

Синтез закона разрывного управления синхронизацией хаотических систем на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий

А. А. Кузьменко

Институт компьютерных технологий и информационной безопасности
Южного федерального университета
Таганрог, Россия
aakuzmenko@sfedu.ru

Аннотация. При решении задачи обеспечения робастности при синхронизации хаотических систем, помимо теории адаптивного управления, широко используется построение законов разрывного управления (sliding mode control – SMC). При этом не снимаются имеющиеся проблемы при синтезе SMC – имеют место значительные трудности векторного синтеза и анализа устойчивости замкнутой системы с SMC, сложности совместного решения классических подзадач синтеза SMC для нелинейных объектов и описания движения вдоль поверхности скольжения и др. В данной работе представлена методика синтеза закона разрывного робастного управления синхронизацией хаотических систем Спротта (Sprott's jerk system) на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) синергетической теории управления. Данная методика позволяет осуществить синтез робастного закона управления, совместно решать классические подзадачи синтеза SMC для нелинейного объекта, упрощает процедуру анализа устойчивости замкнутой системы, а также позволяет исключить высокочастотное переключение знака закона управления.

Ключевые слова: нелинейные системы управления; робастность; разрывное управление; синхронизация хаоса; хаотическая система Спротта; синергетическая теория управления

I. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с работы Лоренц и по настоящее время, исследованию хаотических систем и их применению ежегодно посвящаются тысячи работ. И интерес к этой области не утихает. Хаотические системы находят широкое применение как в инженерии для проектирования генераторов колебаний, лазеров, криптосистем, защищенной

передачи данных, построения нейронных сетей и робототехнических систем, так и в биологии, химии, экологии, медицине, экономике и др. [1].

Одной из инженерных задач управления хаотическими системами является задача синхронизации, в которой необходимо обеспечить синхронное поведение двух взаимосвязанных хаотических систем с одинаковыми или разными хаотическими аттракторами [1]–[8]: на основе поведения ведущей системы (master system) так управлять поведением ведомой системы (slave system), чтобы обеспечить их синхронизацию и робастность к действию параметрических и/или внешних возмущений. В данной работе будет рассмотрена хаотическая система Спротта [3], [4]. Для решения задачи синхронизации хаотических систем традиционно применяются методы активного управления [2], [5], методы адаптивного управления [6], SMC [7], backstepping [8] и др. Особо следует отметить использование SMC для обеспечения робастности технических систем [9]–[15]. При этом возможности SMC дополняют новыми возможностями теории адаптивного и робастного управления, теории нечетких систем, искусственных нейронных сетей и др. [12], [13]. Развитие теории и практики применения SMC привело к созданию и широкому использованию систем со скользящим режимом высокого порядка [14], интегральных скользящих режимов [15]. Но при синтезе SMC по-прежнему остаются актуальными трудности векторного синтеза и анализа устойчивости замкнутой системы, сложности совместного решения классических подзадач синтеза SMC для нелинейных объектов и описания движения вдоль поверхности скольжения и др. [9].

При этом в общем случае классическая задача синтеза SMC заключается в решении следующих подзадач [9]–[11]: перевода объекта из произвольного начального положения на поверхность скольжения; обеспечения условий

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №19-08-00366.

существования скользящего режима в любой точке поверхности скольжения; обеспечения устойчивого движения к желаемому конечному состоянию. Традиционно эти подзадачи, как правило, решаются раздельно. Этому недостатка лишён метод АКАР, развиваемый в рамках синергетической теории управления [16]–[20], который позволяет преодолеть обозначенные выше трудности и сложности синтеза SMC. Таким образом, новизна этой работе заключается в том, что для решения задачи обеспечения робастности при синхронизации хаотических систем предлагается методика аналитического синтеза SMC, в которой перечисленные выше подзадачи решаются совместно, а также существенно упрощается анализ устойчивости замкнутой системы. Данная методика впервые предложена проф. А.А. Колесниковым [20].

