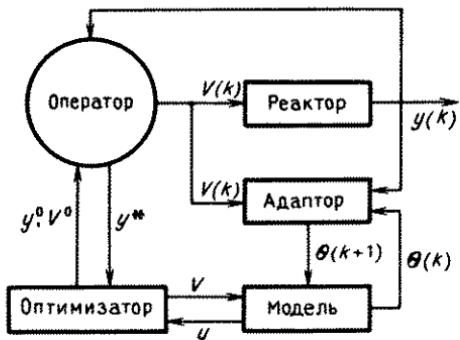
В данном случае

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_s} = b_{is} f'(u_s), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq j, \\ a_{ij} + \sum_{s=1}^m b_{is} f(u_s), & i = j, \end{cases}$$

так что $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \bar{A} + D$, где $D = \text{diag} \{ \sum_{s=1}^m b_{is} f(u_s) \}$. Для обращения матрицы $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ можно использовать ряд

$$(A + D)^{-1} = A^{-1} + DA^{-2} + (DA^{-1})^2 A^{-1} \quad (7.25)$$

Рис. 7.1. Структура адаптивной системы управления



сходящийся, если $\det A \neq 0$, $\|DA^{-1}\| < 1$. Если объем вычислений по (7.24), (7.25) оказывается непомерно велик, величины d_k определяют приближенно, через приращения.

Для полного шага целесообразно также использовать методы нулевого порядка (поисковые методы) [141]. Например, вблизи экстремума удобен метод сопряженных направлений Паузлла.

7.3.2. Структура и функционирование адаптивной системы управления. Подсистема оптимизации распределения мощности в информационно-вычислительном комплексе реактора работает, как правило, в режиме "советчик оператора". Структура подсистемы представлена на рис. 7.1. Она включает реактор, статическую модель, параметры которой подстраиваются адаптором, и оптимизатор для поиска оптимальных управлений, поступающих к оператору.

Функционирует система следующим образом. Действия оператора, производящего с помощью стержней управления коррекцию поля распределения мощности, фиксируются в блоке адаптора, куда также поступают сигналы мощности зон контроля после установления нового распределения мощности. По информации о положениях стержней и мощностям зон контроля в адапторе осуществляется проверка близости модели объекту, и при необходимости производится подстройка параметров модели таким образом, чтобы модель сходным с реактором образом реагировала на управляющие воздействия. Оператор с пульта задает желаемое распределение мощности, поступающее в оптимизатор. В оптимизаторе по статической модели реактора находятся новые положения управляющих стержней, соответствующие полному, рабочему или пробному шагу.

После этого оператор принимает из оптимизатора данные о положениях стержней и осуществляет их перемещение в активной зоне реактора. При каждой следующей коррекции поля распределения мощности работа системы возобновляется.

В начальные моменты времени, когда модель объекта известна недостаточно точно, применяются "осторожные" покоординатные рабочие шаги. Эти шаги эквивалентны методу покоординатного спуска с той разницей, что вводится зона нечувствительности величины k , необходимость которой обусловлена наличием помехи φ_k . Выбор покоординатных рабочих шагов преследует две цели. Во-первых, обеспечивается раздельная оценка каждой из составляющих вектора градиента $\nabla J(u)$. Во-вторых, пони-

жаются требования к точности оценивания производной: знание только знака производной оказывается достаточным для движения в сторону экстремума.

Полные шаги дают решение задачи оптимизации на модели "до конца" (за один шаг). Применение полных шагов в те моменты времени, когда есть основание считать, что подстраиваемые коэффициенты модели определены достаточно точно, может уменьшить время работы алгоритма. Пробные шаги, с одной стороны, позволяют избежать "заедания" алгоритма в точке, удаленной от экстремума (см. § 4.7 и рис. 4.5), и, с другой стороны, обеспечивают возобновление подстройки при изменениях вектора ξ .

§ 7.3. Адаптивное управление динамическим распределением мощности в реакторе

Перейдем к синтезу алгоритмов адаптивного управления распределения мощности в динамике, т.е. в темпе с переходными процессами в реакторе. Для описания ОУ выберем модель (7.7), мощностные эффекты учтем уравнением (7.6).

Предположим, что в каждой зоне контроля имеется стержень, влияющий на нейтронный поток в пределах данной зоны (это предположение может быть выполнено при надлежащем разбиении на зоны). Модель ОУ примет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= y_i [b_{ii} f(v_i) \pm k_{\Phi i}] + \sum_{j=1}^l a_{ij} y_j + \sum_{q=1}^6 \lambda_q \psi_{qi}, \\ \dot{\psi}_{qi} &= \beta_q \psi_i - \lambda_q \psi_{qi}, \quad \dot{k}_{\Phi i} = \frac{a_{\Phi} y_i}{\tau_{\Phi}} - \frac{k_{\Phi i}}{\tau_{\Phi}}, \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, l, \quad q = 1, \dots, 6.$$

К (7.25) добавляются уравнения динамики исполнительных механизмов

$$\tau_{D_i} \ddot{v}_i + \dot{v}_i = a_{D_i} u_i, \quad i = 1, \dots, l, \quad (7.26)$$

где u_i — сигналы управления.

В соответствии с общей методикой главы 6, при синтезе пренебрежем дискретностью управляющего устройства и малыми постоянными времени τ_{D_i} . Будем считать доступными измерению величины y_i, \dot{y}_i , т.е. вектор выходов имеет размерность $2l$. Продифференцировав первую группу уравнений (7.25) по времени, приведем модель ОУ к виду уравнения состояния

$$\dot{x} = A(x) + B(y)u, \text{ где } x = \text{col}(y, \dot{y}, \psi_1, \dots, \psi_6, k_{\Phi}, v) \in R^{10l},$$

которое оказывается линейным относительно входов. Легко видеть, что в данном случае $B(y)$ — диагональная матрица с положительными элементами на диагонали; поэтому, в соответствии с результатами п. 3.3.3, возьмем алгоритм основного контура в виде

$$u_i = \frac{1}{B_{ii}(y)} [\theta_{1i}^T (y - y^*) + \theta_{2i}^T \dot{y}], \quad (7.27)$$

где $\theta_{1i}, \theta_{2i}, i = 1, \dots, l$ — настраиваемые параметры.

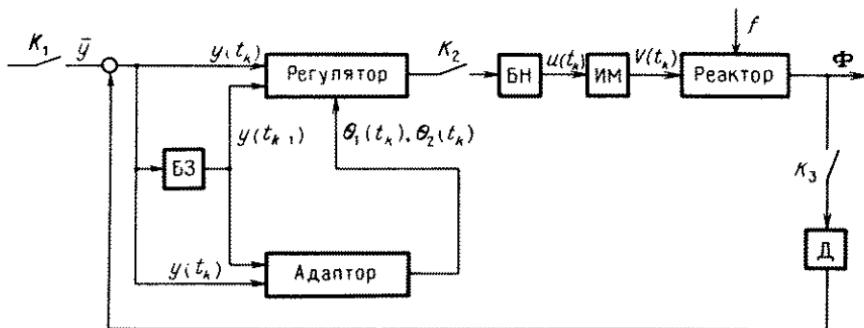


Рис. 7.2. Структура цифровой адаптивной системы

Уравнение обобщенного настраиваемого объекта (замкнутой системы (7.25), (7.27)) оказывается линейным по θ_1 , θ_2 , и алгоритм адаптации с неявной эталонной моделью (см. § 3.3) принимает вид

$$\dot{\theta}_{1i} = -\gamma'[\delta_i(t)(y - y^*) - \alpha\theta_{1i}], \quad (7.28)$$

$$\dot{\theta}_{2i} = -\gamma'[\delta_i(t)\dot{y} - \alpha\theta_{2i}],$$

где

$$\delta_i(t) = g_{1i}^T [y(t) - y^*] + g_{2i}^T \dot{y}(t), \quad i = 1, \dots, l.$$

При этом равенство $\delta_i(t) = 0$ определяет характер переходного процесса в i -й зоне после адаптации.

Обычно задают столбцы g_{1i} , g_{2i} матриц G_1 , G_2 так, чтобы $G_2 = I$, а матрица $(-G_1)$ была гурвицева с заданной степенью устойчивости. Тогда уравнение

$$\frac{d\dot{y}(t)}{dt} = -G_1(y - y^*)$$

будет задавать желаемое качество переходных процессов. Чтобы доказать работоспособность синтезированной непрерывной системы, строгая минимально-фазовость линеаризованного объекта (7.25), (7.26) при $\tau_D = 0$ проверяется аналогично [57].

Для реализации на ЦВМ уравнения (7.27), (7.28) дискретизуются. После замены производных конечными разностями получаем алгоритм

$$\begin{aligned} u(t_k) &= B(y^{(k)})^{-1} [\theta_1(t_k)^T (y^{(k)} - y^*) + \theta_2(t_k)^T \Delta y^{(k)}], \\ \Delta y^{(k)} &= y^{(k)} - y^{(k-1)}, \\ \theta_1(t_{k+1}) &= \theta_1(t_k) - h\gamma' [G_1(y^{(k)} - y^*) + \\ &+ \Delta y^{(k)}] (y^{(k)} - y^*) - h\alpha\theta_1(t_k), \\ \theta_2(t_{k+1}) &= -h\gamma'' [G(y^{(k)} - y^*) + \Delta y^{(k)}] + (1 - h\alpha)\theta_2(t_k). \end{aligned} \quad (7.29)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, где $y^{(k)} = y(t_k)$ – вектор показаний датчиков мощности в зонах в момент $t_k = kh$. Этalonное уравнение для (7.29) имеет вид $\dot{y} = -h^{-1}G_1y$. Работоспособность алгоритма (7.29) с учетом $\tau_D \neq 0$ в (7.26) обосновывается с помощью результатов главы 5. Структурная схема адаптивной системы приведена на рис. 7.2.

§ 7.4. Синтез адаптивной системы регулирования температуры перегретого пара для энергоблока с ядерным пароперегревом

7.4.1. Постановка задачи. Одним из важнейших параметров энергоблока с реакторами с зоной перегрева является температура перегретого пара на входе в турбину. Для обеспечения нормальных условий работы турбины (в первую очередь для сохранения механической прочности лопаток цилиндра высокого давления), а также для поддержания допустимого температурного режима перегревательных секций реактора температуру перегретого пара необходимо выдерживать в достаточно узком диапазоне относительно расчетного значения.

Основным внешним возмущением при работе блока АЭС в энергосистеме является изменение нагрузки в сети. Регулятор частоты вращения ротора турбины, отрабатывая возмущения через механизмы управления, регулирует степень открытия клапана подачи пара на турбину, что вызывает изменение расхода и, соответственно, давления и температуры перегретого пара.

Рассмотрим задачу регулирования температуры перегретого пара на входе в турбину в условиях действия внешних медленно меняющихся возмущений. Считаем, что регулирование осуществляется путем воздействия на стержни управления перегревательных секций реактора [54]. Таким образом, энергоблок рассматривается как статический объект управления, входами которого являются положения стержней управления реактора, выходом — значение температуры перегретого пара.

Для дальнейшего удобно разбить объект на две подсистемы: контур теплоносителя и собственно реактор. Входом контура теплоносителя будем считать изменение мощности перегревательной секции $w = N_p - N_p^*$, где N_p^* — номинальное значение мощности перегревательной секции, а выходом — изменение температуры перегретого пара $y = T_p - T_p^*$, где T_p^* — расчетное значение температуры перегретого пара на входе в турбину. Контролируемым возмущением, которое вызывает изменение температуры пара, является степень открытия клапана подачи пара турбины.

Учитывая техническую сложность измерения степени открытия клапана, будем в качестве возмущения рассматривать изменение расхода перегретого пара $z = G - G_*$, где G_* — расход пара, соответствующий режиму номинальной мощности. Расход пара непосредственно связан со степенью открытия клапана и может быть легко измерен. Статическая характеристика контура имеет вид

$$y = \xi_{11} w + \xi_{12} z + \xi_{13} + \varphi_1, \quad (7.30)$$

где ξ_{1i} — параметры контура теплоносителя.

При построении математического описания реактора с ядерным перегревом пара входами являются положения стержней управления h_u , h_n , а выходами — значения мощностей N_u , N_n испарительной и перегревательной секций. Статическая характеристика двухзонного реактора в соответ-

ствии с (7.12) имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_{21} N_u u_1 + \xi_{22} N_u^2 + N_u + \xi_{23} N_n + \varphi_2 &= 0, \\ \xi_{31} N_n u_2 + \xi_{32} N_n^2 + N_n + \xi_{33} N_u + \varphi_3 &= 0, \\ N_\Sigma &= N_u + N_n, \end{aligned} \quad (7.31)$$

где $u_1 = f(h_u)$, $u_2 = f(h_n)$, $f(\cdot)$ – монотонная нелинейная функция, ξ_{ij} – параметры активной зоны реактора, N_Σ – интегральная мощность. Величины φ_i ($i = 1, 2, 3$) в (7.30), (7.31) – ограниченные погрешности ($|\varphi_i| \leq \Delta_\varphi$), учитывающие неточность описания объекта, и приведенные помехи измерений. Цель управления записывается в виде

$$|y_k| < \Delta_y \quad \text{при } k > k_*. \quad (7.32)$$

Таким образом, задача адаптивного управления поставлена, перейдем к ее решению.

7.4.2. Алгоритм адаптивного управления. Управляющие воздействия u_1, u_2 на k -м шаге, в соответствии с § 4.8, будем искать из уравнений

$$\begin{aligned} u_1 &= -\xi_{22,k} N_u^{*2} + N_u^* + \frac{\lambda_{23,k} N_n^{(k)}}{\xi_{21,k} N_u^*}, \\ u_2 &= -\xi_{32,k} (N^{(k)})^2 + N_n^{(k)} + \frac{\xi_{33,k} N_n}{\xi_{31,k} N_n^{(k)}}, \\ N_n^{(k)} &= N_n^* + \hat{w}^{(k)}, \quad \hat{w}^{(k)} = \xi_{12,k} d^{(k)} + \frac{\xi_{13,k}}{\xi_{11,k}}, \end{aligned} \quad (7.33)$$

где $\xi_k = \text{col}\{\xi_{ij,k}\}$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$ – вектор текущих оценок параметров объекта; N_u^* , N_n^* – номинальные значения мощностей испарительной и перегревательной секций; $\hat{w}^{(k)}$ – оценка промежуточной выходной переменной.

Пусть известен класс адаптивности $\Xi = \{\xi : \xi_{ij}^- \leq \xi_{ij} \leq \xi_{ij}^+\}$. Тогда алгоритм адаптации, аналогичный (7.19), имеет вид

$$\xi_{j,k+1} = \begin{cases} \text{Pr}_\Xi \left\{ \xi_{j,k} - \gamma_j \frac{\eta_{j,k} z_{j,k}}{\beta + \|z_{j,k}\|^2} \right\}, & |\eta_{j,k}| > \Delta_j, \\ \xi_{j,k}, & |\eta_{j,k}| < \Delta_j, \end{cases} \quad (7.34)$$

где $\text{Pr}_\Xi \{\dots\}$ – проекция на выпуклое множество Ξ ,

$$\begin{aligned} \eta_{j,k} &= y_{j,k} - \xi_{j,k}^\top z_{j,k}, \quad y_{1,k} = y_k, \quad y_{2,k} = -N_u^{(k)}, \\ y_{3,k} &= -N_n^{(k)}, \quad \xi_{j,k} = \text{col}(\xi_{j1,k}, \xi_{j2,k}, \xi_{j3,k}), \\ z_{1,k} &= \text{col}(w_k, d^{(k)}, 1), \quad z_{2,k} = \text{col}(N_u^{(k)}, u_{1,k}, (N_u^{(k)})^2, N_n^{(k)}), \\ z_{3,k} &= \text{col}(N_n^{(k)}, u_{2,k}, (N_n^{(k)})^2, N_u^{(k)}). \end{aligned}$$

$\Delta_j > \Delta_{\varphi_j}$ – точность работы алгоритма адаптации, $0 < \gamma < 2(1 - \Delta_\varphi/\Delta_j)$, $j = 1, 2, 3$.

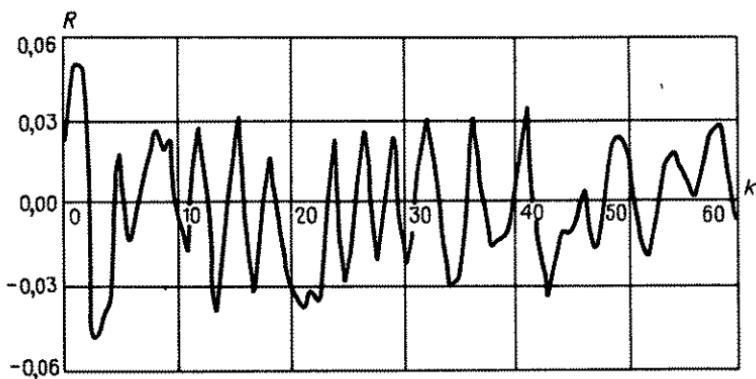


Рис. 7.3. Измеряемые возмущения

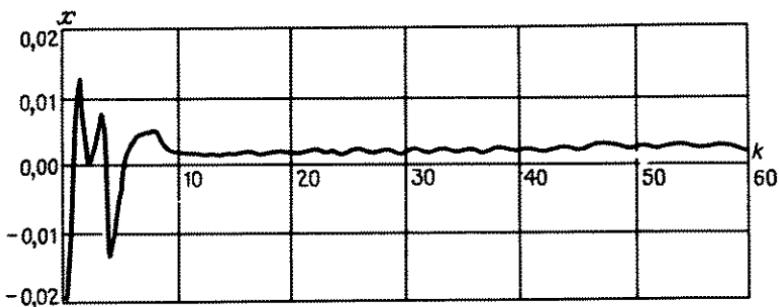


Рис. 7.4. Отклонение температуры перегретого пара

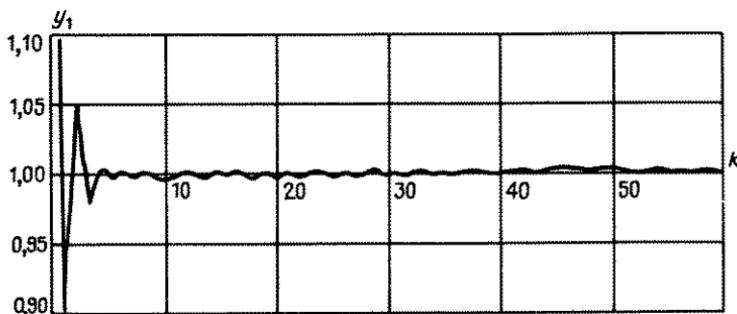


Рис. 7.5. Мощность испарительной секции

Доказательство работоспособности синтезированного регулятора основано на результатах § 4.8. Для проверки условия разрешимости A вычислим константу L из (4.73). Из (7.30), (7.31) на основании теоремы о неявной функции имеем

$$L = \sup\{z_1 + \xi_{11}[L_2 z_2 + L_3 z_3]\}, \quad L_2 = \xi_{23}, \\ L_3 = (\xi_{31} u_1 + \xi_{32} N_{\pi} + 1)^{-1}.$$

Из теоремы 4.8 получаем, что алгоритм (7.33), (7.34) обеспечивает выполнение цели управления (7.32) при

$$\Delta_y = \Delta_1 + \xi_{11}^+ [\Delta_2 (\xi_{23})^{-1} + \Delta_3 (\bar{\xi}_{33} N_p + 1)^{-1}], \quad (7.35)$$

где учтено, что $0 \leq u_1 \leq 1$.

7.4.3. Результаты моделирования. Работоспособность алгоритма адаптивного управления проверялась моделированием на ЭВМ ЕС-1052. При этом учитывалась следующая особенность реактора как объекта управления: соотношение управлений u_1 и u_2 не может быть произвольным, так как от него зависит устойчивость работы реактора. Поэтому в процессе моделирования на модель реактора подавалось управление u_1 и суммарная мощность $N_\Sigma = N_u + N_p = N_{\Sigma \text{ном}} + w$, управление u_2 рассчитывалось по модели, исходя из условий устойчивости работы реактора на заданном режиме. При применении такого подхода для управления реальным объектом увеличивается объем работы оператора, обязанностью которого становится выбор управления u_2 , таким образом, чтобы обеспечить заданный режим работы реактора. В связи с этим дополнительным показателем качества работы алгоритма, проверявшимся при моделировании, является точность расчета управления u_2 .

На вход системы подавались случайные, равномерно распределенные возмущения по расходу, составляющие $\pm 5\%$ от его номинального значения. Поскольку модель ОУ бралась статическая, время считалось дискретным, соответствующим номеру шага $k = 0, 1, 2, \dots$. Результаты работы алгоритма представлены на рис. 7.3 – 7.8 (в относительных величинах). На рис. 7.3 представлен график возмущения $R(k)$, подаваемого на вход объекта. На рис. 7.4 представлен график относительного отклонения температуры перегретого пара $x(k) = (y_k - y_{\text{ном}})/y_{\text{ном}}$. Из рисунка видно, что после настройки алгоритма (при $k \geq 9$) температура перегретого пара остается приблизительно постоянной ($y_k/y_{\text{ном}} = 1,0015/1,0025$).

Графики мощностей испарительной и перегревательной секции представлены на рис. 7.5, 7.6. Видно, что мощность перегревательной секции

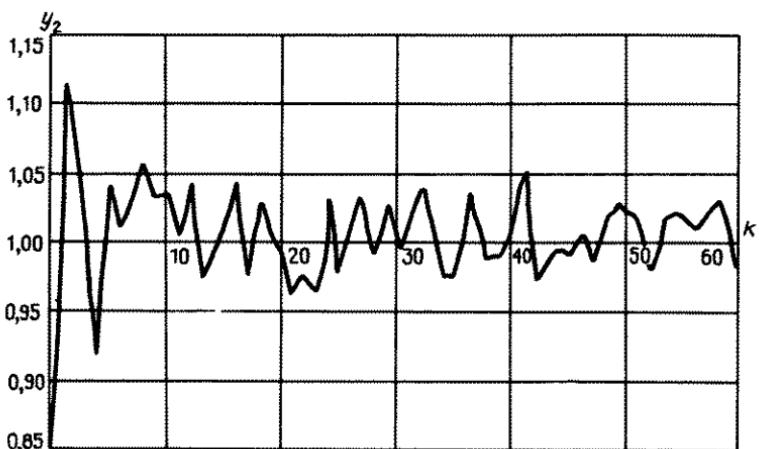


Рис. 7.6. Мощность перегревательной секции

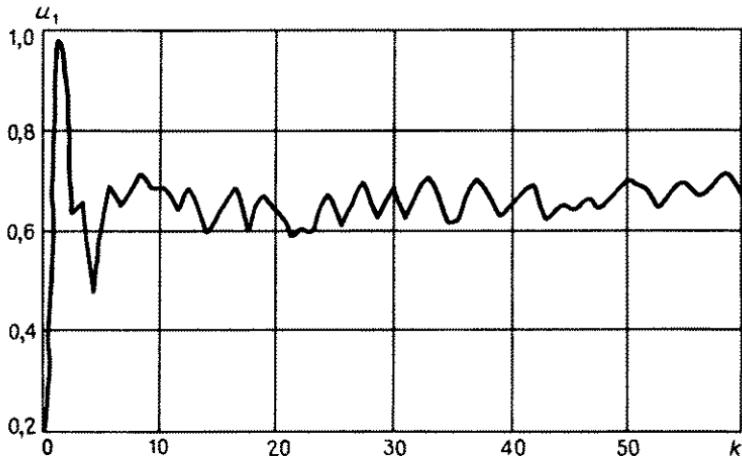


Рис. 7.7 Управление u_1 ,

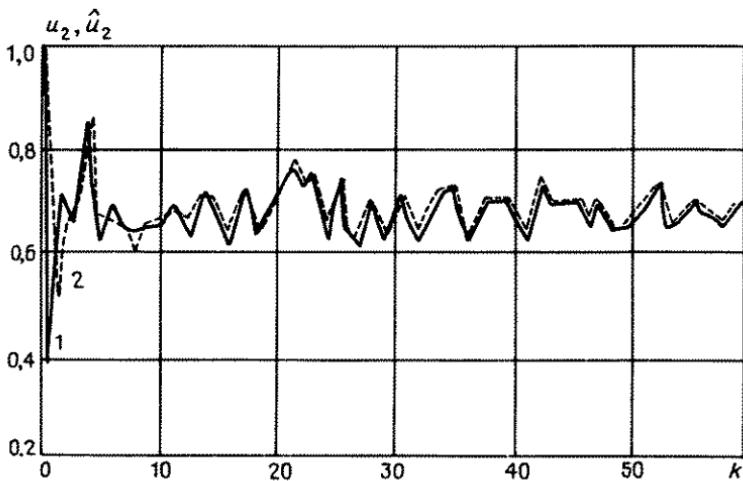


Рис. 7.8 Управления u_2 и \hat{u}_2 : 1 – управление u_2 , 2 – прогнозируемое значение \hat{u}_2

орабатывает входные возмущения, а мощность испарительной секции после окончания процесса настройки (при $k \geq 5$) остается практически постоянной. Колебания мощности испарительной секции приводят к изменению теплофизических свойств рабочей жидкости. Эти колебания нежелательны, так как приводят к неустойчивости работы реактора.

На рис. 7.7, 7.8 представлены управление, подаваемые на объект. Из рисунка 7.8 видно, что величины управления $u_2(k)$, рассчитываемые по алгоритму, практически совпадают при $k \geq 12$ со значениями $\hat{u}_2(k)$, рассчитанными исходя из условий устойчивости работы реактора. Это означает, что после окончания процесса адаптации рассчитанные алгоритмом управления $u_1(k)$ и $u_2(k)$ могут быть непосредственно выданы на реактор.

§ 7.5. Обсуждение

Выше были представлены некоторые задачи и методы адаптивного управления в комплексах с ядерным реактором. Приведенные алгоритмы основаны на результатах глав 3, 4 и обладают относительной простотой, что особенно существенно при больших размерностях ОУ. Сведения о программной реализации описанных подходов имеются в работе [54].

На самом деле описанные задачи (как, впрочем, и методы) являются весьма схематичными и упрощенными. При синтезе АдСУ не были учтены ограничения на фазовые переменные и управления, возмущения и многое другое. Интересно отметить, однако, что в силу самой сущности адаптивного подхода усложнение математической модели ОУ далеко не всегда приводит к усложнению алгоритма управления. Действительно, если даже исходная модель реактора отлична от (7.5) (например, для многогрупповых диффузионных моделей, моделей гетерогенных реакторов и т.д.), то во многих случаях дискретизованная многоточечная модель сохранит вид (7.7); изменяются лишь значения и физический смысл ее коэффициентов. А поскольку адаптивная система управления не использует значений параметров объекта, синтезируемые ниже алгоритмы сохраняют работоспособность и в этих ситуациях.

Глава 8

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

На современном этапе развития системных исследований все чаще возникают задачи управления. В качестве примеров можно привести задачи распределения водных и энергетических ресурсов, ограничения степени загрязнения воздушной и водной среды, регулирования состава и численности популяций, регулирования продуктивности агросистем, обеспечения оптимальных показателей развития городских и региональных систем. Решение перечисленных задач осложняется такими факторами, как неполнота и неточность измерений, трудность реализации управляющих воздействий и т.д. Особые затруднения вызывает отсутствие точных математических моделей управляемых процессов и действующих на них возмущений, что не позволяет вычислить необходимые значения управляющих воздействий [111, 159]. Во многих случаях достаточно точные значения параметров моделей не могут быть определены принципиально, так как за время сбора и обработки информации они успевают существенно измениться.

Эффективным средством решения задач управления в условиях неопределенности и нестационарности параметров управляемого процесса является применение адаптивного подхода, состоящего в направленном изменении (адаптации) закона управления в ходе наблюдения за управляемым процессом. Разработанные в настоящее время методы позволяют строить алгоритмы адаптивного управления широким классом сложных систем, описываемых нелинейными дифференциальными или разностными уравнениями с многими неизвестными.

Ниже описывается применение методов, изложенных в главах 2 – 6, к задачам адаптивного управления процессами миграции, загрязнения водоемов, квалификационной структурой трудовых ресурсов.

§ 8.1. Адаптивное управление процессами миграции

Сразу же оговоримся, что рассматриваемые ниже примеры носят иллюстрирующий характер, поэтому для описания исследуемых процессов будут использоваться максимально упрощенные математические модели, чтобы более выпукло продемонстрировать саму методику постановки и решения задач управления и не отвлекать внимание читателя излишними подробностями.

Обширную область применения методов адаптации составляют задачи управления численностью, составом и территориальным распределением популяций. Управляющими воздействиями в этих задачах являются факторы, влияющие на скорость роста популяции внутри данной территории (региона). Для биологических популяций это может быть количество пищи или препаратов, стимулирующих (или, наоборот, сдерживающих) рождаемость. Для социальных популяций управляющим воздействием

может служить объем капиталовложений в сферы, определяющие уровень жизни в данном регионе и оказывающий влияние на интенсивность миграционных процессов. Ниже мы рассмотрим несколько вариантов задач управления процессом миграции.

Отметим, что попытки формального описания процессов движения населения, в частности, трудоспособной его части, наталкиваются на ряд трудностей. Эти трудности связаны с тем, что на поведение отдельного человека влияет большое число различных факторов, плохо поддающихся учету. Поведение человека зависит не только от внешних обстоятельств, но и от свойств его личности. Наконец, процессы приема и увольнения с работы не поддаются прямому управлению. Поэтому ниже используются модели, относящиеся к описанию достаточно больших популяций на достаточно больших временных интервалах, когда эффекты действий отдельных личностей "усредняются", нивелируются, а влияние факторов, стимулирующих миграцию и могущих использоваться в качестве управляющих, становится существенным.

8.1.1. Управление численностью населения в регионе. Рассмотрим задачу управления численностью населения в фиксированном регионе. Для математического описания объекта управления выберем дискретный вариант линейной модели динамики численности [76]. Согласно этой модели уравнения объекта имеют вид

$$y_{k+1} = y_k + v_k - w_k + r_k, \quad (8.1)$$

$$v_{k+1} = a_1 y_k + a_2 v_k + b_1 u_{k-1} + \varphi'_k, \quad (8.2)$$

$$w_{k+1} = a_3 y_k + a_4 w_k - b_0 (u_k - u_{k-1}) + \varphi''_k. \quad (8.3)$$

Здесь $k = 0, 1, 2, \dots$ — дискретное время (номер момента измерений t_k); y_k — численность населения в регионе в момент t_k ; v_k , w_k , r_k — количества, соответственно, прибывших, убывающих и естественный прирост населения в регионе из время между моментами t_{k-1} и t_k ; u_k — объем капиталовложений в момент t_k в сферы, определяющие уровень жизни в регионе; $a_1, \dots, a_4, b_0, b_1$ — положительные коэффициенты.

Модель (8.1)–(8.3) неизбежно является неточной из-за действия неучтенных факторов, в частности, социально-психологических. Для косвенного учета этих факторов в уравнения (8.2), (8.3) введены возмущения φ'_k , φ''_k , которые мы будем считать равномерно ограниченными по времени.

Следует подчеркнуть, что выбранный в качестве управляющего воздействия объем капиталовложений не следует рассматривать как чисто экономический фактор: его изменение влияет на самые различные аспекты существования населения, а изменение уровня жизни, безусловно, сказывается на интенсивности миграционных процессов. Однако степень этого влияния (в данном случае — коэффициенты b_0 , b_1 в уравнениях (8.2), (8.3)) практически невозможно оценить априори, а оценивание по наблюдениям за динамикой численности населения требует значительных затрат времени.

Таким образом, непосредственно воспользоваться уравнениями (8.1)–(8.3) для регулирования численности населения в регионе не представляется возможным, поскольку значения коэффициентов математи-

ческой модели объекта являются неизвестными. Кроме того, значения коэффициентов могут меняться во времени, хотя эти изменения, по-видимому, можно считать достаточно медленными. Для решения проблемы следует использовать методы адаптивного управления.

Будем считать целью управления приближение численности населения y_k к некоторой заданной величине y_k^* ; $k = 1, 2, \dots$. Величины y_k^* могут быть вычислены, например, по модели оптимального экономического роста, в предположении, что действительная численность трудовых ресурсов однозначно связана с численностью населения. С точки зрения теории управления поставленная задача является задачей стабилизации выходной переменной объекта относительно программно заданной траектории, т.е. задачей слежения.

Чтобы применить результаты главы 4, необходимо получить из (8.1)–(8.3) уравнение, непосредственно связывающее выход y_k и управляющее воздействие u_k . Для этого заменим в (8.1) индекс k на $k + 1$ и подставим в полученное выражение v_{k+1} , w_{k+1} из (8.2), (8.3). Искомая зависимость будет иметь вид

$$y_{k+2} = y_{k+1} + (a_1 - a_3)y_k + a_2v_k - a_4w_k + b_0u_k + (b_1 - b_0)u_{k-1} + r_{k+1} + \varphi_k, \quad (8.4)$$

где $\varphi_k = \varphi'_k + \varphi''_k$ – приведенное возмущение. Из (8.4) видно, что управление u_k в момент t_k непосредственно влияет на численность населения в момент t_{k+2} , т.е. модель (8.4) учитывает запаздывание. Если считать известной оценку уровня возмущений – величину ϵ_φ в неравенстве $|\varphi_k| \leq \epsilon_\varphi$, то в качестве цели управления можно выдвинуть выполнение при достаточно больших k неравенства $|y_{k+2} - y_{k+2}^*| < \epsilon$, или, что то же самое, соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |y_{k+2} - y_{k+2}^*| < \epsilon, \quad (8.5)$$

в котором $\epsilon > \epsilon_\varphi$.

