

# Сравнение численных схем итерационного уточнения словаря в задачах разреженной аппроксимации

О. О. Луковенкова<sup>1</sup>, Ю. В. Марапулец<sup>2</sup>, А. А. Ким<sup>3</sup>

ИКИР ДВО РАН,

КамГУ имени Витуса Беринга

<sup>1</sup>o.o.lukovenkova@yandex.ru, <sup>2</sup>marpl@ikir.ru,

<sup>3</sup>a.a.afanaseva@yandex.ru

А. Б. Тристанов

ИКИР ДВО РАН,

Калининградский технический государственный

университет

alextristanov@mail.ru

**Аннотация.** Разреженная аппроксимация подразумевает разложение исходного сигнала в сумму минимально возможного числа функций, выбранных из заданного словаря. Согласованное преследование – алгоритм, позволяющий находить приближенное решение задачи разреженной аппроксимации. Он имеет кубическую вычислительную сложность относительно мощности словаря, длины входящих в него функций и длины сигнала. Доклад посвящен описанию и сравнению численных методов, позволяющих оптимизировать алгоритм согласованного преследования по скорости и по затрачиваемой памяти. Проведен анализ сигналов геоакустической эмиссии с использованием полученных модификаций алгоритма.

**Ключевые слова:** разреженная аппроксимация; адаптивное согласованное преследование; геоакустическая эмиссия

## I. ВВЕДЕНИЕ

Первое упоминание разреженной аппроксимации относится к началу XX столетия [1]. Наибольшую популярность данный метод приобретает в 1990х – 2000х гг. благодаря работам Mallat [2], Donoho, Saunders [3] и др. Разреженная аппроксимация начинает активно использоваться в обработке изображений, аудио и цифровой обработке сигналов различной природы. Некоторые сигналы представляют собой смесь разнородных структур, например, синусоид и локализованных по времени импульсов, и поэтому не могут быть корректно описаны в рамках ортогональных базисов. Геоакустическая эмиссия, регистрируемая на полуострове Камчатка, может быть отнесена к такого рода сигналам. С 2011 года для ее частотно-временного анализа используется подход разреженной аппроксимации [4]. Авторами предложен ряд численных схем, описанных ниже и позволяющих получать более точные разреженные представления геоакустических импульсов.

## II. ЗАДАЧА РАЗРЕЖЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Задача разреженной аппроксимации подразумевает представление сигнала  $s(t)$  в виде линейной комбинации

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект №18-11-00087

функций  $g_i(t)$ , выбранных из некоторой наперед заданной системы  $D$ . Термин «разреженная» подразумевает, что линейная комбинация должна содержать минимально возможное число слагаемых.

$$s(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i(t), \quad (1)$$
$$\|\alpha\|_0 \rightarrow \min.$$

Для формализации разреженности введено понятие  $l_0$ -нормы, псевдонормы, равной числу выбранных из системы функций, т.е. числу ненулевых коэффициентов разложения

$$\|\alpha\|_0 = \#\{i : \alpha_i \neq 0, i = 1 \dots N\}.$$

В теории разреженной аппроксимации систему функций принято называть «словарем», а отдельную функцию – «частотно-временным атомом» или просто «атомом». В общем случае задача разреженной аппроксимации имеет факториальную вычислительную сложность  $O(n!)$ , поскольку для определения решения необходимо выполнить полный перебор комбинаций атомов из словаря. Существует два подхода для приближенного решения задачи.

### A. Согласованное преследование (Matching Pursuit)

Жадный алгоритм, разработанный Mallat и Shang [2]. Суть алгоритма заключается в выборе на каждой итерации из словаря наиболее коррелирующего с сигналом атома.

$$\left\| s(t) - \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i(t) \right\|_2 \rightarrow \min,$$
$$\|\alpha\|_0 \leq N.$$

Данный алгоритм имеет кубическую вычислительную сложность  $O(n^3)$ .