II. МЕТОДИКА СИНТЕЗА

Пусть исходные дифференциальные уравнения объекта управления имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_n) + a_{j+1}x_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1}; \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, \dots, x_n) + u,\end{aligned}\quad (1)$$

где $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ – вектор переменных состояния, $\dim \mathbf{x} = n \times 1$; $u = u(\mathbf{x})$ – скалярное управление, $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$ – непрерывные дифференцируемые функции.

Для системы (1) ставится задача синтеза SMC: требуется определить такое управление $u = u(\mathbf{x})$ в функции переменных состояния объекта (1), которое обеспечивает перевод изображающей точки (ИТ) объекта из произвольного исходного состояния (в некоторой допустимой области) в заданное состояние, определяемое желаемым инвариантом – целью управления.

На первом этапе синтеза будем всегда рассматривать многообразии

$$\psi_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k |x_k| + |s_1| = 0, \quad (2)$$

где s_1 – это поверхность скольжения вида

$$s_1 = x_n + u_2(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0, \quad (3)$$

в которой $u_2(x_1, \dots, x_{n-1})$ – неизвестная на данном этапе непрерывная функция, играющая роль «внутреннего»

управления для декомпозированной системы следующего этапа:

$$\begin{aligned}\dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-2}; \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) - a_n u_2(x_1, \dots, x_{n-1}).\end{aligned}\quad (4)$$

Рассматривается основное функциональное уравнение метода АКАР [16]–[19]:

$$T_1 \dot{\psi}_1(t) + \psi_1 = 0, \quad (5)$$

$$\text{где } \dot{\psi}_1(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \dot{x}_i(t).$$

Тогда, раскрывая (5) в силу исходных уравнений объекта (1), многообразий (2) и (3), находим искомое управление:

$$\begin{aligned}u &= - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k (f_k(x_1, \dots, x_n) + a_{k+1}x_{k+1}) \text{sign } x_k \right) \text{sign } s_1 - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} (f_k(x_1, \dots, x_n) + a_{k+1}x_{k+1}) - \\ &\quad - \frac{1}{T_1} \psi_1 \text{sign } s_1 - f_n(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}\quad (6)$$

Это управление переводит ИТ из произвольного начального состояния на многообразие $\psi_1 = 0$ (2). В связи с тем, что движение относительно $\psi_1 = 0$ асимптотически устойчиво при $T_1 > 0$, то это означает, что ИТ неизбежно попадает на подмногообразие (3), т.е. на поверхность скольжения. Устойчивое движение вдоль $s_1 = 0$ можно организовать, используя подмногообразия $s_2 = 0, \dots, s_m = 0$:

$$\begin{aligned}s_2 &= x_{n-1} + u_3(x_1, \dots, x_{n-2}) = 0; \\ &\dots \\ s_m &= x_2 + u_{m+1}(x_1) = 0,\end{aligned}\quad (7)$$

и синтезируя аналогичным образом промежуточные управления u_2, \dots, u_{m+1} на основе функциональных уравнений вида

$$T_i \dot{s}_i(t) + s_i = 0, \quad i = \overline{2, m}; \quad T_i > 0. \quad (8)$$

Управление $u_2(x_1, \dots, x_{n-1})$ переводит ИТ системы (4) на подмногообразии $s_2 = 0$ из (7), движение вдоль которого описывается следующей декомпозированной системой:

$$\begin{aligned}\dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-3}; \\ \dot{x}_{n-2}(t) &= f_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) - a_{n-1}u_3(x_1, \dots, x_{n-2}).\end{aligned}$$

Аналогично рассуждая, получаем, что управление u_k переводит ИТ на подмногообразии $s_k = 0$ из (7), движение вдоль которого описывается своей декомпозированной системой, размерность которой на единицу меньше размерности предыдущей.