Для решения задачи в соответствии с методикой главы 6 определим вначале идеальный закон регулирования, считая, что коэффициенты в (8.4) известны, а возмущения отсутствуют. Очевидно, равенство $y_{k+2} = y_{k+2}^*$ будет выполнено, если величина u_k будет удовлетворять соотношению

$$y_{k+2}^* = y_{k+1} + (a_1 - a_3)y_k + a_2v_k - a_4w_k + b_0u_k + (b_1 - b_0)u_{k-1} + r_{k+1}.$$

Следовательно, идеальный закон регулирования определяется формулой

$$u_k^* = b_0^{-1}[(b_0 - b_1)u_{k-1} - y_{k+1} - (a_1 - a_3)y_k + y_{k+2}^* - r_{k+1} - a_2v_k + a_4w_k].$$

Поскольку величина u_k должна вычисляться в момент t_k , в закон регулирования должны входить лишь величины, измеренные к моменту t_k .

Для обеспечения этого требования величину y_{k+1} следует вычислять, пользуясь (8.1). Для вычисления r_{k+1} будем считать, что естественный прирост пропорционален численности: $r_{k+1} = \mu y_{k+1}$, причем коэффициент прироста μ может быть неизвестен.

Окончательно идеальный закон регулирования записывается в виде

$$u_k^* = b_0^{-1} [(b_0 - b_1)u_{k-1} + b_2 y_k - b_3 v_k - b_4 w_k - b_5 r_k + y_{k+2}^*], \quad (8.6)$$

где

$$b_2 = a_3 - a_1 + 1 + \mu, \quad b_3 = a_2 + 1 + \mu, \quad b_4 = a_3 + 1 + \mu, \quad b_5 = 1 + \mu.$$

Все переменные величины, входящие в правую часть (8.6), известны в момент t_k . Поэтому соотношение (8.6) можно использовать для выбора реального закона регулирования. Вводя настраиваемые коэффициенты согласно прямому подходу, зададим реальный закон управления в виде

$$u_k = \theta_k^{(1)} u_{k-1} + \theta_k^{(2)} y_k + \theta_k^{(3)} v_k + \theta_k^{(4)} w_k + \theta_k^{(5)} r_k + \theta_k^{(6)} y_{k+2}^*, \quad (8.7)$$

где $\theta_k^{(1)}, \dots, \theta_k^{(6)}$ — настраиваемые коэффициенты, образующие вектор $\theta_k \in R^6$.

Алгоритм адаптации выберем градиентным по отношению к оценочной функции $Q_{k+2} = (y_{k+2} - y_{k+2}^*)^2/2$. Очевидно, значение Q_{k+2} становится известным только в момент t_{k+2} , поэтому изменять коэффициенты следует только в четные моменты времени. Градиентный алгоритм адаптации задается соотношениями

$$\theta_{2k+1} = \theta_{2k}, \quad \theta_{2k+2} = \theta_{2k} - \bar{\gamma}_k \nabla_{\theta} Q_{2k+2}.$$

Подставляя в функцию Q_{k+2} величины y_{k+2} , u_k из (8.4), (8.7) и вычисляя градиент по θ , запишем алгоритм адаптации в виде

$$\begin{aligned} \theta_{2k+1} &= \theta_{2k}, \quad \theta_{2k+2}^{(1)} = \theta_{2k}^{(1)} - \gamma_k (y_{2k+2} - y_{2k+2}^*) u_{k-1}, \\ \theta_{2k+2}^{(2)} &= \theta_{2k}^{(2)} - \gamma_k (y_{2k+2} - y_{2k+2}^*) y_k, \\ \theta_{2k+2}^{(3)} &= \theta_{2k}^{(3)} - \gamma_k (y_{2k+2} - y_{2k+2}^*) v_k, \\ \theta_{2k+2}^{(4)} &= \theta_{2k}^{(4)} - \gamma_k (y_{2k+2} - y_{2k+2}^*) w_k, \\ \theta_{2k+2}^{(5)} &= \theta_{2k}^{(5)} - \gamma_k (y_{2k+2} - y_{2k+2}^*) r_k, \\ \theta_{2k+2}^{(6)} &= \theta_{2k}^{(6)} - \gamma_k (y_{2k+2} - y_{2k+2}^*) y_{k+2}^*, \\ \gamma_k &= \frac{\gamma \mu_k}{u_{k-1}^2 + y_k^2 + v_k^2 + w_k^2 + r_k^2 + (y_{k+2}^*)^2}, \\ \mu_k &= \begin{cases} 0, & |y_{k+2} - y_{k+2}^*| < \epsilon, \\ 1, & |y_{k+2} - y_{k+2}^*| \geq \epsilon. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Далее, пользуясь теоремой 4.10, получаем, что если $|\varphi_k| \leq \epsilon_{\varphi}$, $0 < b_0 < \beta$, величины v_k , w_k , y_k^* в совокупности ограничены и объект (8.4) минимально-фазовый, то при выборе $0 < \gamma < 2(1 - \epsilon_{\varphi}/\epsilon)/\beta$ в системе (8.4), (8.7), (8.8) достигается цель управления (8.5).

Заметим, что объект (8.4) минимально-фазовый, если единственный корень уравнения $b_0 + (b_1 - b_0)\lambda = 0$ лежит вне единичного круга, что равносильно выполнению неравенства $|(b_1 - b_0)/b_0| < 1$. Последнее соотношение, очевидно, выполняется, когда $b_1 < 2b_0$.

Перечисленные условия определяют класс объектов, для которых алгоритм адаптивного управления (8.7), (8.8) обеспечивает достижение

цели управления (8.5). К аналогичным результатам приводит применение идентификационного подхода, при этом вектор настраиваемых параметров будет иметь размерность 7 и состоять из оценок коэффициентов $a_1, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, \mu$.

8.1.2. Управление процессом межрегиональной миграции. Рассмотрим теперь задачу регулирования межрегиональной миграции. Для простоты будем считать, что имеется два региона R_1 и R_2 , например "центр" и "периферия", с численностью населения x_1, x_2 соответственно. Пусть v_1, v_2 – интегральные уровни жизни в R_1, R_2 (количество жизненных благ в стоимостном выражении). Интенсивность миграции из R_1 и R_2 будем предполагать пропорциональной численности x_1 и уровню жизни v_2 . Аналогичное предположение сделаем относительно интенсивности миграции из R_2 в R_1 . Наконец, предположим, что естественный прирост населения мал по сравнению с интенсивностью миграционных потоков и им можно пренебречь.

Тогда уравнения процесса миграции можно записать в виде

$$\dot{x}_1 = -\lambda(x_1v_2 - x_2v_1), \quad \dot{x}_2 = \lambda(x_1v_2 - x_2v_1), \quad (8.9)$$

где $\lambda > 0$ – коэффициент интенсивности миграции. Целью управления будем считать установление заданного соотношения $\mu > 0$ между численностями, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t) - \mu x_2(t)| = 0.$$

Легко показать, что для достижения этой цели достаточно обеспечить заданное соотношение уровней жизни:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \mu \quad \text{при } v_i(t) \rightarrow \text{const}. \quad (8.10)$$

Считая, что управляющим воздействием в задаче является объем капиталовложений в сферы, определяющие уровень жизни, и что общий объем указанных капиталовложений в регионах R_1, R_2 в единицу времени лимитирован величиной \bar{w} , можно записать простейшие уравнения динамики уровней жизни в виде

$$\dot{v}_1 = \beta_1 w, \quad \dot{v}_2 = \beta_2(\bar{w} - w), \quad (8.11)$$

где $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ – коэффициенты эффективности капиталовложений, $w = w(t)$ – управляющее воздействие. Параметры $\lambda, \beta_1, \beta_2$ объекта (8.9), (8.11) обычно недоступны прямому измерению и их естественно считать априори неизвестными. Возникающая задача является, следовательно, задачей адаптивного управления.

Для синтеза алгоритма управления воспользуемся методом скоростного градиента, задав оценочную функцию в виде

$$Q(x, v) = (x_1 - \mu x_2)^2 + \lambda(1 + \mu)(v_1 - \mu v_2)^2, \quad (8.12)$$

и найдем сначала идеальный закон регулирования из условия достижения ЦУ в смысле выполнения (8.10) при известных параметрах объекта. Для этого выпишем выражение для $Q(x, v)$ в силу уравнений объекта

(8.9), (8.11) и преобразуем его к виду

$$Q = -2\lambda(1+\mu)[v_2(x_1 - \mu x_2)^2 - (v_1 - \mu v_2) - x_2(x_1 - \mu x_2) + (\beta_1 + \mu\beta_2)w - (\mu\beta_2\bar{w})]. \quad (8.13)$$

Если задать закон регулирования соотношением

$$w(t) = u_{1*} + \bar{w} + u_{2*}[(x_1 - \mu x_2) - \delta(v_1 - \mu v_2)], \quad (8.14)$$

где $\delta > 0$, то из (8.13) следует, что при $u_{1*} = \mu\beta_2/(\beta_1 + \mu\beta_2)$, $u_{2*} = 1/(\beta_1 + \mu\beta_2)$ для некоторого $\beta > 0$ будет выполняться неравенство $Q \leq -\beta Q$ (например, можно положить $\beta = 2 \min[\delta, v_2(0)\lambda(1 + \mu)]$, поскольку $v_2(0) > 0$, $dv_2/dt \geq 0$).

Таким образом, мы проверили выполнение условия достижимости Д2. Реальный закон регулирования получим, заменив в (8.14) неизвестные коэффициенты u_{1*} , u_{2*} , настраиваемые $u_1(t)$, $u_2(t)$:

$$w(t) = u_1(t)\bar{w} + u_2(t)[x_2(x_1 - \mu x_2) - \delta(v_1 - \mu v_2)]. \quad (8.15)$$

Подставляя (8.15) в (8.13) и вычисляя частные производные по настраиваемым параметрам, получим алгоритм адаптации

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\gamma(v_1 - \mu v_2)\bar{w}, \\ \dot{u}_2 &= -\gamma(v_1 - \mu v_2)[x_2(x_1 - \mu x_2) - \delta(v_1 - \mu v_2)], \end{aligned} \quad (8.16)$$

где в величину $\gamma > 0$ включен множитель $\nu(\beta_1 + \mu\beta_2) > 0$.

Условия теоремы 2.1 здесь выполнены все, за исключением условия роста. Поэтому траектории системы (8.9), (8.11), (8.15), (8.16) не являются ограниченными: величины $v_1(t)$, $v_2(t)$ могут в силу (8.11) принимать сколь угодно большие значения. Однако соотношение $Q(x(t), v(t)) \rightarrow 0$ остается справедливым, а функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ являются ограниченными в силу (8.9) и положительности $v_1(t)$, $v_2(t)$. Поэтому ЦУ (8.10) при любых положительных значениях неизвестных коэффициентов объекта λ , β_1 , β_2 выполнена. Можно показать, что этот вывод справедлив и при $\delta = 0$. Из теорем 2.13 – 2.17 следует, что после огрубления алгоритма (8.16) может обеспечить достижение ЦУ и в условиях возмущений, например неточностей математической модели объекта (8.9), (8.11).

§ 8.2. Адаптивное регулирование степени загрязненности водоема

Рассмотрим проточный водоем, степень загрязнения которого зависит от количества загрязняющего вещества в сбросе находящегося на берегу предприятия, от степени загрязнения втекающей воды и от скорости обновления воды в водоеме. Требуется регулировать сброс предприятия так, чтобы не превышался допустимый уровень загрязнения водоема.

Пусть сточные воды, сбрасываемые предприятием в водоем, содержат примеси n видов. Обозначим через $x_k^{(i)}$ концентрацию примесей i -го вида в водоеме в момент t_k , через $f_k^{(i)}$ – концентрацию i -й примеси в притоке в момент t_k , через u_k – объем сбрасываемых вод за период $\Delta t = t_{k+1} - t_k$. Здесь $t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots$ – дискретные моменты времени, в которые производятся измерения. Управляющим воздействием на объект управ-

ления (водоем) является величина u_k . Через \bar{d} обозначим объем притока, через \bar{b}_i – концентрацию примесей i -го вида в стоке предприятия, через $(1 - a)$ – коэффициент обновления водоема за время Δt . Будем считать, что времена выравнивания концентраций по водоему меньше чем Δt .

Тогда уравнения, определяющие изменение концентраций примесей в водоеме за время от t_k до t_{k+1} , можно записать в виде

$$x_{k+1}^{(i)} = ax_k^{(i)} + b_i u_k + df_k^{(i)} + \varphi_k^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.17)$$

где $b_i = \bar{b}_i/v$, $d = \bar{d}/v$, v – объем водоема, $\varphi_k^{(i)}$ – погрешность i -го уравнения на k -м шаге. Уравнения (8.17) можно представить в векторной форме

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k + df_k + \varphi_k, \quad (8.18)$$

где

$$\begin{aligned} A &= aI_n, \quad b = \text{col}(b_1, \dots, b_n), \quad x_k = \text{col}(x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)}), \\ f_k &= \text{col}(f_k^{(1)}, \dots, f_k^{(n)}), \quad \varphi_k = \text{col}(\varphi_k^{(1)}, \dots, \varphi_k^{(n)}). \end{aligned}$$

Поставим задачу максимизации объема производства при ограничениях на концентрации примесей в водоеме. Поскольку объем производства связан прямой зависимостью с объемом сбрасываемых сточных вод (рост производства приводит к росту загрязнения), то поставленная задача эквивалентна задаче максимизации величины u_k при ограничениях $x_k^{(i)} \leq x_*^{(i)}$, $k = 1, 2, \dots$, где $x_*^{(i)}$ – предельно допустимая концентрация i -й примеси. Параметрами объекта управления являются величины A , b , d , зависящие от чисел a , \bar{b}_i , \bar{d} , v .

Применение методов аддитивного управления в данной задаче разумно и оправдано в тех случаях, когда непосредственное измерение параметров объекта достаточно трудоемко или дорого, а также в случаях, когда параметры могут меняться во времени по неизвестному закону. Будем считать, что мы имеем дело именно с такими случаями, причем при наличии дрейфа параметров будем считать этот дрейф более медленным, чем изменение переменных в уравнении (8.18).

Будем также предполагать, что величины $x_k^{(i)}, f_k^{(i)}$ доступны измерению. Помехи (погрешности) $\varphi_k^{(i)}$, напротив, будем считать неизмеряемыми, а их интенсивности – ограниченными величинами $\Delta_\varphi^{(i)}$, для которых известны оценки сверху Δ_i . Таким образом, априорная информация о помехах в (8.17) состоит в знании величин Δ_i , таких, что $|\varphi_k^{(i)}| \leq \Delta_\varphi^{(i)} < \Delta_i$. Априорная информация о коэффициентах (8.17) состоит в том, что $0 < a < 1$, $b_i > 0$, $d > 0$.

Перечисленные условия определяют класс допустимых объектов (класс аддитивности). Отметим, что в этот класс входят только устойчивые объекты.

Действуя в соответствии с общей методикой синтеза аддитивных систем управления, определим вначале идеальный закон регулирования, предполагая, что коэффициенты уравнения (8.17) известны. Искомое

управляющее воздействие u_k^* должно удовлетворять неравенствам

$$x_k^{(i)} \geq ax_k^{(i)} + b_i u_k^* + df_k^{(i)} + \varphi_k^{(i)}.$$

Поскольку относительно истинного значения $\varphi_k^{(i)}$ нам ничего не известно, кроме неравенства $|\varphi_k^{(i)}| \leq \Delta_\varphi^{(i)}$, будем рассчитывать на наихудший случай, что приведет к идеальному закону регулирования в виде

$$u_k^* = \max_i \frac{x_k^{(i)} - df_k^{(i)} - ax_k^{(i)} - \Delta_\varphi^{(i)}}{b_i}. \quad (8.19)$$

Применение прямо подхода для синтеза адаптивной системы управления затруднительно, так как закон (8.19) не удается записать в виде гладкой функции от измеряемых величин и неизвестных коэффициентов. Поэтому будем использовать идентификационный подход, взяв в качестве настраиваемых параметров оценки a_k , $b_k^{(i)}$, d_k коэффициентов уравнения (8.17). Реальный закон регулирования возьмем в виде

$$u_k = \max_i \frac{x_k^{(i)} - d_k f_k^{(i)} - a_k x_k^{(i)} - \Delta}{b_i}, \quad (8.20)$$

где $\Delta^2 = \Delta_1^2 + \dots + \Delta_n^2$ (причина введения в (8.20) величины Δ будет ясна из дальнейшего).

Переходя к синтезу алгоритма адаптации, выберем неявную модель ОУ

$$\tilde{x}_{k+1} = A_k x_k + b_k u_k + d_k f_k \quad (8.21)$$

и зададим цель адаптации при помощи оценочной функции $Q_k = \|x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1}\|^2$. Выразим Q_k через настраиваемые параметры:

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &= \sum_{i=1}^n (x_{k+1}^{(i)} - \tilde{x}_{k+1}^{(i)})^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_{k+1}^{(i)} - a_k x_k^{(i)} - b_k^{(i)} u_k - d_k f_k^{(i)})^2. \end{aligned}$$

Вычисляя частные производные от Q_k по настраиваемым параметрам, приходим к алгоритму адаптации

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + \gamma_k \sum_{i=1}^n (x_{k+1}^{(i)} - \tilde{x}_{k+1}^{(i)}) x_k^{(i)}, \\ b_{k+1}^{(i)} &= b_k^{(i)} + \gamma_k (x_{k+1}^{(i)} - \tilde{x}_{k+1}^{(i)}) u_k, \quad i = 1, \dots, n, \\ d_{k+1} &= d_k + \gamma_k \sum_{i=1}^n (x_{k+1}^{(i)} - \tilde{x}_{k+1}^{(i)}) f_k^{(i)}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Таким образом, синтезированный алгоритм адаптивного управления имеет вид (8.20) – (8.22). Для выбора шага γ_k и обоснования достижения цели адаптации применим теорему 4.1.

Условие 1 теоремы 4.1 выполнено, если $\epsilon = \Delta^2$, $\epsilon_* = \Delta_\varphi^2 = [\Delta_\varphi^{(1)}]^2 + \dots + [\Delta_\varphi^{(n)}]^2$, а вектор θ_* является вектором из истинных значений не-

известных коэффициентов объекта. Условие 2 в форме (4.14б) выполнено в силу выпуклости функции Q_k по $a_k, b_k^{(i)}, d_k$, а условие 3 – в силу гладкости Q_k и ограниченности величин*) x_k, u_k, f_k . Из теоремы 4.1 следует, что если положить

$$\gamma_k = \frac{\gamma \mu_k}{\|\nabla Q_{k+1}\|^2},$$

где

$$0 < \gamma < 2 \left(1 - \frac{\Delta_\varphi^2}{\Delta^2} \right),$$

$$\mu_k = \begin{cases} 0 & Q_k < \Delta^2, \\ Q_k & Q_k \geq \Delta^2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|\nabla Q_{k+1}\|^2 &= \left[\sum_{i=1}^n (x_{k+1}^{(i)} - \tilde{x}_{k+1}^{(i)}) x_k^{(i)} \right]^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^n (x_{k+1}^{(i)} - \tilde{x}_{k+1}^{(i)})^2 u_k^2 + \left[\sum_{i=1}^n (x_{k+1}^{(i)} - \tilde{x}_{k+1}^{(i)}) f_k^{(i)} \right]^2, \end{aligned}$$

то, начиная с некоторого момента t_{k_*} (т.е. при $k > k_*$) будет выполняться неравенство $Q_{k+1} < \Delta^2$.

Рассмотрим теперь вопрос о достижении в синтезированной системе цели управления. Из достижения цели адаптации, т.е. из неравенства $Q_{k+1} < \Delta^2$, следует, что $|x_{k+1}^{(i)} - \tilde{x}_{k+1}^{(i)}| < \Delta^2$. Кроме того, закон регулирования (8.20) обеспечивает при всех $k = 1, 2, \dots$ и всех $i = 1, \dots, n$ выполнение неравенства $\tilde{x}_{k+1}^{(i)} \leq x_*^{(i)} - \Delta$ и хотя бы для одного индекса i равенство $\tilde{x}_{k+1}^{(i)} = x_*^{(i)} - \Delta$. Поэтому концентрации всех примесей будут при $k > k_*$ удовлетворять исходным ограничениям $x_{k+1}^{(i)} \leq x_*^{(i)}$, а хотя бы одной примеси – неравенству $x_{k+1}^{(i)} \geq x_*^{(i)} - 2\Delta$. Это значит, что реальный сброс u_k будет отличаться от оптимального u_k^* на величину, стремящуюся к нулю при $\Delta \rightarrow 0$, и, следовательно, достигаемая в синтезированной системе цель управления тем ближе к исходной цели, чем меньше уровень неизмеряемых возмущений.

Отметим, что возникающую погрешность управления можно сделать еще меньше, если ввести раздельные оценочные функции $Q_{k+1}^{(i)} = (x_{k+1}^{(i)} - \tilde{x}_{k+1}^{(i)})^2$ и соответствующим образом изменить алгоритм адаптации.

*) Векторы f_k, x_k ограничены по их физическому смыслу и в силу устойчивости всех объектов (8.17) из класса адаптивности. Для обеспечения ограниченности u_k следует модифицировать алгоритм (8.22) так, чтобы не допускать приближения оценок $b_k^{(i)}$ к нулю.

§ 8.3. Адаптивное управление квалификационной структурой трудовых ресурсов

Рассмотрим систему (предприятие или группу предприятий), поглощающую трудовые ресурсы различных уровней квалификации. Пусть n – число уровней квалификации, а q_i , $i = 1, \dots, n$ – количество работников i -го уровня. С течением времени квалификация работника в системе повышается, т.е. часть работников i -го уровня переходит на $(i+1)$ -й ($i = 1, \dots, n-1$). Кроме того, определенная доля работников каждого уровня может выбывать из производственного процесса, например по достижении пенсионного возраста или вследствие текучести кадров. Ставится задача приближения распределения трудовых ресурсов по уровням квалификации $\{q_1, \dots, q_n\}$ к желаемому (заданному) распределению $\{q_1^*, \dots, q_n^*\}$. Для решения этой задачи необходимо управлять процессом распределения.

Рассмотрим сначала случай, когда единственным способом управления в системе является изменение притока рабочей силы первого (нижнего) уровня квалификации. Изменять величину притока можно, например, подавая заявки в учебные заведения или бюро по трудуоустройству. Управляющим воздействием здесь является число заявок $u_0(t)$ в момент t . Естественно, удовлетворяются не все заявки, а часть их $b_0 u_0(t)$, где коэффициент b_0 ($0 < b_0 \leq 1$) зависит от таких факторов, как, например, "престижность" профессии, демографический состав населения данного города или региона и т.д.

С учетом вышеизложенного составим математическую модель процесса распределения трудовых ресурсов по уровням квалификации, являющегося в данном случае объектом управления. Предполагая, что рассматриваемая система достаточно велика, будем пользоваться при расчете усредненными значениями демографических и других показателей (смертности, текучести кадров, скорости повышения квалификации и т.д.). Предполагая также, для простоты, что как женщины, так и мужчины одинаково повышают свою квалификацию, будем описывать процессы в системе линейными дифференциальными уравнениями [21]

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= -(a_1 + \alpha_1) q_1 + b_0 u_0(t) + \varphi_1(t), \\ \frac{dq_i}{dt} &= a_{i-1} q_{i-1} - (a_i + \alpha_i) q_i + \varphi_i(t), \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \frac{dq_n}{dt} &= a_{n-1} q_{n-1} - \alpha_n q_n + \varphi_n(t). \end{aligned} \tag{8.23}$$

Здесь a_i – коэффициент скорости повышения квалификации, α_i – коэффициент скорости выбывания из производственного процесса работников i -го уровня, $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ – погрешности модели (возмущения), вызванные, например, обменом трудовыми ресурсами с другими предприятиями, не включенными в рассматриваемую подсистему. Отметим, что в (8.23) мы пренебрегаем также временем запаздывания от момента фор-

мирования заявки до момента ее удовлетворения. Очевидно, численные значения коэффициентов a_i , α_i уравнений (8.23) зависят от ряда трудно учитываемых причин и в конкретных примерах являются неизвестными. Внешние возмущения $\varphi_i(t)$ непосредственному измерению не поддаются.

Можно было бы поставить задачу оценки неизвестных параметров (идентификации) математической модели (8.23), но если конечной целью исследования является управление, то целесообразно сразу же решать задачу управления в условиях неопределенности, применив для решения адаптивный подход.

Прежде чем решать задачу адаптивного управления, следует выяснить принципиальную возможность достижения цели управления. При этом возмущениями $\varphi_i(t)$ будем пренебрегать, считая целью управления выполнение равенств $q_i = q_i^*$, $i = 1, \dots, n$. Пусть система достигла цели и находится в состоянии равновесия, т.е. $dq_i/dt = 0$, $i = 1, \dots, n$. Тогда из (8.23) следует, что $q_i^* = q_{i-1}^*(a_i + \alpha_i)/a_{i-1}$ при $i = 2, \dots, n-1$, $q_n^* = q_{n-1}^* \alpha_n/a_{n-1}$, т.е. между компонентами вектора $q^* = \text{col}\{q_1^*, \dots, q_n^*\}$ имеется $n-1$ линейных связей и обеспечить произвольное желаемое распределение оказывается невозможным. Это значит, что для достижения цели управления к системе необходимо приложить дополнительные управляющие воздействия.

Предположим, что имеется возможность влиять при помощи стимулирующих мер на коэффициенты a_i , определяющие скорость повышения квалификации работников. Интенсивность применяемой меры (например, величину разницы в зарплате работников i -го и $(i-1)$ -го уровней) будет обозначать $u_i = u_i(t)$, $i = 1, \dots, n-1$. Разумеется, точная зависимость a_i от u_i неизвестна, но это не вносит качественных изменений в задачу. В определенном диапазоне вариаций u_i упомянутую зависимость можно считать линейной: $a_i = \bar{a}_i + b_i u_i$, где \bar{a}_i , b_i — неизвестные коэффициенты. Тогда уравнения объекта управления примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= -(\bar{a}_1 + \alpha_1 + b_1 u_1) q_1 + b_0 u_0(t) + \varphi_1(t), \\ \frac{dq_i}{dt} &= (\bar{a}_{i-1} + b_{i-1} u_{i-1}) q_{i-1} - (\bar{a}_i + \alpha_i + b_i u_i) q_i + \varphi_i(t), \\ (i &= 2, \dots, n-1), \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\frac{dq_n}{dt} = (\bar{a}_{n-1} + b_{n-1} u_{n-1}) q_{n-1} - \alpha_n q_n + \varphi_n(t)$$

и будут относиться к классу билинейных. Теперь у нас имеется n регулируемых величин и n управляющих воздействий. Полагая в (8.24) $q_i = q_i^*$, $dq_i/dt = 0$ ($i = 1, \dots, n$), можно последовательно найти u_{n-1}^*, \dots, u_1^* , u_0^* , т.е. для произвольного желаемого распределения в системе существует соответствующее ему состояние равновесия*).

*) Более реалистичной была бы постановка, учитывающая ресурсные ограничения на u_i , например в виде $\max_i u_i \leq \bar{u}$.

Убедившись в достижимости цели управления, перейдем к решению задачи адаптивного управления. Для простоты выкладок будем рассматривать случай двух уровней квалификации (т.е. $n = 2$) и пренебрегать выбыванием из производственного процесса работников низшего уровня, т.е. будем предполагать $\alpha_1 = 0$. Уравнения объекта примут вид

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{dt} &= -(\bar{a}_1 + b_1 u_1) q_1 + b_0 u_0 + \varphi_1(t), \\ \frac{dq_2}{dt} &= (\bar{a}_1 + b_1 u_1) q_1 - \alpha_2 q_2 + \varphi_2(t),\end{aligned}\quad (8.25)$$

где u_0, u_1 — управляющие воздействия, переменные $q_1(t), q_2(t)$ доступны измерению, $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ — неизмеряемые возмущения. О коэффициентах $\bar{a}_1, b_1, b_0, \alpha_2$ известно лишь, что все они положительны.

Рассмотрим сначала случай $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Первый этап синтеза алгоритма адаптивного управления — нахождение идеального закона регулирования, т.е. закона, обеспечивающего достижение цели управления при известных коэффициентах объекта. Определим управляющие воздействия u_0^*, u_1^* так, чтобы состояние равновесия исходной системы соответствовало достижению цели управления $q_i = q_i^*, i = 1, 2$. Для этого необходимо решить относительно u_0^*, u_1^* уравнения

$$-(\bar{a}_1 + b_1 u_1^*) q_1^* + b_0 u_0^* = 0, \quad (\bar{a}_1 + b_1 u_1^*) q_1^* - \alpha_2 q_2^* = 0. \quad (8.26)$$

Очевидно, решение системы (8.26) имеет вид

$$u_0^* = \frac{\alpha_2 q_2^*}{b_0}, \quad u_1^* = \frac{\alpha_2 q_2^* - \bar{a}_1 q_1^*}{b_1 q_1^*}. \quad (8.27)$$

Применим прямой подход к построению адаптивной системы управления. Для этого запишем (8.27) в виде

$$u_0^* = \theta_0^* r_0, \quad u_1^* = \theta_1^* r_1 + \theta_2^*,$$

где

$$\theta_0^* = \frac{\alpha_2}{b_0}; \quad \theta_1^* = \frac{\alpha_2}{b_1}, \quad \theta_2^* = \frac{\bar{a}_1}{b_1}, \quad r_0 = q_2^*, \quad r_1 = \frac{q_1^*}{q_1^*}.$$

Заменяя неизвестные коэффициенты θ_i^* настраиваемыми, получим реальный закон регулирования в виде

$$u_0 = \theta_0 r_0, \quad u_1 = \theta_1 r_1 + \theta_2, \quad (8.28)$$

где $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ — настраиваемые коэффициенты.

Для синтеза алгоритма адаптации воспользуемся методом скоростного градиента, взяв оценочную функцию

$$Q = h_1 (q_1 - q_1^*)^2 + h_2 (q_2 - q_2^*)^2. \quad (8.29)$$

Выбор коэффициентов $h_1 > 0, h_2 > 0$ будет произведен ниже. Уравнения

обобщенного настраиваемого объекта получим, подставляя (8.28) в (8.25) :

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{dt} &= -\bar{a}_1 q_1 - b_1 q_1 (\theta_1 r_1 + \theta_2) + b_0 \theta_0 r_0, \\ \frac{dq_2}{dt} &= \bar{a}_1 q_1 + b_1 q_1 (\theta_1 r_1 + \theta_2) - \alpha_2 q_2.\end{aligned}\tag{8.30}$$

Вычисляя, в соответствии с принципом скоростного градиента, производную dQ/dt функции (8.29) в силу (8.30), а затем вычисляя частные производные от dQ/dt по $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, придем к алгоритму адаптации

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_0}{dt} &= -\bar{\gamma}_0 h_1 b_0 r_0 (q_1 - q_1^*), \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= -\bar{\gamma}_1 b_1 q_1 r_1 [h_1 (q_1 - q_1^*) - h_2 (q_2 - q_2^*)], \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= -\bar{\gamma}_2 b_1 q_1 [h_1 (q_1 - q_1^*) - h_2 (q_2 - q_2^*)].\end{aligned}$$

Учитывая, что $b_0 > 0$, можно взять коэффициенты оценочной функции h_1, h_2 в виде $h_1 = 1/b_0$, $h_2 = d/b_0$, где $d = h_2/h_1 > 0$ – весовой коэффициент. Положив $\gamma_0 = \gamma_0, \gamma_1 = \gamma_1 b_1/b_0, \gamma_2 = \gamma_2 b_1/b_0$, окончательно получим алгоритм

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_0}{dt} &= -\gamma_0 r_0 (q_1 - q_1^*), \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= -\gamma_1 q_1 r_1 [q_1 - q_1^* - d (q_2 - q_2^*)], \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= -\gamma_2 q_1 [q_1 - q_1^* - d (q_2 - q_2^*)],\end{aligned}\tag{8.31}$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, d$ – положительные числа.

Таким образом, структура алгоритма адаптивного управления найдена. Осталось найти условия работоспособности алгоритма, т.е. условия достижения цели управления $q_i(t) \rightarrow q_i^*, i = 1, 2$. Для этого воспользуемся теоремой 2.1. Условие выпуклости C выполнено в силу линейности правых частей (8.30) по настраиваемым коэффициентам. Условие роста В2 выполняет, если $h_1 > 0, h_2 > 0$. Сложнее проверить условие достижимости Д2. Возьмем $\theta^* = \text{col}(\theta_0^*, \theta_1^*, \theta_2^*)$. Тогда будут справедливы равенства

$$-\bar{a}_1 q_1^* + b_0 u_0 = 0, \quad \bar{a}_1 q_1^* - \alpha_2 q_2^* = 0.\tag{8.32}$$

Вычитая (8.32) из (8.29), получаем соотношения

$$\frac{dq_1}{dt} = -\bar{a}_1 (q_1 - q_1^*), \quad \frac{dq_2}{dt} = \bar{a}_1 (q_1 - q_1^*) - \alpha_2 (q_2 - q_2^*),$$

с учетом которых при $\theta = \theta^*$ имеем

$$\frac{dQ}{dt} = (q - q_*)^T R (q - q_*),$$

где $q = \text{col}(q_1, q_2)$, $q_* = \text{col}(q_1^*, q_2^*)$,

$$R = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{a}_1 & 0 \\ \bar{a}_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_1 \bar{a}_1 & 0 \\ h_2 \bar{a}_1 & -h_2 \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, условие Д2, имеющее вид $dQ/dt \leq -\delta Q$, $\delta > 0$, выполнено, если $R + R^T < 0$. Так как $h_i > 0$, $\bar{a}_1 > 0$, то неравенство $R + R^T < 0$ равносильно неравенству $h_1 \bar{a}_1 h_2 \alpha_2 > h_2^2 \bar{a}_1^2$, которое можно записать в виде

$$d < \frac{\alpha_2}{\bar{a}_1}. \quad (8.33)$$

Если (8.33) выполнено, то достижение цели управления $q_i \rightarrow q_i^*$, $i = 1, 2$, следует из теоремы 2.1. Удовлетворить (8.33) можно, если выбрать достаточно малый весовой множитель d . Требуемая априорная информация состоит в знании нижней границы дроби α_2 / \bar{a}_1 .

