

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

В.О.Никифоров, О.В.Слита, А.В.Ушаков

**ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В
УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2011

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

В.О.Никифоров, О.В.Слита, А.В.Ушаков

**ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В
УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2011

Никифоров В.О., Слита О.В., Ушаков А.В. Интеллектуальное управление в условиях неопределенности: учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2011. – 226 с. : ил. 33.

В учебном пособии освещены проблемы управления в условиях неопределенности непрерывными динамическими объектами. Материал пособия опирается на инструментарий теории чувствительности, интервальных модельных представлений, обобщенного модального управления, метода функций Ляпунова и адаптивного управления. При конструировании законов управления, доставляющих системам робастность в смысле основных показателей качества их функционирования, используются возможности как неадаптивных, так и адаптивных методов управления.

Учебное пособие написано для библиографического обеспечения дисциплины «Интеллектуальное управление в условиях неопределенности», предусмотренной Государственным образовательным стандартом магистерского образования. Оно также будет полезно аспирантам и специалистам, обучающимся и работающим в области теории и практики робастного и адаптивного управления.

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета КТУ, протокол № 3 от 10.11.09.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

© Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики, 2011
© В.О. Никифоров, О.В. Слита, А.В. Ушаков, 2011



Содержание

Предисловие.....	5
Список сокращений и обозначений	7
1. ВВЕДЕНИЕ В ПРОБЛЕМАТИКУ	8
1.1. Понятие неопределенного объекта. Классификация неопределенностей.....	8
1.2. Проблемы управления в условиях неопределенности	13
1.3. Основные методы управления неопределенными объектами.....	14
2. АНАЛИЗ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ	21
2.1. Грубость свойств систем управления	21
2.1.1. Постановка задачи. Понятия грубости и робастности	21
2.1.2. Грубость свойств устойчивости по отношению к параметрическим возмущениям.....	22
2.1.3. Грубость свойств устойчивости по отношению к структурным возмущениям	27
2.1.4. Практические выводы.....	31
2.2. Методы теории чувствительности	32
2.2.1. Аппарат функций траекторной чувствительности	32
2.2.2. Функции чувствительности алгебраических и геометрических спектров матриц	49
2.2.3. Оценка чувствительности с помощью чисел обусловленности матриц.....	66
2.2.4. Сведение задачи чувствительности к задаче анализа системных свойств – управляемости, наблюдаемости и инвариантности	76
2.3. Системы с интервальными параметрами. Метод В.Л. Харитонова	85
3. НЕАДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ.....	96
3.1. Основные положения обобщенного модального управления... 96	
3.2. Модальноробастное управление многомерными объектами..100	
3.3. Синтез параметрически инвариантных систем.....	109
3.4 Алгебраические проблемы параметрической инвариантности: аналитические возможности аппарата траекторной чувствительности.	121
3.5. Робастное интервальное управление	134
4. АДАПТИВНОЕ И РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ.....	147
4.1. Пример управления объектом первого порядка	147
4.1.1. Постановка задачи	147
4.1.2. Неадаптивное управление	147
4.1.3. Адаптивное управление	149

4.1.4. Нелинейное робастное управление	153
4.2. Принципы построения адаптивного управления.....	156
4.2.1. Этапы синтеза адаптивных систем.....	156
4.2.2. Базовые структуры алгоритмов адаптации	157
4.3. Адаптивное управление многомерным объектом	163
4.3.1. Постановка задачи	163
4.3.2. Синтез регулятора	164
4.3.3. Свойства замкнутой системы	165
4.4. Нелинейное робастное управление многомерным объектом.....	169
4.4.1. Постановка задачи	169
4.4.2. Синтез регулятора	169
4.4.3. Свойства замкнутой системы	170
4.5. Адаптивная компенсация возмущений.....	172
4.5.1. Постановка задачи	172
4.5.2. Синтез регулятора.....	173
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	180
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Векторы и матрицы	181
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Определения устойчивости и метод функций Ляпунова	189
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Сингулярное разложение матриц	195
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Доказательства утверждений	198
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Элементы интервальных вычислений.....	211
ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Свойство строгой положительной вещественности	218
ПРИЛОЖЕНИЕ 7. Свойства многомерных адаптивных систем управления	220
ПРИЛОЖЕНИЕ 8. Варианты заданий	222
ЛИТЕРАТУРА	226

Светлой памяти Ильи Васильевича
Мирошника – учителя и ученика
авторов посвящается книга

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современные технологические процессы по организации и обработке материальных, энергетических и информационных потоков предъявляют высокие требования к надежности и показателям качества систем управления, встраиваемых в техническую среду этих технологических процессов. Отсутствие гарантий стабильности показателей качества функционирования систем управления в составе обслуживаемых технологических процессов может приводить к ухудшению потребительских свойств выходной продукции процесса, а также его производительности, что является неоправданной технической, экономической, экологической, а, возможно, и гуманитарной роскошью.

Проблема обеспечения стабильности показателей качества управляемых процессов в условиях неопределенности различной природы технической среды их протекания, подобно проблеме обеспечения их устойчивости, становится одной из "вечных" в теории и практике управления. Эта проблема имеет несколько общесистемных постановочных версий, формулируемых как проблема обеспечения малой параметрической чувствительности к параметрической неопределенности, как проблема достижения грубости или робастности по совокупности неопределенных факторов, а также обеспечения гарантированного качества управляемых процессов при неопределенности параметров функциональных компонентов системы управления, задаваемой интервальным или нечетким образом.

Решению перечисленных проблем управления в условиях неопределенности посвящается предлагаемая вниманию читателей книга. Проблемы концептуально разбиты на задачи анализа объектов и систем с неопределенностями сигнальной, параметрической и структурной природы и задачи синтеза законов управления, гарантирующих робастность свойств проектируемых систем в условиях перечисленных неопределенностей.

При освещении проблем, связанных с вопросами анализа объектов и систем с неопределенностями, авторы сосредоточили

внимание на вопросах исследования возможностей метода функций Ляпунова, аппарата теории чувствительности в траекторной и критериальных областях, а также интервального модельного представления в рамках метода Харитонов.

При разработке проблем, связанных с вопросами синтеза законов управления, доставляющих проектируемым системам робастность в смысле основных показателей качества их функционирования, авторы использовали возможности как неадаптивных, так и адаптивных методов управления. В классе неадаптивных методов управления в основном использованы возможности обобщенного модального управления, в алгоритмическую среду которого погружены задачи синтеза робастного модального управления и робастного интервального управления. К задаче обобщенного модального управления авторам удалось свести задачи управления при параметрической неопределенности, сформулированной как обеспечение модальной робастности, параметрической инвариантности и требуемых значений оценок относительной интервальности матричных компонентов модельного представления и показателей качества системы. В классе адаптивных методов управления основное внимание сосредоточено на использовании при синтезе алгоритмов адаптивного и нелинейного робастного управления возможностей метода функций Ляпунова общей теории устойчивости.

При написании учебного пособия авторы полагали, что читатель обладает знаниями операторного метода, элементами векторно-матричного формализма метода пространства состояния, умением решать матричных уравнений Сильвестра и Ляпунова, необходимых для построения основных модельных представлений и синтеза алгоритмов управления.

Концепцию пособия в целом авторы формировали вместе, разделы 1 и 4, а также параграф 2.1, приложения 2, 6 и 7 написаны В.О. Никифоровым. Разделы 2 (за исключением п. 2.1) и 3, а также приложения 3, 4 и 5, 8 написаны совместно О.В. Слитой и А.В. Ушаковым, остальной текст монографии написан авторами совместно.

Авторы считают своим приятным долгом выразить особую благодарность за доброжелательность, филологический мониторинг, окончательное конфигурирование пособия Н.Ф. Гусаровой.

Конструктивную критику по существу содержания учебного пособия следует направлять авторам по почтовому адресу: 197101, Кронверский пр., 49, Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики; по телефону 595-41-28 и электронной почте nikiforov@mail.ifmo.ru, oslita@yandex.ru и ushakov-AVG@yandex.ru.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

$R(C)$	– поле действительных (комплексных) чисел;
$R^n(C^n)$	– линейное действительное(комплексное) n -мерное пространство;
$\text{row}\{(*)_i\}$	– строка (матрица-строка) из элементов $(*)_i$;
$\text{col}\{(\#)_j\}$	– столбец (матрица-столбец) из элементов $(\#)_j$;
$A; A^i; A_j$	– матрица; i -й столбец и j -я строка этой матрицы соответственно;
$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$	– диагональная матрица с элементами λ_i на главной диагонали;
$\dim\{(*)\}$	– размерность элемента $(*)$;
$\text{rang}(A)$	– ранг матрицы A ;
$\det(A)$	– детерминант матрицы A ;
$\ (*)\ _p$	– p -ичная норма элемента $(*)$;
$C\{A\}$	– число обусловленности матрицы A ;
$A^{-1}; A^+$	– матрицы обратная и псевдообратная матрице A ;
$\sigma\{A\}; \sigma_\alpha\{A\}$	– алгебраические спектры собственных значений (мод) и сингулярных чисел соответственно матрицы A ;
$[A]$	– интервальная матрица, составленная из интервальных скалярных элементов $[A_{ij}]$;
$V(x)$	– функция Ляпунова векторного аргумента x ;
$\arg\{\psi[(*)]\}$	– аргумент выполнения условия $\psi[(*)]$;
$\text{contr}\{A, B\}$	– предикат наличия полной управляемости пары матриц $\{A, B\}$;
$\text{observ}\{A, C\}$	– предикат наличия полной наблюдаемости пары матриц $\{A, C\}$;
$p=d/dt; s$	– оператор дифференцирования по времени и комплексная переменная преобразования Лапласа соответственно;
SVD	– процедура сингулярного разложения матриц;
OY	– объект управления;
ZY	– закон управления;
OC, PC	– обратная связь, прямая связь;
ЭМ; ММ	– эталонная модель; модальная модель;
MBV	– модель внешнего воздействия;
AУ; PУ	– адаптивное управление; робастное управление;
MУ	– модальное управление;
ОМУ (РМУ)	– обобщенное (робастное) модальное управление;
ОИУ	– обобщенное изодромное управление;
МТЧ	– модель траекторной чувствительности;
ФЧ; МФЧ	– функция чувствительности; матрица функций чувствительности.

1. ВВЕДЕНИЕ В ПРОБЛЕМАТИКУ

1.1. Понятие неопределенного объекта. Классификация неопределенностей

Традиционные методы анализа и синтеза систем управления основаны на предположении, что математическая модель объекта является известной и абсолютно точно описывает его поведение. Обычно методы, основанные на этом предположении, объединяют под общим названием *классической теории управления*. Однако для современных подходов к постановке и решению задач управления характерен более критический взгляд на точность математических моделей, имеющих в распоряжении разработчика. Дело в том, что практически любая модель представляет собой идеализированное (т.е. упрощенное) описание реального объекта. Кроме того, некоторые характеристики объекта могут быть заранее неизвестными или значительно изменяться в процессе его функционирования. При этом говорят о *неопределенности математической модели объекта* (или просто – о *неопределенном объекте*, понимая под этим неопределенность его математической модели). Математическую модель, положенную в основу синтеза алгоритма управления, называют *номинальной*.

В условиях существенной неопределенности классические методы теории управления оказываются неприменимыми или дают плохие результаты. В этих случаях необходимо применение специальных методов анализа и синтеза систем управления объектами с неопределенными (т.е. с неточно известными) математическими моделями.

Выделяют следующие основные типы неопределенностей математических моделей.

Параметрическая неопределенность означает, что неизвестными являются постоянные параметры математической модели. Значения параметров, использованные при синтезе алгоритма управления, называют *номинальными*. Во многих практических случаях *реальные* значения параметров могут существенно отличаться от принятых номинальных.

Пример 1.1. Типичным примером параметрически неопределенного объекта является безредукторный электропривод, где выходной вал двигателя непосредственно соединен с нагрузкой (см. рис. 1.1, б). Такая схема, например, используется в мехатронных поворотных столах (см. рис. 1.2), что позволяет существенно упростить конструкцию привода, исключить из нее изнашивающиеся

и деформирующиеся детали и, как следствие, повысить жесткость всей электромеханической системы.

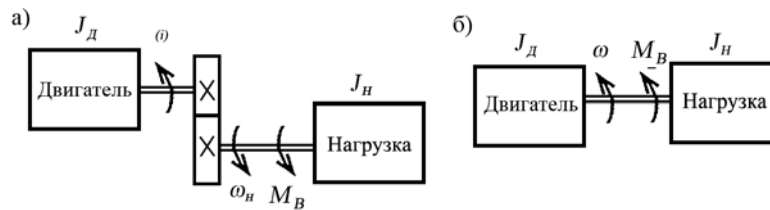


Рис. 1.1. Схемы электроприводов: а – редукторная, б – безредукторная

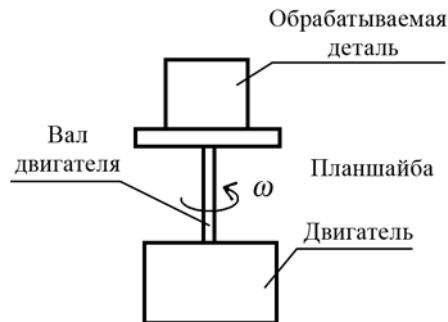


Рис. 1.2. Конструкция мехатронного поворотного стола

При наличии редуктора (рис. 1.1, а) уравнения вращающихся масс (без учета внешнего момента M_B) имеют вид

$$\ddot{\varphi} = \omega, \quad \left(J_D + \frac{J_H}{j^2} \right) \ddot{\varphi} + k_c \dot{\varphi} = M_D. \quad (1.1)$$

В выражении (1.1) и на рис. 1.1 φ, ω – угол поворота и скорость вращения выходного вала двигателя; J_D – момент инерции ротора электродвигателя, J_H – момент инерции нагрузки, k_c – коэффициент вязкого трения, ω – передаточное число редуктора, M_D – вращающий момент, ω_H – скорость вращения нагрузки, $\omega_H = \omega/j$. Так как в большинстве технических систем используются высокоскоростные низкомоментные двигатели, то $j \gg 1$. Поэтому влияние момента инерции нагрузки в редукторных системах ослабляется в (j^2) раз, что позволяет пренебречь членом J_H/j^2 .

При отсутствии редуктора (рис. 1.1, б) уравнения вращающихся масс принимают вид

$$\ddot{\varphi} = \omega, \quad (J_D + J_H) \ddot{\varphi} + k_c \dot{\varphi} = M_D. \quad (1.2)$$

Из уравнения (1.2) видно, что в безредукторном приводе момент инерции нагрузки непосредственно (т.е. без какого-либо ослабления) влияет на параметры привода. При этом, как правило, $J_H > J_D$. Более

того, во многих практических случаях момент инерции нагрузки заранее точно неизвестен и может изменяться в процессе эксплуатации электропривода. Обычно известен только диапазон $J_{\min} \leq J_H \leq J_{\max}$ возможных значений, так что J_H оказывается *интервальной величиной*. Если данный диапазон оказывается достаточно широким, то модель (1.2) должна рассматриваться в качестве *параметрически неопределенной* с параметрической неопределенностью *интервального типа*. □

Пример 1.2. Дополним уравнения вращающихся масс (1.2) уравнением электрической цепи якоря электродвигателя постоянного тока в форме

$$\dot{I} = -\frac{R}{L}I - \frac{c_E}{L}\omega + \frac{1}{L}U, \quad (1.3)$$

где I – ток якоря, R и L – активное сопротивление и индуктивность обмотки якоря, c_E – постоянная противо-эдс, U – входное напряжение. Связь уравнений (1.2) и (1.3) определяется через вращающий момент в соответствии с выражением $M_d = c_M I$, где c_M – коэффициент передачи по моменту. В ходе работы двигатель нагревается, происходит разогрев обмотки якоря, что влечет за собой изменение его активного сопротивления. Если изменение является существенным, то активное сопротивление уже не может больше рассматриваться в качестве известного и постоянного параметра, оно должно быть представлено функцией времени $R(t)$. При этом модель (1.3) принимает вид

$$\dot{I}(t) = -\frac{R(t)}{L}I(t) - \frac{c_E}{L}\omega(t) + \frac{1}{L}U(t), \quad (1.3a)$$

где $R(t)$ несет *параметрическую неопределенность, параметризованную* временем.

Неконтролируемый дрейф активного сопротивления существенно сказывается, например, в двух двигательных приводах (рис. 1.3), вызывая разбаланс якорных токов в двигателях, приводящий к появлению скручивающего момента и преждевременному разрушению рабочего вала электропривода. □

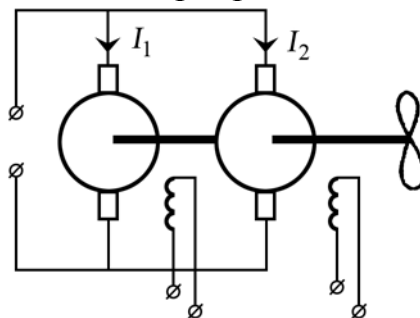


Рис. 1.3. Двухдвигательный электропривод гребной установки судна

Сигнальная неопределенность означает, что на объект управления действует неизмеримый сигнал или сигнал с априори неизвестными параметрами (амплитуда, частота и т.д.) внешнего (экзогенного) или внутреннего (эндогенного) происхождения, такие сигналы, отклоняющие процесс управления от желаемого его хода, принято называть *возмущениями*. \square

Функциональная неопределенность означает, что математическая модель объекта содержит *неизвестные* функциональные зависимости координат состояния, регулируемых переменных или сигналов управления.

Пример 1.3. Перепишем уравнение вращающихся масс электропривода (1.2) с учетом приложения внешнего момента M_B в форме

$$\dot{\omega} = \omega, \quad (J_D + J_H)\dot{\omega} + k_c \omega = M_D + M_B. \quad (1.4)$$

Пусть уравнение (1.4) описывает электропривод гребной установки судна. Тогда внешний момент M_B , являющийся в данном случае моментом сопротивления воды, будет представлять достаточно сложную функцию скорости вращения выходного вала, записываемую в форме $M_B = M_B(\omega)$. При этом модель (1.4) примет вид

$$\dot{\omega} = \omega, \quad (J_D + J_H)\dot{\omega} + k_c \omega = M_D + M_B(\omega). \quad (1.4a)$$

В первом приближении функция $M_B = M_B(\omega)$ может быть представлена в виде квадратичной зависимости $M_B(\omega) = -\gamma \text{sign}(\omega)\omega^2$, коэффициент γ которой зависит от многих априори неизвестных факторов (плотности и температуры воды, наличия или отсутствия ледовой крошки и т.п.). В связи с этим модель (1.4a) является *функционально неопределенной*. \square

Структурная неопределенность означает, что структура математической модели является неточно известной. Как правило, структурная неопределенность выражается в том, что динамический порядок реального объекта оказывается выше порядка его математической модели. При этом говорят о наличии у объекта *немоделируемой (паразитной) динамики*.

Пример 1.4. Рассмотрим в совокупности электропривод постоянного тока, состоящий из усилителя мощности (см. рис. 1.4, а). Часто при решении задач синтеза замкнутых систем пренебрегают динамикой усилителя мощности. При этом модель усилителя представляют статической зависимостью $U = k_u u$, где u – сигнал управления, k_u – коэффициент усиления усилителя. Объединяя

уравнения (1.3) и (1.4), получим систему соотношений, описывающих модель электропривода постоянного тока (см. рис. 1.4, б):

$$\varphi = \frac{1}{s} \omega; \quad (1.5)$$

$$\omega = \frac{k_{\omega}}{T_{\omega}s + 1} (c_M I + M_B); \quad (1.6)$$

$$I = \frac{k_I}{T_I s + 1} (k_u u - c_E \omega); \quad (1.7)$$

где $T_{\omega} = \frac{J_d + J_H}{k_c}$, $k_{\omega} = \frac{1}{k_c}$, $T_I = \frac{L}{R}$, $k_I = \frac{1}{L}$.

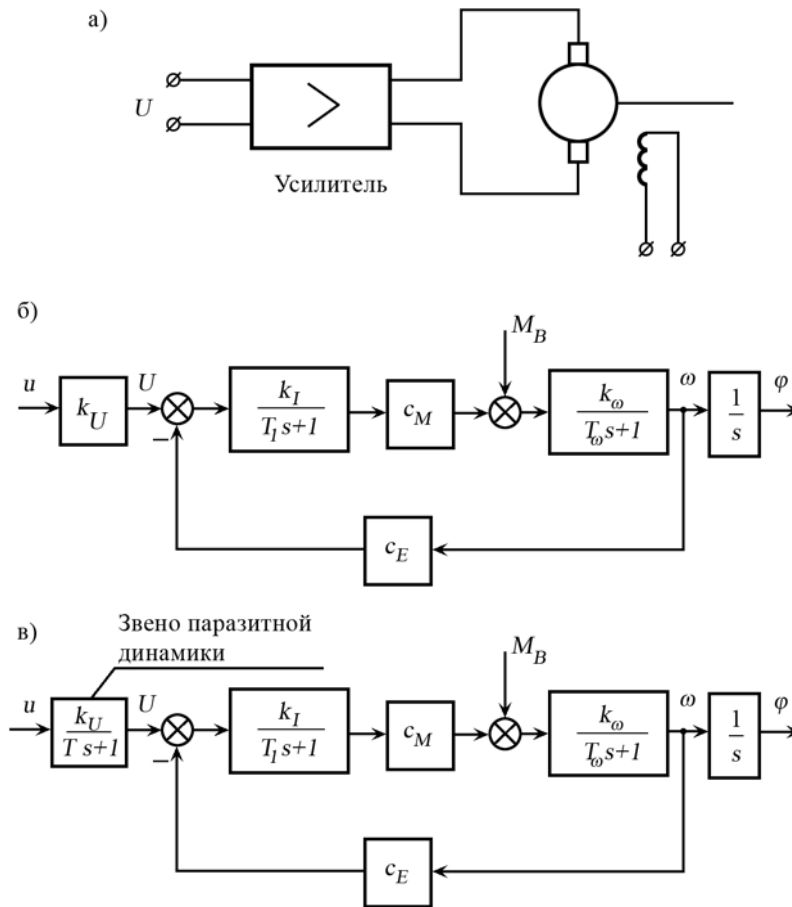


Рис. 1.4. Электропривод постоянного тока

Однако усилитель является инерционным устройством, для его описания наиболее часто используют его представление апериодическим звеном первого порядка. С учетом динамики усилителя мощности математическая модель электропривода (см. рис. 1.4, в) получает аналитическое представление в виде системы соотношений

$$\varphi = \frac{1}{s} \omega ; \quad (1.8)$$

$$\omega = \frac{k_{\omega}}{T_{\omega}s + 1} (c_M I + M_B) ; \quad (1.9)$$

$$I = \frac{k_I}{T_I s + 1} (k_u u - c_E \omega) ; \quad (1.10)$$

$$U = \frac{k_u}{T_U s + 1} u, \quad (1.11)$$

где T_U – малая постоянная времени усилителя мощности. Полная модель (1.8)–(1.11) отличается от упрощенной (1.5)–(1.7) на единицу большей размерностью, что порождено дополнительным уравнением (1.11), представляющим собой *паразитную динамику*.

Наконец, отметим, что на этапе синтеза управления *неопределенности* делятся на *априорные и текущие вариации* параметров математической модели. Априорная неопределенность существует уже на этапе синтеза системы. Она может быть обусловлена отсутствием информации о свойствах объекта управления и условиях его функционирования, отсутствием точного математического описания объекта, технологическим разбросом параметров элементов системы управления, вносимого при их производстве и т.д. Текущие вариации параметров математической модели объекта представляют собой нежелательные их изменения в ходе его рабочей эксплуатации. Причинами таких вариаций могут быть: изменение свойств нагрузки (например, момента инерции нагрузки), нагрев обмоток двигателя, приводящий к изменению их активного сопротивления, уменьшение массы топлива в баках ракеты или самолета, приводящее к изменению массы, изменение режима работы объекта и свойств внешней среды.

Строго говоря, большинство реальных объектов, с точки зрения точности их математических моделей, являются в той или иной степени *неопределенными*.

1.2. Проблемы управления в условиях неопределенности

При синтезе систем управления неопределенными объектами необходимо ответить на следующие два вопроса.

Вопрос № 1. *Можно ли использовать методы классической теории управления неопределенными объектами и, если можно, то как оценить влияние на качество замкнутой системы возможных отклонений свойств реального объекта от свойств принятой номинальной модели?*

Единой теории, дающей ответ на поставленный вопрос, в настоящее время не предложено. Более того, возможны различные

варианты его формальной (более конкретизированной) постановки. Поэтому укажем несколько альтернативных подходов, позволяющих ответить на поставленный вопрос в его различных постановках или для ряда важных частных случаев:

1) *теория грубости свойств* систем управления позволяет определить условия, при которых сохраняется то или иное желаемое свойство замкнутой системы при изменениях ее математической модели.

2) *теория чувствительности* использует гипотезу малости вариаций (неопределенности) параметров относительно их номинальных значений и с помощью функций чувствительности позволяет оценивать влияние параметрической неопределенности на траектории системы и показатели их качества

3) *теория интервальных систем* допускает гипотезу произвольной неопределенности параметров, принадлежащих прямоугольному параллелепипеду в пространстве параметров, и решает задачу поиска условий гурвицевой устойчивости для значений вектора параметров, соответствующих угловым точкам параллелепипеда;

4) *теория сингулярно возмущенных систем* позволяет исследовать свойства замкнутых систем управления с паразитной динамикой.

Вопрос № 2. *Если нельзя использовать методы классической теории, то как управлять неопределенными объектами?*

Ответ на этот вопрос дает теория *адаптивных и робастных систем*. Таким образом, теория адаптивных и робастных систем изучает методы управления неопределенными объектами, для которых являются неприменимыми методы классической теории управления.

1.3. Основные методы управления неопределенными объектами

Классификация основных методов управления неопределенными объектами приведена на рис. 1.5.

Робастные {грубые} системы – это системы управления, обеспечивающие приемлемое (в смысле некоторого критерия) качество при наличии параметрических, сигнальных, функциональных или структурных неопределенностей объекта управления. При этом, как правило, в ходе рабочего *функционирования системы коэффициенты регулятора не подстраиваются*, а малая чувствительность (т.е. грубость или робастность) к различного рода вариациям математической модели объекта достигается за счет специальным образом выбранной структуры регулятора (алгоритма управления).

Таким образом, робастные системы относятся к классу *ненастраивающихся* систем управления, а их *малая чувствительность*

к различного рода вариациям математической модели объекта обеспечивается на этапе синтеза алгоритма управления.

Адаптивные (самонастраивающиеся) системы – это системы управления, обеспечивающие компенсацию параметрических, сигнальных, функциональных или структурных неопределенностей объекта управления за счет автоматической подстройки регулятора в ходе рабочего функционирования системы. Другими словами, адаптивные системы восполняют нехватку априорной информации об объекте управления в ходе рабочего функционирования. В этом смысле они могут также называться *самообучающимися системами*.

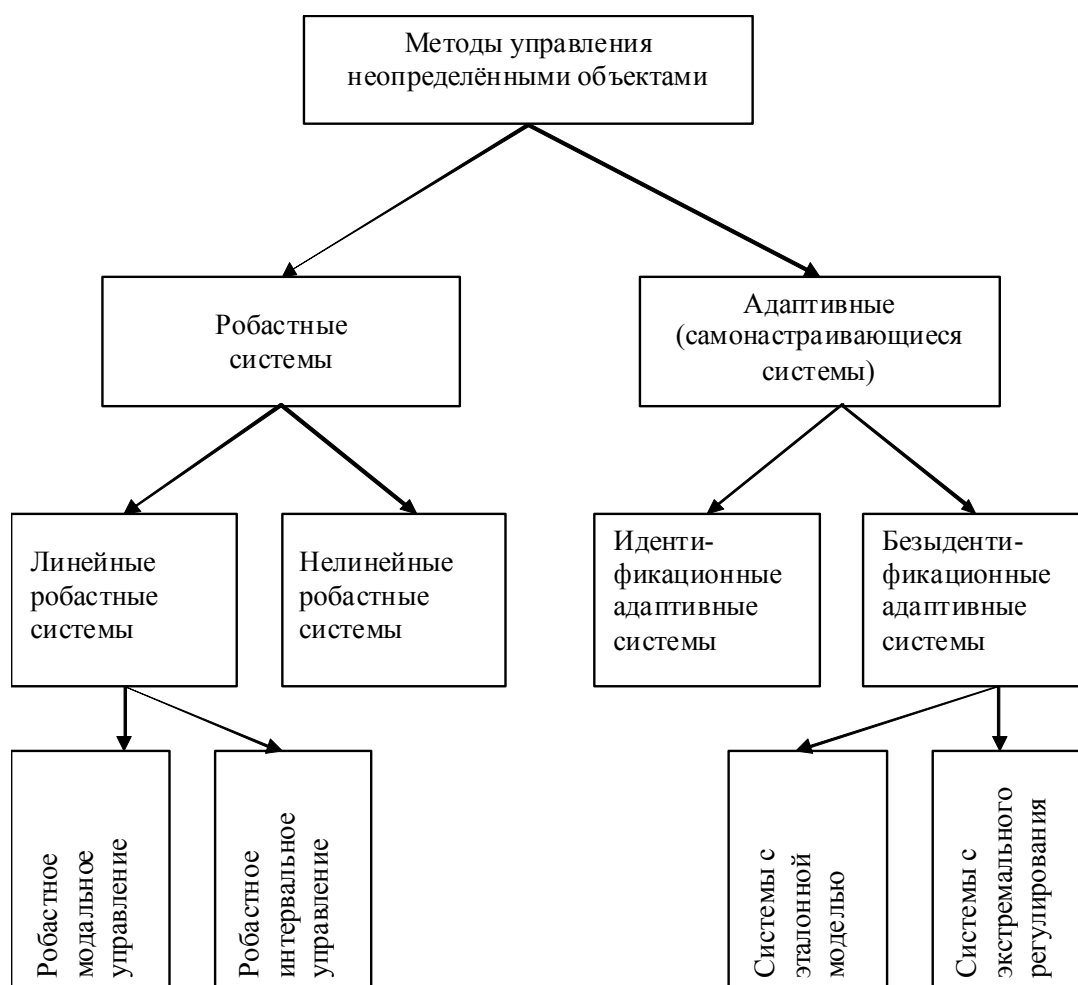


Рис.1.5. Классификация методов управления неопределенными объектами

Линейные робастные системы, использующие для решения задач управления в условиях параметрической неопределенности методы *робастного модального управления*, опираются на возможности *обобщенного модального управления*, которое доставляет матрице состояния проектируемой системы желаемые алгебраический спектр собственных значений и геометрический спектр собственных векторов. Алгоритмы *обобщенного модального управления* в условиях параметрической неопределенности матричных компонентов

модельного представления объекта относятся к классу *неадаптивных*. Эти алгоритмы используют такой базис векторно-матричного представления объекта управления, в котором параметрическая неопределенность заключена в неопределенности только его матрицы состояния.

Возможности алгоритмов *обобщенного модального управления* в условиях параметрической неопределенности реализуются в двух версиях: *модальноробастного управления* и *управления, доставляющего проектируемой системе параметрическую инвариантность* ее выходов относительно параметрического "внешнего" входа. В первой версии *робастного модального управления*, реализуемого в алгоритмической среде *обобщенного модального управления*, требуемые динамические показатели процессов в установившемся и переходном режимах доставляются проектируемой системе назначением желаемого спектра собственных значений (мод) номинальной реализации ее матрицы состояния. Стабильность этих показателей при известной неопределенности матрицы состояния объекта (иными словами, их *робастность*) обеспечивается *модальной робастностью* путем минимизации числа обусловленности матрицы собственных векторов номинальной реализации матрицы состояния системы и контролем нормы матрицы состояния модальной модели, что позволяет гарантировать требуемое значение мажорантной оценки областей локализации мод матрицы состояния спроектированной системы. Во второй версии *робастного модального управления* алгоритмическими возможностями *обобщенного модального управления* номинальной реализации матрицы состояния системы доставляется такой спектр собственных векторов, элементы которого совпадают с матрицами-столбцами входа доминирующих параметрических внешних воздействий, полученных столбцово-строчной факторизацией матричного компонента матрицы состояния объекта, несущего информацию об ее параметрической неопределенности. Если полученную выше неполную управляемость отношения "параметрический вход – состояние системы" дополнить обеспечением принадлежности матриц-столбцов ядру матрицы выхода, то тем самым достигается полная неуправляемость отношения "параметрическое внешнее воздействие – выход системы" или, иначе, *параметрическая инвариантность выхода* проектируемой системы.

Интервальное робастное управление, как и в предыдущем случае, использует векторно-матричное описание объектов, интервальность значений первичных физических параметров которого приводит к интервальному представлению только его матрицы состояния, декомпозируемой на медианную и интервальную составляющие, характеризующуюся тем свойством, что все угловые реализации последней обладают одинаковыми нормами. При реализации

интервального робастного управления в алгоритмической среде обобщенного модального управления требуемое качество процессов в проектируемой системе обеспечивается назначением желаемой структуры мод медианной составляющей матрицы состояния системы с одновременным контролем значения оценки относительной интервальности этой матрицы путем измерения нормы медианной составляющей матрицы состояния системы при известной априори норме интервальной составляющей матрицы состояния объекта с последующей оценкой *относительной интервальности* показателей качества, понимаемых как *оценки робастности* при использовании интервальных модельных представлений параметрической неопределенности.

В нелинейных робастных системах малая чувствительность к различным вариациям математической модели объекта управления обеспечивается за счет дополнительного введения в алгоритм управления специальной статической нелинейной обратной связи (см. рис. 1.6). При этом даже для линейных объектов управления закон управления оказывается нелинейным. Свойство статических нелинейных законов управления улучшать качество замкнутых систем или обеспечивать нулевую чувствительность к параметрическим или сигнальным возмущениям было установлено достаточно давно. В современном виде метод нелинейного робастного управления был сформулирован в последней трети прошлого века и продолжает развиваться и поныне.

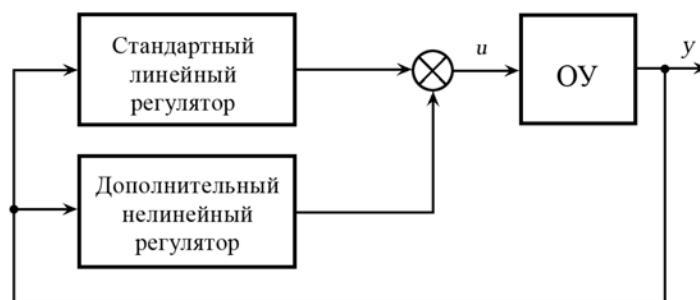


Рис. 1.6. Система нелинейного робастного управления

Принцип построения *идентификационных адаптивных систем* (или систем с *косвенной адаптацией*) основан на использовании процедуры идентификации объекта, т.е. на получении оценок его параметров или динамических характеристик. Полученные оценки используются далее для расчета коэффициентов регулятора. Таким образом, в своей структуре идентификационные адаптивные системы содержат (см. рис. 1.7) блок (алгоритм) идентификации, вырабатывающий оценки \hat{q} неизвестных параметров объекта управления, блок расчета параметров регулятора \hat{k} и собственно

настраиваемый регулятор. Очевидно, что при стремлении оценок параметров объекта к истинным свойства замкнутой системы будут приближаться к желаемым.

Несмотря на простоту основной идеи, системы с косвенной адаптацией обладают рядом существенных недостатков. Во-первых, описанная выше стратегия требует дополнительного времени на изучение объекта, что приводит к задержке при выработке правильного управления. Во-вторых, цели функционирования настраиваемого регулятора и блока оценки параметров оказываются, по существу, различными. Цель функционирования регулятора – обеспечение желаемого поведения регулируемой переменной y , в то время как цель блока идентификации – получение оценок параметров объекта управления. В этом смысле цепь настройки параметров оказывается разомкнутой по главной цели управления со всеми вытекающими отсюда негативными последствиями. В частности, большая ошибка в управлении регулируемой переменной y *может* никак не сказываться на скорости сходимости по параметрическим оценкам \hat{q} и, в свою очередь, не ускорять процессы настройки регулятора.

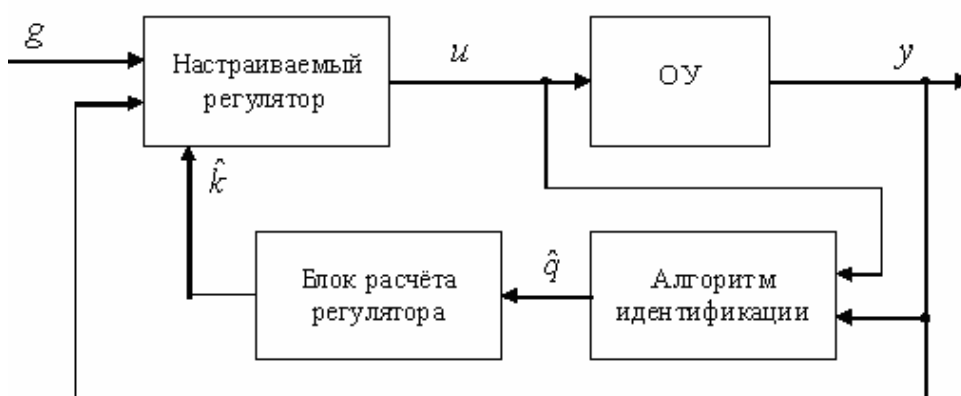


Рис. 1.7. Система идентификационного адаптивного управления

Более совершенной является стратегия, состоящая в настройке параметров регулятора из условия минимизации ошибки управления. При этом и настраиваемый регулятор, и блок (алгоритм) его настройки объединяются единой целью функционирования. На таком принципе основаны *безыдентификационные адаптивные системы* (или *системы с прямой адаптацией*). В таких системах цель управления задается либо с помощью *эталонного (модельного)* значения регулируемой переменной $y_M(t)$, либо с помощью некоторого числового *критерия качества* $Q = Q(y(t))$.

Для выработки эталонного значения регулируемой переменной $y_M(t)$, как правило, используется специальный динамический блок – *эталонная модель* (отсюда второе название эталонной переменной – *модельная переменная*). Наиболее часто эталонная модель реализуется в

виде линейной системы, формирующей желаемый отклик на задающее воздействие (см. рис. 1.8). Настраиваемый регулятор строится таким образом, чтобы при соответствии его коэффициентов параметрам объекта управления замкнутая система вела себя точно так же, как эталонная модель. Тогда информацию о параметрических рассогласованиях в системе будет нести ошибка слежения за эталонной моделью $\varepsilon = y - y_M$. При этом в качестве цели работы *алгоритма адаптации* (или *алгоритма настройки коэффициентов регулятора*) естественно положить минимизацию ошибки $\varepsilon = y - y_M$. Таким образом, происходит объединение самого регулятора и алгоритма его адаптации единой целью – минимизацией ошибки слежения за эталонной моделью. Отметим, что, в отличие от идентификационного подхода, в данном случае не требуется проведения процедуры оценки неизвестных параметров объекта, а коэффициенты регулятора настраиваются непосредственно из условия выполнения главной цели управления.

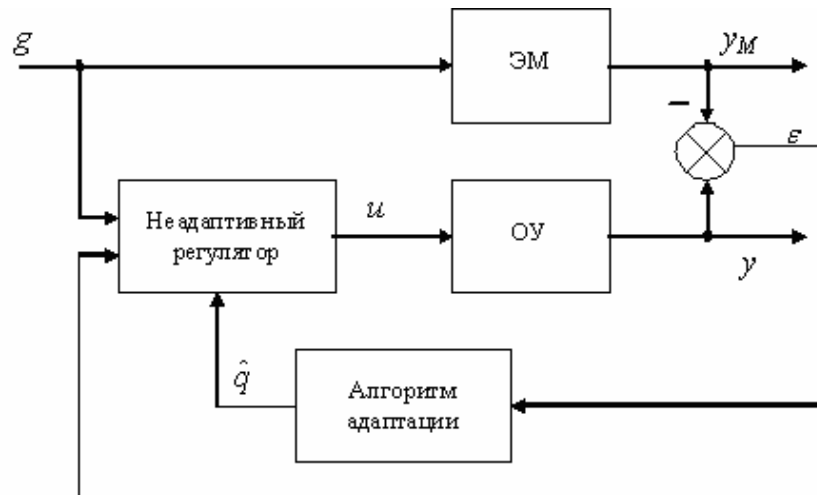


Рис .1.8. Система адаптивного управления с эталонной моделью

Описанные системы получили название *адаптивных систем с эталонной моделью* (рис. 1.8). В настоящее время адаптивные системы с эталонной моделью представляют собой хорошо разработанный класс адаптивных систем, получивших наиболее широкое распространение в практических реализациях и широко представленных в научной литературе.

Альтернативный подход к построению безыдентификационных адаптивных систем – сформировать некоторый критерий качества $Q = Q(y(t))$, значение которого достигает минимума (максимума) при соответствии коэффициентов регулятора параметрам объекта управления. Тогда настройку параметров объекта управления можно вести из условия минимизации (максимизации) критерия качества. Самонастраивающиеся системы, основанные на таком принципе,

получили названия *систем экстремального регулирования*. Их структура представлена на рис. 1.9.

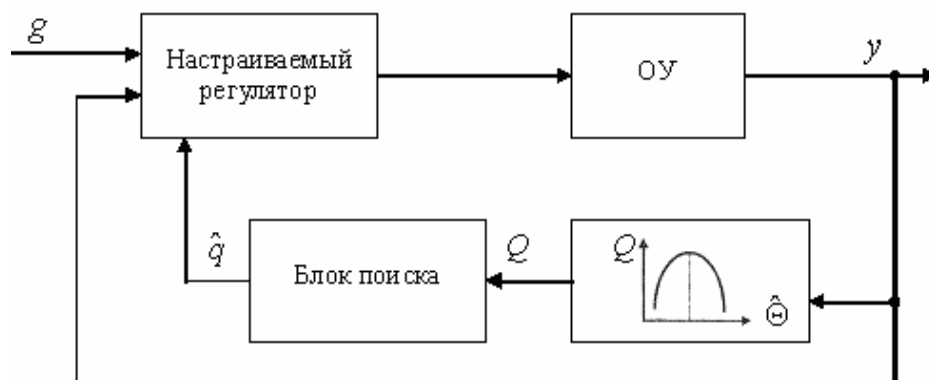
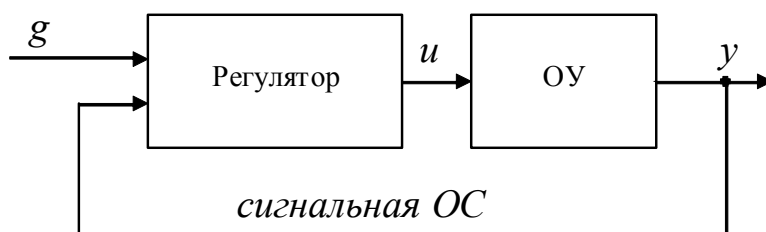


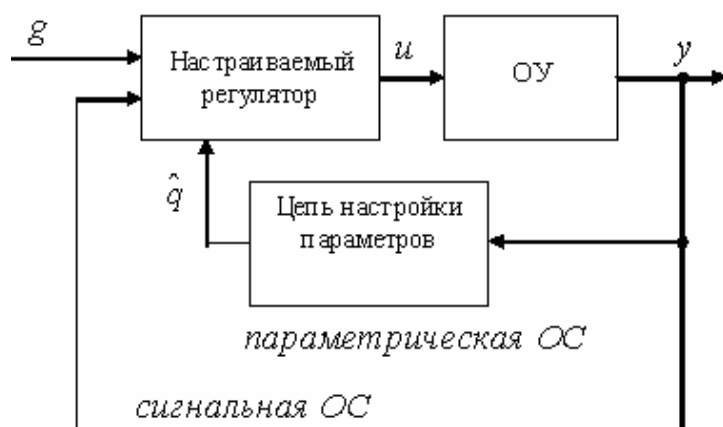
Рис.1.9. Система экстремального регулирования

Сравнивая структурные схемы, представленные на рис. 1.7, 1.8 и 1.9, можно сделать вывод, что основной отличительной чертой адаптивных (самонастраивающихся) систем является наличие дополнительной обратной связи, образованной цепью настройки параметров регулятора. Такая обратная связь получила название *параметрической*, в отличие от *сигнальной* обратной связи, образованной непосредственно регулятором.

Обобщенные структурные схемы систем, *робастность* (малую чувствительность) которых обеспечивается *неадаптивными* и *адаптивными методами управления*, приведены на рис. 10.



а)



б)

Рис.1.10. Обобщенные схемы робастных замкнутых систем:
а – неадаптивная, б – адаптивная

2. АНАЛИЗ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

2.1. Грубость свойств систем управления

2.1.1. Постановка задачи. Понятия грубости и робастности

Задача исследования систем с неопределенностями может быть сформулирована следующим образом. Пусть номинальная система (т.е. система с номинальной математической моделью) обладает некоторыми *желаемыми свойствами* (например, определенным типом устойчивости, заданными показателями точности или заданными показателями динамического качества и т. п.). Сохранятся ли эти свойства при изменениях (*вариациях* или *возмущениях*) математической модели? Проблема сохранения некоторого свойства системы при изменениях ее математической модели изучается *теорией грубости свойств систем управления*. Дадим следующее определение.

Определение 2.1. *Если некоторое свойство системы сохраняется хотя бы при малых (в определенном смысле) вариациях ее математической модели, то данное свойство называется грубым по отношению к выделенному классу вариаций. Если можно указать хотя бы одну систему, у которой исследуемое свойство не сохраняется при сколь угодно малых вариациях ее математической модели, то такое свойство называется негрубым.*

Особое значение понятие грубости приобретает при исследовании свойств сложной системы по ее упрощенной (идеализированной) модели. Впервые задача исследования свойств системы по ее упрощенной номинальной модели была сформулирована и решена известным русским математиком Александром Михайловичем Ляпуновым в форме его знаменитых теорем об исследовании устойчивости по первому приближению (т. е. по линеаризованной модели). Термин *грубая система* был введен в научный оборот только через 45 лет А.А. Андроновым, выделившим класс динамических систем, топологическая структура траекторий которых не меняется при малых изменениях их математических моделей.

Однако для теории динамических систем с целенаправленно изменяемыми внешними воздействиями (т.е. для задач теории управления) характерна более широкая трактовка понятия грубости как сохранения некоторых свойств (и не обязательно – только топологической структуры траекторий) динамической системы при малых изменениях ее математической модели. Так как фундаментальным свойством любой динамической системы является устойчивость, то прежде всего интересуются грубостью свойств

устойчивости (хотя можно изучать грубость свойств переходных процессов, грубость точностных свойств, грубость частотных характеристик и т. п.).

В последнее время в литературе часто вместо термина «грубость» используется термин *робастность* (от англ. *robust* – крепкий, сильный). Обычно, говоря о робастности, предполагают знание количественных оценок допустимых вариаций математической модели. В этом смысле «грубость» может трактоваться как «локальная робастность». Термины «грубый» и «робастный» используются также по отношению к алгоритмам управления и замкнутым системам. При этом для корректного использования этих терминов необходимо оговаривать класс номинальных моделей систем управления, класс допустимых вариаций и указывать свойство системы, которое сохраняется при данных вариациях. Однако во многих специальных разделах современной теории управления термин «робастный» используется в специальном, более узком смысле без каких-либо дополнительных оговорок и условий. Так, *адаптивными робастными* системами в современной теории адаптивного управления называются системы, которые за счет специальной модификации алгоритма адаптации сохраняют работоспособность в условиях внешних возмущений, нестационарности неизвестных параметров или при наличии паразитной динамики.

В настоящем параграфе мы остановимся на исследовании *грубости свойств устойчивости* динамических систем. При этом основным методом исследования является метод функций Ляпунова. В приложении 2 приведены краткие сведения из теории устойчивости и метода функций Ляпунова, необходимые для понимания последующего материала.

Грубость свойств систем управления может изучаться по отношению к различным классам вариаций (возмущений) математической модели – параметрическим, сигнальным, структурным и т.д. Ниже мы остановимся подробнее на двух классах возмущений – параметрических и структурных. Анализ грубости свойств устойчивости по отношению к сигнальным (постоянно действующим) возмущениям можно найти в литературе.

2.1.2. Грубость свойств устойчивости по отношению к параметрическим возмущениям

Начнем изучение вопроса с частного примера, а потом распространим полученный результат на широкий класс динамических систем.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу асимптотической стабилизации объекта вида

$$\dot{x} = qx + u, \quad (2.1)$$

где x – скалярная регулируемая переменная, u – сигнал управления, q – постоянный параметр. Очевидно, что для решения поставленной задачи можно использовать регулятор вида

$$u = -q_0x - kx, \quad (2.2)$$

где $k > 0$ – коэффициент обратной связи, а q_0 – номинальное значение параметра q . Если истинное значение параметра соответствует номинальному (т. е. $q_0 = q$), то, подставляя (2.2) в (2.1), имеем

$$\dot{x} = -kx. \quad (2.3)$$

Так как модель (2.3) получена при условии равенства истинного значения параметра q номинальному \hat{q} , то будем называть ее *номинальной моделью* замкнутой системы. Из (2.3) с очевидностью следует экспоненциальная устойчивость нулевого состояния равновесия. Сохранится ли данное свойство при отклонении номинального значения параметра от истинного? Подставляя (2.2) в (2.1) при условии, что $q \neq q_0$, получаем

$$\dot{x} = -kx + \delta q x, \quad (2.4)$$

где величина $\delta q = q - q_0$ носит название *параметрического возмущения* (или *параметрической ошибки*). При этом сама модель (2.4) получила название *параметрически возмущенной модели*. Очевидно, что возмущенная модель также экспоненциально устойчива, если $|\delta q| < k$. Таким образом, можно сделать *предположение, что свойство экспоненциальной устойчивости является грубым по отношению к параметрическим возмущениям*, так как оно сохраняется хотя бы при малых отклонениях истинных параметров объекта от принятых номинальных значений. \square

Рассмотрим теперь *номинальную* систему более общего вида,

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (2.5)$$

где x – n -мерный вектор состояния. Пусть возмущенная система описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, t) + \Delta(x, t), \quad (2.6)$$

где слагаемое $\Delta(x, t)$ в общей форме определяет вариации (возмущения) номинальной модели. Класс *параметрических возмущений* задается неравенством

$$\Delta(x, t) \leq c_5 \|x\|, \quad (2.7)$$

где c_5 – некоторая положительная константа. Использование неравенства (2.7) для определения класса параметрических возмущений может быть мотивировано с учетом примера 2.1. Действительно, параметрическое возмущение (состоящее в отклонении истинного значения параметра от принятого номинального) привело к появлению в возмущенной модели (2.4) слагаемого $\delta\dot{x}$, для которого справедлива оценка $\delta\dot{x} \leq |\delta\dot{\phi}| |x|$. Заменяя положительную константу $|\delta\dot{\phi}|$ на c_5 , слагаемое $\delta\dot{x}$ на $\Delta(x, t)$ и переходя к векторной величине x , получим общее описание класса параметрических возмущений в виде неравенства (2.7).