Очевидно, что исходное управление (6) имеет разрывную структуру, а «внутренние» (промежуточные) управления u_2, \dots, u_{m+1} будут представлять собой некоторые непрерывные функции переменных состояния соответствующей декомпозированной системы. Процедура синтеза закона управления (6) завершается после синтеза или выбора последнего «внутреннего» управления, обеспечивающего выполнение желаемого целевого инварианта. В общем случае последним «внутренним» управлением будет управление $u_{m+1}(x_1)$ – управление последнего этапа движения, описываемого дифференциальным уравнением: $\dot{x}_1(t) = f_1(x_1) - a_2u_{m+1}(x_1)$. Выражение для $u_{m+1}(x_1)$ выбирается или находится методом АКАР либо каким-либо другим методом. Затем полученное выражение $u_{m+1}(x_1)$ подставляется в предыдущее управление $u_m(x_1, x_2)$, которое, в свою очередь, подставляется в $u_{m-1}(x_1, x_2, x_3)$ и т.д., вплоть до управления $u_2(x_1, \dots, x_{n-1})$, непосредственно входящего в закон управления (6).

III. СИНТЕЗ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Математическая модель объекта управления с двумя системами Спротта согласно [4] представлена:

моделью ведущей системы (master system):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2; \quad \dot{x}_2(t) = x_3; \\ \dot{x}_3(t) &= -ax_1 + x_2^2 - bx_3,\end{aligned} \quad (9)$$

где x_i – переменные состояния ведущей системы; $a > 0, b > 0$ – постоянные параметры;

моделью ведомой системы (slave system):

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= y_2; \quad \dot{y}_2(t) = y_3; \\ \dot{y}_3(t) &= -ay_1 + y_2^2 - by_3 + u,\end{aligned} \quad (10)$$

где y_i – переменные состояния ведомой системы; u – управление.

Вводя новые переменные – ошибки синхронизации $e_i(t) = y_i(t) - x_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$, совместную динамику ведущей и ведомой систем (9), (10) согласно [4] представим системой:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1(t) &= e_2; \quad \dot{e}_2(t) = e_3; \\ \dot{e}_3(t) &= -ae_1 + y_2^2 - x_2^2 - be_3 + u.\end{aligned} \quad (11)$$

Для системы (11) ставится задача построения разрывного закона управления, обеспечивающего робастность к внешнему возмущению, действующему на ведущую систему (9), при синхронизации ведущей и ведомой систем.

На первом этапе синтеза задаем инвариантное многообразие вида (2):

$$\psi_1 = \beta_1|e_1| + \beta_2|e_2| + |s_1| = 0, \quad (12)$$

где $s_1 = e_3 + u_2(e_1, e_2)$. Подставляя (12) в функциональное уравнение (5), получаем в силу уравнений объекта (11), закон управления:

$$u = u_{eq} + u_{SMC}, \quad (13)$$

где $u_{SMC} = -M(e_1, e_2, e_3)\text{sign } s_1$ – разрывное управление, в котором $M(e_1, e_2, e_3) = \beta_1 e_2 \text{sign } e_1 + \beta_2 e_3 \text{sign } e_2 + \psi_1 / T_1$ – нелинейная функция, являющаяся аналогом большого коэффициента усиления SMC [9];

$u_{eq} = ae_1 - y_2^2 + x_2^2 + be_3 - \frac{\partial u_2}{\partial e_1} e_2 - \frac{\partial u_2}{\partial e_2} e_3$ – непрерывное эквивалентное управление.

Под действием закона управления (13) ИТ системы (11) попадает в окрестность многообразия (12), движение вдоль которого описывается декомпозированной системой:

$$\dot{e}_1(t) = e_2; \quad \dot{e}_2(t) = -u_2(e_1, e_2). \quad (14)$$

Для нахождения промежуточного управления $u_2(e_1, e_2)$ для системы (15) зададим подмногообразие вида (7): $s_2 = e_2 + \alpha e_1$. Подставляя это выражение в функциональное уравнение (8), получаем в силу уравнений объекта (14), закон управления:

$$u_2(e_1, e_2) = \alpha e_1 / T_2 + (\alpha + 1 / T_2) e_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2. \quad (15)$$