До сих пор мы не учитывали неизмеряемые возмущения $\varphi_i(t)$. Если их действием нельзя пренебречь, то для сохранения работоспособности системы можно применять огрубление алгоритма адаптации: например, введением отрицательной обратной связи (см. § 2.4). В этом случае работоспособность системы можно установить с использованием теорем 2.13–2.15. Из теоремы 2.13 следует, в частности, что при выполнении (8.43) система из объекта (8.25), алгоритма регулирования

$$u_0(t) = \theta_0(t) q_2^*, \quad u_1(t) = \frac{\theta_1(t) q_2^*}{q_1^*} + \theta_2(t) \quad (8.34)$$

и алгоритма адаптации

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_0}{dt} &= -\gamma_0 q_2^* (q_1 - q_1^*) - \mu \theta_0, \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= -\frac{\gamma_1 q_1 q_2^*}{q_1^*} [q_1 - q_1^* - d(q_2 - q_2^*)] - \mu \theta_1, \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= -\gamma_2 q_1 [q_1 - q_1^* - d(q_2 - q_2^*)] - \mu \theta_2, \end{aligned} \quad (8.35)$$

где γ_0 , γ_1 , γ_2 , μ – произвольные положительные числа, будет диссипативной, если $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$ – ограниченные функции времени. Можно получить и оценки погрешности выполнения ЦУ.

§ 8.4. Обсуждение

Аналогичным образом, на основе результатов глав 2–6, могут быть построены алгоритмы адаптации для многих практических задач, в том числе задач управления составом, численностью и возрастной структурой популяций, оптимизации продуктивности популяции (сбора урожая), прогнозирования и управления миграцией и т.д. Ближайшие исследования должны быть направлены на проверку эффективности этого подхода. Несмотря на то, что известные в настоящее время методы позволяют строить адаптивные системы для широкого класса нелинейных многомерных объектов, на первом этапе целесообразно использовать наиболее простые модели (модели Вольтерра, Лесли и др.).

Адаптивный подход имеет преимущество перед традиционной стратегией использования моделей экосистем, заключающейся в предварительном изучении объекта с целью определения параметров модели, которая лишь после этого используется для управления и прогнозирования. Традиционная стратегия требует значительного времени на изучение объекта, а точность получаемых оценок параметров все равно низка, особенно для нестационарных объектов.

Интересно отметить, что построенные математическими методами алгоритмы адаптации можно сопоставлять с биологическими алгоритмами и получать новые сведения о свойствах как тех, так и других. В частности, алгоритмы скоростного градиента (глава 2), возникшие как алгоритмы адаптации в технических системах, согласуются с известным биологическим вариационным принципом, по которому любой организм (популяция) развивается таким образом, чтобы обеспечить максимальный прирост своей биомассы [158] или иного показателя, характеризующего его функционирование (см. также Приложение 5).

В заключение еще раз подчеркнем, что мы рассматриваем вопрос о вычислении управляющих воздействий, а не об их реализации. В экологических и социальных системах выполнение действий, предписываемых алгоритмом управления, обычно представляет собой самостоятельную сложную проблему.

Разумеется, следует принять и упреки в том, что предложенные решения основаны на чересчур упрощенных математических моделях и не убеждают в эффективности описываемых методов. В действительности автор надеется убедить читателя не в эффективности методов, а в возможностях их применения. При переходе к практической реализации необходимо, конечно, проверить модели на адекватность, уточнить параметры алгоритмов по результатам моделирования, сравнить предложенные методы с существующими, в частности, с неадаптивными и т.д., в полном соответствии с рекомендациями главы 6. И приведенные результаты – это лишь первые шаги по дороге, которая, по китайской пословице, может стать длинной и в десять тысяч ли.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой книге была предпринята еще одна попытка (сколько их было и сколько грядет!) систематизировать алгоритмы адаптивного управления, разложить их "по полочкам": детерминированные — стохастические, прямые — идентификационные, непрерывные — дискретные и т.д. Однако постепенно становилась все более ясной условность этой классификации. Действительно, многие алгоритмы применимы и к детерминированным, и к стохастическим задачам, прямой и идентификационный подходы в ряде случаев совпадают, а хорошие дискретные регуляторы, как правило, синтезируются при помощи непрерывных прототипов. Более того, один и тот же класс задач удается решить на основе нескольких различных подходов, а в каждом подходе разработано несколько модификаций алгоритмов. В результате парк алгоритмов настолько разросся, что выбрать из них подходящий оказывается все сложнее. Проблема сравнения и выбора алгоритмов для конкретной задачи становится одной из важнейших.

В первых главах книги мы пробовали подступиться к этой проблеме теоретически: а) из соображений логики и здравого смысла (главы 2, 3); б) на основе оценок скорости сходимости (глава 4). Однако общие соображения рождают лишь обтекаемые рекомендации, а оценки удается получить лишь для самых простых случаев, да и то они содержат столько параметров, что выводы оказываются весьма запутанными.

Тогда мы стали сравнивать алгоритмы по оценкам, полученным на основе дикомпозиции, т.е. для упрощенных моделей адаптивных систем (глава 5). Сравнение облегчилось, но еще не настолько, чтобы охватить каждую задачу и каждый алгоритм, тем более при наличии нескольких критериев сравнения.

В результате к началу главы 6 остался еще не отвергнут только один, испытанный способ сравнения алгоритмов: моделирование их на ЭВМ в условиях, приближенных к "боевым" для конкретной задачи. Этого способа не заменить ни теоретическими оценками, ни проверкой на специальных тестовых примерах.

Однако и в этом способе имеются трудности. Долг процесс программирования и отладки, трудоемко и не представительно само моделирование, не всегда легко сделать выводы из его результатов. Прогресс здесь связан с средствами автоматизации проектирования систем управления: инструментальными системами программирования задач моделирования

и оптимизации, экспертными системами и т.п. Примеры таких средств описаны в главе 6. Их развитие дает возможность применять к самым сложным задачам весь арсенал моделей, методов и алгоритмов управления. А развитие микропроцессорной техники обеспечивает реализуемость выбранных алгоритмов.

Читатель мог следить, как от главы к главе в игру включались новые алгоритмы и подходы. Сначала автор втискивал изложение в прокрустово ложе какого-то одного метода, схемы (глава 2). Затем в рамках одной постановки (непрерывной или дискретной, детерминистской или стохастической) излагались разные методы и подходы (главы 3, 4). Далее стали сталкиваться различные постановки, и, наконец, в главе 6 мы пришли к столкновению адаптивных систем с неадаптивными. Таким образом, мы шли от частных методов к более общим, одновременно от абстрактных задач приближаясь к более конкретным. В последних же главах был продемонстрирован ход применения изложенных результатов в прикладных задачах.

Что же касается общих принципов адаптивного управления в сложных системах, то, по-видимому, прежде всего следует испытывать простые алгоритмы 1-го порядка (градиентные и аналогичного типа), основанные на локальной линейной аппроксимации функциональных зависимостей. Сложность их реализации слабо (линейно) зависит от размерности пространства поиска, а более точная аппроксимация в условиях нестационарностей и помех нецелесообразна.

По тем же соображениям следует опираться на более простые (с меньшим числом параметров) модели объектов управления. Чем больше параметров настраивается в алгоритме, тем дольше и ненадежнее он работает... Конечно, возможности вычислительной техники постоянно возрастают, и завтра мы сможем применять более сложные алгоритмы к задачам, где сегодня применяем лишь простые. Однако простые алгоритмы будут тогда применяться к еще более сложным задачам!

Приложение I

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ ГЛАВ 2–5

Доказательство теоремы 2.1. Вычисляя производную в системе (2.1), (2.9) от функции $V_t = V(x(t), \theta(t), t)$ вида (2.30) и пользуясь условиями выпуклости (С) и достижимости (Д1), получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &= \omega(x, \theta, t) + (\theta - \theta_*)^T \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) - \mu(t) \leqslant \\ &\leqslant \omega(x, \theta_*, t) - \mu(t) \leqslant -\rho(Q(x(t), t)). \end{aligned} \quad (\text{П.1.1})$$

Интегрируя (П.1.1) на промежутке $[0, t]$, получим неравенство

$$Q(x(t), t) + 0,5 \| \theta(t) - \theta_* \|_{\Gamma^{-1}}^2 \leqslant V_t \leqslant V_0 - \int_0^t \rho(Q(x(s), s)) ds,$$

из которого следует (2.29) и (с учетом условия роста В1) ограниченность траекторий системы. Наконец, чтобы установить достижение ЦУ (2.28), достаточно заметить, что из (П.1.1) вытекает конечность интеграла $\int_0^\infty Q(x(t), t) dt$, и воспользоваться следующей леммой.

Лемма П.1.1 [178, с. 115]. *Пусть правая часть системы $\dot{z} = F(z, t)$ локально ограничена равномерно по $t \geqslant 0$ (т.е. $\sup \{ \|F(z, t)\| : \|z\| \leqslant \beta, t \geqslant 0\}$ конечен для любого $\beta > 0$). Пусть $z(t)$ – ограниченное решение системы, а неотрицательная функция $Q(z, t)$ равномерно непрерывна по z, t при $\|z\| \leqslant \beta$ для любого $\beta > 0$ и интеграл $\int_0^\infty Q(z(t), t) dt$ конечен.*

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(z(t), t) = 0.$$

Доказательство теоремы 2.2. Оценивая производную в системе (2.1), (2.4) от функционала

$$V_t = Q_t + 0,5 \| \theta - \theta_* \|_{\Gamma^{-1}}^2 + \int_t^\infty \mu(s) ds,$$

получим

$$\dot{V}_t \leqslant R(x(t), \theta_*, t) - \mu(t) \leqslant 0,$$

откуда

$$Q_t \leq V_t \leq V_0 = 0.5 \| \theta_0 - \theta_* \|_{\Gamma^{-1}}^2 + \int_0^\infty \mu(t) dt, \quad (\text{П.1.2})$$

т.е. первое утверждение теоремы справедливо. Для доказательства второго утверждения достаточно сослаться на лемму П.1.1, поскольку из (П.1.2) вытекает, что

$$\int_0^\infty R(x(t), \theta(t), t) dt < \infty.$$

Доказательство теоремы 2.3. Докажем теорему с учетом замечаний 1–3. Для этого оценим скорость изменения в силу системы (2.1), (2.18) функции Ляпунова

$$V_t = Q_t + \int_t^\infty \mu(s) ds.$$

Рассматривая сначала случай $\delta > 1$ и пользуясь условиями С, G, Д1, имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &\leq \omega(x, \theta_*, t) + [\theta_0(x, t) - \theta_*(x, t) - \\ &- \gamma \Psi(x, \theta, t)]^\top \nabla_\theta \omega(x, \theta, t) - \mu(t) \leq \\ &\leq -\rho(Q_t) + d(x, t) z_t - \gamma \beta z_t^\delta, \end{aligned}$$

где $z_t = \|\nabla_\theta \omega(x(t), \theta(t), t)\|$. Для фиксированного Δ , $0 < \Delta < V_0$, положим $\bar{\rho}(\Delta) = \inf_{Q \geq \Delta} \rho(Q)$, где $\rho(Q)$ из условия Д1. Максимизируя по z_t правую часть оценки \dot{V}_t , с учетом (2.33) получим

$$\dot{V}_t \leq -\bar{\rho}(\Delta) + d \frac{\delta - 1}{\delta} \left(\frac{d}{\gamma \beta \delta} \right)^{1/(\delta - 1)}, \quad (\text{П.1.3})$$

где

$$d = \sup_{\Omega_0} d(x, t), \quad \Omega_0 = \bigcup_{t \geq 0} \{x : Q(x, t) \leq V_0\}.$$

Из (П.1.3) следует, что для достаточно большого $\bar{\gamma}$ существуют $\epsilon_0 > 0$, $\epsilon_1 > 0$ такие, что при $\gamma > \bar{\gamma}$ неравенство $\dot{V}_t \leq -\epsilon_0$ будет выполняться, если будут выполняться неравенства

$$\Delta - \epsilon_1 \leq Q_t \leq V_0. \quad (\text{П.1.4})$$

Поэтому при $\gamma > \bar{\gamma}$ неравенства (П.1.4) не могут выполняться в течение промежутка времени большего, чем V_0/ϵ_0 . Но второе из неравенств (П.1.4) нарушиться не может, так как это означало бы нарушение неравенства $V_t \leq V_0$. Поэтому существует $t > 0$ такое что $Q_t \leq \Delta - \epsilon_1$ и, следовательно, при любом $t' > t$ множество $G_t = \{s : s < t, Q_s \leq \Delta - \epsilon_1\}$ непусто.

Положим $\tau_t = \sup G_t$ и покажем, что $\lim_{t \rightarrow \infty} Q \leq \Delta - (\epsilon_1/2)$, т.е. ЦУ (2.2) выполняется. Действительно, выберем t_* так, чтобы $\int_{t_*}^{\infty} \mu(t) dt < \epsilon_1/2$, и пусть $t > t_* + (V_0/\epsilon)$. Тогда $\tau_t > t_*$, $Q_{\tau_t} = \Delta - \epsilon_1$, $Q_s > \Delta - \epsilon_1$, $\dot{V}_s < 0$ при $t_* < s_t < t$, и, следовательно, $V_t \leq V_{\tau_t}$. Поэтому

$$Q_t \leq Q_{\tau_t} + \int_{\tau_t}^t \mu(s) ds = \Delta - \epsilon_1 + \frac{\epsilon_1}{2} = \Delta - \frac{\epsilon_1}{2},$$

и для случая $\delta \geq 1$ теорема доказана.

В качестве $\bar{\gamma}$, очевидно, можно взять

$$\bar{\gamma}(\Delta) = \frac{d}{\beta \delta} \left[\frac{d(\delta-1)}{\rho(\Delta)\delta} \right]^{\delta-1}. \quad (\text{П.1.5})$$

При $\delta = 1$ неравенство (П.1.3) принимает вид

$$\dot{V}_t \leq -\bar{\rho}(\Delta) + (d - \gamma\beta) z_t, \quad (\text{П.1.6})$$

из которого следует, что $\dot{V}_t < 0$ при $\gamma > d/\beta$, любом $\Delta > 0$ и при $x(t) \in \Omega_0$, т.е. при $Q_t \leq V_0$. Но, как и в предыдущем случае, неравенство $Q_t \leq V_0$ нарушиться не может, поэтому $\dot{V}_t < 0$ при всех $t \geq 0$. Следовательно, $V_t \rightarrow 0$ и $Q_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. выполнена ЦУ (2.28). Наконец, ограниченность $x(t)$ вытекает из ограниченности Q_t и условия роста В1. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Вновь рассматривая функцию Ляпунова

$$V_t = Q_t + \int_t^{\infty} \mu(s) ds,$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &= \omega(x, \theta, t) - \mu(t) \leq \omega(x, \theta_*, t) + \\ &+ (\theta_0 - \theta_* - \gamma \Psi(x, \theta, t))^T \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) - \mu(t) \leq (d - \gamma\beta) z_t. \end{aligned}$$

Выбирая $\gamma > d/\beta$, получаем неравенство $\dot{V}_t < 0$, или $\dot{Q}_t = R(x(t), \theta(t), t) \leq \mu(t)$, откуда, с учетом ДЗ, получаем (2.32). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.5. Для функционала

$$\begin{aligned} V_t &= Q(x(t), t) + \alpha \int_0^t R(x(s), \theta(s), s) ds + \\ &+ 0,5 \| \theta - \theta_* + \gamma \Psi(x, \theta, t) \|_{\Gamma^+}^2 + \int_t^{\infty} \mu(s) ds \end{aligned} \quad (\text{П.1.7})$$

скорость изменения в силу системы (2.1), (2.24) имеет вид

$$\dot{V}_t = \omega(x, \theta, t) + v_t^T \Gamma^+ \Gamma \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) - \mu(t),$$

где $\omega(x, \theta, t)$ – из условия теоремы, $v_t = \theta(t) - \theta_* + \gamma \Psi(x(t), \theta(t), t)$.

По условию теоремы $v_0 \in \mathcal{L}(\Gamma)$, где $\mathcal{L}(\Gamma)$ – линейная оболочка столбцов матрицы Γ . В силу алгоритма (2.24) $dv_t/dt \in \mathcal{L}(\Gamma)$ и, значит, $v_t \in \mathcal{L}(\Gamma)$ для всех $t \geq 0$. Но $\Gamma^+ \Gamma$ – проектор на множество $\mathcal{L}(\Gamma)$; поэтому $\Gamma^+ \Gamma v_t = v_t$ и выражение для \dot{V}_t принимает вид

$$\dot{V}_t = \omega(x(t), \theta(t), t) + v_t^\top \nabla_\theta \omega(x(t), \theta(t), t) - \mu(t).$$

Далее из условий выпуклости и достижимости получаем $\dot{V}_t \leq -\rho(Q(x(t), t)) \leq 0$. Пользуясь условиями A2, B1, устанавливаем, аналогично доказательству теоремы 2.1, ограниченность функций $x(t)$, $\theta(t)$, $\int_0^t \rho(Q(x(s), s)) ds$. Из леммы П.1.1 следует, что $\rho(Q(x(t), t)) \rightarrow 0$, т.е. $Q(x(t), t) \rightarrow 0$ и ЦУ (2.28) выполняется. Выполнение (2.34) выводится аналогично доказательству теоремы 2.2.

Доказательство теоремы 2.6. При выполнении усиленного условия достижимости Д2 соотношение (П.1.3) можно записать в виде линейного дифференциального неравенства $\dot{Q}_t \leq -\alpha_0 [Q_t - D]$, решение которого дает искомые оценки.

Доказательство теоремы 2.7. Повторяя доказательство теоремы 2.3 с учетом $\mu(t) \equiv 0$, получим $dQ_t/dt \leq -\rho(Q_t)$ или $\rho^{-1}(Q_t)dQ_t \leq -dt$. Интегрируя, получаем (2.36).

Доказательство теоремы 2.8. Эквивалентность утверждений будем доказывать в следующей последовательности: (1) \Leftrightarrow (2), (2) \Leftrightarrow (3), (1) \Leftrightarrow (5) (эквивалентность (4) \Leftrightarrow (5) доказывается аналогично [260], а эквивалентность (5) \Leftrightarrow (6) доказана в [250]). Эквивалентность утверждений (1) и (2) следует из двойного неравенства

$$\max_{[t, t+L]} \varphi(s) [\max_{[t, t+L]} |\dot{\varphi}(s)|]^{-1} \leq \int_t^{t+L} \varphi(s) ds \leq L \max_{[t, t+L]} \varphi(s), \quad (\text{П.1.8})$$

выполненного для любой неотрицательной кусочно-гладкой функции $\varphi(s)$, ограниченной вместе со своей производной. (Первое неравенство (П.1.8) следует из теоремы Ландау–Адамара [194], а второе – из теоремы о среднем.) В (П.1.8) следует подставить $\varphi(s) = \|\Phi(s)^T h\|^2$.

Эквивалентность (2) и (3) следует из однородности неравенства в утверждении (3) и из компактности единичной сферы в R^m .

Утверждение (1) непосредственно следует из (5), если зафиксировать α_0 в (5). Для доказательства обратной импликации зафиксируем L, α, t_0 в утверждении (1). Умножив (2.40) слева на h^T , а справа – на h , где $h \in R^m$, $\|h\| = 1$, получим неравенство

$$\int_t^{t+L} \|\Phi(s)^T h\|^2 ds \geq \alpha,$$

выполненное при любом $t > t_0$ и (вследствие компактности сферы в R^m) при любом $h \in R^m$ ($\|h\| = 1$). Далее, по заданному $\alpha_0 > 0$, выбирая $L(\alpha_0) = rL$, где $r = \text{entier}(\alpha_0/\alpha + 1)$, получим неравенства

$$\int_t^{t+L(\alpha_0)} \|\Phi(s)^T h\|^2 ds \geq r \int_t^{t+L} \|\Phi(s)^T h\|^2 ds \geq r\alpha \geq \alpha_0,$$

т.е. утверждение 5 выполнено. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.10. Для заданного множества $D \subset R^n$ выберем число $q > 0$ так, чтобы $D_q \subset D$, где $D_q = \{x \in R^n : Q(x, t) \leq q \quad \forall t \geq 0\}$. Обозначим

$$\rho_q(\Delta) = \inf \{ \rho(Q) : \Delta \leq Q \leq q \}, \quad d_q = \sup \{ \| \nabla_x Q(x, t) \| : x \in D_q, t \geq 0 \}.$$

Из условий Д1, В теоремы следует, что $\rho_q(\Delta) > 0$, $d_q < +\infty$ для всех $q \geq \Delta$. Оценивая скорость изменения функции $Q(x, t)$ в силу системы (2.41), (2.18) при $x \in D$, $Q(x, t) > \Delta$, получим

$$\begin{aligned} \dot{Q} &\leq \omega(x, \theta_*, t) + [\theta_0 - \theta_* - \gamma \Psi(x, \theta, t)]^T X \\ &\times \nabla_\theta \omega(x, \theta, t) + \nabla_x Q(x, t)^T \varphi(t) \leq \rho_q(\Delta) + dz - \\ &- \gamma \beta z^\delta + d_q \Delta_\varphi \leq -\rho_q(\Delta) + \pi(\gamma, \delta) + d_q \Delta_\varphi, \end{aligned}$$

где

$$d = \| \theta - \theta_* \|, \quad z = \| \nabla_\theta \omega(x, \theta, t) \|,$$

$$\pi(\gamma, \delta) = 0 \text{ при } \delta = 1,$$

$$\gamma > \frac{d}{\beta}, \quad \pi(\gamma, \delta) = \frac{(\delta - 1)d}{\delta \alpha_0} \left(\frac{d}{\gamma \delta \beta} \right)^{1/(\delta - 1)} \text{ при } \delta > 1.$$

Пусть $\Delta_\varphi < \rho_q(\Delta)/d_q$. Тогда при достаточно большом γ (таком, что $\pi(\gamma, \delta) < \rho_q(\Delta) - d_0 \Delta_\varphi$) получим, что $\dot{Q} < 0$ в области D_q , если $Q(x, t) > \Delta$. Это означает, что траектория $x(t)$, начавшись в множестве D_q , останется в нем при всех $t \geq 0$. Более того, при достаточно больших t начнет выполняться неравенство $Q(x(t), t) \leq \Delta$, означающее достижение ЦУ. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.11. Уравнения системы (2.42), (2.18), очевидно, приводятся к виду (2.1), (2.18), если сделать в (2.18) замену $\theta_*(x, t) \rightarrow \theta_*(x, t) + \varphi(t)$. Поэтому доказываемое утверждение следует из теоремы 2.3. Для получения оценки допустимой величины шага $\bar{\gamma}$ следует заменить в формуле (П.1.5) и в замечании 1 к теореме 2.3 величину $d = \sup \| \theta_0 - \theta_*(x, t) \|$ на $d + \Delta_\varphi$.

Доказательство теоремы 2.13. Рассмотрим функцию

$$V(x, \theta, t) = Q(x, t) + 0.5 \kappa^{-1} \| \theta - \theta_* + \gamma \Psi(x, \theta, t) \|_{\Gamma^{-1}}^2 \quad (\text{П.1.9})$$

и оценим ее производную в силу системы (2.41), (2.44):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \omega(x, \theta, t) + (\nabla_x Q)^T \varphi(t) + [\theta - \theta_* + \gamma \Psi(x, \theta, t)]^T X \\ &\times \nabla_\theta \omega(x, \theta, t) - \kappa^{-1} [\theta - \theta_* + \gamma \Psi(x, \theta, t)]^T \zeta(\theta + \gamma \Psi(x, \theta, t)) \leq \\ &\leq -\alpha_0 Q + \alpha_1 Q^\sigma \Delta_\varphi - \frac{\rho \| \theta - \theta_* + \gamma \Psi(x, \theta, t) \|^2}{\kappa} + \frac{\rho'}{\kappa}. \end{aligned}$$

Используя легко проверяемые неравенства

$$-\alpha_0 Q + \Delta_\varphi \alpha_1 Q^\sigma \leq -\alpha_0 (1 - \sigma) (Q - \Delta_*),$$

$$-\| \theta - \theta_* + \gamma \Psi \|^2 \leq -\lambda \| \theta - \theta_* + \gamma \Psi \|_{\Gamma^{-1}}^2,$$

где $\lambda = \lambda_{\min}(\Gamma)$, и учитывая соотношение $2\rho\lambda \geq \alpha_0 (1 - \sigma)$, получим, что

$\dot{V} \leq -\alpha V + \beta$, где

$$\alpha = \alpha_0(1-\sigma), \quad \beta = \beta(\kappa) = \frac{\rho'}{\kappa} + \alpha_0(1-\sigma)\Delta_*.$$

Интегрируя полученное дифференциальное неравенство, приедем к оценке

$$Q(x(t), t) \leq V(x(t), \theta(t), t) \leq V(x(0), \theta(0), 0) e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha},$$

из которой следует диссипативность системы. Для доказательства оценочной ϵ -оптимальности системы зафиксируем $\epsilon > 0$ и выберем $\kappa > \kappa_0$. Тогда

$$\beta(\kappa) < \beta(\kappa_0) = \alpha \left(\Delta_* + \frac{\epsilon}{2} \right),$$

и, следовательно,

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) \leq \Delta_* + \frac{\epsilon}{2} < \Delta_* + \epsilon,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2.15. Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма П.1.2 [165, 196]. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$dz = A(z, t) dt + B(z, t) dW, \quad (\text{П.1.10})$$

где n -мерная вектор-функция $A(\cdot)$ и $n \times k$ -матрица-функция $B(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Липшица равномерно по $t \geq 0$, $W(\cdot)$ – стандартный k -мерный винеровский случайный процесс. Пусть скалярная функция $V(z, t)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям

- 1) $\inf_{t \geq 0} V(z, t) \rightarrow +\infty$ при $\|z\| \rightarrow \infty$,
- 2) $\|\nabla_z V(z, t)\|^2 \leq \kappa_1(1 + V(z, t))$,
- 3) $|\mathcal{L}V(z, t)| \leq \kappa_2(1 + V(z, t))$,
- 4) $\mathcal{L}V(z, t) \leq -\alpha V(z, t) + \beta$,

где $\kappa_1, \kappa_2, \alpha, \beta$ – положительные постоянные, \mathcal{L} – производящий оператор*) процесса (П.1.10). Тогда решение $z(t)$ уравнения (П.1.10) существует, является необрывывающимся случным процессом при $t \geq 0$ и удовлетворяет неравенству

$$MV(z(t), t) \leq \frac{\beta}{\alpha} + \left[MV(z(0), 0) - \frac{\beta}{\alpha} \right] e^{-\alpha t}. \quad (\text{П.1.11})$$

*) Функцию $\mathcal{L}V(\cdot)$, имеющую вид

$$\mathcal{L}V = \frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla_z V)^T A + \frac{1}{2} \operatorname{Sp} B^T (\nabla_z^2 V) B,$$

называют стохастической производной функции $V(\cdot)$ в силу системы (П.1.10).

Для доказательства теоремы покажем, что процесс $z(t) = \text{col}(x(t), \theta(t))$, порождаемый уравнениями (2.51), (2.52), и функция $V(\cdot)$ вида (П.1.9) при $\Psi(\cdot) \equiv 0$ удовлетворяют условиям леммы. Условия (1), (2), очевидно, непосредственно вытекают из В3. Для проверки (3) оценим стохастическую производную функции $V(\cdot)$ в силу системы (2.51), (2.52), имеющую вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \omega(x, \theta, t) - (\theta - \theta_*)^T \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) - \kappa^{-1} (\theta - \theta_*)^T \zeta(\theta) + \\ &+ 0,5 S_p \{ R(x, \theta, t) \nabla_x^2 Q(x, t) R(x, \theta, t) \}. \end{aligned}$$

Для первых двух слагаемых имеем в силу А3:

$$\begin{aligned} | \omega(x, \theta, t) - (\theta - \theta_*)^T \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) | &\leqslant \\ &\leqslant | \omega(x, \theta_*, t) + (\theta - \theta_*)^T [\nabla_{\theta} \omega(x, \theta_*, t) - \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t)] | \leqslant \\ &\leqslant c_1 (1 + Q(x, t)) + c_2 \| \theta - \theta_* \|^2. \end{aligned}$$

Воспользовавшись для оценки третьего слагаемого условием ОС2, а для оценки четвертого слагаемого – ограниченностью интенсивности возмущений $R(\cdot)$ и условием В3, устанавливаем справедливость (3). Аналогично, пользуясь для проверки (4) ограниченностью $R(\cdot)$ и условиями В3, С, Д4, с учетом $2\rho\lambda \geq \alpha_0$, получаем

$$\dot{V} \leq -\alpha_0 Q - \frac{2\rho\lambda \| \theta - \theta_* \|_{\Gamma^{-1}}^2}{2\kappa} + \frac{\rho'}{\kappa} - 0,5r\Delta_{\varphi}^2,$$

откуда следует (4) при

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \frac{r\Delta_{\varphi}^2}{2} + \frac{\rho'}{\kappa} = \alpha_0 \Delta_* + \frac{\rho'}{\kappa}.$$

Выбирая $\kappa > \kappa_0 = \rho' / (\epsilon\alpha_0)$, из (П.1.11) получаем требуемую оценку. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.16. Вновь рассмотрим функцию (П.1.9) при $\Psi(\cdot) \equiv 0$ и оценим скорость ее изменения в силу (2.41), (2.43). Имеем

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \omega(x, \theta, t) + [\theta - \theta_*(t)]^T \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) - \\ &- \frac{[\theta - \theta_*(t)]^T \zeta(\theta)}{\kappa} + \nabla_x Q(x, t)^T \varphi(t) - \\ &- \kappa^{-1} [\theta - \theta_*(t)]^T \Gamma^{-1} \frac{d\theta_*}{dt} \leq -\alpha_0 Q + \alpha_1 Q^{\sigma} \Delta_{\varphi} - \\ &- \frac{\rho \| \theta - \theta_*(t) \|^2 - \rho'}{\kappa} + \frac{\mu}{2\kappa} \| \theta - \theta_*(t) \|_{\Gamma^{-1}}^2 + \frac{1}{2\mu\kappa} \left\| \frac{d\theta_*}{dt} \right\|_{\Gamma^{-1}}^2, \end{aligned}$$

где $\mu > 0$ произвольно. Выбирая $\mu = 2\rho\lambda - \alpha_0(1 - \sigma)$, аналогично доказательству теоремы 2.13, получим

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\alpha_0(1 - \sigma)(Q - \Delta_{\varphi}) - \frac{2\rho\lambda}{2\kappa} \| \theta - \theta_*(t) \|_{\Gamma^{-1}}^2 + \\ &+ \frac{\mu}{2\kappa} \| \theta - \theta_*(t) \|_{\Gamma^{-1}}^2 + \frac{\rho'}{\kappa} + \beta_1(2\kappa\mu\lambda)^{-1} \leq -\alpha V + \beta, \end{aligned}$$

где на этот раз

$$\alpha = \alpha_0(1 - \sigma), \beta = \alpha_0(1 - \sigma) \Delta_* + \frac{\rho'}{\kappa} + \frac{\beta_1}{2\kappa\lambda(2\rho\lambda - \alpha_0(1 - \sigma))}.$$

Из условия Д5 следует, что $V(\cdot)$ удовлетворяет условию роста и, следовательно, система (2.41), (2.43) диссипативна. Кроме того, для любого $\epsilon > 0$ при выборе $\kappa > \kappa_0$, где

$$\kappa_0 = \left[\rho' + \frac{\beta}{2\lambda(2\rho\lambda - \alpha_0(1 - \sigma))} \right] \frac{1}{\epsilon\alpha_0(1 - \sigma)},$$

будет выполняться ЦУ (2.2) при $\Delta = \Delta_* + \epsilon$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2.17. Утверждение теоремы вытекает из теоремы 2.1 и из следующей простой леммы.

Лемма П.1.3. *Пусть гладкая функция $V(z, t)$ и непрерывная функция $G(z, t)$ удовлетворяют условиям*

$$V(z, t) \leq 0 \text{ при } G(z, t) \geq 0,$$

$$\inf \{G(z, t) : V(z, t) \leq V_0, t \geq 0\} \geq 0,$$

где $\dot{V}(\cdot)$ – производная функции $V(\cdot)$ в силу системы $\dot{z} = F(z, t)$. Тогда для любого решения системы $z(t)$, удовлетворяющего условию $V(z(0), 0) \leq V_0$, выполняются неравенства $G(z(t), t) \geq 0$, $\dot{V}(z(t), t) \leq 0$.

Доказательство теоремы 2.18. Из условий Севастьянова–Котелянского следует [38], что существуют числа $\beta_j > 0$, $j = 1, \dots, l$, такие, что

$$\beta_j > \sum_{i=1}^l \beta_i \mu_{ij}, \quad j = 1, \dots, l. \quad (\text{П.1.12})$$

Из первой группы условий, применяя теорему 2.1, получим, что

$$\partial_i V_i(x_i, \theta_i, t) \leq -\rho_i(Q_i(x_i, t)),$$

где $V_i(\cdot)$ – функция (2.61), ∂_i – производная в силу i -й изолированной подсистемы.

Оценим величину $\partial_0 V(x, \theta, t)$, где $V(x, \theta, t) = \sum \beta_i V_i$, ∂_0 – производная в силу системы (2.56), (2.58):

$$\begin{aligned} \partial_0 V &\leq -\sum \beta_i \rho_{it} + \sum \beta_i \nabla_{x_i} Q_i(x_i, t)^T H_i(x, \theta, t) \leq \\ &\leq -\sum_{i=1}^l \beta_i (\rho_{it} - \sum_{j=1}^l \beta_j \mu_{ij} \rho_{jt}) = -\sum_{j=1}^l \rho_{jt} (\beta_j - \sum_{i=1}^l \beta_i \mu_{ij}) < 0, \end{aligned}$$

где $\rho_{it} = \rho_i(Q_i(x_i(t), t))$. Из полученного неравенства стандартными рассуждениями (см., например, [193]) выводятся все утверждения теоремы.