### В. Преследование базиса (Basis Pursuit)

Оптимизационный принцип, предложенный Chen, Donoho и Saunders [3], согласно которому число ненулевых коэффициентов в представлении (1) может быть аппроксимировано суммой их абсолютных значений.

$$\sum_{i=1}^N |\alpha_i| \rightarrow \min.$$

Существуют различные оптимизационные алгоритмы, построенные на основе принципа преследования базиса. Все они также имеют полиномиальную вычислительную сложность.

### III. ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ К СИГНАЛАМ ГЕОАКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ

Опыт исследования геоакустической эмиссии, регистрируемой на Камчатке, показывает, что классические частотно-временные методы не подходят для анализа коротких по длительности, но сложных по структуре геоакустических импульсов. Поэтому в качестве главного инструмента анализа был выбран подход разреженной аппроксимации [4].

Поскольку геоакустические импульсы имеют характерную временную форму с коротким передним и длительным задним фронтами, представления сигналов строились по словарю, составленному из модулированных и сдвинутых функций Берлаге

$$g(t) = A \cdot t^{n(p_{\max}) \cdot \Delta} \cdot \exp\left(-\frac{n(p_{\max}) \cdot \Delta}{p_{\max} \cdot t_{\text{end}}} t\right) \cdot \cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right), (2)$$

где  $A$  – нормировочный коэффициент,  $p_{\max}$  – положение максимума относительно длины атома,  $p_{\max} \in [0.01, 0.4]$ ;  $n(p_{\max})$  – критическое значение параметра  $n$ , вычисляемое по формуле

$$n(p_{\max}) = \frac{\ln 0.05}{\ln \frac{1}{p_{\max}} - \frac{1}{p_{\max}} + 1},$$

$\Delta$  – коэффициент усиления параметра  $n$  относительно критического значения;  $t_{\text{end}}$  – длина атома;  $f$  – частота от 200 до 20000 Гц.

В ходе экспериментального исследования наилучший результат в анализе геоакустических сигналов продемонстрировал алгоритм согласованного преследования. Построенные представления отличаются высокой разреженностью и достаточной точностью. Однако классический алгоритм имеет ряд существенных недостатков: для построения точных аппроксимаций необходимо использовать словари огромных размеров, что ввиду кубической вычислительной сложности алгоритма,

приводит к существенным временным затратам; хранение матрицы ковариаций исходного сигнала с атомами словаря также требует большой объем памяти, пропорциональный мощности словаря; использование словарей оптимального размера приводит к «грубой» дискретизации параметров частотно-временных атомов.

Для решения перечисленных выше проблем авторами был предложен ряд модификаций классического согласованного преследования, направленных на получение точных аппроксимаций при использовании словарей небольшой мощности. Далее рассмотрены две из них: оптимизация с использованием метода сеточного поиска и оптимизация методом градиентного спуска.

### IV. ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ

#### А. Общая задача оптимизации

Функция Берлаге (2) однозначно зависит от набора параметров:  $p_{\max}$ ,  $\Delta$  и  $t_{\text{end}}$  влияют на форму огибающей импульса, а  $f$  – на частотное заполнение. На каждой итерации алгоритма согласованного преследования выполняется поиск атома, имеющего наибольшее скалярное произведение с сигналом, при этом для каждой функции  $g(t)$  рассматриваются все сдвиги относительно сигнала. Т.е. алгоритм согласованного преследования на словаре Берлаге сводится к задаче многомерной оптимизации

$$F(\tau, p_{\max}, \Delta, t_{\text{end}}, f) = \langle s(t), g(t - \tau, p_{\max}, \Delta, t_{\text{end}}, f) \rangle \rightarrow \max_{\tau, p_{\max}, \Delta, t_{\text{end}}, f}. (3)$$

Рассмотрим, как влияют параметры на поведение многомерной функции  $F(\tau, p_{\max}, \Delta, t_{\text{end}}, f)$ .