Определение 2.2. *Свойство устойчивости системы (2.5) называется грубым по отношению к параметрическим возмущениям, если может быть указано число $c_5 > 0$ такое, что данное свойство устойчивости справедливо также для системы (2.6) при любых $\Delta(x, t)$, удовлетворяющих условию (2.7).*

Пусть номинальная модель (2.5) является экспоненциально устойчивой и, следовательно, существует функция Ляпунова $V(x)$, для которой справедливы неравенства (П 2.10)–(П 2.12) из Приложения 2. Тогда вычисляя производную функции Ляпунова $V(x)$ в силу уравнений параметрически возмущенной системы (2.6), получаем:

$$\dot{V}(x) \leq -c_3 \|x\|^2 + \left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \|\Delta\| \leq -(c_3 - c_4 c_5) \|x\|^2 \leq -\frac{1}{c_2} (c_3 - c_4 c_5) V(x).$$

Из последнего неравенства очевидно, что при $c_5 < c_3 / c_4$ состояние равновесия возмущенной системы (2.6) является экспоненциально устойчивым. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Свойство экспоненциальной устойчивости является грубым по отношению к параметрическим возмущениям.*

Замечание 2.1. Так как можно указать количественную оценку допустимых параметрических вариаций, определенную неравенством $c_5 < c_3 / c_4$, то свойство экспоненциальной устойчивости является также *робастным* по отношению к параметрическим возмущениям. \square

Являются ли грубыми по отношению к параметрическим возмущениям свойства устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости? Для ответа на этот вопрос рассмотрим следующие примеры.

Пример 2.2. Пусть для управления объектом (2.1) использован регулятор вида

$$u = -q_0 x, \tag{2.8}$$

где, как и раньше, q_0 – номинальное значение параметра q . При равенстве номинального значения параметра истинному подстановка

уравнения (2.8) в уравнение (2.1) дает следующую номинальную модель замкнутой системы:

$$\dot{x} = 0,$$

откуда следует устойчивость по Ляпунову состояния равновесия $x = 0$. При $q \neq q_0$ получаем параметрически возмущенную модель:

$$\dot{x} = \delta x. \quad (2.9)$$

Из (2.9) очевидно, что при любых сколь угодно малых положительных параметрических возмущениях (т.е. при $\delta > 0$) модель (2.9) является неустойчивой. Следовательно, свойство устойчивости по Ляпунову не является грубым по отношению к параметрическим возмущениям. \square

Пример 2.3. Пусть линейная номинальная модель имеет вид (П2.8) (см. приложение 2). Как отмечено в приложении, состояние равновесия $x = 0$ линейной нестационарной системы (П2.8) является асимптотически устойчивым (но не является ни равномерно асимптотически устойчивым, ни экспоненциально устойчивым). Очевидно, что состояние равновесия $x = 0$ возмущенной системы

$$\dot{x} = -\frac{1}{t+1}x + c_5x = -\left(\frac{1}{t+1} - c_5\right)x$$

является неустойчивым для любых сколь угодно малых $c_5 > 0$, так как

$$-\left(\frac{1}{t+1} - c_5\right) > 0$$

при всех $t > 1/c_5 - 1$. \square

Пример 2.4. Пусть нелинейная номинальная модель имеет вид (П2.9) (см. приложение 2). Состояние равновесия $x = 0$ системы является равномерно асимптотически устойчивым (но не является экспоненциально устойчивым). При этом состояние равновесия $x = 0$ возмущенной системы

$$\dot{x} = -x^3 + c_5x = -(x^2 - c_5)x$$

является неустойчивым для любых сколь угодно малых $c_5 > 0$, так как в малой окрестности точки $x = 0$ имеем

$$-(x^2 - c_5) > 0$$

для всех $|x| < \sqrt{c_5}$. \square

Примеры 2.2, 2.3 и 2.4 позволяют сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2.2. *Свойства устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости не являются грубыми по отношению к параметрическим возмущениям.*

Класс линейных стационарных динамических систем допускает наглядную геометрическую интерпретацию введенного понятия грубости свойств устойчивости. Экспоненциальная устойчивость линейных систем означает, что корни системы расположены в левой открытой полуплоскости на некотором ненулевом расстоянии λ от границы устойчивости (см. рис. 2.1).

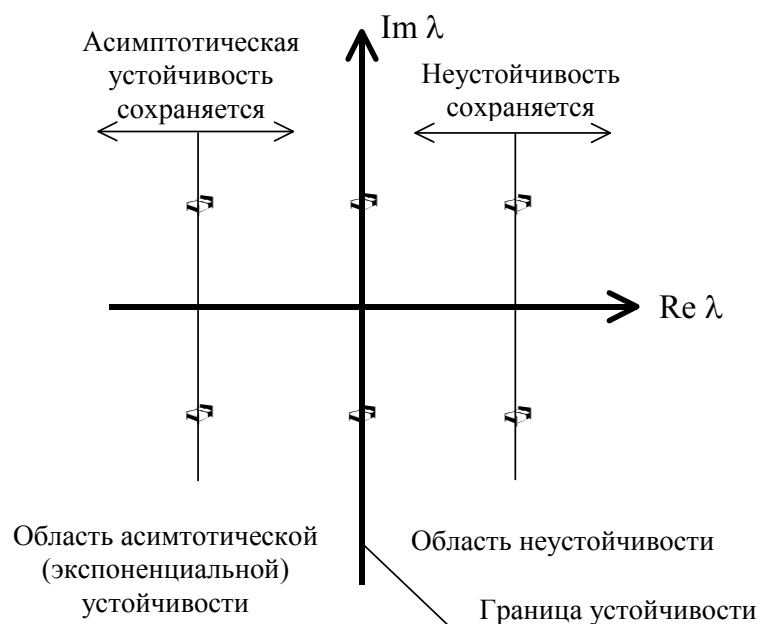


Рис. 2.1. Комплексная плоскость и корни линейных стационарных систем

Поэтому небольшие изменения в расположении корней, вызванные параметрическими возмущениями, не приводят к переходу корня в правую полуплоскость и, следовательно, к изменению типа устойчивости. Аналогичное замечание можно сделать для неустойчивых систем, имеющих корни в правой открытой полуплоскости. Однако, если система находится на границе устойчивости (т.е. является устойчивой по Ляпунову, но не является экспоненциально устойчивой), то она имеет корни с нулевой вещественной частью, расположенные на мнимой оси. Малейший (произвольно малый) сдвиг корней вправо приводит к переходу корней в правую полуплоскость и к изменению свойств устойчивости (система становится неустойчивой). Аналогично, при малейшем сдвиге корней влево корни попадают в левую полуплоскость, и система становится экспоненциально устойчивой.

Проблема обеспечения стабильной работы технических систем, находящихся на границе устойчивости, является сложной инженерной проблемой. Так, генератор гармонических колебаний может быть описан простым дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (2.10)$$

где константа ω определяет угловую частоту колебаний, а начальные условия $x(0)$ и $\dot{x}(0)$ задают амплитуду и фазу колебаний. Очевидно, что реализация уравнения (2.10) на современной электронной базе допускает микроминиатюрное исполнение (схема моделирования генератора (2.10) приведена на рис. 2.2).

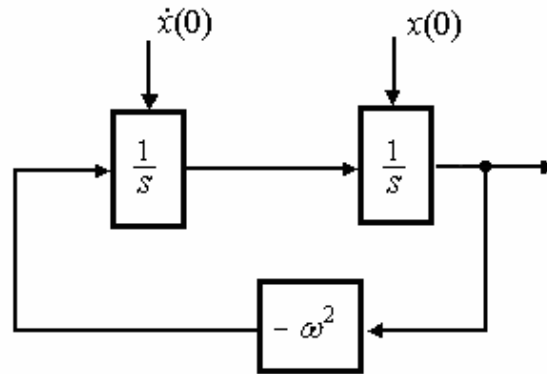


Рис. 2.2. Функциональная блок-схема генератора гармонического сигнала

Однако на практике генераторы представляют собой достаточно сложные технические устройства, основная проблема практической реализации которых состоит в обеспечении стабильности характеристик. Легко убедиться, что корни характеристического уравнения генератора (2.10) являются чисто мнимыми и, следовательно, сам генератор (как динамическая система) находится на границе устойчивости. Малейшая неидеальность в реализации уравнения (2.10) приводит к смещению корней (влево или вправо с мнимой оси) и, соответственно, к генерации затухающих или расходящихся колебаний. Таким образом, проблема грубости свойств устойчивости динамических систем получает важное практическое значение при конструировании генераторов, интерполяторов и дифференциальных анализаторов.

2.1.3. Грубость свойств устойчивости по отношению к структурным возмущениям

Рассмотрим теперь случай *структурных возмущений*, вызванных наличием *паразитной* динамики. Ограничимся классом линейных стационарных систем. Пусть номинальная линейная система описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (2.11)$$

$$u = -k^T x, \quad (2.12)$$

где x – n -мерный вектор состояния, u – сигнал управления, A – $n \times n$ стационарная матрица, b – $n \times 1$ вектор стационарных коэффициентов, а k – $n \times 1$ вектор коэффициентов обратных связей. При этом уравнение (2.11) описывает объект управления, а уравнение (2.12) – модальный регулятор стабилизации (см. рис. 2.3.а). Регулятор (2.12) выбран таким образом, что замкнутая система (2.11), (2.12) экспоненциально устойчива, т.е. матрица $F = A - bk^T$ является гурвицевой.

Пусть возмущенная система имеет вид

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad (2.13)$$

$$\dot{\xi} = \gamma(u - \xi), \quad (2.14)$$

$$u = -k^T x, \quad (2.15)$$

где уравнение (2.14) описывает паразитную динамику, представленную апериодическим звеном первого порядка с постоянной времени $T = 1/\gamma$ и выходной переменной ξ (см. рис. 2.3.б).

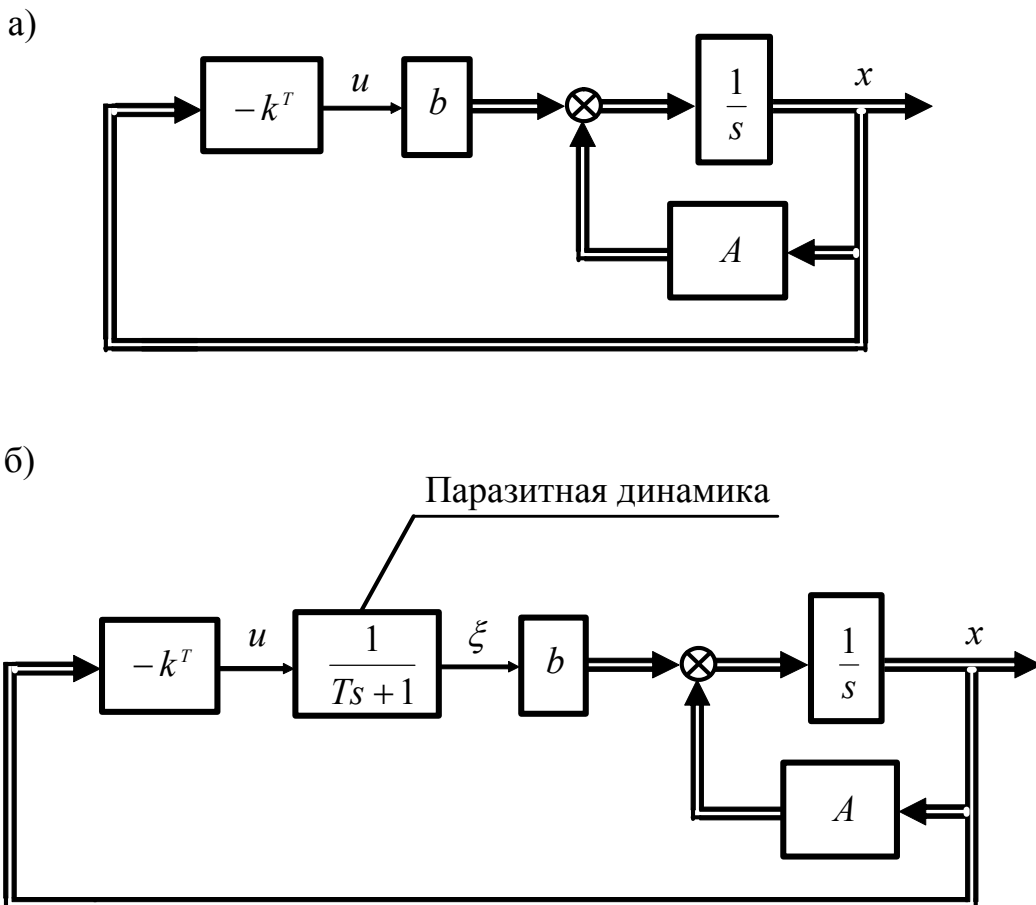


Рис. 2.3. Системы модального управления: а – структурная схема номинальной модели; б – структурная схема модели с паразитной динамикой

Вопрос, который подлежит исследованию, состоит в следующем: будет ли возмущенная система (2.13)–(2.15) экспоненциально устойчивой хотя бы при малых значениях постоянной времени T ? В случае положительно ответа мы сделаем вывод о грубости свойства экспоненциальной устойчивости по отношению к паразитной динамике для класса линейных стационарных систем.

Для использования метода функций Ляпунова преобразуем систему (2.13)–(2.15) к удобному виду, введя новую «быструю» переменную

$$z = u - \xi. \quad (2.16)$$

Так как процессы в возмущенной системе (2.13)–(2.15) будут исследоваться при малых значениях постоянной времени T (т.е. при больших значениях коэффициента γ), то разность между сигналами u и ξ будет быстро затухать. Это наблюдение мотивирует введенное название переменной z – *быстрая переменная*.

Продифференцируем (2.16) с учетом (2.13) и (2.15) (о правилах дифференцирования скалярных функций векторного аргумента см. приложение 1):

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{u} - \dot{z} = -\frac{\partial}{\partial x}(k^T x) \dot{x} - \gamma(u - z) = -k^T(Ax + b\xi) - \gamma z = \\ &= -k^T(Ax + b(-k^T x - z)) - \gamma z = -k^T Fx + k^T bz - \gamma z. \end{aligned}$$

Наконец, подставляя $\xi = u - z$ в (2.13), получаем описание замкнутой возмущенной системы в координатах x и z :

$$\dot{x} = Fx - bz, \quad (2.17)$$

$$\dot{z} = -\gamma z - k^T Fx + k^T bz. \quad (2.18)$$

Для исследования устойчивости системы (2.17), (2.18) используем функцию Ляпунова вида

$$V(x, z) = \frac{1}{2} x^T P x + \frac{1}{2} z^2, \quad (2.19)$$

где симметрическая положительно определенная матрица P является решением уравнения Ляпунова

$$F^T P + P F = -2I. \quad (2.20)$$

Отметим, что уравнение (2.19) имеет единственное решение, так как матрица F является гурвицевой (см. приложение 1).

Вычисляя производную функции (2.19) в силу уравнений (2.17), (2.18), получаем (о правилах транспонирования матричных произведений см. приложение 1):

$$\begin{aligned}
V(x, z) &= \frac{1}{2} x^T P x + \frac{1}{2} x^T P (F x - b z) - \gamma z^2 - z k^T F x + k^T b z^2 = \\
&= \frac{1}{2} (F x - b z)^T P x + \frac{1}{2} x^T P (F x - b z) - \gamma z^2 - z k^T F x + k^T b z^2 = \\
&= \frac{1}{2} x^T (F^T P + P F) x - \frac{1}{2} z b^T P x - \frac{1}{2} x^T P b z - \gamma z^2 - z k^T F x + k^T b z^2.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнение (2.20) и тот факт, что слагаемые $\frac{1}{2} z b^T P x$ и $\frac{1}{2} x^T P b z$ равны (в силу симметричности матрицы P), перепишем выражение для производной функции Ляпунова в виде

$$V(x, z) = -\|x\|^2 - z b^T P x - \gamma z^2 - z k^T F x + k^T b z^2.$$

Объединяя слагаемые с одинаковыми переменными и переходя к нормам, получим

$$V(x, z) \leq -\|x\|^2 - \gamma \|z\|^2 + \rho_1 \|z\| \|x\| + \rho_2 \|z\|^2, \quad (2.21)$$

где значения констант ρ_1 и ρ_2 определяются соотношениями

$$\rho_1 = \|b^T P - k^T F\|, \quad \rho_2 = \|k^T b\|. \quad (2.22)$$

Перепишем выражение (2.21) в виде

$$\begin{aligned}
V(x, z) &\leq -\frac{3}{4} \|x\|^2 - (\gamma - \rho_1^2 - \rho_2) \|z\|^2 - \frac{1}{4} \|x\|^2 + \rho_1 \|z\| \|x\| - \rho_1^2 \|z\|^2 = \\
&= -\frac{3}{4} \|x\|^2 - (\gamma - \rho_1^2 - \rho_2) \|z\|^2 - \left(\frac{1}{2} \|x\| - \rho_1 \|z\| \right)^2.
\end{aligned}$$

Усиливая последнее неравенство, пренебрежем квадратным членом:

$$V(x, z) \leq -\frac{3}{4} \|x\|^2 - (\gamma - \rho_1^2 - \rho_2) \|z\|^2. \quad (2.23)$$

Из (2.23) легко получить условие экспоненциальной устойчивости

$$\gamma > \rho_1^2 + \rho_2,$$

где положительные константы ρ_1 и ρ_2 определены равенствами (2.22).

Другими словами, если коэффициент γ является достаточно большим (или, что эквивалентно, постоянная времени $T = 1/\gamma$ звена паразитной динамики является достаточно малой), то возмущенная система (2.13)–(2.15) сохраняет свойство экспоненциальной устойчивости. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2.3. *Свойство экспоненциальной устойчивости является грубым по отношению к паразитной динамике для класса линейных стационарных систем.*

В общем случае такое утверждение не является справедливым для нелинейных и нестационарных систем. Для них свойство экспоненциальной устойчивости сохраняется только для ограниченного множества начальных условий, радиус которого зависит от скорости изменения нестационарных параметров.

2.1.4. Практические выводы

Свойство экспоненциальной устойчивости является наиболее сильным («крепким», робастным) по отношению к различным вариациям математической модели замкнутой системы. На практике это означает следующее. Если синтезированный регулятор обеспечивает экспоненциальную устойчивость системы с номинальной (упрощенной, идеализированной) математической моделью, то этот же регулятор обеспечит экспоненциальную устойчивость и для реальной системы при небольших отклонениях ее параметров (или структуры) от принятых номинальных значений. Это позволяет при синтезе управления использовать усредненные (приближенные) значения параметров, пренебрегать малыми постоянными времени.

Для класса линейных систем задача обеспечения экспоненциальной устойчивости является достаточно простой, так как свойства асимптотической и экспоненциальной устойчивости следуют одно из другого (см. приложение 2). Для нелинейных и нестационарных систем асимптотическая устойчивость, в общем случае, не означает экспоненциальной устойчивости, а, значит, не гарантирует устойчивости замкнутых систем даже при малых вариациях их математических моделей. Особую сложность приобретают задачи практической реализации систем, находящихся на границе устойчивости, так как они тоже не являются грубыми по отношению к различным типам возмущений (вариаций) их математических моделей.

В завершение параграфа отметим, что в практической деятельности разработчики систем управления часто исходят из интуитивной предпосылки, что свойства реальной системы сохраняться при малых изменениях ее математической модели. Однако, как мы установили выше, такое утверждение справедливо только для одного типа устойчивости – экспоненциальной. В связи с этим позволим себе сделать замечание, что часто интуиция является

плохим советчиком в тех вопросах, где требуются строгие методы исследования.

2.2. Методы теории чувствительности

Методы теории чувствительности объектов и систем управления к вариациям параметров их функциональных компонентов относительно номинальных значений этих параметров является эффективным инструментом решения проблемы параметрической неопределенности, сформулированной в разделе 1, как в аналитической, так и синтетической постановках. Инструментарий современной теории чувствительности (ТЧ) весьма обширен, он имеет богатую библиографию. Авторы для решения поставленных задач ограничились тем инструментом теории чувствительности, возможности которого сориентированы на матричный формализм метода пространства состояния (МПС).

2.2.1. Аппарат функций траекторной чувствительности

Аппарат функций траекторной чувствительности (ФТЧ) в своей первичной постановке строился так, чтобы дать разработчикам возможность наблюдать дополнительное движение динамической системы, порожденное вариациями параметров ее функциональных компонентов относительно их номинальных значений, оценивать влияние этого движения на качественные показатели системы.

В связи с тем, что наблюдение дополнительного движения осуществляется с помощью дополнительной динамической системы с фиксированными параметрами, именуемой моделью траекторной чувствительности (МТЧ), аппарат дает возможность разработчику при формировании объекта управления, представляющего собой агрегированные объединения физического (технологического) процесса, регулирующих органов и устройств измерения компонентов вектора состояния, сравнивать конфигурацию ОУ на предмет оценки потенциальной стабильности показателей качества проектируемой системы в условиях неопределенности параметров. Анализ управляемости агрегированной системы «номинальный ОУ – МТЧ» по выходу модели траекторной чувствительности с помощью аппарата матриц управляемости по состоянию и выходу МТЧ, а также системных грамианов позволяет ранжировать параметры по степени достижимости стабильности показателей качества систем с использованием возможностей неадаптивных алгоритмов управления, рационально распределять ресурсы управления, решать задачу «оптимального номинала» агрегатов ОУ. Применительно к

спроектированной системе аппарат ФТЧ позволяет как на траекторном, так и на структурном уровне оценивать эффект введения в состав системы регуляторов в условиях параметрической неопределенности, проводить сравнения альтернативных вариантов регуляторов. Применение аппарата функций траекторной чувствительности к дискретным динамическим системам дает возможность как траекторно, так и структурно оценивать влияние таких «дискретных» параметров, как интервал дискретности и запаздывания вывода из ЭВМ вычисленного управления.

Для введения аппарата траекторной чувствительности рассмотрим непрерывную динамическую систему, которая характеризуется вектором состояния $X \in R^n$, вектором выхода $y \in R^m$, а также вектором q квазистационарных параметров ($\dot{q}(t) = 0$), который вызывает вариацию Δq так, что $q = q_0 + \Delta q$, $q \in R^p$. Чтобы обеспечить прозрачность трактовки результатов, будем использовать безразмерную форму представления элементов q_j вектора параметров q ($j = \overline{1, p}$).

Полное движение динамической системы для случая произвольного значения вектора q параметров по состоянию и выходу может быть представлено в форме

$$x(t, q = q_0 + \Delta q) = x(t) + \Delta x(t, q_0, \Delta q), \quad (2.24)$$

$$y(t, q = q_0 + \Delta q) = y(t) + \Delta y(t, q_0, \Delta q), \quad (2.25)$$

где $x(t) \overset{\Delta}{=} x(t, q_0)$; $y(t) \overset{\Delta}{=} y(t, q_0)$. В выражениях (2.24), (2.25) $x(t)$ и $y(t)$ представляют собой номинальные траектории непрерывной динамической системы соответственно по состоянию и выходу, $\Delta x(t, q_0, \Delta q)$ и $\Delta y(t, q_0, \Delta q)$ – дополнительные движения системы по состоянию и выходу, определяемые вариацией Δq , а также номинальным значением q_0 вектора параметров. Будем полагать справедливыми две гипотезы: первая – о малости $\|\Delta q\|$ нормы вариации Δq вектора параметров, вторая – о непрерывной дифференцируемости по вектору параметров q в точке $q = q_0$ траекторий $x(t, q)$ и $y(t, q)$ в каждый момент времени. Тогда (2.24) и (2.25) принимают вид

$$x(t, q) = x(t) + \frac{\partial x(t, q)}{\partial q} \Big|_{q=q_0} \Delta q + O_x^2(\Delta q), \quad (2.26)$$

$$y(t, q) = y(t) + \frac{\partial y(t, q)}{\partial q} \Big|_{q=q_0} \Delta q + O_y^2(\Delta q), \quad (2.27)$$

где выполняются соотношения

$$\lim_{\|\Delta q\| \rightarrow 0} \frac{\|O_x^2(\Delta q)\|}{\|\Delta q\|} = 0; \lim_{\|\Delta q\| \rightarrow 0} \frac{\|O_y^2(\Delta q)\|}{\|\Delta q\|} = 0. \quad (2.28)$$

Если воспользоваться (2.26)–(2.28), то для дополнительных движений $\Delta x(t, q_0, \Delta q)$ и $\Delta y(t, q_0, \Delta q)$ параметрически возмущенной системы можно записать:

$$\Delta x(t, q_0, \Delta q) = \Sigma(t) \Delta q, \quad (2.29)$$

$$\Delta y(t, q_0, \Delta q) = \Xi(t) \Delta q. \quad (2.30)$$

Матрицы Якоби вида $\Sigma(t)$ и $\Xi(t)$ именуется матрицами траекторной чувствительности непрерывной системы соответственно по состоянию и выходу, и столбцовая форма их записи имеет вид

$$\Sigma(t) = \text{row} \left\{ \sigma_j(t) = \frac{\partial x(t, q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}; j = \overline{1, p} \right\}, \quad (2.31)$$

$$\Xi(t) = \text{row} \left\{ \eta_j(t) = \frac{\partial y(t, q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}; j = \overline{1, p} \right\}, \quad (2.32)$$

где $\sigma_j(t)$ и $\eta_j(t)$ являются функциями траекторной чувствительности первого порядка (в дальнейшем – просто функциями траекторной чувствительности) по состоянию и выходу.

Заметим, что если известны матрицы чувствительности $\Sigma(t)$ и $\Xi(t)$ непрерывной динамической системы для любого t , то основные задачи анализа параметрической неопределенности в традиционной постановке могут быть решены. Причем, если достаточно решения задачи в экстремальной версии, в форме мажорант и минорант дополнительных движений, то эффективным инструментом здесь оказывается SVD-разложение матрицы (см. приложение 5) траекторной чувствительности $\Sigma(t)$ и $\Xi(t)$. В пространстве траекторий для любого t максимальное $\alpha(*)_M(t)$ и минимальное $\alpha(*)_m(t)$ сингулярные числа матрицы $(*)(t)$, задают значение нормы максимальной и минимальной полуосей эллипсоидных покрытий дополнительных движений (2.29) и (2.30), порожденных сферой $\|\Delta q\| = 1$, а элементы правого сингулярного базиса SVD-разложения матрицы $(*)(t)$ задают сочетания вариаций параметров, порождающие максимальную и минимальную полуоси этого покрытия.

Конструирование модели траекторной чувствительности проиллюстрируем на примере линейного непрерывного ОУ, матричные компоненты модельного представления которого зависят от вектора параметров q .

$$\dot{x}(t, q) = A(q)x(t, q) + B(q)u(t); x(0, q) = x(0); y(t, q) = C(q)x(t, q), \quad (2.33)$$

где $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m \forall q, t$. Продифференцируем выражение (2.33) по j -му компоненту q_j вектора параметров q в точке $q = q_0$. Сконструируем порядок дифференцирования по времени t и параметру q_j в левой части первого уравнения (2.33) так, что получим цепочку равенств

$$\left. \frac{\partial}{\partial q_j} (\dot{x}(t, q)) \right|_{q=q_0} = \left. \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{dx(t, q)}{dt} \right) \right|_{q=q_0} = \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x(t, q)}{\partial q_j} \right) \right|_{q=q_0} = \dot{\sigma}_j(t), \quad (2.34)$$

а также введем обозначения

$$A_{q_j} = \left. \frac{\Delta \partial A(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}; B_{q_j} = \left. \frac{\Delta \partial B(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}; C_{q_j} = \left. \frac{\Delta \partial C(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}, \quad (2.35)$$

$$A(q)|_{q=q_0} = A; B(q)|_{q=q_0} = B; C(q)|_{q=q_0} = C, \quad (2.36)$$

$$x(t, q)|_{q=q_0} = x(t); y(t, q)|_{q=q_0} = y(t). \quad (2.37)$$

Теперь для j -й модели траекторной чувствительности получим представление

$$\dot{\sigma}_j(t) = A\sigma_j(t) + A_{q_j}x(t) + B_{q_j}u(t); \eta_j = C\sigma_j(t) + C_{q_j}x(t), \quad (2.38)$$

МТЧ (2.38) будет генерировать функции траекторной чувствительности $\sigma_j(t)$ по состоянию и $\eta_j(t)$ по выходу, если ее дополнить моделью номинального ОУ (см. рисунок 2.4), полученной из (2.33) при $q = q_0$:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); x(0); y(t) = Cx(t). \quad (2.39)$$

Нетрудно видеть из (2.33) и (2.39), что динамическая модель дополнительных движений (2.29) и (2.30) с точностью до мультипликативной составляющей $\Delta q_j, j = \overline{1, p}$ по выходам $\sigma_j(j)$ и $\eta_j(t)$ совпадает системой из p МТЧ (2.38). Установление возможности сведения дополнительных движений к нулю хотя бы в асимптотике сводится к анализу управляемости МТЧ вида (2.38). Для этих целей сконструируем агрегированную систему с составным вектором $\dot{x}_p = \text{col}\{x, \sigma_j\}$ размерности $\dim \dot{x}_p = 2n$, которая объединением (2.38) и (2.39), получает векторно-матричное представление

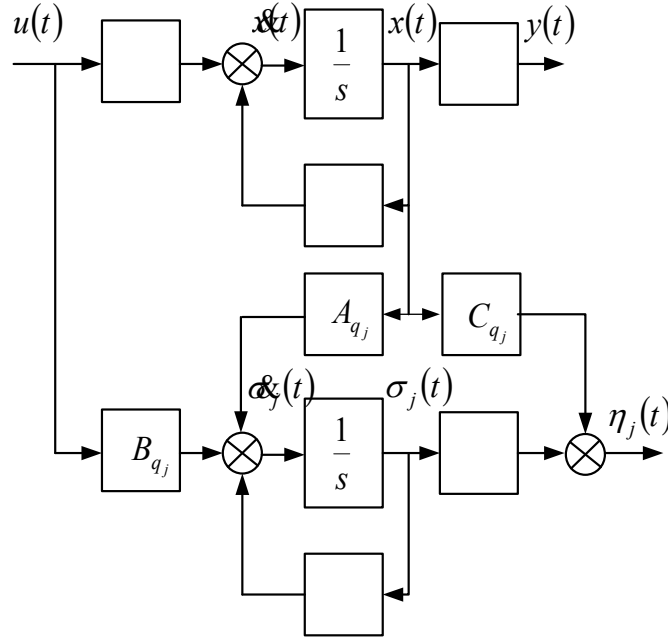
$$\dot{x}_p(t) = \dot{A}_p x_p(t) + \dot{B}_p u(t); x_p(0) = \text{col}\{x(0), 0\} \quad (2.40)$$

$$x(t) = \dot{C}_{xj}^0 x_p(t); y(t) = \dot{C}_{fj}^0 x_p(t); \sigma_j(t) = \dot{C}_{\sigma j}^0 x_p(t); \eta_j(t) = \dot{C}_{\eta j}^0 x_p(t) \quad (2.41)$$

где

$$\mathcal{A}_j^0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{q_j} & A \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}_j^0 = \begin{bmatrix} B \\ B_{q_j} \end{bmatrix}; \quad (2.42)$$

$$\mathcal{C}_{x_j}^0 = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times n}]; \quad \mathcal{C}_j^0 = [C \quad 0_{m \times n}]; \quad \mathcal{C}_{\sigma_j}^0 = [0_{n \times n} \quad I_{n \times n}]; \quad \mathcal{C}_{\eta_j}^0 = [C_{q_j} \quad C]. \quad (2.43)$$



В

Рис.2.4 Модель траекторной чувствительности, дополненная моделью номинального ОУ

Если провести агрегирование номинального ОУ (2.39) и всех p МТЧ (2.38) путем введения вектора $\mathcal{X} = \text{col}\{x, \sigma_j; j = \overline{1, p}\}$ размерности $\dim \mathcal{X} = (p+1)n$, то векторно-матричное представление такой системы получает вид

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = \mathcal{A}^0 \mathcal{X}(t) + \mathcal{B}^0 u(t); \quad \mathcal{X}(0) = \text{col}\{x(0), \sigma_j(0) = 0; j = \overline{1, p}\}, \quad (2.44)$$

$$x(t) = \mathcal{C}_x^0 \mathcal{X}(t); \quad y(t) = \mathcal{C}_y^0 \mathcal{X}(t); \quad \sigma(t) = \mathcal{C}_\sigma^0 \mathcal{X}(t); \quad \eta(t) = \mathcal{C}_\eta^0 \mathcal{X}(t), \quad (2.45)$$

где

$$\mathcal{A}^0 = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times np} \\ \text{col}\{A_{q_j}; j = \overline{1, p}\} & \text{diag}\{\mathcal{A}_{jj}^0 = A; j = \overline{1, p}\} \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

$$\mathcal{B}^0 = \text{col}\{B, B_{q_j}; j = \overline{1, p}\}; \quad \mathcal{C}_x^0 = \text{row}[I_{n \times n} \quad 0_{n \times np}], \quad (2.47)$$

$$\mathcal{C}_y^0 = \text{row}[C \quad 0_{m \times pn}]; \quad \mathcal{C}_\sigma^0 = [0_{np \times n} \quad I_{np \times np}], \quad (2.48)$$

$$\mathcal{C}_\eta^0 = [\text{col}\{C_{q_j}; j = \overline{1, p}\} \quad \text{diag}\{C_{\eta j} = C; j = \overline{1, p}\}], \quad (2.49)$$

$$\sigma(t) = \text{col}\{\sigma_j(t); j = \overline{1, p}\}; \eta(t) = \text{col}\{\eta_j(t); j = \overline{1, p}\}. \quad (2.50)$$

Нетрудно видеть, что с ростом числа варьируемых параметров заметно растет размерность $\dim \mathcal{W} = (p+1)n$ агрегированной системы (2.44), (2.45), что может породить проблемы вычислительной устойчивости. В этой связи аддитивная природа дополнительных движений по состоянию (2.2а) и выходу (2.30) позволяет p раз воспользоваться агрегированной системой (2.40), (2.41) размерности $\dim \mathcal{W}_j = 2n$ для всех $j = \overline{1, p}$.

Для оценки достижимости нулевой траекторной чувствительности к вариациям параметра q_j ($j = \overline{1, p}$), а также ранжирования параметров по возможным затратам ресурсов управления для достижения нечувствительности траектории проектируемой системы к этим вариациям проведем анализ управляемости системы (2.40), (2.41) по вектору состояния σ_j МТУ и ее выходу η_j . Первая задача решается на тройке матриц $(\mathcal{C}_{\sigma_j}^0, \mathcal{A}_j^0, \mathcal{B}_j^0)$, а вторая – на тройке матриц $(\mathcal{C}_{\eta_j}^0, \mathcal{A}_j^0, \mathcal{B}_j^0)$. Для этих целей сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 2.4. Если тройка матриц $(\mathcal{C}_{\sigma_j}^0, \mathcal{A}_j^0, \mathcal{B}_j^0)$ полностью управляема для всех $j = \overline{1, p}$ в том смысле, что матрица управляемости

$$\mathcal{W}_{y\sigma_j}^0 = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{\sigma_j}^0 \mathcal{B}_j^0 & \mathcal{C}_{\sigma_j}^0 \mathcal{A}_j^0 \mathcal{B}_j^0 & \dots & \mathcal{C}_{\sigma_j}^0 \mathcal{A}_j^{0^{n-1}} \mathcal{B}_j^0 \end{bmatrix}, j = \overline{1, p} \quad (2.51)$$

имеет ранг, равный n ($\text{rang } \mathcal{W}_{y\sigma_j}^0 = n$), то в системе управления, полученной агрегированием параметрически возмущенного ОУ (2.33) и регулятора, содержащего в своем составе номинальный ОУ (2.39) и реализующего закон управления по вектору дополнительного движения $\Delta x(t, q_0, \Delta q_j)$, достижима в асимптотике траекторная нечувствительность вектора состояния $x(t)$ к вариациям всех компонентов q_j ($j = \overline{1, p}$) вектора параметров q относительно номинальных значений в смысле выполнения условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t, q_0, \Delta q_j) = 0 \quad \forall j = \overline{1, p} \quad (2.52)$$

с наперед заданным темпом. \square

Для доказательства утверждения используется тот факт, что в силу (2.29) и (2.31) условие (2.52) эквивалентно выполнению предельного перехода

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_j(t) = 0 \quad \forall j = \overline{1, p}. \quad (2.53)$$

Тогда управляемость тройки матриц $(C_{\sigma_j}^0, A_j^0, B_j^0)$ $j = \overline{1, p}$ гарантирует существование такого закона управления, при котором выполняется (2.53), а, следовательно, (2.52). ■

Требования к ресурсам управления заметно снижаются, если изначально ограничиться задачей обеспечения траекторной нечувствительности выхода проектируемой системы. На уровне требований к структурным свойствам агрегированной системы (2.40), (2.41) задача сводится к контролю управляемости тройки матриц $(C_{\eta_j}^0, A_j^0, B_j^0)$ и количественной оценке эффекта управления по переменной η_j при приложении управления $u(t)$ фиксированной нормы с помощью сингулярных чисел матрицы управляемости

$$W_{y\eta_j}^0 = \begin{bmatrix} C_{\eta_j}^0 B_j^0 & C_{\eta_j}^0 A_j^0 B_j^0 & \dots & C_{\eta_j}^0 A_j^{n-1} B_j^0 \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Следует заметить, что если ранг матриц B_j^0 и $C_{\eta_j}^0$ больше единицы, то матрица управляемости (2.54) по выходу составляется для всех возможных композиций столбцов матрицы B_j^0 и всех строк матрицы $C_{\eta_j}^0$. Ранжирование параметров q_j ($j = \overline{1, p}$) осуществляется по значению сингулярных чисел $\alpha \{W_{q\eta_j}^0\}$. Чем эти числа меньше, тем большими по норме управлениями достигается асимптотическая траекторная нечувствительность данного компонента $y_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$) вектора выхода $y(t)$ к вариациям j -го элемента q_j вектора параметров q . Нулевому сингулярному числу соответствуют бесконечные по норме управления, с помощью которых достигается асимптотическая траекторная нечувствительность компонента $y_j(t)$ вектора выхода $y(t)$.

Пример 2.5. Рассмотрим исполнительный электропривод (ЭП) проектируемой следящей системы, описываемый передаточной функцией

$$W_{ЭП}(s) = \frac{K_{\partial\partial}}{(T_{\partial\partial}s + 1)s}$$

при номинальном значении параметров и передаточной функцией

$$W_{ЭП}(s, q) = \frac{K_{\partial\partial}(1 + q_1)}{(T_{\partial\partial}(1 + q_2)s + 1)s}$$

при варьируемых параметрах $q_1 = q_{10} + \Delta q_1; q_2 = q_{20} + \Delta q_2; q_{10} = q_{20} = 0; |\Delta q_1| = |\Delta q_2| \leq 0.3$. В выражениях для передаточных функций $K_{\partial\theta} = 20 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{В}^{-1}; T_{\text{дв}} = 0.1 \text{ с}$. Для составления векторно-матричного описания ОУ (2.33), (2.3а), МТЧ (2.38) и агрегированных систем (2.40), (2.41) запишем передаточную матрицу ЭП в форме

$$W_{\text{эн}}(s, q) = \frac{\frac{K_{\partial\theta}}{T_{\partial\theta}} \cdot \frac{1+q_1}{1+q_2} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{T_{\partial\theta}(1+q_2)} \cdot \frac{1}{s}} = \frac{200 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1+q_1}{1+q_2} \cdot \frac{1}{s}}{1 + 10 \cdot \frac{1}{1+q_2} \cdot \frac{1}{s}}.$$

Воспользуемся базисом представления передаточной функции $W_{\text{эн}}(s, q)$, в котором от q_1 и q_2 зависит только матрица состояния, тогда векторно-матричное описание (2.33) ОУ получает вид

$$\dot{x}(t, q) = A(q)x(t, q) + Bu(t); \quad y(t) = Cx(t),$$

в котором

$$A(q) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1+q_1}{1+q_2} \\ 0 & -\frac{10}{1+q_2} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0].$$

Матрицы номинального ОУ (2.39) имеют реализации

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0].$$

Матрицы моделей траекторий чувствительности (2.38):

$$A_{q_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{q_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_{q_1} = [0 \quad 0];$$

$$A_{q_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}; \quad B_{q_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_{q_2} = [0 \quad 0].$$

Матрицы агрегированной системы (2.40), (2.41) имеют представление:

$$\mathcal{A}_1^0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{q_1} & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}_1^0 = \begin{bmatrix} B \\ B_{q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{C}_{\sigma_1}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{C}_{\eta_1}^0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

$$\mathcal{A}_2^0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{q_2} & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & -10 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}_2^0 = \begin{bmatrix} B \\ B_{q_2} \end{bmatrix} = \mathcal{B}_1^0, \quad \begin{aligned} \mathcal{C}_{\delta_2}^0 &= \mathcal{C}_{\delta_1}^0; \\ \mathcal{C}_{\eta_2}^0 &= \mathcal{C}_{\eta_1}^0; \end{aligned}$$

Проверим управляемость агрегированных систем по состоянию $\sigma_j(t)$ и выходу $\eta_j(t)$ ($j=1,2$) с помощью матриц управляемости $\tilde{W}_{y\sigma_j}$ (2.51) и $\tilde{W}_{y\eta_j}$ (2.54), которые с учетом $n=2$ имеют реализации

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{y\sigma_1} &= [\tilde{C}_{\sigma_1} \tilde{B}_1 \quad \tilde{C}_{\sigma_1} \tilde{A}_1 \tilde{B}_1 \quad \tilde{C}_{\sigma_1} \tilde{A}_1^2 \tilde{B}_1 \quad \tilde{C}_{\sigma_1} \tilde{A}_1^3 \tilde{B}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 200 & -2000 & 20000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{W}_{y\eta_1} &= [\tilde{C}_{\eta_1} \tilde{B}_1 \quad \tilde{C}_{\eta_1} \tilde{A}_1 \tilde{B}_1 \quad \tilde{C}_{\eta_1} \tilde{A}_1^2 \tilde{B}_1 \quad \tilde{C}_{\eta_1} \tilde{A}_1^3 \tilde{B}_1] = [0 \quad 200 \quad -2000 \quad 20000]; \\ \tilde{W}_{y\sigma_2} &= [\tilde{C}_{\sigma_2} \tilde{B}_2 \quad \tilde{C}_{\sigma_2} \tilde{A}_2 \tilde{B}_2 \quad \tilde{C}_{\sigma_2} \tilde{A}_2^2 \tilde{B}_2 \quad \tilde{C}_{\sigma_2} \tilde{A}_2^3 \tilde{B}_2] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -200 & 4000 & -60000 \\ 0 & 2000 & -40000 & 600000 \end{bmatrix}; \\ \tilde{W}_{y\eta_2} &= [\tilde{C}_{\eta_2} \tilde{B}_2 \quad \tilde{C}_{\eta_2} \tilde{A}_2 \tilde{B}_2 \quad \tilde{C}_{\eta_2} \tilde{A}_2^2 \tilde{B}_2 \quad \tilde{C}_{\eta_2} \tilde{A}_2^3 \tilde{B}_2] = \\ &= [0 \quad -200 \quad 4000 \quad -60000]. \end{aligned}$$

Ранги матриц $\tilde{W}_{y\sigma_1}$ и $\tilde{W}_{y\sigma_2}$ соответственно равны $\text{rang } \tilde{W}_{y\sigma_1} = 1$, $\text{rang } \tilde{W}_{y\sigma_2} = 1$, агрегированные системы (2.40), (2.41) с составными векторами состояний $\tilde{x}_1 = \text{col}\{x, \sigma_1\}$ и $\tilde{x}_2 = \text{col}\{x, \sigma_2\}$ не являются полностью управляемыми по векторам $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$, поэтому недостаточно выполнения условия асимптотической сходимости (2.52) по состоянию параметрически возмущенного ОУ. Ранги матриц $\mathcal{W}_{y\eta_1}^0$ и $\mathcal{W}_{y\eta_2}^0$ равны $\text{rang } \tilde{W}_{y\eta_1} = \text{rang } \tilde{W}_{y\eta_2} = 1$, что совпадает с размерностью $m=1$ вектора выхода. Таким образом, выбором закона управления можно обеспечить сходимость $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta y(t, q_0, \Delta q_j) = 0; j = \overline{1, 2}$ с заданным темпом. Сингулярные числа матриц $\mathcal{W}_{y\eta_j}^0 (j = \overline{1, 2})$ принимают значения $\alpha\{\mathcal{W}_{y\eta_1}^0\} = 2 \cdot 10^4; \alpha\{\mathcal{W}_{y\eta_2}^0\} = 6 \cdot 10^4$. Отсюда следует, что асимптотическая сходимость к нулю дополнительного движения $\Delta y(t, q_0, \Delta q_1)$ потребует больших затрат на управление, чем сходимость дополнительного движения $\Delta y(t, q_0, \Delta q_2)$ с тем же темпом.

Рассмотрим теперь возможности аппарата функций траекторной чувствительности применительно к исследованию спроектированной

системы в условиях параметрической неопределенности, а, следовательно, к оценке эффекта введения регулятора, реализующего просинтезированный закон управления.

При произвольном значении $q = q_0 + \Delta q$ векторе параметров исследуемая система имеет векторно-матричное представление

$$\dot{x}(t, q) = F(q)x(t, q) + G(q)g(t); x(0); y(t, q) = C(q)x(t, q), \quad (2.55)$$

$$\varepsilon(t, q) = g(t) - y(t, q), \quad (2.56)$$

где $g(t)$ – внешнее воздействие, $\varepsilon(t, q)$ – ошибка воспроизведения системой (2.55) внешнего воздействия. Система (2.55) образована агрегированием ОУ (2.33) и регулятора, реализующего ЗУ

$$U(t) = K_g g(t) - Kx(t) \quad (2.57)$$

в виде прямой связи (ПС) по внешнему воздействию и отрицательной обратной связи (ОС) по вектору состояния ОУ, матрицы которого K_g и K просинтезированы для случая номинальной версии (2.39) объекта управления. Определенности ради положим, что матрица K просинтезирована с использованием концепции матричного и векторного подобия, приводящей к матричному уравнению Сильвестра, решение которого является алгоритмической основой современной постановки задачи модального управления (МУ). Матрица K_g ПС доставляет спроектированной системе необходимые свойства отношения "вход–выход". Простейшим из них является равенство входа $g(t)$ и выхода $y(t)$ в неподвижном состоянии (свойство астатизма порядка $V \geq 1$), что накладывает на номинальную передаточную матрицу $\Phi(s) = \Phi(s; q = q_0)$ системы (2.55)

$$\Phi(s) = C(sI - F)^{-1} G \quad (2.58)$$

условие

$$\Phi(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s) = -CF^{-1}G = I; \quad (2.59)$$

с учетом того, что

$$F = A - BK, G = BK_g \quad (2.60)$$

соотношение (2.59) позволяет для матрицы K_g ПС записать

$$K_g = -(CF^{-1}B)^{-1}. \quad (2.61)$$

Следует заметить, что в зависимости от состава допустимых измерений ЗУ (2.57) может иметь еще две реализационные версии, записываемые в формах

$$U(t) = K_g g(t) - K_y y(t) - K_x x(t), \quad (2.62)$$

$$U(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t). \quad (2.63)$$

При этом формы представления ЗУ (2.57), (2.62) и (2.63) при номинальных значениях параметров являются эквивалентными, если выполняются матричные соотношения

$$\begin{bmatrix} K_y & K_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} = K, \quad (2.64)$$

$$K_\varepsilon = K_g = K_y, K_x = K + (CF^{-1}B)^{-1} C. \quad (2.65)$$

Однако при реализации структурных компонентов системы K_g , K_y и K_ε с некоторой параметрической неопределенностью, т.е. в форме $K_g(q)$, $K_y(q)$ и $K_\varepsilon(q)$, свойства системы (2.55), (2.56) с ЗУ в формах (2.57), (2.62) и (2.63), определяемые дополнительными движениями $\Delta x(t, q_0, \Delta q)$, $\Delta y(t, q_0, \Delta q)$ и $\Delta \varepsilon(t, q_0, \Delta q)$, оказываются различными.