Доказательство теоремы 2.19. Действуя, как и при доказательстве теоремы 2.18, выберем числа $\beta_i > 0$, удовлетворяющие (П.1.12).

Тогда для функции $V = \sum_{i=1}^l \beta_i V_i$, где V_i имеют вид (2.61), получим

$$\partial_0 V \leq -\beta^T (I - M)[\rho - (I - M)^{-1}d],$$

где $\beta = \text{col}(\beta_1, \dots, \beta_l)$, $\rho = \text{col}(\rho_1(Q_1), \dots, \rho_l(Q_l))$, ∂_0 – производная

в силу системы (2.56), (2.63). В силу (П.1.12) и условий теоремы, $\partial_0 V < 0$ в области $\{x, t : \rho_i(Q_i(x_i, t)) > \rho_i(\Delta_i)\}$. Отсюда следует ограниченность траекторий системы и выполнение соотношений

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_i(Q_i(x_i(t), t)) \leq \rho_i(\Delta_i), \quad i = 1, \dots, l,$$

равносильных (2.64).

Из теорем главы 3 в доказательстве нуждаются лишь теоремы 3.3, 3.6. Доказательства остальных утверждений можно найти в [178]. Займемся доказательством теоремы 3.3.

Доказательство теоремы 3.3. Утверждение теоремы легко выводится из следующей теоремы, имеющей самостоятельный интерес.

Теорема П.1. Пусть многочлены $B(\lambda)$, $g(\lambda)$, введенные в § 3.1, и многочлен $\bar{g}(\lambda) = g(\lambda) - g_{l-1}\lambda^{l-1}$ гурвицевы и выполнены соотношения (3.27), причем g_{l-1} достаточно мало. Тогда у системы (3.11), (3.25), (3.26) существует функция Ляпунова

$$V(x, \theta) = x^T H x + (\bar{\theta} - \bar{\theta}_*)^T H_1 (\bar{\theta} - \bar{\theta}_*), \quad (\text{П.1.13})$$

обладающая свойством

$$\dot{V}(x, \theta) < 0 \text{ при } x \neq 0, \quad (\text{П.1.14})$$

где $H = H^T > 0$ – $n \times n$ -матрица, $H_1 = H_1^T \geq 0$ – $(l-1) \times (l-1)$ -матрица, $x \in R^n$ – вектор состояния ОУ (3.11), $\bar{\theta}, \theta_* \in R^{l-1}$.

Доказательство теоремы П.1. Действуя так же, как и при доказательстве теоремы 3.2 (см. [178, с. 413]), убеждаемся, что для выполнения (П.1.14) достаточно существования $n \times n$ -матрицы $H = H^T > 0$ и вектора $\bar{\theta}_* \in R^{l-1}$ таких, что

$$HA_* + A_*^T H < 0, \quad HB = Lg, \quad A_* = A + B\theta_*^T L^T, \quad (\text{П.1.15})$$

где A, B, L – матрицы уравнений состояния ОУ (3.11), $g = \text{col}(g_0, \dots, g_{l-1})$, $\theta_* = \text{col}(\bar{\theta}_*, 0) \in R^l$. На основании частотной теоремы (см. [43, 206]) достаточно убедиться в существовании вектора $\bar{\theta}_* \in R^{l-1}$ такого, что

- а) многочлен $\delta_*(\lambda)$ гурвицев;
- б) $\text{Reg}^T W_*(j\omega) > 0 \quad \forall \omega \in R^1$,
- в) $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \omega^2 \text{Reg}^T W_*(j\omega) > 0$,

где

$$\delta_*(\lambda) = A(\lambda) - \bar{\theta}_*(\lambda)B(\lambda), \quad W_*(\lambda) = L^T (\lambda I - A_*)^{-1} B,$$

$$\theta_*(\lambda) = \sum_{i=0}^{l-2} \theta_{*i} \lambda^i.$$

Покажем, что в условиях теоремы в качестве $\bar{\theta}_*$ можно взять вектор вида $\bar{\theta}_* = -\kappa \bar{g}$, где $g = \text{col}(g_0, \dots, g_{l-2})$, т.е. $\bar{\theta}_*(\lambda) = -\kappa \bar{g}(\lambda)$, где $\kappa > 0$ – достаточно велико. Для определенности пусть $b_0 > 0, g_0 > 0$.

Очевидно,

$$g^T W_*(\lambda) = \frac{g(\lambda) B(\lambda)}{A(\lambda) - \bar{\theta}_*(\lambda) B(\lambda)}. \quad (\text{П.1.16})$$

Для проверки (а) вычислим асимптотику корней многочлена

$$\delta_*(\lambda) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + kg_{l-2}b_k p^{n-2} + \dots$$

при $k \rightarrow \infty$. Получим, что $\delta_*(\lambda)$ — гурвицев при $k > k_0$, если $a_{n-1} > 0$, поскольку $n-2$ корня $\delta_*(\lambda)$ стремятся при $k \rightarrow \infty$ к корням гурвицева многочлена $\bar{g}(\lambda)B(\lambda)$, а остальные два корня — к корням многочлена $\lambda^2 + a_{n-1}\lambda + kg_{l-2}b_k$.

Прежде чем переходить к проверке частотного неравенства (б), докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма П.1.4. Пусть

$$D(\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} d_i \lambda^i, \quad F(\lambda) = \sum_{i=0}^N f_i \lambda^i,$$

причем $D(j\omega) \neq 0$. Тогда

$$\operatorname{Re} \frac{F(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{f_N}{d_{N-1}} \left[\frac{f_{N-1}}{f_N} - \frac{d_{N-2}}{d_{N-1}} \right] + O\left(\frac{1}{|\omega|^2}\right).$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \frac{F(\lambda)}{f_N} &= \frac{D(\lambda)}{d_{N-1}} \left[\lambda + \frac{f_{N-1}}{f_N} - \frac{d_{N-2}}{d_{N-1}} + \frac{1}{\lambda} \left(f_{N-2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - f_{N-3} \left(f_{N-1} - \frac{d_{N-2}}{d_{N-1}} \right) \right) \right] + Q_{N-3}(\lambda), \end{aligned}$$

где $Q_{N-3}(\lambda)$ — многочлен с вещественными коэффициентами степени не выше $N-3$. Разделив обе части на $D(\lambda)/f_N$, подставив $j\omega$ вместо λ и взяв вещественную часть, получим искомое соотношение.

Лемма П.1.5. Пусть $Q(\lambda)$ — гурвицев многочлен степени $s-1$ с положительными коэффициентами. Тогда существуют $\bar{q} > 0$, $\epsilon > 0$ такие, что при $0 < q < \bar{q}$

$$\operatorname{Re} \frac{Q(j\omega)}{q(j\omega)^s + Q(j\omega)} > \frac{\epsilon}{1 + \omega^2}. \quad (\text{П.1.17})$$

Если $s = 2$, $Q(\lambda) = q_1\lambda + q_0$, то можно взять $\bar{q} = q_1^2/q_0$.

Доказательство. Преобразуем левую часть (П.1.17):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{Q(j\omega)}{q(j\omega)^s + Q(j\omega)} &= \\ &= \operatorname{Re} \frac{|Q(j\omega)|^2 + Q(j\omega) \cdot q(-j\omega)^s}{|q(-j\omega)^s + Q(j\omega)|^2} = \frac{|Q(j\omega)|^2 + qR(\omega)}{|q(-j\omega)^s + Q(j\omega)|^2}, \end{aligned}$$

где $R(\lambda)$ — многочлен степени $2s-2$ со старшим членом $q_{s-2}\omega^{2s-2}$. Но $|Q(j\omega)|^2$ — многочлен от ω со старшим членом $q_{s-1}^2\omega^{2s-2}$, положительный при всех $\omega \in R^1$; поэтому при достаточно малых $q > 0$, $\epsilon > 0$ будет выполнено неравенство

$$|Q(j\omega)|^2 + qR(\omega) \geq \epsilon \omega^{2s-2}, \quad (\text{П.1.18})$$

из которого непосредственно вытекает (П.1.17). Необходимое условие справедливости (П.1.18) — положительность старшего коэффициента: $q_{s-1}^2 > q \cdot q_{s-2}$. Для $s = 2$, очевидно, это условие является и достаточным. Лемма доказана.

Для проверки (б) заметим, что $g(j\omega)B(j\omega) \neq 0$ в силу гурвицевости $g(\lambda)B(\lambda)$ и поэтому достаточно проверить выполнение при $\kappa > \kappa_1$ для некоторого $\kappa_1 > 0$ неравенства $\operatorname{Re}[g^T W_*(j\omega)]^{-1} > 0$, имеющего вид

$$\operatorname{Re} \frac{A(j\omega) + \kappa \bar{g}(j\omega)B(j\omega)}{g(j\omega)B(j\omega)} > 0 \quad \forall \omega \in R^1. \quad (\text{П.1.19})$$

Разбивая левую часть (П.1.19) на два слагаемых и пользуясь леммой П.1.4 и П.1.5 (в которых берется $D(\lambda) = g(\lambda)B(\lambda)$, $Q(\lambda) = \bar{g}(\lambda)$, $N = n$, $s = l - 1$), получим при $0 < q_{l-1} < \bar{q}$

$$\operatorname{Re}[g^T W_*(j\omega)]^{-1} > \frac{1}{d_{n-1}} \left[a_{n-1} - \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} \right] - \frac{C}{1 + \omega^2} + \frac{\kappa \epsilon}{1 + \omega^2}.$$

Таким образом, при достаточно большом $\kappa > 0$ (П.1.19) будет выполнять-ся, если

$$d_{n-1} \geq \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}} = \frac{g_{l-2} b_k + g_{l-1} b_{k-1}}{g_{l-1} b_k} = \frac{g_{l-2}}{g_{l-1}} + \frac{b_{k-1}}{b_k},$$

т.е. если выполнено (3.27).

Для проверки в) воспользуемся леммой П.1.4, в которой следует заменить N на $n + 1$ и взять

$$F(\lambda) = \lambda^2 g(\lambda)B(\lambda), \quad D(\lambda) = A(\lambda) + \kappa \bar{g}(\lambda)B(\lambda).$$

Из этой леммы следует, что

$$\operatorname{Re} \omega^2 W_*(j\omega) = g_l b_k \left[\frac{g_l b_{k-1} + g_{l-1} b_k}{g_l b_k} - a_{n-1} \right] + O\left(\frac{1}{|\omega|^2}\right).$$

В данном случае $f_N = g_l b_k$, $f_{N-1} = g_l b_{k-1}$, $d_{N-1} = 1$, $d_{N-2} = a_{n-1}$. Поэтому выполнение (в) также следует из (3.27). Теорема П.1 доказана.

Следствие. Пусть

$$l = n - k = 3, \quad g(\lambda) = \lambda^2 + 2\xi\omega_0\lambda + \omega_0^2, \\ \omega_0 > 0, \quad \xi > 0, \quad b_0 > 0.$$

Тогда для существования у системы (3.11), (3.25), (3.26) функции Ляпунова (П.1.13) со свойством (П.1.14) достаточно выполнения неравенства

$$a_{n-1} > \frac{2\xi}{\omega_0} + \frac{b_{k-1}}{b_k}, \quad \xi > \frac{1}{2}. \quad (\text{П.1.20})$$

Доказательство теоремы 3.6. Приведем выражение для функции $\dot{V}(x, \theta)$ к виду

$$0.5 \dot{V}(x, \theta) = x^T H_0 A_* x + (\theta - \theta_*)^T y B^T H_{01} (\theta - \theta_*) + \\ + x^T H_{01} F(y) + (\theta - \theta_*)^T [H_{01}^T A_* x + H_1 F(y) + x^T H_0 B y], \quad (\text{П.1.21})$$

где $A_* = A + B\theta_*^T L^T$, и докажем сначала необходимость условий теоремы. Пусть выполнено (3.79). Второе слагаемое в правой части (П.1.21) является квадратичной формой вектора $\theta - \theta_*$, поэтому для выполнения (3.79) необходимо, чтобы матрица ее коэффициентов $yB^T H_0$, была неотрицательна при любом $y \in R^l$. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$H_{01}^T B = 0. \quad (\text{П.1.22})$$

При выполнении (П.1.22) правая часть (П.1.21) линейна по $\theta - \theta_*$. Следовательно, выражение в квадратных скобках должно быть тождественным нулем, т.е. выполняется равенство

$$F(y) = -H_1^{-1}[x^T H_0 B y + H_{01}^T A_* x]. \quad (\text{П.1.23})$$

При этом (П.1.21) принимает вид

$$0.5 \dot{V} = x^T H_0 A_* x - x^T H_{01} H_1^{-1} [x^T H_0 B L^T x + H_{01}^T A_* x].$$

Из условия $\dot{V} < 0$ следует равенство нулю кубических членов, т.е. соотношение

$$H_{01} H_1^{-1} L^T + L H_1^{-1} H_{01}^T = 0. \quad (\text{П.1.24})$$

При этом (П.1.12) принимает вид $\dot{V} = 2x^T H A_* x$, где

$$H = H_0 - H_{01} H_1^{-1} H_{01}^T, \quad (\text{П.1.25})$$

причем матрица H положительно определена в силу условия $V(x, \theta) > 0$. Учитывая, что выражение (П.1.23) должно зависеть только от измеряемых переменных, т.е. от $y \in R^l$, получим, что при некотором векторе $g \in R^l$ и $l \times l$ -матрице D должны выполняться равенства

$$H_0 B = L g, \quad H_1^{-1} H_{01}^T A_* = D L^T, \quad (\text{П.1.26})$$

и, следовательно, алгоритм адаптации имеет вид (3.81), где $\Gamma = H_1^{-1}$. С учетом (П.1.22) существуют $n \times n$ -матрица $H = H^T > 0$ и вектор $\theta_* \in R^l$, удовлетворяющие условным матричным неравенствам

$$H B = L g, \quad H A_* + A_*^T H < 0, \quad A_* = A + B \theta_*^T L^T. \quad (\text{П.1.27})$$

Применяя теорему П.2.1, убеждаемся в строгой минимально-фазовости функции $g^T W(\lambda)$. Наконец, чтобы проверить соотношения (3.82), достаточно подставить в равенства (П.1.22), (П.1.24) выражение

$$H_{01} = [A_*^{-1}]^T L D^T H_1, \quad (\text{П.1.28})$$

вытекающее из (П.1.26).

Переходя к доказательству достаточности, предположим, что алгоритм адаптации имеет вид (3.81), функция $g^T W(\lambda)$ строго минимально-фазовая и выполнено (3.82). Построим последовательно матрицы $H_1 = \Gamma^{-1}$, H_{01} из (П.1.28), H_0 – из (П.1.25) и образуем функцию (3.80). В силу (3.82) матрица H_{01} удовлетворяет соотношениям (П.1.22), (П.1.24), и, значит, выражение (П.1.21) для построенной функции (3.80) преобразуется к виду $\dot{V} = 2x^T H A_* x$. Выполнение второго условия (3.79) следует теперь из (П.1.27), а выполнение первого условия – из положительной определенности матрицы H .

Доказательство теоремы 4.2. Рассмотрим функцию $V(\theta) = \|\theta - \theta_*\|^2$ и оценим ее приращение $\Delta V_k = V(\theta_{k+1}) - V(\theta_k)$ при $\delta_k(\bar{\theta}_{k+1}) \geq \epsilon$. Пользуясь выпуклостью множества Ξ и неравенством

$$Q(\theta_k) \geq Q(\bar{\theta}_{k+1}) + \gamma_k \|\nabla Q_k(\bar{\theta}_{k+1})\|^2,$$

вытекающим из выпуклости функции $Q_k(\theta)$, получим

$$\begin{aligned} \Delta V_k &\leq V(\bar{\theta}_{k+1}) - V(\theta_k) = [-\gamma_k \nabla Q_k(\bar{\theta}_{k+1})]^T [\bar{\theta}_{k+1} + \theta_k - 2\theta_*] = \\ &= -\gamma_k \nabla Q_k(\bar{\theta}_{k+1})^T [2(\bar{\theta}_{k+1} - \theta_*) + \gamma_k \nabla Q_k(\bar{\theta}_{k+1})] \leq \\ &\leq 2\gamma_k Q_k(\theta_*) - 2\gamma_k Q_k(\bar{\theta}_{k+1}) - \gamma_k^2 \|\nabla Q_k(\bar{\theta}_{k+1})\|^2 \leq \gamma(2\epsilon_* - 2\epsilon) < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство $\delta_k(\bar{\theta}_{k+1}) \geq \epsilon$ может выполняться лишь конечное число раз, т.е. при $k > k_*$ будет выполнено $\delta_k(\bar{\theta}_{k+1}) < \epsilon$. При $k > k_*$ также имеем

$$Q_k(\theta_k) \leq Q_k(\bar{\theta}_{k+1}) + \gamma_k \|\nabla Q_k(\bar{\theta}_{k+1})\|^2 + \frac{1}{2} \gamma_k^2 q \|\nabla Q_k(\bar{\theta}_{k+1})\|^2 \leq$$

$$\leq 2Q_k(\bar{\theta}_{k+1}) + \left(1 + \frac{q}{2}\right) \gamma_k + \gamma_k \|\nabla Q_k(\bar{\theta}_{k+1})\|^2 \left(1 + \frac{q}{2}\right) \gamma_k \leq 2\epsilon + q\gamma_k,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 4.4. Производя сложение в (4.41), получим

$$I_k(\theta) = \theta^T G_k(\theta) - 2g_k^T \theta + \rho_k,$$

где

$$G_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k F_i F_i^T, \quad g_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k F_i y_i, \quad \rho_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|y_i\|^2. \quad (\text{П.1.29})$$

Очевидно, равенства (П.1.29) эквивалентны рекуррентным соотношениям (4.44). Учитывая, что $\nabla I_k(\theta) = 2G_k\theta - 2g_k$, убеждаемся в справедливости соотношений

$$\mu_k = I_k(\theta_k), \quad 2z_k = \nabla I_k(\theta_k).$$

Воспользуемся теперь теоремой 4.1. Для этого установим, что ее условия выполнены при $k > k_*$, если при $k > k_*$ выполнены неравенства (4.45).

Действительно, возьмем в качестве целевой функцию $Q_k(\theta) = \sqrt{I_k(\theta)}$, а величины θ_* , ϵ_* возьмем из (4.45). Условие (4.14б) выполнено в силу выпуклости $I_k(\theta)$, а условие ограниченности $\|\nabla Q_k(\theta)\|$ вытекает из ограниченностии величины $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \|F_i\|^2$. Из теоремы 4.1 непосредственно следуем доказываемое утверждение, причем в оценку числа исправлений вместо θ_0 подставляется θ_{k_*} .

Доказательство теоремы 4.5 не приводится, поскольку она является следствием из теоремы 4.7, доказательство которой см. ниже.

Доказательство теоремы 4.6. Из теоремы 4.1 и из условий 1, 2 следует, что алгоритм адаптации (4.59) является конечно-сходящимся, т.е. существует $k_* > 0$ такое, что при $k > k_*$ выполняется условие (4.57). Покажем, что если $k > k_*$, то при каждом шаге (4.52), при

$|z_k| > \kappa$ величина $V(u) = f(u, r, \xi_*)$ убывает. Пользуясь формулой Тейлора и учитывая, что

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k e_{j_k}, \quad \alpha_k = \alpha z_k,$$

приращения

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \quad \Delta f_k = f(u_{k+1}, r, \theta_k) - f(u_k, r, \theta_k)$$

можно представить в виде

$$\Delta y_k = \alpha_k \frac{\partial V(u_k)}{\partial u^{(j_k)}} + \frac{\alpha_k^2}{2} \frac{\partial^2 V(u'_k)}{\partial [u^{(j_k)}]^2} + \varphi_{k+1} - \varphi_k, \quad (\text{П.1.30})$$

$$\Delta f_k = \alpha_k \frac{\partial f(u_k, r, \theta_k)}{\partial u^{(j_k)}} + \frac{\alpha_k^2}{2} \frac{\partial^2 f(u''_k, r, \theta_k)}{\partial [u^{(j_k)}]^2}, \quad (\text{П.1.31})$$

где u'_k, u''_k – некоторые точки из отрезка $[u_k, u_{k+1}]$. Вычитая (П.1.31) из (П.1.30), с учетом условия 3 получим

$$\alpha_k \frac{\partial V(u_k)}{\partial u^{(j_k)}} - \alpha_k z_k \leq | \Delta y_k - \Delta f_k | + \frac{\rho'' \alpha^2 z_k^2}{2} + 2\Delta_\varphi.$$

Воспользуемся ЦУ (4.57) и условием (4.58):

$$(u_{k+1} - u_k)^T \nabla V(u_k) \leq - \left(\alpha - \frac{\rho'' \alpha^2}{2} \right) z_k^2 + 2\Delta. \quad (\text{П.1.32})$$

Наконец, оценим приращение $\Delta V_k = V(u_{k+1}) - V(u_k)$:

$$\Delta V_k \leq (u_{k+1} - u_k)^T \nabla V(u_k) + \frac{\rho'' \alpha^2 z_k^2}{2} \leq -\alpha(1 - \rho'' \alpha^2) z_k^2 + 2\Delta.$$

Выбирая $\alpha = (2\rho'')^{-1}$ и учитывая, что по условию $\kappa^2 > 8\rho'' \Delta$, получим, что $\Delta V_k \leq -\delta < 0$ при $|z_k| > \kappa$. Это значит, что существует $k_1 > 0$ такое, что $|z_k| \leq \kappa$ при $k > k_1$ и, следовательно, при $k > k_1$ должны производиться пробные шаги (4.54). Аналогично (П.1.30)–(П.1.32) при u_{k+l} вида (4.54), $1 \leq l \leq 2m$, получаем, что

$$\left| \frac{\partial V(u_k)}{\partial u^{(j_l)}} \right| \leq \Delta_1(\beta),$$

где $\Delta_1(\beta) = \kappa + \rho'' \beta / 2 + 2\Delta / \beta$. Выбирая $\beta_* = 2\sqrt{\Delta / \rho''}$, минимизирующее $\Delta_1(\beta)$, получим $\Delta_1(\beta_*) = \kappa + 2\sqrt{\rho'' \Delta}$, откуда

$$\|\nabla V(u_k)\|^2 \leq m \Delta_1^2 = m(\kappa + 2\sqrt{\rho'' \Delta})^2.$$

Воспользовавшись неравенством [141]

$$\|\nabla V(u_k)\|^2 \geq 2\rho' [V(u_k) - V(u_*)], \quad (\text{П.1.33})$$

справедливым для сильно выпуклых функций, получим

$$V(u_k) \leq V_* + \frac{m(\kappa + 2\sqrt{\rho'' \Delta})^2}{2\rho'} \quad (V_* = V(u_*) = \min_u V(u)).$$

Таким образом, ЦУ (4.7) выполняется при $\Delta_P = m(\kappa + 2\sqrt{\rho'' \Delta})^2 / (2\rho')$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 4.7. Из условия 1 теоремы и из теоремы 4.1 следует конечная сходимость алгоритма адаптации. Это значит, что существует число $k_* > 0$ такое, что

$$\|\Phi(y_k, u_k, r_k, \xi)\| \leq \epsilon, \quad k > k_*$$

Учитывая (4.74) и пользуясь условием A при $y = y_k$, $y' = y_{k_*}$, придем к утверждению теоремы.

Доказательство теоремы 4.9. Из доказательства теоремы 4.8 [122, с. 81] при $\epsilon_k \equiv \epsilon$, $\gamma_k \equiv \gamma$ вытекает рекуррентное соотношение

$$Mw_{k+1} \leq (1 - \delta'\gamma) Mw_k + \frac{\bar{\psi}\gamma^2}{\epsilon} + \frac{\psi_*\gamma^2(Mw_k)^{1/2}}{\epsilon(1 - m\epsilon)} + \frac{\psi_*\gamma^2}{1 - m\epsilon},$$

где

$$w_k = \|p_k - p_\epsilon\|^2, \quad \psi_* = q_{j_*}^2 + \sigma_{j_*}^2, \quad \bar{\psi} = \psi - \psi_*.$$

Очевидно, $\bar{\psi} \geq (m - 1)\psi_*$. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, легко выводимое из результата [122, с. 256].

Лемма П.1.6. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\{\rho_k\}_0^\infty$ удовлетворяет неравенствам

$$\rho_{k+1} \leq (1 - \nu)\rho_k + \delta\sqrt{\rho_k} + \beta, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (\text{П.1.35})$$

где β, δ, ν – положительные числа. Тогда

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \rho_k \leq \rho_*, \quad \rho_k - \rho_* \leq \left(1 - \nu + \frac{\delta}{2\sqrt{\rho_*}}\right)^k (\rho_0 - \rho_*), \quad (\text{П.1.36})$$

где

$$\rho_* = \frac{(\delta + \sqrt{\delta^2 + 4\nu\beta})^2}{4\nu^2}.$$

Воспользовавшись леммой П.1.6 при

$$\rho_k = Mw_k, \quad \nu = \delta'\gamma, \quad \delta = \frac{\psi_*\gamma^2}{\epsilon(1 - m\epsilon)}, \quad \beta = \frac{\bar{\psi}\gamma^2}{\epsilon} + \frac{\psi_*\gamma^2}{1 - m\epsilon},$$

получим

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} Mw_k \leq \rho_*, \quad \rho_* = \left(\frac{\psi_*\gamma}{2\delta'\epsilon}\right)^2 [1 + O(1)], \quad (\text{П.1.37})$$

а величина $O(1) \rightarrow 0$ при $\epsilon + \gamma/\epsilon \rightarrow 0$. Далее,

$$\nu - \frac{\delta}{2\sqrt{\rho_*}} = \nu + O(1),$$

откуда следует, что

$$Mw_k \leq (1 - \delta'\gamma)^k w_0 + \left(\frac{\psi_*\gamma}{2\delta'\epsilon}\right)^2 (1 + O(1)). \quad (\text{П.1.38})$$

Сопоставляя (П.1.38) с неравенством

$$MQ(p_k) - q_* \leq (\mathbf{M} \|p_k - p_\epsilon\| + \|p_\epsilon - p_*\|) \delta'' \sqrt{m},$$

вытекающим из (4.84), и пользуясь неравенствами

$$\|p_\epsilon - p_*\| \leq m\epsilon, \quad \mathbf{M} \|p_k - p_\epsilon\| \leq \sqrt{\mathbf{M} w_k},$$

получаем

$$MQ(p_k) - q_* \leq (\sqrt{\mathbf{M} w_k} + m\epsilon) \delta'' \sqrt{m}. \quad (\text{П.1.39})$$

Наконец, подставляя (П.1.38) в (П.1.39) и учитывая неравенства $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $\sqrt{1-z} \leq 1 - z/2$ для $x = p_k - p_*$, $y = p_*$, $z = \delta' \gamma$, устанавливаем справедливость (4.85). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5.1. Основой доказательства является вспомогательное утверждение, имеющее самостоятельный интерес.

Лемма П.1.7. Рассмотрим систему

$$\dot{z}_1 = F_1(z, y), \quad \dot{z}_2 = F_2(z, y), \quad \epsilon \dot{y} = F_3(z, y), \quad (\text{П.1.40})$$

где $z = \text{col}(z_1, z_2)$, $z_1 \in R^{n_1}$, $z_2 \in R^{n_2}$, $y \in R^{n_3}$, функции $F_i(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Пусть выполнены условия:

1. Для любого $z \in R^{n_1+n_2}$ существует единственный корень $\bar{y} = \eta(z)$ уравнения $F_3(z, \bar{y}) = 0$, причем функция $\eta(z)$ дважды непрерывно дифференцируема и $\partial_1 \eta(z)$ при $z_1 = 0$, где

$$\partial_1 \eta(z) = \left[\frac{\partial \eta}{\partial z}(z) \right]^T F(z)$$

— производная в силу редуцированной системы

$$\dot{z} = F(z), \quad F(z) = \text{col}\{F_1(z, \eta(z)), F_2(z)\}.$$

2. Существуют непрерывно дифференцируемая функция $V_1(z)$ и числа $\alpha > 0$, $\alpha_1 > 0$ такие, что $V_1(z) \rightarrow \infty$ при

$$\|z\| \rightarrow \infty, \quad \|\nabla_{z_1} V_1(z)\| \leq \alpha_1 \|z\|, \quad \partial_1 V_1(z) \leq -\alpha \|z_1\|^2.$$

3. Существуют непрерывно дифференцируемая функция $V_2(y)$ и числа $\beta > 0$, $\beta_1 > 0$ такие, что: $V_2(y) \rightarrow \infty$ при

$$\|y\| \rightarrow \infty, \quad \|\nabla V_2(y)\| \leq \beta_1 \|y\|, \quad \partial_2 V_2(\tilde{y}) \leq -\beta \|\tilde{y}\|^2,$$

где

$$\tilde{y} = y - \eta(z), \quad \partial_2 V_2(\tilde{y}) = [\nabla V_2(\tilde{y})]^T F_3(z, \tilde{y} + \eta(z))$$

— производная в силу присоединенной системы $dy/dt = F_3(z, y)$.

Тогда для любых $R > 0$, $\rho > 0$ существует $\epsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \epsilon < \epsilon_0$, $(z_0, y_0) \in D(R, \rho)$ выполнены соотношения

$$(z(t), y(t)) \in D(R, \rho), \quad z_1(t) \rightarrow 0, \quad y(t) \rightarrow \eta(z(t)) \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

где

$$D(R, \rho) = \{(z, y): V_1(z) + \rho V_2(y - \eta(z)) \leq R\},$$

$(z(t), y(t))$ – решение системы (П.1.40) с начальными условиями $z(0) = z_0$, $y(0) = y_0$.

Кроме того, если величина

$$L_1 = L_1(R) = \sup_{D(R, 0)} \left\| \frac{\partial F_1(z, y)}{\partial y} \right\|$$

конечна, то при $\rho = \alpha_1 L_1 / (\beta_1 L_2)$ в качестве ϵ_0 можно взять

$$\epsilon_0 = \alpha \beta / [\beta_1 L_1 (\alpha_1 L_2 + \alpha L_3)]^{-1}, \quad (\text{П.1.41})$$

где

$$L_2 = L_2(R) = \sup_{V_1(z) \leq R} \left\| \frac{\partial(\partial_1 \eta(z))}{\partial z_1} \right\|,$$

$$L_3 = L_3(R) = \sup_{V_1(z) \leq R} \left\| \frac{\partial \eta(z)}{\partial z_1} \right\|.$$

З а м е ч а н и е. При $n_2 = 0$, т.е. при $z = z_1$, лемма будет близка к теореме Н.Н. Красовского [86, 97].

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Зафиксируем $R > 0$, $\rho > 0$ и оценим при $(z, y) \in D(R, \rho)$ функцию $\partial V_\rho(z, y)$, где $V_\rho(z, y) = V_1(z) + \rho V_2(\tilde{y})$, $\partial(\cdot)$ – дифференцирование в силу исходной системы (П.1.40). Оценивая сначала ∂V_1 , получим

$$\partial V_1(z, y) = \partial_1 V_1(z) + \left[\frac{\partial}{\partial z_1} V_1(z) \right]^\tau [F(z, y) - F_1(z, \eta(z))], \quad (\text{П.1.42})$$

$$\partial V_1(z, y) \leq -\alpha \|z_1\|^2 + \alpha_1 L_1(R, \rho) \|z_1\| \cdot \|\tilde{y}\|, \quad (\text{П.1.43})$$

где

$$L_1(R, \rho) = \sup \left\| \frac{\partial F_1(z, y)}{\partial y} \right\| \leq L_1.$$

Для ∂V_2 имеем

$$\partial V_2(z, y) = \nabla V_2(\tilde{y})^\tau [\partial y - \partial \eta(z, y)] = \epsilon^{-1} \partial_2 V_2(z, y) - [\nabla V_2(\tilde{y})]^\tau \partial \eta(z, y).$$

Заметим, что соотношение (П.1.42) останется верным, если вместо $V_1(z)$ поставить произвольную гладкую вектор-функцию от z , например $\eta(z)$. Учитывая, что $\partial_1 \eta(0, z_2) = 0$, получим

$$\begin{aligned} \partial V_2(z, y) &\leq -\epsilon^{-1} \beta \|\tilde{y}\|^2 + (\nabla V_2(\tilde{y}))^\tau \partial_1 \eta(z) + \\ &+ \|\nabla V_2(\tilde{y})\| \cdot \left\| \frac{\partial \eta(z)}{\partial z_1} \right\| \cdot L_1(R, \rho) \|\tilde{y}\|, \end{aligned} \quad (\text{П.1.44})$$

$$\begin{aligned} \partial V_2(z, y) &\leq -[\epsilon^{-1} \beta - \beta_1 L_3(R) \cdot L_1(R, \rho)] \|\tilde{y}\|^2 + \\ &+ \beta_1 \|\tilde{y}\| \cdot L_2(R) \|z_1\|. \end{aligned}$$

Умножая (П.1.44) на ρ и складывая с (П.1.43), имеем

$$\begin{aligned} \partial V_\rho(z, y) &\leq -\alpha \|z_1\|^2 + [\alpha_1 L_1(R, \rho) + \rho \beta_1 L_2] \|z_1\| \cdot \|\tilde{y}\| - \\ &- \rho [\epsilon^{-1} \beta - \beta_1 L_1(R, \rho) L_3] \|\tilde{y}\|^2. \end{aligned} \quad (\text{П.1.45})$$

В правой части (П.1.45) стоит квадратичная форма переменных $\|z_1\|$, $\|\tilde{y}\|$, которая будет отрицательно определенной при

$$4\rho\alpha[\epsilon^{-1}\beta - \beta_1 L_1(R, \rho)L_3] > (\alpha_1 L_1(R, \rho) + \rho\beta_1 L_2)^2,$$

т.е. при $0 < \epsilon < \epsilon_0$, где

$$\epsilon_0 = \frac{4\rho\alpha\beta_0}{(\alpha_1 L_1(R, \rho) + \rho\beta_1 L_2)^2 + 4\rho\alpha\beta_1 L_1(R, \rho)L_3}. \quad (\text{П.1.46})$$

Если $0 < \epsilon < \epsilon_0$, то $\partial V_\rho(z, y) \leq 0$ при $V_\rho(z, y) \leq R$, и, следовательно, из $(z(0), y(0)) \in D(R, \rho)$ следует, что $(z(t), y(t)) \in D(R, \rho)$ для всех $t \geq 0$. Из (П.1.46) следует также, что

$$\partial V_\rho(z, y) \leq -\delta(\|z_1\|^2 + \|\tilde{y}\|^2)$$

для некоторого $\delta > 0$, откуда стандартными рассуждениями доказывается, что $z_1(t) \rightarrow 0$, $\tilde{y}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Заметим теперь, что если

$$\varphi(\rho) = \rho[(a_1 + a_2\rho)^2 + \rho a_3]^{-1}, \quad a_i > 0, \quad \rho \geq 0,$$

то $\varphi(\rho) \leq \varphi(a_1/a_2) = [4a_1a_2 + a_3]^{-1}$. Поэтому если $L_1 < \infty$, то, подставляя в (П.1.46) $\rho = \alpha_1 L_1 / (\beta_1 L_2)$, получаем (П.1.41). Лемма доказана.

