

Метод синтеза нейронной сети для аппроксимации поверхностей двух переменных

А. А. Воевода¹, Д. О. Романников², Г. В. Трошина³

Новосибирский государственный технический университет

¹voevoda@ucit.ru, ²dmirty.romannikov@gmail.com, ³troshina@corp.nstu.ru

Аннотация. В статье предлагается метод синтеза нейронных сетей, основанный на расчете значений обучаемых коэффициентов и использовании заранее определенной структуры для задачи аппроксимации функций двух переменных. Заданная структура нейронной сети содержит два слоя. Первый слой состоит из частей, при помощи которых определяется принадлежность входных данных к интервалам, на которые разбит весь входной диапазон значений. Во втором слое формируется выходное значение поверхности для соответствующего интервала. Предлагаемый метод синтеза нейронной сети позволяет получить рассчитанные значения обучаемых коэффициентов нейронной сети путем синтеза ее отдельных составных частей. Также приведен пример использования метода на различных поверхностях.

Ключевые слова: нейронные сети; синтез нейронных сетей; аппроксимация

I. ВВЕДЕНИЕ

Использование нейронных сетей для решения задач, для которых разработка алгоритмического решения затруднительна, в частности, для задач распознавание изображений [1] и речи [2, 3], задачах классификации [4–7], кластеризации [4–6, 8], задачах управления [9] и других, получило достаточно широкое распространение из-за возможности обучения. Обучение, основанное на градиентных методах приближения, кроме неоспоримых достоинств, обладает рядом недостатков, которые были обсуждены в [10] и, к которым относятся неопределенности выбора начальных условий [6], шага обучения, отсутствие однозначных рекомендаций по выбору структуры нейронной сети, избыточность (*redundancy*) [4–7], недообучение (*underfitting*) и переобучение (*overfitting*) моделей [5, 6], выбор начальных условий.

В [10] предлагается решение вышеупомянутых недостатков при помощи конструирования нейронной сети путем синтеза ее структуры с помощью ручного расчета параметров обучения для класса логико-арифметических задач на примере построения нейронной сети для выбора максимального числа, представленного в бинарном виде, из массива четырех чисел. Основным недостатком данного подхода является необходимость большого количества трудоемких ручных операций по расчету обучаемых параметров. Для случая одной входной переменной в [11]

предлагается метод конструирования нейронной сети и расчета ее обучаемых параметров, который позволяет решить вышеуказанный недостаток. При этом нейронная сеть представляется в виде однослойного персептрона с нейронами с функцией активации «выпрямителя» (*rectifier*, *relu*), а расчет обучаемых параметров происходит с помощью построения прямых, проходящих через пары соседних точек. Для случая двух входных переменных в [12] предлагается метод, основанный на разделении всего пространства входных переменных (плоскости в данном случае) на составные треугольники (минимальное количество точек для построения плоскости), определении принадлежности точки на плоскости к одному из треугольников и формировании выходного значения сети исходя из значения входных координат и определённого треугольника. Однако нейронная сеть в [12] была построена с использованием элементов, которые не позволяют выполнять последующее обучение нейронной сети.

В статье предлагается метод построения нейронной сети с рассчитанными значениями обучаемых параметров для решения задачи аппроксимации функций двух переменных. Для этого предлагается структура нейронной сети, состоящая из двух скрытых слоев. Первый слой необходим для разбиения всего диапазона входных переменных и определения принадлежности точки к одному из диапазонов. Во втором слое выполняется формирование выходное значения функции. Выходное значение нейронной сети формируется путем суммирования всех нейронов второго слоя на выходном нейроне с линейной функцией активации.

Далее статья организована в следующем виде: в разделе II выполнена постановка задачи; в разделе III приведен метод построения нейронной сети для аппроксимации функций двух переменных. В разделе IV приведены примеры работы предлагаемого метода. Статья заканчивается выводами в разделе V.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Данные для решения задачи построения нейронной сети и расчета ее обучаемых параметров представлены в виде множества пар входных данных и соответствующего выходного значения: $\{x_1, x_2\}$: y_1 . При построении нейронной сети необходимо ограничиться только теми

элементами, чтобы итоговая нейронная сеть была пригодна для последующего обучения.

III. ПОСТРОЕНИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

В статье предлагается аппроксимировать функцию двух переменных путем соединения трех ближайших точек на плоскости входных значений при помощи плоскостей. Плоскость образуется из-за выбранных функций активации *relu* и может быть заменена на другие поверхности, в частности, на поверхность, образуемую сигмоидальной функцией.

Схематичное представление структуры нейронной сети, используемой для решения поставленной задачи, приведено на рис. 1.

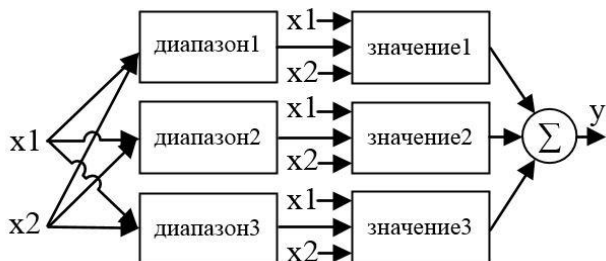


Рис. 1. Схематичное представление структуры нейронной сети

Основная идея, на которой основана структура нейронной сети на рис. 1, заключается в разбиении всего диапазона значений входных переменных на поддиапазоны (на рисунке обозначены как «диапазон1», «диапазон2» и т.д.), выявления признака принадлежности точки к диапазону и формирования выходного значения плоскости на основании значений входных сигналов и значения сигнала от определителя диапазона.

А. Реализация определителя диапазона

Первый слой представленной на рис. 1 структуры нейронной сети содержит определитель диапазона входных данных. Для простоты реализации выбраны диапазоны в форме прямоугольников (набор входных данных необходимо разбить на множество непересекающихся прямоугольников), для которых схема определителя схематично приведена на рис. 2.

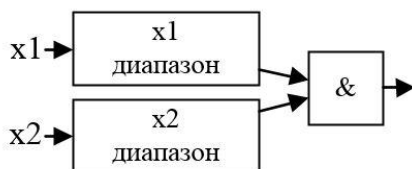


Рис. 2. Схематичное представление определителя входного диапазона для случая двух входов

Работа схемы на рис. 2 основана на определении принадлежности каждой координаты к соответствующему диапазону и последующим логическим объединением полученных значений. К примеру, для определения принадлежности точки (x_1, x_2) к диапазону $\{x_{1_{\min}}, x_{1_{\max}}$,

$x_{2_{\min}}, x_{2_{\max}}\}$ необходимо проверить принадлежность x_1 к диапазону $\{x_{1_{\min}}, x_{1_{\max}}\}$ (результатом проверки будет единица в случае принадлежности и ноль в противном случае), x_2 к диапазону $\{x_{2_{\min}}, x_{2_{\max}}\}$. Конечный результат проверки получается путем логического объединения ранее полученных результатов проверок. Реализация в форме нейронов определителя диапазона для одной координаты представлена на рис. 3.

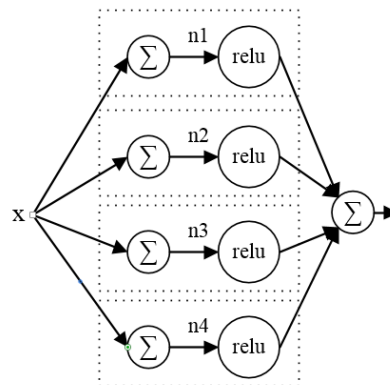


Рис. 3. Реализация определителя одного диапазона с использованием нейронов с функцией активации *relu*

Графиком функции нейронной сети на рис. 3 является трапеция. Например, рис. 3 для выделения диапазона шириной в единицу можно представить, как:

$$\begin{aligned} & \text{relu}(w * (x + 0.05) + b) - \text{relu}(w * (x - 0.05) + b) \\ & - \text{relu}(w * (x - 0.95) + b) + \text{relu}(w * (x - 1.05) + b), \end{aligned}$$

где параметры можно рассчитать исходя из решения уравнения прямой проходящей через две известные точки.

