

Исследование системы Декуана Ли с использованием полуявных методов интегрирования

Д. Н. Бутусов, М. О. Фёдоров, А. А. Чернышов, А. В. Тутуева, В. Г. Рыбин
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
dnbutusov@etu.ru

Аннотация. Хаотическая система Декуана Ли имеет тороидальный аттрактор с осевой симметрией. С учетом текущего развития симметричных методов интегрирования особый интерес представляет исследование эффектов, возникающих в системах с симметричными аттракторами при использовании симметричных интеграторов. Целью настоящего исследования является изучение поведения дискретных моделей системы Декуана Ли, полученных полуявными симметричными методами. Показано, что симметричные полуявные методы обладают высокой вычислительной эффективностью при моделировании рассматриваемой системы. В работе предложен новый способ анализа хаотических систем, использующий особенности полуявных методов интегрирования. Представлены результаты бифуркационного и динамического анализа системы Декуана Ли. Показан новый хаотический режим колебаний в дискретной модели.

Ключевые слова: динамический хаос; нелинейная динамика; система Декуана Ли; полуявные методы

I. ВВЕДЕНИЕ

Исследование динамического хаоса является важным направлением в нелинейной динамике. Многие естественные и технические процессы демонстрируют хаотическое поведение. Отдельное место среди хаотических систем занимают системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) [1]. Как правило, изучение таких систем осуществляется с помощью компьютерного моделирования, что требует дискретизации исходной системы. Это означает, что при цифровом моделировании мы исследуем дискретную модель системы вместо описывающих ее непрерывных уравнений. Переход от дифференциальных уравнений к алгебраическим приводит к появлению различных эффектов, связанных с типом дискретного оператора, шагом дискретизации и длиной машинного слова, которые могут существенно изменить поведение дискретной модели по сравнению с прототипом. Поэтому изучение эффектов, вызванных дискретизацией, представляет особый интерес [2].

Традиционные подходы к исследованию хаотических систем включают вычисление показателей Ляпунова, бифуркационный анализ, построение рекуррентных диаграмм и изучение фазового портрета [3–5]. Однако ни

один из этих методов сам по себе не способен надежно обнаруживать и классифицировать все возможные динамические режимы, наблюдаемые в хаотических системах. К тому же, для получения релевантных результатов некоторые из вышеупомянутых методов анализа требуют моделирования на длительных интервалах времени, приводящего к росту вычислительных затрат и весьма ограниченного по точности в случае хаотических систем.

В статье предлагается новый способ изучения динамики хаотических систем, основанный на свойствах симметричных полуявных методов интегрирования, известных как CD-методы [6–8]. Предлагаемый алгоритм использует оценку на основе разности численных решений, полученных двумя CD-методами с различной коммутацией строк. Предполагается, что разность решений будет коррелировать с изменениями в динамике хаотической системы. Таким образом, предлагаемый алгоритм позволит распознавать различные режимы колебаний даже при краткосрочном моделировании.

II. СИСТЕМА ДЕКУАНА ЛИ

Автономные системы третьего порядка редко порождают тороидальные аттракторы [10]. Одним из примеров подобной задачи является модификация системы Лоренца, предложенная Декуаном Ли в работе [9]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) + dxz \\ \dot{y} &= kx + fy - xz \\ \dot{z} &= cz + xy - ex^2\end{aligned}\quad (1)$$

где $a = 40$, $c = 11/6$, $d = 0.16$, $e = 0.65$, $k = 55$ и $f = 20$ – параметры нелинейности системы. Фазовый портрет системы Декуана Ли представлен на рис. 1.

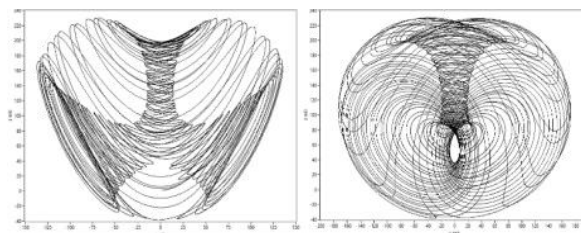


Рис. 1. Различные проекции аттрактора системы Декуана Ли

III. КОММУТАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ И ОЦЕНКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕШАТЕЛЕЙ

A. Коммутационный анализ

Предлагаемый алгоритм основан на параллельном нахождении двух численных решений исследуемой системы дифференциальных уравнений. Эти решения должны быть получены полуявными методами интегрирования [6–8] одного порядка точности. Для описания семейства этих алгоритмов ранее было введено понятие матрицы коммутаций [6]. Матрица коммутаций состоит из нулей и единиц и определяет дискретные моменты времени обращения к переменной состояния, n или $n + 1$, соответственно. Коммутационная матрица неявного алгоритма содержит единицы, явному методу соответствует матрица, заполненная нулями. При описании полуявного метода мы используем скобки, обозначающие неявное вычисление переменных состояния на главной диагонали матрицы. Рассмотрим два сопряженных полуявных метода с взаимно дополняющими матрицами коммутаций:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [1] & 1 & 1 \\ 0 & [1] & 1 \\ 0 & 0 & [1] \end{pmatrix} \quad (2)$$

В результате применения операции композиции с половинным шагом интегрирования образуется симметричный самосопряженный CD-метод второго порядка точности. Меняя порядок вычисления строк матрицы коммутаций, можно получить различные модификации CD-метода.

Синтезируем две конечно-разностные модели системы Декуан Ли с помощью метода CD:

$$\begin{aligned} x_{n+0.5} &= x_n + 0.5h(a(y_n - x_n) + dx_n z_n); \\ y_{n+0.5} &= y_n + 0.5h(kx_{n+0.5} + fy_n - x_{n+0.5} z_n); \\ z_{n+0.5} &= z_n + 0.5h(cz_n + x_{n+0.5} y_{n+0.5} - ex_{n+0.5}^2); \\ z_{n+1} &= \frac{z_{n+0.5} + 0.5h(x_{n+0.5} y_{n+0.5} - ex_{n+0.5}^2)}{1 - 0.5he}; \\ y_{n+1} &= \frac{y_{n+0.5} + 0.5h(kx_{n+0.5} - x_{n+0.5} z_{n+1})}{1 - 0.5hf}; \\ x_{n+1} &= \frac{x_{n+0.5} + 0.5h(ay_{n+1})}{1 + 0.5h(a - dz_{n+1})}, \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} x_{n+0.5} &= \frac{x_n + 0.5h(ay_n)}{1 + 0.5h(a - dz_n)}; \\ y_{n+0.5} &= \frac{y_n + 0.5h(kx_{n+0.5} - x_{n+0.5} z_n)}{1 - 0.5hf}; \\ z_{n+0.5} &= \frac{z_n + 0.5h(x_{n+0.5} y_{n+0.5} - ex_{n+0.5}^2)}{1 - 0.5he}; \\ z_{n+1} &= z_{n+0.5} + 0.5h(cz_{n+0.5} + x_{n+0.5} y_{n+0.5} - ex_{n+0.5}^2); \\ y_{n+1} &= y_{n+0.5} + 0.5h(kx_{n+0.5} + fy_{n+0.5} - x_{n+0.5} z_{n+1}); \\ x_{n+1} &= x_{n+0.5} + 0.5h(a(y_{n+1} - x_{n+0.5}) + dx_{n+0.5} z_{n+1}). \end{aligned} \quad (4)$$

Алгоритмы (3) и (4) дают близкие, но все же различные асимптотические разложения. Это свойство позволяет оценивать изменения в режиме колебаний хаотической системы за счет высокой чувствительности траекторий. Теоретическое предположение заключается в том, что динамика разности между двумя близкими численными решениями коррелирует со скоростью расхождения траекторий в фазовом пространстве. Предлагаемый алгоритм анализа состоит из следующих шагов:

1. Исследуемая система моделируется парой CD-методов на временном интервале t . Выходные массивы s_1 и s_2 содержат переменные состояния для каждого алгоритма.
2. На каждом шаге интегрирования для всех переменных состояния вычисляется максимальная локальная погрешность $|e_{local}|$.
3. Для вычисления средней погрешности $|e_{average}|$ локальная погрешность $|e_{local}|$ делится на максимальное значение их содержащихся в массивах s_1 и s_2 .
4. Среднее значение $|e_{average}|$ является оценкой локальной ошибки усечения (LTE) для заданного значения параметра нелинейности.