Для доказательства теоремы положим $z_1 = x_1 - x_1^*$, $z_2 = \theta$, $y_2 = x_2$, а функцию $V_1(z)$ возьмем в виде (5.30). Тогда все условия леммы будут выполнены (в проверке нуждается лишь неравенство $\partial V_1(z) \leq -\alpha \|z_1\|^2$, справедливость которого при $\alpha = 0,5\alpha_0\alpha_1$ следует из соотношений

$$\begin{aligned} \partial_1 V_1(x_1, \theta) &\leq \partial_1 V_1(x_1, \theta_*) = \theta(x_1, \theta_*) \leq \\ &\leq -\alpha_0 \bar{Q}(x_1) \leq -0,5\alpha_0\alpha_1 \|x_1 - x_1^*\|^2. \end{aligned}$$

Первое утверждение теоремы следует из леммы П.1.7 и того, что для любого ограниченного множества D и любого $\rho > 0$ найдется $R > 0$ такое, что $D \subset D(R, \rho)$. Второе утверждение также следует из леммы, поскольку (П.1.41) совпадает с (5.31) с точностью до обозначений.

Доказательство теоремы 5.2. Определим κ_0 из (5.38) при $\Delta = \Delta_1$ и зафиксируем некоторое $\kappa > \kappa_0$. Выберем $R > 0$ так, чтобы множество D_R содержало заданное множество начальных условий D , и определим последовательно величины $R_1, R_2, L_1(R_2), L_2(R_2, \kappa), L_3(R_2, \kappa), L_1(\Delta_1), L_2(\Delta_1), \epsilon_1, \dots, \epsilon_5, \epsilon_0$ из (5.39). Очевидно, справедливо двойное включение $D_R \subset \Omega_{R_1}(t) \subset D_{R_2}$, где $\Omega_{R_1}(t) = \{(x_1, x_2, \theta) : V_1(x_1, \theta, t) + V_2(\tilde{x}_2) \leq R_1^{R_1}\}$, а $V_1(\cdot)$ имеет вид (5.36).

Оценим на множестве $\Omega_{R_1}(t)$ функции $\partial V_1(\cdot)$, $\partial V_2(\cdot)$, где $\partial(\cdot)$ – дифференцирование в силу исходной системы (5.33), (5.35). Опуская для краткости аргументы функций там, где это не вызывает недоразумений, и действуя так же, как и при доказательстве теоремы 2.13, получим

$$\begin{aligned} \partial V_1 &= \partial_1 V_1 + [\nabla \bar{Q}]^T [F_1(x_1, x_2, \theta, t) - \bar{F}(x_1, \theta, t)] \leq \\ &\leq -\bar{\alpha} V_1 + \bar{\beta} + \alpha_1 \bar{Q}^\sigma M_1(t) \|\tilde{x}_2\| \leq -\bar{\alpha}(V_1 - \bar{v}) + l_1(t) \sqrt{V_2(\tilde{x}_2)}, \quad (\text{П.1.47}) \end{aligned}$$

где $\bar{\alpha} = \alpha_0(1 - \sigma)$, $\bar{v} = (\Delta + \Delta_*)/2 = \bar{\beta}/\bar{\alpha}$, $M_1(t)$ – константа Липшица по x_2 функции $F_1(\cdot)$ на множестве $\Omega_{R_1}(t)$, $l_1(t) = \alpha_1 R_1^\sigma M_1(t)/\sqrt{\bar{\beta}_2}$, $\partial_1(\cdot)$ –

производная в силу (5.34), (5.35). Аналогично для $V_2(\cdot)$ имеем

$$\begin{aligned} \partial V_2 = [\nabla V_2(\tilde{x}_2)]^T \partial \tilde{x}_2 &\leq -\frac{\beta_0}{\epsilon} \|\tilde{x}_2\|^2 + \|\nabla V_2(\bar{x}_2)\| \|\partial \eta(x_1, \theta, t)\| \leq \\ &\leq -\frac{\beta_0}{\epsilon} \|\tilde{x}_2\|^2 + \left(\|\partial_1 \eta\| + \left\| \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right\| \cdot M_1(t) \|\tilde{x}_2\| \right) \leq \\ &\leq -\left[\frac{\beta_0}{\epsilon} - \beta_2 M_3(t) M_1(t) \right] \|\bar{x}_2\|^2 + \beta_2 M_2(t) \|\tilde{x}_2\| \leq \\ &\leq \left[\frac{\beta_0}{\epsilon \beta_2} - l_3(t) \right] V_2 + l_2(t) \sqrt{V_2}, \end{aligned}$$

где $M_2(t), M_3(t)$ – верхние границы функции $\|\partial_1 \eta\|, \|\partial \eta / \partial x_2\|$ соответственно на множестве $\Omega_{R_1}(t)$,

$$l_2(t) = \beta_2 \sqrt{2} M_2(t) / \sqrt{\beta_1}, \quad l_3(t) = M_1(t) M_3(t).$$

Полученные дифференциальные неравенства и принцип сравнения [113] позволяют завершить доказательство ссылкой на следующую лемму.

Лемма П.1.8. Пусть $v_i(t) \geq 0, t \geq 0, i = 1, 2$ – кусочно-гладкие функции, производные которых в точках непрерывности удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) &\leq -\alpha(v_1 - \bar{v}) + l_1(t) \sqrt{v_2}, \\ \dot{v}_2(t) &\leq -\left[\frac{\beta}{\epsilon} - l_3(t) \right] v_2 + l_2(t) \sqrt{v_2}, \end{aligned} \tag{П.1.49}$$

где $\alpha, \beta, \epsilon, \bar{v}$ – положительные числа, а функции $l_i(t) \geq 0$ таковы, что для каждого $R > 0$ существует $\bar{l}_i(R)$, при котором из $v_1(t) + v_2(t) \leq R$ следует, что $l_i(t) \leq \bar{l}_i(R), i = 1, 2, 3$.

Тогда:

1. Для любых $\delta_i > 0, v_i(0), i = 1, 2$, существует $\epsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \epsilon < \epsilon_0$ функции $v_i(t)$ ограничены и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_1(t) \leq \bar{v} + \delta_1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v_2(t) \leq \delta_2. \tag{П.1.50}$$

2. Если $v_1(0) + v_2(0) \leq R$, причем $R > \bar{v}$, то при $0 < \epsilon < \epsilon_0$, где

$$\epsilon_0 = \frac{\beta}{\max \left\{ 4\alpha_1, 2\bar{l}_3(R), \alpha + \bar{l}_3(R) + \frac{[\bar{l}_1(R) + \bar{l}_2(R)]^2}{4\alpha(R - \bar{v})} \right\}}, \tag{П.1.51}$$

справедливы соотношения

$$v_1(t) \leq \bar{v} + \frac{2\bar{l}_1(R)L_2(R)}{\alpha\beta} \epsilon + \left[R - \bar{v} + \frac{4L_1(R)\sqrt{R}}{\beta - 4\alpha\epsilon} \right] e^{-\alpha t}, \tag{П.1.52}$$

$$\sqrt{v_2(t)} \leq \frac{2\bar{l}_2(R)}{\beta} \epsilon + \sqrt{R} e^{-\beta t/(4\epsilon)}, \tag{П.1.53}$$

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} v_1(t) &\leq \bar{v} + \frac{2\bar{L}_1(\bar{v})\bar{L}_2(\bar{v})\epsilon}{\alpha\beta}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v_2(t) &\leq \frac{4\bar{L}_2^2(\bar{v})}{\beta^2}\epsilon^2. \end{aligned} \quad (\text{П.1.54})$$

Доказательство теоремы 5.3. Аналогично доказательству леммы П.1.7 оценим при $(x_1, x_2, \theta) \in D(R, \rho)$ и при $\bar{Q}(x_1, t) \geq \Delta$ функцию $\partial V_\rho(x_1, x_2, \theta, t)$, где

$$V_\rho(\cdot) = V_1(x_1, \theta, t) + \rho V_2(x_2),$$

$D(R, \rho) = \{(x_1, x_2, \theta) : V_\rho(x_1, x_2, \theta, t) \leq R \text{ для некоторого } t \geq 0\}$, $\partial(\cdot)$ – дифференцирование в силу исходной системы (5.33), (5.36). Оценивая ∂V_1 и ∂V_2 , получим

$$\begin{aligned} \partial V_1 &\leq -\alpha_0 \bar{Q} + \alpha_1 L_1(R, \rho) \sqrt{\bar{Q}} \|\tilde{x}_2\| + \alpha_1 \sqrt{\bar{Q}} \Delta_\varphi \leq \\ &\leq -0,5\alpha_0 \bar{Q} + \bar{\beta} + \alpha_1 L_1(R, \rho) \sqrt{\bar{Q}} \sqrt{2V_2/\beta_1}, \\ \partial V_2 &\leq -\left[\frac{\beta_0}{\epsilon\beta_1} - L_3(R)L_1(R, \rho)\right] V_2 + \sqrt{\beta_1 V_2} \frac{L_2(R) \sqrt{\bar{Q}}}{\alpha_2}, \end{aligned}$$

где $\bar{\beta} = \alpha_1^2 \Delta_\varphi^2 / (\alpha_0 \cdot 2) = \Delta_* \alpha_0 / 2$, величины $L_i(0)$ определены так же, как в лемме П.1.7. Для ∂V_ρ получим

$$\partial V_\rho \leq -0,5\alpha_0 \bar{Q} - a_1 \rho V_2 + \sqrt{V_2 \bar{Q}} (a_2 + a_3 \rho) + \bar{\beta},$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\beta_0}{\epsilon\beta_1} - L_3(R)L_1(R, \rho), \quad a_2 = \alpha_1 L_1(R, \rho) \sqrt{2/\beta_1}, \\ a_3 &= \frac{L_2(R) \sqrt{\beta_1}}{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Положим $\Delta_1 = (\Delta + \Delta_*)/2$, $\tilde{\beta} = \bar{\beta}/\Delta_1$. Тогда $\tilde{\beta} < \alpha_0/2$, и при $\bar{Q} > \Delta_1$ получим

$$\partial V_\rho \leq -(0,5\alpha_0 - \tilde{\beta}) \bar{Q} + (a_2 + a_3 \rho) \sqrt{\bar{Q}} \sqrt{V_2} - a_1 \rho V_2.$$

Правая часть полученного неравенства является квадратичной формой переменных $\sqrt{\bar{Q}}, \sqrt{V_2}$, которая будет отрицательно определена при

$$2a_1 \rho (\alpha_0 - 2\tilde{\beta}) > (a_2 + a_3 \rho)^2. \quad (\text{П.1.55})$$

Таким образом, при выполнении (П.1.55) траектории, выходящие из множества $D(R, \rho)$, останутся в нем при всех $t \geq 0$, а при $\bar{Q}(x, t) \geq \Delta_1$ будут удовлетворять условию $\partial V_\rho < 0$. Отсюда, как и при доказательстве теоремы 2.4.5 в работе [178], получаем, что время нахождения траектории в множестве $\bar{Q} \geq \Delta_1$ конечно. Неравенство (П.1.55) выполняется при достаточно малом $\epsilon > 0$.

Аналогично доказывается, что при малом $\epsilon > 0$ время нахождения в множестве $V_2 \geq \Delta_2$ также конечно. Для доказательства теоремы осталось заметить, что $D_R \subset D(R_1, \rho)$ при достаточно большом R_1 . Оценки допустимой величины малости ϵ_0 получаются из (П.1.55); при этом, как и в лемме П.1.7, величину ρ можно выбирать из условия максимизации оценки ϵ_0 .

ТЕОРЕМА О РЕШЕНИИ УСЛОВНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Ниже приводится формулировка и доказательство теоремы о существовании решений условных матричных неравенств, являющейся основным инструментом при доказательстве результатов главы 3.

Рассмотрим следующую задачу. Даны комплексные матрицы A, B, D, G, R порядков $n \times n, n \times m, n \times l, l \times m, n \times n$, соответственно ($m \leq n, l \leq n$), причем*) $R = R^* \geq 0$. Требуется найти условия существования эрмитовой $n \times n$ -матрицы $H = H^* > 0$ и комплексной $l \times m$ -матрицы C таких, что

$$HA(C) + A(C)^*H + R < 0, \quad (\text{П.2.1})$$

$$HB = DG \quad (\text{П.2.2})$$

при

$$A(C) = A + BC^*D^*. \quad (\text{П.2.3})$$

Случай, когда все матрицы A, B, D, G, R вещественны, будем называть вещественным случаем.

Введем обозначения

$$\delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A), \quad \chi(\lambda) = D^*(\lambda I_n - A)^{-1}B,$$

$$\delta(\lambda, C) = \det[\lambda I_n - A(C)], \quad \chi(\lambda, C) = D^*[\lambda I_n - A(C)]^{-1}B,$$

$$\varphi(\lambda) = \delta(\lambda) \det G^* \chi(\lambda), \quad \Gamma = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda G^* \chi(\lambda).$$

Можно показать (см. ниже лемму П.2.1), что $\varphi(\lambda)$ – многочлен степени $n-m$, инвариантный относительно замены $\delta(\lambda)$ и $\chi(\lambda)$ на $\delta(\lambda, C)$ и $\chi(\lambda, C)$. Очевидно, $\Gamma = G^* D^* B$, поэтому $m \times m$ -матрица Γ также инвариантна относительно этой замены. Легко также проверяются следующие тождества:

$$\delta(\lambda, C) = \delta(\lambda) \det [I_m - C^* \chi(\lambda)], \quad (\text{П.2.4})$$

$$\chi(\lambda, C) = \chi(\lambda) [I_m - C^* \chi(\lambda)]^{-1}. \quad (\text{П.2.5})$$

Для формулировки дальнейших результатов удобно ввести следующее определение (см. также определение п. 3.3.4).

) В приложении 2 “звездочка” – знак эрмитова сопряжения матриц: A^ – это транспонированная матрица с комплексно-сопряженными элементами. Если A вещественна, то $A^* = A^T$.

Определение. Пусть $W(\lambda)$ — $m \times m$ -матрица правильных рациональных функций, $\delta(\lambda)$ — наименьшее общее кратное знаменателей элементов $W(\lambda)$. Пусть

$$\varphi(\lambda) = \delta(\lambda) \det W(\lambda), \quad \Gamma = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda W(\lambda).$$

Матрица $W(\lambda)$ называется *минимально-фазовой*, если $\varphi(\lambda)$ — гурвицев многочлен. Матрица $W(\lambda)$ называется *строго минимально-фазовой*, если она минимально-фазовая, а матрица Γ — эрмитова и положительно определенная.

Замечание 1. Приведенное определение согласуется с известным в теории автоматического управления понятием минимально-фазового объекта [135]. Пусть, например, $m = 1$ и $W(\lambda) = B(\lambda)/A(\lambda)$, где $B(\lambda)$, $A(\lambda)$ — многочлены степени, соответственно, k , n , причем $k < n$. Функция $W(\lambda)$ будет минимально-фазовой, если $B(\lambda)$ — гурвицев многочлен. Строгая минимально-фазовость $W(\lambda)$ означает, что $B(\lambda)$ — гурвицев многочлен степени $n - k$ с положительными коэффициентами.

Замечание 2. Из доказываемой ниже леммы П.2.1 и теоремы о реализации [79, с. 318] следует, что введенная в определении функция $\varphi(\lambda)$ является многочленом степени не выше $n - m$ со старшим членом $\lambda^{n-m} \det \Gamma$.

Теперь можно сформулировать теорему, дающую решение поставленной задачи.

Теорема П.2.1. Для существования матриц $H = H^* > 0$ и C , удовлетворяющих (П.2.1)–(П.2.3) и вещественных в вещественном случае, достаточно, а если ранг B равен m , то и необходимо, чтобы матрица $G^* \chi(\lambda)$ была строго минимально-фазовой.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы П.2.1, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма П.2.1. Пусть

$$\alpha(\lambda) = (\lambda I_n - A)^{-1} \delta(\lambda).$$

Пусть p , q — произвольные $n \times m$ -матрицы и $\Sigma(\lambda) = p^* \alpha(\lambda) q$. Тогда $\det \Sigma(\lambda) = \delta^{m-1}(\lambda) \sigma(\lambda)$, где $\sigma(\lambda)$ — многочлен степени не выше $n - m$ со старшим членом $\lambda^{n-m} \det p^* q$. Кроме того, $\sigma(\lambda)$ не изменяется при замене A на $A + qr^*$, где r — произвольная $n \times m$ -матрица.

Доказательство. Можно показать, что $\sigma(\lambda) = \det \Phi(\lambda)$, где

$$\Phi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - A q p^* & -q \\ p^* & 0 \end{vmatrix}.$$

Пусть $\sigma(\lambda) = \sigma_n \lambda^n + \dots + \sigma_1 \lambda + \sigma_0$. Тогда σ_{n-k} равняется сумме тех главных миноров порядка $m+k$ матрицы $\Phi(0)$, в разложение которых входит ровно k элементов левого верхнего блока. Отсюда следует, что $\sigma_{n-k} = 0$ при $k < m$.

Далее,

$$\begin{aligned}\sigma_{n-m} &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\lambda)}{\lambda^{n-m}} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \det \begin{vmatrix} I_n - \lambda^{-1}(A - qp^*) & -q \\ p^* & 0 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} I_n & -q \\ p^* & 0 \end{vmatrix} = \det p^* q.\end{aligned}$$

Второе утверждение леммы следует, из того, что замена $A \rightarrow A + qr^*$ равносильна прибавлению к первым n столбцам матрицы $\Phi(\lambda)$ последних m столбцов, умноженных на соответствующие элементы матрицы r . Очевидно, многочлен $\det \Phi(\lambda)$ при этом не меняется.

Следствие. *Многочлен*

$$\varphi(\lambda) = \delta(\lambda) G^* \chi(\lambda) = G^* D^* [(\lambda I_n - A)^{-1} \delta(\lambda)] B,$$

определенный выше, имеет старший член $\lambda^{n-m} \det G^* D^* B$ и не изменяется при преобразовании обратной связи $A \rightarrow A(C) = A + BC^* D^*$.

Лемма П.2.2. Любой минор k -го порядка матрицы $\Sigma(\lambda)$, введенной в лемме П.2.1, делится на $\delta(\lambda)^{k-1}$, причем частное – многочлен степени не выше $n-k$ с коэффициентом при λ^{n-k} , равным соответствующему минору матрицы $p^* q$.

Доказательство. Матрица $\Sigma'(\lambda)$ указанного минора имеет вид $\Sigma'(\lambda) = e_1^* \Sigma(\lambda) e_2$, где e_1, e_2 – постоянные матрицы порядка $m \times k$. Поэтому $\Sigma'(\lambda) = a_1^* \alpha(\lambda) a_2$, где a_1, a_2 – матрицы порядка $n \times k$. Применяя лемму П.2.1 к матрице $\Sigma'(\lambda)$, получаем требуемое утверждение.

Лемма П.2.3. Пусть многочлен $P_\epsilon(\lambda)$ имеет вид

$$P_\epsilon(\lambda) = \lambda^{n-m} Q_\epsilon(\lambda) + R_\epsilon(\lambda),$$

где

$$Q_\epsilon(\lambda) = \sum_{k=0}^m (q_k + q'_k(\epsilon)) \epsilon^k \lambda^k, \quad R_\epsilon(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-m-1} (r_k + r'_k(\epsilon)) \lambda^k,$$

причем $q'_k(\epsilon) = O(\epsilon)$, $r'_k(\epsilon) = O(\epsilon)$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Пусть, кроме того, многочлены

$$Q(\lambda) = \sum_{k=0}^m q_k \lambda^k, \quad R(\lambda) = q_0 \lambda^{n-m} + \sum_{k=0}^{n-m-1} r_k \lambda^k$$

– гурвицевы. Тогда многочлен $P_\epsilon(\lambda)$ гурвицев при всех достаточно малых $\epsilon > 0$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что $n-m$ корней многочлена $P_\epsilon(\lambda)$ стремятся при $\epsilon \rightarrow 0$ к корням многочлена $R(\lambda) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_\epsilon(\lambda)$,

а остальные m корней уходят в бесконечность. Сделаем замену $\epsilon \lambda = \mu$ и положим $S_\epsilon(\mu) = \epsilon^{n-m} P_\epsilon(\mu/\epsilon)$. Тогда

$$S_\epsilon(\mu) = \mu^{n-m} \sum_{k=0}^m (q_k + q'_k(\epsilon)) \mu^k + \sum_{k=0}^{n-m-1} (r_k + r'_k(\epsilon)) \mu^k \epsilon^{n-m-k}.$$

Поэтому $n-m$ корней многочлена $S_\epsilon(\mu)$ стремятся к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$, а остальные m корней стремятся к корням $Q(\mu)$ со скоростью порядка

$O(\epsilon)$. Следовательно, m корней $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ многочлена $P_\epsilon(\lambda)$ при $\epsilon \rightarrow 0$ имеют вид

$$\lambda_i = \frac{\mu_i}{\epsilon} + O(1), \quad i = 1, \dots, m,$$

где μ_1, \dots, μ_m – корни $Q(\mu)$. Таким образом, корни $P_\epsilon(\lambda)$ будут лежать в левой полуплоскости, если там будут лежать корни $Q(\lambda)$ и $R(\lambda)$. Лемма П.2.3. доказана.

Лемма П.2.4. Пусть $\Phi(\omega)$, $\omega \in R^1$ – комплексные $m \times m$ -матрицы, удовлетворяющие для любых $x \neq 0$, $\omega \in R^1$ неравенству $\operatorname{Re} x^* \Phi(\omega) x > 0$. Тогда $|\Delta \arg \det \Phi(\omega)| \leq m\pi$, где под $\Delta \arg \Psi(\omega)$ понимается приращение аргумента комплекснозначной функции $\Psi(\omega)$ ($\Psi(\omega) \neq 0$) при ω , изменяющемся от $-\infty$ до $+\infty$, т.е. величина $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} [\arg \Psi(\omega) - \arg \Psi(-\omega)]$.

Доказательство. Пусть $\lambda_i(\omega)$, $x_i(\omega)$, $i = 1, \dots, m$ – собственные числа и векторы матрицы $\Phi(\omega)$ (среди них могут быть совпадающие). Тогда

$$\operatorname{Re} \lambda_i(\omega) = \frac{\operatorname{Re} x_i^*(\omega) \Phi(\omega) x_i(\omega)}{\|x_i(\omega)\|^2} > 0$$

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad \omega \in R^1.$$

Отсюда $\lambda_i(\omega) \neq 0$, и, следовательно,

$$\det \Phi(\omega) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(\omega) \neq 0$$

при любом $\omega \in R^1$. Кроме того, $|\Delta \arg \lambda_i(\omega)| \leq \pi$, откуда

$$|\Delta \arg \det \Phi(\omega)| \leq \sum_{i=1}^m |\Delta \arg \lambda_i(\omega)| \leq m\pi,$$

что и требовалось доказать.

Наконец, нам понадобится вариант частотной теоремы, легко выводимый из результатов [43].

Лемма П.2.5. Пусть A_0, R, B, Q – матрицы порядков $n \times n$, $n \times n$, $n \times m$, $n \times m$ соответственно, причем $R = R^* \geq 0$ и $\operatorname{rank} B = m$. Положим*

$$\Pi(\lambda) = 2\operatorname{Re} Q(\lambda I_n - A_0)^{-1} B - B^*(\lambda I_n - A_0)^{-1} R (\lambda I_n - A_0)^{-1} B. \quad (\text{П.2.6})$$

Для существования $n \times n$ -матрицы $H = H^* > 0$, удовлетворяющей соотношениям

$$HA_0 + A_0 H + R < 0, \quad HB = Q \quad (\text{П.2.7})$$

и вещественной в вещественном случае, необходимо и достаточно выполнения условий:

a) $\det(\lambda I_n - A_0)$ – гурвицев многочлен;

b) $\Pi(i\omega) > 0 \quad \forall \omega \in R^1$,

c) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \Pi(i\omega) > 0$.

Через $\operatorname{Re} K$ обозначается симметризованная матрица K , т.е. $\operatorname{Re} K = (K + K^)/2$.

Доказательство теоремы П.2.1. Докажем вначале достаточность условий теоремы. Для этого найдем такую $l \times m$ -матрицу C_0 при $A_0 = A + BC_0^*D^*$, $Q = DG$. Покажем, что в качестве такой матрицы можно взять $C_0 = -\kappa G$, где $\kappa > 0$ достаточно велико (при этом вещественность C_0 в вещественном случае будет обеспечена). Обозначим для краткости

$$\delta_\kappa(\lambda) = \delta(\lambda - \kappa G), \quad A_\kappa = A - \kappa BG^*D^*,$$

$$x_\kappa(\lambda) = x(\lambda - \kappa G).$$

Для проверки условия (а) воспользуемся тождеством (П.2.4), из которого следует, что

$$\delta_\kappa(\lambda) = \frac{\kappa^m}{\delta(\lambda)^{m-1}} \det \left[\frac{\delta(\lambda)}{\kappa} I_m + G^*a(\lambda) \right], \quad (\text{П.2.8})$$

где $a(\lambda) = x(\lambda)\delta(\lambda)$. Раскрывая определитель в правой части (П.2.8), получим

$$\begin{aligned} \delta_\kappa(\lambda) = & \frac{\kappa^m}{\delta(\lambda)^{m-1}} \left[\frac{\delta(\lambda)^m}{\kappa^m} + \varphi_1(\lambda) \frac{\delta(\lambda)^{m-1}}{\kappa^{m-1}} + \dots + \right. \\ & \left. + \varphi_{m-1}(\lambda) \frac{\delta(\lambda)}{\kappa} + \varphi_m(\lambda) \right], \end{aligned}$$

где $\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_{m-1}(\lambda), \varphi_m(\lambda) = \det G^*a(\lambda)$ – коэффициенты характеристического многочлена матрицы $Ga(\lambda)$. По лемме П.2.2 $\varphi_k(\lambda) = \delta(\lambda)^{k-1}\psi_k(\lambda)$, где $\psi_k(\lambda)$ – многочлен степени $n-k$, старший коэффициент которого ψ_k равен сумме главных миноров порядка k матрицы G^*D^*B ($k = 1, \dots, m$).

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa^m} \delta_\kappa(\lambda) = & \frac{\delta(\lambda)}{\kappa^m} + \frac{\psi_1(\lambda)}{\kappa^{m-1}} + \dots + \frac{\psi_{m-1}(\lambda)}{\kappa} + \psi_m(\lambda) = \\ = & \lambda^{n-m} \left[\left(\frac{\lambda}{\kappa} \right)^m + \left(\frac{\lambda}{\kappa} \right)^{m-1} \left(\psi_1 + O\left(\frac{1}{\kappa} \right) \right) + \dots + \left(\frac{\lambda}{\kappa} \right) \left(\psi_{m-1} + O\left(\frac{1}{\kappa} \right) \right) + \right. \\ & \left. + \psi_m(\lambda) + \psi(\lambda, \kappa) \right], \end{aligned}$$

где $\psi(\lambda, \kappa)$ – некоторый многочлен степени не выше $n-m$ с коэффициентами, имеющими порядок $O(1/\kappa)$ при $\kappa \rightarrow \infty$. Применяя лемму П.2.3 для $\epsilon = 1/\kappa$, получим, что многочлен $\delta_\kappa(\lambda)$ будет гурвицевым при достаточно больших κ , если будут гурвицевыми многочлены

$$Q(\lambda) = \lambda^m + \sum_{k=0}^{m-1} \psi_k \lambda^k, \quad R(\lambda) = \psi_m(\lambda).$$

Но $Q(\lambda)$ или $R(\lambda)$ гурвицевы по условию, так как

$$Q(\lambda) = \det(\lambda I_m + G^*D^*B) = \det(\lambda I_m + \Gamma),$$

а $R(\lambda) = \varphi(\lambda)$, т.е. условие (а) выполняется при $\kappa > \kappa_1$ для некоторого $\kappa_1 > 0$.

Приступая к проверке условия (б), перепишем его в виде

$$2\operatorname{Re} G^* \chi_\kappa(i\omega) > B^* (-i\omega I_n - A_\kappa^*)^{-1} R (i\omega I_n - A_\kappa)^{-1} B. \quad (\text{П.2.9})$$

Вследствие инвариантности многочлена $\varphi(\lambda)$ для любого κ справедливо равенство $\det G^* \chi_\kappa(\lambda) = \varphi(\lambda)/\delta_\kappa(\lambda)$. Многочлен $\varphi(\lambda)$ по условию теоремы Гурвицев, откуда следует, что

$$\det G^* \chi_\kappa(i\omega) \neq 0 \quad \forall \omega \in R^1.$$

Поэтому для любых $\omega \in R^1$ справедливо тождество

$$\operatorname{Re} G^* \chi_\kappa(i\omega) = [G^* \chi_\kappa(i\omega)]^* \operatorname{Re} [G^* \chi_\kappa(i\omega)]^{-1} G^* \chi_\kappa(i\omega),$$

в силу которого (П.2.9) равносильно неравенству

$$2\operatorname{Re} [G^* \chi_\kappa(i\omega)]^{-1} > [\chi_\kappa^*(i\omega) G]^{-1} B^* (-i\omega I_n - A_\kappa)^{-1} B [G^* \chi_\kappa(i\omega)]^{-1}. \quad (\text{П.2.10})$$

Но

$$[G^* \chi_\kappa(\lambda)]^{-1} = \kappa I_m + [G^* \chi(\lambda)]^{-1},$$

поэтому достаточно показать, что $\operatorname{Re} [G^* \chi(i\omega)]^{-1}$ и правая часть (П.2.10) ограничены при $\omega \in R^1$. Так как $\det G^* \chi(i\omega) = \varphi(i\omega)/\delta(i\omega)$ при $\omega \in R^1$, то матрица $[G^* \chi(i\omega)]^{-1}$ ограничена при изменении ω на любом конечном промежутке.

Покажем, что $\operatorname{Re} [G^* \chi(i\omega)]^{-1}$ ограничена при $\omega \rightarrow \pm\infty$. По условию теоремы, $\Gamma = \Gamma^* > 0$, где $\Gamma = G^* D^* B$, поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [G^* \chi(i\omega)]^{-1} &= \operatorname{Re} i\omega [i\omega G^* \chi(i\omega)]^{-1} = \operatorname{Re} i\omega \left[\Gamma^{-1} + O\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \right] = \\ &= i\omega [\Gamma^{-1} - (\Gamma^{-1})^*] + O(1) = O(1) \quad \text{при } \omega \rightarrow \pm\infty. \end{aligned}$$

Осталось показать ограниченность при $\omega \rightarrow \pm\infty$ правой части (П.2.10), которую мы обозначим через $\psi_\kappa(\omega)$. При $\kappa > \kappa_1$ матричная функция $\psi_\kappa(\cdot)$ непрерывна и, следовательно, ограничена на любом конечном промежутке. Покажем, что для любого κ существует конечный предел $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \psi_\kappa(\omega)$.

Пусть $B_\lambda = (\lambda I_n - A_\kappa)^{-1} B$. Тогда $B_\lambda = B/\lambda + O(1/|\lambda|^2)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, откуда

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} B_{i\omega} [G^* D^* B_{i\omega}]^{-1} = B [G^* D^* B]^{-1}.$$

Поэтому существует конечный предел

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \psi_\kappa(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} [B_{i\omega}^* D G]^{-1} B_{i\omega}^* R B_{i\omega} [G^* D^* B_{i\omega}]^{-1} = \\ &= [B^* D G]^{-1} B^* R B [G^* D^* B]^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, условие (б) леммы П.2.5 выполняется при $\kappa > \kappa_2$ для некоторого $\kappa_2 > \kappa_1 > 0$.

