Метрологические испытания средств измерений вероятностных характеристик случайных процессов

М. Н. Боброва[1], Е. С. Сулоева[2], А. В. Царева[3], Э. И. Цветков[4]
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)
[1]masha.bobrova.95@mail.ru, [2]suloewa@list.ru, [3]caanyuta@yandex.ru, [4]er-cvetkov@mail.ru

***Аннотация.* Рассмотрены особенности организации метрологических испытаний средств измерений вероятностных случайных процессов. Показана взаимосвязь достоверности получаемых результатов с характеристиками используемых эталонных средств и используемым объемам выборки, позволяющая планировать процедуры верификации.**

Ключевые слова: средство измерений; случайная погрешность; метрологический анализ

Эффективность метрологических испытаний определяется достоверностью получаемых результатов. При измерении вероятностной характеристики случайного процесса, например, математического ожидания, – ошибкой получаемой оценки, которая, в свою очередь, является случайной величиной (характеристикой) и, следовательно, тоже представляется своими вероятностными характеристиками. Таким образом, формируются определения типа: «оценка математического ожидания результатов измерений математического ожидания случайного процесса» и т.п. При этом массивы используемых отсчетов рассматриваемого случайного процесса при проведении метрологических испытаний существенно возрастают относительно массивов, используемых при традиционных метрологических испытаниях средств измерений величин. Кроме того, метрологические испытания средств измерений вероятностных характеристик случайных процессов предполагают использование эталонных средств, воспроизводящих случайный процесс с известной вероятностной характеристикой (действительной вероятностной характеристикой). В настоящей работе рассматриваются принципы организации метрологических испытаний средств измерений вероятностных характеристик случайных процессов с учетом присущих им особенностей.

Вероятностная характеристика Ф случайного процесса λ(t) определяется в виде пределов:

$$\Phi[\lambda(t)] = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} g_{\Phi}[\lambda(t')dt']$$

или

$$\Phi[\lambda(t)] = \lim_{I\to\infty} \sum_{i=1}^{I} g_{\Phi}[\lambda(t_i)] / I,$$

где – $g_{\Phi}[\lambda(t)]$ преобразование, лежащее в основе определения $\Phi[\lambda(t)]$.

Соответственно результат измерения в j-ом измерительном эксперименте определяется либо как среднее, устанавливаемое в аналоговой форме:

$$\Phi_j^*[\lambda(t)] = R_{АЦ} \int_0^T g_{\Phi}[\lambda(t')h(T,t')dt'], \qquad (1)$$

где $R_{АЦ}()$ – оператор аналого-цифрового преобразования, $h(T,t')$ – импульсная переходная характеристика, либо в виде среднего, устанавливаемого в числовой форме:

$$\Phi_j^*[\lambda(t)] = \sum_{i=1}^{I} g_{\Phi}[R_{АЦ}(\lambda(t_i))] / I. \qquad (2)$$

Компьютеризация измерений привела к преимущественному использованию последнего (числового) усреднения. Поэтому дальнейшее рассмотрение особенностей метрологических испытаний средств измерений вероятностных характеристик случайных процессов проводится применительно к определениям (1) и (2).

Свойства погрешностей результатов измерений вероятностных характеристик случайных процессов детально освещены в большом числе работ. Дальнейшее изложений опирается на результаты, представленные в [1], [2] и [3].

При $I \gg 1$ оценка $\Phi_j^*[\lambda(t)]$ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $M[\Phi_j^*[\lambda(t)]] = M[g_{\Phi}[\lambda(t)]]$ и дисперсией $D[\Phi_j^*[\lambda(t)]] = D[g_{\Phi}[\lambda(t)]] / I.$

Погрешность результата измерения вероятностной характеристики случайного процесса:

$$\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)] = \Phi_j^*[\lambda(t)] - \Phi_j[\lambda(t)].$$

Оценка погрешности, получаемая при проведении метрологических испытаний:

$$\Delta^*\Phi_j^*[\lambda(t)] = \Phi_j^*[\lambda(t)] - \Phi_{\partial j}[\lambda(t)], \qquad (3)$$

где $\Phi_{\partial j}[\lambda(t)]$ – действительная вероятностная характеристика, представляемая процессом $\lambda_{\partial j}(t)$, формируемым эталонным средством.