Оценка LTE является количественной характеристикой поведения системы. Ее зависимость от параметра нелинейности может быть отображена графически так же, как обычно представляется зависимость ляпуновских экспонент от параметра нелинейности. Аналогично строится и двумерная динамическая карта, отражающая зависимость значения LTE от пары нелинейных параметров.

B. Оценка вычислительной эффективности

Прежде чем перейти к сравнению методов анализа, необходимо выбрать наиболее эффективный решатель ОДУ для численного моделирования. Бифуркационный анализ и построение карт динамических режимов являются вычислительно затратными процедурами. При моделировании непрерывных хаотических систем часто

используют экстраполяционные решатели ОДУ, поскольку они вычислительно эффективны, обладают естественным параллелизмом и встроенным алгоритмом оценки ошибки для управления шагом интегрирования. В данной работе рассматривались несколько экстраполяционных решателей 8-го порядка на основе явных, неявных и полуявных опорных методов. Критерием при выборе оптимального решателя было отношение времени построения решения к достигаемой точности. Зависимость этих параметров может быть представлена в виде графика производительности [11].

В работе исследовались явный метод средней точки (ЕМР) и его модификация со сглаживающим шагом Грэгга (МЕМР). Среди неявных алгоритмов рассматривались метод неявной средней точки (ИМР) и его линейно-неявный вариант (ЛИМР). Также оценивалась производительность полуявного алгоритма (СД) и его модификации с вычислением диагонали методом простого приближения (СЕД). Результаты оценки производительности решателей при моделировании системы Декуана Ли представлены на рис. 2.

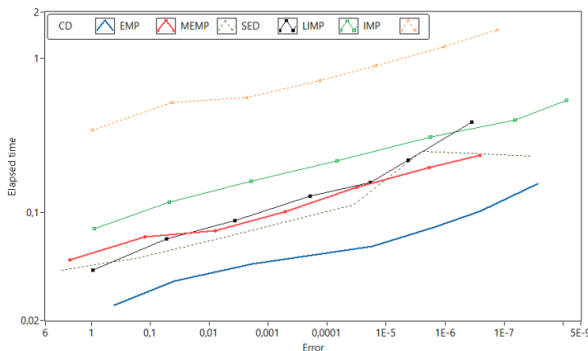


Рис. 2. График эффективности исследованных решателей ОДУ

Эксперименты показали, что алгоритм на основе метода СД является наиболее вычислительно эффективной экстраполяционной схемой решения системы (1).

IV. АНАЛИЗ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ДЕКУАНА ЛИ

Применим различные методы анализа, включая предложенную оценку LTE, для исследования динамики хаотической системы Декуана Ли. На рис. 3 представлена бифуркационная диаграмма и результаты оценки параметров LTE и ляпуновских экспонентов (LE). Все результаты были получены при времени моделирования $t = 10$ с. при изменении параметра e в диапазоне $[0.54; 0.72]$. Можно отметить, что график оценки LTE (рис. 3, c) коррелирует с бифуркационной диаграммой (рис. 3, a) и в целом схож с оценкой показателей Ляпунова (рис. 3, b), но обеспечивает более детальную оценку динамики системы. Стоит обратить внимание, что вертикальная ось графика LTE (рис. 3, c) представлена в логарифмическом масштабе. Также оценка LTE показала наличие хаотического поведения при $e \in [0.55; 0.59]$, что не предусматривалось описанием системы в работе [8]. Для уточнения полученных результатов была построена двумерная карта динамических режимов системы. Для этого оценка LTE была получена на временном интервале $t = 5$ с. с фиксированным шагом интегрирования $h = 0.01$ при изменении параметров нелинейности c, e (рис. 4, a) и c, d (рис. 4, b) в диапазонах $[1.3; 5]$, $[0.42; 0.72]$ и $[1; 10]$, $[0.1; 0.22]$, соответственно. Двумерные динамические карты исследуемой системы показывают наличие двух областей с хаотическим поведением, разделенных зоной неустойчивости, причем дискретная модель системы Декуана Ли порождает различные аттракторы в разных хаотических областях. Было установлено, что второй режим хаотических колебаний обнаруживается только в полуявной модели системы и при определенных значениях шага интегрирования (напр., $h = 0.01$). Однако позже моделирование методами высокого порядка косвенно подтвердило факт существования этого режима в исходном уравнении. В дальнейшем авторы планируют изучить поведение системы Декуана Ли методом аналогового моделирования, а также оценить возможность возникновения второго хаотического режима при дискретизации системы другими численными методами.

