Гармонизация решений в управлении и проектировании

И. В. Герасимов
Санкт-Петербургский электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
IVGerasimov-45@yandex.ru

И. Г. Анкудинов
Санкт-Петербургский горный университет
ivgank@rambler.ru

Аннотация. **Пространство комплексных решений, имеющих иерархическую структуру, формируется на основе морфологического подхода. Задача оптимизации решений сформулирована как многокритериальная нелинейная задача дискретного программирования, в которой целевая функция в форме взвешенного степенного среднего обеспечивает требуемую степень пропорциональности критериальных показателей, заданную их эталонными (целевыми) значениями.**

Ключевые слова: взвешенное степенное среднее; декомпозиция; агрегирование; иерархическая система; многокритериальная оценка; схема компромисса

Развитие и управление сложными системами связано с анализом и оптимизацией иерархической структуры таких систем и, в частности, с необходимостью использования иерархии показателей эффективности [5]. Для сложных систем целесообразно использовать многоуровневый подход, использующий как декомпозицию (построение иерархии показателей «сверху-вниз»), так и агрегирование показателей (построение системы показателей «снизу-вверх»). Агрегирование показателей заключается в следующем. Функция свертки в форме взвешенного степенного среднего (ВСС) [2] позволяет достаточно просто агрегировать (объединять) часть показателей в один укрупненный критерий:

$$M_r(w,y) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} w_i y_i^r \right)^{1/r},$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y_i \geq 0$ – нормированное значение i показателя, $w_i \geq 0$ – вес i показателя, $\sum_{i=1}^{i=n} w_i = 1$, r – показатель степени ВСС $r \in (-\infty, +\infty)$.

Веса w_i $(i \in 1:n)$ имеют нормированное значение, и позволяют рассматривать «степень важности локального критерия» для каждого узла иерархии [4].

Абсолютное значение степени ВСС определяет среднее значение допустимых целевых уступок (близость интегрального критерия к минимаксу или максимину), а вес – распределение значений уступок между показателями [1].

Наряду с целевым значением каждого показателя от лица принимающего решение необходимо получить максимально допустимые потери, которые могут быть компенсированы за счет идеальных значений других показателей [3, 4].

Для комплексной оценки сложных иерархически организованных объектов целесообразно использовать иерархическую композицию сверток в форме ВСС. Для обозначения конкретного показателя используем иерархический индекс α, который имеет вид цепочки

$$\alpha = i_0 i_1 \dots i_{j-1} i_j i_{j+1} \dots i_{|\alpha|},$$

где $|\alpha|$ – число индексов в цепочке α, за исключением нулевого индекса $i_0 = 0$, соответствующего целостному образу объекта (гештальту); i_j – натуральное число, представляющее относительный номер j-го показателя, являющегося непосредственным результатом декомпозиции показателя-родителя с индексом $i_0 i_1 \dots i_{j-1}$. Если все относительные номера одноразрядные, точки в записи иерархического индекса можно опускать. Условимся также, что значение 0 индекса i_0 можно опускать, если это не ведет к неоднозначности. Гештальт относится к нулевому уровню иерархии, показатель y_α – к уровню $|\alpha|$. Множество всевозможных индексов иерархии обозначим A. Глубина декомпозиции $N = \max_{\alpha \in \mathrm{A}} |\alpha|$ зависит от возможности получения количественных оценок для свойств объекта, получаемых в результате декомпозиции. Число показателей, на которое разбивается показатель с индексом α, обозначим n_α. Показатели, у которых $n_\alpha = 0$, назовем атомарными. Множество индексов атомарных показателей $\mathrm{T} = \{\alpha \mid \alpha \in \mathrm{A},\, n_\alpha = 0\}$. Узел $\alpha \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{T}$ имеет n_α потомков $\alpha 1, \dots, \alpha n_\alpha$. Например, показатель y_α для узла α может быть представлен сверткой показателей $(y_{\alpha 1}, \dots, y_{\alpha n_\alpha})$.