Очевидно, что погрешность $\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]$ результата измерения числовой вероятностной характеристики $\Phi[\lambda(t)]$, как и оценка $\Phi_j^*[\lambda(t)]$, случайная величина с гауссовым распределением вероятности (при $I >> 1$) с математическим ожиданием $M[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]] = M[g_\Phi[\lambda(t)]]$ и дисперсией $D[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]] = D[g_\Phi[\lambda(t)]]/I.$

Характеристика $\Theta[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]]$ равна:

$$\Theta[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]] = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N} g_\Theta[\Delta\Phi_j^*]/N,$$

а ее оценка:

$$\Theta[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]] = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N} g_\Theta[\Delta\Phi_j^*]/N,$$

при $\Phi[\lambda(t)] = M[\lambda(t)]$ и $\Theta[\Delta M_j^*[\lambda(t)]] = M[\Delta M_j^*[\lambda(t)]]$ оценка погрешности $\Delta M_j^*[\lambda(t)]$ в соответствии с (2) и (3) равна:

$$\Delta^* M_j^*[\lambda(t)] = \sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}^*/I - M_{\partial j}[\lambda(t)],$$

где $M_{\partial j}[\lambda(t)]$ – действительное значение математического ожидания случайного процесса $\lambda(t)$.

Отсюда следует, что:

$$M^*[\Delta M_j^*[\lambda(t)]] = \sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}^*/I - M_{\partial j}[\lambda(t)])/N \qquad (4)$$

и

$$D^*[\Delta M_j^*[\lambda(t)]] = \sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}^*/I - M_{\partial j}[\lambda(t)] - \sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}^*/I - M_{\partial j}[\lambda(t)]))/N)^2/(\mathrm{N}-1).$$

Соотношение (4) позволяет получить следующее выражение для ошибки $\delta M^*[\Delta M_j^*[\lambda(t)]]$, определяемой конечностью объема выборки N:

$$\delta M^*[\Delta M_j^*[\lambda(t)]] = \sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}^*/I - M_{\partial j}[\lambda(t)])/N - M_j[\lambda(t)].$$

Эта ошибка также распределена по нормальному закону со следующими математическим ожиданием и дисперсией:

$$M[\delta M^*[\Delta M_j^*[\lambda(t)]]] = m_{\Delta M^*} = m_{\Delta\lambda^*} + m_{\Delta\partial},$$

где $m_{\Delta\lambda^*}$ – математическое ожидание $\Delta\lambda_{ij}^*$, $m_{\Delta\partial}$ – математическое ожидание $\Delta M_{\partial j}[\lambda(t)]$,

$$D[\delta M^*[\Delta M_j^*[\lambda(t)]]] = \sigma_{\Delta M^*}^2 = m(IN)^{-1}(D[\lambda_{ij}] + D[\Delta\lambda_{ij}^*])$$
$$+ D[\Delta M_{\partial j}[\lambda(t)]]/N.$$

По определению $D[\lambda_{ij}] >> D[\Delta\lambda_{ij}^*]$. Следовательно:

$$\sigma_{\Delta M^*}^2 = D[\delta M^*[\Delta M_j^*[\lambda(t)]]] = (IN)^{-1}D[\lambda_{ij}] + D[\Delta M_{\partial j}[\lambda(t)]]/N \approx$$
$$\sigma_{\Delta M^*\lambda}^2 + \sigma_{\Delta M^*\Delta\partial.}^2$$

где $\sigma_{\Delta M^*\lambda}^2$ – дисперсия $\Delta M_j^*[\lambda(t)]$, $\sigma_{\Delta M^*\Delta\partial.}^2$ – дисперсия $\Delta M_{\partial j}[\lambda(t)]$.

При $\Phi[\lambda(t)] = D[\lambda(t)]$ и $\Theta[\Delta D_j^*[\lambda(t)]] = M[\Delta D_j^*[\lambda(t)]]$ оценка погрешности $\Delta D_j^*[\lambda(t)]$:

$$\Delta D_j^*[\lambda(t)] = \sum_{i=1}^{I}(\lambda_{ij}^* - \sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}^*/I)^2/(I-1) - D_{\partial j}[\lambda(t)].$$

Соответственно $M^*[\Delta D_j^*[\lambda(t)]]$:

$$M^*[\Delta D_j^*[\lambda(t)]] = \sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=1}^{I}(\lambda_{ij}^* - \sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}^*/I)^2/(I-1) - D_{\partial j}[\lambda(t)])/N.$$

и

$$M^*[\Delta D_j^*[\lambda(t)]] = \sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=1}^{I}(\lambda_{ij}^* - \sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}^*/I)^2/(I-1) - D_{\partial j}[\lambda(t)])/N.$$