Модель траекторной чувствительности системы (2.55), (2.56), если ввести обозначение

$$F_{q_j} = \frac{\Delta \partial F(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}; G_{q_j} = \frac{\Delta \partial G(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}; F(q) \Big|_{q=q_0} = F; G(q) \Big|_{q=q_0} = G, \quad (2.66)$$

по аналогии с (2.38) (см. рисунок 2.5) имеет вид

$$\dot{x}_j(t) = F \sigma_j(t) + F_{q_j} x(t) + G_{q_j} g(t); \eta_j(t) = C \sigma_j(t) + C_{q_j} x(t). \quad (2.67)$$

Функция траекторной чувствительности $\varepsilon_j(t)$ вектора ошибки удовлетворяет условию

$$\varepsilon_j(t) = \frac{\Delta \partial \varepsilon(t, q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_j} [g(t) - y(t, q)] \Big|_{q=q_0} = -y_j(t). \quad (2.68)$$

Если по аналогии с (2.40), (2.41) ввести в рассмотрение агрегированную систему с вектором состояния $\dot{x}_j(t) = \text{col}\{x, \sigma_j\}$ то для нее получим

$$\dot{\hat{x}}_j(t) = \hat{F}_j^0 \hat{x}_j(t) + \hat{G}_j^0 g(t); \hat{x}_j(0) = \text{col}\{x(0), 0\}, \quad (2.69)$$

$$x(t) = \hat{C}_{xj}^0 \hat{x}_j(t); y(t) = \hat{C}_j^0 \hat{x}_j(t); \sigma_j(t) = \hat{C}_{\sigma j}^0 \hat{x}_j(t), \quad (2.70)$$

$$\eta_j(t) = \hat{C}_{\eta j}^0 \hat{x}_j(t); \xi_j(t) = -\eta_j(t), \quad (2.71)$$

где

$$\dot{P}_j^0 = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q_j} & F \end{bmatrix}; \dot{G}_j^0 = \begin{bmatrix} G \\ G_{q_j} \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

а матрицы $\dot{C}_x^0, \dot{C}_j^0, \dot{C}_{\sigma_j}^0$ и $\dot{C}_{\eta_j}^0$ задаются в форме (2.43).

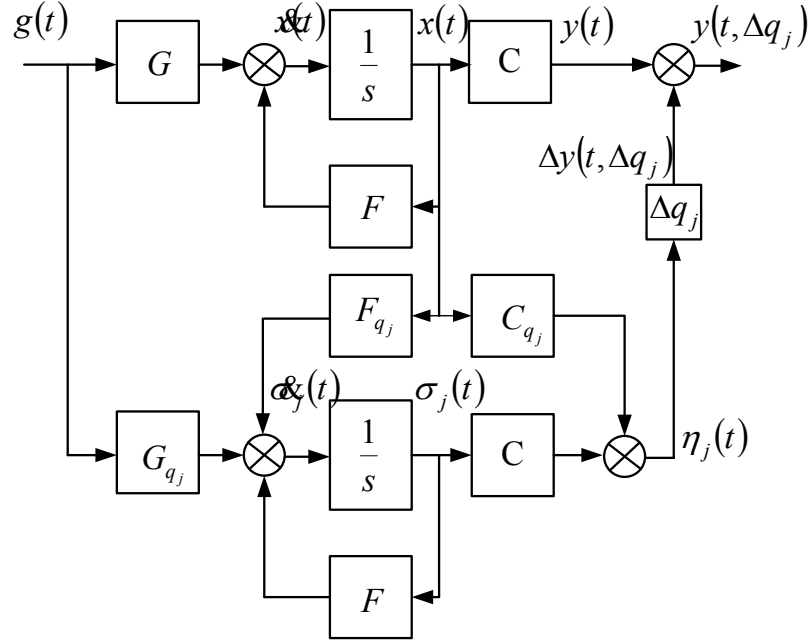


Рис.2.5 Модель траекторной чувствительности, дополненная номинальной моделью системы (2.55), (2.56)

Если провести агрегирование номинальной системы и всех p МТЧ вида (2.67) путем введения вектора $\mathcal{X} = \text{col}\{x, \sigma_j; j = \overline{1, p}\}$ размерности $\dim \mathcal{X} = (p+1)n$, то векторно-матричное представление такой системы по аналогии с (2.44)–(2.47) получает представление

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = \dot{P}^0 \mathcal{X}(t) + \dot{G}^0(t); \mathcal{X}(0) = \text{col}\{x(0), \sigma_j(0) = 0; j = \overline{1, p}\}, \quad (2.73)$$

$$x(t) = \dot{C}_x^0 \mathcal{X}(t); y(t) = \dot{C}_y^0 \mathcal{X}(t); \sigma(t) = \dot{C}_\sigma^0 \mathcal{X}(t); \eta(t) = \dot{C}_\eta^0 \mathcal{X}(t); \xi(t) = -\eta(t), \quad (2.74)$$

где

$$\dot{P}^0 = \begin{bmatrix} F & O_{n \times np} \\ \text{col}\{F_{q_j}; j = \overline{1, p}\} & \text{diag}\{\dot{P}_{jj}^0 = F; j = \overline{1, p}\} \end{bmatrix}, \dot{G}^0 = \text{col}\{G, G_{q_j}; j = \overline{1, p}\}. \quad (2.75)$$

Матрицы $\dot{C}_x^0, \dot{C}_y^0, \dot{C}_\sigma^0, \dot{C}_\eta^0$ определяются посредством (2.47)–(2.49).

Анализ свойств спроектированной системы в условиях параметрической неопределенности ее функциональных компонентов может быть осуществлен траекторными и структурными методами.

Траекторный метод предполагает конструирование оценок максимального и минимального размеров сечений трубы, в которой размещаются движения $\Delta x(g(t), q_0, \Delta q, t)$ по состоянию, $\Delta y(g(t), q_0, \Delta q, t)$ и $\Delta \Sigma(g(t), q_0, \Delta q, t)$ по выходу и ошибке.

Если эта задача решается в глобальной постановке, т.е. на множестве всех параметров $q_j \quad j = \overline{1, p}$, образующих вектор p , то для формирования оценок, как это уже отмечено в начале параграфа, целесообразно использовать SVD-анализ применительно к матрицам чувствительности $\Sigma(t)$ (2.31) и $\Xi(t)$ (2.32), конструируемым с помощью агрегированной системы (2.73)–(2.75).

Если задача решается в локальной покомпонентной форме, то оценки максимальных размеров трубок дополнительных движений $\Delta x_i(g(t), q_0, \Delta q, t)$ и $\Delta y_l(g(t), q_0, \Delta q, t)$ на множестве угловых реализаций вектора Δq , параметризованные временем t , определяются соотношениями

$$\hat{\Delta x}_i(t) = \max_{\Delta q} \Delta x_i(g(t), q_0, \Delta q, t) = \sum_{j=1}^p \sigma_{ji}(t) |\Delta q_j| \operatorname{sgn} \delta_{ji}(t), \quad (2.76)$$

$$\hat{\Delta y}_l(t) = \max_{\Delta q} \Delta y_l(g(t), q_0, \Delta q, t) = \sum_{j=1}^p \eta_{jl}(t) |\Delta q_j| \operatorname{sgn} \eta_{jl}(t), \quad (2.77)$$

$$\hat{\Delta \varepsilon}_l(t) = \hat{\Delta y}_l(t). \quad (2.78)$$

Структурный метод предполагает конструирование оценок норм элементов функционального пространства $L_T^2(T=[0, \infty))$ применительно к функциям траекторной чувствительности с использованием системных грамианов как в глобальной, так и локальной постановках. Если далее ограничиться функциями траекторной чувствительности по выходу (ошибке) в глобальной постановке, то используется агрегированная система (2.73)–(2.74), при этом кросс-грамиан \mathcal{W}_{η}^0 конструируется на тройке матриц $(\mathcal{C}_{\eta}^0, \mathcal{P}_{\eta}^0, \mathcal{G}_{\eta}^0)$ как решения матричного уравнения

$$\mathcal{P}_{\eta}^0 \mathcal{W}_{\eta}^0 + \mathcal{W}_{\eta}^0 \mathcal{P}_{\eta}^0 = -\mathcal{G}_{\eta}^0 \mathcal{C}_{\eta}^0 \quad (2.79)$$

Теперь к кросс-грамиану \mathcal{W}_{η}^0 необходимо применить технику SVD-анализа, которая дает информацию о длинах максимальной и минимальной полуосей эллипсоидных покрытий в виде $\alpha_M(\mathcal{W}_{\eta}^0)$ и $\alpha_m(\mathcal{W}_{\eta}^0)$ – максимального и минимального сингулярных чисел \mathcal{W}_{η}^0 , а

элементы правого сингулярного базиса \mathcal{W}_{η}^0 , согласованные с $\alpha_M(\mathcal{W}_{\eta}^0)$ и $\alpha_m(\mathcal{W}_{\eta}^0)$, задают наименее и наиболее благоприятные состояния параметров, порождающие дополнительные движения $\Delta y(g(t), q_0, \Delta q, t)$ максимальной и минимальной норм функционального пространства. В случае локальной покомпонентной постановки задач, когда оценивается норма дополнительного движения $\Delta y_l(g(t), q_0, \Delta q_j, t)$, порожденного вариацией Δq_j j -го компонента вектора параметров q , наблюдаемого на l -том выходе j -ой МТЧ при возбуждении k -того входа системы (2.55), кросс-грамиан $\mathcal{W}_{\eta_j}^0(\mathcal{C}_{j\eta}^0, \mathcal{G}_{jk}^0)$ строится на тройке матриц $(\mathcal{C}_{j\eta}^0, \mathcal{A}_{\Sigma j}^0, \mathcal{G}_{jk}^0)$ как решение матричного уравнения

$$\mathcal{P}_j \mathcal{W}_{\eta_j}^0(\mathcal{C}_{j\eta}^0, \mathcal{G}_{jk}^0) + \mathcal{W}_{\eta_j}^0(\mathcal{C}_{j\eta}^0, \mathcal{G}_{jk}^0) \mathcal{P}_j^0 = -\mathcal{G}_{jk}^0 \mathcal{C}_{jn}^0. \quad (2.80)$$

Ненулевые сингулярные числа кросс-грамианов $\mathcal{W}_{\eta_j}^0(\mathcal{C}_{j\eta}^0, \mathcal{G}_{jk}^0)$ позволяют дать полную апостериорную характеристику эффекта введения в систему регулятора, реализующего ЗУ в одной из форм (2.57), (2.62) и (2.63), осуществить апостериорное ранжирование варьируемых параметров.

Структурный метод может быть реализован и с использованием передаточных матриц (функций) "вход агрегированной системы – выход МТЧ" с последующим использованием аппарата анализа H^∞ . Так, аналогом (2.80) является передаточная функция

$$\Phi_{j\eta lk}(s) = \frac{\Delta \eta_{jl}(s)}{g_k(s)} = \mathcal{C}_{j\eta}^0 (sI - \mathcal{P}_j^0)^{-1} \mathcal{G}_{jk}^0, \quad (2.81)$$

для которой необходимо получить оценку нормы в H^∞ - пространстве.

Пример 2.6. Рассматривается система, представляющая собой объединение ОУ с передаточной функцией $W_{oy}(s) = \frac{1}{(s+1)s}$ и регулятора, доставляющего матрице $F = A - BK$ распределение мод Баттерворта с характеристической частотой $\omega_0 = 10 \text{ с}^{-1}$, так что ее собственные значения имеют реализацию $\lambda_{1,2} = -10(0,707 \pm j0,707)$.

Ставится задача сравнить по чувствительности реализации ЗУ в формах (2.62) и (2.63),

$$u(t) = K_g(1 + q_1)g(t) - K_y(1 + q_2)y(t) - K_x x(t), \quad (2.82)$$

$$u(t) = K_{\Sigma}(1 + q_3)\varepsilon(t) - K_x x(t), \quad (2.83)$$

применительно к дополнительному установившемуся движению по выходу при ступенчатом входном воздействии $g(t) = g_0 1(t)$. Модель (2.39) номинального ОУ характеризуется матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0].$$

Система (2.55) при номинальном значении вектора параметров $q = q_0 = 0$ характеризуется матрицами $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -14.1 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0]$. Система (2.55) при реализации ЗУ в форме (2.82)

имеет матрицы $F(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100(1+q_2) & -14.1 \end{bmatrix}; G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 100(1+q_1) \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0]$, а при реализации ЗУ в форме (2.83) –

$$F(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100(1+q_3) & -14.1 \end{bmatrix}; G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 100(1+q_3) \end{bmatrix}.$$

Агрегированные системы с векторами $\mathcal{X}_j^0 = \text{col}\{x, \sigma_j; j = \overline{1,3}\}$ (2.69)–(2.72) характеризуются матрицами

$$\mathcal{F}_1^0 = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q_1} & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & -14.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -100 & -14.1 \end{bmatrix}; \mathcal{G}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}; \mathcal{G}_{\eta_1}^0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

$$\mathcal{F}_2^0 = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q_2} & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & -14.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -100 & 0 & -100 & -14.1 \end{bmatrix}; \mathcal{G}_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathcal{G}_{\eta_2}^0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

$$\mathcal{F}_3^0 = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q_2} & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & -14.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -100 & 0 & -100 & -14.1 \end{bmatrix}; \mathcal{G}_3^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}; \mathcal{G}_{\eta_3}^0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0].$$

Для решения поставленной задачи используем структурный подход, основанный на аппарате передаточных функций, для которых

$$\Phi_{\eta_1 g}(s) = \frac{\Delta \eta_1(s)}{g(s)} = \mathcal{C}_{\eta_1}^0 (sI - \mathcal{A}_1)^{-1} \mathcal{G}_1^0 = \frac{100}{s^2 + 14,1s + 100};$$

$$\Phi_{\eta_2 g}(s) = \frac{\Delta \eta_2(s)}{g(s)} = \mathcal{C}_{\eta_2}^0 (sI - \mathcal{A}_2)^{-1} \mathcal{G}_2^0 = \frac{(100)^2}{(s^2 + 14,1s + 100)^2};$$

$$\Phi_{\eta_3 g}(s) = \frac{\Delta \eta_3(s)}{g(s)} = \mathcal{C}_{\eta_3}^0 (sI - \mathcal{A}_3)^{-1} \mathcal{G}_3^0 = \frac{100s(s + 14,1)}{(s^2 + 14,1s + 100)^2}.$$

Анализ установившегося значения функций чувствительности по выходу на основе их Лапласовых образов при скачкообразном входе $g(t) = g_0 l(t)$

$$\eta_j(s) = \Phi_{\eta_j}(s)g(s)$$

дает:

$$\eta_{1ycm} = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_1(t) = g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{\eta_1}(s) = g_0,$$

$$\eta_{2ycm} = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_2(t) = g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{\eta_2}(s) = -g_0,$$

$$\eta_{3ycm} = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_3(t) = g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{\eta_3}(s) = 0.$$

Таким образом, дополнительные движения по выходу в установившемся режиме при ступенчатом внешнем воздействии, соответственно при реализации закона управления в форме (2.82) и (2.83), получают представления

$$\Delta Y_{ycm}(t) = \eta_{1ycm} \Delta q_1 + \eta_{2ycm} \Delta q_2 = g_0 (\Delta q_1 - \Delta q_2),$$

$$\Delta Y_{ycm}(t) = \eta_{3ycm} \Delta q_2 = 0. \quad \square$$

В заключение рассмотрим возможности аппарата функций траекторной чувствительности к исследованию дополнительных движений по состоянию,

$$\Delta x(k, q_0, \Delta q) \stackrel{\Delta}{=} x(k, q_0 + \Delta q) - x(k, q_0) = \Sigma(k) \Delta q, \quad (2.84)$$

и выходу,

$$\Delta y(k, q_0, \Delta q) = y(k, q_0 + \Delta q) - y(k, q_0) = \Xi(k) \Delta q, \quad (2.85)$$

где k – дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности длительности Δt , для дискретных динамических систем на примере

$$x(k+1, q) = \bar{A}(q)x(k, q) + \bar{B}(q)u(k); x(0); y(k, q) = C(q)x(k, q). \quad (2.86)$$

Будем придерживаться концепции дискретного объекта управления (ДООУ), состоящей в том, что ДООУ (2.86) представляет собой дискретную по времени с интервалом дискретности длительности Δt выборку из непрерывных процессов по вектору состояния $x(t, q)$ и выходу $y(t, q)$ при фиксированном на интервале $t \in [\Delta tk, \Delta t(k+1)]$ значении управления $u(t) = u(\Delta tk) = u(k)$. Эта концепция связывает матрицы непрерывного (2.39) и дискретного ОУ (2.39) следующими функциональными соотношениями:

$$\bar{A}(q) = e^{A(q)\Delta t}; \bar{B}(q) = A^{-1}(q)(e^{A(q)\Delta t} - I)B(q); \bar{C}(q) = C(q), \quad (2.87)$$

если при выводе управления из устройства, его формирующего и осуществляющего цифро-аналоговое преобразование, можно пренебречь задержкой τ по сравнению с Δt . Если задержкой τ пренебречь нельзя, то размерность вектора ДООУ становится на τ больше размерности вектора состояния непрерывного ОУ, где r – размерность вектора управления, а матрицы модели (2.86) принимают вид

$$\bar{A}(q) = \begin{bmatrix} e^{A(q)\Delta t} & e^{A(q)\Delta t}(I - e^{A(q)\tau})A^{-1}(q)B(q) \\ O_{r \times n} & O_{r \times r} \end{bmatrix}; \bar{B} = \begin{bmatrix} (e^{A(q)(\Delta t - \tau)} - I)A^{-1}(q)B(q) \\ I_{r \times r} \end{bmatrix}, \quad (2.88)$$

$$\bar{C} = [C \quad 0_{m \times r}]. \quad (2.89)$$

Матрицы функций чувствительности $\Sigma(k)$ и $\Xi(k)$ строятся в форме (2.31), (2.32) на основе гипотезы о том, что в каждый дискретный момент времени векторы $x(k, q)$ и $y(k, q)$ дифференцируемы по q :

$$\Sigma(k) = \text{row} \left\{ \sigma_j(k) = \frac{\Delta \partial x(k, q)}{\partial q_j} \bigg|_{q=q_0}; j = \overline{1, p} \right\}, \quad (2.90)$$

$$\Xi(k) = \text{row} \left\{ \eta_j(k) = \frac{\Delta \partial y(k, q)}{\partial q_j} \bigg|_{q=q_0}; j = \overline{1, p} \right\}. \quad (2.91)$$

Модель траекторной чувствительности, необходимая для генерирования функций траекторной чувствительности $\sigma_j(k)$ и $\eta_j(k)$ $j = \overline{1, p}$ по состоянию и выходу ДООУ, строится путем дифференцирования компонентов представления (2.86) по компонентам q_j вектора параметров q при его номинальном значении, в результате чего для МТЧ получаем

$$\sigma(k+1) = \bar{A}\sigma(k) + \bar{A}_{q_j}x(k) + \bar{B}u(k); \sigma_j(0) = 0; \eta_{j(k)} = \bar{C}\sigma_j(k) + \bar{C}_{q_j}x(k). \quad (2.92)$$

Дальнейшее конструирование инструментария аппарата функций траекторной чувствительности осуществляется по той же схеме, что и в случае непрерывных ОУ.

Необходимо в заключение отметить, что векторно-матричное представление ДОУ в форме (2.86) с матричными компонентами (2.87) и (2.88), в явном виде содержащими такие чисто "дискретные" параметры, как интервал дискретности Δt и задержку τ вывода управления, заметно упрощает анализ процессов ДОУ, опирающийся на возможности аппарата функций траекторной чувствительности.

2.2.2. Функции чувствительности алгебраических и геометрических спектров матриц

Рассматривается $n \times n$ квадратная матрица $N(q)$, элементы которой $N_{il}(q) (i, l = \overline{1, n})$ зависят от параметров q_j , образующих p -мерный вектор $q = q_0 + \Delta q$ с номинальным значением q_0 . Очевидно, оказываются зависимыми от элементов q_j вектора параметров q $j = \overline{1, p}$ и элементы $\lambda_i(q)$ алгебраического спектра собственных значений матрицы $N(q)$

$$\sigma\{N(q)\} = \{\lambda_i(q) : \det[\lambda_i(q)I - N(q)] = 0; i = \overline{1, n}\},$$

становятся зависимыми от вектора параметров q и собственные векторы $\zeta_i(q)$ $N(q)\zeta_i(q) = \lambda_i(q)\zeta_i(q) : i = \overline{1, n}$.

Если для матрицы $N(q)$ построить сингулярное разложение, то получим представление

$$N(q) = U(q)\Sigma(q)V^T(q), \quad (2.93)$$

где $U(q), V(q)$ – ортогональные матрицы для $\forall q$, образующие левый и правый сингулярный базисы, $\Sigma(q)$ – диагональная для $\forall q$ матрица сингулярных чисел $\alpha_i(q)$

$$\Sigma(q) = \text{diag}\{\alpha_i(q); i = \overline{1, n}\}, \quad (2.94)$$

где сингулярные числа $\alpha_i(q) (i = \overline{1, n})$ вычисляются в силу соотношений

$$\alpha_i(q) = \left| \mu_i^{\frac{1}{2}}(q) \right| \det(\mu_i(q)I - N(q)N^T(q)) = \det(\mu_i(q)I - N^T(q)N(q)) = 0. \quad (2.95)$$

Таким образом, матрица $N(q)$ обладает алгебраическим спектром сингулярных чисел $\sigma_\alpha\{N(q)\} = \{\alpha_i(q) : i = \overline{1, n}\}$ и двумя геометрическими спектрами с элементами $U_i(q)$ и $V_i(q)$, образующими левый $U_i(q) = \text{row}\{U_i(q) : i = \overline{1, n}\}$ и правый $V_i(q) = \text{row}\{V_i(q) : i = \overline{1, n}\}$ сингулярные базисы.

Ставится задача конструирования функций чувствительности собственных значений

$$\lambda_{iq_j} = \frac{\Delta \partial \lambda_i(q)}{\partial q_j} \bigg|_{q=q_0}, \quad (2.96)$$

собственных векторов

$$\zeta_{iq_j} = \frac{\Delta \partial \zeta_i(q)}{\partial q_j} \bigg|_{q=q_0}, \quad (2.97)$$

сингулярных чисел

$$\alpha_{iq_j} = \frac{\Delta \partial \alpha_i(q)}{\partial q_j} \bigg|_{q=q_0}, \quad (2.98)$$

элементов левого сингулярного базиса

$$U_{iq_j} = \frac{\Delta \partial U_i(q)}{\partial q_j} \bigg|_{q=q_0}$$

и элементов правого сингулярного базиса $V_{iq_j} = \frac{\Delta \partial V_i(q)}{\partial q_j} \bigg|_{q=q_0}$ к вариациям

j -го элемента q_j вектора параметров q относительно номинального значения q_0 , с целью анализа чувствительности показателей качества динамической системы, сформированных в модальной или эллипсоидной формах. Основные результаты изложим в форме системы утверждений.

Утверждение 2.5. Пусть квадратная $n \times n$ матрица $N(q)$ является матрицей простой структуры при $q = q_0 + \Delta q$, где Δq не нарушает корректность аппарата чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка так, что справедливо матричное условие подобия, записываемое в форме

$$M(q)\Lambda(q) = N(q)M(q), \quad (2.99)$$

где $\Lambda(q) = \text{diag}\{\lambda_i(q) : i = \overline{1, n}\}$, $M(q)$ – матрица диагонального преобразования, тогда функция чувствительности λ_{iq_j} i -го

собственного значения $\lambda_i(q)$ к вариации j -го элемента q_j вектора параметров q относительно номинального значения q_0 может быть вычислена в силу соотношений

$$\lambda_{iq_j} = (M^{-1})^i N_{q_j}(M)_i = (M^{-1} N_{q_j} M)_{ii}. \quad (2.100)$$

В выражении (2.100) $M = M(q = q_0)$, $(M^{-1})^i$ – i -я строка матрицы (M^{-1}) , M_i – i -й столбец матрицы M , матрица N_{q_j} есть матрица чувствительности матрицы $N(q)$ к вариации параметра q_j , определяемая соотношением

$$N_{q_j} = \frac{\partial N(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0} = \text{row} \left\{ \text{col} \left(\frac{\partial N_{il}(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0} ; i = \overline{1, n} \right) ; i = \overline{1, n} \right\}. \quad \square (2.101)$$

Доказательство утверждения 2.5 приведено в приложении 4. ■

В процессе доказательства утверждения 2.5, по существу, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2.6. Матрица $N(q)$ приведения произвольной матрицы простой структуры $N(q)$ к диагональному виду $\Lambda(q)$ составлена из собственных векторов диагоналируемой матрицы так, что

$$\zeta_i(q) = M_i(q); i = \overline{1, n}. \quad \square (2.102)$$

Доказательство утверждения 2.6 содержится в представлении (п.6.2) условия подобия (2.99). ■

Соотношение (2.102) сводит задачу конструирования функции чувствительности ζ_{iq_j} (2.92) к задаче конструирования функций чувствительности M_{iq_j} i -го столбца матрицы $M(q)$ приведения к диагональному виду исходной матрицы простой структуры $N(q)$.

Утверждение 2.7. Функция чувствительности $\zeta_{iq_j} = M_{iq_j}$ i -го элемента геометрического спектра собственных векторов $\{\zeta_i(q) = M_i(q); i = \overline{1, n}\}$ матрицы простой структуры представлена в форме

$$\zeta_{iq_j} = M_{iq_j} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \gamma_{ik}^j M_k; \gamma_{ii}^j = 0, \quad (2.103)$$

где коэффициенты γ_{ik}^j линейного разложения M_{iq_j} по собственным векторам $M_k; (k = \overline{1, n}; k \neq i)$ определяются соотношениями

$$\gamma_{ik}^j = \frac{(M^{-1})^i N_{q_j} M_k}{\lambda_i - \lambda_k}; k \neq i: \gamma_{ii}^j = 0, \quad (2.104)$$

при этом соотношение (2.104) имеет эквивалентное представление

$$\gamma_{ik}^j = \frac{(M^{-1} N_{q_j} M)_{ik}}{\lambda_i - \lambda_k}; k = i: \gamma_{ii}^j = 0. \quad \square (2.105)$$

Доказательство утверждения 2.7 приведено в приложении 4. ■

Полученные результаты, строго говоря, справедливы для матрицы $N(q)$ простой структуры, имеющей вещественный спектр $\sigma\{N(q)\} = \{\lambda_i(q) = 0; i = \overline{1, n}\}$. Если в спектре $\sigma\{N(q)\}$ имеется хотя бы одна пара комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda_{1,2}(q) = \delta(q) \pm j\beta(q)$, то вещественная матрица подобия $N(q)$ будет блочно-диагональной, вида

$$N(q) = \begin{bmatrix} \delta(q) & \beta(q) & & \\ -\beta(q) & \delta(q) & & \\ & & O_{2 \times (n-2)} & \\ & & & diag\{\lambda_i(q); i = \overline{3, n}\} \end{bmatrix}. \quad (2.106)$$

Для вычисления функций чувствительности δ_{q_j} и β_{q_j} соответственно вещественных и мнимых частей комплексно-сопряженных собственных значений к вариациям параметра q_j следует вычислить матрицу $(M^{-1} N_{q_j} M)$ и на элементах этой матрицы сконструировать функции чувствительности δ_{q_j} и β_{q_j} с помощью соотношений

$$\delta_{q_j} = \frac{1}{2} \left\{ (M^{-1} N_{q_j} M)_{11} + (M^{-1} N_{q_j} M)_{22} \right\}, \quad (2.107)$$

$$\beta_{q_j} = \frac{1}{2} \left\{ (M^{-1} N_{q_j} M)_{12} - (M^{-1} N_{q_j} M)_{21} \right\}. \quad (2.108)$$

Нетрудно видеть, что на функциях чувствительности собственных значений $\lambda_{i q_j}$ матрицы простой структуры $N(q)$, именуемых также функциями модальной чувствительности, может быть сконструирована матрица S_λ модальной чувствительности

$$S_\lambda = row\{col\{\lambda_{i q_j}; i = \overline{1, n}\}; j = \overline{1, p}\}. \quad (2.109)$$

Столбцы матрицы модальной чувствительности S_λ составлены из функций чувствительности всех собственных значений (мод) $\lambda_{i q_j}$ к вариациям одного параметра q_j ($j = \overline{1, p}$), строки этой матрицы составлены из функций чувствительности одного собственного

значения $\lambda_i(q)$ к вариациям всех параметров q_j . Если на векторе $\Delta q = \text{col}\{\Delta q_j; j = \overline{1, p}\}$ вариаций вектора параметров q относительно номинальных значений сконструировать вектор $\Delta \lambda = \text{col}\{\Delta \lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ вариаций собственных значений, то эти векторы оказываются связанными соотношением

$$\Delta \lambda(q_0, \Delta q) = S_\lambda \Delta q. \quad (2.110)$$

Векторно-матричное соотношение (2.110) позволяет дать исчерпывающее решение задачи оценки вариации собственных значений матрицы $N(q)$. Тогда, если воспользоваться сингулярным разложением матрицы модальной чувствительности

$$S_\lambda = U_\lambda \Sigma_\lambda V_\lambda^T, \quad (2.111)$$

при этом выделить согласованные тройки $\{U_{\lambda \max}, \alpha_{\lambda \max}, V_{\lambda \max}\}$ $\{U_{\lambda \min}, \alpha_{\lambda \min}, V_{\lambda \min}\}$, то на фиксированной в сфере $\|\Delta q\| = \text{const}$ в пространстве параметров могут быть получены оценки

$$\max_{\Delta q} \|\Delta \lambda\| = \alpha_{\lambda M} \|\Delta q\|, \quad (2.112)$$

$$\min_{\Delta q} \|\Delta \lambda\| = \alpha_{\lambda m} \|\Delta q\| \quad (2.113)$$

максимальной и минимальной по норме вариации собственных значений, при этом правые сингулярные векторы $V_{\lambda \max}$ и $V_{\lambda \min}$ задают наиболее неблагоприятное и наименее неблагоприятное сочетание параметров, порождающих соответственно вариации (2.112) и (2.113).

Если задача (2.111) решается покомпонентно, то для оценок максимально достижимой вариации $\Delta \lambda_i$ собственного значения λ_i при вариации Δq вектора параметров можно воспользоваться соотношением

$$\max_{\Delta q} \|\Delta \lambda\| = \sum_{j=1}^p \lambda_{i q_j} |\Delta q_j| \text{sgn} \lambda_{i q_j}. \quad (2.114)$$

Основной областью использования аппарата функций чувствительности собственных значений являются системы, при синтезе которых для достижения желаемых показателей качества процессов использованы корневые (модальные) методы. Наиболее характерными представителями таких систем являются системы, которые просинтезированы методами модального управления.

Пример 2.7. В качестве примера матрицы $N(q)$ рассмотрим матрицу $F(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10(1+q_1) & -7(1+q_2) \end{bmatrix}$ состояния системы, спроектированной методами модального управления так, что при номинальных значениях параметров $q_{10}=0, q_{20}=0$ матрица F имеет спектр собственных значений $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -5\}$, и ее степень устойчивости $\eta = -2$. Для анализа модальной чувствительности спроектированной системы произведем следующие вычисления.

Вычисление матриц чувствительности $(F(q))_{q_j}; j = \overline{1,2}$, методом прямого дифференцирования дает

$$F_{q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} F(q) \Big|_{q=q_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}; F_{q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2} F(q) \Big|_{q=q_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Вычисление $M : M\Lambda = FM$, где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -5\}$, дает реализацию матрицы M в форме матрицы Вандермонда

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix},$$

откуда $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Вычисление матриц:

$$M^{-1}F_{q_j}M \Big|_{j=1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & -\frac{10}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix};$$

$$M^{-1}F_{q_j}M \Big|_{j=2} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{3} & \frac{35}{3} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{35}{3} \end{bmatrix}.$$

В силу (2.100) получаем функции модальной чувствительности $\lambda_{1q_1} = -\frac{10}{3}; \lambda_{1q_2} = \frac{14}{3}; \lambda_{2q_1} = \frac{10}{3}; \lambda_{2q_2} = -\frac{35}{3}$. Матрица модальной чувствительности S_λ получает представление

$$S_{\lambda} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{35}{3} \end{bmatrix}.$$

Сингулярное разложение матрицы S_{λ} принимает вид

$$S_{\lambda} = U_{\lambda} \Sigma_{\lambda} V_{\lambda}^T = \begin{bmatrix} 0,4118 & 0,8817 \\ -0,8817 & 0,4118 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13,34 & 0 \\ 0 & 1,807 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,3489 & 0,9373 \\ 0,9373 & -0,3489 \end{bmatrix},$$

которое в силу (2.112), (2.113) дает оценки

$$\begin{aligned} \max_{\Delta q} \|\Delta \lambda\| &= 13,34 \|\Delta q\|, \\ \min_{\Delta q} \|\Delta \lambda\| &= 1,807 \|\Delta q\|. \end{aligned}$$

Наиболее неблагоприятное сочетание вариаций параметров характеризуется вектором

$$\Delta q = \begin{bmatrix} -0,3489 \\ 0,9373 \end{bmatrix} \|\Delta q\|,$$

наименее неблагоприятное сочетание вариаций параметров характеризуется вектором

$$\Delta q = \begin{bmatrix} 0,9373 \\ -0,3489 \end{bmatrix} \|\Delta q\|.$$

Максимальная вариация $\Delta \lambda_1$ собственного значения λ_1 задается в силу первой строки матрицы S_{λ} соотношением

$$\Delta \lambda_1 = \frac{10}{3} |\Delta q_1| + \frac{14}{3} |\Delta q_2|,$$

максимальная вариация $\Delta \lambda_2$ собственного значения λ_2 задается в силу второй строки матрицы S_{λ} соотношением

$$\Delta \lambda_2 = \frac{10}{3} |\Delta q_1| + \frac{35}{3} |\Delta q_2|.$$

Нетрудно видеть, что при вариациях Δq_1 и Δq_2 , одновременно принимающих значения $\Delta q_1 = -0,25$ и $\Delta q_2 = 0,25$, т.е. при вариациях реальных значений системных параметров, образующих матрицу F , составляющих 25% от номинальных, противоположных знаков, спроектированная система оказывается на границе устойчивости. □

Обратимся теперь к вычислению функций чувствительности к вариациям j -го компонента q_j вектора параметров q элементов $\alpha_i(q)$ алгебраического вектора $\sigma_\alpha\{N(q)\}$ сингулярных чисел и элементов $U_i(q)$ и $V_i(q)$ левого и правого сингулярных базисов матрицы $N(q)$. Заметим, что при решении этой задачи можно снять требования к матрице $N(q)$ быть квадратной и матрицей простой структуры.

Утверждение 2.8. Функция чувствительности α_{iq_j} сингулярного числа $\alpha_i(q) \in \sigma_\alpha\{N(q)\}$ к вариации j -го компонента q_j вектора параметров q относительно его номинального значения q_0 может быть вычислена в силу соотношения

$$\alpha_{iq_j} = (U^T)^i N_{q_j} V_i = (U^T N_{q_j} V)_{ii} \quad \square \quad (2.115)$$

Доказательство утверждения приведено в приложении 4. ■

Утверждение 2.9. Функции чувствительности U_{iq_j} и V_{iq_j} i -х элементов левого $U(q)$ и правого $V(q)$ сингулярных базисов матрицы $N(q)$ к вариации компонента q_j вектора параметров α_{iq_j} могут быть представлены в аддитивных формах

$$U_{iq_j} = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik}^j U_{ik} \text{ и } V_{iq_j} = \sum_{k=1}^n \rho_{ik}^j V_i; \quad j = \overline{1, p}, \quad (2.116)$$

где γ_{ik}^j и ρ_{ik}^j – коэффициенты разложения U_{iq_j} и V_{iq_j} по элементам базиса U и V соответственно – задаются соотношениями

$$\gamma_{ik}^j = \frac{\alpha_i (U^T)^k N_{iq_j} V_i + \alpha_k (U^T)^i N_{iq_j} V_k}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}; \quad i \neq k; \quad \gamma_{ii}^j = 0, \quad (2.117)$$

$$\rho_{ik}^j = \frac{\alpha_i (U^T)^i N_{iq_j} V_i + \alpha_k (U^T)^k N_{iq_j} V_k}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}; \quad i \neq k; \quad \rho_{ii}^j = 0. \quad \square \quad (2.118)$$

Доказательство утверждения 2.9 строится по той же схеме, что и доказательство утверждения 2.7, здесь оно опущено. ■

Нетрудно видеть, что на функциях чувствительности λ_{iq_j} сингулярных чисел $N(q)$ может быть построена матрица S_α сингулярной чувствительности

$$S_\alpha = \text{row}\{ \text{col}\{ \alpha_{iq_j}; i = \overline{1, n} \} \}. \quad (2.119)$$

Строки S_α^i матрицы S_α (2.119) составлены из функций чувствительности α_{iq_j} сингулярного числа $\alpha_i(q)$ к вариации всех

компонентов q_j вектора q . Столбцы $S_{\alpha l}$ матрицы S_α составлены из функций чувствительности $\alpha_{l q_j}$ $l = \overline{1, n}$ всех сингулярных чисел к вариации одного компонента q_j вектора параметров. Если ставится задача оценки α^* наиболее чувствительного сингулярного числа, то это также можно сделать с помощью функционала $J_{S_\alpha}^i = \|S_{\alpha_i}^i\|$, $i = \overline{1, n}$; в форме

$$\alpha^* = \arg \max_i J_{S_\alpha}^i. \quad (2.120)$$

Если ставится задача оценки доминирующего параметра q^* , то это можно сделать с помощью функционала $J_{S_{\alpha_j}} = \|S_{\alpha_j}\|$; $j = \overline{1, p}$ в форме

$$q^* = \arg \max_j J_{S_{\alpha_j}}. \quad (2.121)$$

Если на векторе $\Delta q = \text{col}\{\Delta q_j; j = \overline{1, p}\}$ вариаций параметров q относительно номинального значения q_0 построить вектор $\Delta \alpha = \text{col}\{\Delta \alpha_i; i = \overline{1, n}\}$ вариаций сингулярных чисел, то эти векторы оказываются связанными соотношениями

$$\Delta \alpha(q_0, \Delta q) = S_\alpha \Delta q. \quad (2.122)$$

Если теперь построить сингулярное разложение матрицы S_α сингулярной чувствительности

$$S_\alpha = U_\alpha \Sigma_\alpha V_\alpha^T, \quad (2.123)$$

при этом выделить согласованные тройки $\{U_{\alpha \max}, \alpha_{\alpha \max}, V_{\alpha \max}\}$ и $\{U_{\alpha \min}, \alpha_{\alpha \min}, V_{\alpha \min}\}$, то на фиксированной сфере $\|\Delta q\| = \text{const}$ в пространстве параметров могут быть сконструированы оценки

$$\max_{\Delta q} \|\Delta \alpha\| = \alpha_{\alpha M} \|\Delta q\|, \quad (2.124)$$

$$\min_{\Delta q} \|\Delta \alpha\| = \alpha_{\alpha m} \|\Delta q\| \quad (2.125)$$

максимальной и минимальной по норме вариации сингулярных чисел $N(q)$, при этом правые сингулярные векторы $V_{\alpha \max}$ и $V_{\alpha \min}$ задают наиболее неблагоприятное и наименее неблагоприятное сочетание вариаций Δq_j ($j = \overline{1, p}$) параметров, порождающих вариации $\Delta \alpha$ соответственно с нормами (2.124) и (2.125).

Если задача (2.122) решается покомпонентно, то максимальная вариация $\Delta \alpha_i$, достижимая на векторе $\Delta q = \text{col}\{\Delta q_j; j = \overline{1, p}\}$, определится соотношением

$$\max_{\Delta q} \|\Delta \alpha_i\| = \sum_{j=1}^p \alpha_{iqj} |\Delta q| \operatorname{sgn} \alpha_{iqj}. \quad (2.126)$$

Пример 2.8. Проиллюстрируем технологию вычисления функций чувствительности α_{iqj} сингулярных чисел $\alpha_i(q)$ на примере матрицы

$$N(q) = \begin{bmatrix} -2(1+q_1) & 1 \\ 0 & -5(1+q_2) \end{bmatrix}, q_{10} = q_{20} = 0.$$

Матрица $N(q)$ является треугольной, следовательно, ее диагональные элементы совпадают с собственными значениями $\lambda_i(q)$ матрицы. По условию задачи варьируемыми элементами матрицы $N(q)$ являются только диагональные элементы, поэтому решение задачи вычисления функций чувствительности сингулярных чисел $\lambda_i(q)$ позволяет установить связь вариаций сингулярных чисел матрицы с вариациями ее собственных значений.

Следуя изложенной процедуре, заложенной в соотношении (2.116), произведем вычисления.

$$N_{q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} N(q) \Big|_{q=q_0} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad N_{q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2} N(q) \Big|_{q=q_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix};$$

$$U, V : N = U \Sigma V^T, \text{ где } \Sigma = \operatorname{diag} \left\{ \alpha_i = \left| \mu_i^{1/2} \right|; \mu_i : \det(MI - N^T N) = 0 \right\}$$

$$U_i : (NN^T)U_i = \alpha_i^2 U_i; \|U_i\| = 1; V_i : (N^T N)V_i = \alpha_i^2 V_i; \|V_i\| = 1$$

$$N^T N = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 26 \end{bmatrix}; \quad NN^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 25 \end{bmatrix};$$

$$\sigma\{NN^T\} = \sigma\{N^T N\} = \{\alpha_1^2 = 26,2; \alpha_2^2 = 3,8\};$$

$$\Sigma = \operatorname{diag} \{\alpha_1 = 5,17; \alpha_2 = 1,954\};$$

$$U = [U_1 \quad U_2] = \begin{bmatrix} -0,2298 & 0,9732 \\ 0,9732 & 0,2298 \end{bmatrix}; \quad V = [V_1 \quad V_2] = \begin{bmatrix} 0,0898 & 0,9959 \\ 0,9959 & 0,0898 \end{bmatrix}.$$

Вычисление матриц:

$$U^T N_{q_1} V = \begin{bmatrix} -0,2298 & 0,9732 \\ 0,9732 & 0,2298 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0898 & 0,9959 \\ 0,9959 & 0,0898 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0413 & 0,4577 \\ 0,1748 & -1,9384 \end{bmatrix},$$

$$U^T N_{q_2} V = \begin{bmatrix} -0,2298 & 0,9732 \\ 0,9732 & 0,2298 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0898 & 0,9959 \\ 0,9959 & 0,0898 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,846 & -0,437 \\ -1,1443 & -0,1032 \end{bmatrix}$$

Из полученных матриц в силу (2.116) получаем функции чувствительности сингулярных чисел

$$\alpha_{1q_1} = (U^T N_{q_1} V)_{11} = -0,0413; \quad \alpha_{2q_1} = (U^T N_{q_1} V)_{22} = -1,9384,$$

$$\alpha_{1q_2} = (U^T N_{q_2} V)_{11} = -4.846; \alpha_{2q_2} = (U^T N_{q_2} V)_{22} = -0.1032.$$

Матрица сингулярной чувствительности S_α получает реализацию

$$S_\alpha = \begin{bmatrix} -0.0413 & -4.846 \\ -1.9384 & -0.1032 \end{bmatrix},$$

которая характеризуется абсолютными нормами строк и столбцов

$$\|S_\alpha^1\| = 4.8873; \|S_\alpha^2\| = 2.0416; \|S_{\alpha 1}\| = 1.9797; \|S_{\alpha 2}\| = 4.9492.$$

Полученные значения норм позволяют сделать вывод, что наиболее чувствительным является сингулярное число $\alpha_1 = 517$, а доминирующим параметром является q_2 . Заметим, что сингулярные числа обладают большей параметрической робастностью (меньшей чувствительностью) по сравнению с собственными значениями, их вариации связаны соотношениями

$$\Delta\alpha_1 = -0.0413\Delta\lambda_1, \Delta\alpha_2 = -0.1032\Delta\lambda_2.$$

□

Основной прикладной областью аппарата функций чувствительности сингулярных чисел является анализ чувствительности эллипсоидных показателей качества объектов и систем управления. Эллипсоидные показатели конструируются на эллипсоидных мажорантах и минорантах эллипсоидного покрытия векторных процессов по состоянию, выходу и ошибке. Эллипсоидные мажоранты и миноранты позволяют скаляризовать векторные процессы. Математически эллипсоидные мажоранта и миноранта представляют собой соответственно максимальный и минимальный элементы алгебраического спектра сингулярных чисел некоторой критериальной матрицы N , сводящей описание процессов в исследуемом объекте или системе к линейной (локально линейной) алгебраической задаче, записываемой или в векторно-матричной форме

$$k = N\chi, \tag{2.127}$$

или в скалярной форме

$$k^T k = \chi^T N^T N_\chi, \tag{2.128}$$

где $\dim k = \nu$, $\dim \chi = e$, $N - (\nu \times e)$ – критериальная матрица.

Если в (2.127) и (2.128) перейти к евклидовым векторным нормам, то для обеих форм в силу отношения Релея становятся справедливыми неравенства

$$\alpha_m\{N\} \leq \frac{\|\kappa\|}{\|\chi\|} \leq \alpha_M\{N\}, \quad (2.129)$$

здесь $\alpha_m\{N\}, \alpha_M\{N\}$ – соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы N .

Задача в форме (2.127) при исследовании процессов в динамических системах оказывается параметризованной временем t так, что представление (2.127) принимает вид

$$\kappa(t) = N(t)\chi(0), \quad (2.130)$$

что приводит к соотношениям по евклидовым нормам, записываемым в форме

$$\alpha_m\{N(t)\} \leq \frac{\|\kappa(t)\|}{\|\chi_0\|} \leq \alpha_M\{N(t)\}. \quad (2.131)$$

В неравенствах (2.131) $\alpha_m\{N(t)\}, \alpha_M\{N(t)\}$ задают соответственно нормализованные эллипсоидные миноранту и мажоранту векторного процесса $x(t)$, порожденного вектором χ_0 начального состояния, принадлежащего сфере $\|\chi_0\| = 1$.

Если критериальная матрица N в (2.130) параметризована не только временем, но и вектором параметров $q = q_0 + \Delta q$, тогда (2.130) принимает вид

$$\kappa(t, q) = N(t, q)\chi(0); N(t, q = q_0) = N(t). \quad (2.132)$$

Соотношение (2.132) позволяет записать для (2.131)

$$\alpha_m\{N(t, q)\} \stackrel{\Delta}{=} \alpha_{Nm}(t, q) \leq \frac{\|\kappa(t, q)\|}{\|\chi(0)\|} \leq \alpha_{NM}(t, q) \stackrel{\Delta}{=} \alpha_M\{N(t, q)\}. \quad (2.133)$$

Эллипсоидные миноранта $\alpha_{Nm}(t, q)$ и мажоранта $\alpha_{NM}(t, q)$, параметризованные временем t и вектором параметров q , ставят задачу конструирования глобальной эллипсоидной мажоранты

$$\max_{\Delta q} \alpha_{NM}\{t, q = q_0 + \Delta q\} = \alpha_{NM}(t) + \max_{\Delta q} \Delta \alpha_{NM}\{t, q_0, \Delta q\}, \forall t \quad (2.134)$$

и глобальной эллипсоидной миноранты

$$\min_{\Delta q} \alpha_{Nm}\{t, q = q_0 + \Delta q\} = \alpha_{Nm}(t) - \max_{\Delta q} \Delta \alpha_{Nm}\{t, q_0, \Delta q\}, \forall t \quad (2.135)$$

с привлечением аппарата функций чувствительности сингулярных чисел критериальной матрицы $N(t, q)$ при условии, что $\|\Delta q\|$ не нарушает корректности аппарата чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка.

Для конструирования критериальных матриц $N(t)$ в случае возбуждения входа системы

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t); x(0); y(t) = Cx(t) \quad (2.136)$$

конечномерным внешним воздействием $g(t)$ воспользуемся положениями следующего утверждения.

Утверждение 2.10. Пусть система (2.136) возбуждается конечномерным внешним воздействием $g(t)$, генерируемым конечномерной автономной системой

$$\dot{z}(t) = \Gamma z(t), z(0), g(t) = Pz(t), \quad (2.137)$$

где $\Gamma \in R^{l \times l}$; $P \in R^{m \times l}$; $z \in R^l$; $g \in R^m$. Тогда, если матрица T удовлетворяет матричному уравнению Сильвестра

$$T\Gamma - FT = GP, \quad (2.138)$$

то для системы (2.136) оказываются справедливыми представления

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{Ft} & Te^{\Gamma t} - e^{Ft}T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = e^{Ft}x(0) + (Te^{\Gamma t} - e^{Ft}T)z(0) \quad (2.139)$$

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{Ft}x(0) + C(Te^{\Gamma t} - e^{Ft}T)z(0) \quad (2.140)$$

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t) = (P - CT)e^{\Gamma t}z(0) + Ce^{Ft}(Tz(0) - x(0)) \quad \square \quad (2.141)$$

Доказательство утверждения 2.10 приведено в приложении 4. ■

Нетрудно видеть, что представление (2.139)–(2.141) содержит несколько задач вида (2.130). Первая задача – для полного движения по вектору состояния, в которой следует в силу (2.130) и (2.139) положить

$$\chi(0) = [x^T(0), z^T(0)]^T; N(t) = [e^{Ft} \quad Te^{\Gamma t} - e^{Ft}T]; q(t) = x(t). \quad (2.142)$$

Вторая задача – для свободного движения по состоянию, для которой следует положить

$$\chi(0) = x(0); N(t) = e^{Ft}; q(t) = x(t). \quad (2.143)$$

Третья задача – для вынужденного движения по вектору состояния, для которого следует положить

$$\chi(0) = z(0); N(t) = Te^{\Gamma t} - e^{Ft}T; q(t) = x(t). \quad (2.144)$$

Нетрудно видеть, что задача (2.144) декомпозируется на задачу для установившегося движения по состоянию с компонентами

$$\chi(0) = z(0); N(t) = Te^{\Gamma t}; q(t) = x(t). \quad (2.145)$$

Аналогичные задачи вида (2.130) содержатся в представлении (2.140) для вектора выхода, в которых следует положить $q(t) = x(t); N(t) = Ce^{Ft}T; q(0) = x(0)$ для компонента свободного движения и $q(t) = x(t); N(t) = C(Te^{\Gamma t} - e^{Ft}T); \chi(0) = z(0)$ для компонента вынужденного движения соответственно. В представлении (2.141) для вектора ошибки интерес представляет установившаяся составляющая ошибки, в этом случае для сведения задачи к виду (2.130) следует положить $q(t) = \varepsilon(t), N(t) = (P - CT)e^{\Gamma t}$ и $\chi(0) = z(0)$.