Экспертная оценка векторов целевых значений и предельно допустимых проигрышей выполняется отдельно для каждого узла иерархии и позволяет получить соответствующий вектор ПК-значений $(\tilde{y}_{\alpha 1}, \ldots, \tilde{y}_{\alpha n_\alpha})$. Корневому узлу соответствует ВСС

$$y_0 = \left(\sum_{\beta=1}^{\beta=n} w_\beta y_\beta^r \right)^{1/r},$$

а всю иерархию показателей можно представить системой выражений вида

$$y_\alpha = \left(\sum_{\beta=\alpha 1}^{\beta=\alpha n_\alpha} w_\beta y_\beta^{r_\alpha} \right)^{1/r_\alpha}, \alpha \in \mathrm{T},$$

где r_α – степень свертки вектора показателей $(y_{\alpha 1}, \ldots, y_{\alpha n_\alpha})$.

Для каждого узла $\alpha \in \mathrm{T}$ определяется показатель r_α, решением уравнения

$$\sum_{\beta \in \{\alpha 1, \ldots, \alpha n_\alpha\}} 1/\tilde{y}_\beta^{r_\alpha} = 1,$$

а для определения весовых коэффициентов используем соотношения

$$w_\beta = 1/\tilde{y}_\beta^{r_\alpha}, \quad \beta \in \{\alpha 1, \ldots, \alpha n_\alpha\}.$$

ПК-значения $\tilde{y}_\alpha$ имеют локальный характер, поскольку относятся к конкретному уровню свертывания. В то же время, для каждого атомарного показателя y_α, $\alpha \in \mathrm{T}$, можно найти внешнее (глобальное) ПК-значение $\tilde{\tilde{y}}_\alpha$, представляющее наихудшее значение y_α, которое может быть скомпенсировано за счет идеальных значений остальных атомарных показателей $\mathrm{T} \setminus \{\alpha\}$.

Можно показать, что для иерархии ВСС глобальное ПК-значение $\tilde{\tilde{y}}_\alpha$ для атомарного показателя y_α равно произведению локального ПК-значения $\tilde{y}_\alpha$ и ПК-значений всех показателей, расположенных выше y_α:

$$\tilde{\tilde{y}}_\alpha = \tilde{y}_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{|\alpha|-1} i_{|\alpha|}} \times \tilde{y}_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_{|\alpha|-2} i_{|\alpha|-1}} \times \ldots \tilde{y}_{i_0 i_1 i_2} \times \tilde{y}_{i_0 i_1}$$

Если мощность множества V альтернативных вариантов построения иерархического объекта велика, то можно использовать существующие численные методы для получения приближенного решения задачи гармонизации объекта, если унифицировать параметр выпуклости на всех уровнях иерархии и заменить иерархическую систему одной сверткой атомарных показателей

$$y_0 = M_s(p, z) = \left(\sum_{\alpha \in \mathrm{T}} p_\alpha z_\alpha^s \right)^{1/s}.$$

Унификация позволяет использовать s-ю степень ВСС в качестве линейной целевой функции

$$y_0^s = \sum_{\alpha \in \mathrm{T}} p_\alpha z_\alpha^s.$$

Рассмотрим унификацию относительно атомарных показателей. Для получения параметров свертки $M_s(p, z)$, унифицированной относительно атомарных показателей, в качестве ПК-значений используем $\tilde{\tilde{y}}_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{T}$. Недостатком унификация относительно атомарных показателей является отклонение локальных ПК-значений промежуточных узлов, полученных в результате обратного агрегирования показателей, от их исходных значений.

В качестве примера рассмотрим иерархию ВСС:

$$y_0 = (w_1 y_1^r + w_2 y_2^r)^{1/r}, \quad y_1 = (w_{11} y_{11}^{r_1} + w_{12} y_{12}^{r_1})^{1/r_1}.$$

Граф этой иерархии представлен на рис. 1. Вершины графа помечены обозначениями соответствующих показателей. Узловые вершины y_0 и y_1 помечены также обозначением степени, а нисходящие ребра − весами показателей соответствующей свертки.

Пусть на основе экспертной оценки получены ПК-значения:

$$\tilde{y}_{11} = \tilde{y}_{12} = 0,7; \; \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = 0,87.$$

Для показателя y_1 получаем параметры ВСС: $r_1 = -1,943$; $w_{11} = w_{12} = 1/\tilde{y}_{11}^{r_1} = 0,500$.