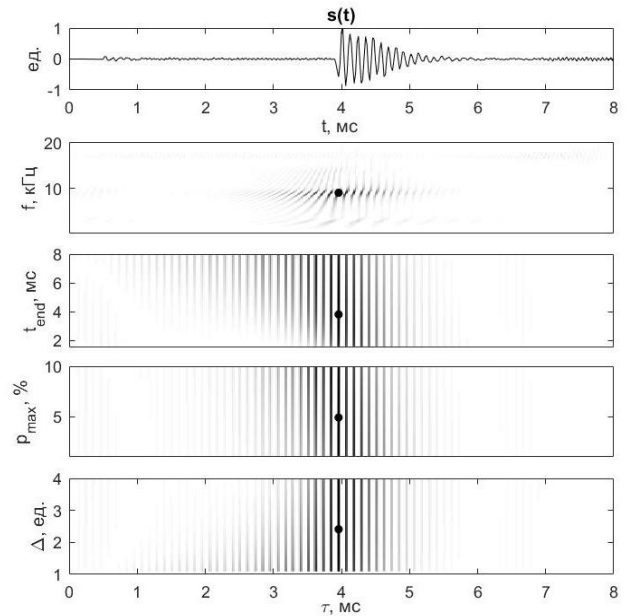


Рис. 1. Зависимости скалярных произведений от параметров атомов

На рис. 1 изображены зависимости скалярных произведений от сдвига относительно сигнала  $\tau$  и значений параметров, точками отмечены максимальные значения. По представленным графикам видно, что значения скалярных произведений менее чувствительны к изменениям параметров формы. Ввиду колебательного характера исследуемых сигналов,  $F(\tau, p_{\max}, \Delta, t_{\text{end}}, f)$  имеет большое количество локальных экстремумов (максимумов и минимумов), возникающих при совпадении или несовпадении фазы колебаний. Данная особенность может осложнять процесс уточнения параметров атома.

### В. Метод сеточного поиска

Данный метод – это один из наиболее простых численных методов решения задач одномерной и многомерной оптимизации.

Пусть имеется многомерная функция  $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ . Необходимо определить точку  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $x = (x_1, \dots, x_N)$  в которой функция  $F$  принимает максимальное значение. Для этого непрерывной области изменения параметров сопоставляется сетка. Поиск максимума осуществляется среди узлов сетки путем вычисления и сравнения значений функции в каждом узле. Сетка может быть равномерной или неравномерной.

С небольшими изменениями данный метод может быть использован для оптимизации (3):

- в качестве начального разбиения выбирается равномерная сетка, узлы которой соответствуют атомам исходного словаря (в качестве шага сетки берется шаг дискретизации значений параметров  $\lambda_p, \lambda_\Delta, \lambda_t, \lambda_f$ );
- поскольку значения скалярных произведений вычисляются для всех возможных значений  $\tau$ , то оптимизацию будем производить по оставшимся четырем параметрам  $p_{\max}, \Delta, t_{\text{end}}$  и  $f$ ;
- с помощью классического согласованного преследования определяется начальное приближение для параметров  $p_{\max}^*, \Delta^*, t_{\text{end}}^*$  и  $f^*$ ;
- в окрестности выбранного узла сетки строится новая сетка, содержащая по три точки для каждого параметра:  $p_{\max}^* - \lambda_p/2, p_{\max}^*, p_{\max}^* + \lambda_p/2, \Delta^* - \lambda_\Delta/2, \Delta^*, \Delta^* + \lambda_\Delta/2$  и т.д.;
- определяется новое приближение, если оно совпадает с предыдущим, то дробим шаги в два раза.

На рис. 2 изображены результаты оптимизация по сетке из 25 узлов на примере двух параметров: частоты  $f$  и длины  $t_{\text{end}}$  (словарь, состоящий из 25 атомов, дискретные значения параметров отмечены пунктирными линиями). После оптимизации получен атом Берлаге с частотой 8.97 кГц и длиной 2.6 мс. На сетке из 22500 узлов в качестве оптимальных параметров были выбраны частота 8.96 кГц и длина 3.84 мс. При этом значение скалярного произведения больше в первом случае, т.е. полученный с