Если матричные компоненты представления (2.136) зависят от вектора параметров $q = q_0 + \Delta q$ так, что они принимают вид $F(q)$ и $G(q)$, то перечисленные задачи сводятся к виду (2.132), в которой матрица $N(t, q)$ содержит матрицы $F(q)$ и $T(q)$. Следует заметить, что при вычислении матриц чувствительности F_{q_j} и T_{q_j} ($j = \overline{1, p}$) в первом случае используется дифференцирование $F(q)$ по q_j в точке $q = q_0$, а во втором T_{q_j} ищется как решение продифференцированного по q_j в точке $q = q_0$ уравнения Сильвестра (2.138), принимающего при $q \neq q_0$ вид

$$T(q)\Gamma - F(q)T(q) = G(q)P, \quad (2.146)$$

в результате чего получим

$$T_{q_j}\Gamma - FT_{q_j} = G_{q_j}P + F_{q_j}T; j = \overline{1, p}. \quad (2.147)$$

К задаче вида (2.127) сводится и задача анализа такого структурного свойства, как управляемость. В этом случае следует положить $\kappa = x(0), N = W_y$, где W_y – матрица управляемости, представляемая в виде

$$W_y = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad (2.148)$$

$\chi = V$ – вектор стратегии управления на интервале $T = [0, t_k]$, задаваемый в форме

$$V = \text{col} \left\{ -\int_0^{t_k} u(\tau) \beta_i(\tau) d(\tau); i = \overline{0, n-1} \right\},$$

где $\beta_i(-\tau): e^{-A\tau} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(-\tau)A^i$.

Вычисления минимального $\alpha_m \{W_y\}$ и максимального $\alpha_M \{W_y\}$ сингулярных чисел дают количественную оценку в виде минорант и

мажорант управляемости ОУ с парой матриц (A, B) . Связанные с этими сингулярными числами элементы $U_m\{W_y\}$ и $V_M\{W_y\}$ левого сингулярного базиса определяют положения подпространств наихудшей и наилучшей управляемости. Если матрицы ОУ зависят от вектора параметров $q = q_0 + \Delta q$, то пара $\{A(q), B(q)\}$ порождает матрицу управляемости

$$W_y(q) = \begin{bmatrix} B(q) & A(q)B(q) & A^2(q)B(q) & \dots & A^{n-1}(q)B(q) \end{bmatrix}. \quad (2.149)$$

Как следствие, зависимыми от q становятся и элементы алгебраического спектра $\sigma\{W_y(q)\} = \{\alpha_{yi}(q); i = \overline{1, n}\}$ сингулярных чисел, вычисление их функций чувствительности $\alpha_{yiq_j} (j = \overline{1, p})$ в точке $q = q_0$ позволяет построить матрицу чувствительности $S_\alpha\{W_y\}$, нормы $\|S_{\alpha_j}\{W_y\}\| (j = \overline{1, p})$ столбцов которой позволяет ранжировать параметры q_j по степени влияния на эллипсоидные оценки управляемости.

К задаче вида (2.128) приводят задачи конструирования на тройке матриц (A, B, C) системы управления (2.136) системных грамианов, вид которых приведен в приложении 7. Задача сводится к схеме с использованием мажорант и минорант, какими являются максимальное и минимальное сингулярные числа данного системного грамиана. Если тройки матриц ОУ и системы зависят от вектора параметров q так, что они принимают вид $\{A(q), B(q), C(q)\}, \{F(q), G(q), C(q)\}$ соответственно, то функции чувствительности эллипсоидных мажорант и минорант эллипсоидных покрытий, порождаемых эволюционирующими грамианами, определяются в силу алгоритмов вычисления функций чувствительности корня квадратного $\alpha_M^{1/2}(\ast)$ и $\alpha_m^{1/2}$ экстремальных сингулярных чисел системного грамиана (\ast) .

К задаче вычисления системных грамианов примыкает задача вычисления матриц дисперсий (ковариаций) вектора состояния

$$D_x^\Delta = M\{x(t)x^T(t)\}, \quad (2.150)$$

где $M\{(\ast)\}$ – операция вычисления математического ожидания процесса (\ast) , системы (2.136), возбуждаемой внешним стохастическим воздействием $g(t) = \omega(t)$, стационарным в широком смысле, с

матрицей интенсивности Q как решения матричного уравнения типа уравнения Ляпунова

$$FD_x + D_x F^T = -GQG^T. \quad (2.151)$$

Если построить SVD-разложение матрицы дисперсий D_x , выделить две согласованные тройки $\{\alpha_M(D_x), U_M, V_M\}$ и $\{\alpha_m(D_x), U_m, V_m\}$, то эллипсоидные мажоранты и миноранты эллипсоидов правдоподобия хорошо скаляризуют векторные стохастические процессы. Зависимость $F(q), G(q)$ матриц системы (2.136) от вектора параметров $q = q_0$ порождает задачу параметрической чувствительности эллипсоидных показателей качества процессов по дисперсии вектора состояния $\alpha_M\{D_x(q)\}$ и $\alpha_m\{D_x(q)\}$, которая решается с использованием аппарата функций чувствительности сингулярных чисел. Нетрудно видеть, что в случае необходимости анализировать поведение системы по стохастическим компонентам вектора $y(t)$ эта задача сводится к предыдущей. Действительно, оказывается справедливой цепочка равенств

$$D_y \stackrel{\Delta}{=} M\{y(t)y^T(t)\} = CM\{x(t)x^T(t)\}C^T = CD_x C^T. \quad (2.152)$$

В случае зависимости $y(t, q)$ в силу $F(q), G(q)$ становится справедливым соотношение

$$D_y(q) = CD_x(q)C^T, \quad (2.153)$$

и задача с помощью эллипсоидных мажоранты и миноранты сводится к анализу чувствительности сингулярных чисел матрицы $D_y(q)$.

Задача анализа параметрической чувствительности корреляционных свойств стохастических процессов по вектору состояния и выхода системы также сводится к анализу чувствительности сингулярных чисел корреляционных матриц $R_x(\tau)$ и $R_y(\tau)$, для которых оказываются справедливыми соотношения

$$R_x(\tau) \stackrel{\Delta}{=} M\{x(t+\tau)x^T(t)\} = M\{e^{F\tau}x(t)x^T(t)\} = e^{F\tau}D_x, \tau > 0, \quad (2.154)$$

$$R_y(\tau) \stackrel{\Delta}{=} M\{y(t+\tau)y^T(t)\} = Ce^{F\tau}D_x C^T = CR_x(\tau)c^T, \tau > 0. \quad (2.155)$$

Экстремальные элементы алгебраических спектров сингулярных чисел корреляционных матриц $R_x(\tau)$ и $R_y(\tau)$ порождают скалярные мажоранту и миноранту корреляционных функций, с помощью которых строится мажоранта τ_{KM} и миноранта τ_{km} интервала корреляции. Если матричные компоненты модели системы (2.136)

оказываются параметризованными вектором $q = q_0 + \Delta q$ в форме $F(q)$ и $G(q)$, то становятся параметризованы q и матрицы в (2.154), (2.155), что приводит к представлениям

$$R_x(\tau, q) = e^{F(q)\tau} D_x(q); \quad R_y(\tau, q) = C R_x(\tau) c^T, \tau > 0. \quad (2.156)$$

Дальнейшее исследование параметрической чувствительности корреляционных свойств системы (2.136) должно быть произведено применительно к сингулярным числам $\alpha_M \{R_y(\tau, q)\}$, $\alpha_m \{R_x(\tau, q)\}$, $\alpha_M \{R_y(\tau, q)\}$ и $\alpha_m \{R_x(\tau, q)\}$.

И наконец, завершая рассмотрение возможностей аппарата чувствительности сингулярных чисел, рассмотрим сферу его применения на матрицы спектральных плотностей ММО-систем вида (2.136), опираясь на положения следующего утверждения.

Утверждение 2.11. Матрицы спектральных плотностей системы (2.136) по состоянию $S_x(j\omega)$ и по выходу $S_y(j\omega)$, определяемые соотношениями

$$S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (2.157)$$

$$S_y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int C R_x(\tau) C^T e^{-j\omega\tau} d\tau = C S_x(j\omega) C^T, \quad (2.158)$$

могут быть вычислены с помощью выражений

$$S_x(j\omega) = -2F(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x, \quad (2.159)$$

$$S_y(j\omega) = C S_x(j\omega) C^T = -2CF(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x C^T \quad \square \quad (2.160)$$

Доказательство утверждения 2.11 приведено в приложении 4. ■

Полученные матрицы скаляризуются элементами алгебраических спектров их сингулярных чисел $\sigma_\alpha \{S_x(j\omega)\}$ и $\sigma_\alpha \{S_y(j\omega)\}$, причем использование их экстремальных элементов становится основой конструирования $S_{xM}(j\omega), S_{xm}(j\omega), S_{yM}(j\omega), S_{ym}(j\omega)$ – соответственно эллипсоидных мажорант и минорант функций спектральных плотностей ММО-систем по состоянию и выходу. Вариация Δq , вектора параметров $q = q_0 + \Delta q$ матричных компонентов представления системы (2.136) приводит к вариациям эллипсоидных мажорант и минорант спектральных плотностей, которые могут быть оценены с помощью аппарата функций чувствительности сингулярных чисел.

Таким образом, аппарат функций чувствительности алгебраических и геометрических спектров проблемно-ориентированной критериальной матрицы решает основные задачи

анализа процессов в динамических системах, допускающих линейное (локально-линейное) модельное представление (2.136), а также объекта управления на предмет априорного ранжирования его параметров, которые могут претерпевать вариации. Более того, результаты получены в терминах функций чувствительности, а с небольшой модификацией могут быть записаны и в терминах конечных приращений.

2.2.3. Оценка чувствительности с помощью чисел обусловленности матриц

Число обусловленности как одна из количественных характеристик квадратных матриц является одним из матричных инвариантов, т.е. существенным образом зависит от базиса представления матрицы. Это обстоятельство обнаружило возможность использования чисел обусловленности матриц для решения большого круга алгебраических задач, связанных с оценкой чувствительности матричных процедур к погрешностям представления компонентов этих процедур. Ниже рассматриваются возможности использования числа обусловленности для оценки потенциальной чувствительности модельных представлений объектов и систем управления с целью построения робастных моделей, а также для оценки вариаций элементов алгебраического спектра собственных значений матрицы состояния динамической системы при оцененной погрешности представления этой матрицы. Полученные оценки относятся к классу экспресс-оценок, они должны конструироваться на начальном этапе процесса математического проектирования системы.

Основные результаты изложим в виде системы утверждений.

Утверждение 2.12. Рассмотрим линейную алгебраическую задачу (ЛАЗ)

$$k = N\chi, \quad (2.161)$$

в которой векторы $k, \chi \in R^m$; N – квадратная матрица, согласованная по размерности с вектором k и χ , $N \in R^{m \times m}$.

Предположим, что вектор χ в результате процедур измерения компонентов, округления, представления в вычислительной среде компьютера и т.д. получил погрешность $\Delta\chi$ его представления. Предположим, что по тем же причинам с погрешностью ΔN известна и матрица N . Как следствие, решение линейной алгебраической задачи (2.161) в виде вектора k приобретает вариацию, удовлетворяющую матричному уравнению в вариациях

$$\Delta k = N\Delta\chi + \Delta N\chi + \Delta N\Delta\chi. \quad (2.162)$$

Если перейти от абсолютных погрешностей (вариаций) $\Delta \kappa, \Delta N, \Delta \chi$ к относительным, задав их соотношениями

$$\delta_\theta \stackrel{\Delta}{=} \frac{\|\Delta \kappa\|}{\|\kappa\|}; \delta_N \stackrel{\Delta}{=} \frac{\|\Delta N\|}{\|N\|}; \delta_\chi \stackrel{\Delta}{=} \frac{\|\Delta \chi\|}{\|\chi\|}, \quad (2.163)$$

то относительные погрешности (2.163) в силу (2.162) оказываются связанными неравенством

$$\delta_\theta \leq C\{N\}(\delta_\chi + \delta_N + \delta_N \delta_\chi), \quad (2.164)$$

где $C\{N\}$ – число обусловленности матрицы N , задаваемое соотношением

$$C\{N\} \stackrel{\Delta}{=} \|N\| \|N^{-1}\|. \quad \square \quad (2.165)$$

Доказательство утверждения 2.12 приведено в приложении 4. ■

Заметим, что число обусловленности (2.165) матрицы N численно зависит от выбранной матричной нормы, но при любой норме минимальное его значение равно единице ($\min_N C\{N\} = 1$), что соответствует случаю идеальной обусловленности матрицы N , а максимальное его значение равно бесконечности ($\max_N C\{N\} = \infty$), что соответствует случаю вырожденности матрицы N . Если в качестве матричных норм $\|N\|$ и $\|N^{-1}\|$ при вычислении числа обусловленности (2.165) используются спектральные нормы матриц N и N^{-1} , то (2.165) принимает вид

$$C\{N\} \stackrel{\Delta}{=} \|N\| \|N^{-1}\| = \alpha_M(N) \alpha_m^{-1}(N), \quad (2.166)$$

где $\alpha_M(N), \alpha_m(N)$ – соответственно наибольшее и наименьшее сингулярные числа матрицы N . Выражение (2.166) имеет прозрачную геометрическую интерпретацию. Так, если с помощью (2.161) отображается сфера $\|\chi\| = \text{const}$ в эллипсоид с полуосями максимальной длины $\alpha_M(N)\|\chi\|$ и минимальной длины $\alpha_m(N)\|\chi\|$, то число обусловленности, вычисленное в силу (2.166), определяет степень деформации сферы при этом отображении. Если в SVD-разложении матрицы N выделить две тройки $\{U_m, \alpha_m(N), V_m\}$ и $\{U_M, \alpha_M(N), V_M\}$, то максимальная относительная погрешность δ_κ в задаче (2.161) имеет место, когда номинальный вектор $\chi \in \varphi\{V_m\}$, а вектор погрешности $\Delta \chi \in \varphi\{V_M\}$, где $\varphi\{*\}$ – линейная оболочка, натянутая на систему векторов (*). Следует сказать, что число обусловленности в форме (2.166) допускает расширение его трактовки

путем введения сепаратных чисел $C_1\{N\}$ обусловленности матрицы N , определяемых как

$$C_1\{N\} = \alpha_m(N) \alpha_1^{-1}(N), \quad (2.167)$$

где $\alpha_1(N) - 1$ - e^1 сингулярное число, совпадающее с глобальным (2.166), когда "1" принимает смысл " m ". Наличие сепаратных чисел обусловленности (2.167) позволяет контролировать всю картину деформации сферы $\|\chi\| = \text{const}$ при отображении (2.161) с матрицей N .

Возвращаясь к основному результату утверждения 2.12 (2.164), следует сказать, что содержательно число обусловленности $C\{N\}$ представляет собой коэффициент усиления относительных ошибок δ_χ и δ_N задания (знания) компонентов ЛАЗ (2.161). Следует также заметить, что в силу определения (2.165) числа обусловленности прямая (2.161) и обратная ЛАЗ $\chi = N^{-1}q$ оказываются обусловленными так, как

$$C\{N^{-1}\} = \|N^{-1}\| \|(N^{-1})^{-1}\| = \|N^{-1}\| \|N\| = C\{N\}. \quad (2.168)$$

Если матрица N является не квадратной, а прямоугольной, то для нее может быть введено обобщенное число обусловленности, задаваемое в форме

$$C\{N\} = \|N\| \|N^+\|, \quad (2.169)$$

где N^+ – матрица, псевдообратная к исходной матрице N .

Как указывалось в начале параграфа, одной из областей применения аппарата чисел обусловленности является построение хорошо обусловленных модельных представлений объектов и систем управления, обладающих матричными компонентами с минимальными числами обусловленности, а, следовательно, являющихся модельно робастными. Задача построения робастного модельного представления динамических систем в основном решается с помощью выбора базиса представления матриц системы и разумной ее размерности. Наибольшей модельной робастностью обладает внутреннее сбалансированное модельное (VCM) представление конструируемое на основе системного кросс-грамиана. Близкими к VCM представлению обладает представление, использующее диагональную (или блочно-диагональную) форму записи матрицы состояния системы. Низкой модельной робастностью

¹ в стандартной процедуре SVD – разложения, матрица сингулярных чисел организована так, что индексы α_i $i = 1, m$ растут по мере убывания сингулярных чисел.

обладает представлением системы, использующее в матрице состояния Фробениусов базис. Проблемы модельной робастности заметно возрастают с ростом размерности системы. Уже системы четвертого порядка требуют повышенного внимания к обусловленности матричных компонентов модели состояния, при размерностях системы 6–8 и выше проблема требует сверхвысокого внимания, особенно если алгоритмическое обеспечение задач синтеза опирается на решение линейных матричных уравнений.

Так, если в процессе синтеза закона управления приходится решать линейное матричное уравнение вида

$$PQ + QR = S$$

относительно матрицы Q , то в качестве оценки обусловленности этого уравнения с помощью числа обусловленности используется значение, вычисленное в силу соотношения

$$C\{MU\} = \max_{i,j} \{\alpha_i(P) + \alpha_j(R)\} \left[\min_{i,j} \{\alpha_i(P) + \alpha_j(R)\} \right]^{-1}, \quad (2.170)$$

где $C\{MU\}$ – число обусловленности матричного уравнения (МУ) вида (2.169), к коим относятся уравнения Ляпунова и Сильвестра.

Завершая рассмотрение затронутой проблемы, следует заметить, что числа $C\{(*)\} \geq 500\text{--}1000$ уже должны настораживать.

Пример 2.9. Рассмотрим ЛАЗ (2.161) с вектором χ и матрицей N , имеющими реализацию

$$\chi = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} -66 & 28 \\ 97 & -41 \end{bmatrix}.$$

Точное решение ЛАЗ (2.161) дает результат $\kappa = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Возмутим задачу погрешностью $\Delta\chi$ вектора χ : $\Delta\chi = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Таким образом, относительная погрешность δ_χ задания вектора χ в силу (2.163), если воспользоваться абсолютной нормой компонентов

$$\|\Delta\chi\| = \left\| \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = 0.01; \quad \|\chi\| = \left\| \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \right\| = 13.8,$$

составляет

$$\delta_\chi = \frac{0.01}{13.8} = 7.246 \cdot 10^{-4} \text{ (0.0724\%)}. \quad \delta_N = 0,$$

Оценим ожидаемую относительную погрешность δ_θ ЛАЗ (2.161), определяемую (2.164) при $\delta_N = 0$,

$$\delta_0 \leq C\{N\} \delta_\chi.$$

Для этого вычислим число обусловленности $C\{N\}$, используя столбцовую матричную норму для матрицы N и N^{-1} , имеющей представление

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix}$$

так, что $\|N\| = 163$, $\|N^{-1}\| = 13.8$, в результате чего для числа обусловленности $C\{N\}$ получаем в силу (2.165)

$$C\{N\} = \|N\| \|N^{-1}\| = 163 * 13.8 = 2249.9.$$

Таким образом, для δ_κ получим мажорирующую оценку

$$\delta_\kappa \leq 2249.4 * 7.246 * 10^{-4} = 1.63 (163\%).$$

Нетрудно видеть, что если неравенство близко к равенству, то следует ожидать мультиплицирования относительной ошибки δ_χ неточности знания вектора χ в относительную ошибку δ_0 вычисления в ЛАЗ (2.161) в 2249,4 раз. Проверим это точным решением возмущенной задачи (п. 6.35), которая в приращениях в силу (2.162) при $\Delta N = 0$ принимает вид

$$\Delta \theta = N \Delta \chi = \begin{bmatrix} -66 & 28 \\ 37 & -41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.66 \\ 0.97 \end{bmatrix}.$$

Вычисление абсолютных норм для векторов $\Delta \kappa$ и κ дает

$$\|\Delta \kappa\| = \left\| \begin{bmatrix} -0.66 \\ 0.97 \end{bmatrix} \right\| = 1.63, \|\kappa\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = 1.$$

Для относительной погрешности $\delta_0 = \frac{\|\Delta \theta\|}{\|\theta\|} = \frac{1.63}{1} = 1.63 (163\%).$

Сконструируем оценку $\hat{C}\{N\}$ с помощью неравенства (2.164) в предположении его близости к равенству, тогда получим

$$\hat{C}\{N\} = \frac{\delta_\kappa}{\delta_\chi} = \frac{1.63}{7.246} * 10^4 = 2249.4.$$

Таким образом, оценка $\hat{C}\{N\}$ числа обусловленности $C\{N\}$, полученная на основе содержательного его определения как коэффициента усиления относительной погрешности ЛАЗ (2161), совпала с вычисленной на основе определения (2.165) значением $C\{N\}$.

Итак, погрешность представления вектора χ в 0.07246%, в результате плохой обусловленности матрицы $N(C\{N\} = 2249.4)$ породила погрешность вычисленного вектора q в 163%, что ровно в 2249.4 раза больше погрешности исходных данных. ■

Теперь воспользуемся возможностями числа обусловленности матриц для оценки абсолютных вариаций элементов алгебраического спектра собственных значений при оцененной по норме погрешности представления исследуемой матрицы. Проблемно эта задача сориентирована на исследование модальной робастности, т.е. робастности спектра собственных значений матрицы $F = A - BK$ состояния системы ((2.137).

Для решения поставленной задачи воспользуемся следующим утверждением.

Утверждение 2.13. Пусть матрица F состояния системы является матрицей простой структуры, тогда оценка $\|\Delta F\|$ вариации ΔF матрицы F и оценка $\|\Delta \lambda\|$ вариации $\Delta \lambda = \text{col}\{\Delta \lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ вектора собственных значений $\lambda = \text{col}\{\lambda_i : \det(\lambda I - F) = 0; i = \overline{1, n}\}$, порождаемая вариацией ΔF , связаны неравенством

$$\|\Delta \lambda\| \leq C\{M\} \|\Delta F\|, \quad (2.171)$$

где $C\{M\}$ – число обусловленности матрицы M приведения матрицы F к диагональному виду

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\} \quad (2.172)$$

в силу матричного условия подобия

$$M \Lambda = F M, \quad (2.173)$$

где $M : \|M_i\| = 1; i = \overline{1, n}; M_i$ – i -й столбец M . □

Доказательство утверждения приведено в приложении 4. ■

Следует заметить, что если на неравенстве (2.171) построить оценку $\Delta \lambda_M$ сверху для оценки $\|\Delta \lambda\|$ вариации $\Delta \lambda$, определив ее соотношением

$$\Delta \lambda_M = C\{M\} \|\Delta F\|, \quad (2.174)$$

то неравенство (2.171), записанное в форме

$$\|\Delta \lambda\| \leq \Delta \lambda_M, \quad (2.175)$$

будет в общем случае обладать заметной достаточностью. Действительно, в силу цепочки равенств и неравенств (п. 6.51),

появившейся при доказательстве (2.171), итоговый ее фрагмент имеет вид

$$\|\Delta\lambda\| \leq \|M^{-1}\Delta FM\| \leq \|M^{-1}\| \|\Delta F\| \|M\| = C\{M\} \|\Delta F\|, \quad (2.176)$$

в котором содержится переход от нормы произведения матриц к произведению норм матриц. Этот переход обладает в общем случае большой достаточностью.

Пример 2.10. В качестве примера рассматривается матрица $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$, такая, что $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -5\}$. Матрица

приобретает вариацию ΔF , имеющую представление $\Delta F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$

так, что возмущенная матрица $F + \Delta F$ имеет реализацию $F + \Delta F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.5 & -7 \end{bmatrix}$ со спектром собственных значений $\sigma\{F + \Delta F\} = \{\lambda_1 + \Delta\lambda_1 = -1.8334; \lambda_2 = -5.1667\}$.

Вычисления компонентов неравенства (2.171) дают:

$$\|\Delta F\| = 0.5;$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 + \lambda_1^2)^{-0.5} & 0 \\ 0 & (1 + \lambda_2^2)^{-0.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.1961 \\ -0.8944 & -0.9806 \end{bmatrix}.$$

Спектр $\sigma_\alpha\{M\} = \{\alpha_1 = 4.7329; \alpha_2 = 0.6326\}$, откуда для спектрального числа обусловленности имеем $C\{M\} = \alpha_M(M) \alpha_m^{-1}(M) = 7.48$. Тогда оценочное неравенство (2.171) принимает вид $\|\Delta\lambda\| \leq C\{M\} \|\Delta F\| = 7.48 * 0.5 = 3.74$. Если полученную оценку рассматривать как оценку экстремальной векторной нормы $\|\Delta\lambda = \text{col}\{\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2\}\| = \max_{i=1,2} |\Delta\lambda_i| = 3.74$, то в силу этой оценки для $\lambda_i + \Delta\lambda_i$ получим оценку интервалов принадлежности

$$\lambda_1 + \Delta\lambda_1 \in [-2 - 3.74 = -5.74, -2 + 3.74 = 1.74],$$

$$\lambda_2 + \Delta\lambda_2 \in [-5 - 3.74 = -8.74, -5 + 3.74 = 1.26].$$

Заметим, что если бы матрица M была идеально обусловлена и характеризовалась числом обусловленности $C\{M\} = 1$, то оценочное неравенство (2.171) приняло бы вид $\|\Delta\lambda\| \leq C\{M\} \|\Delta F\| = 1 * 0.5 = 0.5$, как следствие, $\lambda_i + \Delta\lambda_i$ принадлежали бы интервалам

$$\lambda_1 + \Delta\lambda_1 \in [-2 - 0.5 = -2.5, -2 + 0.5 = -1.5],$$

$$\lambda_2 + \Delta\lambda_2 \in [-5 - 0.5 = -5.5, -5 + 0.5 = -4.5].$$

Уменьшение числа обусловленности уменьшает достаточность оценки (2.171), но она сохраняется, что легко обнаруживается при сравнении с

$$\sigma\{F + \Delta F\} = \{\lambda_1 + \Delta\lambda_1 = -2 + 0.1667 = -1.8333; \lambda_2 + \Delta\lambda_2 = -5 - 0.1667 = -5.1667\}$$

Следует заметить, что обнаруженная избыточность не является методической. Действительно, если воспользоваться начальным фрагментом (п. 6.51), построенным на равенствах, то получим

$$\|\Delta\lambda\| = \left\| \text{col} \left\{ \left(M^{-1} \Delta F M \right)_{ii}; i = \overline{1, n} \right\} \right\| = \left\| \text{diag} \left\{ \left(M^{-1} \Delta A_{\Sigma} M \right)_{ii}; i = \overline{1, n} \right\} \right\|.$$

Для формирования этих равенств построим матричный блок

$$M^{-1} \Delta F M = \begin{bmatrix} 3.727 & 0.7453 \\ -3.3993 & -1.6997 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.1961 \\ -0.8944 & -0.9806 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1666 & 0.073 \\ -0.38 & -0.1666 \end{bmatrix},$$

откуда для элементов приведенного равенства получаем

$$\Delta\lambda = \begin{bmatrix} \Delta\lambda_1 \\ \Delta\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1666 \\ -0.1666 \end{bmatrix}; \text{diag} \left\{ \left(M^{-1} \Delta A M \right)_{ii}; i = 1, 2 \right\} = \begin{bmatrix} 0.1666 & 0 \\ 0 & -0.1666 \end{bmatrix},$$

при этом $\|\Delta\lambda\|_{\infty} = \left\| \text{diag} \left\{ \left(M^{-1} \Delta A M \right)_{ii}; i = \overline{1, 2} \right\} \right\|_{\lambda} = 0.1666$, что в точности

совпадает с оценкой вариации $\Delta\lambda_1$ и $\Delta\lambda_2$, полученной вычислением

спектра $\sigma\{F + \Delta F\}$. Но уже

$\left\| \text{diag} \left\{ \left(M^{-1} \Delta A M \right)_{ii}; i = \overline{1, 2} \right\} \right\|_{\lambda} = 0.1666 < \|M^{-1} \Delta A M\|_{\lambda} = 0.453$. И, наконец,

$$\|M^{-1} F M\|_{\lambda} < \|M^{-1}\| \|F\| \|M\| = C\{M\} \|F\| = 7.48 * 0.5 = 3.74. \quad \blacksquare$$

В заключение данного параграфа рассмотрим проблемную область теории управления, связанную с конструированием систем сравнения в классе экспоненциальных покрытий минимальной достаточности. В системах сравнения минимальной достаточности в классе экспоненциальных покрытий, конструируемых в функциональном базисе фундаментальной матрицы исследуемой системы, число обусловленности оказывается одним из ключевых показателей. Системы сравнения являются эффективным способом сжатия информации о процессах по вектору состояния систем высокого порядка. В основном практическое использование нашли мажорирующие системы сравнения. Идея конструирования мажорирующей системы сравнения состоит в экспоненциальной

мажоризации, осуществляемой средствами функционального базиса фундаментальной матрицы системы, максимального сингулярного числа этой матрицы для каждого момента времени. Проиллюстрируем эту идею на примере свободного движения системы (2.137) $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t); x(0)$, где F – гурвицева матрица простой структуры. Основные положения изложим с помощью утверждений.

Утверждение 2.14. Пусть $\zeta_M(t)$ – решение однородной мажорирующей скалярной экспоненциальной системы сравнения (СЭСС)

$$\dot{\zeta}_M(t) + \mu_M \zeta_M(t) = 0; \zeta_M(0) \geq \beta_M \|x(0)\|. \quad (2.177)$$

Тогда оказываются справедливыми оценочные для решений $x(t) = x(t, x(0), g(t) \equiv 0) = x(t, x(0))$ однородной версии системы (2.137) неравенства

$$\|x(t, x(0))\| \leq \alpha_M \{e^{Ft}\} \|x(0)\| \leq \zeta_M(t), \quad (2.178)$$

при этом экспоненциальное покрытие $\zeta_M(t)$ обладает минимальной достаточностью, т.е. максимальной близостью к эллипсоидной мажоранте, если параметры СЭСС (2.177) определены в силу соотношений

$$\mu_M = \min_i \{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|\}, \beta_M = C\{M\}, \quad (2.179)$$

где λ_i , M_i – соответственно собственные значения и вектор матрицы F , $\|M_i\| = 1$; $C\{M\}$ – число обусловленности модальной матрицы M , построенной на собственных векторах M_i единичной нормы. \square

Доказательство утверждения 2.14 приведено в приложении 4. \blacksquare

Теперь допустим, что линейная (локально линейная) система (2.137) такова, что матрица F , зависящая от p -мерного вектора параметров $q \in R^p$, $q = q_0 + \Delta q$, претерпевает вариации, порожденные вариациями Δq вектора параметров относительно его номинального значения так, что

$$F(q) = F(q = q_0 + \Delta q) \neq F(q_0) = F. \quad (2.180)$$

Тогда однородная версия системы (2.136) при $q \neq q_0$ принимает вид

$$\dot{x}(t, q) = F(q)x(t, q); x(t, q)|_{t=0} = x(0), \quad (2.181)$$

при этом Δq такова, что сохраняется корректность аппарата теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого

порядка $\Delta q \in [\underline{\Delta q}, \overline{\Delta q}]$, матрица $F(q)$ – гурвицева и простой структуры при вариациях Δq в указанных пределах.

Оценим вариации, которые претерпевают параметры мажорирующей скалярной экспоненциальной системы сравнения. Очевидно, для свободного движения параметрически возмущенной системы (2.181) $x(t, x(0), q = q_0 + \Delta q)$ оказываются справедливыми положения следующего утверждения.

Утверждение 2.15. Мажорирующая СЭСС минимальной достаточности, конструируемая над функциональным базисом фундаментальной матрицы системы (2.181), имеет представление

$$\xi_M(t, q) + \mu_M(q) \zeta_M(t, q) = 0; \zeta_M(0, q) \geq \beta_M(q) \|x(0)\|, \quad (2.182)$$

где

$$\beta_M(q) = C\{M(q)\}^{\Delta} = \|M(q)\| \|M^{-1}(q)\| = \alpha_M(q) \alpha_m^{-1}(q), \quad (2.183)$$

$\alpha_M(q), \alpha_m^{-1}(q)$ – экстремальные сингулярные числа матрицы $M(q)$ собственных векторов матрицы $F(q)$,

$$\mu_M(q) = \min_i \{|\operatorname{Re} \lambda_i(q)|; i = \overline{1, n}\} \quad (2.184)$$

в том смысле, что мажорирующее неравенство

$$\|x(t, x(0), q)\| \leq \beta_M(q) e^{-\mu_M(q)t} \|x(0)\| \quad (2.185)$$

обладает минимальной достаточностью. \square

Доказательство утверждения 2.15 строится по той же схеме, что и доказательство 2.14, с учетом факта $q \neq q_0$. \blacksquare

Для конструирования глобальной мажорирующей СЭСС на векторе вариаций $\Delta q \in [\underline{\Delta q}, \overline{\Delta q}]$ воспользуемся положениями следующего утверждения.

Утверждение 2.16. Глобальная мажоранта минимальной достаточности для процессов по норме $\|x(t, x(0), q)\|$ однородной версии параметрически возмущенной системы (2.181) представима на решениях СЭСС (2.177), (2.182) в форме

$$\max_{\Delta q} \zeta_M(t, q) = \zeta_M(t) + \sum_{j=1}^p \left. \frac{\partial \zeta_M(t, q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} |\Delta q_j| \operatorname{sgn} \left. \frac{\partial \zeta_M(t, q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} =$$

$$\beta_M \left\{ 1 + \sum_{j=1}^p \left(\alpha_M^{-1} \alpha_{Mq_j} - \alpha_{mq_j}^{-1} - \mu_{Mq_j} t \right) \right\} \left| \Delta q_j \right| \operatorname{sgn} \left\{ \alpha_M^{-1} \alpha_{Mq_j} - \alpha_{mq_j}^{-1} - \mu_{Mq_j} t \right\} e^{M_M t} \|x(0)\|, \quad (2.186)$$

где

$$\alpha_{Mq_j} = \left(U_M^T M_{q_j} V_M \right)_{11}; \alpha_{mq_j} = \left(U_M^T M_{q_j} V_M \right)_{nn}, M = U_M \Sigma_M V_M^T, \quad (2.187)$$

$$\Sigma_{Mq_j} = \operatorname{diag} \left\{ \alpha_i; i = \overline{1, n} \right\}; M_{q_j} = \operatorname{row} \left\{ M_{iq_j}; i = \overline{1, n} \right\}; j = \overline{1, p}, \quad (2.188)$$

$$M_{Mq_j} = \left(M^{-1} F_{q_j} M \right)_{11}; j = \overline{1, p}. \quad \square \quad (2.189)$$

Доказательство утверждения 2.16 строится на непосредственном дифференцировании по элементам q_j вектора параметров q решения (2.182) и выборе сочетания знаков вариаций Δq , дающих максимальное отклонение возмущенной мажоранты от номинальной. ■

Нетрудно видеть, что конструирование глобальной мажоранты

$$\max_{\Delta q} \zeta_M(t, q) \geq \|x(t, q)\| \quad (2.190)$$

строится с использованием функций чувствительности $C_{q_j} \{M(q)\} \Big|_{q=q_0}$ числа обусловленности матрицы собственных векторов, что в итоге сводится к вычислению функций чувствительности собственных векторов, ее минимального по модулю собственного значения, а также сингулярных чисел матрицы собственных векторов.

Полученная оценка совокупного эффекта вариаций параметров Δq_j относительно q_0 обладает минимальной достаточностью и может быть в силу структуры (2.186) оценена в процентах.

2.2.4. Сведение задачи чувствительности к задаче анализа структурных свойств – управляемости, наблюдаемости и инвариантности

Возможность сведения задачи исследования чувствительности объектов и систем управления к вариации параметров их функциональных компонентов к анализу структурных свойств динамических систем: управляемости по состоянию и выходу уже рассматривалась в разделе, посвященном аппарату функций траекторной чувствительности. При этом предметом исследования была составная система "номинальный объект – модель траекторной чувствительности". В настоящем разделе эта проблема решается в рамках исследуемых объекта или системы управления с использованием факторизации вариации матричных компонентов

векторно-матричного модельного представления, позволяющей ввести в рассмотрение внешний "параметрический" вход.

Рассмотрим непрерывный объект управления вида (2.39), который представлен в таком базисе, что вариация параметров приводит к возмущению только матрицы состояния ОУ так, что он получает модельное представление

$$x(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t). \quad (2.191)$$

Представим вариацию ΔA матрицы состояния ОУ в аддитивной форме

$$\Delta A = \sum_{j=1}^p \Delta A_j, \quad (2.192)$$

где каждый j -й матричный компонент ΔA_j полной вариации удовлетворяет условию

$$\text{rang} \Delta A_j = 1, j = \overline{1, p}. \quad (2.193)$$

Удовлетворение $(n \times n)$ -матричных компонентов ΔA_j условию (2.193) позволяет записать

$$\Delta A_j = d_j h_j^T \quad (2.194)$$

где $d_j, h_j \in R^n$, при этом представление в форме (2.194) не является единственным. Необходимо отметить, что каждое из представлений (2.194) может характеризоваться своим значением p , определяемым числом компонентов ΔA_j в структуре параметрически неопределенной матрицы состояния объекта (2.191), характером их размещения в строках матрицы и выбранным базисом. Так, в случае использования фробениусова базиса со строчным представлением сопровождающей формы матрицы число p компонентов (2.192) может равняться единице, в случае диагонального – n , а в случае произвольного базиса достигать значения n^2 .

Если теперь (2.194), (2.192) подставить в (2.191), то получим

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^p d_j h_j^T x(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t) \quad (2.195)$$

Введем в рассмотрение p -мерную векторную переменную

$$\zeta(t) = \text{col} \{ \zeta_j(t) = h_j^T x(t); j = \overline{1, p} \}, \quad (2.196)$$

а также $(n \times p)$ -матрицу D , сконструированную на столбцах d_j в форме

$$D = \text{row}\{d_j; j = \overline{1, p}\} \quad (2.197)$$

Введенные с помощью (2.196) и (2.197) вектор $\zeta(t)$ и матрица D позволяют представить (2.195) векторно-матричной моделью

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + D\zeta(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t), \quad (2.198)$$

где вектор $\zeta(t)$ будем именовать внешним параметрическим воздействием. Сформулируем следующую концепцию.

Концепция 2.1. Компонент $y_l(t); l = \overline{1, m}$, будет робастным по отношению к вариации $\Delta A_j; j = \overline{1, p}$, j -го компонента матрицы A , т.е. обладать нулевой чувствительностью к вариации ΔA_j , если l -ый компонент $y_l(t)$ вектора $y(t)$ будет полностью неуправляемым по j -му входу приложения внешнего параметрического воздействия, или тройка матриц $\{D_j, A, C^l\}$ была бы полностью неуправляемой, другими словами, если l -ый компонент $y_l(t)$ вектора $y(t)$ будет инвариантен относительно j -го компонента внешнего параметрического воздействия.

Составим на указанной тройке матриц матрицу управляемости " l -й выход – j -й параметрический вход"

$$w_{ylj}^{\Delta} = \begin{bmatrix} C^l D_j & C^l A D_j & C^l A^2 D_j & L & C^l A^{n-1} D_j \end{bmatrix}. \quad (2.199)$$

Полная неуправляемость $y_l(l = \overline{1, m})$ по входу $\zeta_j(j = \overline{1, p})$ означает вырождение W_{ylj} в O -матрицу – строку

$$W_{ylj} = \text{row}\{(W_{ylj})_i = O; i = \overline{1, n}\}. \quad (2.200)$$

Если полной неуправляемости выходов $y_l(l = \overline{1, m})$ по всем входам $\zeta_j(j = \overline{1, p})$ не наблюдается, т.е. все матрицы $W_{ylj}(l = \overline{1, m}; j = \overline{1, p})$ не вырождаются в нулевые и представляют собой n -мерные вектор-строки, то для них можно вычислить нормы и построить матрицу весов

$$P_s = \text{row}\{col[\|W_{ylj}\|; l = \overline{1, m}]; j = \overline{1, p}\}, \quad (2.201)$$

при этом для сравнимости результатов в (2.194) следует положить $h_j: \|h_j\| = 1$ для всех $j = \overline{1, p}$.

Матрица P_s (2.201) позволяет ранжировать параметры $q_j (j = \overline{1, p})$, порождающие вариации ΔA_j матрицы A , по степени управляемости l -го выхода этим параметром. Доминирующий параметр (доминирующая вариация ΔA_j) определяется по максимальной норме столбцов матрицы P_s , а наиболее управляемый (чувствительный) выход – по максимальной норме строк этой матрицы.

Таким образом,

$$\text{dom}\{\Delta A_j V q_j\} = \arg \max_j \left\| \text{col} \left[\left\| (W_{ylj}) \right\| ; l = \overline{1, m} \right] \right\|, \quad (2.202)$$

$$\text{domsens}\{y_l\} = \arg \max_l \left\| \text{row} \left[\left\| W_{yjl} \right\| ; j = \overline{1, p} \right] \right\|. \quad (2.203)$$

В (2.202) и (2.203) $\text{dom}\{(*)\}$ определяет элемент l максимальным эффектом реализации управляемости по всем выходам средствами элемента $(*)$, $\text{domsens}\{(\bullet)\}$ определяет собой выход (\bullet) , на котором наблюдается максимальный совокупный эффект управления по всем $j = \overline{1, p}$ параметрическим входам.

Для целей дальнейших исследований, а также поиска путей синтеза алгоритмов управления, доставляющих неуправляемость l -го выхода $y_l(t)$ по входу $\zeta_j(t)$, сформулируем утверждение.

Утверждение 2.16. Для полной неуправляемости тройки матриц $\{D_j, A, C^l\}$, где C^l – l -я строка матрицы C , формирующая выход $y_l(t)$, D_j – j -й столбец матрицы D приложения параметрического входа $\zeta_j(t)$, достаточно, чтобы:

1. столбец D_j был собственным вектором матрицы A ;
2. выполнялось условие

$$C^l D_j = 0. \quad \square(2.204)$$

Доказательство утверждения 2.16 приведено в приложении 6. ■

Нетрудно видеть, что тот же результат можно сформулировать в терминах передаточных функций сепаратного канала " $\zeta_j - y_l$ " ОУ (2.198).

Утверждение 2.17. Для того, чтобы передаточная функция $\Phi_{y_l \zeta_j}(s)$ сепаратного канала управления ОУ (2.184) " $\zeta_j - y_l$ ", связывающего j -й вход приложения параметрического внешнего воздействия $\zeta_j(t)$ и l -й выход, равнялась нулю, т.е. выполнялось равенство

$$\Phi_{y|z_j}(s) = C^l (sI - A)^{-1} D = 0_j, \quad (2.205)$$

достаточно, чтобы выполнялись условия утверждения 2.16. \square

Доказательство утверждения 2.17 приведено в приложении 4.

■

Результат в форме утверждений 2.16 и 2.17 использует неполную управляемость пары матриц (A, D_j) , пространство управляемости которого характеризуется рангом, равным единице. Очевидно, тот же результат может быть получен на неполной наблюдаемости пары (C^l, A) , когда ранг матрицы наблюдаемости этой пары оказывается равным единице, а подпространство наблюдаемости совпадает с линейной оболочкой, натянутой на вектор $(C^l)^T$.

Утверждение 2.18. Для полной нечувствительности l -того компонента $y_l(t)$ вектора выхода к j -той вариации ΔA_j полной вариации ΔA матрицы состояния ОУ (2.198), достигаемой выполнением условий (2.200) или (2.205), достаточно:

1. чтобы матрица C^l была левым собственным вектором матрицы A объекта управления (2.198),
2. выполнения матричного соотношения (2.204). \square

Доказательство утверждения 2.18 приведено в приложении 4.

■

Необходимо отметить, сравнивая условия утверждений 2.16 и 2.18, что второе требует от исходного объекта управления неполной наблюдаемости, что в случае неполной непосредственной измеримости вектора состояния ОУ не позволит построить динамическое наблюдающее устройство для оценки неизмеримых компонентов этого вектора. В этой связи пользовательской ценностью обладают положения лишь утверждения 2.16, которые и будут далее разрабатываться при синтезе закона управления ОУ (2.191).

Ограничимся ЗУ в виде линейной композиции составляющих вектора $U(t)$ управления ОУ (2.191), одна из которых порождается прямой связью с матрицей K_g по вектору внешнего воздействия $g(t)$, а другая – отрицательной обратной связью с матрицей K по вектору состояния $x(t)$ ОУ так, что закон принимает вид

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t). \quad (2.206)$$

Агрегирование ОУ (2.191) и ЗУ (2.206) образует систему

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + \Delta Fx(t) + Gg(t); \quad y(t) = Cx(t), \quad (2.207)$$

где $F = A - BK$; $G = BK_g$

Нетрудно видеть, что оказывается справедливым следующее утверждение.

Утверждение 2.19. Если параметрическая неопределенность исходного ОУ (2.39) такова, что она проявляется в форме вариации ΔA матрицы состояния объекта, то эта вариация оказывается инвариантной относительно реализаций матриц K_g и K закона управления (2.206), агрегирование которого с объектом управления (2.191) образует систему (2.207) так, что

$$\Delta F = \Delta A. \quad \square(2.208)$$

Доказательство утверждения строится на подстановке (2.206) в (2.191) и установлении факта равенства в форме (2.207). ■

В силу (2.208) сохраняется факторизация вариации $\Delta F = \Delta A$ матрицы состояния системы в формах (2.192) и (2.194). Сохраняется концепция введения в систему внешнего "параметрического" входа $\zeta(t)$ так, что система в итоге получает описание

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + D\zeta(t) + Gg(t), \quad y(t) = Cx(t). \quad (2.209)$$

Постановка задачи синтеза ЗУ в форме (2.206) предъявляет к его матричным компонентам K и K_g следующие требования.

Матрица K , если она, к примеру, синтезируется методами модального управления, должна доставлять матрице F желаемый спектр собственных значений $\sigma\{F\} = \left\{ \lambda_{Fi}; i = \overline{1,4} \right\}$, обеспечивающий необходимые динамические и точностные показатели, а также элементы геометрического спектра собственных векторов $\{\xi_j\}$ матрицы F с тем, чтобы они совпадали со столбцами матрицы D так, чтобы выполнялось равенство

$$\xi_j = D_j; j = \overline{1,p}. \quad (2.210)$$

Требование выполнения условия (2.210) для всех j от 1 до p является очень сильным, при его реализации будет наблюдаться резкое ослабление управляемости системы (2.207) со стороны всех компонентов вектора $\xi(t)$ "параметрического" внешнего воздействия. Теоретически это может быть достигнуто лишь при ранге матрицы B управления ОУ (2.39), (2.191), равном размерности его вектора состояния.

Практически это недостижимо, поэтому при формировании ОУ (2.39) необходимо изыскивать все возможности максимизировать ранг матрицы управления, что достигается путем максимизации числа

регулирующих органов. Если возможности размещения на ОУ большого количества регулирующих органов ограничены, то надо стараться структурными методами обеспечивать ОУ (2.39), (2.177) с парой матриц (A, B) свойства нормальности этой пары, при котором оказываются полностью управляемыми все пары $(A, B_k; k = \overline{1, r})$. Если и это невозможно, то у разработчика системы остается еще одна возможность: "обмен части динамических показателей на робастность", т.е. обмен требований к элементам геометрического спектра $\{\xi_j\}$ собственных векторов матрицы F на некоторое "ухудшение" структуры $\sigma\{F\} = \{\lambda_{Fi}; i = \overline{1, n}\}$ собственных значений этой матрицы системы. Но в любом случае все параметры исходного ОУ, приводящие к вариациям $\Delta A_j, j = \overline{1, p}$, должны быть проранжированы с помощью матрицы весов P_s (2.201).

Как всегда, к матрице K_g предъявляется требование правильной ориентации системы (2.143), (2.209) относительно внешнего воздействия $g(t)$ с тем, чтобы гарантировалось свойство равенства входа и выхода системы в неподвижном положении.

Что касается необходимости выполнения условия (2.204), то при формировании исходного объекта (2.39), (2.191) следует предусмотреть возможность введения передаточных нулей (j, l) -сепаратных каналов, связывающих j -ый параметрический вход ζ_j и l -ый выход y_l .

По существу, сказанное выше содержит доказательство следующего утверждения.

Утверждение 2.20. Система управления (2.209), образованная агрегатным объединением ОУ (2.191), (2.198) и закона управления (2.206), нечувствительна к вариации ΔA_j матрицы состояния объекта, если матричные компоненты ЗУ (2.206) выбраны из соображений

$$K = \arg \left\{ D_j = \xi_j : F\xi_j = \lambda_{\Sigma j} \xi_j; j = \overline{1, p} \ \& \ CD_j = 0 \right\}, \quad (2.211)$$

$$K_g = \arg \left\{ \Phi(0) = -CF^{-1}Bk_g = I; F = A - BK \right\}. \quad \square(2.212)$$

Если исходный ОУ (2.39) не позволяет параметрическую неопределенность представить только в виде вариации ΔA матрицы состояния, то на входе ОУ достаточно включить буферную систему

$$\dot{x}_B(t) = A_B x_B(t) + B_B \dot{u}_B(t); y(t) = C_B^0 x_B(t), \quad (2.213)$$

минимальной размерности $\dim x_B = \dim u = r$, тем самым задача сводится к рассмотренному случаю. Действительно, если ввести в рассмотрение составной вектор $\tilde{x} = \text{col}\{x, x_B\}$, то получим систему

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t); y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t), \quad (2.214)$$

где

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & BC_B \\ 0 & A_B \end{bmatrix}; \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_B \end{bmatrix}; \tilde{C} = [C \ 0]. \quad (2.215)$$

Вариации ΔA или ΔB матричных компонентов A или B исходного ОУ (2.39) представим вариацией $\Delta \tilde{A}$ матрицы \tilde{A} , следовательно, (2.214) приводим к виду

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\xi(t) + \tilde{B}u(t); y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t).$$

При этом, следуя методологии обобщенного изодромного управления, в качестве буферной системы (2.212) следует использовать или интеграторы в каждом сепаратном канале управления для повышения порядка астатизма, или модель источника конечномерного компонента входного воздействия.