При этом ошибки представляются соотношениями:

$$\delta M^*[\Delta D_j^*[\lambda(t)]] =$$
$$\sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=1}^{I}(\lambda_{ij}^* - \sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}^*/I)^2/(I-1) - D_{\partial j}[\lambda(t)])/N -$$
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=1}^{I}(\lambda_{ij}^* - \sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}^*/I)^2/(I-1) - D_{\partial j}[\lambda(t)])/N.$$

и

$$\delta D^*[\Delta D_j^*[\lambda(t)]] =$$
$$\sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=1}^{I}(\lambda_{ij}^* - \sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}^* / I)^2 / (I-1) - D_{\partial j}[\lambda(t)] -$$
$$\sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}^* / I - D_{\partial j}[\lambda(t)])) / N)^2 / (N-1) -$$
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=1}^{I}(\lambda_{ij}^* - \sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}^* / I)^2 / (I-1) - D_{\partial j}[\lambda(t)] -$$
$$\sum_{j=1}^{N}(\sum_{i=1}^{I}\lambda_{ij}^* / I - D_{\partial j}[\lambda(t)])) / N)^2 / (N-1).$$

Соответственно:

$$M[\delta D^*[\Delta D_j^*[\lambda(t)]]] = m_{\Delta D^*} = \sigma_{\Delta\lambda^*}^2 + \sigma_{\Delta\partial}^2$$

и

$$D[\delta D^*[\Delta D_j^*[\lambda(t)]]] = \sigma_{\Delta D^*}^2 = cD^2[\lambda] / IN + cD[\Delta D_{\partial j}] / N.$$

Полученные соотношения позволяют планировать метрологические испытания средств измерения вероятностных характеристик случайных процессов в части установления характеристик погрешностей эталонного воздействия $\lambda_\partial(t)$ – $m_{\Delta\partial}$, $\sigma_{\Delta\partial}^2$ и объема выборки N.

Из изложенного следует, что при $\Phi[\lambda(t)] = M[\lambda(t)]$, $\Theta[\Delta M_j^*[\lambda(t)]] = M[\Delta M_j^*[\lambda(t)]]w(\delta M^*)$ и $P[\delta M^* \in [-\delta_1, \delta_1]]$ имеют следующий вид:

$$w(\delta M^*) = \exp(-(\delta M^* - m_{\Delta M^*})^2 / 2\sigma_{\delta M^*}^2) / (2\pi\sigma_{\delta M^*}^2)^{1/2}$$

и

$$P[\delta M^* \in [-\delta_1, \delta_1]] = (\Phi[(\delta_1 + m_{\Delta M^*}) / \sigma_{\delta M^*}] +$$
$$\Phi[(\delta_1 - m_{\Delta M^*}) / \sigma_{\Delta M^*}]) / 2.$$

при $m_{\Delta M^*} < \delta_1$.

Соответственно, определяя зависимость $P[\delta M^* \in [-\delta_1, \delta_1]] = f_M(m_{\Delta\partial}, \sigma_{\Delta\partial}, N)$ можно установить сочетания параметров $m_{\partial M}$, $\sigma_{\partial M}$ и N, характеризующих эталон и используемый объем выборки, обеспечивающие выполнение требований, предъявляемые к $P[\delta M^* \in [-\delta_1, \delta_1]]$.

При $\Phi[\lambda(t)] = M[\lambda(t)]$ и $\Theta[\Delta M_j^*[\lambda(t)]] = D[\Delta M_j^*[\lambda(t)]]$ получаем:

$$w(\delta D^*) = \exp(-(\delta D^* - m_{\Delta D^*})^2 / 2\sigma_{\delta D^*}^2) / (2\pi\sigma_{\delta D^*}^2)^{1/2})$$

и

$$P[\delta D^* \in [-\delta_1, \delta_1]] = (\Phi[(\delta_1 + m_{\Delta D^*}) / \sigma_{\delta D^*}] +$$
$$\Phi[(\delta_1 - m_{\Delta D^*}) / \sigma_{\Delta D^*}]) / 2$$

при $m_{\Delta D^*} < \delta_1$.

Для каждого из приведенных случаев может быть установлена зависимость $P[\delta D^* \in [-\delta_1, \delta_1]] = f_D(m_{\partial D}, \sigma_{\partial D}, N)$, позволяющая установить сочетания параметров, характеризующих эталонный источник и используемый объем выборки, обеспечивающие выполнение требований, предъявляемые к $P[\delta D^* \in [-\delta_1, \delta_1]]$. В табл. 1 представлены выражения для определения $m_{\partial\Theta^*}$ и $\sigma_{\partial\Theta^*}^2$ применительно к рассмотренным случаям.