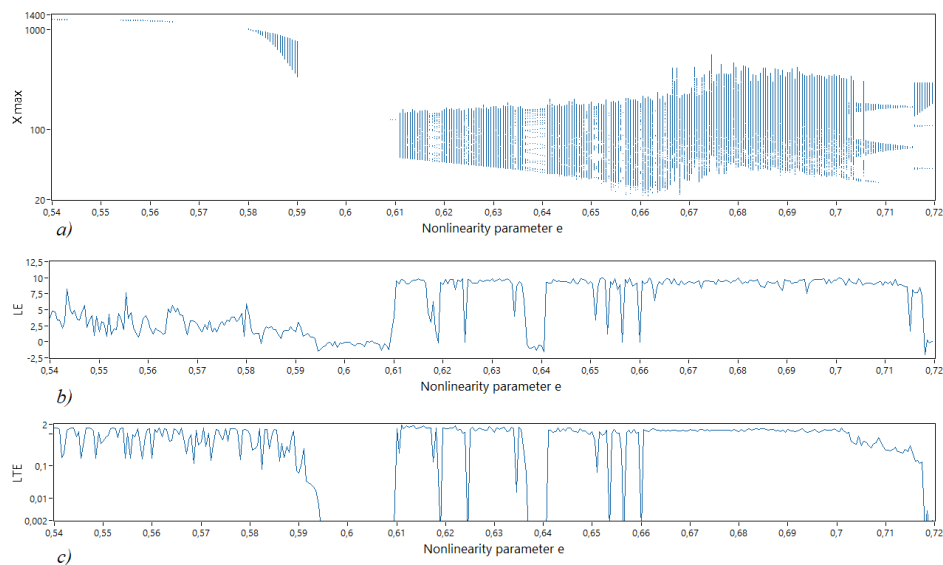


Рис. 3. Результаты а) бифуркационного анализа б) оценки ляпуновских показателей в) коммутационного анализа системы Декуана Ли

