

Фрактальные композиционные методы интегрирования на основе полуявных алгоритмов

Д. Н. Бутусов, С. В. Горяинов, В. С. Андреев, К. И. Барашок, М. Н. Козак

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
dnbutusov@etu.ru

Аннотация. В работе рассматриваются фрактальные композиционные схемы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на формулах М. Сузуки и полуявных опорных численных методах. Показано существенное преимущество полуявных фрактальных решателей в производительности по сравнению с неявными и линейно-неявными композиционными схемами. Экспериментально подтверждены эффекты сохранения объема фазового пространства симметричных дискретных моделей нелинейных динамических систем при долгосрочном моделировании. Продemonстрировано, что переход к полуявным опорным методам делает целесообразным применение фрактальных композиционных схем при моделировании широкого класса систем, описываемых дифференциальными уравнениями.

Ключевые слова: численное интегрирование; полуявный дискретный оператор; моделирование динамических систем; хаотическая система; фрактальные алгоритмы

I. ВВЕДЕНИЕ

Одним из известных приёмов повышения порядка точности численных методов интегрирования является композиция симметричных опорных алгоритмов. Композиционные схемы численного решения ОДУ позволяют сохранить геометрические свойства опорного метода, например, симплектичность [1]. Фрактальные алгоритмы являются разновидностью композиционных схем и впервые были получены М. Сузуки [2] путём обобщения алгоритма расчета коэффициентов, предложенного Х. Йошидой [3]. В работе [2] было показано, что фрактальные методы обладают лучшей численной устойчивостью. Как правило, фрактальные композиционные решатели используются при моделировании гамильтоновых систем, где возможно применение полуявных опорных методов типа схемы Верле. Использование композиционных методов при интегрировании более общих классов динамических систем практически не рассматривается, поскольку при этом необходимо использовать неявные опорные методы, существенно снижающие производительность [4].

В работах [5, 6] был предложен подход, позволяющий расширить область применимости полуявных методов на негамильтоновы системы. Было показано, что использование т.н. полуявных Д-методов в качестве опорных в композиционных решателях позволяет

получить конечно-разностные схемы, арифметическая сложность которых приближается к таковой для экстраполяционных методов и явных методов Рунге-Кутты. При этом численная устойчивость таких методов интегрирования оставалась сравнительно низкой.

Целью данной работы является исследование свойств фрактальных алгоритмов численного решения ОДУ, основанных на полуявных опорных Д-методах, при моделировании хаотической системы Буали. Исследуется динамика объема фазового пространства конечно-разностных моделей системы Буали, полученных фрактальными композиционными методами интегрирования на основе различных опорных методов. Приведен сравнительный анализ вычислительной эффективности фрактальных методов решения ОДУ с экстраполяционными решателями и методами Рунге-Кутты.

II. СИСТЕМА БУАЛИ

В работе [7] С. Буали описал нелинейную динамическую систему третьего порядка с хаотическим поведением:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x(1-y) - \beta z \\ \dot{y} = -\gamma y(1-x^2) \\ \dot{z} = \mu x \end{cases}, \quad (1)$$

где α, γ, β и μ – параметры нелинейности.

Фазовый портрет системы Буали представлен на рис. 1. Использовались следующие параметры: время моделирования $t = 500$ с., шаг интегрирования $h = 0.1$ с., $\alpha = 3, \gamma = 2.2, \beta = 1$ и $\mu = 0.001$.

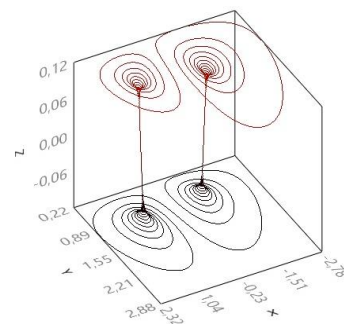


Рис. 1. Странный аттрактор системы Буали

Поведение переменных состояния системы (1) во временной области представлено на рис. 2.