ТАБЛИЦА I   Выражения для определения $m_{\partial\Theta^*}$ и $\sigma_{\partial\Theta^*}^2$

Φ / Θ	M	D
M	$m_{\Delta\lambda^*} + m_{\Delta\partial}$	$\sigma_\lambda^2 / NI + \sigma_{\Delta\partial}^2 / N$
D	$\sigma_{\Delta\partial}^2$	$c\sigma_\lambda^4 / NI + c\sigma_{\Delta\partial}^4 / N$

Применительно к условным распределениям вероятностей имеем:

$$w(\Theta[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]] / \Theta^*[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]]) =$$
$$\exp(-(\Theta - \Theta^* - m_{\delta\Theta^*})^2 / 2\sigma_{\delta\Theta^*}^2) / (2\pi\sigma_{\delta\Theta^*}^2)^{1/2} \quad (5)$$

и

$$w(\Theta^*[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]] / \Theta[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]]) =$$
$$\exp(-(\Theta^* - \Theta - m_{\delta\Theta^*})^2 / 2\sigma_{\delta\Theta^*}^2) / (2\pi\sigma_{\delta\Theta^*}^2)^{1/2} \cdot \quad (6)$$

Из (5) следует, что:

$$w(\Theta[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]] / \Theta^*[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]]) =$$
$$\exp(-(\Theta - \Theta^* - M[\delta_\partial\Theta^*])^2 / 2(D[\delta_{\kappa\varepsilon}\Theta^*] + \quad (7)$$
$$D[\delta_\partial\Theta^*]) / (2\pi(D[\delta_{\kappa\varepsilon}\Theta^*] + D[\delta_\partial\Theta^*])^{1/2},$$

а из (6):

$$w(\Theta^*[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]] / \Theta[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]]) =$$
$$e\exp(-(\Theta^* - \Theta - M[\delta_\partial\Theta^*])^2 / 2(D[\delta_{\kappa\varepsilon}\Theta^*] + \quad (8)$$
$$D[\delta_\partial\Theta^*]) / (2\pi(D[\delta_{\kappa\varepsilon}\Theta^*] + D[\delta_\partial\Theta^*])^{1/2}.$$

Выражения (7) и (8) лежат в основе определения вероятности принадлежности $\Theta[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]]$ требуемому интервалу $[-\Theta_{\min}, \Theta_{\max}]$ при фиксированной оценке $\Theta^*[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]]$ $(P[\Theta[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]] \in [\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] / \Theta^*[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]])$, вероятности ошибки первого рода $(P_I = P[\Theta^*[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]] \notin [-\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] / \Theta[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]] \in [-\Theta_{\min}, \Theta_{\max}]])$ и вероятности ошибки второго рода $(P_{II} = P[\Theta^*[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]] \in [-\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] / \Theta[\Delta\Phi_j^*[\lambda(t)]] \notin [-\Theta_{\min}, \Theta_{\max}]])$.

Именно:

$$P[\Theta^*[\Delta\Phi^*_j[\lambda(t)]] \in [\Theta_{\min}, \Theta_{\max}] / \Theta^*[\Delta\Phi^*_j[\lambda(t)]]] =$$

$$\int\limits_{\Theta_{\min}}^{\Theta_{\max}} w(\Theta[\Delta\Phi^*_j[\lambda(t)]] / \Theta^*[\Delta\Phi^*_j[\lambda(t)]]])d\Theta,$$

$$P_I = 1 - \int\limits_{\Theta_{\min}}^{\Theta_{\max}} w(\Theta^*[\Delta\Phi^*_j[\lambda(t)]] / \Theta[\Delta\Phi^*_j[\lambda(t)]] \notin$$

$$[-\Theta_{\min}, \Theta_{\max}]])d\Theta^*,$$

$$P_{II} = \int\limits_{\Theta_{\min}}^{\Theta_{\max}} w(\Theta^*[\Delta\Phi^*_j[\lambda(t)]] / \Theta[\Delta\Phi^*_j[\lambda(t)]] \in$$

$$[-\Theta_{\min}, \Theta_{\max}]])d\Theta^*.$$

Полученные результаты составляют основу планирования процедур верификации средств измерений вероятностных характеристик случайных процессов, позволяя обоснованно устанавливать требования к используемым эталонным средствам и необходимым объемам выборки.

Список литературы

[1] Цветков Э.И. Основы теории статистических измерений. Л., Энергоатомиздат, 1986. 256 с.

[2] Цветков Э.И. Основы математической метрологии. СПб, изд. «Политехника», 2005. 510 с.

[3] Цветков Э.И. Метрология. Модели, метрологический анализ, метрологический синтез. СПб., Изд.-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014.