Тогда движение ИТ системы (14) под действием управления (15) будет описываться уравнением:

$$\ddot{e}_1(t) + \lambda_2 \dot{e}_1(t) + \lambda_1 e_1 = 0.$$

Условие асимптотической устойчивости в целом этого уравнения имеет весьма простой вид: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, а выбором значений этих параметров можно обеспечить желаемый вид переходного процесса. Таким образом, подставляя (16) в (14), получим итоговое выражение для управления. Условие возникновения скользящего режима [9]: $s_1 \cdot \dot{s}_1(t) < 0$. С учетом (15) получим выражение поверхности скольжения: $s_1 = e_3 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, а из (5) с учетом (12) выразим ее производную

$$\dot{s}_1(t) = -(\beta_1 e_2 \operatorname{sign} e_1 + \beta_2 e_3 \operatorname{sign} e_2 + \psi_1 / T_1) \operatorname{sign} s_1.$$

Отсюда видно, что условие возникновения скользящего режима непосредственно обеспечивается выбором параметров $\lambda_i > 0, \beta_i > 0, T_1 > 0$.

На рис. 1, 2 показаны результаты моделирования замкнутой систем (9), (10), (13) с номинальными параметрами системы Спротта [4]: $a = 1; b = 2,02$; и параметрами закона управления: $T_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0,2$; $\alpha = 2, T_2 = 0,5$.

А на рис. 3 показаны результаты моделирования замкнутой системы (9), (10) с такими же параметрами системы Спротта с законом управления, полученным в [4] на основе бэкстеппинга:

$$u = (a - 3)e_1 - 5e_2 + (b - 3)e_3 - y_2^2 + x_2^2.$$

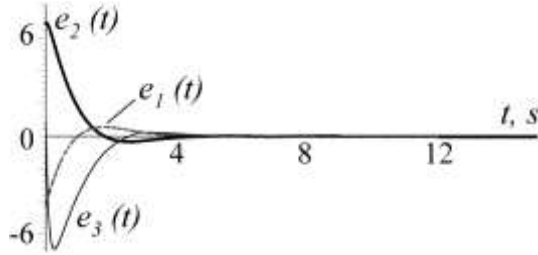


Рис. 1. Графики изменения ошибок

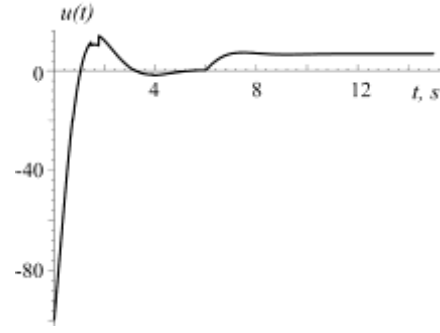


Рис. 2. График изменения управления (13)

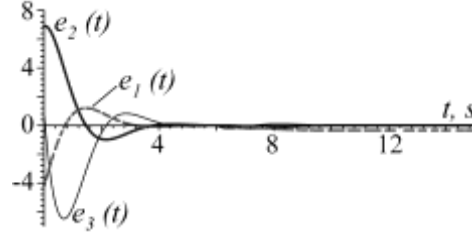


Рис. 3. Графики изменения ошибок

При этом в обоих случаях ведущая система подвержена внешнему возмущению

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 6 < t < 10; \\ 0, & t > 10, \end{cases} \quad (16)$$

которое аддитивно входит в третье уравнение системы (9).

Из рис. 1 видно, что под действием управления (13) переменные состояния ведущей системы (9) синхронизируются с переменными состояния ведомой системы (10) и они оказываются нечувствительными к внешнему возмущению (16). При этом по переменной x_1 наблюдаются незначительные колебания, вызванные скользящим режимом. А согласно рис. 3 при действии соответствующего управления часть переменных также синхронизируется – ошибки $e_i(t) \rightarrow 0, i = 2, 3$, но, тем не менее, внешнее возмущение оказывает влияние – появляется ненулевая ошибка синхронизации $e_1(t) \neq 0$. График изменения управления (13), представленный на рис. 2, позволяет утверждать, что синтезированный закон позволяет исключить высокочастотное переключение знака закона управления (chattering free).