Наконец, выполнение условия (в) при достаточно больших $\kappa > 0$ следует из легко проверяемых соотношений

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \Pi(i\omega) &= -2\operatorname{Re} G^* D^* A_\kappa B - B^* R B = \\ &= -2\operatorname{Re} G^* D^* A B - B^* R B + 2\kappa [G^* D^* B]^2. \end{aligned}$$

Достаточность условий теоремы доказана. Докажем теперь их необходимость. Пусть соотношения (П.2.1) – (П.2.3) выполнены для некоторых $H_0 = H_0^* > 0$ и C_0 . Из леммы П.2.5 следует, что многочлен $\delta_0(\lambda) = \det(\lambda I_n - A(C_0))$ гурвицев и $\operatorname{Re} G^* \chi_0(i\omega) > 0$ для любого $\omega \in R^1$, где $\chi_0(\lambda) = D^* [\lambda I_n - A(C_0)]^{-1} B$. Вследствие инвариантности многочлена $\varphi(\lambda)$ справедливо равенство

$$\varphi(\lambda) = \delta_0(\lambda) \det G^* \chi_0(\lambda).$$

Вычисляя от обеих частей этого равенства приращение аргумента при $\lambda = i\omega$, где ω изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, имеем

$$\Delta \arg \varphi(i\omega) = n\pi + \Delta \arg \det G^* \chi_0(i\omega).$$

В силу леммы П.2.4 $\Delta \arg \varphi(i\omega) \geq (n-m)\pi$. Но $\varphi(\lambda)$ – многочлен степени $n-m$ со старшим членом $\lambda^{n-m} \det \Gamma$, где $\Gamma = G^* D^* B$ (см. лемму П.2.1). Поэтому $|\Delta \arg \varphi(i\omega)| \leq (n-m)\pi$, откуда $\Delta \arg \varphi(i\omega) = (n-m)\pi$, и следовательно, $\varphi(\lambda)$ – гурвицев и $\det \Gamma > 0$.

Осталось показать, что $\Gamma = \Gamma^* \geq 0$. По лемме П.2.5

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re} G^* \chi_0(i\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re} [i\omega G^* D^* B - G^* D^* A(C_0) B + O(1/|\omega|)] = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} i\omega [\Gamma - \Gamma^*] - \operatorname{Re} G^* D^* A(C_0) B > 0, \end{aligned}$$

откуда $\Gamma = \Gamma^*$. Заметим теперь, что соотношения (П.2.1) – (П.2.3) останутся очевидно, выполненными, если заменить в них $A(C_0)$ на $A(C_0) - \kappa I_n$, $\kappa > 0$. Вновь применяя лемму П.2.5, получим, что

$$-G^* D^* A(C_0) + B + \kappa \Gamma > 0$$

для любого $\kappa > 0$. Отсюда $\Gamma \geq 0$, чем и завершается доказательство теоремы.

ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ В НЕВЫПУКЛЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Ниже приводятся утверждения (теоремы П.3.1, П3.2), представляющие собой вариант теорем двойственности в некоторых задачах математического программирования. Особенностью этих задач является то, что участвующие в них функции, вообще говоря, невыпуклы (например, знакопеременные квадратичные формы) и обычная теория двойственности здесь неприменима. Доказываемые утверждения вытекают из результатов [180] и применяются в главе 3 для вывода необходимых и достаточных условий существования у аддитивной системы квадратичной функции Ляпунова.

Пусть на некотором множестве X заданы вещественные функции $F(x)$, $G_1(x), \dots, G_m(x)$. Пусть τ_1, \dots, τ_m – вещественные числа. Рассмотрим следующие соотношения:

$$F(x) \geq 0 \text{ при } G_1(x) \geq 0, \dots, G_m(x) \geq 0, \quad (\text{П.3.1})$$

$$\exists \tau_j \geq 0, j = 1, \dots, m: F(x) - \sum_{j=1}^m \tau_j G_j(x) \geq 0 \quad \forall x \in X. \quad (\text{П.3.2})$$

Очевидно, из (П.3.2) следует (П.3.1); обратное же, вообще говоря, неверно. Будем говорить, что S -процедура для неравенства $F(x) \geq 0$ с ограничениями $G_1(x) \geq 0, \dots, G_m(x) \geq 0$ неущербна [43], если из (П.3.1) следует (П.3.2).

Пусть X, U – вещественные линейные пространства. Образуем линейное пространство $Z = X \times U \times R^m$, каждый элемент которого имеет вид $z = (x, u, u_1, \dots, u_m)$, $x \in X$, $u \in U$, $u_j \in R^1$, $j = 1, \dots, m$. Напомним, что квадратичным функционалом на вещественном линейном пространстве X называется функция вида $f(x) = A(x, x) + b(x) + c$, где $A(x, y)$ – билинейная форма на $X \times X$, $b(x)$ – линейный функционал на X , c – вещественное число.

Теорема П.3.1. Пусть F, G, G_1, \dots, G_m – квадратичные функционалы на Z , имеющие вид

$$F(z) = F_0(x, u) + \sum_{j=1}^m u_j f_j(x), \quad G(z) = G_0(x, u), \quad G_j(z) = u_j g_j(x),$$

где F_0, G_0 – квадратичные функционалы на $X \times U$; f_j, g_j – линейные функционалы на X . Пусть, кроме того, $g_j \neq 0$, $j = 1, \dots, m$; $G_0(x_0, u_0) > 0$ для некоторых $x_0 \in X$, $u_0 \in U$ и для любого $x \in X$ существует вектор

$u^*(x) \in U$ такой, что $G_0(x, u^*(x)) \geq 0$. Тогда S -процедура для неравенства $F(z) \geq 0$ с ограничениями $G(z) \geq 0$, $G_1(z) \geq 0, \dots, G_m(z) \geq 0$ неуцербна.

Для доказательства понадобится следующая лемма.

Л е м м а П. 3. 1. Пусть f, g – линейные функционалы на вещественном линейном пространстве X , причем $g \neq 0$. Если $f(x) \geq 0$ при $g(x) \geq 0$, то $f - tg = 0$ для некоторого $t \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, f, g являются квадратичными функционалами на X , причем $g(x_0) > 0$ – для некоторого $x_0 \in X$. По теореме 4 работы [180] существует число $\tau \geq 0$ такое, что $f(x) - \tau g(x) \geq 0$ для всех $x \in X$. Так как $(f - \tau g)$ – линейный функционал, то $f(x) - \tau g(x) = 0$ для всех $x \in X$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы П. 3. 1. Пусть $F(z) \geq 0$ при $G(z) \geq 0$, $G_1(z) \geq 0, \dots, G_m(z) \geq 0$. Зафиксируем индекс $j : 1 \leq j \leq m$ и возьмем произвольный вектор $x \in X$ такой, что $g_j(x) \geq 0$. Для каждого числа $\alpha > 0$ положим $z_\alpha = (x, u^*(x), u_1, \dots, u_m)$, где $u_i = 0$ при $i \neq j$, $u_j = \alpha (g_j(x) > 0)$. Очевидно, $G(z_\alpha) \geq 0$, $G_j(z_\alpha) \geq 0$, $j = 1, \dots, m$, и, следовательно, $F(z_\alpha) \geq 0$ для всех $\alpha > 0$. Так как

$$F(z_\alpha) = F_0(x, u^*(x)) + \alpha f_j(x),$$

то $f_j(x) \geq 0$ и, в силу леммы П.3.1, существует число $\tau_j \geq 0$ такое, что $f_j = \tau_j g_j$. Это верно для всех $j = 1, \dots, m$. Положим теперь

$$\tilde{F}(z) = F(z) - \sum_{j=1}^m \tau_j G_j(z).$$

Если $z \in Z$ – произвольный вектор такой, что $u_j = 0$, $j = 1, \dots, m$ и $G(z) \geq 0$, то $\tilde{F}(z) \geq 0$, так как в этом случае $\tilde{F}(z) = F(z)$. Но и в общем случае $\tilde{F}(z) \geq 0$ при $G(z) \geq 0$, так как функционал $\tilde{F}(z) = F_0(x, u)$ и не зависит от u_1, \dots, u_m . Кроме того, ограничение $G(z) \geq 0$, по условию, регулярно. Применяя теорему 3 из [180], получим, что для некоторого $\tau \geq 0$ выполнено неравенство $\tilde{F}(z) - \tau G(z) \geq 0$ для всех $z \in Z$, откуда

$$F(z) - \tau G(z) - \sum_{j=1}^m \tau_j G_j(z) \geq 0.$$

Теорема доказана. Точно так же доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а П.3.2. Пусть F, G_1, \dots, G_m – квадратичные функционалы на вещественном линейном пространстве $X \times R^m$, имеющие вид

$$F(z) = F_0(x) + \sum_{j=1}^m u_j f_j(x), \quad G_j(z) = u_j g_j(x),$$

где F_0 – квадратичный функционал на X ; f_j, g_j – линейные функционалы на X , причем $g_j \neq 0$, $j = 1, \dots, m$. Тогда S -процедура для неравенства $F(z) \geq 0$ с ограничениями $G_1(z) \geq 0, \dots, G_m(z) \geq 0$ неуцербна.

Ряд других теорем о неуцербности S -процедуры приведен в [43, 180]. В частности, показано, что S -процедура неуцербна (и, значит, теорема двойственности в соответствующей экстремальной задаче справедлива) при $m = 1$, если $F(x), G_1(x)$ – квадратичные функционалы на вещественном линейном пространстве, а также при $m = 2$, если $F(x), G_1(x), G_2(x)$ – эрмитовы функционалы на комплексном линейном пространстве.

Приложение 4

ОПИСАНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЫ АВАНС

П.4.1. Общие сведения о системе. Система АВАНС предназначена для решения широкого круга задач, связанных с анализом и синтезом динамических систем. АВАНС является надстройкой над системой программирования ПЛ/1 и представляет пользователю проблемно-ориентированный язык (ПОЯ). АВАНС может быть эффективно использован и в качестве общего программного обеспечения, являясь инструментом для создания диалектов языка, ориентированных на решение задач в любой проблемной области.

П.4.2. Особенности синтаксиса языка АВАНС. Программа на АВАНСе состоит из последовательности операторов языка ПЛ/1 и проблемно-ориентированных операторов языка АВАНС. Возможна вложенность операторов АВАНСа. Глубина вложенности языком не ограничена. В частности, макроопределения могут содержать в себе макровызовы, которые, в свою очередь, также имеют макровызовы и т.д. Возможности системы программирования ПЛ/1 могут быть полностью использованы системой АВАНС.

Некоторые операторы ПОЯ (как и ПЛ/1) являются составными. Такие операторы состоят из операторов начала и конца составного и записанных между ними других простых или составных операторов, которые будем называть *внутренними* (по отношению к данному оператору). Каждый оператор ПОЯ начинается с некоторого ключевого слова (имени оператора), перед которым ставится символ * или &. Символ * соответствует главным (свободным) операторам ПОЯ, а символ & — подчиненным (закрепленным) операторам. Главные операторы могут располагаться в произвольных (допустимых для операторов) местах программ, а подчиненные образуют разделы соответствующих главных операторов и могут располагаться только внутри последних.

Перед именами внутренних макроопределений и (всех) макровызовов символ * ставится дважды. Перед именем конца составного (оператора) ставится символ #. Таким образом, операторы ПОЯ можно классифицировать по признакам: простые — составные и главные — подчиненные.

В квадратных скобках в описании языка помещены элементы, которые могут отсутствовать в тексте программы. Терминальные символы (обязательно присутствующие в программе) обозначаются латинскими буквами (т.е. своими изображениями). Нетерминальные символы (понятия, вместо которых в тексте записываются конкретные их представители)

обозначаются русскими буквами (словами или предложениями через дефис между отдельными словами). Если возможно несколько вариантов записи, то они разделяются знаком ":" или располагаются в столбец. Если некоторый элемент может многократно повторяться или отсутствовать, то он помещается в фигурные скобки. Знаки ">::=" означают "есть по определению".

Ниже приводится синтаксис и семантика всех основных операторов ПОЯ (из системных макроопределений описаны только основные).

П.4.3. Оператор описания системы SYST. Это составной оператор, служащий для описания системы. Под *системой* понимается совокупность соединенных между собой подсистем, которые являются, в свою очередь, либо другими системами, либо (простейшими) звеньями.

Синтаксис оператора:

* SYST имя-системы;

вложенные-операторы # SYST;

вложенные-операторы — это операторы S[UB]S, CON, DIS, ROW, INIT, INP, OUT. Эти операторы могут появляться в произвольной последовательности, отсутствовать или записываться несколько раз.

П.4.3.1. Оператор указания подсистем SUBS. Оператор SUBS указывает, какие подсистемы входят в данную систему на следующем (более низком) уровне иерархии.

Синтаксис оператора:

& S[UB]S указание-подсистемы { /указание-подсистемы } ;

указание подсистемы :: = имя-системы | описание-звена;

описание-звена :: = W-звено | M-звено | I-звено;

W-звено :: = имя-звена, r, n; M-звено :: = имя-звена, m, n, l; I-звено :: = имя-звена, n;

Звенья (*W*, *M*, *I*) являются линейными динамическими звеньями непрерывного или дискретного времени. Введем оператор λ , означающий дифференцирование для систем непрерывного времени и оператор сдвига вперед для систем дискретного времени:

$$\lambda y(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad \lambda y[k] = y[k+1]. \quad (\text{П.4.1})$$

W-звено соответствует уравнению

$$\sum_{i=0}^n a_i \lambda^i y = \sum_{j=0}^r b_j \lambda^j u, \quad r < n, \quad (\text{П.4.2})$$

где *u*, *y* — скалярные вход и выход звена; *a_i*, *b_j* (*i* = 0, 1, ..., *n*; *j* = 0, 1, ..., *r*) — его параметры. При численном интегрировании *W*-звено записывается в виде уравнений состояния

$$\lambda x_i = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\lambda x_n = a_n^{-1} \left(- \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1} + u \right), \quad (\text{П.4.3})$$

$$y = \sum_{j=0}^r b_j x_{j+1}.$$

Таблица П.4.1

Обозначения входов, выходов и переменных состояния звена

Тип звена	Вход	Выход	Состояние	Значение λx
W	U_H	Y_H	$S.X_H(1) \dots S.X_H(n)$	$@S.X_H(1) \dots @S.X_H(n)$
M	$U_H(1) \dots \dots U_H(m)$	$Y_H(1) \dots \dots Y_H(l)$	$S.X_H(1) \dots S.X_H(n)$	$@S.X_H(1) \dots @S.X_H(n)$
I	$U_H(i)$	$Y_H(i)$	$S.X_H(i)$	$@S.X_H(i)$

Таблица П.4.2

Обозначения параметров звеньев

Тип звена	Параметры
W	$A_H(0) \dots A_H(n), B_H(0) \dots B_H(m)$
M	$A_H(n, n), B_H(n, m), C_H(l, n)$

Здесь через x_i обозначены переменные состояния (фазовые переменные) W-звена.

I-звено соответствует системе уравнений

$$\lambda x_i = u_i, \quad y_i = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (\text{П.4.4})$$

M-звено соответствует уравнениям состояния

$$\lambda x = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (\text{П.4.5})$$

где x – n -мерный вектор состояния звена, u – m -мерный входной, y – l -мерный выходной векторы, A, B, C – матрицы соответствующих порядков.

Перед использованием системы в других операторах необходимо определить входы всех подсистем, а для проведения вычислений – значения всех ее параметров. При этом используются обозначения, приведенные в таблицах П.4.1 и П.4.2.

В таблицах через H обозначено имя-звена, а через S – имя-системы (в которую входит данное звено). Звенья типа I параметров не имеют.

П.4.3.2. Оператор описания непрерывных связей CON. Это составной подчиненный оператор.

Синтаксис оператора: &CON;

вложенные-операторы # CON;

Здесь в качестве вложенных операторов используются исполняемые операторы языка ПЛ/1, которые определяют связи между звеньями. Внутри оператора CON могут размещаться условные операторы, операторы цикла и обращения к процедурам*).

*.) При обращении к процедурам необходимо указывать роль параметров. Перед именем входного параметра ставится знак :, перед именем выходного параметра – знак ?.

П.4.3.3. Оператор описания дискретных связей DIS. Это составной подчиненный оператор, имеющий синтаксис &DIS [(имя-звена {, имя-звена})] [BY (ариф.-выр.) | IF (лог.-выр.)] вложенные-операторы # DIS.

Вложенные операторы используются либо с периодом дискретности, задаваемым значением арифметического выражения (ариф.-выр.), либо при истинности условия, задаваемого логическим выражением (лог.-выр.). По умолчанию период дискретности совпадает с шагом решения (шагом численного интегрирования уравнений системы).

В операторе DIS можно выделить среди описанных в операторе SS данной системы звеньев дискретные. Для этой цели используются конструкции имя-звена в операторе начала DIS.

Вложенные операторы в DIS имеют такой же смысл, назначение и синтаксис, как соответствующие операторы в CON.

П.4.3.4. Оператор описания инициализации (начальных условий) INIT. Это составной подчиненный оператор, служащий для установок начальных значений параметров (но не переменных состояния системы!).

Синтаксис оператора:

&INIT;

вложенные-операторы # INIT;

В качестве вложенных-операторов могут использоваться любые операторы ПЛ/1 и допустимы (главные) операторы ПОЯ.

П.4.3.5. Оператор описания входов системы INP. Это простой подчиненный оператор. Его синтаксис:

&INP [(обозначение-входа)] компонента-входа {, компонента-входа};

Здесь обозначение-входа — это произвольная алфавитно-цифровая последовательность. В качестве компоненты-входа могут указываться любые переменные, элементы массивов и одномерные массивы, использованные при описании системы, а также системные параметры (кроме состояний и выходов звеньев и подсистем).

П.4.3.6. Оператор описания выходов системы OUT. Это простой подчиненный оператор, имеющий синтаксис

&OUT [(обозначение-входа)] компонентов-выхода {, компонента-выхода};

Оператор аналогичен оператору INP.

П.4.3.7. Оператор описания массивов ROW. Простой подчиненный оператор, имеющий синтаксис

&ROW имя (константа) {, имя (константа)} ;

Он служит для описания одномерных массивов, которые используются в описании системы и указаны в операторах INP и OUT, но не являются системными массивами.

П.4.4. Оператор моделирования SIM. Составной выполняемый оператор, служащий для описания задания на моделирование. В зависимости от типа системы производится решение дифференциальных, разностных, дифференциально-разностных или алгебраических уравнений.

Синтаксис оператора

* SIM имя-системы [FROM(Выр-1)] [TO(Выр-2)]

[BY(Выр-3)] [WHILE(Выр-4)]

[UNTIL(Выр-5)] [МETH имя-метода];

вложенные операторы # SIM.

Конструкции FROM, TO, BY, UNTIL, WHILE, METH могут располагаться в произвольном порядке. Переменная интегрирования (время) имеет системное обозначение TIME.

Выражение-1 (BYР-1) задает начальное значение TIME (по умолчанию – нулевое), конечное значение задается выражением-2; если оно не задано, то моделирование производится с шагом DTIME. Выражение-4 и выражение-5 задают логические условия. При ложности выражения-4 или истинности выражения-5 процесс решения задачи прекращается (значение выражения-4 определяется в начале, а выражение-5 – в конце каждого шага решения).

Имя-метода задает имя процедуры численного интегрирования систем дифференциальных уравнений. По умолчанию используется процедура DERE, входящая в состав пакета научных программ ПЛ/1.

Пользователь может разрабатывать и включать в состав системы АВАНС свои процедуры интегрирования.

В качестве вложенных-операторов могут быть в произвольном порядке и количестве расположены следующие операторы.

П.4.4.1. Оператор начальных условий INIT. Служит для записи операторов, которые должны быть выполнены перед началом моделирования. Является составным подчиненным оператором.

Синтаксис оператора:

& INIT;

выполняемые-операторы # INIT;

В качестве выполняемых операторов могут использоваться любые выполняемые операторы ПОЯ и ПЛ/1.

П.4.4.2. Оператор описания внешних воздействий INFL. Составной подчиненный оператор, служит для задания в процессе моделирования значений переменных, входящих в описание системы, но не определяемых иным образом.

Синтаксис оператора:

& INFL [BY (ариф.-выр.) | IF (лог.-выр.)];

вложенные-операторы # INFL;

Конструкции аналогичны конструкциям в DIS.

П.4.4.3. Оператор печати результатов PRINT. Простой подчиненный оператор, служащий для указания имен переменных, вводимых на печать.

Синтаксис оператора:

& PRINT [BY (ариф.-выр.) | IF (лог.-выр.)]

(элемент списка {, элемент списка});

П.4.4.4. Оператор вывода таблиц TABLE. Простой подчиненный оператор, позволяющий оформить выводимые на печать результаты в виде таблицы.

Синтаксис оператора:

& TABLE [BY (ариф.-выр.) | IF (лог.-выр.)]

[TITLE (знак-выр.)] (элемент-списка {, элемент-списка}),

Знаковое выражение задает заголовок таблицы. Остальные конструкции аналогичны конструкциям оператора.

П.4.4.5. Оператор вывода графиков PLOT. Простой подчиненный оператор, позволяющий одновременно с таблицей получить графики интересующих пользователя процессов.

Синтаксис оператора:

&PLOT [BY (ариф.-выр.) | IF (лог.-выр.)]
[TITLE (знак.-выр.)] (описание-графика
{ , описание-графика}); описание-графика :: = элемент-1
[/ [конст.-1] [, [конст.-2]]
[, элем.-2 [элем.-3] [, элем.-4]]]];

Значения элемента-1 выводятся в виде кривой и заносятся в таблицу. Одновременно в печать выводится одна кривая и до четырех столбцов в таблице (соответствующих элем.-1; элем.-2; элем.-3; элем.-4).

Константы конст.-1 и конст.-2 задают нижнее и верхнее значение по изменению элем.-1 и служат для определения масштаба графика. По умолчанию эти величины принимаются равными наибольшему и наименьшему значениям выводимых на данном графике величин.

П.4.4.6. Оператор описания обработки CALC. Составной подчиненный оператор. Внутри него могут располагаться любые операторы ПОЯ и ПЛ/1, описывающие алгоритм обработки результатов решения.

Синтаксис оператора:

&CALC [BY (ариф.-выр.) | IF (лог.-выр.)];
вложенные-операторы # CALC.

Обработка производится после каждого шага решения и в соответствии с условиями, указанными в конструкции BY и IF.

П.4.5. Оператор минимизации MIN. Составной выполняемый оператор. Служит для осуществления поисковой параметрической оптимизации, т.е. для определения

$$x_{\min} = \arg \min_{x \in X} F(x).$$

Множество X допустимых значений аргумента x определяется совокупностью ограничений типа равенств $y_i^l(x) = 0$ и неравенств $y_i^l(x) \leq 0$.

Синтаксис оператора:

* MIN (выражение) (компонента { , компонента })
[МЕТН имя-метода];
вложенные операторы # MIN;

Компоненты в операторе MIN есть компоненты вектора x , по которому производится минимизация. Это могут быть простые переменные и элементы массивов.

Выражение в заголовке оператора определяет функцию $F(x)$ в виде арифметического выражения ПЛ/1, в число operandов которого, кроме компонент вектора x и определенных вне оператора MIN переменных, могут входить переменные, значения которых определяются в операторе BODY (см. ниже).

Внутри оператора MIN в произвольном порядке могут записываться операторы EQ, LT, BODY.

П.4.5.1. Операторы описания ограничений. Операторы EQ и LT – простые подчиненные операторы.

Синтаксис операторов EQ и LT:

& EQ-ограничение;

& LT-ограничение;

ограничение :: = (выражение { , выражение });

Выражения задают значения функций $y_i^l(x)$ и $y_j^l(x)$, определяющих область x .

П.4.5.2. Оператор описания вычислений. Оператор BODY – составной подчиненный оператор, служащий для вычисления зависящих от x элементов в выражениях, определяющих значения минимизируемой функции и ограничений.

Синтаксис оператора:

& BODY; вложенные-операторы # BODY;

Внутри оператора BODY могут располагаться любые выполняемые операторы ПОЯ и ПЛ/1. Они исполняются в процессе оптимизации при каждом новом формируемом процедурой минимизации значении вектора x .

П.4.6. Макросредства языка АВАНС. Макросредства служат для расширения системы АВАНС силами пользователя без использования средств, выходящих за рамки языка системы. Это достигается оформлением любых фрагментов текста как "макроопределений", которые автоматически включаются в программу вместо специальных операторов, называемых макровызовами. Макровызов может содержать также некоторые конструкции замены произвольных идентификаторов в макроопределении. Макроопределение, в свою очередь, может содержать другие макровызовы и т.д., но последовательность этих макровызовов не должна приводить к исходному макроопределению (рекурсия недопустима).

Макросредства, таким образом, можно рассматривать как средства повышения "скорости" программирования: часто повторяющиеся или отложенные и помещенные в библиотеку фрагменты текста не переписываются в текст программы, а автоматически включаются в него при указании их имени. Широкое применение макросредств с глубокой вложенностью приводит к качественно новому эффекту – появлению специального ("пользовательского") входного языка.

Макроопределения могут быть внутренними (т.е. находящимися в той же программе, что и соответствующие макровызовы) и библиотечными – пользовательскими и системными. Имя собственной библиотеки пользователя определяется параметром USLIB, указываемым при вызове соответствующей процедуры, например:

||_ EXEC _ ABMPCG, USLIB = 'COMMON.LIB'

Синтаксис внутреннего макроопределения:

* * MACRO имя-макроопределения;

текст * * MACRO текст-произвольный текст (на ПОЯ и ПЛ/1).

Библиотечные макроопределения никак специально не выделяются, а являются некоторым (любым) текстом, помещаемым в библиотеку под своим (выбранным пользователем или разработчиком системы) именем.

Синтаксис макровызова:

* * [&] имя-макроопределения [замена { , замена }];

Знак & указывается для макроопределений, которые входят в личные библиотеки пользователя, определенные параметром USLIB.

замена : : = имя-1 = имя-2 | константа | выражение;

Имя-1 – любой идентификатор в тексте макроопределения, подлежащий замене. Следует иметь в виду, что символы, находящиеся левее самого левого знака подчеркивания идентификаторов, не анализируются и замене не подлежат. Например, при макроопределении, содержащем текст

A_VAR = 5; VAR_VAR = X_VAR(3); U_VAR = Y_VAR;

и макровызове с конструкцией замены VAR = SYST в результате макроподстановки в тексте программы появятся операторы

A_SYST = 5; VAR_SYST = X_SYST(3); V_SYST = SYST;

В макроопределениях, к которым предполагается многократное обращение в одной программе, для унификации имен можно использовать переменную \mathbb{Q} , преобразующуюся при обработке каждого макровызыва данного макроопределения в изображении натурального числа с возрастающим на единицу значением. Например, при первом вызове макроопределения, содержащего идентификатор A \mathbb{Q} B, будет сформировано имя A1B, при втором – A2 \mathbb{Q} и т.д.

Если некоторые фрагменты макроопределения должны передаваться в выходной текст только один раз (например, объявления переменных, массивов и т.п.), то такие фрагменты должны записываться в макроопределении внутри оператора периода генерации, имеющего синтаксис

& UNIQ; текст ## UNIQ;

Порядок обработки текста на языке АВАНС, содержащего макроопределения и внутренние макровызовы, следующий. Текст просматривается последовательно. Операторы ПЛ/1 и ПОЯ копируются в выходной текст. Внутренние макроопределения пропускаются, их имена и местонахождение запоминаются. Для каждого макровызыва находится макроопределение. Сначала макроопределение отыскивается среди внутренних макроопределений, затем среди библиотечных. Текст макроопределения копируется в выходной текст с предварительным выполнением замен. Фрагменты, помещенные в операторе UNIQ, копируются только для первого макровызыва данного макроопределения. Если в копируемом макроопределении содержатся макровызовы или внутренние макроопределения, то они обрабатываются подобным же образом.

П.4.7. Описание сложных систем. Стандартным способом представления описаний сложных систем в языке АВАНС является приведение математической модели системы к форме уравнений состояния. При этом нелинейная динамическая система представляется как соединение линейной динамической подсистемы (блока интеграторов), указываемой в операторе SUBS, и нелинейных статических подсистем, описываемых в операторе CON. Например, описание системы

$$\dot{x} = F(x, u, t), \quad y = G(x, u, t)$$

(II.4.6)

можно задать в виде

```
* SYST S;
& SS INTGRL, n;
& ROW U(m), Y(l);
& INP U;
& OUT Y;
& CON;
CALL F (? U_INTGRL, : Y_INTGRL, : U, TIME);
CALL G (? Y, : Y_INTGRL, : U, TIME);
# CON;
# SYST;
```

Здесь m, n, l – целые числа (размерности векторов u, x, y соответственно), $F(\cdot), G(\cdot)$ – процедуры вычисления функции перехода (вектора правых частей) и функции выходов системы (П.4.6).

Если сложная система задана векторным линейным дифференциальным уравнением в переменных "вход-выход", то, как и в скалярном случае, возможны различные способы приведения ее описания к уравнениям состояния [9, 38, 84]. Предположим, что система задана уравнением (П.4.2), где u – m -вектор; y – l -вектор, a_i – $l \times l$ -матрицы, b_j – $l \times m$ -матрицы, причем $\det a_n \neq 0$. Способ, состоящий в непосредственном обобщении на векторный случай способа (П.4.3), применим, только если $m = l$ и операторы $a(\lambda), b(\lambda)$ коммутируют.

Опишем другой способ, не требующий указанных ограничений. Достаточно рассмотреть случай $a_n = I$ (в противном случае следует умножить обе части (П.4.2) на a_n^{-1}). В этом случае (П.4.2) можно записать покомпонентно:

$$a_{ii}(\lambda) y_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}(\lambda) y_j = \sum_{j=1}^m b_{ij}(\lambda) u_j, \quad i = 1, \dots, l, \quad (\text{П.4.7})$$

где u_j, y_j – компоненты векторов u, y соответственно, $a_{ij}(\lambda), b_{ij}(\lambda)$, $j \neq i$, – многочлены степеней не выше $n - 1$,

$$a_{ii}(\lambda) = \lambda^n + a_{ii}^{(n-1)} \lambda^{n-1} + \dots + a_{ii}^{(0)}.$$

Введем подсистему S_i с $(l+m-1)$ -вектором входов:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \text{col}(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{l+m-1}) = \\ &= \text{col}(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_l, u_1, \dots, u_m) \end{aligned}$$

и скалярным выходом y_i и запишем ее уравнения состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i = \sum_{k=1}^{l+m-1} d_{ik} \bar{u}_k, \quad y_i = C x, \\ A_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{ii}^{(0)} & \dots & \dots & \dots & -a_{ii}^{(n-1)} \end{bmatrix}, \\ x_i, d_{ik} &\in R^n, \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]. \end{aligned} \quad (\text{П.4.8})$$

Векторы d_{ik} в (П.4.8) определим из условия совпадения передаточных функций систем (П.4.7) и (П.4.8) по каждому входу, т.е. из соотношений

$$C(\lambda I - A_i)^{-1} d_{ik} = \begin{cases} a_{ij}(\lambda)/a_{ii}(\lambda), & 1 \leq k \leq l-1, \\ b_{ij}(\lambda)/a_{ii}(\lambda), & l \leq k \leq l+m-1, \end{cases} \quad (\text{П.4.9})$$

где $j = j(k)$ – индекс числителя передаточной функции, соответствующий k -му входу системы (П.4.8). Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях λ в (П.4.9), получаем для определения компонент d_{iks} , $s = 0, 1, \dots, n-1$, вектора d_{ik} рекуррентные соотношения [9], имеющие, например, при $l \leq q$ вид

$$a_{ik0} = b_{ij0}, \quad d_{iks} = b_{ijs} - \sum_{q=0}^{s-1} b_{ijq} a_{ii(s-q)}.$$

$$s = 1, \dots, n-1.$$

Теперь исходную систему можно описать как соединение l подсистем S_1, \dots, S_l с перекрестными связями по y_i , задаваемыми в операторе CON.

Пример. Для системы, описываемой уравнениями

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda + 2 & 3\lambda + 4 \\ 5\lambda + 6 & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\lambda + 9 & 0 \\ 0 & 8\lambda + 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

вспомогательные подсистемы S_1, S_2 строятся в виде

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad y_1 = [1 \ 0] x_1,$$

$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y_2 = [1 \ 0] x_2,$$

где $x_i \in R^2$, $i = 1, 2$. Описание системы на языке АВАНС строится следующим образом:

```
*SYST;
& SS S 1, 2, 2, 1 | S 2, 2, 2, 1;
& INIT
```

\langle Присваивание значений элементам матриц \rangle

```
A_S1, B_S1, C_S1, A_S2, B_S2, C_S2
# INIT;
& INP U_S1(2), U_S2(2);
& OUT Y_S1, Y_S2;
& CON;
U_S1(1)=Y_S2(1);
U_S2(1)=Y_S1(1);
# CON;
# SYST.
```

Приложение 5

АЛГОРИТМЫ СКОРОСТНОГО ГРАДИЕНТА И ПРИНЦИПЫ ЭВОЛЮЦИИ СИСТЕМ

Данное приложение отличается по направленности от остальной части книги, которая посвящена построению алгоритмов управления и адаптации. Ниже рассматриваются задачи построения моделей, т.е. математического описания динамических систем различной физической природы. Показывается, что метод скоростного градиента (гл. 2) позволяет взглянуть на эти задачи с нетрадиционной точки зрения.

Пусть модель системы относится к классу моделей состояния

$$\dot{x} = F(x, \theta, t), \quad t \geq 0, \quad (\text{П5.1})$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $\theta \in R^m$ – вектор входных переменных. Задача построения модели системы может быть поставлена как нахождение закона изменения (эволюции) $\theta(t)$, удовлетворяющего определенным критериям, обеспечивающим требуемые свойства системы.

Наиболее распространенные в физике и технике критерии (например, принцип наименьшего действия) основаны на вариационных принципах и предполагают задание некоторого функционала (обычно интегрального), минимизация которого определяет искомые функции $x(\cdot)$, $\theta(\cdot)$ как точки в функциональном пространстве. При этом аппарат вариационного исчисления и оптимального управления может с равным успехом применяться как к синтезу законов управления и адаптации, так и к описанию динамики систем.

Используются в физике и локальные (дифференциальные) принципы эволюции, в которых критерии относятся к отдельному (текущему) моменту времени: принцип наименьшего принуждения Гаусса, принцип минимального рассеяния энергии, принцип минимального производства энтропии. Эти принципы, как указывал М. Планк^{*}), имеют определенное преимущество перед интегральными, поскольку состояния и движения системы не ставятся ими в зависимость от позднейших состояний и движений.

Оказывается, алгоритмы скоростного градиента (АСГ) порождают еще один локальный принцип (принцип скоростного градиента), формулируемый следующим образом.