В заключение заметим, что полученные условия нечувствительности l -го выхода $y_l(t)$ системы (2.209) к вариации ΔA_j матрицы состояния объекта в общесистемной постановке можно трактовать как условие инвариантности выхода $y_l(t)$ относительно "параметрического" внешнего входа $\xi_j(t)$. Систему (2.209), обладающую такими свойствами, можно именовать параметрически инвариантной полностью или частично.

Пример 2.11. В качестве примера рассматривается ОУ

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t)$$

с матричными компонентами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \Delta A = \Delta A(q) = \begin{bmatrix} q & q & 0 \\ -2q & -2q & 0 \\ 4q & 4q & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [2 \ 3 \ 1].$$

При $\forall q \text{ rang } \Delta A(q) = 1$, поэтому определенности ради положим $q = 1$, тогда получим факторизацию $\Delta A(q)$ в форме

$$\Delta A(q)\big|_{q=1} = \Delta A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

так, что ОУ в форме (2.191) характеризуется

$$D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$\zeta_1 = h_1 x$; $\zeta_2 = h_2 x$, при этом в силу $D_1 = D_2$ положим, что (2.191) характеризуется $D = D_1 = D_2$; $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$.

Проверка условия (2.204) показывает его выполнимость, так как

$$CD = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T = 0.$$

Сконструируем закон управления (2.206):

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t),$$

где

$$K = \arg \{ F = A - BK : \sigma \{ F \} = \{ \lambda_1 = -2; \lambda_2 = -3; \lambda_3 = -5 \}; FD = \lambda_1 D \},$$

так что для K получаем $K = \begin{bmatrix} 30 & 31 & 9 \end{bmatrix}$, что дает матрицу F вида

$$F = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -31 & -10 \end{bmatrix} : \sigma \{ F \} = \{ \lambda_1 = -2; \lambda_2 = -3; \lambda_3 = -5 \},$$

а также собственный вектор ξ_1 : $A\xi_1 = \lambda_1 \xi_1$ такой, что $\xi_1 = D$. Действительно,

$$FD = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -31 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda_1 D.$$

Матрица прямых связей K_g ищется из условия

$$K_g = \arg \{ C(SI - F)^{-1} BK_g \big|_{S=0} = -CF^{-1}BK_g = I \},$$

получаем реализацию $K_g = \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix}$.

Таким образом, условие нулевой параметрической чувствительности выхода системы $y(t)$ к вариации $\Delta A = \Delta A(q)$ при

$\forall q$, которое было формализовано как условие полной неуправляемости по выходу системы со стороны параметрического внешнего входа $\zeta(t)$ в сочетании с выполнением условия $CD=0$, выполнено, что подтверждается матрицей управляемости сепаратного канала " $\zeta - y$ "

$$W_{y\zeta y} = \begin{bmatrix} CD & CFD & CF^2D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Подтвердим достигнутый результат вычислением передаточных функций сепаратного канала " $\zeta - y$ ": исходного объекта управления

$$\Phi_{y\zeta}(s) = \frac{y(s)}{\zeta(s)} \Big|_{K=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} = C(sI - A)^{-1}D = \frac{4}{s^2}$$

и спроектированной системы

$$\Phi_{y\zeta}(s) = \frac{y(s)}{\zeta(s)} \Big|_{K=\begin{bmatrix} 30 & 31 & 9 \end{bmatrix}} = C(sI - F)^{-1}D = \frac{0}{(s+2)(s+3)(s+5)} = 0. \blacksquare$$

2.3. Системы с интервальными параметрами.

Метод В.Л. Харитонова

Рассматривается линейная динамическая система вида (2.55) с тем отличием, что ее модельное представление характеризуется параметрической неопределенностью задания только матрицы состояния так, что векторно-матричное описание такой системы принимает вид

$$\dot{x}(t) = F(q)x(t) + Gg(t); x(0); y(t) = Cx(t). \quad (2.202)$$

В (2.202) матрица

$$F(q) = \text{row} \left\{ \text{col} \left[A_{ij}(q_{ij}); i = \overline{1, n} \right]; j = \overline{1, n} \right\}, \quad (2.203)$$

при этом системный параметр $A_{ij}(q_{ij})$ задается в форме

$$A_{ij}(q_{ij}) = \underline{A}_{ij}(1 - q_{ij}) + \overline{A}_{ij}q_{ij}; q_{ij} \in [0, 1]. \quad (2.204)$$

Таким образом,

$$A_{ij}(q_{ij}) \in [\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}]: \underline{A}_{ij} \leq \overline{A}_{ij}, \quad (2.205)$$

при этом переменная q_{ij} в (2.205) выполняет функцию интервализирующего параметра, изменение которого в пределах интервала $[0, 1]$ порождает континуум реализаций $A_{ij}(q_{ij})$. Значения

$\underline{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}$ представляют собой граничные реализации $A_{ij}(q_{ij})$, медианная реализация характеризуется медианным значением

$$A_{0ij} = 0.5(\underline{A}_{ij} + \bar{A}_{ij}), \quad (2.206)$$

которое наблюдается при медианном значении $q_{0ij} = 0.5$ параметра q_{ij} .

Нетрудно видеть, что если в системе (2.202) в качестве номинальных значений системных параметров принять медианные (2.206), представить интервализирующий параметр q_{ij} в вариациях Δq_{ij} относительно медианного значения q_{ij} в форме

$$q_{ij} = q_{0ij} + \Delta q_{ij}, |\Delta q_{ij}| \leq 0.5, \quad (2.207)$$

то будет подготовлена схема использования аппарата теории чувствительности в любой из приведенных в разделе 2.3 реализаций. Однако заметим, что максимальная относительная вариация

$\delta_{q_{ij}} = \frac{\|\Delta q_{ij}\|}{\|q_{0ij}\|}$ интервализирующего параметра составляет 100%. В этом

диапазоне вариаций Δq_{0ij} аппарат теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка становится некорректным. Тем не менее, разработчик получит полезную информацию о динамической системе, если построит или вычислит функции чувствительности траекторий, собственных значений матрицы состояния F и показателей качества системы (2.202).

Для решения задачи при значениях системных параметров во всем диапазоне их вариаций, задаваемом (2.202), несколько сузим ее, ограничившись проблемой робастной устойчивости в рамках гурвицевой устойчивости (Н-устойчивости). С этой целью введем в рассмотрение характеристический полином $D(\lambda, q)$ матрицы состояния $F(q)$ (2.203) системы (2.202)

$$D(\lambda, q) = \det(\lambda I - F(q)) = \lambda^n + a_1(q_1)\lambda^{n-1} + a_2(q_2)\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}(q_{n-1})\lambda + a_n(q_n), \quad (2.208)$$

где

$$a_1(q_1) = \underline{a}_1(1 - q_1) + \bar{a}_1 : q_1 \in [0, 1]. \quad (2.209)$$

Таким образом,

$$a_1(q_1) \in [\underline{a}_1, \bar{a}_1] : \underline{a}_1 \leq \bar{a}_1; 1 = \overline{1, n}, \quad (2.210)$$

где $\underline{a}_1, \bar{a}_1$ – граничные значения системного параметра $a_1(q_1)$. Нетрудно видеть, что в пространстве системных параметров

$a = \text{col}\{a_1; 1 = \overline{1, n}\}$ полная совокупность из n параметров образует выпуклый многогранник типа прямоугольного параллелепипеда Q , каждое ребро которого задано в параметризованной форме (2.209).

Под задачей робастной устойчивости в этом случае будем понимать задачу отыскания условий, при выполнении которых оказываются Н-устойчивыми все полиномы $D(\lambda, q)$, принадлежащие континууму полиномов с коэффициентами из многогранника Q .

Для решения задачи робастной устойчивости заметим, что многогранник Q , представляющий собой прямоугольный параллелепипед в n -мерном параметрическом пространстве с ребрами (2.209), обладает целочисленными характеристиками в виде числа углов $N_c = 2^n$ и числа ребер $N_R = n2^{n-1}$.

В задаче робастной устойчивости встает важная технологическая проблема поиска возможности перехода от континуума полиномов к выборке конечной мощности из этого континуума.

Первый результат в этой области получен Л. Заде. Работая над проблемой робастной устойчивости полиномов (2.208) в частотной области, т.е. используя характеристический комплекс

$$D(j\omega, q) = (j\omega)^n + a_1(q_1)(j\omega)^{n-1} + a_2(q_2)(j\omega)^{n-2} + \dots + a_{n-1}(q_{n-1})(j\omega) + a_n(q_n), \quad (2.211)$$

Л. Заде сформулировал следующее утверждение.

Утверждение 2.21. Любое ребро прямоугольного параллелепипеда Q , отображается в отрезок на комплексной плоскости значений $D(j\omega, q)$, при этом концы этого отрезка суть образы соседних углов, между которыми находится отображаемое ребро. \square

Доказательство. Зафиксируем в (2.211) значение частоты ω и $n-1$ интервализирующих параметров q_l $l = \overline{1, n} \& l \neq \mu$, оставив изменяющимся только q_μ , тогда (2.211) примет вид

$$D(j\omega, q_\mu) = (1 - q_\mu)D(j\omega, \underline{a}_\mu) + q_\mu D(j\omega, \bar{a}_\mu). \quad (2.212)$$

Нетрудно видеть, что (2.212) задает отрезок прямой на плоскости $D(j\omega)$ при $\omega = f\bar{x}$, концы которого задаются векторами $D(j\omega, \underline{a}_\mu)$ и $D(j\omega, \bar{a}_\mu)$. \blacksquare

Если теперь для анализа устойчивости полинома $D(\lambda, q)$ (2.208) воспользоваться критерием устойчивости А.В. Михайлова, то на основании утверждения 2.21 становится справедливым утверждение.

Утверждение 2.22. Характеристический полином $D(\lambda, q)$ (2.208) оказывается строго устойчивым для всех $q \in Q$, если будут удовлетворять условиям устойчивости критерия устойчивости А.В. Михайлова все годографы, построенные на комплексной плоскости в силу $D(j\omega, q)$ при $\omega \in [0, \infty)$ для всех 2^n угловых реализаций параметра q . ■

Позже результат Л. Заде был подкреплён так называемой реберной теоремой А.С. Бартлетта.

Таким образом, задача робастной устойчивости сводится к обеспечению устойчивости интервального характеристического полинома (ИХП) $[D(\lambda)]$, задаваемого в форме

$$[D(\lambda)] = \det(\lambda I - [F]) = [a_0]\lambda^n + [a_1]\lambda^{n-1} + [a_2]\lambda^{n-2} + \dots + [a_{n-1}]\lambda + [a_n], \quad (2.213)$$

где $[F]$ – интервальная матрица состояния системы (2.208), представляемая в форме

$$[F] = \text{row} \left\{ \text{col} \left([F_{ij}] = [\underline{F}_{ij}, \overline{F}_{ij}]; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n} \right) \right\}, \quad (2.214)$$

$$[a_0] = [1, 1] = 1, [a_1] = [\underline{a}_1, \overline{a}_1]. \quad (2.215)$$

Правила математических преобразований выражений, содержащих интервальные компоненты $[(*)] = [\underline{(*)}, \overline{(*)}]$, где $(*)$ принимает смысл скаляров, векторов и матриц, приведены в приложении 7, более подробная информация об интервальной арифметике содержится в приложении 5.

Переход от континуума характеристических полиномов (2.208) к множеству угловых реализаций ИХП (2.213), мощность которого составляет величину 2^n , где $n = \dim x$, заметно сократил объём вычислительных проблем при решении задачи робастной устойчивости в условиях параметрической неопределённости. Однако этот объём достаточно велик и растёт с увеличением размерности n системы.

Конструктивный прорыв в этой проблеме совершил профессор Санкт-Петербургского государственного университета В.Л. Харитонов, опубликовавший в 1978 году работу, которая составляет суть его метода.

Для целей дальнейших исследований рассмотрим полином с вещественными фиксированными коэффициентами

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0). \quad (2.216)$$

Представим полином (2.216) в факторизованной форме

$$D(z) = h(z^2) + zg(z^2). \quad (2.217)$$

Поставим задачу выяснить, каким требованиям должны удовлетворять полиномы $h(\zeta)$ и $g(\zeta)$ с тем, чтобы полином $D(z)$ (2.216) был бы гурвицевым. Заметим, что полиномы $h(\zeta)$ и $g(\zeta)$ имеют степень ν , если $n = 2\nu + 1$, а в случае $n = 2\nu$ $h(\zeta)$ имеет степень ν , а полином $g(\zeta)$ – степень $(\nu - 1)$. Ответ на поставленный вопрос содержится в теореме Эрмита–Билера.

Теорема Эрмита–Билера. Чтобы полином $D(z) = h(z^2) + zg(z^2)$ был гурвицевым, необходимо и достаточно, чтобы полиномы $h(\zeta)$ и $g(\zeta)$ составляли положительную пару, т.е. чтобы корни этих полиномов, соответственно h_i и g_i , при $i = \overline{1, \nu}$; $j = \overline{1, \nu}$ в случае $n = 2\nu + 1$ и при $i = \overline{1, \nu}$; $j = \overline{1, \nu - 1}$ в случае $n = 2\nu$ были простыми, вещественными, отрицательными и перемежались следующим образом:

$$g_1 \langle h_1 \langle g_2 \langle h_2 \langle \dots \langle g_\nu \langle h_\nu \langle 0 \text{ при } n = 2\nu + 1, \quad (2.218)$$

$$g_1 \langle h_1 \langle g_2 \langle h_2 \langle \dots \langle g_{\nu-1} \langle h_\nu \langle 0 \text{ при } n = 2\nu. \quad \square (2.219)$$

Доказательство теоремы Эрмита–Билера в терминах вещественнозначных представлений можно найти в литературе, тем не менее, дадим следующий комментарий.

Нетрудно видеть, что теорема Эрмита–Билера содержит вещественнозначную версию критерия устойчивости А.В. Михайлова, сформулированного в форме требования перемежаемости корней на положительной вещественной оси ($\omega \in [0, \infty)$) вещественной $\operatorname{Re} D(j\omega)$ и мнимой $\operatorname{Im} D(j\omega)$ частей характеристического полинома $D(j\omega)$. Действительно, если в (2.217) положить $z = j\omega$, то получим для $D(j\omega)$ представление

$$D(j\omega) = h(-\omega^2) + j\omega g(-\omega^2) = \operatorname{Re} D(j\omega) + j\operatorname{Im} D(j\omega). \quad (2.220)$$

Если в (2.220) придавать значения $\omega \in [0, \infty)$, то в случае гурвицевости полинома $D(z)$ корни уравнений

$$\operatorname{Im} D(j\omega) = \omega g(-\omega^2) = 0, \quad (2.221)$$

$$\operatorname{Re} D(j\omega) = h(-\omega^2) = 0, \quad (2.222)$$

начиная с корня $\omega = 0$ уравнения (2.221), будут чередоваться. Исключим из рассмотрения нулевой корень (2.222) и произведем в (2.225) и (2.226) замену $-\omega^2 = \zeta$, тогда получим условие теоремы

Эрмита–Билера. При этом в полном соответствии с критерием устойчивости А.В. Михайлова ближайшим слева к нулю корень будет корень $\zeta = h_v$ уравнения $h(\zeta) = 0$, что представлено условием (2.218) и (2.219). ■

Вернемся к интервальному характеристическому полиному $[D(\lambda)]$ (2.213), на котором построим четыре угловых реализации полиномов $h(\zeta)$ и $g(\zeta)$ вида

$$h(\zeta, \underline{a}_n) = \underline{a}_n + \bar{a}_{n-2}\zeta + \underline{a}_{n-4}\zeta^2 + \bar{a}_{n-6}\zeta^3 + L, \quad (2.223)$$

$$h(\zeta, \bar{a}_n) = \bar{a}_n + \underline{a}_{n-2}\zeta + \bar{a}_{n-4}\zeta^2 + \underline{a}_{n-6}\zeta^3 + L, \quad (2.224)$$

$$g(\zeta, \underline{a}_{n-1}) = \underline{a}_{n-1} + \bar{a}_{n-3}\zeta + \underline{a}_{n-5}\zeta^2 + \bar{a}_{n-7}\zeta^3 + L, \quad (2.225)$$

$$g(\zeta, \bar{a}_{n-1}) = \bar{a}_{n-1} + \underline{a}_{n-3}\zeta + \bar{a}_{n-5}\zeta^2 + \underline{a}_{n-7}\zeta^3 + L. \quad (2.226)$$

Построим на $[D(\lambda)]$ также интервальные версии $[h(\zeta)]$ и $[g(\zeta)]$ полиномов $h(\zeta)$ и $d(\zeta)$, записываемые в форме

$$[h(\zeta)] = [a_n] + [a_{n-2}]\zeta + [a_{n-4}]\zeta^2 + [a_{n-6}]\zeta^3 + L, \quad (2.227)$$

$$[g(\zeta)] = [a_{n-1}] + [a_{n-3}]\zeta + [a_{n-5}]\zeta^2 + [a_{n-7}]\zeta^3 + L \quad (2.228)$$

Если теперь воспользоваться схемой доказательства утверждения 2.19 применительно к вещественно-значимым функциям $h(\zeta)$ и $g(\zeta)$ для значений $\zeta \in [0, -\infty)$, то обнаруживается справедливость положений следующего утверждения.

Утверждение 2.23. Для области значений аргумента $\zeta \in [0, -\infty)$ значения всех угловых реализаций $(h(\zeta))_{cl}$ и $(g(\zeta))_{cl}$ интервальных полиномов $[h(\zeta)]$ и $[g(\zeta)]$ удовлетворяют неравенствам

$$h(\zeta, \underline{a}_n) \leq (h(\zeta))_{cl} \leq h(\zeta, \bar{a}_n); g(\zeta, \underline{a}_{n-1}) \leq (g(\zeta))_{cl} \leq g(\zeta, \bar{a}_{n-1}),$$

$$1 = \overline{1, 2}^v. \quad \blacksquare (2.229)$$

Утверждение 2.21, в свою очередь, делает справедливым положение следующего утверждения.

Утверждение 2.24. Если четыре пары полиномов $\{h(\zeta, \underline{a}_n), g(\zeta, \underline{a}_{n-1})\}, \{h(\zeta, \underline{a}_n), g(\zeta, \bar{a}_{n-1})\}, \{h(\zeta, \bar{a}_n), g(\zeta, \underline{a}_{n-1})\}$ и $\{h(\zeta, \bar{a}_n), g(\zeta, \bar{a}_{n-1})\}$ являются положительными в смысле теоремы Эрмита–Билера, то образуют положительные пары любые композиции

$$\left\{ (h(\zeta))_{cl}, (g(\zeta))_{cp} \right\}, c, p = \overline{1, 2}^v \quad (2.230)$$

угловых реализаций $(h(\zeta))_{cl}$ и $(g(\zeta))_{cp}$ интервальных полиномов $[h(\zeta)]$ и $[g(\zeta)]$.

Последнее утверждение позволяет сформулировать основной результат исследования робастной устойчивости системы (2.202), сведенный к обеспечению гурвицевости интервального характеристического полинома (2.213), влекущей за собой гурвицевость континуума характеристических полиномов $D(\lambda, q)$ вида (2.208), в форме теоремы В.Л. Харитонова.

Теорема В.Л. Харитонова. Чтобы интервальный характеристический полином (2.213) был гурвицевым, необходимо и достаточно, чтобы были гурвицевыми четыре его угловые версии, имеющие представления

$$D_1(\lambda) = \underline{a}_n + \underline{a}_{n-1}\lambda + \overline{a}_{n-2}\lambda^2 + \overline{a}_{n-3}\lambda^3 + \underline{a}_{n-4}\lambda^4 + L \quad (2.231)$$

$$D_2(\lambda) = \overline{a}_n + \underline{a}_{n-1}\lambda + \underline{a}_{n-2}\lambda^2 + \overline{a}_{n-3}\lambda^3 + \overline{a}_{n-4}\lambda^4 + L \quad (2.232)$$

$$D_3(\lambda) = \overline{a}_n + \overline{a}_{n-1}\lambda + \underline{a}_{n-2}\lambda^2 + \underline{a}_{n-3}\lambda^3 + \overline{a}_{n-4}\lambda^4 + L \quad (2.233)$$

$$D_4(\lambda) = \underline{a}_n + \overline{a}_{n-1}\lambda + \overline{a}_{n-2}\lambda^2 + \underline{a}_{n-3}\lambda^3 + \underline{a}_{n-4}\lambda^4 + L \quad \blacksquare \quad (2.234)$$

В завершении рассмотрения метода В.Л. Харитонова, который позволил свести задачу робастной устойчивости системы

$$\dot{x}(t) = [F](q)x(t) + Gg(t); x(0); y(t) = Cx(t) \quad (2.235)$$

с интервальной матрицей $[F]$ состояния системы к обеспечению гурвицевости четырех характеристических полиномов (2.231)–(2.234), затронем проблемы оценки показателей качества процессов в системе (2.202), сводящихся к проблемам устойчивости. Первоочередным показателем качества процессов динамической системы вида (2.202) является темп, с которым процессы сходятся к равновесному состоянию. Этот темп в основном определяется степенью устойчивости η . Для обеспечения системе (2.202) степени устойчивости η достаточно обеспечить эту степень устойчивости интервальной матрице $[F]$. Для этого воспользуемся свойством спектра собственных значений матричных функций $f(N)$ от квадратной матрицы N . В соответствии с этим свойством, если $(n \times n)$ -матрица N обладает спектром собственных значений $\sigma\{N\} = \{\lambda_{ni}; i = \overline{1, n}\}$, то спектр собственных значений матрицы $f(N)$ принимает вид $\sigma\{f(N)\} = \{f(\lambda_{ni}); i = \overline{1, n}\}$.

Сконструируем матричную функцию $f(N)$ от матрицы N вида

$$f(N) = \eta I + N, \quad (2.236)$$

порожденную скалярной функцией $f(\alpha) = \eta + \alpha$. Алгебраический спектр $\sigma\{f(N)\}$ собственных значений матрицы $f(N) = \eta I + N$ принимает вид $\sigma\{f(N)\} = \{f(\lambda_{ni}) = \eta + \lambda_{ni}; i = \overline{1, n}\}$. Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.25. Чтобы система (2.202) обладала степенью устойчивости η , достаточно, чтобы интервальная матрица $[F] + \eta I$ была гурвицевой или чтобы гурвицевым был ИХП этой матрицы

$$\det\{(\lambda - \eta)I - [F]\} = [a_0](\lambda - \eta)^n + [a_1](\lambda - \eta)^{n-1} + L + [a_{n-1}](\lambda - \eta) + [a_n] \quad \blacksquare \quad (2.237)$$

Нетрудно видеть, что после приведения ИХП (2.237) к каноническому виду $[B(\lambda)] = [d_0]\lambda^n + [d_1]\lambda^{n-1} + L + [d_{n-1}]\lambda + [d_n]$ можно воспользоваться теоремой В.Л. Харитонова, в соответствии с которой проверить гурвицевость полиномов (2.231)–(2.234). Гурвицевость этих полиномов гарантирует наличие у системы (2.235), а, следовательно, и (2.202) степени устойчивости не ниже заданной η .

Возможна и обратная задача, если в соответствии с (2.237) составить четыре полинома В.Л. Харитонова (2.231)–(2.234), параметризованные η , в форме

$$D_1(\lambda, \eta) = \underline{a}_n + \underline{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \bar{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \bar{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \underline{a}_{n-4}(\lambda - \eta)^4 + L, \quad (2.238)$$

$$D_2(\lambda, \eta) = \bar{a}_n + \underline{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \underline{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \bar{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \bar{a}_{n-4}(\lambda - \eta)^4 + L, \quad (2.239)$$

$$D_3(\lambda, \eta) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \underline{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \underline{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \bar{a}_{n-4}(\lambda - \eta)^4 + L, \quad (2.240)$$

$$D_4(\lambda, \eta) = \underline{a}_n + \bar{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \bar{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \underline{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \underline{a}_{n-4}(\lambda - \eta)^4 + L. \quad (2.241)$$

Если найти на множестве значений η для каждого полинома (2.238)–(2.241) условие границы устойчивости, то получим четыре оценки η , на которых строится ее интервальное представление $[\eta] = [\underline{\eta}, \bar{\eta}] = \eta_0 + [\underline{\Delta\eta}, \bar{\Delta\eta}]$.

Если желаемое значение η не достигается реализацией матриц закона управления (2.57), рассчитанных на основе медианной версии A_0 матрицы ОУ, то эти матрицы следует модифицировать.

Развивая тот же подход, можно сконструировать вещественнозначимую матричную функцию от матрицы $f(N) = N^K$, где K – целое нечетное положительное число. Алгебраический спектр $\sigma\{f(N) = N^K\}$ собственных значений принимает вид

$\sigma\{f(N)\} = \{f(\lambda_{Ni}) = \lambda_{Ni}^K; i = \overline{1, n}\}$. Таким образом, становится очевидной справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.26. Пусть гурвицева матрица N в своем спектре $\sigma\{f(N)\} = \{\lambda_{Ni}; i = \overline{1, n}\}$ собственных значений содержит комплексно-сопряженные компоненты, в результате чего распределение $\{\lambda_{Ni}; i = \overline{1, n}\}$ собственных значений этой матрицы характеризуется колебательностью μ , при этом матрица N^K также гурвицева, но близка к границе устойчивости колебательного типа при значении

$$K = \max \arg \{ \operatorname{Re}(\lambda_{Ni}^K) < 0 \operatorname{Re}(\lambda_{Ni}^K) \neq 0; i = \overline{1, n} \}, \quad (2.242)$$

тогда для колебательности μ матрицы N справедливо оценочное неравенство

$$\mu \leq \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2\nu} \right) = \hat{\mu}. \quad \blacksquare \quad (2.243)$$

Применительно к системам (2.202), (2.235) оказывается справедливым утверждение.

Утверждение 2.27. Если ИХП интервальной матрицы $[F^K]$, где K – целое нечетное положительное число, является гурвицевым, при этом K – максимальное число, при котором гурвицевость матрицы $[F^K]$ сохраняется, тогда система (2.202), (2.235) обладает колебательностью μ , определяемой (2.243). \blacksquare

Необходимо теперь остановиться на проблемах объема вычислений при формировании ИХП $[D(\lambda)]$ интервальной матрицы $[F]$ системы. Очевидно, если размерность матрицы $[F]$ составляет $(n \times n)$, тогда максимальная мощность множества $\{(F)_c\}$ угловых реализаций матрицы $[F]$ составляет $2^{n \times n}$, а минимальная мощность этого множества составляет 2^n , что имеет место при использовании таких канонических представлений матрицы, как диагональное и фробениусово. Однако независимо от базиса мощность множества $\{(F)_c\}$ угловых реализаций может быть зафиксирована на уровне 2^p , где p – число исходных интервальных физических параметров. Мощность множества угловых реализаций может быть заметно сокращена, если разработчик проведет предварительное ранжирование первичных физических параметров с помощью процедуры, предложенной в параграфе 2.3.4.

Следует также заметить, что в силу формализма правил интервальной арифметики (см. приложение 5) в процессе математических преобразований выражений, содержащих интервальные компоненты, может происходить резкий рост ширины $wid[a_1]$ системных интервальных параметров $[a_1]$. Наибольший вклад в этот рост вносят операции вычисления разности $[a_1] - [a_1]$ и частного от деления $[a_1]/[a_1]$. Очевидно, в силу параметризованных представлений (2.204) $a_1(q) - a_1(q) = 0$ и $a_1(q) = 1$, в том числе и при $q = 0$ и $q = 1$. Таким образом, без нарушения существа интервальных вычислений они могут быть модифицированы допущением $[a_1] - [a_1] = 0, [a_1]/[a_1] = 1$.

Пример 2.12. В качестве примера рассматривается ОУ с интервальной матрицей состояния $[A] = A_0 + [\Delta A]$, для которого спроектирован регулятор, реализующий закон управления (2.57) так, что матрица состояния системы (2.202), (2.235) имеет вид $[F] = F_0 + [\Delta F] = (A_0 - BK) + [\Delta A]$.

Пусть ЗУ (2.57) доставляет медианной части F_0 распределение мод Баттерворта порядка $n = 3$ с характеристической частотой $\omega_0 = 4c^{-1}$ так, что матрица F_0 , заданная во фробениусовом базисе, имеет вид

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -64 & -32 & -8 \end{bmatrix}.$$

Пусть интервальная часть $\Delta F = [\Delta A]$ матрицы состояния имеет представление

$$[\Delta A] = [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ [-25, 25] & [-15, 15] & [-10, 10] \end{bmatrix},$$

так что

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ [-89, -39] & [-47, -17] & [-18, 2] \end{bmatrix}.$$

Матрица $[F]$ обладает ИХП

$$[D(\lambda)] = [a_0]\lambda^3 + [a_1]\lambda^2 + [a_2]\lambda + [a_3],$$

$$[a_0] = [1, 1]; [a_1] = [-2, 18]; [a_2] = [17, 47]; [a_3] = [39, 89].$$

Полиномы В.Л. Харитонова (2.231)–(2.234) в этом случае записываются в форме

$$D_1(\lambda) = 39 + 17\lambda + 18\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$D_2(\lambda) = 89 + 17\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$D_3(\lambda) = 89 + 47\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$D_4(\lambda) = 39 + 47\lambda + 18\lambda^2 + \lambda^3.$$

Нетрудно видеть, что ИХП $[D(\lambda)]$ не является гурвицевым. Модифицируем матричные компоненты закона управления (2.57) с тем, чтобы он обеспечивал распределение мод Баттерворта порядка $n=3$ с характеристической частотой $\omega_0 = 10c^{-1}$. Тогда медианная часть интервальной матрицы $[F] = F_0 + [\Delta F] = F_0 + [\Delta A]$ примет вид

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1000 & -200 & -20 \end{bmatrix}.$$

Так как $[\Delta F] = [\Delta A]$, то для $[F]$ получим

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ [-1025, -975] & [-215, -185] & [-30, -10] \end{bmatrix}.$$

ИХП новой версии $[F]$ $[D(\lambda)] = \det(\lambda I - [F]) =$
 $= [a_0]\lambda^3 + [a_1]\lambda^2 + [a_2]\lambda + [a_3]$ обладает интервальными
 коэффициентами $[a_0] = [1, 1]; [a_1] = [10, 30]; [a_2] = [185, 215];$
 $[a_3] = [975, 1025]$. Полиномы (2.231)–(2.234) записываются в форме

$$D_1(\lambda) = 975 + 185\lambda + 30\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$D_2(\lambda) = 1025 + 185\lambda + 10\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$D_3(\lambda) = 1025 + 215\lambda + 10\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$D_4(\lambda) = 975 + 215\lambda + 30\lambda^2 + \lambda^3.$$

Все полиномы В.Л. Харитонова гурвицевы, следовательно, гурвицев ИХП $[D(\lambda)]$. Система робастно устойчива. ■

3. НЕАДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

3.1. Основные положения обобщенного модального управления

Первоначально задача модального управления ставилась как задача обеспечения желаемой локализации собственных значений (мод) матрицы состояния проектируемой системы, которая доставляла бы последней требуемое качество переходных и установившихся процессов. Алгоритмически задача модального управления (МУ) в такой постановке, в основном, решалась путем приведения матрицы состояния модели объекта управления (ОУ) к канонической фробениусовой форме. Такой способ синтеза модального управления себя оправдывал для случая систем типа "одномерный вход–выход" (SISO-типа), для случая управления ОУ типа "многомерный вход–выход" (MIMO-типа) способ столкнулся с заметными трудностями. Для преодоления возникших трудностей разработчиками использовались достаточно громоздкие конструкции [приведения](#) матриц MIMO объектов управления к представлению во фробениусовом базисе. При этом с ростом размерности многомерных ОУ заметно росло число обусловленности матриц приведения подобия, что порождало проблемы вычислительной устойчивости алгоритмов в целом.

Поиск методов синтеза модального управления, инвариантных относительно базиса представления и размерности входов–выходов, привел к модификации первичной постановки задачи модального управления. В модифицированном виде задача получила формулировку обеспечения векторного и матричного подобия процессов и модальных представлений в синтезируемой системе процессам и модальным представлениям некоторой эталонной системы с желаемой модальной моделью (ММ). В такой постановке алгоритмическое обеспечение процедуры синтеза модального управления определяется как решение неоднородного матричного уравнения Сильвестра.

Использование уравнения Сильвестра при синтезе обнаруживало и заметное расширение возможностей МУ, состоящее в достижении как желаемой структуры мод, так и собственных векторов матрицы состояния проектируемой системы. Попытки предъявления требований к структуре собственных векторов матрицы состояния проектируемой системы при условии обеспечения желаемой локализации мод стали появляться по мере интенсификации

исследований по использованию геометрических методов в теории управления.

К настоящему моменту потребность разработки алгоритмического обеспечения синтеза обобщенного модального управления (ОМУ), которое доставляет проектируемой системе желаемые структуры мод и собственных векторов, содержательно оформилась.

Возможность обеспечения системе желаемой структуры собственных значений и требуемых значений оценок областей неопределенности их локализации, именуемого задачей обеспечения модальной робастности, средствами ОМУ в условиях параметрической неопределенности объекта является предметом исследования этого типа неадаптивного управления.

Если в задачу необобщенного модального управления включить необходимость обеспечения таких элементов геометрического спектра собственных векторов матрицы состояния проектируемой системы, которые совпадают со столбцами матрицы входа, соответствующими доминирующим внешним "параметрическим" входам, то достижима параметрическая инвариантность выходов такой системы.

Более того, управление алгебраическим спектром собственных значений и геометрическим спектром собственных векторов матрицы состояния проектируемой системы позволяет контролировать затраты на управление и меру неравномерности распределения этих затрат на сфере начальных состояний $\|x(0)\| = const$ системы. При этом удастся решать задачу робастности в общесистемной постановке в соответствии с концепцией: чем меньшими затратами на управление достигается желаемый эффект управления и чем равномернее они распределены на сфере начальных состояний, тем большей робастностью в целом, т.е. по совокупности факторов, вносящих в исходный объект управления неопределенность, обладает спроектированная система.

Проблемы синтеза обобщенного модального управления изложим в виде системы утверждений.

Утверждение 3.1. Пусть тройка матриц (A, B, C) с управляемой (A, B) и наблюдаемой (A, C) парой задает непрерывный объект управления в виде (2.39).

Пусть наблюдаемая пара матриц (Γ, H) задает модальную модель. Перечисленные матрицы имеют следующие характеристики: $A, \Gamma \in R^{n \times n}$ – матрицы состояния соответственно ОУ и ММ;

$B, H^T \in R^{n \times r}$ – матрицы управления ОУ и выхода ММ соответственно;
 $C \in R^{m \times n}$ – матрица выхода ОУ.

Потребуем выполнения следующего условия: $\sigma\{A\} = \{\lambda_{A_i}; i = \overline{1, n}\}$ и $\sigma\{\Gamma\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$, алгебраические спектры собственных значений матриц A и Γ не пересекаются $\{\sigma\{A\} \cap \sigma\{\Gamma\} \neq 0\}$, или, что то же самое, характеристические полиномы $\det(\lambda I - A)$ и $\det(\lambda I - \Gamma)$ не являются взаимно аннулирующими.

Тогда матрица K , вычисляемая в форме

$$K = HM^{-1}, \quad (3.1)$$

где M является решением неоднородного матричного уравнения Сильвестра

$$M\Gamma - AM = -BH, \quad (3.2)$$

доставляет матрице

$$F = A - BK \quad (3.3)$$

матричное подобие, записываемое в форме:

$$M\Gamma = FM, \quad (3.4)$$

следствием которого является совпадение алгебраических спектров собственных значений этих матриц $\sigma\{F\} = \sigma\{\Gamma\}$. \square

Доказательство утверждения 3.1 приведено в приложении 6. \blacksquare

Сформулируем утверждение, имеющее важное технологическое значение.

Утверждение 3.2. Если матрица Γ модальной модели является матрицей простой структуры и задается в диагональной форме

$$\Gamma = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}, \quad (3.5)$$

то столбцы M_i матрицы M являются собственными векторами матрицы F . \square

Доказательство утверждения строится на столбцовой форме записи (3.1), в результате чего в силу структуры (П.6.81) столбцы Λ_i матрицы Λ получим:

$$FM_i = \lambda_i M_i : i = \overline{1, n}. \quad \blacksquare (3.6)$$

Сформулированные утверждения (3.1) и (3.2) составляют основу построения алгоритмического обеспечения решения задачи обобщенного модального управления. Очевидно, задача ОМУ может иметь две модификации.

В первой модификации задача ОМУ является полной, под которой понимается обеспечение полной структуры желаемых мод $\sigma\{F\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ и полной структуры желаемых собственных векторов $\{\xi_i = M_i : F\xi_i; i = \overline{1, n}\}$ матрицы F состояния проектируемой системы.

Во второй модификации задачи ОМУ, которая называется неполной, требуется обеспечить полную структуру желаемых мод $\sigma\{F\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ и неполную структуру мощностью в l элементов собственных векторов $\{\xi_i = M_i = fix; i = \overline{1, l}; l < n\}$ матрицы.

В этой связи сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 3.3. Для решения полной задачи обобщенного модального управления достаточно, чтобы матрица управления B объекта обладала рангом, равным $n = \dim x$:

$$rang B = n. \quad (3.7)$$

При этом полная задача ОМУ решается с помощью обратной связи по состоянию ОУ с матрицей K вида

$$K = B^{-1}(AM - M\Lambda)M^{-1}. \quad \square \quad (3.8)$$

Доказательство утверждения приведено в приложении 6. ■

Утверждение 3.4. Пусть $\xi_i; i = \overline{1, l}; l \leq r$, где $r = rang B, r < n$; l – число желаемых собственных векторов, соответствующих их первым желаемым модам из числа n общей структуры желаемых мод $\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$.

Тогда решение неполной задачи ОМУ достигается с помощью матрицы K обратной связи, задаваемой матричным выражением

$$K = [\overline{H} \mid \overset{\circ}{H}] [\overline{M} \mid \overset{\circ}{M}]^{-1} = [(B^T B)^{-1} B^T (A\overline{M} - \overline{M}\overline{\Lambda} \mid \overset{\circ}{H}) [\overline{M} \mid \overset{\circ}{M}]^{-1}, \quad (3.9)$$

где

$$\overline{M} = row\{M_i = \xi_i; i = \overline{1, l}\}; \overline{\Lambda} = diag\{\lambda_i; i = \overline{1, l}\}, \quad (3.10)$$

а матрицы $\overset{\circ}{M}$ и $\overset{\circ}{H}$ связаны матричным уравнением Сильвестра

$$\dot{M}^0 - AM^0 = -BH^0, \quad (3.11)$$

в котором

$$K^0 = \text{diag} \{ \lambda_i; i = \overline{l+1, n} \}. \quad \square \quad (3.12)$$

Доказательство утверждения приведено в приложении 6. ■

Утверждения 3.3. и 3.4 составляют алгоритмическую основу обобщенного модального управления объектами с параметрическими неопределенностями, т.е. управления неадаптивными методами.

3.2. Модальноробастное управление многомерными объектами

Сформулируем постановку задачи модальноробастного управления многомерными объектами.

Рассматривается непрерывный многомерный (ММО-типа) объект управления, базис представления которого таков, что вся параметрическая неопределенность его физических компонентов модельно представлена в форме неопределенности матрицы состояния так, что он имеет векторно-матричное описание:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t); x(0); y(t) = Cx(t). \quad (3.13)$$

Объект управления (3.13) агрегируется с законом управления (3.4)

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t), \quad (3.14)$$

образуя тем самым систему

$$\dot{x}(t) = (F + \Delta F)x(t) + Gg(t), x(0), y(t) = Cx(t), \quad (3.15)$$

где

$$F = A - BK, \Delta F = \Delta A, G = BK_g. \quad (3.16)$$

В силу параметрической неопределенности спроектированной системы (3.15), представленной матричным компонентом ΔF ее матрицы состояния, будут обладать неопределенностью и элементы алгебраического спектра $\sigma\{F + \Delta F\} = \{\lambda_i + \Delta\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных значений. Построим на системных компонентах (матрица состояния, алгебраический спектр собственных значений), обладающих параметрической неопределенностью, оценки их неопределенности.

Определение 3.1. Оценкой абсолютной параметрической неопределенности матрицы $(F + \Delta F)$, где F – номинальная составляющая этой матрицы, называется скалярная величина Δ_F , определяемая выражением

$$\Delta_F = \|\Delta F\|. \quad (3.17)$$

Определение 3.2. Оценкой относительной параметрической неопределенности матрицы $(F + \Delta F)$ называется скалярная величина δ_F , определяемая соотношением

$$\delta_F = \frac{\|\Delta F\|}{\|F\|} = \frac{\Delta_F}{\|F\|}. \quad (3.18)$$

Определение 3.3. Оценкой абсолютной параметрической неопределенности вектора $(\lambda + \Delta\lambda) = \text{col}\{\lambda_i + \Delta\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных векторов матрицы $(F + \Delta F)$ называется скалярная величина Δ_λ , определяемая соотношением

$$\Delta_\lambda = \|\Delta\lambda = \text{col}\{\Delta\lambda_i; i = \overline{1, n}\}\|. \quad (3.19)$$

Определение 3.4. Оценкой относительной параметрической неопределенности вектора $(\lambda + \Delta\lambda) = \text{col}\{\lambda_i + \Delta\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных векторов матрицы $(F + \Delta F)$ называется скалярная величина δ_λ , определяемая выражением

$$\delta_\lambda = \frac{\|\Delta\lambda\|}{\|\lambda\|} = \frac{\Delta_\lambda}{\|\lambda\|}. \quad (3.20)$$

Необходимо отметить, что в силу соотношений для оценки Δ_F оказывается справедливой запись

$$\Delta_F = \|\Delta F\| = \|\Delta A\|. \quad (3.21)$$

Утверждение 3.5. Оценки абсолютной параметрической неопределенности Δ_F и Δ_λ матрицы состояния системы (3.15) и ее алгебраического спектра собственных значений соответственно удовлетворяют неравенству

$$\Delta_\lambda \leq C\{M\} \Delta_F, \quad (3.22)$$

где $C\{M\}$ – число обусловленности собственных векторов матрицы F единичной нормы так, что

$$M = \text{row}\{M_i : FM_i = \lambda_i M_i \text{ \& } \|M_i\| = 1; i = \overline{1, n}\}. \quad \square \quad (3.23)$$

Доказательство утверждения 3.5 с учетом (3.17) и (3.19) проводится по схеме доказательства утверждения 2.13.

■

Нетрудно видеть из (3.22) с учетом (3.21), что эффект введения регулятора с законом управления (3.14) при решении задачи обеспечения модальной робастности системы (3.15) в абсолютной постановке проявляется лишь в управлении числом обусловленности $C\{M\}$, минимальное значение которого $C\{M\} = 1$ достигается на ортогональной структуре собственных векторов, доставляемой средствами ОМУ.

Утверждение 3.6. Оценка относительной параметрической неопределенности δ_F и δ_λ матрицы состояния (3.15) и ее алгебраического спектра собственных значений соответственно удовлетворяет неравенству

$$\delta_\lambda \leq C^2\{M\} \delta_F. \quad \square \quad (3.24)$$

Доказательство утверждения 3.6 проведено в приложении 6.

■

Нетрудно видеть, что оценочное неравенство (3.24) с учетом (3.18) и (3.21) принимает вид

$$\delta_\lambda \leq C^2\{M\} \frac{\|\Delta A\|}{\|F\|} = C^2\{M\} \frac{\|\Delta A\|}{\|A - BK\|}. \quad (3.25)$$

Свяжем значения δ_λ и $\|\Delta A\|$ со значением $\|\Lambda\|$ нормы матрицы состояния модели утверждением.

Утверждение 3.7. Оценка относительной параметрической неопределенности δ_λ алгебраического спектра собственных значений матрицы состояния спроектированной системы (3.15), вариация ΔA матрицы состояния ОУ (3.13) и матрица Λ состояния ММ в нормах удовлетворяют неравенству

$$\delta_\lambda \leq C^3\{M\} \frac{\|\Delta A\|}{\|\Lambda\|}. \quad \square \quad (3.26)$$

Доказательство утверждения 3.7 приведено в приложении 6. ■

Положим неравенство (3.26) в основу формирования требований к значению $\|\Lambda\|$, для чего (3.26) запишем в форме

$$\delta_\lambda \leq C^3 \{M\} \frac{\|\Delta A\|}{\|\Lambda\|} = \delta_{\lambda R}, \quad (3.27)$$

где $\delta_{\lambda R}$ – требуемое значение оценки модальной робастности системы (3.15). Из (3.27) для требуемого значения $\|\Lambda\|_R$ нормы матрицы состояния модальной модели получим:

$$\|\Lambda\| \geq \|\Lambda\|_R = C^3 \{M\} \frac{\|\Delta A\|}{\delta_{\lambda R}}. \quad (3.28)$$

Соотношение (3.28) и набор требований к динамическим свойствам номинальной реализации системы (3.15) составляют основу алгоритма синтеза ЗУ вида (3.14) методами обобщенного модального управления.

Для случая реализуемости полной задачи ОМУ может быть предложен следующий алгоритм синтеза модальноробастных систем вида (3.15).

Алгоритм 3.1.

1. Построение (A, B, C) – номинального матричного представления некоторого ОУ в базисе, в котором неопределенность физических параметров приводит к неопределенности значения только матрицы состояния объекта в форме матричного компонента ΔA так, что становится справедливым модальное представление (3.13).

2. Задание требований к качеству переходных и установившихся процессов номинальной версии проектируемой системы, а также величины $\delta_{\lambda R}$ требуемого значения оценки модальной робастности в форме оценки δ_λ относительной параметрической неопределенности алгебраического спектра собственных значений матрицы $(F + \Delta A)$ системы (3.15).

3. Формирование матрицы Λ состояния модальной модели из условия

$$\Lambda = \arg \left\{ \|\Lambda\| \geq \|\Lambda\|_R = C^3 \{M\} \frac{\|\Delta A\|}{\delta_{\lambda R}} \& \sigma\{\Lambda\} = \sigma\{F\} \right\} \quad (3.29)$$

в предположении, что $C\{M\} = 1$.

4. Формирование ортогональной матрицы M собственных векторов номинальной версии матрицы состояния A_Σ системы (3.15) из условия

$$M = \arg\{C\{M\} = 1\}. \quad (3.30)$$

Для формирования ортогональной матрицы M размерности $(n \times n)$ достаточно взять любую невырожденную $(n \times n)$ -матрицу N и построить ее SVD-разложение

$$N = U_N \sum_N V_N^T,$$

где $U_N U_N^T = U_N^T U_N = I$, $V_N V_N^T = V_N^T V_N = I$.

Тогда в качестве матрицы M может быть взята любая из матриц левого U_N или правого V_N сингулярных базисов.

5. Вычисление матрицы K закона управления (3.14) в силу соотношения (3.8).

6. Вычисление матрицы K_g прямой связи по внешнему воздействию ЗУ (3.14) с помощью соотношения

$$\begin{aligned} K_g &= \arg\{-CF^{-1}BK_g = (1-\delta)I\} = -(1-\delta)(CF^{-1}B)^{-1} = \\ &= -(1-\delta)(CM\Lambda^{-1}M^{-1}B)^{-1} \end{aligned} \quad (3.31)$$

где δ – величина статизма отношения "вход–выход" номинальной версии системы (3.15).

7. Вычисление апостериорного значения оценки δ_λ в форме (3.20), где с целью минимизации достаточности оценок целесообразно использование бесконечных векторных норм.

8. Формирование реализационной версии закона управления (3.14), записываемой в форме

$$u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t), \quad (3.32)$$

где $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$, $K_\varepsilon = K_g$, а матрица K_x ищется по аналогии с (2.65) в форме

$$K_x = K - K_\varepsilon C = K + (1-\delta)(CF^{-1}B)^{-1}. \quad (3.33)$$

Необходимо сделать к приведенному алгоритму следующее примечание. Нетрудно видеть, что множество матриц M , удовлетворяющих условию (3.30) для случая реализуемости полной задачи ОМУ, образует континуум. В этой связи наложим на выбор

матрицы M , которая по существу определяет в силу (3.8) выбор матрицы $K = K(M)$ обратной связи по состоянию ОУ, ограничение в форме

$$M = \arg \min_M \left\{ J_u = C^{\frac{1}{2}} \{W_u\} \alpha_M^{\frac{1}{2}} \{W_u\} \right\}. \quad (3.34)$$

В соотношении (3.34) W_u – грамиан затрат на управление, которое при $g(t) \equiv 0$ как элемент функционального пространства L_T^p при $p = 2, \tau = [0, \infty)$ на множестве свободных движений, порождаемых сферой начальных состояний $\|x(0)\| = \text{const}$, характеризуется нормой $\|u(t)\|$, удовлетворяющий соотношениям:

$$\|u(t)\|^2 = \int_0^\infty u^T(t)u(t)dt = x^T(0) \int_0^\infty e^{A_z^T t} K^T K e^{A_z t} dx(0) = x^T(0) W_u x(0).$$

Грамиан W_u затрат на управление вычисляется в силу матричного уравнения типа уравнения Ляпунова:

$$F^T W_u + W_u F = -K^T K. \quad (3.35)$$

В (3.34) $\alpha_M \{W_u\}$ – максимальное сингулярное число грамиана W_u затрат на управление, $C \{W_u\}$ – его число обусловленности. Таким образом, функционал J_u в (3.34) контролирует затраты на управление и обусловленность их распределения на сфере $\|x(0)\| = \text{const}$.