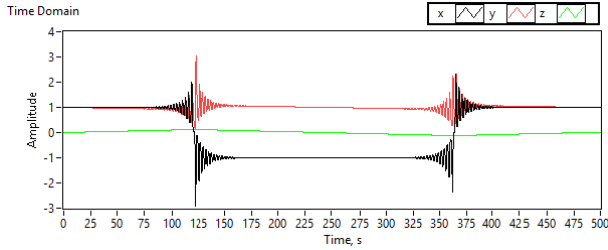


Рис. 2. Поведение системы (1) во временной области

Система (1) является хаотической и обладает высокой чувствительностью к изменению начальных условий и параметров, демонстрируя при этом несколько видов странных аттракторов. При этом в работе [7] показано, что объём и структура фазового пространства системы определяется исключительно начальными условиями и значениями параметров нелинейности. Исходя из этого, можно утверждать, что критерий сохранения объёма фазового пространства во времени при длительном моделировании является одним из основных при выборе численного метода и оценке качества дискретных моделей системы Буали.

III. ФРАКТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Общая идея композиционных схем интегрирования может быть описана в следующем виде:

$$\Psi_h = \Phi_{\delta_1 h} \circ \dots \circ \Phi_{\delta_s h}$$

$$\delta_1 + \dots + \delta_s = 1$$

где h – шаг интегрирования, $\Phi_{\delta_i h}$ – решение, полученное опорным методом на подшаге $\delta_i h$, Ψ_h – итоговое решение уравнения на шаге h , полученное композиционным методом.

В работе [2] М. Сузуки предложил модифицированный алгоритм расчёта композиционных коэффициентов δ :

$$\delta_u = -\frac{(s-1)^{1/(n+1)}}{s - (s-1)^{1/(n+1)} - 1},$$

$$\delta_\sigma = \frac{1}{s - (s-1)^{1/(n+1)} - 1} \quad (2)$$

где s – общее количество стадий композиционного алгоритма, $s = 3, 5, 7, \dots$; n – порядок опорного метода; δ_u – коэффициент центральной стадии, δ_σ – коэффициенты остальных стадий.

Описанный подход позволяет синтезировать композиционную схему численного решения ОДУ с нечётным количеством стадий, порядок точности которой возрастает на 2 по сравнению с опорным методом при условии его симметричности. С целью дальнейшего повышения порядка расчётной схемы процесс может быть

итеративно повторён путём разбиения каждой стадии на подстадии с использованием тех же коэффициентов δ .

В данной работе мы рассматриваем фрактальные алгоритмы 4-го порядка точности, полученные на основе опорных методов второго порядка и имеющие пять (*s5or4*) и семь (*s7or4*) стадий. Рассчитаем значения коэффициентов метода *s5or4*, исходя из отношения (2):

$$\delta_3 = -\frac{4^{1/3}}{4 - 4^{1/3}},$$

$$\delta_{1,2,4,5} = \frac{1}{4 - 4^{1/3}} \quad (3)$$

Аналогично найдем коэффициенты метода *s7or4*:

$$\delta_4 = -\frac{6^{1/3}}{6 - 6^{1/3}},$$

$$\delta_{1,2,3,5,6,7} = \frac{1}{6 - 6^{1/3}} \quad (4)$$

IV. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим фрактальные схемы на основе различных алгоритмов 2-го порядка точности: метод явной средней точки (*EMP*) и его модификация со сглаживающим шагом Грэгга (ГБШ, *MEMP*), метод неявной средней точки (*IMP*), метод линейно-неявной средней точки (*LIMP*) и полуявный метод КД (*CD*). Все эти методы обладают разной степенью симметричности. Хотя на практике эффективными в композиционных схемах могут быть лишь неявные, линейно-неявные и полуявные алгоритмы, тем не менее, для опорных методов на основе явной средней точки также наблюдается явление повышения порядка точности при композиции. Ввиду ограниченности объёма данной статьи, приведем здесь лишь конечно-разностную модель системы Буали, полученную полуявным методом *CD* [5]:

$$x_{n+0.5} = x_n + 0.5h(\alpha x_n(1 - y_n) - \beta z_n);$$

$$y_{n+0.5} = y_n + 0.5h(-\gamma y_n(1 - x_{n+0.5}^2));$$

$$z_{n+0.5} = z_n + 0.5h(\eta x_{n+0.5});$$

$$z_{n+1} = z_{n+0.5} + 0.5h(\eta x_{n+0.5}); \quad (5)$$

$$y_{n+1} = \frac{y_{n+0.5}}{1 + 0.5h\gamma(1 - x_{n+0.5}^2)};$$

$$x_{n+1} = \frac{x_{n+0.5} - 0.5h\beta z_{n+1}}{1 - 0.5h\alpha(1 - y_{n+1})}.$$

Исследуем динамику объёма фазового пространства различных дискретных моделей системы Буали. Для этого рассчитаем изменения объёма куба, в который вписывается аттрактор системы, в скользящем окне длиной 1000 секунд. Моделирование производилось с шагом интегрирования $h=0.02$ с. На рис. 3 и 4 приведены

графики изменения объема фазового пространства модели системы Буали, полученной решателем *s5or4* на основе алгоритмов явной средней точки (*EMP*) и методом ГБШ (*MEMP*), соответственно.

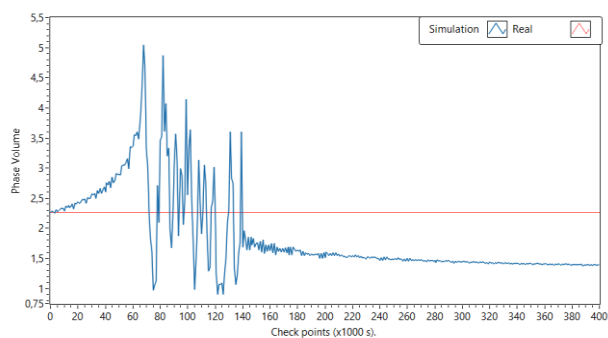


Рис. 3. Динамика объема фазового пространства модели, полученной методом на основе явной средней точки (*s5or4 EMP*)

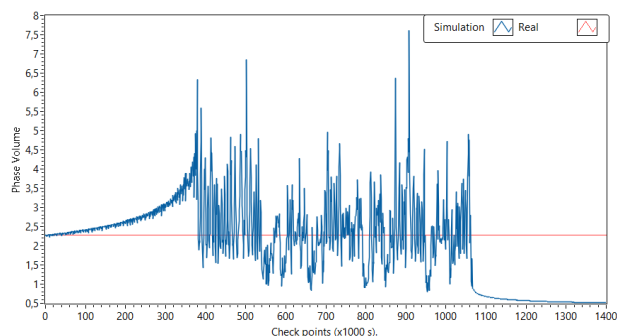


Рис. 4. Динамика объема фазового пространства модели, полученной методом на основе алгоритма ГБШ (*s5or4 MEMP*)

Из экспериментальных результатов следует, что модели, полученные с использованием явных методов интегрирования, не сохраняют исходный объем фазового пространства хаотической системы Буали при длительном моделировании. После катастрофической смены нескольких хаотических режимов, переменные состояния явных конечно-разностных моделей системы Буали переходят к периодическому режиму колебаний (рис. 5).

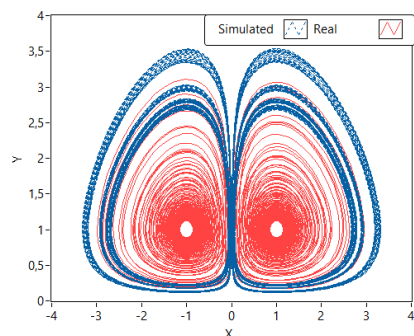


Рис. 5. Фазовый портрет дискретной модели системы Буали, полученной численным методом *MEMP*, после 1000 с. моделирования по сравнению с изначальным видом аттрактора

Стоит отметить, что данные результаты справедливы и при использовании явных экстраполяционных методов (напр., *ODEx*), а также явных методов Рунге-Кутты.

На рис. 6 и 7 показаны графики изменения объема фазового объема моделей системы Буали, полученных фрактальным алгоритмом *s5or4* на основе линейно-неявного (*LIMP*) и неявного (*IMP*) метода средней точки. Данные методы относятся к симметричным интеграторам и в теории должны сохранять свойства модели при долгосрочном моделировании.