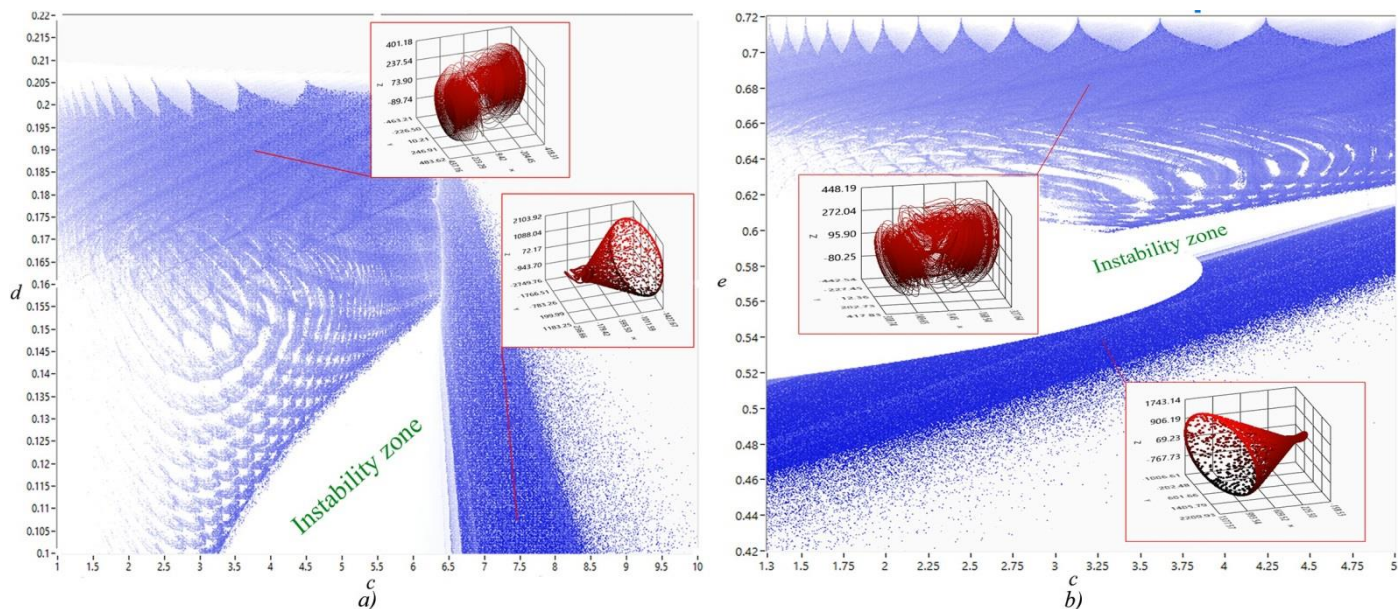


Рис. 4. Двумерные карты динамических режимов и разные аттракторы в системе Декуана Ли

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен и экспериментально проверен новый способ анализа динамики хаотических систем, основанный на оценке разности решений, полученных полужавными методами численного интегрирования. Предлагаемый подход не требует долгосрочного моделирования или применения высокоточных схем численного решения ОДУ. Будучи вычислительно эффективными и алгоритмически простыми, симметричные CD-методы и экстраполяционные решатели ОДУ на их основе позволяют получить карты динамических режимов системы в высоком разрешении за разумное время. Это позволяет анализировать динамику хаотических систем с повышенной точностью и детализацией.

В качестве тестовой хаотической системы для данного исследования была выбрана система Декуана Ли. Применение LTE-анализа позволило получить динамические карты высокого разрешения для исследуемой системы и обнаружить дополнительный режим хаотических колебаний, возникающий при других значениях параметров нелинейности. Насколько известно авторам, в опубликованных научных работах описывается единственный аттрактор системы Декуана Ли. Авторы допускают, что обнаруженный второй аттрактор может быть порожден эффектами дискретизации, несмотря на то, что высокоточное моделирование косвенно подтверждает его существование в исходных уравнениях. Обнаружение и исследование данного режима колебаний в непрерывной системе Декуана Ли будет предметом дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Alligood K. T., Sauer T. D., Yorke J. A. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. New York: Springer, 1996.
- [2] Nepomuceno E.G., Martins S.A.M., Silva B.C., Amaral G.F.V., Perc M. Detecting unreliable computer simulations of recursive functions with interval extensions. Applied Mathematics and Computation, 2018, 329, pp. 408–419. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.02.020>
- [3] Dadras S., Momeni H. R. Generating one-, two-, three- and four-scroll attractors from a novel four-dimensional smooth autonomous chaotic system. Chinese Physics B, 2010, 19.6, 060506. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1674-1056/19/6/060506>
- [4] Fei Y., Chun-Hua W., Jin-Wen Y., Hao X. Novel four-dimensional autonomous chaotic system generating one-, two-, three- and four-wing attractors. Chinese Physics B, 2011, 20.11, 110505.
- [5] Dadras S., Momeni H. R., Qi G. Analysis of a new 3D smooth autonomous system with different wing chaotic attractors and transient chaos. Nonlinear Dynamics, 2010, 62.1–2, pp. 391–405. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-010-9726-2>
- [6] Butusov D. N., Tutueva A. V., Homitskaya E. S. Extrapolation Semi-implicit ODE Solvers with Adaptive Timestep. Proc. IEEE International conference on Soft Computing and Measurements (SCM). St. Petersburg, 2016, pp.137–140. DOI: 10.1109/SCM.2016.7519708
- [7] Butusov D. N., Ostrovskii V. Y., Pesterev D. O. Numerical analysis of memristor-based circuits with semi-implicit methods. Proc. IEEE Russia Section Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference (EIConRus). St. Petersburg, 2017, pp. 271–276. DOI: 10.1109/EIConRus.2017.7910545
- [8] Li D. A three-scroll chaotic attractor. Physics Letters A, 2008, 372.4, pp. 387–393. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.07.045>
- [9] Deng B. Constructing homoclinic orbits and chaotic attractors. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1994, 4.04, pp. 823–841. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127494000599>
- [10] Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996. 474 p.
- [11] Butusov D. N., Ostrovskii V. Y., Karimov A. I., D. A. Belkin. Study of Two-Memcapacitor Circuit Model with Semi-Explicit ODE Solver. Proc. 21st Conference of Open Innovations Association (FRUCT). Helsinki, 2017, pp. 64–70. DOI: 10.23919/FRUCT.2017.8250166