Для показателя y_0 получаем параметры ВСС: $r = -4,977$; $w_1 = w_2 = 1/\tilde{y}_1^r = 0,500$.

Введем одноуровневую нумерацию атомарных показателей:

$$z_1 = y_{11}; \; z_2 = y_{12}; \; z_3 = y_2.$$

Глобальные ПК-значение для атомарных показателей:

$$\tilde{z}_1 = \tilde{\tilde{y}}_{11} = \tilde{y}_{11} \tilde{y}_1 = 0,7 \times 0,87 = 0,609; \; \tilde{z}_2 = \tilde{z}_1;$$
$$\tilde{z}_3 = \tilde{\tilde{y}}_2 = \tilde{y}_2 = 0,87.$$

Для $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3) = (0,609; \; 0,609; \; 0,870)$ находим $s = -3,375$. Находим веса показателей: $p_1 = 1/\tilde{z}_1^s = 0,1875$; $p_2 = p_1$; $p_3 = 1/\tilde{z}_3^s = 0,625$.

Результирующая свертка имеет вид

$$y_0 = (p_1 z_1^s + p_2 z_2^s + p_3 z_3^s)^{1/s}.$$

Для того, чтобы определить, как изменяются ПК-значения и соответствующие допустимые проигрыши,

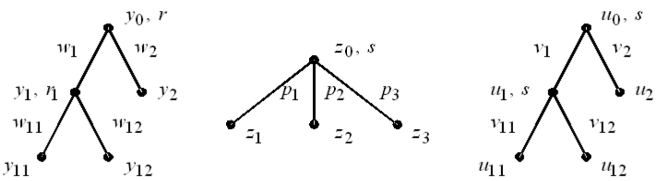

Рис. 1. Пример иерархии ВСС

выполним обратное агрегирование показателей так, чтобы сохранилась структура исходной иерархии.

Для этого вводим новые обозначения с иерархическими индексами таким образом, что u_0 соответствует y_0, u_1 соответствует y_1 и т. д. Объединим p_1 и p_2 в виде

$$u_1 = (v_{11} y_{11}^s + v_{12} y_{12}^s)^{1/s},$$

где $v_{11} = p_1 / (p_1 + p_2) = 0,5$, $v_{12} = p_2 / (p_1 + p_2) = v_{11}$.

Верхнему уровню иерархии будет соответствовать ВСС

$$u_0 = (v_1 u_1^s + v_2 u_2^s)^{1/s},$$

где $v_1 = p_1 + p_2 = 0,375$, $v_2 = p_3 = 0,625$.

По формуле $\tilde{u}_\alpha = 1 / v_\alpha^{1/s}$ находим локальные ПК-значения

$$\tilde{u}_1 = 1 / v_1^{1/s} = 0,748,$$
$$\tilde{u}_2 = 1 / v_2^{1/s} = 0,8748,$$
$$\tilde{u}_{11} = \tilde{u}_{12} = 1 / v_{11}^{1/s} = 0,814.$$

Пример демонстрирует изменение ПК-значений и, соответственно, допустимых проигрышей, полученных в результате обратного агрегирования, для показателей верхнего уровня иерархии. В рассмотренном примере ПК-значение показателя y_1 уменьшилось с 0,87 до 0,748 и соответственно увеличился нормированный допустимый проигрыш с 0,13 до 0,252.

Список литературы

[1] Оценка параметров модели предпочтения нечеткий максимин / И.Г. Анкудинов, И.В. Герасимов // Сб. докл. Международной конф. по мягким вычислениям и измерениям SCM2016, СПб, 25-27 мая 2016. Т.2. Секции 4-7. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2016. С. 43-46.

[2] Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. М.: Иностр.лит-ра, 1948. 456 с.

[3] Анкудинов И.Г. Автоматизация структурного синтеза и принятия решений в управлении и проектировании. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 202 с.

[4] Ankoudinov G.I., Ankoudinov I.G., Strizhachenko A.I. Goal functions from minimax to maximin in multicriteria choice and optimization // Innovations and Advanced Techniques in Systems, Computing Sciences and Software Engineering. ed. Kh. Elleithy. Springer, 2008, pp. 192-197.

[5] M. Ehrgott, Multicriteria Optimization. Springer, 2000. 323 p.