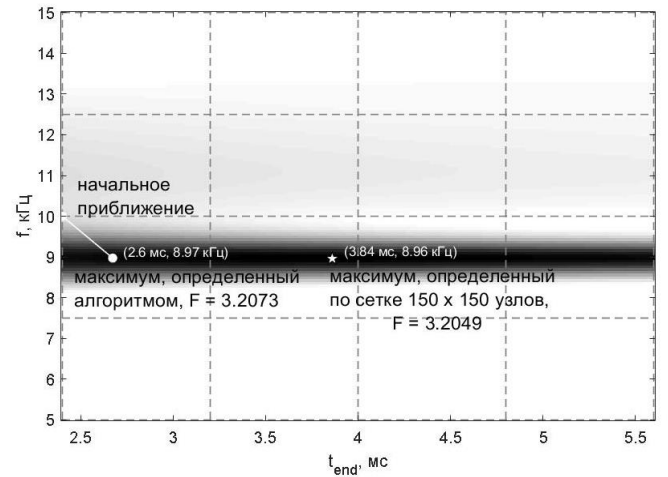


Рис. 2. Уточнение параметров атома методом сеточного поиска

помощью метода сеточного поиска атом точнее аппроксимирует исходный сигнал. Такое сильное расхождение длины объясняется низкой чувствительностью значения скалярного произведения к изменениям данного параметра (рис. 1).

### С. Метод градиентного спуска

Популярный метод нахождения локального экстремума (минимума или максимума) функции с помощью движения вдоль градиента. Для нахождения максимума необходимо двигаться по направлению вектора с компонентами, равными частным производным  $F$  по параметрам

$$\nabla F = \left( \frac{\partial F}{\partial p_{\max}}, \frac{\partial F}{\partial \Delta}, \frac{\partial F}{\partial t_{\text{end}}}, \frac{\partial F}{\partial f} \right),$$

$$(p_{\max}, \Delta, t_{\text{end}}, f)^{[i+1]} = (p_{\max}, \Delta, t_{\text{end}}, f)^{[i]} + \lambda \cdot \nabla F.$$

Шаг  $\lambda$  может быть постоянным или переменным.

Функция Берлаге задана аналитически, поэтому вычисление ее частных производных было произведено аналитическим методом, и согласно свойствам скалярного произведения вектор градиента может быть вычислен следующим образом

$$\nabla F = \left( \left\langle s(t), \frac{\partial g}{\partial p_{\max}} \right\rangle, \left\langle s(t), \frac{\partial g}{\partial \Delta} \right\rangle, \left\langle s(t), \frac{\partial g}{\partial t_{\text{end}}} \right\rangle \right).$$

Т.к. метод градиентного спуска используется для поиска локальных экстремумов функции, а колебательный характер  $s(t)$  приводит к наличию большого числа локальных экстремумов (рис. 1), то он может расходиться. На рис. 3 изображены результаты оптимизации методом градиентного спуска. Следует отметить, что частота определяется с достаточной точностью, погрешность составляет около 20 Гц.

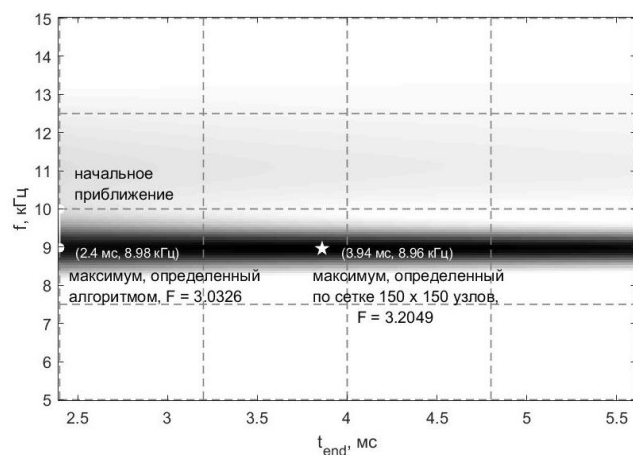


Рис. 3. Результаты оптимизации методом градиентного спуска

Однако полученный результат хуже, чем результат, полученный сеточным поиском.