В. Формирование выходного значения функции

Следующим шагом получения значения функции в аппроксимируемом диапазоне является формирование значения в соответствующей точке диапазона и значения нулей для остальных диапазонов. Для реализации этой части задачи предлагается использовать нейроны с функцией активации *relu*. Также необходимо сформировать аппроксимируемое значение функции только для одного диапазона. Для «обнуления» остальных значений диапазонов предлагается сперва инвертировать значение определителя диапазона. Так как диапазоны входных данных формируются в виде прямоугольников, то для аппроксимации функции в таком диапазоне достаточно только двух нейронов с функциями активации *relu* и одного с линейной функцией активации для суммирования, то «обнулять» значения, не относящиеся к сработавшему определителю диапазона можно при помощи выражения:

$$\begin{aligned} & \text{relu}(d + w_{11} * x_1 + w_{12} * x_2 + b_1) \\ & + \text{relu}(d + w_{21} * x_1 + w_{22} * x_2 + b_2) \end{aligned} \quad (1)$$

В выражении (1) w_{ij} , b_i – обучаемые коэффициенты нейронной сети (в предлагаемом методе из значения получены с помощью расчета), d – инвертированное значение определителя диапазона, умноженное на значение, полученное из (1) следующим путем: если выражение в функции *relu* принимает отрицательные значения, то сама функция будет равна нулю, тогда d можно оценить из двух неравенств, полученных из (1):

$$\begin{aligned} d < \min(-w_{11} * x1_{\min} - w_{12} * x2_{\min} - b_1, \\ -w_{21} * x1_{\min} - w_{22} * x2_{\min} - b_1) \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, в (1) d принимает значение нуля в случае, когда определитель срабатывает для входной точки ($x1$, $x2$). При этом (1) определяет значение аппроксимируемой функции. В (1) d принимает значение из (2), полученное путем умножения значения сигнала единицы с выхода определителя диапазона (что соответствует признаку того, что точка не принадлежит диапазону) на d из (2) при помощи нейрона с линейной функцией активации. При этом суммы в функциях из (1) будут меньше нуля, а, следовательно, и значение (1) будет равно нулю.

IV. ПРИМЕР

Структура нейронной сети и метод, полученные в разделе III, были применены для аппроксимации различных функций двух переменных. Для формирования нейронной сети использовались сгенерированные наборы данных. В качестве примеров приведены аппроксимированные функции для разных наборов исходных данных. На рис. 4 приведен график аппроксимированной функции параболоида для набора данных с шагом 0.3.

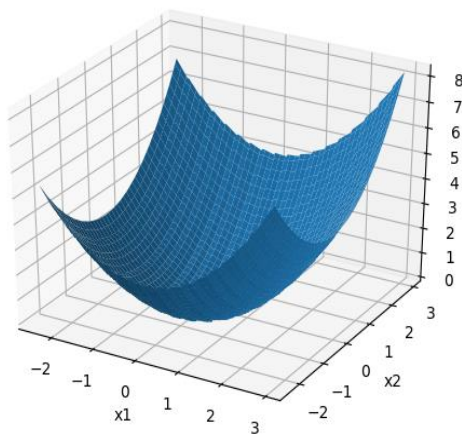


Рис. 4. Результат аппроксимации функции параболоида ($y = x1^2 + x2^2$)

Полученная нейронная сеть для аппроксимации функции на рис. 4 содержит 3249 нейрона.

На рис. 5 приведен график аппроксимированной функции $y = 0.1 * (x1^3 - x2^3 - x1 * x2 + 100)$ для набора данных с шагом 0.5. Построенная нейронная сеть содержит 1188 нейрона.