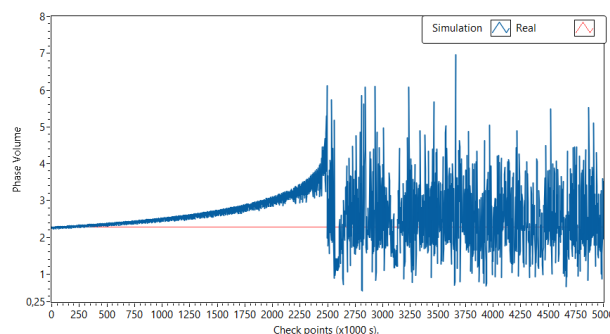


Рис. 6. Динамика объема фазового пространства модели, полученной методом на основе линейно-неявной средней точки (*s5or4 LIMP*)

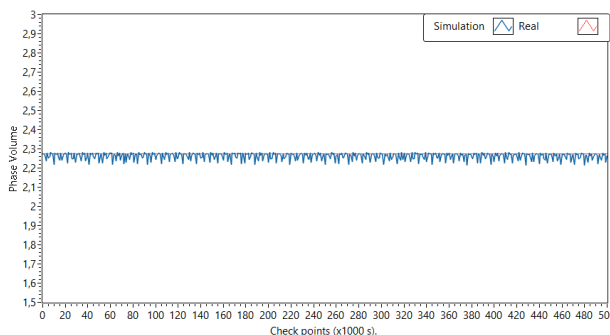


Рис. 7. Динамика объема фазового пространства модели, полученной методом на основе неявной средней точки (*s5or4 IMP*)

Из рис. 6 видно, что фрактальный метод на основе *LIMP* не позволяет полностью сохранить объем и структуру фазового пространства исходной непрерывной системы. Динамика объема фазового пространства у моделей, полученных данным методом, напоминает таковую у явных методов, однако наблюдается на большем интервале времени моделирования. Можно предположить, что замена полноценного вычисления по методу Ньютона на однократную итерацию приводит к нарушению симметричности метода.

Фрактальный решатель на основе полностью неявного метода средней точки (*IMP*) действительно сохраняет объем фазового пространства непрерывной системы при дискретном моделировании (рис. 7).

Наибольший интерес в контексте данного исследования представляют свойства фрактальных решателей на основе полужявного метода *CD* (5). Рис. 8 отражает динамику объема аттрактора дискретной модели системы Буали, полученной методом *s5or4* с опорным методом *CD*. Можно видеть, что модель также является симметричной и сохраняет объем фазового пространства.

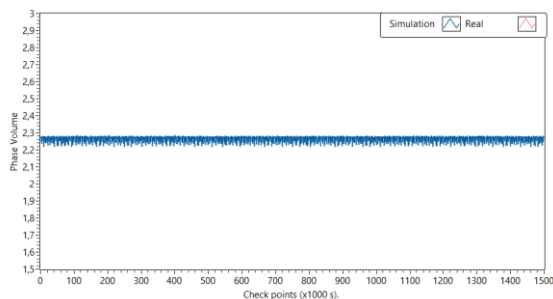


Рис. 8. Динамика объёма фазового пространства модели, полученной полуявным методом *s5or4 CD*

Отметим, что фрактальные решатели на основе методов *CD* не требуют применения метода Ньютона при вычислениях, используя численно-аналитическое вычисление диагонально-неявных элементов или аппроксимируя их методом простых итераций. Это повышает их вычислительную эффективность по сравнению с неявными симметричными алгоритмами.

V. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Для оценки вычислительной эффективности фрактальных алгоритмов использовался график эффективности, отражающий зависимость методической погрешности решения от временных затрат. Исследовались несколько численных методов 4-го порядка: семистадийный явный метод Рунге-Кутты (*RK45*); фрактальные композиционные методы *s7or4* на основе опорных методов *IMP*, *LIMP* и *CD*; экстраполяционный метод на основе метода *LIMP* (*Ex LIMP 4*). В качестве эксперимента также исследовался семистадийный фрактальный метод, использующий в качестве опорного метода алгоритм ГБШ (*s7or4 MEMP*).