В связи со сказанным п. 4 алгоритма 3.1 должен быть модифицирован и записан в следующей форме:

4. Формирование матрицы M собственных векторов матрицы A_z состояния системы (3.15) из условия

$$M = \arg \left\{ C \{M\} = 1 \& \min_M \left\{ J_u = C^{\frac{1}{2}} \{W_u\} \alpha_M^{\frac{1}{2}} \{W_u\} \right\} \right\}. \quad (3.36)$$

Теперь рассмотрим случай реализуемости лишь неполной задачи обобщенного модального управления. Этому случаю соответствует ситуация $\text{rang} B = r < n$. При неполной задаче ОМУ исчезает возможность свободного назначения структуры мод матрицы $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_i, i = \overline{1, n} \}$. Управление числом обусловленности матрицы M осуществляется в форме

$$C \{M\} = C \{M(H) : M \Lambda - A M = -B H : \Lambda = \text{fix}, H = \text{var}\} \quad (3.37)$$

путем модификации матрицы H в классе наблюдаемых пар (Λ, H) при фиксированной матрице Λ . Причем модификация H осуществляется в силу алгоритмов линейного программирования, таких как алгоритм Нелдера–Мида. Заметим, что в качестве начальной пары матриц M и H может быть взята пара, конструируемая в соответствии с положениями утверждения 3.4.

В итоге матрица M ищется с помощью итерационной процедуры, приводящей к выполнению условия

$$M = \arg \min_H \{C\{M(H)\} : M\Lambda - AM = -BH : \Lambda = \text{fix}, H = \text{var}\}. \quad (3.38)$$

Таким образом, для случая реализуемости лишь неполной задачи ОМУ может быть предложен следующий алгоритм синтеза модальноробастных систем вида (3.15).

Алгоритм 3.2.

1. Выполнение п.п. 1–3 алгоритма 3.1.
2. Нахождение пары матриц $(M, H) = \arg \min \{C\{M(H)\}\}$ с помощью итерационной процедуры, опирающейся на (3.38). Если $\min_H C\{M(H) : \|M_i\| = 1; i = \overline{1, n}\} = 1$, то переход к п. 5 алгоритма, иначе – п. 3.
3. Возвращение к п. 3 алгоритма 3.1 с целью формирования новой версии матрицы Λ при заданных $\|\Delta F\| = \|\Delta A\|$, требуемого значения $\delta_{\lambda R}$ модальной робастности и полученного в п. 2 значений числа обусловленности $C\{M\}$ в силу соотношения (3.29).
4. Фиксация результата в форме тройки матриц (Λ, H, M) , где Λ удовлетворяет (3.29) при паре (H, M) , удовлетворяющей (3.38), выполнение которого позволяет осуществить переход к п. 5, иначе – к п. 2;
5. Выполнение п.п. 5–8.

Следует заметить, что для сокращения объема вычислений при организации итерационной процедуры в теле алгоритма 3.2 целесообразно использовать параметризованное характеристической частотой ω_0 представление используемого распределения мод. Необходимо также отметить, что, если в результате синтеза достигается выполнение условия $\delta_\lambda \leq \delta_{\lambda R}$, то становится справедливым аппарат теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка. В связи с этим при вычислении в

п. 7 алгоритма 3.1 апостериорного значения δ_λ в силу определения (3.20) в последнем целесообразно $\Delta_\lambda = \|\Delta\lambda\|$ вычислять с помощью соотношения (П.6.51) в форме

$$\|\Delta\lambda\| = \left\| \text{col} \left\{ (M^{-1} \Delta F M)_{ii}; i = \overline{1, n} \right\} \right\|. \quad (3.39)$$

Пример 3.1. Процедуру синтеза модальноробастной системы методами ОМУ проиллюстрируем на примере многомерного объекта управления, допускающего решение полной задачи ОМУ. Тогда, следуя алгоритму 3.1, выполним следующие действия.

1. Построение (A, B, C) – номинального представления ОУ, характеризующегося матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & | & 0 \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & | & 1 \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & | & 0 \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Параметрическая неопределенность проявляется в появлении нежелательных антисимметричных перекрестных связей так, что

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & | & 0.5 \\ -0.5 & | & 0 \end{bmatrix}; \|\Delta A\| = 0.5; \delta_A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = 0.5.$$

2. Формирование технических требований в форме:
 - время переходного процесса $t_n \leq 0.45c$;
 - перерегулирование $\sigma \leq 5\%$;
 - требуемая величина оценки модальной робастности $\delta_{\lambda R} = 0.02$.
3. Выбор в качестве желаемого распределения мод проектируемой системы распределения мод Баттерворта второго порядка, которое в параметризованной характеристической частотой ω_0 форме позволяет для матрицы Λ записать

$$\Lambda = \omega_0 \begin{bmatrix} -0.707 & 0.707 \\ -0.707 & -0.707 \end{bmatrix}.$$

Значение характеристической частоты ω_0 определяется в силу (3.29) и технических требований к проектируемой системе (3.15) из условия

$$\omega_0 = \max \left\{ \omega_0 \geq \frac{4.5}{t_n} = 10c^{-1}; \omega_0 \geq \frac{\|\Delta A\|}{\delta_{\lambda R}} = \frac{0.5}{0.02} = 25c^{-1} \right\} = 25c^{-1}.$$

В итоге матрица Λ принимает вид

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -17.677 & 17.677 \\ -17.677 & -17.677 \end{bmatrix}.$$

4. Формирование ортогональной матрицы $M : C\{M\} = 1$, которое приводит к матрице

$$M = \begin{bmatrix} 0.8053 & -0.5928 \\ 0.5928 & 0.8053 \end{bmatrix}.$$

Вычисление матрицы K обратных связей по состоянию закона управления (3.14) в силу соотношения (3.8) приводит к результату

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -36.3553 \\ 17.6777 & 18.6777 \end{bmatrix}.$$

5. Вычисление матрицы K_g прямых связей по внешнему воздействию $g(t)$ закона управления (3.14) в силу соотношения (3.8) для случая $\delta = 0$, позволяющее записать:

$$K_g = \begin{bmatrix} 0 & -35.3553 \\ 17.6777 & 17.6777 \end{bmatrix}.$$

6. Вычисление апостериорного значения оценки δ_λ модальной робастности в силу определения (3.20) $\delta_\lambda = \frac{\|\Delta\lambda\|}{\|\lambda\|}$, характеризующееся компонентами $\|\lambda\| = \omega_0 = 25$ и $\|\Delta\lambda\| = 0.5$, полученными с помощью (3.39), приводит к величине $\delta_\lambda = 0.02$.

7. Представление спроектированной системы (3.15) номинальной тройкой матриц (F, G, C) , имеющих реализацию

$$F = \begin{bmatrix} -17.677 & 17.677 \\ -17.677 & -17.677 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 17.677 & -17.677 \\ 17.677 & 17.677 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Параметрическая неопределенность проявляется в вариации $\Delta F = \Delta A$ матрицы состояния, которая для спроектированной системы

характеризуется оценкой относительной неопределенности δ_F (3.18), компоненты которой $\Delta_F = \|\Delta F\|$ и $\|F\|$ принимают значения $\|\Delta F\| = \|\Delta A\| = 0.5$; $\|F\| = 25$, что приводит к величине $\delta_F = 0.02$.

Закон управления (3.14) не изменил оценки абсолютной неопределенности матрицы состояния, но при этом в двадцать пять раз уменьшил значение оценки относительной параметрической неопределенности этой матрицы.

□

В заключение следует заметить, что если параметрическая неопределенность исходных физических параметров проявляется в неопределенности системных параметров, которыми оказываются элементы как матрицы состояния, так и матрицы управления ОУ, то в этом случае следует воспользоваться приемом, предложенным в параграфе 2.3.4. Этот прием состоит во включении на входе объекта управления буферной системы вида (2.199).

3.3. Синтез параметрически инвариантных систем

Рассматриваются задачи синтеза систем управления, минимизация нежелательного эффекта параметрической неопределенности матричных компонентов модельного представления объектов управления которых достигается в классе неадаптивных законов управления, доставляющих системе инвариантность отношения "параметрический вход – выход (ошибка)". Базовые концепции сведения задачи чувствительности переменных динамической системы к параметрической неопределенности матриц модели ОУ к задаче анализа системных свойств синтезируемой системы (управляемости, наблюдаемости и инвариантности) отношения "параметрический вход – системные переменные" изложены в параграфе 2.3.4. В случае достижения неуправляемости этого отношения, т.е. нулевой его передаточной функции, наблюдается инвариантность его выхода ко входу, что позволяет называть такую систему параметрически инвариантной. Параметрическая инвариантность будет полной, если она зафиксирована на всех сепаратных отношениях отмеченного типа, в противном случае она является частичной.

В настоящем параграфе рассматривается проблема погружения процедуры синтеза законов неадаптивного управления, доставляющих системе параметрическую инвариантность с одновременным удовлетворением требований к динамическим свойствам процессов в

ней, в алгоритмическую среду синтеза обобщенного модального управления. Это погружение осуществляется на примере двух типов законов неадаптивного управления: модального управления, ориентированного в форме (3.14) относительно внешнего задающего воздействия произвольного вида, и обобщенного изодромного управления для случая конечномерного задающего воздействия.

Для случая синтеза закона управления в форме (3.14) методами обобщенного модального управления, доставляющего проектируемой системе параметрическую инвариантность с одновременным обеспечением требуемых показателей в переходном и установившемся режимах отношению задающий внешних вход – выход системы, может быть предложен следующий алгоритм.

Алгоритм 3.3.

1. Построение (A, B, C) – номинального векторно-матричного представления объекта управления в базисе, в котором неопределенность физических параметров представлена неопределенностью задания только матрицы состояния в форме матричного компонента ΔA так, что становится справедлива векторно-матричная модель ОУ (2.191), (3.13). При этом предпочтительны такие базисы, в которых параметризуемые системные элементы матрицы A , т.е. отличные от нуля и единицы элементы этой матрицы, были размещены в минимальном числе строк. Примеров такого базиса является фробениусов базис строчной версии. Желательно, чтобы матрица C выхода объекта принимала в выбранном базисе вид

$$C = \text{diag} \left\{ \left[1 \mid 0_{n_l-1}^T \right]; l = \overline{1, m}; \sum_{l=1}^m n_l = n \right\}, \quad (3.40)$$

здесь n_l – размерность вектора состояния сепаратного l -го канала ОУ ММО-типа.

2. Построение факторизованного представления матричного компонента ΔA в форме (2.192)

$$\Delta A = \sum_{j=1}^p \Delta A_j, \quad \Delta A_j : \text{rang} \Delta A_j = 1; j = \overline{1, p} \quad (3.41)$$

с максимальным значением p , равным числу ненулевых элементов ΔA . Единичное значение ранга матрицы ΔA_j позволяет представить последнюю в форме (2.194)

$$\Delta A_j = d_j h_j^T : \|h_j\| = 1; j = \overline{1, p}. \quad (3.42)$$

представление (2.194), (3.42) позволяет ввести в рассмотрение p -мерный вектор $\zeta(t) = \text{col}\{\zeta_j(t) = h_j^T x(t); j = \overline{1, p}\}$ внешнего "параметрического" воздействия так, что исходный ОУ (2.191) с параметрической неопределенностью ΔA задания матрицы состояния

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t),$$

получает номинальное векторно-матричное описание (2.198), имеющее вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + D\zeta(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad (3.43)$$

где $D = \text{row}\{D_j = d_j; j = \overline{1, p}\}$ – $(n \times p)$ -матрица внешнего "параметрического" входа.

3. Формирование матрицы весов P_s (2.201) в виде

$$P_s = \text{row}\left\{\text{col}\left[\|W_{ylj}\|; l = \overline{1, m}\right]; j = \overline{1, p}\right\}, \quad (3.44)$$

где W_{ylj} – матрица управляемости, построенная на тройке матриц (C^l, A, D_j) , C^l – l -ая строка матрицы C , D_j – j -ый столбец D , с целью ранжирования параметрических входов ξ_j ($j = \overline{1, p}$), а, следовательно, матричных компонентов ΔA_j по степени их влияния на выходы $y_l(t)$ ($l = \overline{1, m}$) объекта, оцениваемой с помощью норм $\|P_{sj}\|$ ($j = \overline{1, p}$) столбцов матрицы весов.

4. Модификация представления (3.41) матричного компонента ΔA , а, следовательно, матрицы D , с целью минимизации p – числа столбцов D_j ($j = \overline{1, p}$) этой матрицы путем аддитивного агрегирования доминирующих параметрических входов в (3.43) с одновременным обеспечением выполнения условия (2.204) так, что D ищется из условия

$$D = \arg\left\{C^l D_j = 0; l = \overline{1, m} \ \& \ p = \min_p \arg\left(\Delta A = \sum_{j=1}^p \Delta A_j; \text{rang} \Delta A_j = 1\right)\right\}. \quad (3.45)$$

5. Формирование требований к качеству процессов по выходным переменным $y_l(t)$ ($l = \overline{1, m}$) в переходном и установившемся режимах при задающем внешнем воздействии $g(t)$ номинальной версии проектируемой системы

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t) + D\zeta(t), \quad y(t) = Cx(t) \quad (3.46)$$

где

$$F = A - BK, \quad G = BK_g, \quad (3.47)$$

выход $y(t)$ инвариантен относительно $\zeta(t)$ так, что выполняются соотношения

$$y(t) = y\{t, g(t), \zeta(t) \neq 0\} = y\{t, g(t), \zeta(t) = 0\}. \quad (3.48)$$

Представление сформулированных требований в виде желаемой структуры мод $\sigma\{F\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$.

6. Проверка условия

$$\dim \zeta(t) = p \leq r = \text{rang } B. \quad (3.49)$$

В случае его выполнения переход к п. 7 алгоритма, иначе – к п.11.

7. Конструирование матрицы K отрицательной обратной связи по состоянию ОУ (2.191), (3.43) закона управления (3.14), задаваемого выражением

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t), \quad (3.50)$$

методами обобщенного модального управления, опирающегося на решение матричного уравнения Сильвестра, так что для K можно записать

$$K = HM^{-1} : M = \arg\{M\Lambda - AM = -BH\}, \quad (3.51)$$

где $(\Lambda, H) = \arg\{\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\} \& \text{observ}(\Lambda, H)\}$.

Уравнение Сильвестра в (3.51) в силу специфики задачи синтеза, связанной с обеспечением параметрической инвариантности выходов $y_l(t)$ ($l = \overline{1, m}$) относительно параметрических внешних воздействий $\zeta_j(t)$ ($j = \overline{1, p}$), которая решается с использованием положений утверждения 2.19 в виде выражения (2.210), приводимого в форме

$$K = \arg \left\{ D_j = \xi_j : F \xi_j = \lambda_j \xi_j; j = \overline{1, p} \text{ \& } \sigma\{F\} = \sigma\{\Lambda\} \right\}, \quad (3.52)$$

следует представить в факторизованном по геометрическому и алгебраическому спектрам матрицы F виде

$$\left[D \mid \tilde{M} \right] \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda} \end{bmatrix} - A \left[D \mid \tilde{M} \right] = -B \left[H_p \mid \tilde{H} \right]. \quad (3.53)$$

Представление уравнения Сильвестра (3.53) в декомпозированном на два уравнения Сильвестра виде

$$D\Lambda_p - AD = -BH_p, \quad (3.54)$$

$$\tilde{M}\tilde{\Lambda} - A\tilde{M} = -B\tilde{H}. \quad (3.55)$$

В матричных уравнениях (3.54), (3.55)

$$\left(\Lambda_p, \tilde{\Lambda} \right): \Lambda = \text{diag} \left\{ \Lambda_p = \text{diag} \left(\lambda_i; i = \overline{1, p} \right); \tilde{\Lambda} = \text{diag} \left(\lambda_i; i = \overline{p+1, n} \right) \right\}, \quad (3.56)$$

$$\tilde{H} = \arg \left\{ \text{observ} \left(\tilde{\Lambda}, \tilde{H} \right) \right\}. \quad (3.57)$$

Решение уравнения Сильвестра (3.54) относительно матрицы H_p в форме

$$H_p = \left(B^T B \right)^{-1} B^T \left(AD - D\Lambda_p \right). \quad (3.58)$$

Решение уравнения Сильвестра (3.55) относительно матрицы $\tilde{M} = \tilde{M}(\tilde{H})$. Конструирование матрицы K обратной связи по состоянию ОУ в силу (3.51), (3.55) и (3.58), определяемой выражением

$$K = \left[(B^T B)^{-1} B^T (AD - D\Lambda_p) \mid \tilde{H} \right] \left[D \mid \tilde{M} \right]^{-1} \quad (3.59)$$

8. Конструирование матрицы K_g прямой связи по внешнему задающему воздействию $g(t)$ из условия ориентации системы относительно $g(t)$ средствами K_g , удовлетворяющей соотношению

$$K_g = \arg \left\{ \Phi(s) = C(sI - F)^{-1} B K_g \Big|_{s=0} = I \right\},$$

что приводит к выражению

$$K_g = - \left(CF^{-1} B \right)^{-1} = - \left\{ C \left[D \mid \tilde{M} \right] \Lambda^{-1} \left[D \mid \tilde{M} \right]^{-1} \right\}^{-1}. \quad (3.60)$$

9. Построение реализационной версии ЗУ (3.50), приводящей к структуре системы с единичной по выходу обратной связи, задаваемой выражением

$$u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t), \quad (3.61)$$

где $K_\varepsilon = K_g$, $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$ – ошибка воспроизведения задающего воздействия, матрица K_x модифицированной обратной связи по состоянию ОУ удовлетворяет в силу (3.50), (3.61) соотношению $K = K_\varepsilon C + K_x$, позволяющему вычислить матрицу K_x с помощью выражения

$$K_x = K - K_\varepsilon C. \quad (3.62)$$

10. Проверка эффективности спроектированного закона неадаптивного управления в формах (3.50), (3.61) на предмет удовлетворения техническим требованиям показателей качества процессов по выходу $y(t)$ и ошибке $\varepsilon(t)$ номинальной версии системы (3.46) (при $\zeta(t) \equiv 0$) в переходном и установившемся режимах средствами среды моделирования Matlab.

Проверка наличия у системы параметрической инвариантности средствами среды моделирования Matlab осуществляется путем придания матрице состояния системы параметрической неопределенности в виде аддитивных матричных компонентов ΔA_j ($j = \overline{1, p}$) и контроля вариаций траекторий системы на ее выходе.

В случае положительного результата проверки переход к п. 16 алгоритма, иначе – к п. 1.

11. Выделение r доминирующих матричных компонентов ΔA_j в представлении (3.41) по степени их влияния на выходы $y_l(t)$ ($l = \overline{1, m}$), оцениваемой с помощью норм $\|P_{sj}\|$ ($j = \overline{1, r}$) столбцов матрицы весов (3.44) и формирования редуцированной матрицы D ранга r , столбцы которой согласованы с доминирующими компонентами ΔA_j ($j = \overline{1, r}$) в силу (3.45).
12. Расширение технических требований к проектируемой системе требованием к величине $\delta_F = \frac{\|\Delta A\|}{F}$ оценки относительной параметрической неопределенности матрицы состояния

проектируемой системы в форме выполнения условия $\delta_F \leq \delta_{FR}$, где задаваемая величина δ_{FR} допускает использование аппарата теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка. Отображение заданной величины на требование к норме $\|\Lambda\|$ диагональной матрицы $\{\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}\}$ состояния модальной модели, являющейся носителем желаемых мод $\sigma\{F\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ проектируемой системы, в виде условия

$$\|\Lambda\| \geq \frac{\|\Delta A\|}{\delta_{FR}} C\{M\}. \quad (3.63)$$

В итоге – выбор матрицы Λ из условия

$$\Lambda = \arg \left\{ \sigma\{\Lambda\} = \sigma\{F\} = \{\lambda_i, i = \overline{1, n}\} \& \|\Lambda\| \geq \frac{\|\Delta A\|}{\delta_{FR}} C\{M\} \right\} \quad (3.64)$$

13. Допущение в (3.64) $C\{M\} = 1$ и конструирование матрицы K закона управления (3.50) с помощью процедуры, описанной в п. 7 алгоритма, положив в нем $p = r$, а также дополнение процедуры синтеза минимизацией числа обусловленности матрицы M , воспользовавшись свободой назначения матрицы \tilde{H} так, что последняя выбирается из условия

$$\tilde{H}^* = \arg \left\{ C \left\{ \begin{bmatrix} D & M^* \tilde{H}^* \end{bmatrix} \right\} = \min_{\tilde{H}^*} \& \text{observ}(\tilde{H}^*) \right\}. \quad (3.65)$$

14. Выполнение п.п. 8 и 9 алгоритма.

15. Проверка эффективности спроектированного закона неадаптивного управления в формах (3.50), (3.61) по схеме п.10 алгоритма, дополнив его оценкой вариаций показателей качества методами теории чувствительности для вариаций системных параметров ΔA_j ($j = \overline{r+1, p}$), относительно которых параметрическая инвариантность выходов не обеспечена.

В случае положительного результата проверки переход к п. 16 алгоритма, иначе – к п. 12.

16. Техническая реализация алгоритма. ■

Прежде, чем решать задачу синтеза параметрически инвариантных систем в классе алгоритмов обобщенного изодромного управления для случая конечномерного задающего воздействия,

напомним его базовые концепции на примере номинальной реализации ОУ (2.191), (3.13), (3.43), записанной в форме

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(0); \quad y(t) = Cx(t). \quad (3.66)$$

Ставится задача синтеза закона управления, который обеспечивает слежение выхода $y(t)$ за конечномерным входным задающим воздействием $g(t)$, который генерируется автономной системой

$$\dot{z}(t) = Ez(t); \quad z(0); \quad g(t) = Pz(t) \quad (3.67)$$

с нулевой установившейся ошибкой $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$. В (3.67) $E \in R^{k \times k}$, $P \in R^{m \times k}$ – соответственно матрица состояния и выхода источника внешнего воздействия (ИВВ).

Будем полагать, что объект управления сконструирован так, что спектры $\sigma\{A\}$ и $\sigma\{E\}$ собственных значений матриц состояния ОУ и ИВВ удовлетворяют условию включения

$$\sigma\{E\} \subset \sigma\{A\}. \quad (3.68)$$

Введем в рассмотрение n -мерный вектор $\eta(t)$ ошибки слежения по состоянию, задав его соотношением

$$\eta(t) = Tz(t) - x(t), \quad (3.69)$$

где $T - (n \times k)$ -матрица в общем случае особого преобразования. Заметим, что вектор $\eta(t)$, представляющий собой линейную комбинацию векторов состояния, обладает свойствами состояния. Покажем, что поставленная задача слежения за конечномерным задающим воздействием может быть сведена с использованием переменной $\eta(t)$ (3.69) к задаче управления по состоянию (регулятора), одной из версий которого является модальное управление. Для этих целей сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 3.8. Если матрица T в (3.69) удовлетворяет матричным соотношениям

$$TE - AT = 0, \quad P - CT = 0, \quad (3.70)$$

то оказывается справедливой модальное представление задачи по векторам $\eta(t)$ и $\varepsilon(t)$, записываемое в форме

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) - Bu(t); \quad \eta(0) = Tz(0) - x(0); \quad \varepsilon(t) = C\eta(t). \quad \square \quad (3.71)$$

Доказательство утверждения строится на дифференцировании соотношения (3.69) и подстановке в полученное выражение (3.66) и (3.67), а также на представлении ошибки слежения $\varepsilon(t)$ с использованием (3.69) в форме

$$\varepsilon(t) = C\eta(t) + (P - CT)z(t).$$

Использование матричных соотношений (3.70) приводит к (3.71), при этом гарантия нетривиального разрешения однородного уравнения Сильвестра в (3.70) заложена в (3.68).

Введем в рассмотрение закон управления в виде связи с матрицей K по вектору $\eta(t)$

$$u(t) = K\eta(t). \quad (3.72)$$

Тогда агрегирование (3.71) и (3.72) дает решение

$$\dot{\eta}(t) = F\eta(t); \quad \eta(0) = Tz(0) - x(0); \quad \varepsilon(t) = C\eta(t), \quad (3.73)$$

где $F = A - BK$. Таким образом, задача обеспечения нулевой установившейся ошибки

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C\eta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Ce^{Ft} \eta(0) = 0 \quad (3.74)$$

решается структурой собственных значений $\sigma\{F\} = \{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$ матрицы состояния автономной системы (3.73). Эта структура определяет темп и характер сходимости (3.74) ошибки слежения к нулю, при этом матрица K может быть сконструирована методами модального управления.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда исходный ОУ (3.66) обладает параметрической неопределенностью, представленной аддитивным матричным компонентом ΔA в матрице состояния. Нетрудно видеть, что он будет присутствовать в модальном представлении (3.71) так, что последнее примет вид

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) + \Delta A\eta(t) - Bu(t); \quad \eta(0); \quad \varepsilon(t) = C\eta(t). \quad (3.75)$$

Воспользуемся представлением ΔA в форме (3.41) с последующим представлением ΔA_j в форме (3.42) и введением p -мерного вектора $\zeta(t) = \text{col}\{\zeta_j(t) = h_j^T \eta(t); j = \overline{1, p}\}$ внешнего "параметрического" воздействия так, что (3.75) имеет вид

$$\dot{\eta}(t) = F\eta(t) + D\zeta(t) - Bu(t); \quad \eta(0); \quad \varepsilon(t) = C\eta(t). \quad (3.76)$$

Введение в (3.76) закона управления (3.72) дает представление процессов по векторам $\eta(t)$ и $\varepsilon(t)$ ошибок, получающее вид

$$\dot{\eta}(t) = F\eta(t) + D\zeta(t); \quad \eta(0); \quad \varepsilon(t) = C\eta(t). \quad (3.77)$$

Таким образом, задача обеспечения нулевой установившейся ошибки $\varepsilon(t)$ в форме (3.74) будет решена, если система (3.77) будет параметрически инвариантной, т.е. будут выполняться условия

$$\varepsilon(t) = \varepsilon\{t, \eta(0), \zeta(t) \neq 0\} = \varepsilon\{t, \eta(0), \zeta(t) \equiv 0\}. \quad (3.78)$$

Нетрудно видеть, что задача с точностью до замены переменных свелась к синтезу закона управления (3.50) при $K_g = 0$, который доставляет системе качество переходных процессов и параметрическую инвариантность методами обобщенного модального управления.

Для случая синтеза закона управления в форме (3.72) методами обобщенного модального управления, доставляющего решаемой задаче слежения за конечномерным внешним задающим воздействием с нулевой установившейся ошибкой средствами обобщенного изотропного управления в условиях параметрической неопределенности матрицы состояния ОУ параметрическую инвариантность ошибки с одновременным качеством сходимости этой ошибки к нулю, может быть предложен следующий алгоритм.

Алгоритм 3.4.

1. Построение (E, P) – минимального векторно-матричного представления ИВВ (3.67), генерирующего на своем выходе внешнее задающее воздействие $g(t)$.
2. Выполнение п. 1 алгоритма 3.3, дополнив его контролем и обеспечением условия включения (3.68).
3. Решение матричных уравнений (3.70).
4. Конструирование матрицы K закона управления (3.72) в полном соответствии с конструированием матрицы K закона (3.50) в силу алгоритма 3.3.

В заключение заметим, что к виду (3.77) сводится задача слежения за конечномерным задающим воздействием, если имеется параметрическая неопределенность задания модели ИВВ (3.67), представимая аддитивным компонентом ΔE его матрицы состояния. В этом случае параметрически возмущенная модель по векторам $\eta(t)$ и $\varepsilon(t)$, в отличие от (3.75), примет вид

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) - (T\Delta E)z(t) - Bu(t); \quad \eta(0); \quad \varepsilon(t) = C\eta(t),$$

что сводится к (3.77).

Пример 3.2.

В качестве примера рассматривается ОУ примера 2.11. Выход этого объекта $y(t)$ должен с нулевой установившейся ошибкой воспроизводить внешнее задающее воздействие полиномиального типа $g(t) = 1 + t$.

Следуя алгоритму 3.4, осуществим следующие действия.

1. Построение минимального (E, P) представления ИВВ (3.67), которым оказывается цепочка из двух интеграторов так, что

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma\{E\} = \{\lambda_{E1,2} = 0\}.$$

2. Построение $(A + \Delta A, B, C)$ представления ОУ, которое дает

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \sigma\{A\} = \{\lambda_{A1,2} = 0; \lambda_{A3} = -1\};$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что условие включения (3.68) $\sigma\{E\} \subset \sigma\{A\}$ выполняется.

3. Декомпозиция вариации ΔA в форме $\Delta A = dh$ с целью конструирования матрицы $D = d$, которая дает

$$D^T = d^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Проверка условия $CD = 0$, которая показывает его выполнимость:

$$CD = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T = 0.$$

5. Решение матричных уравнений (3.70) $TE - AT = 0$, $P - CT = 0$, в результате которого получим матрицу T

$$T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.75 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

6. Задание матрицы Γ модальной модели для синтеза обобщенного модального управления в диагональной форме,

$$\Gamma = \Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1 = -2; \lambda_2 = -3; \lambda_3 = -5 \}.$$

7. $\sigma\{\Lambda\}$ не пересекается с $\sigma\{A\}$, поэтому уравнение Сильвестра $M\Lambda - AM = -BH$, где $M = \begin{bmatrix} D & M^0 \end{bmatrix}$; $H = \begin{bmatrix} H_p & H^0 \end{bmatrix}$, представим в декомпозированном виде

$$D\Lambda_p - AD = -BH_p, \quad M^0\Lambda - AM^0 = -BH^0.$$

8. Решение уравнения Сильвестра $D\Lambda_p - AD = -BH_p$ с матрицей $\Lambda_p = [-2]$ относительно матрицы H_p , что дает

$$H_p = (B^T B) B^T (AD - D\Lambda_p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} = 4$$

9. Решение матричного уравнения $M^0\Lambda - AM^0 = -BH^0$ с матрицей $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_2 = -3; \lambda_3 = -5 \}$ и матрицей $H^0 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$, образующей с $\tilde{\Lambda}$ наблюдаемую пару $(\tilde{\Lambda}, \tilde{H})$, которое дает

$$M^0 = \begin{bmatrix} 1/9 & -1/3 & 1 \\ 1/25 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

10. В агрегированном виде матрицы $M = \begin{bmatrix} D & M^0 \end{bmatrix}$ и $H = \begin{bmatrix} H_p & H^0 \end{bmatrix}$ имеют представления

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1/9 & 1/25 \\ -2 & -1/3 & -1/5 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Вычисление матрицы K в силу $K = HM^{-1}$, где

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 8/3 & 1/3 \\ -45 & -63/2 & -9/2 \\ 25 & 125/6 & 25/6 \end{bmatrix},$$

дает $K = \begin{bmatrix} 30 & 31 & 9 \end{bmatrix}$.

12. Конструирование матрицы $F = A - BK$, которое приводит к результату

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -31 & -10 \end{bmatrix},$$

$$\det(\lambda I - F) = \lambda^3 + 10\lambda^2 + 31\lambda + 30 = (\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda + 5).$$

13. Построение модели ошибки в форме (3.77), которое приводит к представлению

$$x(t) = F\eta(t) + D\zeta(t); \quad \varepsilon(t) = C\eta(t),$$

$$\text{где } \eta(t) = Tz(t) - x(t) = [0.5z_1 - 0.75z_2 - x_1 \quad 0.5z_2 - x_2 \quad -x_3]^T.$$

14. Проверка эффекта достижения параметрической инвариантности системы, т.е. инвариантности $\varepsilon(t)$ относительно параметрического внешнего воздействия $\zeta(t)$ путем вычисления передаточной функции

$$\Phi_{\varepsilon\zeta}(s) = \frac{\varepsilon(s)}{\zeta(s)} = C(sI - F)^{-1}D = \frac{0}{(s+2)(s+3)(s+5)},$$

которая подтверждает выполнение равенства $\Phi_{\varepsilon\zeta}(s) = 0$. ■

3.4. Алгебраические проблемы параметрической инвариантности: аналитические возможности аппарата траекторной чувствительности

Рассмотрим непрерывный ОУ с неопределенными параметрами. Предположим, что существует такой базис его модельного описания, в котором неопределенность исходных физических параметров ОУ представляется неопределенностью системных параметров только матрицы состояния. В этом случае векторно-матричное описание ОУ принимает вид

$$\dot{x}(t, q) = A(q)x(t, q) + Bu(t); \quad x(t)_{|t=0} = x(0), \quad y(t, q) = Cx(t, q), \quad t \geq 0 \quad (3.79)$$

в котором $x \in R^n$, $u \in R^r$, $y \in R^m$ – векторы состояния, управления и выхода, $A(q) \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times r}$, $C \in R^{m \times n}$ – матрицы состояния, управления и выхода, $q \in R^p$ – вектор параметров вида $q = q_0 + \Delta q$, где Δq – вариация вектора q относительно его номинальной

реализации q_0 ; элементы матрицы $A(q)$ гладко зависят от вектора параметров q . Назовем ОУ (3.79) при $q = q_0$ номинальным и запишем его представление в форме

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); x(t)|_{t=0} = x(0); A = A(q_0); y(t) = Cx(t). \quad (3.80)$$

Функционирование ОУ (3.79) в составе системы состоит в воспроизведении на его выходе $y(t)$ экзогенного задающего воздействия $g(t)$ с требуемыми показателями качества. Закон управления построим применительно к номинальной версии ОУ (3.80) в форме прямой связи (ПС) по задающему воздействию с матрицей K_g и отрицательной обратной связи (ОС) по вектору состояния с матрицей K . Предположим также, что переменные состояния и задающее воздействие доступны измерению. Тогда ЗУ принимает вид

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t), \quad (3.81)$$

и номинальная версия системы, образованной объединением номинального ОУ (1.2) и ЗУ (1.3), записывается как

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), x(t)|_{t=0} = x(0), y(t) = Cx(t), \quad (3.82)$$

где $F = A - BK$, $G = BK_g$.

Требования к показателям качества системы (3.82) в переходном и установившемся режимах отражены на структуру мод $\sigma\{F\} = \{\lambda_i : \det(\lambda I - F) = 0; i = \overline{1, n}\}$ матрицы F состояния системы и на матрицу ПС K_g .

Носителем желаемой структуры мод $\sigma\{F\}$ назовем матрицу Γ состояния модальной модели (ММ), задаваемой наблюдаемой парой матриц (Γ, L) , где $\sigma\{\Gamma\} = \sigma\{F\}$, а матрица L выхода ММ имеет такие же размеры, что и B^T . Модальная форма представления требований к динамическим показателям системы (3.82) в переходном и установившемся режимах позволяет вычислить матрицу K ЗУ (3.81) методом модального управления, алгоритмически основанном на использовании решения матричного уравнения Сильвестра так, что

$$K = \arg\{KM = L \ \& \ M\Gamma - AM = -BL\} = LM^{-1}, \quad (3.83)$$

где матрица M – матрица преобразования подобия матриц Γ и F .

Простейшим требованием к матрице K_g , которое удовлетворяет очень широкому кругу практических задач, является требование

обеспечения равенства выхода и входа в неподвижном состоянии, что позволяет формировать матрицу K_g в силу условия

$$K_g = \arg \left\{ \Phi(s) = C(sI - F)^{-1} B K_{g|s=0} = -CF^{-1} B K_g = I \right\} = \left(-CF^{-1} B \right)^{-1}, \quad (3.84)$$

где обратимость матрицы F гарантирована ее структурой мод, расположенных в левой полуплоскости.

Поставим задачу обеспечения параметрической инвариантности выхода системы к параметрической неопределенности объекта управления (3.79). Указанная задача требует рассмотрения системы, образованной объединением ОУ (3.79) и ЗУ (3.81)

$$\dot{x}(t, q) = F(q)x(t, q) + Gg(t), \quad x(t)|_{t=0} = x(0), \quad y(t, q) = Cx(t, q), \quad (3.85)$$

где $F(q) = A(q) - BK$.

Очевидно, исходная постановка задачи обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (3.85) к параметрической неопределенности ОУ (3.79) принимает вид

$$y(t, g(t), q_0 + \Delta q) = y(t, g(t), q_0), \quad \forall \Delta q \neq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.86)$$

Для решения задачи обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (3.85) будем использовать аналитические возможности аппарата траекторной чувствительности. Запишем параметрически возмущенное движение системы по выходу в форме

$$\begin{aligned} y(t, g(t), q_0 + \Delta q) &= y(t, g(t), q_0) + \Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q) = \\ &= y(t, g(t)) + \Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q), \quad \forall \Delta q \neq 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Цепочка равенств (3.87) позволяет сформулировать задачу обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (3.85) к параметрической неопределенности Δq в форме

$$\Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q) \equiv 0 \quad \text{при } \forall t \geq 0, \quad (3.88)$$

где $g(t)$ – измеримые функции.

Если вариация Δq вектора параметров такова, что можно использовать функции чувствительности первого порядка, то отклонение $\Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q)$ может быть выражено через функции траекторной чувствительности $\eta_j(t, g(t), q_0)$ первого порядка выхода

системы (3.85 1.7) к вариации j -го компонента q_j ($j = \overline{1, p}$) вектора параметров q в виде

$$\Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q) \approx \sum_{j=1}^p \eta_j(t, g(t), q_0) \Delta q_j, \quad (3.89)$$

где $\eta_j(t, g(t), q_0) = \frac{\partial y(t, g(t), q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}$; Δq_j – вариация j -го компонента q_j ($j = \overline{1, p}$) вектора параметров q относительно его номинального значения q_{0j} .

Теперь с помощью (3.89) сформулируем условие, выполнение которого необходимо для обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (3.85) к параметрической неопределенности Δq в первом приближении:

$$\eta_j(t, g(t), q_0) \equiv 0 \text{ для } \forall t, \forall g(t) \forall j = \overline{1, p}. \quad (3.90)$$

Приведем определения правых и левых собственных векторов, которые помогут понять дальнейших результаты.

Определение 3.5. Ненулевой вектор ξ называется правым собственным вектором квадратной $(n \times n)$ -матрицы F , если выполняется векторно-матричное соотношение

$$F\xi = \lambda\xi; \quad \lambda \in \sigma\{F\} = \{\lambda_i : \det(\lambda I - F) = 0; i = \overline{1, n}\}. \quad (3.91)$$

Определение 3.6. Ненулевая вектор-строка ζ^T называется левым собственным вектором квадратной $(n \times n)$ -матрицы F , если выполняется векторно-матричное соотношение

$$\zeta^T F = \lambda \zeta^T; \quad \lambda \in \sigma\{F\} = \{\lambda_i : \det(\lambda I - F) = 0; i = \overline{1, n}\}. \quad (3.92)$$

Утверждение 3.9. Правые собственные векторы матрицы простой структуры F состояния номинальной версии (3.82) системы (3.85) в силу уравнения

$$M\Lambda = FM \quad (3.93)$$

являются столбцами M_i ($i = \overline{1, n}$) матрицы M приведения подобия матрицы F к диагональному виду $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i : \det(\lambda I - F) = 0; i = \overline{1, n}\}$.

Утверждение 3.10. Левые собственные векторы матрицы F являются строками $(M^{-1})^k$ ($k = \overline{1, n}$) матрицы M^{-1} – обратной матрице M преобразования подобия (3.93).

Утверждение 3.11. Левый собственный вектор-строка ζ^T матрицы F совпадает с транспонированным θ^T правым собственным

вектором θ матрицы F^T , соответствующим тому же собственному значению λ так, что оказывается справедливым соотношение

$$\theta^T = \zeta^T. \quad (3.94)$$

С использованием положений утверждения 3.11 можно обеспечить желаемые левые собственные векторы матрицы F , процедура формирования которых оформлена в виде алгоритма, приведенного в Приложении 2.

В основу решения проблемы обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (3.85) относительно параметрической неопределенности исходного ОУ (3.79) в первом приближении положим условие (3.90).

Введем в рассмотрение агрегированные системы, образованные номинальной версией (3.82) синтезируемой системы и моделями траекторной чувствительности к вариации j -го компонента q_j ($j = \overline{1, p}$) вектора параметров q относительно его номинального значения q_{0j} , имеющими векторно-матричное описание

$$\mathcal{X}_j(t) = F\sigma_j(t) + F_{q_j}x(t), \quad \sigma_j(0) = 0, \quad \eta_j(t) = C\sigma_j(t); j = \overline{1, p}; \quad (3.95)$$

в котором $F_{q_j} = \frac{\partial F(q)}{\partial q_j} \big|_{q=q_0}$; $\sigma_j(t) = \frac{\partial x(t, q)}{\partial q_j} \big|_{q=q_0}$ – j -я вектор-функция траекторной чувствительности вектора состояния $x(t)$. Агрегированные системы с вектором состояния $\tilde{x}_j(t) = \text{col}\{x(t), \sigma_j(t)\}$ и выходом $\eta_j(t)$ имеют описание

$$\mathcal{X}(t) = \tilde{F}_j \tilde{x}(t) + \tilde{G}g(t), \quad \tilde{x}(t)|_{t=0} = \tilde{x}(0), \quad \eta_j(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t), \quad j = \overline{1, p}; \quad (3.96)$$

где матричные компоненты представимы как

$$\tilde{F}_j = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q_j} & F \end{bmatrix}, \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [0 \quad C] \quad (3.97)$$

Сформируем $\tilde{\Phi}_j(s)$ – передаточную матрицу j -й агрегированной системы, связывающую переменную $\eta_j(t)$ и экзогенное задающее воздействие $g(t)$ с учетом (3.97)

$$\tilde{\Phi}_j(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{F}_j)^{-1} \tilde{G} = [0 \quad C] \begin{bmatrix} sI - F & 0 \\ -F_{q_j} & sI - F \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.98)$$

В развернутом виде передаточная матрица $\tilde{\Phi}_j(s)$ (3.98 4) получает представление

$$\tilde{\Phi}_j(s) = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - F)^{-1} & 0 \\ (sI - F)^{-1} F_{q_j} (sI - F)^{-1} & (sI - F)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} = \\ C(sI - F)^{-1} F_{q_j} (sI - F)^{-1} G. \quad (3.99)$$

Произведем параметризацию матрицы состояния $A(q)$ ОУ (1.1) безразмерными параметрами q_j ($j = \overline{1, p}$), где p в зависимости от базиса представления матрицы $A(q)$ и поставленной задачи исследования удовлетворяет неравенству $1 \leq p \leq n^2$. Очевидно, если ставится задача анализа инвариантности выхода относительно неопределенности задания всех ненулевых элементов матрицы $A(q)$ одновременно, то выполняется условие $p = 1$. Если матрица $A(q)$ имеет ненулевыми все n^2 элементов и ставится задача анализа инвариантности выхода относительно неопределенности отдельно каждого из ненулевых элементов матрицы $A(q)$, то выполняется условие $p = n^2$. Если матрица $A(q)$ задана во фробениусовом базисе, то в зависимости от постановки задачи выполняется неравенство $1 \leq p \leq n$.

Будем рассматривать в дальнейшем случай, когда каждый элемент матрицы $A_{lv}(q_j; j = \overline{1, p})$, $l, v = \overline{1, n}$, а следовательно, и матрицы состояния $F_{lv}(q_j)$ системы (1.7), зависит от своего безразмерного параметра q_j . При параметризации такого вида матрица чувствительности F_{q_j} обладает рангом, равным единице так, что становится справедливой запись

$$F_{q_j} = D_v h^l, \quad (3.100)$$

Где D_v , h^l – соответственно v -й столбец и l -я строка матрицы F_{q_j} , на пересечении которых размещается производная $\frac{\partial F_{l,v}(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}$.

Представления (3.99), (3.100) позволяют записать выражение для передаточной матрицы $\tilde{\Phi}_j(s)$ в форме

$$\tilde{\Phi}_j(s) = C(sI - F)^{-1} D_v h^l (sI - F)^{-1} G = C(sI - F)^{-1} D_v h^l (sI - F)^{-1} B K_g.$$

Следует напомнить, что передаточная матрица $\tilde{\Phi}_j(s)$ связывает переменную $\eta_j(t)$ и экзогенное задающее воздействие $g(t)$ как

$$\eta_j(s) = \tilde{\Phi}_j(s) g(s) = C(sI - F)^{-1} D_v h^l (sI - F)^{-1} B K_g g(s), \quad (3.101)$$

где $\eta_j(s)$, $g(s)$ – преобразования лапласа соответственно функции $\eta_j(t)$ траекторной чувствительности выхода системы к вариации j -го компонента q_j ($j = \overline{1, p}$) вектора параметров q относительно его номинального значения q_{0j} и экзогенного задающего воздействия $g(t)$.

Соотношение (3.101) позволяет сформулировать еще одну постановку задачи параметрической инвариантности выхода $y(t)$ к вариации j -го компонента q_j ($j = \overline{1, p}$) вектора параметров q относительно его номинального значения q_{0j} в первом приближении в форме выполнения равенства

$$\tilde{\Phi}_j(s) = C(sI - F)^{-1} D_v h^l (sI - F)^{-1} B K_g \equiv 0. \quad (3.102)$$

Нетрудно видеть, что для выполнения соотношения (3.102) достаточно выполнения одного из равенств

$$C(sI - F)^{-1} D_v \equiv 0, \quad (3.103)$$

$$h^l (sI - F)^{-1} B K_g \equiv 0. \quad (3.104)$$

Оценим, какими алгебраическими свойствами должны обладать матричные компоненты равенств (3.103) и (3.104) для того, чтобы они выполнялись, а система (3.85) обладала параметрической инвариантностью выхода $y(t)$ к вариации j -го компонента q_j ($j = \overline{1, p}$) вектора параметров q . Для этой цели сформулируем утверждения.

Утверждение 3.12. Для того, чтобы система (3.85) обладала инвариантностью выхода $y(t)$ относительно вариации j -го компонента q_j ($j = \overline{1, p}$) вектора параметров q относительно его номинального значения q_{0j} достаточно, чтобы:

- 1) столбцы D_v , соответствующие компоненту q_j , были бы правыми собственными векторами матрицы F ;
- 2) столбцы D_v принадлежали ядру матрицы C , т.е. выполнялось соотношение

$$C D_v = 0. \quad (3.105)$$

Доказательство. Если D_v является правым собственным вектором матрицы F , соответствующим ее собственному значению λ_v , то становится справедливой запись

$$FD_v = \lambda_v D_v. \quad (3.106)$$

Использование свойства матричной функции $f((*,s))$ от матрицы $(*)$ сохранять спектр собственных векторов исходной матрицы $(*)$ и иметь в качестве элементов алгебраического спектра собственных значений компоненты $f(\lambda_v, s)$ делает справедливым соотношение

$$f(F, s)D_v = f(\lambda_v, s)D_v. \quad (3.107)$$

В рассматриваемом случае матричной функцией $f(F, s)$ от матрицы F является резольвента $f(F, s) = (sI - F)^{-1}$, применение которой к соотношениям (3.106), (3.107) позволяет для выражения (3.103) записать цепочку равенств

$$Cf(F, s)D_v = C(sI - F)^{-1}D_v = C(s - \lambda_v)^{-1}D_v = (s - \lambda_v)^{-1}CD_v. \quad (3.108)$$

Подстановка в (3.108) условия (3.105) утверждения приводит к выполнению равенства (3.103).

Утверждение 3.13. Для того, чтобы система (3.85) обладала инвариантностью выхода $y(t)$ относительно вариации j -го компонента q_j ($j = \overline{1, p}$) вектора параметров q относительно его номинального значения q_{0j} путем выполнения условия (3.104) достаточно, чтобы:

- 1) строки h^l были бы левыми собственными векторами матрицы F ;
- 2) строки h^l принадлежали левому ядру матрицы B , т.е. выполнялось соотношение

$$h^l B = 0. \quad (3.109)$$

Доказательство утверждения 3.13 аналогично доказательству утверждения 3.12.

Утверждения 3.10–3.13 содержат алгоритмическую основу синтеза параметрически инвариантных по выходу систем вида (3.85), полученных агрегированием ОУ (3.79) с АФСУ вида (3.81), матричные компоненты которого вычисляются с помощью матричных соотношений (3.83) и (3.84) с той лишь разницей, что в матричном уравнении Сильвестра в (3.83) матрицу состояния модальной модели следует задать в диагональной форме, положив $\Gamma = \Lambda$, а матрицу M задать в форме $M = \text{row}\{D, \bar{M}\}$, где $D = \text{row}\{D_v; v = \overline{1, n}\}$, для случая (3.103) или $M^{-1} = \text{col}\{H, T\}$, где $H = \text{col}\{h^l; l = \overline{1, n}\}$, для случая (3.104).

Пример 3.3. Рассмотрим объект управления вида (3.79) с матрицами

$$A(q) = \begin{bmatrix} q & q+1 & 0 \\ -2q & -2q & 1 \\ 4q & 4q & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \quad 3 \quad 1], \text{ в которых матрица}$$

$A(q)$ отвечает случаю $p=1$; параметр q имеет вид $q = q_0 + \Delta q$, где $q_0 = 0$; Δq – вариация параметра q относительно его номинального

значения q_0 ; $A = A(q)|_{q=q_0=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Пара матриц (A, B) –

управляемая.

Для этого ОУ сконструируем замкнутую систему, обладающую параметрической инвариантностью выхода. Заметим, что матрица A объекта оказывается заданной во фробениусовой форме, а матрица управления B такова, что матрица состояния $F = A - BK$ проектируемой системы сохраняет фробениусову форму. Известно, что собственные вектора матрицы, представленной во фробениусовой форме, строятся по схеме Вандермонда, в соответствии с которой правый собственный вектор ξ_i может иметь вид $\xi_i = \text{col}\{\lambda_i^k; k = \overline{0, n-1}\}$.