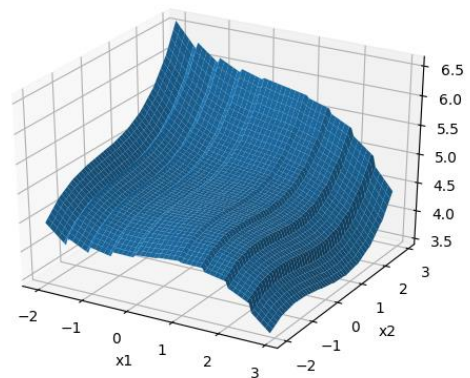


Рис. 5. Результат аппроксимации функции $y = 0.1 * (x1^3 - x2^3 - x1 * x2 + 100)$

Стоит отметить, что данную задачу также можно решать при помощи обучения нейронной сети традиционными методами обучения. В частности, из-за отсутствия однозначных рекомендаций по выбору структуры нейронной сети, типов нейронов и прочего, была выполнена серия экспериментов по обучению нейронной сети для аппроксимации вышеприведенных функций на том же наборе данных. Лучший результат показала сеть с двумя входными нейронами, двумя скрытыми слоями в 100 и 80 нейронов и одним выходным нейроном. Также предлагаемая структура нейронной сети может быть использована для обучения традиционными методами обучения вместо расчета обучаемых параметров.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отличие от традиционного метода обучения нейронной сети в статье предлагается метод синтеза нейронных сетей для задачи аппроксимации функции двух переменных. Предлагаемый метод основан на принципе синтеза структуры нейронной сети с помощью алгоритмизированной процедуры, а не на выборе лучшей структуры по результатам серии экспериментов.

Основная идея предлагаемого метода заключается в разбиении всего диапазона значений входных переменных на поддиапазоны, выявления признака принадлежности точки одному из диапазонов и формирования выходного значения плоскости на основании значений входных сигналов и значения сигнала от определителя диапазона. Также одним из принципов предлагаемого метода является расчет обучаемых коэффициентов нейронной сети.

Параметры обучения нейронной сети с предлагаемой структурой также могут быть получены одним из традиционных методов обучения. Стоит отметить, что количество нейронов для традиционной нейронной сети может быть меньше, чем для рассчитанных. Уменьшение числа нейронов является одной из целей следующих исследований. Но на данный момент эксперименты показывают, что время вычисления нейронной сети ниже времени ее обучения (эти времена были получены для функций из раздела IV). Другим преимуществом предлагаемого метода и структуры нейронной сети

является то, что нейронная сеть может быть рассчитана с заданной точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G. E. ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks // Proceedings of Neural Information Processing Systems (NIPS). 2012.
- [2] Graves A., Mohamed A., Hinton G. Speech recognition with deep recurrent neural networks // Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). 2013.
- [3] Deng L., Hinton G. E., Kingsbury B. New types of deep neural network learning for speech recognition and related applications: An overview // Proceedings of IEEE International Conference on Acoustic Speech and Signal (ICASSP 2013), 2013.
- [4] Haykin S. Neural networks and learning machines, 3rd Edition // Pearson Education. 2009. 938 p.
- [5] Bishop C. Pattern Recognition and Machine Learning (Information Science and Statistics) // Springer. 2007. 738 p.
- [6] Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning // MIT Press. 2016.
- [7] Haykin S., Deng C. Classification of radar clutter using neural networks // IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 2. 1991. pp. 589–600.
- [8] Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction // Springer. 2001.
- [9] Hagan M., Demuth H., Jesús O. A neural network predictive control system for paper mill wastewater treatment // Engineering Applications of Artificial Intelligence 16(2). 2003. pp. 121-129.
- [10] А.А. Воевода, Д.О. Романников. О синтезе нейронных сетей // Сб. науч. тр. НГТУ. 2018. №1 (91).
- [11] А.А. Воевода, Д.О. Романников. Синтезе нейронных сетей с несколькими входными переменными // Сб. науч. тр. НГТУ. 2018. №1 (91).
- [12] А.А. Воевода, Д.О. Романников. Синтез нейронной сети для решения логико-арифметических задач // Труды СПИИРАН SPIIRAS Proceedings. 2017. № 54. С. 205–223. 223.