Оценка вычислительной эффективности исследуемых алгоритмов приведена на рис. 9. Исследование проводилось на наборе постоянных шагов интегрирования $h = [0.5; 0.35; 0.2; 0.125; 0.0845; 0.045; 0.025; 0.012]$.

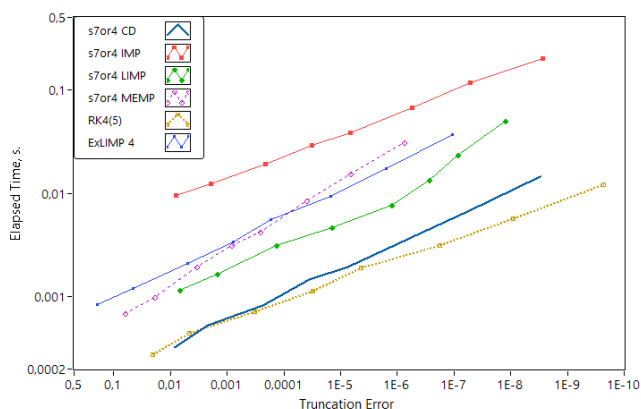


Рис. 9. Графики эффективности исследуемых численных методов

Эксперименты показали, что производительность полуявного метода *s7or4 CD* сопоставима с характеристиками популярного метода *RK4(5)*, входящего

в состав таких пакетов моделирования, как MATLAB и LabVIEW, но не обладающего при этом свойством симметричности. Таким образом, использование полуявных опорных методов не только делает практически целесообразным применение фрактальных решателей ОДУ с точки зрения сохранения свойств непрерывного прототипа при дискретном моделировании, но и приближает их по вычислительной эффективности к явным алгоритмам Рунге-Кутты.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено экспериментальное исследование свойств дискретных моделей, полученных фрактальными методами численного интегрирования на базе различных опорных алгоритмов. Показано, что применение симметричных опорных методов позволяет сохранить объем фазового пространства хаотической динамической системы Буали на длительном интервале моделирования. Также обнаружено сохранение хаотичности колебаний в дискретных моделях системы Буали, полученных симметричными численными методами, и постепенный переход к периодическим колебаниям в моделях, полученных явными методами. Данный факт может иметь практическое значение при разработке генераторов хаоса в защищенных системах связи, устройствах шифрования и др. Установлено, что полуявные алгоритмы *CD* позволяют получить симметричные конечно-разностные модели с теми же свойствами, что и неявный метод средней точки. При этом вычислительная эффективность фрактальных композиционных методов на основе метода *CD* сопоставима с таковой для явных методов интегрирования.

Результаты исследования показывают целесообразность широкого применения полуявных фрактальных алгоритмов при моделировании хаотических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric numerical integration: structure-preserving algorithms for ordinary differential equations. Springer Science & Business Media, 2006, Vol. 31.
- [2] Suzuki M. Fractal decomposition of exponential operators with applications to many-body theories and Monte Carlo simulations. Physics Letters A, 1990, vol. 146, no. 6, pp. 319–323. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(90\)90962-N](https://doi.org/10.1016/0375-9601(90)90962-N)
- [3] H. Yoshida. Construction of higher order symplectic integrators. Physics Letters A, 1990, vol. 150, no 5–7, pp. 262–268. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(90\)90092-3](https://doi.org/10.1016/0375-9601(90)90092-3).
- [4] Meyer K. R., Hall G. R., Offin D. Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. Applied Mathematical Sciences, 2009.
- [5] Butusov D.N., Karimov T.I., Ostrovskii V.Y. Semi-implicit ODE solver for matrix Riccati equation. Proc. IEEE NW Russia Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference (ElConRusNW). St. Petersburg, 2016, pp. 168–172.
- [6] Butusov D.N., Andreev V.S., Pesterev D.O. Composition semi-implicit methods for chaotic problems simulation. Proc. 2016 XIX IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM). St. Petersburg, 2016, pp. 107–110. DOI: 10.1109/SCM.2016.7519698.
- [7] Bouali S. A 3D Strange Attractor with a Distinctive Silhouette. The Butterfly Effect Revisited. arXiv preprint arXiv:1311.6128.