Из всех возможных движений в системе реализуются лишь те, у которых направление изменения свободных (входных) переменных $\theta(t)$

^{*}) Планк М. Принцип наименьшего действия / Планк М. Единство физической картины мира. – М.: Наука, 1966.

определяется градиентом по θ от величины \dot{Q}_t – скорости изменения во времени заданной целевой функции (функционала) Q_t .

В соответствии с главой 2 этот принцип дает два базовых типа уравнений динамики систем:

в дифференциальной форме:

$$\dot{\theta} = -\Gamma \nabla_{\theta} \dot{Q}_t, \quad (\text{П5.2})$$

и в конечной форме:

$$\theta = -\Gamma \nabla_{\theta} \dot{Q}_t, \quad (\text{П5.3})$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$.

Во многих задачах исходная модель (П5.1) задается в виде

$$\dot{x} = \theta, \quad (\text{П5.4})$$

т.е. в качестве искомых переменных, определяющих динамику системы, выступают скорости изменения переменных состояния. При этом АСГ в дифференциальной форме порождает уравнения 2-го порядка, которые инвариантны относительно замены $t \rightarrow (-t)$, т.е. соответствуют обратимым процессам. Конечная форма (П5.3) соответствует необратимым процессам.

В качестве целевой функции Q может выступать любая функция, уменьшение которой соответствует физическому смыслу поведения системы. Рассмотрим, например, задачу описания движения материальной точки в потенциальном поле. Переменные состояния здесь – координаты точки, т.е. $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3)$. Будем искать уравнение движения в виде (П5.4), выбрав в качестве целевой функции потенциальную энергию $Q(x)$. Вычисляя скоростной градиент

$$\dot{Q} = [\nabla_x Q(x)]^T \theta, \quad \nabla_{\theta} \dot{Q} = \nabla_x Q(x),$$

выбирая дифференциальную форму (П5.2) с матрицей усиления $\Gamma = m^{-1} I_3$, где m – масса точки, и учитывая (П5.4), приходим к второму закону Ньютона $\ddot{x} = -m^{-1} \nabla_x Q(x)$.

Предложенный подход распространяется на распределенные системы, когда x – элемент гильбертова пространства X , а $F(x)$ – неограниченный нелинейный оператор, определенный на плотном множестве $D_F \subset X$, причем решения (П5.1)–(П5.4) ищутся в классе обобщенных решений. Пусть, например, $x = x(r)$ – поле температур или концентраций вещества в некоторой области $\Omega \subset R^3$, $r = \text{col}(r_1, r_2, r_3) \in \Omega$, а целевой функционал характеризует степень неравномерности распределения:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \| \nabla_r x(r) \|^2 dr.$$

Поставив задачу построения модели системы в виде (П5.4) при нулевых граничных условиях, получим

$$\dot{Q} = - \int_{\Omega} \Delta x(r) \theta(r) dr, \quad \nabla_{\theta} \dot{Q} = - \Delta x(r),$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial r_i^2}$ – оператор Лапласа.

Легко видеть, что из (П5.2) получается волновое уравнение, а конечная форма (П5.3) описывает необратимые процессы теплопроводности и диффузии.

Другие примеры построения моделей физических систем на основе принципа скоростного градиента приведены в табл. П5.1. Теоремы главы 2 и их бесконечномерные аналоги позволяют исследовать устойчивость и получать оценки качества процессов в построенных моделях. Предложенный подход позволяет описывать системы, находящиеся под действием потенциальных и диссипативных сил. Законы эволюции систем с вихревыми движениями (при наличии гироколических сил, магнитных полей и т.п.) к классу АСГ, по-видимому, не относятся.

Принцип скоростного градиента позволяет по-новому взглянуть на некоторые известные физические факты. Он позволяет, например, дать обоснование принципа симметрии кинетических коэффициентов (принципа Онсагера). Рассмотрим замкнутую физическую систему, состояние которой характеризуется совокупностью переменных (термодинамических величин) $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$. Пусть $\dot{x}_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ – равновесные значения переменных, а динамика отклонений от них определяется уравнениями

$$\dot{x}_i = \theta_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{П5.5})$$

Принцип Онсагера состоит в том, что в линеаризованных в окрестности равновесия уравнениях (П5.5)

$$\dot{x}_i = - \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} x_k \quad (\text{П5.6})$$

так называемые *кинетические коэффициенты* λ_{ik} удовлетворяют условиям симметрии

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki}, \quad i, k = 1, \dots, n. \quad (\text{П5.7})$$

Известные доказательства этого принципа*) (который в сформулированном виде справедлив, как известно, с некоторыми исключениями) требуют привлечения дополнительных постулатов. Однако если система подчиняется принципу скоростного градиента при энтропийной целевой функции, то (П5.7) можно доказать непосредственно.

Действительно, пусть $S(x)$ – энтропия системы, а уравнения (П5.5) имеют вид

$$\dot{x}_i = -\gamma \nabla_{\theta} \dot{S}, \quad (\text{П5.8})$$

где $\dot{S}(x, \theta) = (\nabla_x S)^T \theta$, т.е. $\theta_i = -\gamma \frac{\partial \dot{S}}{\partial \theta_i} = -\gamma \frac{\partial S}{\partial x_i}$.

Поскольку равенства (П5.7) можно записать в виде

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \theta_k}{\partial x_i}, \quad (\text{П5.9})$$

их справедливость следует из соотношений $\frac{\partial \theta_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial \theta_k}{\partial x_i}$.

* Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. – М.: Наука, 1964.

Таблица П5.1
Уравнения динамики физических систем

№ п/п	Переменные состояния системы ($\theta = \dot{x}$)	Целевая функция Q	Скоростной градиент $\nabla_{\theta} \dot{Q}$	Уравнения динамики системы	
				обратимые процессы (дифференциальные АСГ)	необратимые процессы (ко- нечные АСГ)
1	$x = \text{col}(x_1, x_2, x_3) -$ координаты точки с массой m	$Q = \Pi(x) -$ потенциальная энергия	$\nabla_x \Pi(x)$	$\ddot{x} = -\gamma \nabla_x \Pi(x)$ $(\gamma = m^{-1}) -$ 2-й закон Ньютона	
2	"	$Q = \Pi(x) + \int_0^t D(\dot{x}) dt$ ($D(\dot{x})$ – диссипативная функ- ция Рэлея)	$\nabla_x \Pi(x) + \nabla_{\dot{x}} D(\dot{x})$	$\ddot{x} = -\gamma [\nabla_x \Pi(x) +$ $+ \nabla_{\dot{x}} D(\dot{x})]$ – уравнение движения точки в поле по- тенциальных и диссипатив- ных сил	
3	$x = x(r) \in R^3,$ $r \in \Omega \subset R^3 -$ поле координат то- чек жидкости с плот- ностью $\rho(r)$	$Q = \int_{\Omega} p(r) dr$ ($p(r)$ – давление)	$\nabla_r p(r)$	$\dot{v} = -\gamma \nabla_r p(r)$ $(\gamma = \rho^{-1}, v = \dot{x}) -$ уравнение Эйлера	

4	$x = x(r)$, $r \in \Omega \subset R^3$, $Q = \int_{\Omega} \left\ \frac{\partial x}{\partial r} \right\ ^2 dr$ $x \in R^1 -$ поле температур (концентраций вещества)	$-\Delta x(r)$ (Δ – оператор Лапласа)	$\ddot{x} = \gamma \Delta x -$ волновое уравнение	$\dot{x} = \gamma \Delta x -$ уравнение теплопроводности (диффузии)
5	$x = x(r)$, $r \in \Omega \subset R^3$, $Q = \int_{\Omega} p(r) dr +$ $x \in R^3 -$ поле координат точек жидкости	$\Delta_2 p = \eta \Delta v$ $+ \eta \int_0^+ \int_{\Omega} \left\ \frac{\partial v}{\partial r} \right\ ^2 dr dt,$ η – коэффициент вязкости	$\dot{v} = -\gamma [\nabla p(r) - \eta \Delta v(r)]$ – уравнение Навье – Стокса	
6	$x \in R^3 -$ координата частицы с электрическим зарядом q	$Q = E(x) -$ 势能电场的势能	$\nabla_x E(x)$	$\ddot{x} = -\gamma \nabla_x E(x)$ ($\gamma = q^{-1}$) – 运动方程带电荷在电场中的运动
7	$x_1, \dots, x_n -$ термодинамические переменные	$Q = S(x) -$ 熵	$\nabla_x S(x)$	$\dot{x} = -\gamma \nabla_x S(x),$ $\gamma = \gamma^T > 0$

Так же легко для описанного класса систем устанавливается теорема Глендорфа-Пригожина о минимизации производства энтропии^{*)}: из соотношений

$$\begin{aligned}\ddot{S} &= \frac{d\dot{S}}{dt} = (\nabla_x \dot{S})^T \dot{x} = \{ \nabla_x [\nabla_x S]^T \theta \}^T \theta = \\ &= \gamma (\nabla_x \|\nabla_x S\|^2)^T \nabla_x S = 2\gamma (\nabla_x S)^T [\nabla_x^2 S] (\nabla_x S)\end{aligned}$$

следует, что если $S(x)$ – вогнутая функция ($\nabla_x^2 S(x) \leq 0$), то $\ddot{S} \leq 0$ и, следовательно, производство энтропии \dot{S} убывает.

Остается заметить, что эти выводы, в частности принцип Онсагера в форме (П5.9), справедливы и без линеаризации (П5.5), т.е. не только вблизи равновесия. При этом в качестве γ может выступать любая симметричная положительно определенная $m \times m$ -матрица.

Принцип скоростного градиента, родившийся в недрах кибернетики, является примером формализации философского принципа единства законов развития в природных, технических и социальных системах^{**)}). Интересно, что системы в неживой природе стремятся к росту энтропии, живые системы – к ее убыванию, а в технике встречаются и те, и другие, но АСГ могут описывать динамику систем независимо от этих обстоятельств.

Возникающие междисциплинарные связи оказываются плодотворными и для самой кибернетики. Например, пытаясь представить в виде АСГ уравнения Лагранжа 2-го рода, описывающие сложные механические системы, мы приходим к необходимости расширить понятие скоростного градиента на случай переменных метрических свойств пространства входов $\{\theta\}$. Это соответствует переходу от функции Ляпунова (2.30) к функции

$$V(x, \theta, t) = Q(x, t) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_*)^T R(x, t)(\theta - \theta_*), \quad (\text{П5.10})$$

где $R(x, t) = R^T(x, t) > 0$ – метрическая (кинетическая) матрица. АСГ с переменной метрикой имеет вид^{***)}

$$R(x, t)\ddot{\theta} = -\nabla_{\theta} Q - \dot{R}(\theta - \theta_*), \quad (\text{П5.11})$$

$$\text{где } \dot{R} = \frac{\partial R(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial R(x, t)}{\partial x} \cdot F(x, \theta, t)$$

и не только охватывает уравнения Лагранжа, но и является источником новых алгоритмов управления и адаптации.

К новым классам алгоритмов приводят также попытка введения в АСГ вихревых движений путем добавления к правой части (П5.2) линейных функций состояния системы (П5.1) с кососимметрической мат-

^{*)}Дьярмат И. Неравновесная термодинамика. – М.: Мир, 1974.

^{**) Мoiseев Н.Н. Алгоритмы развития. – М.: Наука, 1987.}

^{***)}Фрадков А.Л. Скоростные модели динамики, управления и адаптации непрерывных систем / Адаптивное управление технологическими процессами и производством. – Л.: ЛДНТП, 1990.

рицей коэффициентов. Этот подход соответствует использованию несекущих парабельных функций Ляпунова (см. § 3.5) и позволяет улучшить индентифицирующие свойства алгоритмов.

В заключение приведем обобщение принципа скоростного градиента на стохастические системы, полезное при построении моделей динамики, управления и адаптации. Пусть система описывается вместо (П5.1) стохастическим дифференциальным уравнением

$$dx = F(x, \theta, t)dt + G(x, \theta, t)dw(t), \quad (\text{П5.12})$$

где $w(t)$ — стандартный r -мерный винеровский процесс, $G(x, \theta, t)$ — $n \times r$ -матрица интенсивностей шумов. Пусть задана целевая функция $Q(x, t) \geq 0$. Естественным стохастическим аналогом АСГ (П5.2) является алгоритм

$$d\theta = -\Gamma \nabla_{\theta} \mathcal{L}Q, \quad (\text{П5.13})$$

где $\mathcal{L}Q(x, \theta, t) = (\nabla_x Q)^T F(x, \theta, t) + \frac{1}{2} \text{Sp}[G^T (\nabla^2 Q) G]$ — производящий оператор процесса (П5.12) при $\theta = \text{const}$. Условия применимости алгоритма (П5.13) аналогичны теоремам гл. 2. Например, условие достижимости Д2 формулируется как существование вектора θ_* и числа $\rho_0 > 0$ таких, что

$$\mathcal{L}Q(x, \theta_*, t) \leq -\rho_0 Q(x, t).$$

КОММЕНТАРИИ И БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К главе 1

§ 1.2. Изложение следует в основном [57]. Более общие постановки задач синтеза адаптивных систем можно найти в [164, 165, 177, 178]. Существует другой подход к формализации задачи адаптивного управления, когда считается, что вектор неизвестных параметров меняется во времени (дрейфует), но его начальное значение известно (т.е. априорная неопределенность уступает место текущей неопределенности, порожденной нестационарностью). Теоретически этот вариант исследован слабо. Для адаптивного управления в условиях сочетания априорной и текущей неопределенности можно использовать методы, развитые в [82].

§ 1.3. Точные условия применимости алгоритма (1.27) и его регуляризованные варианты, по-видимому, впервые были представлены независимо в докладах Ю.И. Неймарка и автора на IX Всесоюзной школе-семинаре по адаптивным системам (январь 1978 г., Алма-Ата, материалы докладов опубликованы в работах [124, 185]). Условия применимости алгоритма (1.27) с выпуклой регуляризующей (штрафной) функцией были сформулированы в [123]. В частном случае линейно-квадратичной задачи регуляризация алгоритма адаптации с квадратичной штрафной функцией предлагалась в [229, 237, 248] (для систем с явной эталонной моделью), а также в [182] (для систем с неявной эталонной моделью). Существующие подходы к управлению в условиях неопределенности достаточно полно представлены в справочнике [163], который является плодом коллективной работы представителей различных научных направлений.

К главе 2

§ 2.3. Теорема 2.1 для случая $\rho(Q) = \alpha_0 Q$ доказана в [184], близкие утверждения имеются в [57, 123, 178]. Утверждения, близкие к теоремам 2.2–2.7, приведены в [12, 189, 190]. Запись АСГ в конечной форме с переменным γ использовалась А.А. Стоцким, а алгоритмы с вырожденной матрицей усиления введены в рассмотрение Б.Р. Андриевским. Теорема 2.8 публикуется впервые.

§ 2.4. В случае разрывной функции обратной связи в системах с АСГ могут возникать скользящие режимы. Условия их существования и устойчивости можно исследовать методами [43, 173]. Определения оценочной оптимальности и доказательство теоремы 2.13 приводятся впервые.

§ 2.5. Условия устойчивости стохастических систем с АСГ для линейных ОУ опубликовались в [165]. Теоремы 2.15, 2.16 публикуются впервые, теорема 2.17 анонсирована в [18].

§ 2.6. Теоремы 2.18, 2.19 сформулированы в [191]. Аналог теоремы 2.18 для линейных ОУ имеется в [229].

§ 2.7. Прием введения в систему дополнительных фильтров для обеспечения нужной степени сглаживания сигналов использовался неоднократно [215, 232, 248, 249].

§ 2.8. Алгоритм (2.76) для частного случая (интегральный квадратичный целевой функционал, линейный ОУ) описан в [228, 257]. Алгоритмы, близкие к (2.77), (2.78), предложены А.А. Красовским (см. [29]), для линейных ОУ – в [257].

§ 2.9. Приведенный здесь пример, как и термин "ускоренческий градиент", подсказаны В.Н. Буковым.

К главе 3

§ 3.1. Методика синтеза АдСУ описана в [57, 178]. Обзор различных алгоритмов адаптивного (и не только адаптивного) управления с единой точки зрения, основанной на методе скоростного градиента, опубликован в [12] и использован в главах 2 и 3.

§ 3.2. Представленные здесь методы синтеза алгоритмов адаптации можно упростить [57, 178], исключив при помощи частотной теоремы [43, 206] процедуру решения уравнения Ляпунова.

При этом обнаруживается, что ЭМ должна удовлетворять условию пассивности. В.В. Запородько обнаружил, что достаточно потребовать строгой минимально-фазовости ЭМ, т.е. ЭМ может быть и неустойчивой. Случай модульного целевого функционала рассматривался в [27]. Алгоритмы в конечно-дифференциальной форме изучались в [24, 25, 138, 139] (с позиций метода функций Ляпунова) и в [239] (методом гиперустойчивости). Алгоритм (3.29) предложен в [12]. Другой способ "развязывания" динамики процессов адаптации и управления, основанный на аналогичной модификации ЭМ, предложен в [171]. Условия допустимости замены B на B_M были найдены О.П. Томчиной.

§ 3.3. Структуры и свойства адаптивных систем прямого управления с НЭМ (задача регулирования, теоремы 3.1, 3.2) описаны в [181]. Распространение этих результатов на многомерные ОУ сделано в [182, 183], на стохастические ОУ – в [165], на задачу слежения – в [10]. Доказательства основаны на теоремах о существовании решений условных матричных неравенств (см. Приложение 2); для нелинейных ОУ, кроме того, используются теоремы двойственности в невыпуклых экстремальных задачах (см. Приложение 3). Случай $u = x$ (полное измерение вектора состояния) рассматривался также в [193].

Если алгоритм адаптации брать в конечной форме, то получаются хорошо известные структуры: для линейных алгоритмов – это системы с большим коэффициентом усиления ("мееровские структуры") [114], для знаковых – системы с переменной структурой, рассмотренные в работах С.В. Емельянова, В.И. Уткина и др. (см., например, [173]). Подробнее об этом – в [12]. Алгоритмы адаптации в конечно-дифференциальной форме (сигнально-параметрические) рассматривались в [11, 12, 167]. Б.Р. Андриевским предложены структуры, основанные на сочетании прямого и идентификационного подходов [11]. Теорема 3.3 публикуется впервые. Алгоритм, близкий к (3.41), (3.43), применялся А.М. Поповым к задаче адаптивного регулирования температуры перегретого пара.

§ 3.4. Подробнее см. [12, 57].

§ 3.5. Результаты публикуются впервые, хотя были получены в 1974 г.

§ 3.6. Недостаток места не позволил изложить результаты по адаптивному управлению объектами с последействием. По этому вопросу см. [91] (для ЯЭМ) и [6, 197] (для НЭМ); по синтезу адаптивных наблюдателей (идентификаторов состояния) см. [28, 248].

К главе 4

Близкие вопросы, но с иных позиций рассмотрены в главе 11 блестяще написанного учебника [135].

§ 4.1. Известны способы сведения задачи адаптивного управления к задачам оптимизации: в детерминистском (минимаксном) варианте [103], в стохастическом – § 4.4, а также [202].

§ 4.3. Подробнее алгоритмы метода РЦН рассмотрены в [178]. Неявные алгоритмы предложены в [187].

§ 4.4. Алгоритмы стохастической аппроксимации изучены достаточно подробно. Получены асимптотические [141] и неасимптотические [203] оценки скорости сходимости, условия асимптотической нормальности [142], робастности [202] и т.д. Многие результаты распространены на случай зависимых помех [140, 176, 177, 223, 238, 242].

§ 4.5. Формула (4.40) выведена Д.Л. Егоренковым.

§ 4.6. Теорема 4.5 следует из теоремы 4.8, доказанной в [106].

§ 4.7. Алгоритм (4.52) – (4.59) предложен в [54].

§ 4.10. Результаты, аналогичные теореме 4.11 для более общих случаев, в частности при $p > 1$, можно найти в [177, 178]. АдСУ, описанная в п. 4.10.2, относится к классу систем с идентификатором и прогнозирующей моделью [29, 177, 201, 215, 227]. Этот подход распространен на нелинейные ОУ [80]. Синтез АдСУ при упрощенной структуре основного контура (типовые ПИ-, ПИД-законы) проведен в [146, 217, 251], а для неминимально-фазовых ОУ – в [234]. Интенсивно исследуются алгоритмы адаптации, основанные на методе инструментальных переменных [157,

201, 244], а также алгоритмы, использующие модель дрейфа параметров ОУ [82]. Б.С. Люблинским предложен алгоритм регулирования для ОУ с переменным запаздыванием, включающий адаптивный упредитель Смита [54].

§ 4.11. Теоретическому сравнению алгоритмов адаптивного управления посвящено сравнительно мало работ. В этом параграфе предпринимается попытка сравнить не только алгоритмы, но и сами постановки задач (детерминистскую и стохастическую).

К главе 5

Изложение следует, в основном, работам [56, 186, 191, 192]. Метод непрерывных моделей развит в работах Д.П. Деревицкого и А.Л. Фрадкова [55–57], Л. Льюнга [241, 244–245], Г. Кушнера и Д. Кларка [238] (см. также [89, 102, 223, 224] и библиографию в [57]). Теоремы 5.1–5.3 доказаны в [192], теорема 5.4 – в [191]. Утверждения, близкие к теоремам 5.5, 5.6, имеются в [57].

Другие методы синтеза адаптивного управления в сложных системах на основе декомпозиции и децентрализации содержатся в [38, 136, 153, 232, 253, 254, 255, 259].

К главе 6

§ 6.1. Изложение основано на результатах [1, 115, 149].

§ 6.2. Инструментальная программная система автоматизации анализа и синтеза динамических систем АВАНС разработана в Ленинградском механическом институте и сдана в ГОСФАП (Гос. рег. № 50870000052). Краткое описание языка АВАНС (по материалам В.Н. Уткина) помещено в Приложении 4 (см. также [163]). Более подобные сведения можно найти в [1, 131].

§ 6.3. Рассматриваемые в п. 6.3.1 алгоритмы с неявной ЭМ синтезированы Б.Р. Андриевским и А.А. Стоцким. Вычислительные эксперименты по настройке и испытанию алгоритмов (п. 6.3.2) проведены А.А. Стоцким по методике, предоставленной Е.А. Гребенюк. Другие результаты экспериментального сравнения алгоритмов имеются в [157, 233].

§ 6.4. Изложенные результаты получены совместно с М.Н. Береговым. Их смысл можно оценить словами Р. Беллмана: "Математики занимаются тем, что превращают естественные науки в точные" [220].

§ 6.5. Изложение следует, в основном, работе [218]. Методы искусственного интеллекта (теория нечетких множеств, экспертные системы и т.п.) все чаще используются как при синтезе, так и при реализации адаптивных систем управления (см., например, [212, 213]). Этот процесс стимулируется распространением персональных ЭВМ [48].

К главе 7

При изложении использованы материалы, любезно предоставленные В.И. Андреевым и А.Ю. Вальчихиным, § 7.4 основан на результатах [54]. Другие методы адаптивного управления ядерным реактором рассмотрены в [57, 58, 222].

К главе 8

Приведем еще одно мнение, дополняющее сказанное в § 1.1: "Разработка методов адаптивного управления для агрокосистем представляет собой актуальную проблему, требующую скорейшего решения" [159].

§ 8.1. Здесь изложены результаты [188, 189]. Другие методы адаптивного управления динамикой популяций предложены в [76, 258]. Постановки задач управления в экологии имеются также в [60, 111, 121, 143, 156, 158, 159].

§ 8.3. Использованная здесь математическая модель предложена в [21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автоматизированное проектирование алгоритмических структур систем управления / Андреевский Б.Р., Деревицкий Д.П., Уткин В.Н., Фрадков А.Л. — Л.: ЛМИ, 1985. — 100 с.
2. Адаптивные системы автоматического управления / Под ред. В.Б. Яковлева. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. — 204 с.
3. Аксенов Г.С., Фомин В.Н. О линейных адаптивных системах управления // Методы вычислений. — Л.: ЛГУ, 1973. — С. 95–116.
4. Аксенов Г.С., Фомин В.Н. Метод функций Ляпунова в задаче синтеза адаптивных регуляторов // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. — М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1979. — С. 69–93.
5. Альбер Я.И., Шильман С.В. Неасимптотические оценки скорости сходимости стохастических итеративных алгоритмов // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 1. — С. 41–52.
6. Алиев Р.А., Шубладзе А.М., Джабаров С.М. Адаптивный ПИ-регулятор // Приборы и системы управления. — 1977. — № 1. — С. 6–9.
7. Анализ и синтез на ЭВМ систем управления / А.А. Воронов, И.А. Орурк, Г.А. Дицук и др. — Л.: Машиностроение, 1984.
8. Анализ требований к электромеханическим модулям постоянного тока промышленных роботов / В.М. Казанский, Ю.А. Сабинин, Л.И. Малинин и др. // Электричество. — 1983. — № 2. — С. 1–8.
9. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
10. Андреевский Б.Р. Синтез адаптивных систем слежения с неявной эталонной моделью методом матричных неравенств // Оптимальные и адаптивные системы. — Фрунзе: Фрунзенский политехн. ин-т, 1979. — С. 20–25.
11. Андреевский Б.Р., Березин А.В., Стоцкий А.А. Алгоритмы идентификации в адаптивных системах управления с неявной эталонной моделью // Тез. докл. Всесоюз. совещания-семинара: "Проблемы оптимизации и управления динамическими системами в машино- и приборостроении". — М.: МИЭМ, 1987. — С. 7.
12. Андреевский Б.Р., Стоцкий А.А., Фрадков А.Л. Алгоритмы скоростного градиента в задачах управления и адаптации // Автоматика и телемеханика. — 1988. — № 12. — С. 3–39.
13. Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л. Анализ динамики одного алгоритма адаптивного управления линейным динамическим объектом // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. — М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1976. — С. 99–103.
14. Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л. Адаптивные ПИ-регуляторы с неявной эталонной моделью для многорежимных объектов // Управление объектами с нестационарными характеристиками. — Новосибирск: НЭТИ, 1986.
15. Андronov A.A., Понtryagin L.S. Грубые системы // ДАН СССР. — 1937. — Т. 14, № 5. — С. 247–250.
16. Афанасьев А.М. Расчет оптимального энергораспределения в реакторе // Атомная энергия. — 1983. — Т. 54, № 5. — С. 368–370.

17. Афанасьев В.Н., Данилина А.Н. Алгоритмическое конструирование систем управления с неполной информацией. — М.: МИЭМ, 1985. — 94 с.
18. Барсуков В.Б., Касаткин В.В., Фрадков А.Л. Метод скоростного градиента в задачах синтеза многосвязных адаптивных систем управления в условиях помех и фазовых ограничений // Управление многосвязными системами. — М.: ВИНИТИ, 1984. — С. 106–107.
19. Бать Г.А., Коченов А.С., Кабанов Л.П. Исследовательские ядерные реакторы. — М.: Атомиздат, 1972. — 272 с.
20. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 598 с.
21. Бермант М.А., Семенов Л.К., Сулицкий В.Н. Математические модели и планирование образований. — М.: Наука, 1972.
22. Бесекерский В.А., Небылов А.В. Робастные системы автоматического управления. — М.: Наука, 1983. — 240 с.
23. Бондарко В.А., Пихтарников А.Л., Фрадков А.Л. Синтез адаптивной системы стабилизации линейного объекта с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 12. — С. 95–103.
24. Борцов Ю.А., Поляхов Н.Д., Томчина О.П. О сходимости алгоритмов адаптивного управления сложными динамическими объектами // Тез. докл. Всесоюз. совещания-семинара "Проблемы оптимизации и управления динамическими системами в машино- и приборостроении". — М.: МИЭМ, 1987. — С. 22.
25. Борцов Ю.А., Поляхов Н.Д., Путов В.В. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. — Л.: Энергоатомиздат, 1984. — 216 с.
26. Браверман Э.М., Пятницкий Е.С. Прохождение случайного сигнала через абсолютно устойчивые системы // Автоматика и телемеханика. — 1971, № 2. — С. 36–41.
27. Брусин В.А., Лапшина М.В. Об одном классе непрерывных алгоритмов адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 10. — С. 81–90.
28. Брусин В.А., Максимов Ю.М. Асимптотическое восстановление состояния в условиях неопределенности модели объекта // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 2. — С. 3–12.
29. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. — М.: Наука, 1987.
30. Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории сложных систем. — М.: Сов. радио, 1973. — 439 с.
31. Бутузов В.Ф. Асимптотические формулы для решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных на полу бесконечном промежутке // Вестник МГУ. — 1963. — № 4. — С. 3–14.
32. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Федорюк М.В. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки. Математический анализ, 1967. — М.: ВИНИТИ, 1969. — С. 5–73.
33. Ван-дер-Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний. — М.: Связьиздат. — 1935.
34. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. — М.: Наука, 1979. — С. 424.
35. Вентцель Е.С. Исследование операций. — М.: Наука, 1987. — 208 с.
36. Влияние автоматического регулирования на надежность парогенераторов / А.С. Корецкий и др. // Теплоэнергетика. — 1973. — № 10. — С. 46–50.
37. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. — М.: Высшая школа. — Часть I, II. — 1985.
38. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. — М.: Наука, 1985. — 352 с.
39. Воронов А.А., Рутковский В.Ю. Современное состояние и перспективы развития адаптивных систем // Вопросы кибернетики. Проблемы теории и практики адаптивного управления. — М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1985. — С. 5–48.
40. Востриков А.С., Уткин В.И., Французова Г.А. Системы с производной вектора состояния в управлении // Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 3. — С. 22–25.
41. Входной язык системы автоматизации анализа и синтеза адаптивных систем управления / Андриевский Б.Р., Спиридонов А.А., Уткин В.Н., Фрадков А.Л. и др. // Интерактивная технология в САПР. — Таллин. — С. 11–12.

42. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
43. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
44. Геращенко Е.И., Геращенко С.М. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. — М.: Наука, 1975. — 296 с.
45. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наукова Думка, 1968. — 356 с.
46. Горбунов В.П., Исаев Н.В., Шмоник Ю.В. Методы и программы оптимального регулирования поля энерговыделения в РБМК // Атомная энергия. — 1985. — Т. 58, № 6. — С. 450—453.
47. Горяченко В.Д. Методы исследования устойчивости ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1977. — 296 с.
48. Громов Г.Р. Национальные информационные ресурсы. — М.: Наука, 1984. — 240 с.
49. Грубов О.Е., Касаткин В.В. Разработка и внедрение адаптивных АСУ ТП текстильной промышленности // Всесоюз. конф. "Теория адаптивных систем и ее применения". Тез. докл. и сообщений. — М. — Л.: Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика" АН СССР, 1983. — С. 291.
50. Гусев С.В. Конечно-сходящийся алгоритм восстановления функции регрессии и его применение в задачах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. — 1989. — № 3. — С. 79—85.
51. Дегтярев О.В., Евстифеев В.В. Модификации алгоритмов настройки параметров в градиентных самоастраивающихся системах с эталонной моделью // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 3. — С. 103—112.
52. Деревицкий Д.П. Метод прототипов при автоматизированном проектировании дискретных адаптивных систем // Вопросы кибернетики. Актуальные задачи адаптивного управления. — М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1982. — С. 68—90.
53. Деревицкий Д.П., Люблинский Б.С., Фрадков А.Л. Применение методов адаптивного управления в АСУ ТП и при экспериментальных исследованиях // Энергомашиностроение. — 1983. — № 6. — С. 35—36.
54. Деревицкий Д.П., Люблинский Б.С., Фрадков А.Л. Методы синтеза адаптивных систем управления электрооборудованием. — НИИ Экономики в энергетическом машиностроении, 1986. — 50 с.
55. Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л. Две модели для анализа динамики алгоритмов адаптации // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 1. — С. 67—75.
56. Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л. Метод усреднения для дискретных стохастических систем и его применение в задачах адаптивного управления // Стохастическая оптимизация. Междунар. конф. Тез. докл. Часть I. — Киев: ИК АН УССР, 1984. — С. 74—76.
57. Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л. Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. — М.: Наука, 1981. — 216 с.
58. Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л., Цыкунов А.М. Адаптивная идентификация объектов с распределенными параметрами // Труды III Всесоюз. межвуз. конф. по технической кибернетике. — Киев: КПИ, 1975. — С. 72—75.
59. Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивная оптимизация нелинейного объекта в условиях помех // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. — М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1976. — С. 139—141.
60. Динамика эколого-экономических систем. — Новосибирск: Наука, 1981.
61. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М.: Мир, 1968.
62. Елисеев В.Д. Метод синтеза многомерных самоастраивающихся систем управления // Автоматика и телемеханика. — 1977. — № 4. — С. 66—74.
63. Емельянов И.Я., Ефанов А.И., Константинов Л.В. Научно-технические основы управления ядерными реакторами. — М.: Энергоатомиздат, 1981. — 360 с.
64. Емельянов И.Я., Подлазов Л.Н., Алексаков А.Н. Синтез системы локальных автоматических регуляторов для энергетических реакторов // Атомная энергия. — 1982. — Т. 53, № 5. — С. 301—305.
65. Емельянов С.В. Бинарные системы автоматического управления. — М.: МНИИПУ, 1984. — 314 с.