## V. СРАВНЕНИЕ

Обе численные схемы хорошо определяют несущую частоту, но уточняют параметры, влияющие на форму огибающей, с погрешностью. Причина кроется в слабом влиянии параметров формы на значение скалярного произведения, к тому же, по-разному варьируя параметры, можно получать похожие по форме функции Берлаге, например, увеличение параметра  $\Delta$  приводит к усилению крутизны и тем самым сокращает длину  $t_{\text{end}}$ .

На рис. 4 изображены разреженные аппроксимации реального сигнала, построенные классическим и модифицированными алгоритмами согласованного преследования. Лучший результат продемонстрировал сеточный поиск.

Сравнение описанных численных схем осуществлялось на выборке из 100 реальных геоакустических сигналов. На каждой итерации алгоритма после уточнения параметров атома по формуле

$$ERR_N = \frac{\left\| s(t) - \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot g_i(t) \right\|}{\|s(t)\|} \cdot 100\%$$

вычислялось отношение невязки к исходному сигналу и замерялось время выполнения алгоритма.

В таблице приведено время выполнения алгоритмов, а на рис. 5 графики зависимостей  $ERR$  от номера итерации алгоритма. И по времени выполнения, и по точности построенных аппроксимаций лучший результат у метода сеточного поиска.

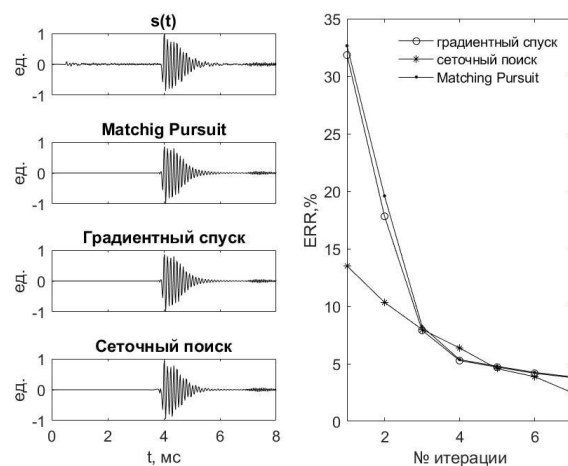


Рис. 4. Разреженные аппроксимации геоакустического импульса

ТАБЛИЦА I ВРЕМЯ ВЫПОЛНЕНИЯ АЛГОРИТМОВ

Метод	Время выполнения (с)
Согласованное преследование	15
Сеточный поиск	107
Градиентный спуск	438

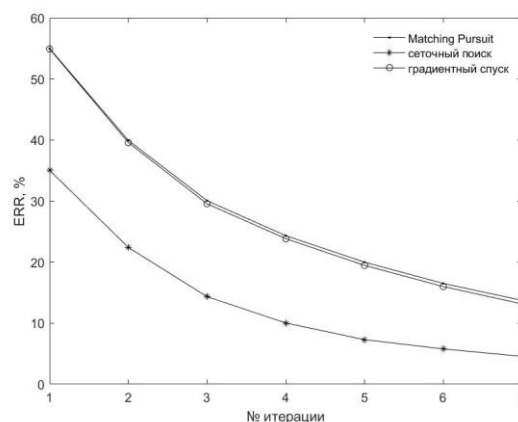


Рис. 5. Средняя зависимость величины  $ERR$  от номера итерации алгоритма для различных методов уточнения словаря (по 100 сигналам)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Tropp, J.A. Topics in Sparse Approximation: dis... PhD / The University of Texas, Austin. 2004. xiii + 232 p.
- [2] Mallat S., Zhang Z. Matching Pursuits with time-frequency dictionaries // IEEE Transactions on Signal Processing. 1993. Vol. 41. No.12. P.3397–3415.
- [3] Chen S.S., Donoho D.L., Saunders M.A. Atomic Decomposition by Basis Pursuit // SIAM Journal on Scientific Computing. 1998. Vol.20. No.1. P.129-159.
- [4] Марапулец Ю.В., Луковенкова О.О., Тристанов А.Б., Ким А.А. Методы регистрации и частотно-временного анализа сигналов геоакустической эмиссии. Владивосток: Дальнаука, 2017. 148 с.