Сформируем матрицу–столбец D . Для этого вычислим матрицу

$$F_{q_j} = \frac{\partial F(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0} \quad (j=1):$$

$$F_q = \frac{\partial F(q)}{\partial q} \Big|_{q=q_0} = \frac{\partial (A(q) - BK)}{\partial q} \Big|_{q=q_0} = \frac{\partial A(q)}{\partial q} \Big|_{q=q_0};$$

$$F_q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \quad 1 \quad 0], \text{ откуда } D = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что столбец D построен по схеме Вандермонда для $\lambda_D = -2$, поэтому для того, чтобы столбец D был бы собственным вектором матрицы F , в спектр ее собственных значений должно быть включено $\lambda_D = -2$. В соответствии со сказанным зададим спектр мод матрицы состояния F проектируемой системы как $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -5; \lambda_3 = -7\}$. В рассматриваемом примере ограничимся равенством (3.103), т.е. утверждениями 3.10 и 3.12.

Обеспечим выполнение первого условия утверждения 3.12. Для этого воспользуемся утверждением 1 и преобразуем уравнения (3.83)

с учетом представления матриц M , L и Λ как $M = \text{row}\{D, \bar{M}\}$, $L = \text{row}\{L_D, \bar{L}\}$,

$$\Lambda = \Gamma = \text{diag}\{\Lambda_D, \bar{\Lambda}\} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_D = [-2], \quad \bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Уравнение $D\Lambda_D - AD = -BL_D$ решим при заданной матрице $D = [1 \ -2 \ 4]^T$, в результате чего получим $L_D = 4$. Уравнение $\bar{M}\bar{\Lambda} - A\bar{M} = -B\bar{L}$ решим относительно \bar{M} , задавая $\bar{L} = [1 \ 1]$, тогда

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 0,01 & 1/294 \\ -1/20 & -1/42 \\ 1/4 & 1/6 \end{bmatrix}. \text{ Матрицы } M \text{ и } L \text{ исходного уравнения}$$

Сильвестра (3.83) принимают вид $M = \begin{bmatrix} 1 & 0,01 & 1/294 \\ -2 & -1/20 & -1/42 \\ 4 & 1/4 & 1/6 \end{bmatrix}$ и

$L = [4 \ 1 \ 1]$. Рассчитаем матрицу K обратной связи по формуле $K = LM^{-1}$ и получим $K = [70 \ 59 \ 13]$. В соответствии с (3.84) матрица $K_g = 35$. Матрица состояния F номинальной версии

спроектированной системы принимает вид $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -70 & -59 & -14 \end{bmatrix};$

матрица $F(q) = \begin{bmatrix} q & q+1 & 0 \\ -2q & -2q & 1 \\ -70+4q & -59+4q & -14 \end{bmatrix}$. Проверим теперь,

является ли D собственным вектором F , воспользовавшись (3.106):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -70 & -59 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}. \text{ Т. о., } D \text{ является}$$

собственным вектором матрицы F , соответствующим значению $\lambda_1 = -2$.

Проверим выполнение соотношения (3.105): произведение матриц $C = [2 \ 3 \ 1]$ и $D = [1 \ -2 \ 4]^T$ оказывается нулевым.

Следовательно, утверждения 1 и 4 выполняются, и спроектированная система должна обладать параметрической

инвариантностью выхода, что означает равенство нулю функции траекторной чувствительности $\eta(t)$ по выходу $y(t)$. Дополним модель номинальной версии системы моделью траекторной чувствительности к вариации параметра q и произведем моделирование полученной агрегированной системы.

Результаты моделирования иллюстрируют равенство нулю функции траекторной чувствительности по выходу при единичном ступенчатом (рис. 3.1) и гармоническом экзогенном задающем воздействии $g(t)$ (рис. 3.2).

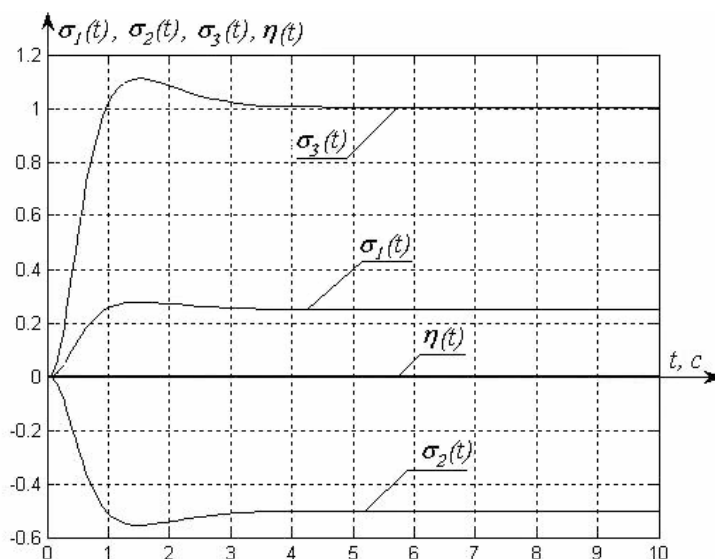


Рис. 3.1 Функции траекторной чувствительности по состоянию и выходу при $g(t) = 1$ для параметрически инвариантной системы

Рассмотрим теперь контрпример. Сравним полученную систему с системой, матрица состояния которой обладает спектром собственных значений $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -3; \lambda_2 = -5; \lambda_3 = -7\}$, при этом утверждения 3.10 и 3.12 не выполняются. В этом случае матрицы F ,

$$K \text{ и } K_g \text{ принимают вид } F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -105 & -71 & -15 \end{bmatrix}, \quad K = [105 \quad 71 \quad 14],$$

$K_g = 52,632$. Результаты моделирования, представленные на рис.3.3, показывают, что выход модели траекторной чувствительности не равен нулю, то есть эта система не обладает параметрической инвариантностью выхода относительно неопределенности параметров

ее матрицы состояния и вариация выхода примет вид $\Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q) = \eta(t, g(t), q_0) \Delta q|_{\Delta q \neq 0} \neq 0$.

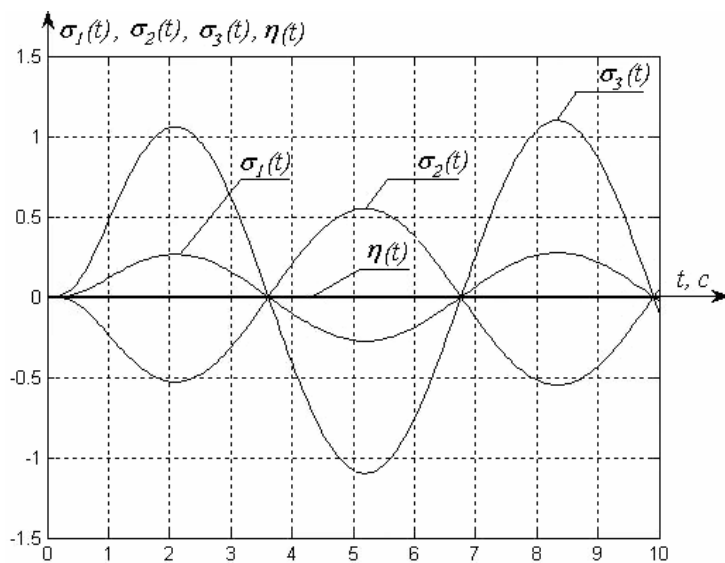


Рис. 3.2 Функции траекторной чувствительности по состоянию и выходу при $g(t) = \sin t$ для параметрически инвариантной системы

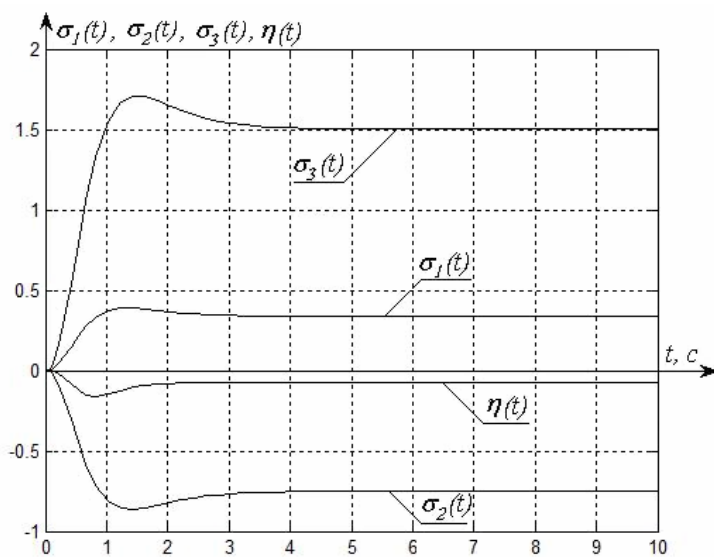


Рис.3.3 Функции траекторной чувствительности по состоянию и выходу при $g(t) = 1$ для параметрически неинвариантной системы

Примечание. Для обеспечения желаемого левого собственного вектора-строки ζ_R^T матрицы состояния системы F , соответствующего собственному значению λ_ζ , можно предложить следующий алгоритм. Предполагается, что заданы матрицы $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n-1}; \lambda_n = \lambda_\zeta\}$ и L , желаемый левый собственный вектор ζ_R^T , обладающий единичной нормой и соответствующий собственному значению λ_ζ , требуемое значение $\Delta_{\zeta R}$ невязки $\Delta_\zeta = \|\zeta_R^T - \theta_\zeta^T\|$ левых векторов матрицы F , пара (Λ, L) наблюдаема, размерность L равна размерности B^T .

Алгоритм 3.5.

Шаг 1. Вычислить матрицу $M = \arg\{M\Lambda - AM = -BL \ \& \ \|M_i\| = 1; i = \overline{1, n}\}$.

Шаг 2. Вычислить матрицу состояния системы $F = M\Lambda M^{-1}$.

Шаг 3. Вычислить и произвести нормирование правого собственного вектора θ_ζ матрицы F^T , соответствующего собственному значению λ_ζ , обеспечив тем самым ему единичную норму $\|\theta_\zeta\| = 1$.

Шаг 4. Вычислить функцию невязки $\Delta_\zeta = \|\zeta_R^T - \theta_\zeta^T\|$ собственных левых векторов матрицы F .

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства $\Delta_\zeta \leq \Delta_{\zeta R}$, где $\Delta_{\zeta R}$ – требуемое значение невязки.

Шаг 6. Если неравенство шага 7 не выполняется, то с помощью методов недифференцируемой оптимизации (метод деформированного многогранника, Нелдера-Мида) сформировать вариацию $\Delta L(k)$ матрицы L , где k – номер итерации алгоритма, и вернуться к шагу 1 алгоритма, в противном случае перейти к шагу 7.

Шаг 7. Вычислить матрицы формирователя сигнала управления (ФСУ): $K = LM^{-1}$,

$M = \arg\{M\Lambda - AM = -BL \ \& \ \|M_i\| = 1; i = \overline{1, n}\}$; $K_g = \arg\{-CF^{-1}BK_g = I\}$, причем обратимость матрицы F обеспечивается тем, что все ее собственные значения являются ненулевыми.

Шаг 8. Сформировать систему, образованную объединением ОУ и ФСУ $u(t) = K_g g(t) - Kx(t)$ ~~$x(t)$~~ $= Fx(t) + Gg(t), y(t) = Cx(t)$, в которой $F = A - BK$, $G = BK_g$, при этом матрица F системы обладает желаемым левым собственным вектором ζ_R^T .

3.5. Робастное интервальное управление

Рассматриваются многомерные непрерывные объекты управления, матричные компоненты векторно-матричного представления которых характеризуются параметрической неопределенностью, задаваемой в интервальной форме. Предполагается, что модельная параметрическая неопределенность может быть за счет выбора базиса или включения на входе буферной системы с фиксированными параметрами представлена неопределенностью (интервальностью) задания только матрицы состояния объекта управления. Таким образом, объект управления с интервальными параметрами задается векторно-матричной моделью

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + Bu(t); x(0); y(t) = Cx(t), \quad (3.109)$$

где $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m$ – соответственно векторы состояния, управления и выхода ОУ; $[A], B, C$ – интервальная матрица состояния, матрица управления и выхода, согласованные по размерности с переменными модели (3.109). Для интервальной матрицы $[A]$ состояния используются два представления:

$$[A] = [\underline{A}, \overline{A}] : \underline{A} = \text{row} \left\{ \text{col}(\underline{A}_{ij}; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, n} \right\}; \quad (3.110)$$

$$\overline{A} = \text{row} \left\{ \text{col}(\overline{A}_{ij}; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, n} \right\};$$

$$[A] = A_0 + [\Delta A] = A_0 + [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}], \quad (3.111)$$

где

$$A_0 = \text{row} \left\{ \text{col}(\underline{A}_{0ij}; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, n} \right\}, \quad (3.112)$$

$$\underline{\Delta A} = \text{row} \left\{ \text{col}(\underline{\Delta A}_{ij}; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, n} \right\}; \quad (3.113)$$

$$\overline{\Delta A} = \text{row} \left\{ \text{col}(\overline{\Delta A}_{ij}; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, n} \right\};$$

$$A_{0ij} = 0.5(\underline{A}_{ij} + \overline{A}_{ij}); \underline{\Delta A}_{ij} = \underline{A}_{ij} - A_{0ij}; \overline{\Delta A}_{ij} = \overline{A}_{ij} - A_{0ij}. \quad (3.114)$$

В приведенных выражениях A_0, A_{0ij} – медианные компоненты соответственно интервальных матрицы $[A]$ и ее (i, j) -го компонента $[A_{ij}]$; $[\Delta A], [\Delta A_{ij}]$ – интервальные матричный элемент и его (i, j) -й скалярный компонент, задающие ширину $(\text{wid}[A]), (\text{wid}[A_{ij}])$

соответственно интервальной матрицы $[A]$ и ее (i, j) -го интервального скалярного компонента $[A_{ij}]$. Будем именовать A_0 и $[\Delta A]$ соответственно медианой и интервальной составляющей интервальной матрицы $[\Delta A]$.

Ставится задача синтеза неадаптивного регулятора, реализующего закон управления в виде обратной связи с матрицей K по состоянию $x(t)$ и прямой связи с матрицей K_g по внешнему задающему воздействию $g(t)$, записываемый в форме

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t). \quad (3.115)$$

Здесь K_g, K – матрицы с фиксированными параметрами, так что их интервальные представления $[K_g] = [K_g, K_g], [K] = [K, K]$ характеризуются медианами $K_{g0} = K_g, K_0 = K$ и нулевой шириной $wid[K_g] = 0, wid[K] = 0$. Закон управления (3.115) должен доставить системе

$$\dot{x}(t) = [F]x(t) + Gg(t); x(0); y(t) = Cx(t), \quad (3.116)$$

образованной агрегированием ОУ (3.109) и ЗУ (3.115), значения показателей $\{I_p; p = \overline{1, \mu}\}$ качества процессов в переходном и установившемся режимах, которые, будучи интервальными и представимыми в формах

$$[\pi_p] = [\underline{\pi}_p, \overline{\pi}_p] = \pi_{0p} + [\Delta \underline{\pi}_p, \Delta \overline{\pi}_p]; (p = \overline{1, \mu}),$$

удовлетворяли бы по медианной составляющей квалификационному неравенству $\pi_{0p} \leq \pi_{0pR}$ и характеризовались шириной $wid[\pi_p] = 2|\Delta \underline{\pi}_p| = 2\Delta \overline{\pi}_p$, которая удовлетворяет технологический процесс, в который встраивается проектируемая система.

Основная часть публикаций, связанных с проблемами синтеза законов неадаптивного управления вида (3.115), использует формулировку задачи синтеза, сводящую ее к проблеме робастной устойчивости, факт достижения которой контролируется методом В.Л. Харитонова. Необходимо отметить, что при представлении интервальных матриц в основном, за редким исключением, используется форма (3.110).

Вернемся к модели (3.116) спроектированной системы, в которой для интервальной матрицы состояния $[F]$ запишем

$$[F] = [\underline{F}, \overline{F}] = F_0 + [\Delta F], \quad (3.117)$$

$$[F] = [A] - BK = A_0 + [\Delta A] - BK = A_0 - BK + [\Delta A]. \quad (3.118)$$

Матричные соотношения (3.87), (3.88), по существу, содержат доказательство следующего утверждения.

Утверждение 3.13. Закон управления вида (3.115) изменяет лишь медианную составляющую F_0 интервальной матрицы $[F]$ состояния системы (3.116) в силу соотношения

$$F_0 = A_0 - BK, \quad (3.119)$$

оставляя неизменной ее интервальную составляющую так, что выполняется равенство

$$[\Delta F] = [\Delta A]. \quad \blacksquare \quad (3.120)$$

Отметим важное свойство интервальной составляющей $[\Delta(*)]$ интервальной матрицы $[(*)]$.

Свойство 3.1. Норма $\|[\Delta(*)]\|$ интервальной составляющей $[\Delta(*)]$ интервальной матрицы $[(*)]$ не является интервальной и совпадает с нормой любой ее угловой реализации $\|\{(\Delta(*))_c\}_v\|; v = 1, 2^{n \times n}$ так, что выполняется равенство

$$\|[\Delta(*)]\| = \|\{(\Delta(*))_c\}_v\|; v = 1, 2^{n \times n}. \quad (3.121)$$

Теперь введем две характеристики интервальной матрицы $[(*)]$, задав их с помощью определений.

Определение 3.5. Оценкой абсолютной интервальности интервальной матрицы $[(*)] = (*)_0 + [\Delta(*)]$ называется положительное число $\Delta_I(*)$, задаваемое соотношением

$$\Delta_I(*) = \frac{\Delta}{\|[\Delta(*)]\|}. \quad (3.122)$$

Определение 3.6. Оценкой относительной интервальности интервальной матрицы $[(*)] = (*)_0 + [\Delta(*)]$ называется положительное число $\delta_I(*)$

$$\delta_I(*) = \frac{\|[\Delta(*)]\|}{\|(*)_0\|} = \frac{\Delta_I(*)}{\|(*)_0\|}. \quad \square$$

Нетрудно видеть, что введенные оценки интервальности интервальной матрицы $[(*)]$ применительно к $[(*)] = [F]$ интервальной матрице состояния спроектированной системы (3.116) совместно с положениями утверждения 3.13 содержат доказательство следующего утверждения.

Утверждение 3.14. Закон управления (3.115) не изменяет значения оценки абсолютной интервальности матрицы состояния, так что выполняется равенство

$$\Delta_I F = \Delta_I A, \quad (3.123)$$

но при этом изменяется значение оценки относительной интервальности интервальной матрицы $[F]$ состояния системы (3.116) в силу соотношения

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|F_0\|} = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|A_0 - BK\|}. \quad \blacksquare$$

Теперь сформулируем постановку задачи синтеза закона управления объектом с интервальными параметрами – сконструировать матрицы K и K_g закона управления (3.115) такие, чтобы:

1. медианная составляющая $F_0 = A_0 - BK$ матрицы $[F]$ спроектированной системы (3.116) доставляла медианные значения $\pi_{0\rho}(\rho = \overline{1, \mu})$ показателей качества процессов в переходном и установившемся режимах, удовлетворяющих требованиям

$$\pi_{0\rho} \leq \pi_{0\rho R}(\rho = \overline{1, \mu}); \quad (3.124)$$

2. оценка относительной интервальности $\delta_I F$ матрицы $[F]$ состояния спроектированной системы (3.116) удовлетворяла условию

$$\delta_I F \leq \delta_I F_R, \quad (3.125)$$

при этом $\delta_I F_R$ была такой, что становится корректным использование аппарата теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка;

3. для медианной составляющей F_0 матрицы состояния $[F]$ выполнялось условие обеспечения единичного отношения "вход – выход" в неподвижном состоянии

$$K_g = \left\{ \arg \Phi_0(s) = C(sI - F_0)^{-1} BK_g \Big|_{s=0} = I \right\} = -(CF_0^{-1}B)^{-1}. \quad (3.126)$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся возможностями обобщенного модального управления (ОМУ). При этом, как указывалось ранее, в зависимости от ранга матрицы B , когда ранг матрицы $B = n$, возможно решение полной задачи ОМУ так, что свободно назначаются желаемые спектры собственных значений медианной версии $\sigma\{F_0\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ матрицы F системы и собственных векторов $\{\xi_i = M_i : M\Lambda = F_0 M; i = \overline{1, n}\}$ этой матрицы. В противном случае, когда $\text{rang} B = r < n$, возможно решение неполной задачи ОМУ, в которой назначается спектр $\sigma\{F_0\}$, а матрица M собственных векторов $M = \text{row}\{M_i = \xi_i; F_0 \xi_i = \lambda_i \xi_i; i = \overline{1, n}\}$ ищется из соображений

$$M = \arg \min \{C\{M\}\}. \quad (3.127)$$

Напомним, что потребность контролировать число обусловленности $C\{M\}$ матрицы собственных векторов вызвана поиском возможности априори с помощью оценки нормы $\|\Lambda\|$ матрицы состояния модальной модели, задаваемой наблюдаемой парой (Λ, H) , оценить норму $F_0 = \|A_0 - BK\|$ с тем, чтобы удовлетворить требованию (3.125).

В основу этой оценки кладутся соотношения матричного подобия

$$M\Lambda = F_0 M, \quad (3.128)$$

которые в нормах приводят к оценочным неравенствам

$$C^{-1}\{M\}\|\Lambda\| \leq \|F_0\| \leq C\{M\}\|\Lambda\|, \quad (3.129)$$

и требованию (3.125), записываемому в силу (3.129) в виде

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|A_{\Sigma 0}\|} \leq \delta_I F_R. \quad (3.130)$$

Объединение (3.129) и (3.130) порождает цепочку неравенств

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|F_0\|} \leq C\{M\} \frac{\|[\Delta A]\|}{\|\Lambda\|} \leq \delta_I F_R. \quad (3.131)$$

Правая часть неравенства (3.131) приводит к оценке требуемой нормы $\|\Lambda\|$ матрицы состояния ММ

$$\|\Lambda\| \geq C\{M\} \frac{\|[\Delta A]\|}{\delta_I F_R}. \quad (3.132)$$

Полученные соотношения позволяют предложить алгоритм синтеза закона управления в виде (3.115) методами обобщенного модального управления для случая $\text{rang } B = n$.

Алгоритм 3.5

1. Построение (A, B, C) представления ОУ в базисе, в котором интервальность первичных физических параметров приводит к интервальности только матрицы состояния так, что объект получает $([A], B, C)$ представление. Запись интервальной матрицы $[A]$ в форме $[A] = A_0 + [\Delta A]$.
2. Формирование требований к показателям качества процессов в переходном и установившемся режимах в виде набора их медианных значений $\{\pi_{0\rho}(\rho = \overline{1, \mu})\}$ для системы с медианной матрицей состояния F_0 , а также задания требуемой величины $\delta_I F_R$ оценки относительной интервальности интервальной матрицы $[F]$ проектируемой системы $\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|F_0\|} \leq \delta_I F_R$.
3. Формирование требований к матрице состояния Λ модальной модели, задаваемой в диагональной форме $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ со структурой и реализацией λ_i , доставляющих системе набор требуемых показателей качества $\{\pi_{0\rho}(\rho = \overline{1, \mu})\}$, образующих вектор π_0 так, что $\Lambda = \Lambda(\pi_0)$.
4. Формирование матрицы Λ модальной модели со структурой мод п. 3 алгоритма, но с нормой $\|\Lambda\|$ при известной $\|[\Delta A]\|$ норме интервальной составляющей матрицы состояния $[A]$ ОУ (3.109) в силу (3.131), в котором в силу достижимости

произвольной матрицы M собственных векторов следует положить $C\{M\} = 1$, что приводит (3.131) к виду

$$\|\Lambda\| \geq \frac{\|[\Delta A]\|}{\delta_I F_R}. \quad (3.133)$$

5. Конструирование окончательной версии матрицы Λ состояния модальной модели из условия

$$\Lambda = \arg \max \left\{ \|\Lambda\| = \|\Lambda(\pi_0)\|, \|\Lambda\| \geq \frac{\|[\Delta A]\|}{\delta_I F_R} \right\}. \quad (3.134)$$

6. С использованием SVD-процедуры произвольной невырожденной $(n \times n)$ -матрицы формирование матрицы

$$M = \arg \{C\{M\}\} = 1. \quad (3.135)$$

7. Решение уравнение Сильвестра $M\Lambda - A_0M = -BH$ относительно матрицы H в форме

$$H = B^{-1}(A_0M - M\Lambda). \quad (3.136)$$

8. Формирование матрицы ОС K закона управления (3.115), вычисленной в силу соотношения

$$K = HM^{-1} = B^{-1}(A_0M - M\Lambda)M^{-1}. \quad (3.137)$$

Примечание 3.1. Так как п. 6 порождает континуум матриц M , то, как и в случае синтеза модальноробастного управления (см. параграф 3.1), на M следует наложить ограничения на затраты по управлению в виде $\|u(t)\|$ для $t \in [0, \infty)$ и равномерности их распределения на сфере $\|x(0)\| = \text{fix}$. Тогда M ищется из условия

$$M = \arg \left\{ K = B^{-1}(A_0M - M\Lambda)M^{-1} \& \min_M \{ J_n = C^{1/2} \{ W_n \} \alpha_M^{1/2}(W_n) \} \right\}, \quad (3.138)$$

где W_n – грамиан затрат на управление, вычисляемый с помощью уравнения Ляпунова

$$F_0^T W_n + W_n F_0 = -K^T K. \quad (3.139)$$

9. Формирование матрицы K_g прямой связи с помощью соотношения (3.126), которому можно придать вид

$$K_g = -\left(CM\Lambda^{-1}M^{-1}B\right)^{-1}. \quad (3.140)$$

10. Вычисление реально достигнутой величины оценки $\delta_I F$ относительной интервальности матрицы $[F]$ системы в соответствии с определением (3.124) и условием (3.121) и проверка неравенства (3.130)

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|F_0 = A_0 - BK\|} \leq \delta_R F_R. \quad (3.141)$$

11. Построение реализационной версии ЗУ (3.115), записываемой в форме

$$u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_X x(t), \quad (3.142)$$

где

$$K_\varepsilon = K_g, K_X = K - K_X C. \quad (3.143)$$

12. Представление элементов $[F_{ij}] = F_{ij0} + [\Delta F_{ij}]$ матрицы состояния спроектированной системы $[F] = F_0 + [\Delta F]$ в параметризованном параметром q_{ij} виде

$$F_{ij}(q_{ij}) = 0.5(\underline{F}_{ij} + \overline{F}_{ij}) + (\overline{F}_{ij} - \underline{F}_{ij})q_{ij}, \quad (3.144)$$

где $q_{ij} \in [-0.5; 0.5]$; $q_{ij0} = 0$, так, что

$$F_{ij}(q_{ij})\Big|_{q_{ij}=-0.5} = 0.5(\underline{F}_{ij} + \overline{F}_{ij}) - (\overline{F}_{ij} - \underline{F}_{ij})0.5 = \underline{F}_{ij},$$

$$F_{ij}(q_{ij})\Big|_{q_{ij}=0.5} = 0.5(\underline{F}_{ij} + \overline{F}_{ij}) + (\overline{F}_{ij} - \underline{F}_{ij})0.5 = \overline{F}_{ij}.$$

13. Вычисление функций чувствительности показателей качества

$$\pi_{\rho q_{ij}} = \frac{\Delta \pi_\rho(q_{ij})}{\partial q_{ij}} \Big|_{q_{ij}=0}. \quad (3.145)$$

Построение на функциях чувствительности (3.145) полных экстремальных вариаций

$$\Delta \pi_\rho = \sum_{i,j}^n \left| \pi_{\rho q_{i,j}} \right| 0.5. \quad (3.146)$$

Вычисление медианного значения π_{p0} показателя π_p с целью конструирования достигнутой оценки $\delta_I \pi_p$ относительной интервальности показателя

$$\delta_I \pi_p = \frac{\Delta \pi_p}{\pi_{p0}}. \quad (3.147)$$

При неудовлетворении $\delta_I \pi_p$ по основным показателям требованиям технологического процесса, в который встраивается проектируемая система, осуществить переход к п. 3 алгоритма, иначе п. 14.

14. Техническая реализация регулятора с законом управления (3.142)

■.

Для случая, когда $\text{rang} B = r < n$, возможно достижение решения лишь задачи неполного обобщенного модального управления, которая не позволяет при заданной структуре мод $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_i; i = \overline{1, n} \}$ свободно назначать геометрический спектр $\{ \xi_i \}$ собственных векторов образующих матрицу. В теле алгоритма появляется итерационная процедура при конструировании матрицы

$$M = M(H) = \arg \min_H \{ C\{M\} = C\{M(H)\} \}. \quad (3.148)$$

В основном предлагаемый для этого случая алгоритм совпадает с алгоритмом 3.5.

Алгоритм 3.6

1. Выполнение п.п. 1–5 алгоритма 3.5.
2. Организация итерационной процедуры с целевой функцией (3.148) на решениях уравнения Сильвестра

$$M\Lambda - A_0 M = -BH. \quad (3.149)$$

Фиксация значения $C\{M\}$, если $C\{M\} \neq 1$, то переход к п.5 алгоритма 3.5 с целью увеличения нормы $\|\Lambda\|$ в $C\{M\}$ раз, иначе – переход к п. 8 алгоритма 3.5.

3. Выполнение п.п.8–11 алгоритма 3.5.

В заключении следует отметить, что интервальное представление может быть использовано для "интервальной линеаризации" нелинейных систем. Для иллюстрации такого подхода рассмотрим нелинейный ОУ

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t); x(0); y(t) = Cx(t). \quad (3.150)$$

Введем в рассмотрение сферу S_x

$$S_x : \|x\| \leq d_s, \quad (3.151)$$

покрывающую область пространства состояния R^n процессов $x\{x(0), g(t), t\}$, где $g(t)$ – внешнее конечномерное задающее воздействие. Найдем такие $[A_{ij}] = [\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}]$, что в области, покрываемой сферой (3.151), выполняются условия

$$\sum_{j=1}^n \underline{A}_{ij} x_j \leq f_i(x) \leq \sum_{j=1}^n \overline{A}_{ij} x_j. \quad (3.152)$$

Тогда на элементах $[A_{ij}] = [\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}]$ может быть сконструирована матрица

$$[A] = \text{row} \left\{ \text{col} \left([A_{ij}]; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n} \right) \right\}, \quad (3.153)$$

порождающая линейное интервальное представление нелинейного ОУ (3.150), записываемое в форме $\mathfrak{X}(t) = [A]x(t) + Bu(t); x(0); y(t) = Cx(t)$, к которому могут быть применены предложенные алгоритмы синтеза ЗУ.

Пример 3.3. В качестве примера рассматривается задача синтеза закона управления (3.115) для объекта ММО типа "двумерный вход – двумерный выход" с вектором состояния третьего порядка, таким образом $\text{rank } B = r = 2$, $n = 3$. В связи с этим воспользуемся алгоритмом 3.6 синтеза ЗУ неадаптивного управления на основе ОМУ, следуя которому, выполним следующие действия.

1. Формирование $([A], B, C)$ -представления ОУ (3.109) с матрицами

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ [-0.5; 0.5] & 1 & 0 \\ 0 & [-0.5; 0.5] & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{где } A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [\Delta A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ [-0.5; 0.5] & 0 & 0 \\ 0 & [-0.5; 0.5] & 0 \end{bmatrix}, \text{ которые}$$

характеризуются $\|A_0\| = 1; \|\Delta A\| = 0.5; \Delta_r A = 0.5; \delta_r A = 0.5$.

2. Формирование требований к системе, которая должна доставлять переходной характеристике медианной версии системы (3.116) время переходного процесса $t_H \leq 0,45 \text{ с}$, перерегулирование $\sigma \leq 5\%$, а также обладать оценкой $\delta_I F$ относительной интервальности интервальной матрицы $[F]$ состояния не более $\delta_I F_R = 0.02$.
3. Назначение матрицы Λ модальной модели с распределением мод Баттерворта, характеризующееся характеристической частотой ω_0 такой, что $\|\Lambda\| = \omega_0$. Тогда в силу (3.134) получим:

$$\Lambda = \arg \max \left\{ \|\Lambda\| = \arg \{t_H(\omega_0) \leq 0.45; \sigma \leq 5\%\} = 13.88; \|\Lambda\| \geq \frac{\|[\Delta A]\|}{\delta_I A_{\Sigma R}} = 25 \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} -31.0024 & 0 & 0 \\ 0 & -15.5012 & 26.8489 \\ 0 & -26.8489 & -15.5012 \end{bmatrix}.$$

4. Организация итерационной процедуры на паре матриц (M, H) такой, что

$$(M, H) = \arg \min_H \{C\{M\} = C\{M(H)\} : M\Lambda - A_0 H = -BH\},$$
 которая дает

$$H = \begin{bmatrix} 30.9515 & 29.6993 & 8.8293 \\ -0.6588 & -9.4584 & 0.5003 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} -0.0535 & 0.0020 & -0.0269 \\ -0.0206 & -0.0211 & -0.0041 \\ 0.9984 & 0.2323 & 0.9720 \end{bmatrix}; C\{M\} = 66.4814.$$

В соответствии с алгоритмом 3.6 в случае $C\{M\} \neq 1$ рекомендуется вернуться к п. 3 с тем, чтобы в $C\{M\}$ раз увеличить $\|\Lambda\|$. Однако в связи с тем, что оценка нормы $\|F_0\|$ (3.134) обладает заметной достаточностью, рискнем не менять $\|\Lambda\|$, предполагая тем самым возможность замыкания алгоритма после вычисления реально достижимой $\delta_I F$.

5. Формирование матрицы K обратной связи в законе (3.115) в силу

$$K = HM^{-1} = \begin{bmatrix} 16.7683 & -1361.1055 & 3.8349 \\ 21.4862 & 37.6836 & 1.2675 \end{bmatrix}.$$

6. Формирование матрицы K_g прямых связей по задающему внешнему воздействию в законе (3.115) в силу (3.140), которое дает

$$K_g = \begin{bmatrix} 16.7683 & -1357.22 \\ 21.4862 & 37.9511 \end{bmatrix}.$$

7. Формирование (F_0, G, C) представления спроектированной системы, которое приводит к матрицам

$$F_0 = \begin{bmatrix} -21.4863 & -37.6836 & -0.2675 \\ -21.4863 & -36.6836 & -1.2675 \\ -16.7684 & 1361.055 & -3.8349 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 21.4862 & 37.9512 \\ 21.4862 & 37.9512 \\ 16.7683 & -1357.22 \end{bmatrix}$$

при этом $\|F_0\| = 1435.3727$, что близко к мажорантной оценке $C\{M\}\|\Lambda\| = 2060.9234$.

8. Вычисление достигнутой оценки относительной интервальности интервальной матрицы $[F]$ состояния спроектированной системы дает

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|F_0\|} = 3.48 * 10^{-4}.$$

9. В качестве параметра π_ρ приняты собственные значения $\pi_\rho = \lambda_\rho$ ($\rho = \overline{1,3}$) с целью вычисления функций чувствительности $\lambda_q = (M^{-1}A_qM)_{\rho\rho}$ и оценки их полных вариаций для угловой реализации интервальной матрицы $[\Delta A]$ с последующим вычислением относительной интервальности $\delta_I \lambda = \frac{\|\Delta \lambda\|}{\|\lambda\|}$, что в итоге дало значение этой оценки $\delta_\lambda = 0.011$ (1.1%).

10. Формирование реализационной версии ЗУ (3.115) в форме (3.142), что дает для его матриц $K_\varepsilon = K_g$; $K_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3.8349 \\ 0 & 0 & 1.2675 \end{bmatrix}$.

11. Передача синтезированного закона неадаптивного управления в среду технической реализации. ■

Примечание 3.2. Заканчивая рассмотрение возможностей неадаптивных методов достижения параметрической инвариантности выхода системы относительно неопределенности модели объекта управления вида (3.13), приводимого к виду (3.43), и переходя к рассмотрению возможностей адаптивных методов, необходимо сформулировать алгебраическое условие реализуемости адаптивных алгоритмов. Очевидно, этим алгебраическим условием является включение $D \in Im(B)$.

4. АДАПТИВНОЕ И РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

4.1. Пример управления объектом первого порядка

4.1.1. Постановка задачи

Знакомство с методами адаптивного и робастного управления начнем с простого примера. Рассмотрим скалярный объект

$$\dot{x} = qx + u, \quad (4.1)$$

где x – регулируемая переменная, u – сигнал управления, q – постоянный параметр. Пусть качество слежения за задающим воздействием $g(t)$ (представленным ограниченной кусочно-непрерывной функцией времени) определяется *эталонной моделью*

$$\dot{x}_M = -\lambda x_M + \lambda g, \quad (4.2)$$

где сигнал x_M носит название *эталонного выхода*, а положительная постоянная λ определяет желаемые динамические свойства замкнутой системы. Очевидно, что модель (5.2) можно переписать в виде

$$x_M = \frac{1}{Tp + 1} g,$$

где $T = 1/\lambda$ – постоянная времени апериодического звена первого порядка. Введение эталонной модели позволяет формализовать постановку задачи, потребовав выполнения целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_M(t)) = 0 \quad (4.3)$$

для любых задающих воздействий $g(t)$. Другими словами, необходимо синтезировать управление u , обеспечивающее нулевое установившееся значение *ошибки слежения за эталонной моделью*

$$\varepsilon = x - x_M. \quad (4.4)$$

Рассмотрим три возможных решения поставленной задачи, основанные на использовании классической теории управления, а также методов адаптивного и робастного управления.

4.1.2. Неадаптивное управление

Используем регулятор комбинированного управления

$$u = -\lambda x - q_0 x + \lambda g, \quad (4.5)$$

Отформатировано: Шрифт: 12 пт

Отформатировано: Шрифт: 12 пт

Отформатировано: Шрифт: 12 пт

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Удалено: .

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см

Удалено: .

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

Отформатировано ... [1]

Удалено: .

Отформатировано ... [2]

Отформатировано ... [3]

Отформатировано ... [4]

Отформатировано ... [5]

Удалено: .

Отформатировано ... [6]

Отформатировано ... [7]

Удалено: ¶

Отформатировано ... [8]

Отформатировано ... [9]

Отформатировано ... [10]

Отформатировано ... [11]

Отформатировано ... [12]

Отформатировано ... [13]

Отформатировано ... [14]

Удалено: .

Отформатировано ... [15]

где q_0 – номинальное значение (оценка) параметра q . Отметим, что регулятор (4.4) содержит стабилизирующую обратную связь λx , компенсирующую обратную связь $q_0 x$ и прямую связь по задающему воздействию λg (см. рис. 4.1, а). Наличие в структуре регулятора прямых и обратных связей объясняет его название – регулятор *комбинированного* управления. Так как коэффициенты регулятора λ и q_0 полагаются фиксированными (ненастраиваемыми), то регулятор (4.5) будем также называть *неадаптивным*.

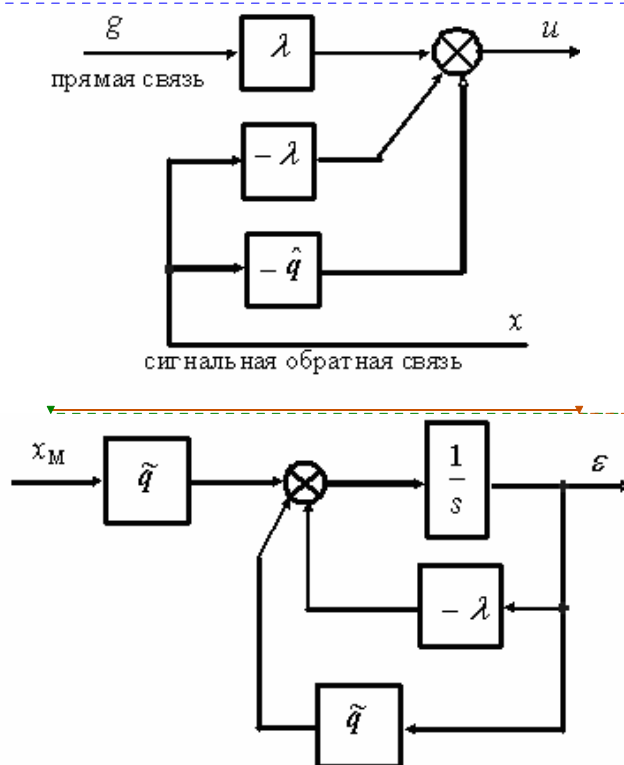


Рис. 4.1. Неадаптивное управление: а) структура регулятора; б) эквивалентная модель ошибки

Найдем модель ошибки замкнутой системы. Сначала, подставляя (4.5) в (4.1), получим *модель замкнутого объекта управления*

$$\dot{x} = -\lambda x + q_0 x + \lambda g, \quad (4.6)$$

где $q' = \theta - q_0$ – *параметрическая ошибка*. Вычитая далее (4.2) из (4.6), получаем *искомую модель ошибки замкнутой системы*

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda \varepsilon + q' \varepsilon$$

С учетом равенства (4.4) окончательно имеем (см. рис. 4.1, б)

$$\dot{\varepsilon} = -(\lambda - q)\varepsilon + q\dot{x}_M. \quad (4.7)$$

На основе анализа модели (4.7) можно сделать следующие выводы о свойствах неадаптивного регулятора (4.5).

Если $q = q_0$, то модель ошибки замкнутой системы принимает вид

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon,$$

откуда следует стремление $\varepsilon \rightarrow 0$. Другими словами, при равенстве номинального значения параметра истинному замкнутая система является асимптотически (экспоненциально) устойчивой, а установившаяся ошибка слежения за эталонной моделью равна нулю.

Если $q \neq q_0$, но $|q| < \lambda$, то из уравнения (4.7) следует асимптотическая устойчивость замкнутой системы (т.к. $(\lambda - q) > 0$) и возможность появления ненулевой установившейся ошибки слежения за счет слагаемого $q\dot{x}_M$. Другими словами, малые параметрические возмущения не нарушают устойчивости замкнутой системы, но могут ухудшить ее точностные свойства.

Если $q \neq q_0$ и $|q| > \lambda$, то замкнутая система может потерять устойчивость в случае отрицательного значения величины $(\lambda - q)$.

Как обеспечить устойчивость системы и высокое качество слежения за эталонной моделью в том случае, если параметр q является неизвестным или известен с высокой степенью приближенности?

4.1.3. Адаптивное управление

Алгоритм адаптивного управления удобно представить в виде двух блоков:

– *настраиваемого регулятора*

$$u = -\lambda x - \hat{q}x + \lambda g; \quad (4.8)$$

– *алгоритма адаптации*

$$\dot{\hat{q}} = \tau(\varepsilon, x). \quad (4.9)$$

Структура алгоритма адаптации $\tau(\varepsilon, x)$ будет определена позже. В уравнениях (4.8), (4.9) \hat{q} – настраиваемый параметр регулятора, генерируемый алгоритмом адаптации из условия минимизации ошибки слежения ε . Особо отметим, что порядок замкнутой системы повысился за счет включения в ее структуру динамического блока – алгоритма адаптации (4.9). Поэтому при исследовании устойчивости

Отформатировано ... [41]

Удалено: ¶

Удалено: .

Удалено: .

Отформатировано ... [42]

Удалено: ¶

Отформатировано ... [43]

Удалено: .

Отформатировано ... [44]

Удалено: .

Отформатировано ... [45]

Удалено: ¶

Отформатировано ... [46]

Удалено: .

Удалено: ¶

Отформатировано ... [47]

Удалено: .

Удалено: .

Удалено: .

Отформатировано ... [48]

Удалено: .

Удалено: θ

Отформатировано ... [49]

Отформатировано ... [50]

Отформатировано ... [51]

Отформатировано ... [52]

Отформатировано ... [53]

Отформатировано ... [54]

Отформатировано ... [55]

Удалено: ¶

Отформатировано ... [56]

Удалено: .

Удалено: .

Отформатировано ... [57]

Отформатировано ... [58]

Удалено: ¶

Отформатировано ... [59]

Отформатировано ... [60]

Удалено: ¶

Отформатировано ... [61]

Удалено: .

Отформатировано ... [62]

Отформатировано ... [63]

Отформатировано ... [64]

замкнутой системы необходимо расширить вектор состояния, добавив новую координату – *параметрическую ошибку* ϑ .

Подставляя (4.8) в (4.1), вычитая из полученного уравнения (4.2) и принимая во внимание условие, что $\dot{\vartheta} = \vartheta - \dot{\vartheta} = -\dot{\vartheta}$, получим следующую модель замкнутой системы в координатах ε и ϑ (т.е. *модель ошибки* – см. рис. 4.2, б):

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon + \vartheta x, \quad (4.10)$$

$$\dot{\vartheta} = -\tau(\varepsilon, x). \quad (4.11)$$

Для выбора структуры алгоритма адаптации $\tau(\varepsilon, x)$ применим функцию Ляпунова вида

$$V(\varepsilon, \vartheta) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2\gamma}\vartheta^2, \quad (4.12)$$

где γ – произвольный положительный коэффициент (его назначение будет пояснено позже). Тогда производная функции (4.12) в силу уравнений (4.10) и (4.11) после элементарных преобразований принимает вид

$$\dot{V}(\varepsilon, \vartheta) = -\lambda\varepsilon^2 + \vartheta x - \frac{1}{\gamma}\vartheta\tau(\varepsilon, x). \quad (4.13)$$

Очевидно, что при выборе $\tau(\varepsilon, x) = \gamma\varepsilon x$ после сокращения одинаковых слагаемых получаем

$$\dot{V}(\varepsilon, \vartheta) = -\lambda\varepsilon^2 \leq 0. \quad (4.14)$$

Из последнего неравенства следует устойчивость по Ляпунову состояния равновесия $(\varepsilon, \vartheta) = (0, 0)$ (в силу теоремы П2.1 из приложения 2) и выполнение равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$$

(в силу теоремы П2.4 из приложения 2), что означает выполнение целевого условия (4.3).

Другими словами, алгоритм адаптивного управления (рис. 4.2, а)

$$u = -\lambda x - \hat{q}x + \lambda g, \quad (4.15)$$

$$\dot{\hat{q}} = \gamma\varepsilon x \quad (4.16)$$

обеспечивает асимптотическое слежение за эталонной моделью для параметрически неопределенного объекта (4.1). При этом

Удалено:	
Удалено: $\tilde{\theta}$	
Отформатировано ... [65]	
Отформатировано ... [66]	
Отформатировано ... [67]	
Отформатировано ... [68]	
Удалено:	
Отформатировано ... [69]	
Отформатировано ... [70]	
Удалено:	
Отформатировано ... [71]	
Отформатировано ... [72]	
Удалено:	
Отформатировано ... [73]	
Отформатировано ... [74]	
Удалено:	
Отформатировано ... [75]	
Отформатировано ... [76]	
Отформатировано ... [77]	
Удалено:	
Удалено: ϑ	
Отформатировано ... [78]	
Удалено:	
Отформатировано ... [79]	
Удалено: ϑ	
Отформатировано ... [80]	
Отформатировано ... [81]	
Отформатировано ... [82]	
Отформатировано ... [83]	
Отформатировано ... [84]	
Отформатировано ... [85]	
Отформатировано ... [86]	
Отформатировано ... [87]	
Отформатировано ... [88]	
Отформатировано ... [89]	
Отформатировано ... [90]	
Отформатировано ... [91]	
Отформатировано ... [92]	
Отформатировано ... [93]	
Отформатировано ... [94]	
Отформатировано ... [95]	
Код поля изменен ... [96]	
Отформатировано ... [97]	
Код поля изменен ... [98]	
Отформатировано ... [99]	
Удалено:	
Отформатировано ... [100]	
Отформатировано ... [101]	
Отформатировано ... [102]	

коэффициент γ определяет скорость настройки параметра q_0 и носит название *коэффициента адаптации*. В структуре алгоритма адаптации выделяют также *сигнал ошибки слежения* $\varepsilon(t)$ и *регрессор* $x(t)$. Особо отметим, что в общем случае выполнение целевого условия (4.3) не гарантирует сходимости по параметрам, т.е. выполнение равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{q}(t) = 0$$

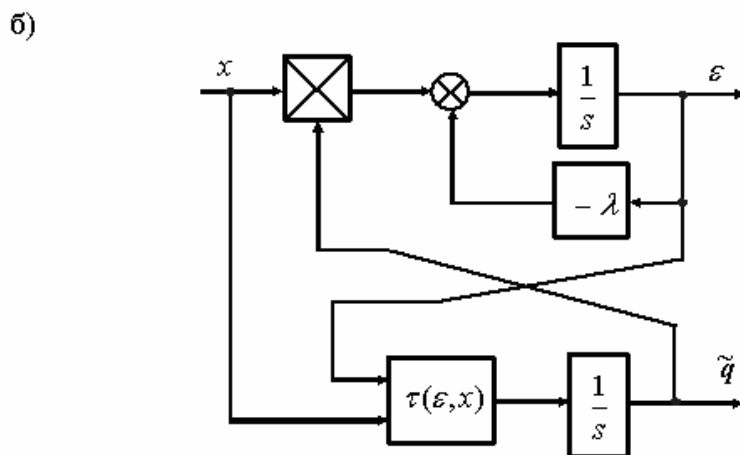
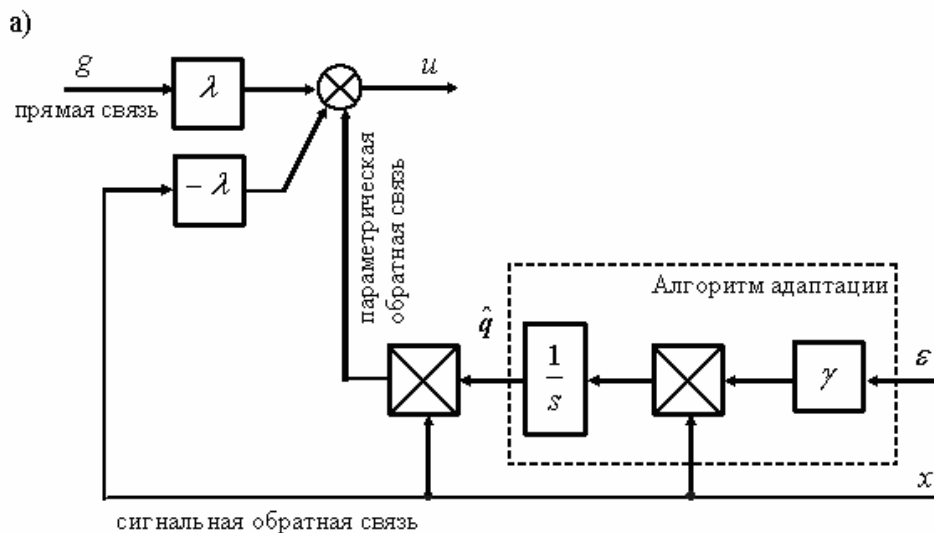


Рис. 4.2. Адаптивное управление: а) структура регулятора; б) эквивалентная модель ошибки

Действительно, как было показано выше, состояние равновесия $(\varepsilon, \hat{\theta}) = (0, 0)$ замкнутой адаптивной системы является только устойчивым по Ляпунову (но не асимптотически устойчивым). Для обеспечения сходимости по параметрам необходимо выполнение дополнительного условия, накладываемого на свойства регрессора (в данном случае на свойства переменной $x(t)$) и получившего название условия неисчезающего возбуждения. Говорят, что регрессор $x(t)$ является неисчезающим (или удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения), если существуют такие положительные числа T и α , что для всех $t > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} x^2(\tau) d\tau > \alpha.$$

Приведенное неравенство означает, что на любом интервале времени $[t, t+T]$ сигнал $x(t)$ интегрально отделен от нуля, т. е. значение соответствующего интеграла больше некоторой положительной константы α .