66. Емельянов С.В., Коровин С.К. Расширение множества типов обратных связей и их применение при построении замкнутых динамических систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1981. – № 5.
67. Емельянов С.В., Коровин С.К., Сизиков В.И. Принципы построения и общие методы синтеза бинарных систем управления неопределенными нелинейными объектами // ДАН СССР. – 1985. – Т. 281, № 4. – С. 810–814.
68. Ермолов Ю.М. Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976. – 239 с.
69. Захаров М.Г., Кульчицкий О.Ю., Первозванский А.А. Экономный алгоритм адаптивного управления многомерным статическим объектом // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 9. – С. 70–77.
70. Земляков С.Д., Павлов Б.В., Рутковский В.Ю. Структурный синтез самонастраивающейся системы управления // Автоматика и телемеханика. – 1969. – № 8. – С. 53–63.
71. Земляков С.Д., Рутковский В.Ю. Синтез алгоритмов изменения перестраиваемых коэффициентов в самонастраивающихся системах управления с эталонной моделью // ДАН СССР. – 1967. – Т. 174, № 1. – С. 47–49.
72. Земляков С.Д., Рутковский В.Ю. Условия функционирования многомерной самонастраивающейся системы управления с эталонной моделью при постоянно-действующих параметрических возмущениях // ДАН СССР. – 1978. – Т. 241, № 2. – С. 301–304.
73. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 495 с.
74. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
75. Иванов В.А. Регулирование энергоблоков. – Л.: Машиностроение, 1982. – 310 с.
76. Идрисов Ф.Ф., Рюмкин А.И. Об адаптивном управлении процессом миграции // Прикладная математика и кибернетика, вып. I. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1976.
77. Казакевич В.В., Родов А.Б. Системы автоматической оптимизации. – М.: Энергия, 1977. – 288 с.
78. Казаков И.Е., Еланов Л.Г. К теории самонастраивающихся систем с поиском градиента методом вспомогательного оператора // Труды II Международного конгресса ИФАК. – М.: Наука, 1965.
79. Калман Р., Фалл П., Арбид М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971. – 400 с.
80. Каминскас В.А., Таллат-Кялпша Ч.К., Шидлаускас К.А. Адаптивное управление с минимальной дисперсией экстремальными объектами // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 9. – С. 84–93.
81. Канюковский Ю.М., Кюнов П.С., Некрылова З.В. Предельные теоремы для процессов стохастического программирования. – Киев: Наукова Думка, 1980. – 156 с.
82. Катковник В.Я., Кульчицкий О.Ю., Хейсин В.Е. Адаптивное управление существенно нестационарными статическими и динамическими объектами // Вопросы кибернетики. Проблемы теории и практики адаптивного управления. – М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1985. – С. 60–71.
83. Катковник В.Я., Первозванский А.А. Методы поиска экстремума и задача синтеза многомерных систем управления // Адаптивные автоматические системы. – М.: Советское радио, 1972. – С. 17–43.
84. Катковник В.Я., Полуэктов Р.А. Многомерные дискретные системы управления. – М.: Наука, 1966. – 416 с.
85. Кельманс Г.К., Позняк А.С., Черницер А.В. Локально оптимальное управление объектами с неизвестными параметрами // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 10. – С. 78–93.
86. Климушев А.И., Красовский Н.Н. Равномерная асимптотическая устойчивость системы дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных // Прикладная механика и механика. – 1961. – Т. 25, № 4. – С. 680–694.
87. Клюева А.С., Лебедева А.Т., Новиков С.И. Наладка систем автоматического регулирования барабанных паровых котлов. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 280 с.
88. Коган М.М., Неймарк Ю.И. Адаптивное локально-оптимальное управление // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 8. – С. 126–136.

89. Коган М.М., Неймарк Ю.И., Ронин Е.И. Поисковая адаптивная стабилизация и управление с экстраполатором // Вопросы кибернетики. Актуальные задачи адаптивного управления. – М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1982. – С. 103–116.
90. Козлов Ю.М., Юсупов Р.М. Беспоисковые самонастраивающиеся системы. – М.: Наука, 1969. – 455 с.
91. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
- 91а. Коростелев А.П. Стохастические рекуррентные процедуры. – М.: Наука, 1984. – 208 с.
92. Косиков В.С., Кругтова И.Н., Павлов Б.В. Построение линейных моделей беспоисковых самонастраивающихся систем // Автоматика и телемеханика. – 1976. – № 1. – С. 106–116. – № 2. – С. 116–130.
93. Костюк В.И. Беспоисковые градиентные самонастраивающиеся системы. – Киев: Техника, 1969. – 275 с.
94. Красовский А.А. Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 468 с.
95. Красовский А.А. Оптимальные алгоритмы в задачах идентификации с адаптивной моделью // Автоматика и телемеханика. – 1976. – № 12. – С. 75–82.
96. Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрек В.С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. – М.: Наука, 1977. – 271 с.
97. Красовский Н.Н. Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений // Прикладная математика и механика. – 1953. – Т. 17. – № 3.
98. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.
99. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. – К.: Изд-во АН УССР, 1937.
100. Кульчицкий О.Ю. Адаптивное управление линейными динамическими объектами с помощью модифицированного метода наименьших квадратов // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 1. – С. 89–105.
101. Кульчицкий О.Ю. Системный анализ основных понятий теории адаптивных систем // ЛПИ им. М.И. Калинина, 1984. – 43 с. – Депонировано в ВИНИТИ от 24.4.84, № 3158–84.
102. Кульчицкий О.Ю. Метод усреднения по ансамблю решений стохастических уравнений, описывающих алгоритмы адаптации // ЛПИ им. М.И. Калинина, 1984. – 48 с. – Депонировано в ВИНИТИ от 11.5.84, № 3645–84.
103. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход. – Киев: Наукова Думка, 1985. – 247 с.
104. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
105. Люблинский Б.С. Алгоритм адаптивной оптимизации статического объекта при неполной информации об ограничениях // Всесоюз. конф. "Теория адаптивных систем и ее применения". Тез. докл. и сообщений. – М. – Л.: НС по кибернетике, 1983. – С. 113–115.
106. Люблинский Б.С., Фрадков А.Л. Адаптивная стабилизация нелинейных объектов с неявно заданной статической характеристикой // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 4. – С. 126–136.
107. Макаров И.М., Рахманкулов В.З. Принципы построения гибкопереналаживаемых автоматизированных производств // Вопросы кибернетики. Проблемы теории и практики адаптивного управления. – М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1985. – С. 116–122.
108. Максимкин Н.Н. Об экспоненциальной и асимптотической устойчивости / Метод функций Ляпунова в динамике нелинейных систем. – Новосибирск: Наука, 1983. – С. 96–102.
109. Мартынюк А.А. Устойчивость движений сложных систем. – К.: Наукова Думка, 1975. – 352 с.
110. Математическая теория планирования эксперимента / Под ред. С.М. Ермакова. – М.: Наука, 1983. – 392 с. – (СМБ).

111. Математические модели биологических сообществ и задачи управления / А.И. Брежнев, Л.Р. Гинзбург, Р.А. Полузотов и др. // Математическое моделирование в биологии. – М.: Наука, 1975. – С. 92–112.
112. *Матросов В.М.* К теории устойчивости движения // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. 26, № 6. – С. 992–1002.
113. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем. – Новосибирск: Наука, 1980.
114. *Мееров М.В.* Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. – М.: Наука, 1967. – 423 с.
115. Методическое и программное обеспечение автоматизированного проектирования алгоритмических структур адаптивных АСУ ТП / М.Н. Берегов, В.В. Касаткин, А.Л. Фрадков и др. // Всесоюзн. конф. по автоматизации проектирования систем управления. – М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1984. – С. 145–148.
116. *Митришкин Ю.В.* Управление динамическими объектами с применением автоматической настройки. – М.: Наука, 1985. – 160 с.
117. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наукова думка, 1971. – 440 с.
118. *Митропольский Ю.А., Хома Г.П.* Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. – Киев: Наукова Думка, 1983. – 216 с.
119. *Михайлова Н.В., Чирков М.К.* К задаче об адаптивном линейном преобразователе // Вычислительная техника и вопросы кибернетики. Вып. 8. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1971. – С. 101–107.
120. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.
121. *Моисеев Н.Н., Александров В.В., Тарко А.М.* Человек и биосфера. – М.: Наука, 1985.
122. *Назин А.В., Позняк А.С.* Адаптивный выбор вариантов. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
123. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
124. *Неймарк Ю.И.* Автоматные модели управления и адаптации // Труды IX Всесоюзной школы-семинара по адаптивным системам. – Алма-Ата: КазПТИ, 1979. – С. 107–110.
125. *Неймарк Ю.И., Берман В.Ш., Коган М.М., Ронин Е.И.* Исследование идеализированной градиентной системы адаптивной стабилизации объекта 2-го порядка // Динамика систем. – Горький. – 1979. – Вып. 18. – С. 51–64.
126. *Неймарк Ю.И., Ронин Е.И., Берман В.Ш., Коган М.М.* Адаптивная стабилизация динамических объектов // Рефераты докладов VII Всесоюз. совещ. по проблемам управления. – Минск, 1977. – С. 105–107.
127. *Нильсон Н.* Принципы искусственного интеллекта. – М.: Радио и связь, 1985.
128. *Норенков И.П.* Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем. М.: Высш. школа, 1980. – 311 с.
129. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой информации. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
130. *Ортега Д., Рейнболт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
131. Основы анализа и синтеза сложных динамических систем с использованием пакета прикладных программ АВАНС / Б.Р. Андриевский, Д.П. Деревицкий, В.В. Касаткин и др. – Л.: ЛМИ, 1988. – 87 с.
132. Основы управления технологическими процессами / Под ред. Н.С. Райбмана. – М.: Наука, 1978. – 440 с.
133. *Острем К.* Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Мир, 1973. – 321 с.
134. *Острем К.* Адаптивное управление с обратной связью // ТИИЭР. – 1987. – Т. 75, № 2. – С. 4–41.
135. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. – М.: Наука, 1986. – 616 с.
136. *Первозванский А.А., Гайцгори В.Г.* Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. – М.: Наука, 1979. – 344 с.
137. *Петров А.И.* Статистический синтез адаптивных систем терминального управления с эталонной моделью // ДАН СССР. – 1978. – С. 298–301.

138. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Крутова И.Н., Земляков С.Д. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. — М.: Машиностроение, 1972. — 260 с.
139. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Земляков С.Д. Адаптивное координатно-параллельное управление нестационарными объектами. — М.: Наука, 1980. — 224 с.
140. Позняк А.С., Чиккин Д.О. Асимптотические свойства процедур стохастической аппроксимации при зависимых помехах // Автоматика и телемеханика. — 1984. — № 12. — С. 78—93.
141. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983. — 384 с.
142. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Псевдоградиентные алгоритмы адаптации и обучения // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 3. — С. 45—69.
143. Полузктов Р.А., Пых Ю.А., Швытов И.А. Динамические модели экологических систем. — Л.: Гидрометеоиздат, 1980. — 288 с.
144. Понtryгин Л.С., Родыгин Л.В. Асимптотическое поведение решений систем с малым параметром при высших производных // ДАН СССР. — 1960. — Т. 131, № 2. — С. 255—258.
145. Попов А.М., Фрадков А.Л. Адаптивное управление сингулярно возмущенными объектами // Труды XI Всесоюзного совещания по проблемам управления. — Ереван, 1983. — С. 166.
146. Попов В.Г., Пылаев Н.К., Ядыкин И.Б. Адаптивные дискретные ПИД-регуляторы для объектов управления с одним входом // Автоматика и телемеханика. — 1985. — № 10. — С. 78—87.
147. Построение экспертных систем / Под ред. Ф. Хейеса-Рота, Д. Уотермана, Д. Лената. — М.: Мир, 1987. — 441 с.
148. Потемкин В.Г. Методическое и программное обеспечение автоматизированного проектирования адаптивных систем // Всесоюз. конф. Теория адаптивных систем и ее применения. Тезисы докладов и сообщений. — М.—Л.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1983. — С. 327.
149. Принципы построения и входной язык САПР адаптивных систем управления / Б.Р. Андриевский, Д.П. Деревицкий, А.Л. Фрадков и др. // Вопросы кибернетики. Актуальные задачи адаптивного управления. — М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1982. — С. 68—90.
150. Путинцев В.А., Ядыкин И.Б. Нелинейные алгоритмы адаптации для многосвязанных объектов // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 6. — С. 85—95.
151. Пятницкий Е.С. Синтез управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1987. — № 3. — С. 92—99.
152. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Адаптивные модели в системах управления. — М.: Советское радио, 1966. — 159 с.
153. Растигин Л.А. Адаптация сложных систем. — Рига: Зиннатне. — 386 с.
154. Растигин Л.А. Современные принципы управления сложными объектами. — М.: Сов. радио, 1980. — 232 с.
155. Рина К.К., Фрадков А.Л. Оценки скорости сходимости некоторых алгоритмов случайного поиска // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. — М.: Научный совет по кибернетике АН СССР. — 1977. — С. 77—80.
156. Рюмкин А.И. Исследование задач управления межрайонной миграцией с помощью моделей обмена // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 6. — С. 121—130.
157. Саридис Дж. Самоорганизующиеся стохастические системы управления. — М.: Наука, 1980. — 400 с.
158. Свирижев Ю.М. О математических моделях биологических сообществ и связанных с ними задачах управления и оптимизации // Математическое моделирование в биологии. — М.: Наука, 1975. — С. 30—52.
159. Свирижев Ю.М., Логофет Д.О. О прикладных задачах математической экологии // Математическое моделирование. Процессы в сложных эколого-экономических системах. — М.: Наука, 1986. — С. 196—206.
160. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта. — М.: Мир, 1979. — 312 с.
161. Соколов В.Ф. Адаптивное субоптимальное управление в случае ограниченной помехи // Автоматика и телемеханика. — 1985. — № 9. — С. 78—86.

162. Соловьев В.В., Шрамко Л.С. Расчет и проектирование аналитических самонастраивющихся систем с эталонными моделями. — М.: Машиностроение, 1972. — 270 с.
163. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.
164. Срагович В.Г. Адаптивные управляющие системы и автоматы // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1972. — № 2.
165. Срагович В.Г. Адаптивное управление. — М.: Наука, 1981. — 382 с.
166. Стефани Е.П. Основы построения АСУ ТП. — М.: Энергоиздат, 1982. — 352 с.
167. Стоцкий А.А. Сигнально-параметрические алгоритмы адаптивного управления с неявной эталонной моделью // Микропроцессорные системы автоматизации технологических процессов. Тез. Всесоюз. конф. — Новосибирск: НЭТИ, 1987. — С. 78—79.
168. Тетерин А.В. Нелинейная параметрическая модель БСИС с эталонной моделью и ее применение для синтеза и анализа контура самонастройки // Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 12. — С. 76—84.
169. Тимофеев А.В. Адаптивное управление программным движением. — Л.: Энергия 1980.
170. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. — 1952. — Т. 31(73), № 3. — С. 575—586.
171. Томчина О.П. Управление динамикой процесса адаптации на основе модификации структуры эталонной модели // X Всесоюз. школа-семинар по адаптивным системам. — Минск: Изд-во БГУ, 1984. — С. 94.
172. Топчев Ю.И., Потемкин В.Г., Иваненко В.Г. Системы стабилизации. — М.: Машиностроение, 1974. — 248 с.
173. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1981. — 368 с.
174. Филипчук Е.В., Потапенко П.Т., Постников В.В. Управление нейтронным полем ядерного реактора. — М.: Энергоиздат, 1981. — 280 с.
175. Фомин В.Н. Математическая теория обучаемых опознавающих систем. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. — 235 с.
176. Фомин В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. — М.: Наука, 1984. — 288 с.
177. Фомин В.Н. Методы управления линейными дискретными объектами. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. — 336 с.
178. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
179. Фрадков А.Л. Некоторые конечно-сходящиеся алгоритмы решения бесконечных систем неравенств и их применение в теории адаптивных систем // Вестник ЛГУ. — 1972. — № 19. — С. 70—75.
180. Фрадков А.Л. Теоремы двойственности в некоторых невыпуклых экстремальных задачах // Сибирский математ. журн. — 1973. — № 3. — С. 357—383.
181. Фрадков А.Л. Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 12. — С. 96—103.
182. Фрадков А.Л. Метод синтеза алгоритмов адаптивной стабилизации линейного многосвязного динамического объекта // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. — М.: НС по кибернетике АН СССР, 1976. — С. 82—85.
183. Фрадков А.Л. Квадратичные функции Ляпунова в задаче адаптивной стабилизации линейного динамического объекта // Сиб. математ. журн. — 1976. — № 2. — С. 436—446.
184. Фрадков А.Л. Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 9. — С. 90—101.
185. Фрадков А.Л. Схема скоростного градиента в задачах адаптивного управления // Труды IX Всесоюз. школы-семинара по адаптивным системам. — Алма-Ата: Каз. ПИ. — 1979. — С. 139—143.
186. Фрадков А.Л. Разделение движений в адаптивных системах управления / Вопросы кибернетики. Теория и практика адаптивного управления. — М.: НС по кибернетике АН СССР, 1985. — С. 71—82.

187. Фрадков А.Л. Неявные градиентные алгоритмы адаптации / V Всесоюз. конф. по управлению в механических системах (тезисы докладов). – Казань: КАИ, 1985. – С. 100–101.
188. Фрадков А.Л. Методы адаптивного управления в системных исследованиях // Всесоюзная школа "Прикладные проблемы управления макросистемами". Тезисы докладов. – М.: ВНИИСИ, 1985.
189. Фрадков А.Л. Алгоритмы скоростного градиента в задачах адаптации и управления нелинейными системами // Проблемы динамики неоднородных систем. – М.: ВНИИСИ, 1985. – С. 46–58.
190. Фрадков А.Л. Интегро-дифференцирующие алгоритмы скоростного градиента // ДАН АН СССР. – Т. 288, № 4. – С. 832–835.
191. Фрадков А.Л. Алгоритмы скоростного градиента в задачах децентрализованного управления сложными системами // Прикладные проблемы управления в макросистемах. Тр. II Всесоюз. школы. – М.: ВНИИСИ, 1987.
192. Фрадков А.Л. Синтез адаптивных систем управления нелинейными сингулярно возмущенными объектами // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 6. – С. 100–110.
193. Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. – М.: Наука, 1977. – 248 с.
194. Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. – М.: ИЛ, 1948. – 456 с.
195. Хасьминский Р.З. О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром // Теория вероятностей и ее применения. – 1966. – № 2. – С. 240–259.
196. Хасьминский Р.З. Устойчивость дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
197. Цыкунов А.М. Адаптивное управление объектами с последействием. – М.: Наука, 1984. – 240 с.
198. Цыкунов А.М. Алгоритмы скоростного градиента для систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 3. – С. 97–106.
199. Цыпкин Я.З. Адаптация и обучение в автоматических системах. – М.: Наука, 1968. – 309 с.
200. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
201. Цыпкин Я.З., Кельман Г.К. Дискретные адаптивные системы управления // Итоги науки и техники. Сер. Техн. кибернетика. Т. 17. – М.: ВИНТИ, 1984. – С. 3–73.
202. Цыпкин Я.З., Позняк А.С. Рекуррентные алгоритмы оптимизации в условиях неопределенности // Итоги науки и техники. Техническая кибернетика. Т. 16. – М.: ВИНТИ, 1983. – С. 3–70.
203. Шальман М.И., Плютинский В.И. Контроль и управление на атомных электростанциях. – М.: Энергия, 1979. – 272 с.
204. Ядыкин И.Б. Адаптируемость регулятора и двухуровневые алгоритмы настройки параметров адаптивных систем управления // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 5. – С. 99–107.
205. Ядыкин И.Б., Шумский В.М., Овсепян Ф.А. Адаптивное управление непрерывными технологическими процессами. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 240 с.
206. Якубович В.А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. – 1962. – Т. 143, № 6. – С. 1304–1307.
207. Якубович В.А. Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения бесконечных систем неравенств // ДАН СССР. – 1966. – Т. 166, № 6. – С. 1308–1311.
208. Якубович В.А. К теории адаптивных систем // ДАН СССР. – 1968. – Т. 183, № 3. – С. 518–521.
209. Якубович В.А. Адаптивное субоптимальное управление линейным динамическим объектом при наличии запаздывания в управлении // Кибернетика. – 1976. – № 1. – С. 26–43.
210. Якубович В.А. Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. – М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1976. – С. 32–63.

211. Якубович В.А. Теоретические принципы построения самообучающихся роботов // Вопросы кибернетики. Проблемы теории и практики адаптивного управления. – М.: НС по кибернетике АН СССР, 1985. – С. 94–105.
212. Aliev R.A. Production control on the basis of fuzzy models//Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – V. 22, No 1/2. – P. 43–56.
213. Andersen T.R., Nielsen S.B. An efficient single output fuzzy control algorithm for adaptive applications//Automatica. – 1985. – No 5. – P. 539–546.
214. Arbel A., Tse E. Reduced-order models, canonical form and observers//Int. J. Control. – 1979. – V. 30, No 3. – P. 513–531.
215. Astrom K.J. Theory and Application of Adaptive Control—A Survey//Automatica. – 1983. – V. 19, No 5. – P. 471–486.
216. Astrom K.T., Borisson U., Ljung L., Wittermark B. Theory and application of adaptive regulators based on recursive identification//Automatica. – 1977. – V. 13, No 5. – P. 457–486.
217. Astrom K.T., Häggling T. Automatic tuning of Simple Regulators with specifications on phase and amplitude margins//Automatica. – 1984. – No 5. – P. 645–652.
218. Astrom K.T., Anton T.T., Artzen K.-E. Expert control//Automatica. – 1986. – No 3. – P. 277–286.
219. Avedian E. Modifitcirovannyye algoritmy Katchmarza dlya otsenki parametrov lineinych obyektov//Automatica i telemekhanika. – 1978. – No 5. – P. 64–72 (in Russian).
220. Bellman R. Eye of the hurricane: An autobiography. – Singapore: World Scientific Publ., 1984. – P. 344.
221. Bellman R., Zadeh L. Decision-making in a fuzzy environment//Management Science. – 1970. – V. 17, No 4. – P. 141–164.
222. Bereznai S.T., Sinha N.K. Adaptive control of nuclear reactors using a digital computer//IEEE Trans. Nucl. Sci. – 1971. – V. NS-18, N. 4. – P. 387–397.
223. Berman N., Feuer A., Wahnon E. Convergent analysis of smoothed stochastic gradient-type algorithm//Int. T. Syst. Sci. – 1987. – V. 18, No 6. – P. 1061–1078.
224. Bondarko V.A. Discretisation of continuous linear dynamic systems. Analysis of the methods//System and Control Letters. – 1984. – No 5. – P. 97–101.
225. Ertzberger H. Analysis and design of model reference following systems by state space techniques//Proc. TASS. – 1968. – P. 572–580.
226. Gawthrop P.T. Robust stability of a continuous-time self-tuning controller//Int. T. of Adaptive Control and Signal Processing. – 1987. – V. 1, No 1. – P. 31–48.
227. Goodwin G.C., Sin K.S. Adaptive Filtering, Prediction and Control. – N.J.: Prentice-Hall, 1984.
228. Goodwin G., Payne L. Rapprochement between continuous and discrete model reference adaptive control//Automatica. – 1986. – No 2. – P. 199–207.
229. Ioannou P.A., Kokotovic P.V. Adaptive Systems with reduced models//Lecture Notes on Control and Inf. Science. V. 47. – Heidelberg: Springer-Verlag, 1983. – 168 p.
230. Ioannou P.A., Kokotovic P.V. Robust redesign of adaptive control//IEEE Trans-Aut. Control. – 1984. – V. AC-29, No 3. – P. 202–211.
231. Ioannou P.A., Kokotovic P.V. Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control//Automatica. – 1984. – No 5. – P. 583–594.
232. Ioannou P.A., Kokotovic P.V. Decentralised adaptive control of interconnected systems with reduced-order models//Automatica. – 1985. – No 4. – P. 401–412.
233. Isermann R. Parameter adaptive control algorithms//Automatica. – 1982. – P. 513–528.
234. Kelmans G. Nepriamoe adaptivnoe upravlenie neminimalnofasovymi po pomeche dinamicheskimi obyektami//Avtomatika i telemekhnika. – 1987. – No 10. – P. 75–82 (in Russian).
235. Kiefer T., Wolfowitz T. Stochastic estimation of the maximum of a regression function// //Ann. Math. Stat. – 1952. – V. 23, No 3. – P. 462–466.
236. Kokotovic P.V. Recent trends in feedback design: An Overview//Automatica. – 1985. – No 3. – P. 225–236.
237. Kreisselmeier G., Narendra K.S. Stable model reference adaptive control in presence of bounded disturbances//IEEE Trans. Aut. Control. – 1982. – V. AC-27, No 6. – P. 1169–1175.
238. Kushner H.T., Clarke D.S. Stochastic approximation methods for constrained and unconstrained systems. – Springer-Verlag, 1978.

239. *Landau T.D.* Adaptive control systems: the Model Reference approach. – N.Y.: Marcel Dekker, 1979. – P. 406.
240. *Lindorff D.P., Carroll R.L.* Survey of adaptive control using Lyapunov design//Int. J. Contr. – 1973. – V. 18, No 5. – P. 897–914.
241. *Lion P.N.* Rapid identification of linear and nonlinear systems//AJAA Journal. – 1967. – V. 5. – P. 1835–1842.
242. *Ljung L.* Analysis of recursive stochastic algorithms//IEEE Trans. – 1977. – V. AC-22, No 4. – P. 551–575.
243. *Ljung L., Landau I.D.* Model reference adaptive systems and self-tuning regulators. Some connections//Preprints of the 7th Triennial World Congress of IFAC. – Finland, 1978. – V. 3. – P. 1973–1979.
244. *Ljung L., Söderström T.* Theory and practice of recursive identification. – Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1983.
245. *Ljung L.* System Identification: Theory for the user. – New Jersey: Prentice-Hall, 1987.
246. *Monopoli R.V.* Lyapunov's method for adaptive control system design//IEEE Trans. – 1967. – V. AC-12, No 3. – P. 334–336.
247. *Mari T., Derese I.A.* A brief summary of the bounds on the solution of the algebraic matrix equation in control theory//Intern. T. Cont. – 1984. – V. 39, No 2. – P. 247–256.
248. *Narendra K.S., Kudva P.* Stable adaptive schemes for system identification and control—Part I, II // IEEE Trans. – 1974. – V. SMC-4, No 6. – P. 542–560.
249. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Persistent Excitation in adaptive systems // Int. J. Control. – 1987. – V. 45, No 1. – P. 127–160.
250. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation // IEEE Trans. Aut. Control. – 1987. – No 2. – P. 134–145.
251. *Radke F., Isermann R.* A parameter-adaptive PID-Controller with stepwise parameter optimisation // Automatica. – 1987. – No. 4. – P. 449–458.
252. *Robbins H., Monroe S.* A stochastic approximation method // Ann. Math. Stat. – 1951. – V. 22, No 3. – P. 400–407.
253. *Saksena V.R., O'Reilly T., Kokotovic P.V.* Singular perturbations and time-scale methods in control theory. Survey 1976–1983 // Automatica. – 1984. – No 3. – P. 273–294.
254. *Sandell N.R. Athans Metal.* Survey of decentralized control methods for large-scale systems // IEEE Trans. Aut. Control. – 1978. – V. AC-23, No 2, P. 108–128.
255. *Siljak D.D.* Large-scale dynamic systems. – Amsterdam, North Holland 1978.
256. *Sobolev V.A.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // Systems & Control Letters. – 1984. – No 5. – P. 169–179.
257. *B.D.O. Anderson, R.R. Bitmead, C.R. Johnson et al.* Stability of adaptive systems. – Cambridge, MA: MIT Press, 1986. – P. 316.
258. *Walters C.* Adaptive management of renewable resources. – N.Y.: McMillan, 1986. – P. 374.
259. *Yanchevsky A.E.* Optimal decentralized controller design for multivariate plants // Int. T. Systems SCi. – 1987. V.18, No 1. – P. 177–187.
260. *Yuan J.S.C., Wonham W.M.* Probing signals for model reference identification // IEEE Trans. – 1977. – V. – AC-22, No 4. – P. 530–539.

Научное издание

ФРАДКОВ Александр Львович

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ

Заведующий редакцией *Л.А. Русаков*

Редактор *Д.С. Фурманов*

Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*

Технические редакторы *О.Б. Черняк, В.Н. Никитина*

Корректоры *О.А. Бутусова, Н.П. Круглова, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатющих автоматах

ИБ № 32568

Сдано в набор 09.04.90. Подписано к печати 14.06.90.

Формат 60 × 90 / 16. Бумага книжно-журнальная

Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная

Усл.печ.л. 18,5. Усл.кр.-отт. 18,5. Уч.-изд.л. 21,4

Тираж 2550 экз. Тип. зак. 186. Цена 4 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства "Наука"
630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25

Alexander L. FRADKOV: Adaptive Control in Large-scale Systems. — M.: Nauka, Phys & Math, 1989.

Alexander L. Fradkov, professor, D. Sci (Engineering), Leningrad College for Mechanics and USSR AS Leningrad Branch Institute for Machine Sciences. Vice-Chairman of the Leningrad Branch of the USSR Science & Engineering Committees Association (Committees for Automation & Control Systems and for Computer Science & Computers). One of the leading soviet experts in adaptive control. Preceeding monographs: "Adaptive Control for Dynamic Systems" (Nauka, 1981; coauthored by V.N. Fomin and V.A. Yakubovich) and "Applied Theory of Discrete Adaptive Control Systems" (Nauka, 1981; coauthored by D.P. Derevitski).

The book deals with a boundary sphere at the intersection of two branches of the modern control science, to wit, that of adaptive systems theory and that of the large-scale systems theory. The techniques presented in the book are aimed at one hand to overcome incertainty in the systems under study and to improve their performance by changing (adapting) their control algorithms; at the other hand those techniques are based on decomposition methods and on wide-scale applications of computers. The techniques presented in the book can be applied (and are being applied) to a wide class of large-scale systems (multiinput, nonlinear, nonstationary, stochastic systems etc) and enable to resolve problems both of centralized and decentralized control for technological processes, power stations control, transport systems, robots, agrotechnical and ecological systems.

The book is the first in the international monograph science literature to collect all the basic methods of adaptive control in large-scale systems and to systematically analyse all the wide collection of them elaborated by both soviet and foreign scientists within the last 20 years.

The basic idea of the analysis is Lyapunov's function—the state function of dynamic system, its derivative (increment) along the trajectories of the system meeting some inequalities. The author has managed to apply a number of the obtained results to the units described by implicitly given mathematical models such as functional and algebraic-differential equations, the models being characteristical to a lot of industrial processes, mechanical, economical and electronic systems.

The specific feature of the book is its popular explication of a number of prospectful problems and techniques that are going to become crucial for the adaptive systems theory in the decade to come: system design basing of reduced models (averaging techniques and singular perturbations techniques), robustness analysis of systems (comparation principle and Lyapunov's vector-function technique), comparative analysis of adaptation and control algorithms (fuzzy set theory techniques and expert systems techniques).

The style and general level in explication of the basic ideas have been made available to research engineers. It'll be sufficient for the reader to be able to use the techniques of linear algebra, mathematical analysis and control theory in the regular high school courses range. For the readers specifically interested in mathematical subtleties of the results under question the theorem proofs in the Addenda will be helpful.

The characteristic feature of the book is also that some of its sections are specified for system analysts who are to play an important part in successful resolution of the problems concerned, the part being so far somewhat underestimated. The titles of the sections are speaking for themselves:

2.9. Discussion of the results. Local or integral ones?

3.6. Signal or parametric ones?

4.2. The way to choose a design technique for the adaptive system.

4.11. Deterministic or stochastic ones?

5.4. Discrete or continuous ones?

6.1. Technique of the adaptive system design.

6.6. Adaptive or nonadaptive ones?

The presented techniques are being illustrated with examples in resolving some problems of nuclear power complexes control (including both experimental and industrial complexes) and those of ecological systems control and social systems control.

The book consists of Introduction, 8 Chapters, Conclusion, Addenda, Comments and List of References (260 titles). The text includes 10 Tables and 34 Figures.

Contents.

Chapter 1. Problems and Methods of Adaptive Control

Statements of adaptive systems design problems and a review of the modern approaches to their resolutions.

Chapter 2. Speed Gradient Algorithms

The most complete explication of the speed gradient technique which is the general technique to design algorithms of adaptation and control for continuous systems. The technique enables in particular to apply searchless selfadjustment techniques to nonlinear and nonstationary systems. Formulations of the theorems on stability, performance estimations, robustness and identifying properties for systems basing on speed gradient algorithms.

Chapter 3. Desing of Continuous Adaptive Systems

Basing on speed gradient techniques discussed above the various design techniques for model reference adaptive control algorithms are developed. The characteristic features of the techniques are their simple realization and wide range of applications which is most important when multigradient or large-scale systems are to be controlled. Parametric algorithms, signal ones and signal-parametric ones are analysed both in the case of output-error and equation-error systems and in that of identification problems.

Chapter 4. Desing of Discrete Adaptive Systems

Basing on the gradient techniques the techniques of recurrent goal inequalities, statistic approximations and a number of multistage techniques are being presented. Specific attention is put to regulation and optimisation problems in static systems, the questions being of large importance and application in the problems of industrial processes control.

Chapter 5. Adaptive Systems Decomposition basing on Movements Separation

Approximation techniques in adaptive systems analysis and design are being discussed. Decomposition is made using techniques of averaging, singular perturbations and that of continuous models for discrete stochastic systems. The procedures of analysis and design on the basis of reduced models, applicability conditions and accuracy estimations are given.

Chapter 6. Automation of Analysis and Design for Adaptive Systems

CAD for control systems is presented. Software tool system AVANS enables to both describe large-scale hierarhial systems and perform their simulation, optimisation, linearisation, frequency analysis, order reduction etc. The user may modify the input language with the macroprocessor at hand in order to produce for himself some convenient local and personal-oriented slangs. Some examples of control system design using AVANS-package and artificial intelligence techniques (fuzzy set techniques and those of expert systems) are given.

Chapter 7. Adaptive Control for Nuclear Reactors Complexes

The above developed adaptation techniques are applied to resolve both static and dynamic problems of power field control in a nuclear reactor. An example of adaptive system design for overheated steam temperature regulation in a nuclear steam overheating power-block is given.

Chapter 8. Adaptive Control in System Researches

A number of examples are given to show the possibility to apply the above adaptive control techniques at solving problems in social and ecological researches. Two problems of migration processes control, a problem of pollution degree control in a running reservoir and a qualification structure control problem in a group of people are presented.

Addenda. Proofs of basic theorems in the text, formulations for some auxiliary inferences, the description of tool program system AVANS.