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в данной работе представлена методика синтеза SMC на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий метода АКАР. Эта методика позволяет осуществлять синтез робастных законов управления и совместно решать классические подзадачи синтеза SMC для нелинейных объектов, а также упрощает процедуру анализа устойчивости замкнутой системы. Теоретические положения методики проиллюстрированы на примере синтеза закона управления синхронизацией двух хаотических систем Спротта. Результаты моделирования замкнутой системы с SMC наглядно показали, что синтезированный закон управления (13) обеспечивает безошибочную синхронизацию ведущей и ведомой хаотических систем Спротта, робастность к внешнему возмущению (16) и отсутствие высокочастотного переключения знака закона управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D.L., Zhou C.S. The synchronization of chaotic systems // *Physics Report*. 2002. Vol. 366, iss. 1-2. P. 1-101.
- [2] Agiza H.N., Yassen M.T. Synchronization of Rossler and Chen chaotic dynamical systems using active control // *Physics Letters. Section A*. 2001. Vol. 278, iss. 4. P. 191-197.
- [3] Sprott J.C. Simplest dissipative chaotic flow // *Physics Letters. Section A*. 1997. Vol. 228, iss. 4-5. P. 271-274.
- [4] Vaidyanathan S., Idowu B.A., Azar A.T. Backstepping controller design for the global chaos synchronization of Sprott's jerk systems // *Studies in Computational Intelligence*. 2015. Vol. 581. P. 39-58.
- [5] Chen H.-K. Global chaos synchronization of new chaotic systems via nonlinear control // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2005. Vol. 23, iss. 4. P. 1245-1251.
- [6] Feki M. An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2003. Vol. 18, iss. 1. P. 141-148.
- [7] Yu X., Zhihong M. Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*. 2002. Vol. 49, iss. 2. P. 261-264.
- [8] Tan X., Zhang J., Yang Y. Synchronizing chaotic systems using backstepping design // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2003. Vol. 16, iss. 1. P. 37-45.
- [9] Utkin V., Guldner J., Shi J. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. 2nd ed. Boca Raton, London: CRC Press, Taylor and Francis, 2009.
- [10] Young K., Utkin V.I., Ozguner U. A Control Engineer's Guide to Sliding Mode Control // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 1999. Vol. 7, no. 3. P. 328-342.
- [11] Edwards C., Spurgeon S. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. London: Taylor and Francis, 1998.
- [12] Park B.S., Yoo S.J., Park J.B., Choi Y.H. Adaptive Neural Sliding Mode Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots with Model Uncertainty // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2009. Vol. 17, no. 1. P. 207-214.
- [13] Nekoukar V., Erfanian A. Adaptive fuzzy terminal sliding mode control for a class of MIMO uncertain nonlinear systems // *Fuzzy Sets and Systems*. 2011. Vol. 179. P. 34-49.
- [14] Emelyanov S.V., Korovin S.K., Levant A. Higher-order sliding modes in control systems // *Differential Equations*. 1993. Vol. 29. P. 1627-1647.
- [15] Laghrouche S., Plestan F., Glumineau A. Higher order sliding mode control based on integral sliding mode // *Automatica*. 2007. Vol. 43. P. 531-537.
- [16] Кузьменко А.А. Нелинейные адаптивные законы управления турбиной судовой энергоустановки // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2012. №4. С. 38-51.
- [17] Kuz'menko A.A., Kolesnikov A.A., Kolesnitchenko D.A. Novel Robust Control of Hydrogenerator: the synergetic approach // *IFAC-PapersOnLine*. 2015. Vol. 48, iss. 11. P. 451-456.
- [18] Kuz'menko A.A., Synitsin A.S., Zyryanova A.A. The use of integral adaptation principle to increase the reliability of synchronous generator nonlinear excitation system // *Proceedings of International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops*. January 2015. Vol. 2015. P. 415-420. DOI: 10.1109/ICUMT.2014.7002137.
- [19] Kuz'menko A.A., Synitsin A.S., Mushenko A.S. The use of integral adaptation principle to increase the reliability of DFIG-Wind turbine power system // *Proceedings of International Siberian Conference on Control and Communications*. July 2017. DOI: 10.1109/SIBCON.2017.7998487.
- [20] Колесников А.А. Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994. 354 с.