Условие неисчезающего возбуждения допускает следующее объяснение. Если регрессор с течением времени стремится к нулю, то скорость настройки параметра \hat{q} может уменьшаться быстрее, чем скорость уменьшения ошибки слежения ε (из формулы (4.16) видно, что скорость настройки параметра \hat{q} пропорциональна произведению x на ε). Поэтому настраиваемый параметр \hat{q} может «не успеть» сойтись к истинному значению q до «обнуления» ошибки ε .

Отметим, что в рассматриваемой задаче слежения характер поведения регрессора $x(t)$ определяется характером задающего воздействия $g(t)$. Поэтому условие неисчезающего возбуждения в задачах адаптивного слежения может быть переформулировано в терминах задающего воздействия.

Основной недостаток адаптивного регулятора становится очевидным из выражения (4.14), если вспомнить, что свойство устойчивости по Ляпунову не является грубым. На практике это проявляется в высокой чувствительности адаптивных систем к структурным и сигнальным возмущениям.

Рассмотрим объект, подверженный воздействию внешнего возмущения $\delta(t)$:

$$\dot{x} = qx + u + \delta(t). \quad (4.17)$$

Удалено: Особо отметим, что в общем случае выполнение целевого условия (4.3) не гарантирует сходимости по параметрам, т.е. выполнение равенства ¶

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0. ¶$$

Удалено:

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт

Удалено: $\hat{\theta}$

Удалено: $\hat{\theta}$

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт

Удалено: $\hat{\theta}$

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт

Удалено: θ

Отформатировано: Шрифт: курсив

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см

Удалено:

Удалено:

Отформатировано: русский (Россия)

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Отформатировано: русский (Россия)

Пусть возмущение $\delta(t)$ является ограниченным, т. е. $|\delta(t)| < \bar{\delta}$ для всех $t > 0$ и некоторой положительной константы $\bar{\delta}$. Используем для управления объектом (4.17) адаптивный регулятор (4.15), (4.16). Тогда модель ошибки замкнутой системы примет вид

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon + q\hat{x} + \delta, \quad (4.18)$$

$$\dot{\hat{q}} = -\gamma x \varepsilon. \quad (4.19)$$

Вычисляя производную функции Ляпунова (4.13) в силу уравнений (4.18), (4.19), получим

$$V(\varepsilon, \hat{q}) = -\lambda\varepsilon^2 + \varepsilon\delta \leq -\lambda\varepsilon^2 + \bar{\delta}|\varepsilon|. \quad (4.20)$$

Так как $V < 0$ при $|\varepsilon| > \bar{\delta}/\lambda$, то из (4.20) следует ограниченность ошибки слежения ε . Однако параметрическая ошибка \hat{q} может неограниченно расти при малых значениях ε , когда $V > 0$. Поэтому при наличии внешних возмущений, несмотря на ограниченность ошибки слежения ε , может наблюдаться неограниченный параметрический дрейф (состоящий в неограниченном росте значения настраиваемого параметра \hat{q}). Естественно, что с практической точки зрения такая ситуация является неприемлемой. Поэтому проблема управления параметрически неопределенным объектом в условиях внешних возмущений требует применения других, специальных методов.

4.1.4. Нелинейное робастное управление

Алгоритм нелинейного робастного управления объектом (4.17) имеет вид (см. рис. 4.3, а)

$$u = -\lambda x - \gamma x^2 \varepsilon + \lambda g. \quad (4.21)$$

В этом случае модель ошибки замкнутой системы описывается уравнением (см. рис. 4.3, б)

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda\varepsilon + qx - \gamma x^2 \varepsilon + \delta. \quad (4.22)$$

Вычисляя производную функции Ляпунова

$$V(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \quad (4.23)$$

в силу уравнения (4.22), получим

$$V(\varepsilon) = -\lambda\varepsilon^2 + qx\varepsilon - \gamma x^2 \varepsilon^2 + \delta\varepsilon \leq -\lambda\varepsilon^2 + qx\varepsilon - \gamma x^2 \varepsilon^2 + \bar{\delta}|\varepsilon|.$$

Удалено: ¶
Удалено: .
Отформатировано: Шрифт: 6 пт
Удалено: ¶
Отформатировано ... [107]
Удалено: .
Отформатировано ... [108]
Удалено: .
Отформатировано ... [109]
Отформатировано ... [110]
Удалено: .
Отформатировано ... [111]
Отформатировано ... [112]
Отформатировано ... [113]
Удалено: $\tilde{\theta}$
Удалено: ¶
Отформатировано ... [114]
Отформатировано ... [115]
Отформатировано ... [116]
Отформатировано ... [117]
Отформатировано ... [118]
Отформатировано ... [119]
Удалено: ¶
Отформатировано ... [120]
Удалено: .
Удалено: .
Отформатировано ... [121]
Отформатировано ... [122]
Удалено: ¶
Отформатировано ... [123]
Удалено: .
Отформатировано ... [124]
Отформатировано ... [125]
Удалено: ¶
Отформатировано ... [126]
Удалено: .
Отформатировано ... [127]
Отформатировано ... [128]
Отформатировано ... [129]
Отформатировано ... [130]
Удалено: .
Отформатировано ... [131]
Отформатировано ... [132]
Отформатировано ... [133]

Выделим в последнем уравнении полные квадраты разности, добавив и вычтя слагаемые $q^2 / (4\gamma)$ и $\bar{\delta}^2 / (2\lambda)$:

$$\begin{aligned} J(\varepsilon) &= -\frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 - \left(\gamma x^2 \varepsilon^2 - q x \varepsilon + \frac{q^2}{4\gamma} \right) + \frac{q^2}{4\gamma} - \left(\frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 - |\varepsilon| \bar{\delta} + \frac{1}{2\lambda} \bar{\delta}^2 \right) + \frac{1}{2\lambda} \bar{\delta}^2 = \\ &= -\frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 - \left(\sqrt{\gamma} x \varepsilon - \frac{q}{2\sqrt{\gamma}} \right)^2 + \frac{q^2}{4\gamma} - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} |\varepsilon| - \sqrt{\frac{1}{2\lambda}} \bar{\delta} \right)^2 + \frac{\bar{\delta}^2}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Пренебрегая в последнем выражении квадратными слагаемыми, получим

$$J(\varepsilon) \leq -\frac{\lambda}{2} \varepsilon^2 + \frac{q^2}{4\gamma} + \frac{\bar{\delta}^2}{2\lambda}.$$

Учитывая далее равенство $\lambda \varepsilon^2 / 2 = \lambda V$ и рассматривая переменную V в качестве функции времени, можно записать

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda V(t) + \frac{q^2}{4\gamma} + \frac{\bar{\delta}^2}{2\lambda}. \quad (4.24)$$

Решая дифференциальное уравнение (4.24), получим

$$V(t) \leq \exp(-\lambda t) V(0) + \frac{q^2}{4\gamma\lambda} + \frac{\bar{\delta}^2}{2\lambda^2}.$$

Учитывая далее зависимость (4.23) и переходя в последнем выражении к норме ошибки слежения ε , окончательно получаем

$$|\varepsilon(t)| \leq \exp\left(-\frac{\lambda}{2} t\right) |\varepsilon(0)| + \Delta, \quad (4.25)$$

где $\Delta = \frac{|q|}{\sqrt{2\gamma\lambda}} + \frac{\bar{\delta}}{\lambda}$. Неравенство (4.25) задает экспоненциальную

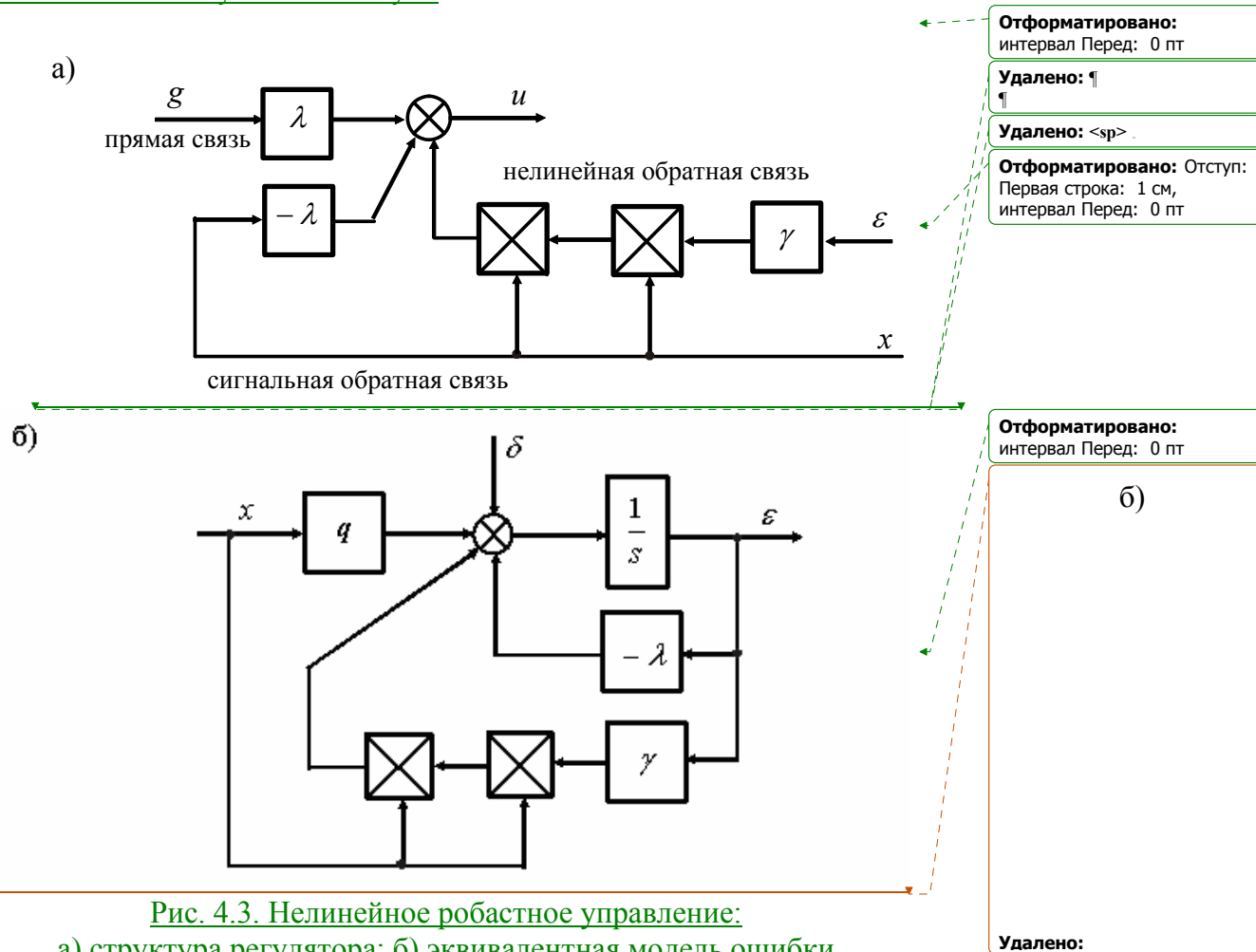
мажоранту переходного процесса по норме ошибки слежения $\varepsilon(t)$ (см. рис. 4.4).

Основные свойства робастного регулятора (4.21) могут быть сформулированы следующим образом. Для произвольного положительного коэффициента нелинейной обратной связи γ регулятор (4.21) обеспечивает ограниченность всех сигналов и экспоненциальную сходимость ошибки слежения к предельному установившемуся значению Δ . При отсутствии внешних возмущений (т. е. при $\delta(t) \equiv 0$) величина предельного установившегося значения может быть сделана произвольно малой за счет увеличения коэффициента нелинейной обратной связи γ . Во многих

Отформатировано	...	[134]
Отформатировано	...	[135]
Удалено: ¶	...	[136]
Отформатировано	...	[137]
Удалено: ¶	...	[138]
Отформатировано	...	[138]
Отформатировано	...	[139]
Отформатировано	...	[140]
Удалено: ¶	...	[141]
Отформатировано	...	[141]
Отформатировано	...	[142]
Отформатировано	...	[143]
Удалено: ¶	...	[144]
Отформатировано	...	[144]
Отформатировано	...	[145]
Отформатировано	...	[146]
Отформатировано	...	[147]
Отформатировано	...	[148]
Удалено: ¶	...	[149]
Отформатировано	...	[149]
Отформатировано	...	[150]
Отформатировано	...	[151]
Удалено: ¶	...	[152]
Отформатировано	...	[152]
Отформатировано	...	[153]
Отформатировано	...	[154]
Отформатировано	...	[155]
Удалено: ¶	...	[156]
Отформатировано	...	[156]
Отформатировано	...	[157]
Отформатировано	...	[158]
Удалено: ¶	...	[159]
Отформатировано	...	[159]
Отформатировано	...	[160]
Отформатировано	...	[161]
Отформатировано	...	[162]
Удалено: ¶	...	[163]
Отформатировано	...	[163]
Отформатировано	...	[164]
Отформатировано	...	[165]
Отформатировано	...	[166]
Отформатировано	...	[167]
Отформатировано	...	[168]
Отформатировано	...	[169]
Отформатировано	...	[170]

практических случаях такие свойства замкнутой системы являются вполне приемлемыми.

В завершение параграфа отметим, что сравнение структурных схем алгоритма адаптивного управления (рис. 4.2, а) и нелинейного робастного управления (рис. 4.3, а) позволяет определить простое правило получения нелинейного робастного управления из адаптивного. Для этого достаточно исключить из структуры алгоритма адаптации интегратор, заменив интегральную обратную связь на статическую нелинейную.



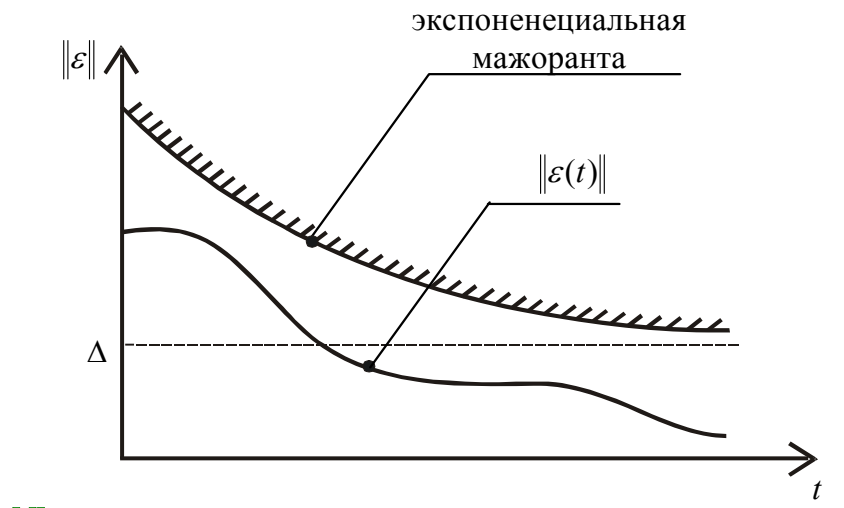


Рис. 4.4. Мажоранта переходного процесса по норме ошибки слежения $\varepsilon(t)$

4.2. Принципы построения систем адаптивного управления

4.2.1. Этапы синтеза адаптивных систем

Рассмотрим последовательность синтеза системы адаптивного управления параметрически неопределенным объектом общего вида

$$\dot{x} = f(x, u, q), \quad (4.26)$$

где x — вектор состояния, u — сигнал управления, q — вектор неизвестных параметров. Пусть цель управления состоит в обеспечении асимптотического слежения вектора состояния $x(t)$ за эталонным состоянием $x_M(t)$, т.е. в обеспечении целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad (4.27)$$

где $e = x - x_M$ — ошибка слежения (или сигнальная ошибка).

Этап 1: синтез ненастраиваемого регулятора. В предположении, что параметры q являются известными, синтезируется регулятор

$$u = U(x, x_M, q), \quad (4.28)$$

обеспечивающий выполнение целевого условия (4.27). Регулятор может быть синтезирован любым методом современной теории автоматического управления.

Этап 2: формирование адаптивного регулятора. Неизвестные параметры q заменяются в регуляторе (4.28) настраиваемыми параметрами \hat{q} . Структура алгоритма адаптации, генерирующего

настраиваемые параметры, будет определена на следующем этапе. Таким образом, получаем выражения для адаптивного регулятора

$$u = U(x, x_M, \hat{q}), \quad (4.29)$$

$$\hat{q} = \Theta(x, e), \quad (4.30)$$

где структура алгоритма адаптации $\Theta(x, e)$ подлежит определению. Метод формирования настраиваемого регулятора (4.29), основанный на непосредственной замене q на \hat{q} , получил название *метода непосредственной компенсации*. Им не исчерпываются все возможные способы формирования настраиваемых регуляторов. Другие методы (включающие итеративные процедуры синтеза) можно найти в литературе.

Этап 3: получение модели ошибки. Подставляя (4.29) в (4.26) и дифференцируя выражения для сигнальной $e(t) = x(t) - x_M(t)$ и параметрической $\hat{q}(t) = q - \hat{q}(t)$ ошибок, получаем *модель ошибки замкнутой системы*

$$\dot{e} = \Psi(e, \hat{q}, t), \quad (4.31)$$

$$\dot{\hat{q}} = -\Theta(e, t). \quad (4.32)$$

Этап 4: синтез алгоритма адаптации. Выбирается функция Ляпунова $V(e, \hat{q})$ и вычисляется ее производная в силу уравнений (4.31), (4.32). Далее на основе анализа выражения для $\dot{V}(e, \hat{q})$ выбирается структура алгоритма адаптации $\Theta(e, t)$, обеспечивающая достижение заданных свойств устойчивости замкнутой системы. Данный этап является во многом творческим, так как не существует универсальных методов выбора "подходящих" функций Ляпунова.

4.2.2. Базовые структуры алгоритмов адаптации

Среди рассмотренных выше этапов синтеза адаптивных систем принципиально новым (с точки зрения классической теории управления) является этап синтеза алгоритма адаптации. Для его упрощения желательно получить некоторые базовые (стандартные) структуры алгоритмов, являющиеся применимыми для возможно более широких классов задач управления параметрически неопределенными объектами. Такие базовые структуры алгоритмов адаптации синтезируют на основе *канонических моделей ошибки*. К ним относятся: статическая модель ошибки, динамическая модель с измеряемым состоянием и динамическая модель с измеряемым выходом.

Удалено: ¶
Удалено: .
Отформатировано: Шрифт: 6 пт
Отформатировано: русский (Россия)
Удалено: .
Отформатировано: русский (Россия)
Отформатировано: русский (Россия)
Удалено: ¶
Отформатировано: Шрифт: 6 пт
Удалено: θ
Отформатировано: Шрифт: курсив
Отформатировано: русский (Россия)
Удалено: θ̂
Отформатировано: Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт
Удалено: .
Отформатировано: русский (Россия)
Удалено: ¶
Удалено: .
Удалено: &= Φ(e, q̂)
Отформатировано: Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт
Отформатировано: русский (Россия)
Удалено:
Отформатировано: русский (Россия)
Отформатировано: Шрифт: 6 пт
Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см
Отформатировано: Шрифт: 12 пт
Отформатировано: ... [202]
Удалено: .
Отформатировано: ... [203]
Удалено: ¶
Удалено: 4
Отформатировано: ... [204]
Отформатировано: ... [205]

Статическая модель ошибки описывается уравнением (рис. 4.5.a)

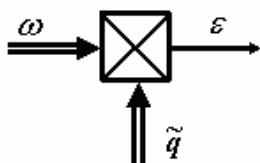
$$\varepsilon = \omega^T \vartheta, \quad (4.33)$$

где ε – сигнальная ошибка, $\omega(t)$ – вектор известных функций времени (*регрессор*), $\vartheta = q - \hat{q}$ – вектор параметрических ошибок, q – вектор неизвестных параметров, \hat{q} – вектор настраиваемых параметров. Рассматриваемая задача состоит в выборе такого правила настройки параметров \hat{q} , чтобы все сигналы в замкнутой системе были ограниченными, и дополнительно

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0. \quad (4.34)$$

Статическая модель ошибки канонического вида (4.33) появляется в задачах идентификации линейных моделей и в задачах адаптивного управления по выходной переменной. В теории идентификации она получила название *линейной регрессионной модели*.

а)



б)

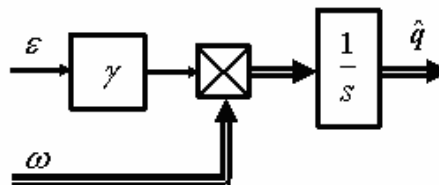


Рис. 4.5. Статическая модель ошибки (а) и соответствующий ей базовый алгоритм адаптации (б)

Базовый (стандартный) алгоритм адаптации модели (5.33) имеет вид (рис. 4.5.б)

$$\dot{\hat{q}} = \gamma \omega \varepsilon, \quad (4.35)$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент адаптации.

Для доказательства свойств устойчивости замкнутой модели (4.33), (4.35) используем функцию Ляпунова $V(\vartheta) = \frac{1}{2\gamma} \vartheta^T \vartheta$. Вычисляя ее производную по времени в силу уравнений (4.33) и (4.35), получим

$$\dot{V}(\varepsilon) = \frac{1}{\gamma} \dot{\varepsilon}^T \dot{\varepsilon} - \frac{1}{\gamma} \dot{\varepsilon}^T \dot{\varepsilon} = -\dot{\varepsilon}^T \omega \varepsilon = -\varepsilon^2 \leq 0,$$

откуда следует устойчивость по Ляпунову состояния равновесия $\dot{\varepsilon} = 0$ и выполнение целевого условия (4.34).

Динамическая модель ошибки с измеряемым состоянием имеет вид (рис. 4.6, а)

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon + b\omega^T \dot{\varepsilon}, \quad (4.36)$$

где e – вектор ошибки слежения (вектор состояния модели ошибки), A – гурвицева матрица, а b – вектор постоянных коэффициентов (матрица A и вектор b полагаются известными). Как и раньше, рассматриваемая проблема состоит в выборе такого правила настройки параметров \hat{q} , чтобы все сигналы в замкнутой системе были ограниченными и дополнительно выполнялось целевое условие (4.34).

Динамическая модель ошибки канонического вида (4.36) появляется в задачах адаптивного управления по состоянию (см. также п. 4.3. настоящей книги).

Базовый (стандартный) алгоритм адаптации модели (4.36) имеет вид (рис. 4.6, б)

$$\dot{\hat{q}} = \gamma \omega b^T P e, \quad (4.37)$$

где симметрическая положительно определенная матрица P является решением уравнения

$$A^T P + P A = -Q \quad (4.38)$$

с произвольной симметрической положительно определенной матрицей Q . Для доказательства свойств устойчивости замкнутой модели (4.36)–(4.38) используем функцию Ляпунова

$$V(e, \hat{q}) = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2\gamma} \dot{\hat{q}}^T \dot{\hat{q}}.$$

Удалено: ¶

Удалено:

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: русский (Россия)

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено: бы

Удалено:

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт

Отформатировано ... [207]

Отформатировано ... [208]

Отформатировано ... [209]

Отформатировано ... [210]

Отформатировано ... [211]

Отформатировано ... [212]

Отформатировано ... [213]

Отформатировано ... [214]

Отформатировано ... [215]

Отформатировано ... [216]

Отформатировано ... [217]

Отформатировано ... [218]

Отформатировано ... [219]

Отформатировано ... [220]

Отформатировано ... [221]

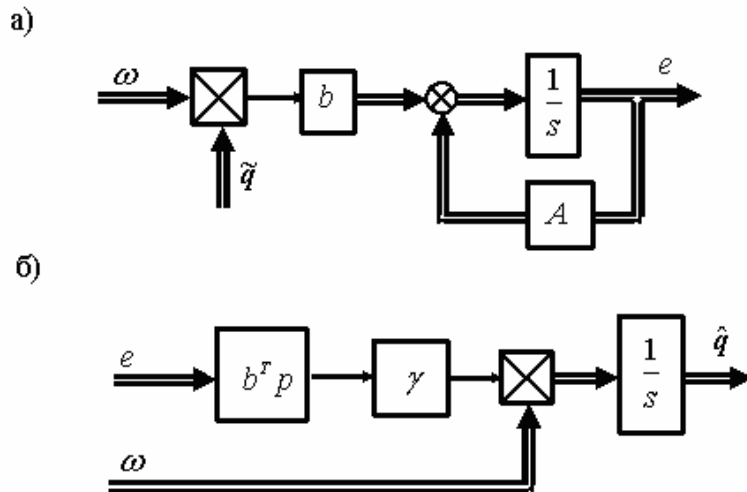


Рис. 4.6. Динамическая модель ошибки с измеряемым состоянием (а) и соответствующий ей базовый алгоритм адаптации (б)

Вычисляя ее производную по времени в силу уравнений (4.36)–(4.38), получим

$$\dot{V}(e, \hat{q}) = \frac{1}{2} e^T (A^T P + P A) e + \hat{q}^T \omega b^T P e - \frac{1}{\gamma} \hat{q}^T \dot{\omega} b^T P e - \frac{1}{2} e^T Q e \leq 0,$$

откуда следует устойчивость по Ляпунову состояния равновесия $(e, \hat{q}) = (0, 0)$ и выполнение целевого условия (4.34).

Динамическая модель ошибки с измеряемым выходом имеет вид

$$\dot{e} = A e + b \omega^T \hat{q}, \quad (4.39)$$

$$\varepsilon = c^T e, \quad (4.40)$$

где e – недоступный прямым измерениям вектор состояния модели ошибки, ε – измеряемая ошибка слежения, A , b и c – гурвицева матрица и векторы известных постоянных коэффициентов. Рассматриваемая задача состоит в выборе такого правила настройки параметров \hat{q} , чтобы все сигналы в замкнутой системе были ограниченными, и дополнительно выполнялось целевое условие (4.34).

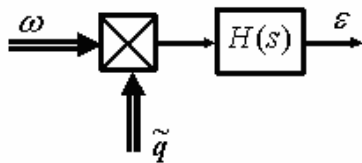
Динамическая модель ошибки канонического вида (4.39), (4.40) появляется в задачах адаптивного управления по выходной переменной. Очевидно, что модель (4.39), (4.40) может быть переписана в виде (рис. 4.7, а)

$$\varepsilon = H(s) \omega^T \hat{q}, \quad (4.41)$$

где передаточная функция $H(s)$ определяется выражением

$$H(s) = c^T (sI - A)^{-1} b. \quad (4.42)$$

а)



б)

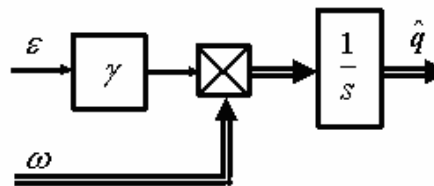


Рис. 4.7. Динамическая модель ошибки с измеряемым выходом (а) и алгоритм адаптации (б), применимый для СПВ-функций $H(s)$

Исследуем сначала условия применимости стандартного алгоритма адаптации (4.37). Очевидно, что данный алгоритм в общем случае является неприменимым, так как вектор состояния модели ошибки e недоступен прямым измерениям. Однако, если удалось бы выбрать матрицу P таким образом, что

$$b^T P = c^T, \quad (4.43)$$

то алгоритм адаптации (4.37) принял бы вид (см. рис. 4.7, б)

$$\dot{\hat{q}} = \gamma \omega \varepsilon. \quad (4.44)$$

Алгоритм (4.44) является физически реализуемым, так как в нем используются только измеряемые сигналы.

Таким образом, условием применимости базового алгоритма адаптации вида (4.44) является существование симметрической положительно определенной матрицы P , удовлетворяющей одновременно двум уравнениям (4.38) и (4.43). В свою очередь, такая матрица может быть найдена не для всех моделей ошибки (4.39), (4.40), а только для моделей со строго положительно вещественной передаточной функцией.

Утверждение 4.1.¹ Симметрическая положительно определенная матрица P , являющаяся решением одновременно двух уравнений (4.38) и (4.43), существует только в том случае, если передаточная функция модели ошибки (4.42) является строго положительно вещественной.

Определение строгой положительной вещественности дано в приложении 3. Из него видно, что СПВ-функции² являются асимптотически устойчивыми, а вносимый ими фазовый сдвиг не

¹ в литературе по теории автоматического управления данное утверждение известно под названием *лемма Якубовича-Калмана*.

² т.е. строго положительно вещественные передаточные функции

Удалено: ¶

Удалено: .

Удалено: 5

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: По центру, интервал Перед: 0 пт

Удалено: <sp>

Отформатировано: Шрифт: 14 пт

Отформатировано: Шрифт: 14 пт

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: Шрифт: курсив

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: Шрифт: курсив

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: Шрифт: 6 пт, русский (Россия)

Отформатировано: интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено: . . .

Отформатировано: По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: интервал Перед: 0 пт

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено: . . .

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: ... [236]

Отформатировано: ... [237]

Удалено: [48]

превышает 90° . Насколько ограничительным является требование строгой положительной вещественности? Для ответа на этот вопрос учтем, что СПВ передаточная функция не может иметь относительную степень выше единицы (что определяется требованием предельного фазового сдвига в 90°). Очевидно, что класс динамических систем с единичной относительной степенью является достаточно узким, и в него не попадают математические модели большинства реальных технических устройств. Таким образом, базовый алгоритм адаптации (4.44) может быть использован только в частных случаях, и необходимо получение универсальных алгоритмов адаптации, применимых ко всему классу моделей ошибки вида (4.39), (4.40).

В настоящее время предложено несколько различных решений задачи синтеза универсальных алгоритмов адаптации для динамической модели ошибки с измеряемым выходом. Мы остановимся только на методе *расширенной ошибки*. В соответствии с данным методом формируется дополнительный сигнал коррекции

$$\zeta = H(s)\omega^T(t)\hat{q}(t) - \hat{q}^T(t)H(s)\omega(t), \quad (4.45)$$

и сигнал *расширенной ошибки*

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \zeta, \quad (4.46)$$

где $H(s)$ – передаточная функция модели ошибки (4.42). Структура схемы расширения приведена на рис. 4.8, а.

Каковы свойства расширенной ошибки? Подставляя выражения для ε и ζ из (4.41) и (4.45) в (4.46), получим

$$\hat{\varepsilon} = H(s)\omega^T(t)(\theta - \hat{q}(t)) + H(s)\omega^T(t)\hat{q}(t) - \hat{q}^T(t)H(s)\omega(t).$$

Учтем, что в силу свойств линейных систем и стационарности вектора θ он может быть вынесен за символ передаточной функции $H(s)$:

$$\hat{\varepsilon} = \theta^T H(s)\omega(t) - H(s)\omega^T(t)\hat{q}(t) + H(s)\omega^T(t)\hat{q}(t) - \hat{q}^T(t)H(s)\omega(t).$$

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: интервал Перед: 0 пт

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено: . .

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: интервал Перед: 0 пт

Удалено: .

Удалено: ¶

Удалено: .

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено: ¶

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Удалено: θ

Отформатировано: Шрифт: курсив

Удалено:

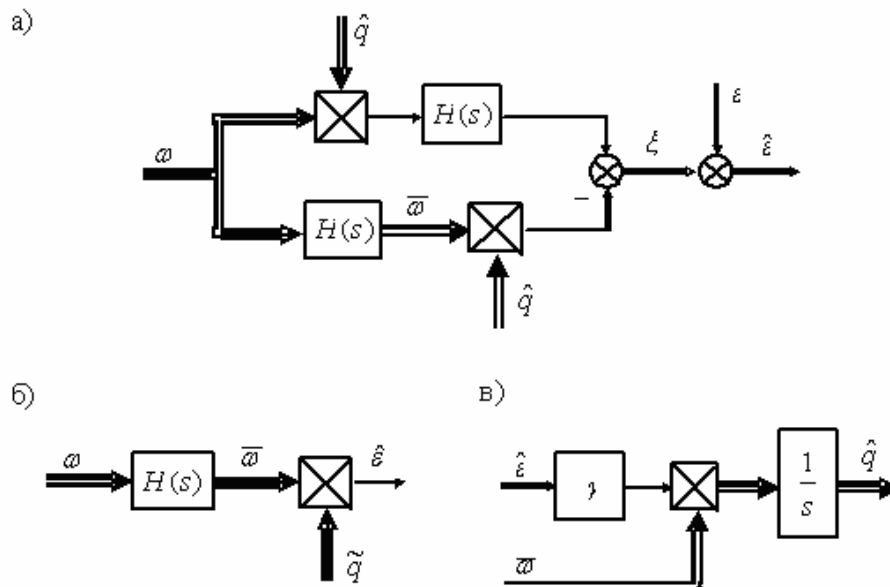


Рис. 4.8. Схема расширения сигнала ошибки (а), эквивалентная модель ошибки (б) и соответствующий ей базовый алгоритм адаптации (в)

После элементарных преобразований окончательно получаем (см. рис. 4.8, б)

$$\hat{\epsilon} = \bar{\omega}^T \hat{q}, \quad (4.48)$$

где $\bar{\omega}(t) = H(s)\omega(t)$ – отфильтрованный регрессор. Таким образом, для расширенной ошибки слежения $\hat{\epsilon}$ получили статическую модель ошибки стандартного вида (4.33) (с точностью до замены ϵ на $\hat{\epsilon}$ и ω на $\bar{\omega}$). Поэтому для адаптивной настройки модели (4.48) можно использовать стандартный алгоритм (4.35), который в данном случае принимает вид (см. рис. 4.8, в)

$$\dot{\hat{q}} = \gamma \bar{\omega} \hat{\epsilon}. \quad (4.49)$$

Таким образом, полностью алгоритм адаптации модели (4.39), (4.40) будет описываться уравнениями (4.45), (4.46) и (4.49).

В следующих параграфах будет показано, как базовые структуры алгоритмов адаптации могут быть использованы при решении конкретных задач управления неопределенными объектами.

4.3. Адаптивное управление многомерным объектом

Отформатировано: По центру, интервал Перед: 0 пт

Удалено: <sp>

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: По центру, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Удалено: ¶

Удалено:

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Удалено:

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см

Удалено: ¶

Отформатировано: По центру, Уровень 1, интервал Перед: 0 пт

Удалено: ¶

4.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим параметрически неопределенный объект управления

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (4.50)$$

$$y = c^T x, \quad (4.51)$$

где x – n -мерный вектор состояния, доступный прямым измерениям, u – сигнал управления, y – регулируемая переменная, и

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & O & \\ 0 & 0 & 0 & K & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & K & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Можно показать, что передаточная функция объекта (4.50), (4.51) с матрицами (4.52) имеет вид

$$H(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}.$$

Параметры a_i и $b_0 > 0$ объекта управления считаются неизвестными.

Пусть желаемый характер поведения регулируемой переменной y определяется эталонной моделью

$$\dot{x}_M = A_M x_M + b_M g, \quad (4.53)$$

$$y_M = c^T x_M, \quad (4.54)$$

где x_M – n -мерный вектор состояния эталонной модели, y_M – эталонный выход, g – сигнал задания, и

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & O & \\ 0 & 0 & 0 & K & 1 \\ -a_0^M & -a_1^M & -a_2^M & K & -a_{n-1}^M \end{bmatrix}, \quad b_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ b_0^M \end{bmatrix}.$$

При этом коэффициенты эталонной модели a_i^M могут быть выбраны методом стандартных характеристических полиномов на основе заданных показателей качества замкнутой системы – времени

переходного процесса t_{II} и перерегулирования σ . Коэффициент b_0^M выбирается из условия обеспечения заданного коэффициента усиления замкнутой системы.

Рассматриваемая задача состоит в синтезе управления, обеспечивающего в замкнутой системе ограниченность всех сигналов и выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_M(t)) = 0. \quad (4.55)$$

Так как параметры объекта управления являются неизвестными, то решение будем искать в классе адаптивных алгоритмов управления. При этом особо отметим, что динамические показатели качества, задаваемые эталонной моделью, будут обеспечены в замкнутой системе только после завершения переходных процессов настройки адаптивного регулятора.

4.3.2. Синтез регулятора

В соответствии с методикой синтеза адаптивных систем, изложенной в п. 4.2.1, построим сначала неадаптивное управление в предположении, что параметры объекта точно известны. Для этого выведем модель ошибки слежения по состоянию

$$e = x - x_M. \quad (4.56)$$

Дифференцируя (4.56) по времени с учетом (4.50) и (4.53), имеем

$$\dot{e} = Ax - A_M x_M + bu - b_M g.$$

Учтем, что

$$Ax - A_M x_M = Ax - A_M x_M \pm A_M x = A_M e + h \Delta^T x,$$

$$bu - b_M g = b_0 h \left(u - \frac{b_0^M}{b_0} g \right),$$

где $h^T = [0 \ 0 \dots \ 1]$, $\Delta^T = [a_0^M - a_0 \ a_1^M - a_1 \ \dots \ a_{n-1}^M - a_{n-1}]$. Вводя обозначение для вектора неизвестных параметров θ и регрессора ω

$$q^T = \left[-\frac{1}{b_0} \Delta^T \quad -\frac{b_0^M}{b_0} \right], \quad \omega^T(t) = [x^T(t) \ g(t)],$$

окончательно получаем

$$\dot{e} = A_M e + b_0 h (u + \omega^T q). \quad (4.57)$$

Удалено: [48].

Удалено: .

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено: .

Отформатировано ... [262]

Отформатировано ... [263]

Отформатировано ... [264]

Отформатировано ... [265]

Отформатировано ... [266]

Отформатировано ... [267]

Отформатировано ... [268]

Удалено: .

Удалено: 5

Отформатировано ... [269]

Удалено: .

Отформатировано ... [270]

Отформатировано ... [271]

Отформатировано ... [272]

Отформатировано ... [273]

Отформатировано ... [274]

Отформатировано ... [275]

Удалено: .

Отформатировано ... [276]

Отформатировано ... [277]

Отформатировано ... [278]

Отформатировано ... [279]

Удалено: .

Удалено: .

Удалено: ¶

Отформатировано ... [280]

Удалено: θ

Отформатировано ... [281]

Отформатировано ... [282]

Отформатировано ... [283]

Удалено: .

Удалено: ¶

Отформатировано ... [284]

Отформатировано ... [285]

Отформатировано ... [286]

Удалено: .

Анализ модели (4.57) позволяет выбрать структуру ненастраиваемого регулятора в виде

$$u = -\omega^T q. \quad (4.58)$$

Действительно, при подстановке (4.58) в (4.57) получаем

$$\dot{e} = A_M e,$$

откуда (в силу гурвицевости матрицы A_M) следует асимптотическая устойчивость замкнутой системы и выполнение целевого условия (4.55).

Однако управление (4.58) является физически нереализуемым, так как вектор параметров q неизвестен. Поэтому заменим в регуляторе вектор неизвестных постоянных параметров q вектором настраиваемых параметров \hat{q} . Получим выражение для настраиваемого регулятора вида

$$u = -\omega^T \hat{q}. \quad (4.59)$$

Подставляя (4.59) в (4.57), выводим модель ошибки слежения для адаптивной системы (4.50), (4.54) и (4.59)

$$\dot{e} = A_M e + \beta h \omega^T \vartheta, \quad (4.60)$$

где $\vartheta = q - \hat{q}$.

Модель (4.60) является типовой динамической моделью ошибки с измеряемым состоянием (см. выражение (4.36)). Для нее ранее уже был получен базовый алгоритм адаптации (4.37), (4.38). С учетом принятых в настоящем параграфе обозначений данный алгоритм принимает вид

$$\dot{\hat{q}} = \gamma \omega h^T P e, \quad (4.61)$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент адаптации (произвольная положительная константа), а симметрическая положительно определенная матрица P является решением уравнения

$$A_M^T P + P A_M = -Q, \quad Q = Q^T > 0. \quad (4.62)$$

4.3.3. Свойства замкнутой системы

Адаптивный регулятор (4.59), (4.61) обеспечивает следующие свойства замкнутой системы, содержащей объект (4.50), (4.51) и эталонную модель (4.53), (4.54) (доказательство этих свойств приведено в приложении 4):

Отформатировано ... [287]
Отформатировано ... [288]
Удалено: .
Отформатировано ... [289]
Отформатировано ... [290]
Отформатировано ... [291]
Отформатировано ... [292]
Отформатировано ... [293]
Отформатировано ... [294]
Отформатировано ... [295]
Удалено: .
Отформатировано ... [296]
Отформатировано ... [297]
Отформатировано ... [298]
Удалено: .
Удалено: θ
Отформатировано ... [299]
Удалено: θ
Отформатировано ... [300]
Отформатировано ... [301]
Удалено: .
Отформатировано ... [302]
Отформатировано ... [303]
Отформатировано ... [304]
Удалено: .
Отформатировано ... [305]
Отформатировано ... [306]
Удалено: .
Отформатировано ... [307]
Отформатировано ... [308]
Удалено: .
Отформатировано ... [309]
Отформатировано ... [310]
Отформатировано ... [311]
Отформатировано ... [312]
Удалено: \dagger
Отформатировано ... [313]
Отформатировано ... [314]
Удалено: .
Удалено: .
Отформатировано ... [315]
Отформатировано ... [316]
Отформатировано ... [317]
Отформатировано ... [318]
Отформатировано ... [319]
Удалено: .

1) нулевое состояние равновесия $(e, \dot{e}) = (0, 0)$ является устойчивым по Ляпунову, а, следовательно, все сигналы в замкнутой системе являются ограниченными;

2) для любых начальных условий и любых ограниченных сигналов задания $g(t)$ справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad (4.63)$$

а, следовательно, выполняется целевое условие (4.55);

3) если входное воздействие $g(t)$ является «частотно богатым», чтобы обеспечить условие не исчезающего возбуждения, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{g}(t) = 0; \quad (4.64)$$

в частности, равенство (4.64) выполняется, если $g(t)$ представляет собой сумму $(n+1)/2$ гармоник с различными частотами (отметим, что здесь $(n+1)$ – число неизвестных параметров в векторе \underline{q}).

Таким образом, несмотря на наличие неизвестных параметров в модели объекта управления, синтезированный регулятор обеспечил устойчивость замкнутой системы и выполнение целевого условия (4.55).

Пример 4.1. Рассмотрим задачу адаптивного управления объектом второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 + b_0 u, \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Пусть заданы желаемые динамические показатели качества замкнутой системы – время переходного процесса $t_{\Pi} = 2$ с и перерегулирование $\sigma = 0\%$. Методом стандартных характеристических полиномов выбираем характеристический полином эталонной модели

$$D_M(p) = p^2 + a_1^M p + a_0^M = p^2 + 5p + 6.25$$

и строим саму эталонную модель

$$\begin{aligned} \dot{x}_{M1} &= x_{M2}, \\ \dot{x}_{M2} &= -6.25x_{M1} - 5x_{M2} + 6.25g, \\ y_M &= x_{M1}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

При этом коэффициент b_0^M выбран равным a_0^M для обеспечения единичного коэффициента передачи эталонной модели. Отметим также, что в рассматриваемом случае

Удалено: ...
Удалено: ...
Отформатировано ... [320]
Удалено: ...
Отформатировано ... [321]
Отформатировано ... [322]
Отформатировано ... [323]
Удалено: ...
Отформатировано ... [324]
Отформатировано ... [325]
Удалено: ¶
Отформатировано ... [326]
Удалено: ...
Отформатировано ... [327]
Удалено: ¶
Отформатировано ... [328]
Отформатировано ... [329]
Отформатировано ... [330]
Удалено: θ
Отформатировано ... [331]
Удалено: ...
Отформатировано ... [332]
Удалено: ...
Отформатировано ... [333]
Отформатировано ... [334]
Удалено: ¶
Отформатировано ... [335]
Удалено: ...
Отформатировано ... [336]
Отформатировано ... [337]
Удалено: ¶
Отформатировано ... [338]
Удалено: ¶
Отформатировано ... [339]
Отформатировано ... [340]
Удалено: ...
Отформатировано ... [341]
Отформатировано ... [342]
Отформатировано ... [343]
Удалено: ...
Отформатировано ... [344]
Отформатировано ... [345]
Отформатировано ... [346]
Отформатировано ... [347]

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6.25 & -5 \end{bmatrix}.$$

Легко убедиться, что управление (4.59) в этом случае принимает вид

$$u = -\hat{q}_1 x_1 - \hat{q}_2 x_2 - \hat{q}_3 g = -\omega^T \hat{q}, \quad (4.67)$$

где

$$\hat{q} = [\hat{q}_1 \ \hat{q}_2 \ \hat{q}_3], \quad \omega^T = [x_1 \ x_2 \ g].$$

Для расчета матрицы P зададимся симметрической положительно определенной матрицей Q вида

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Решая матричное уравнение (4.62) (например, с использованием команды `lyap(a,c)` библиотеки Control System Toolbox пакета MatLab получим

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56.25 & 8 \\ 8 & 2.6 \end{bmatrix}.$$

Тогда, с учетом того факта, что $h^T = [0 \ 1]$, алгоритм адаптации (4.61) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}}_1 &= \gamma x_1 v, \\ \dot{\hat{q}}_2 &= \gamma x_2 v, \\ \dot{\hat{q}}_3 &= \gamma g v, \end{aligned} \quad (4.68)$$

где общий для всех трех цепей настройки сигнал обратной связи v рассчитывается по формуле

$$v = h^T P e = p_{21} e_1 + p_{22} e_2 = 8(x_1 - x_{M1}) + 2.6(x_2 - x_{M2}).$$

Таким образом, адаптивный регулятор, обеспечивающий слежение параметрически неопределенного объекта (4.65) за эталонной моделью (4.66), описывается уравнениями (4.67) и (4.68).

Результаты моделирования переходных процессов в замкнутой системе при различных типах входных воздействий приведены на рис. 4.9 и 4.10. При моделировании были использованы следующие значения параметров: $a_0 = 3$, $a_1 = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$. Начальные значения настраиваемых параметров \hat{q} были выбраны нулевыми.

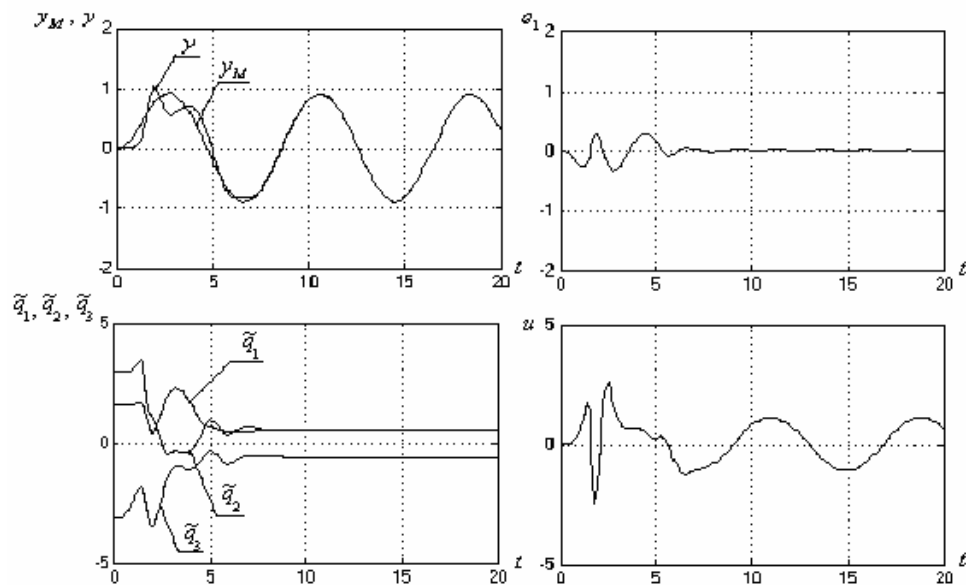


Рис. 4.9. Переходные процессы в адаптивной системе при $g = \sin 0.8t$

Отформатировано: По центру

Отформатировано: По центру, Уровень 1, Отступ: Слева: 0 см, Первая строка: 0 см

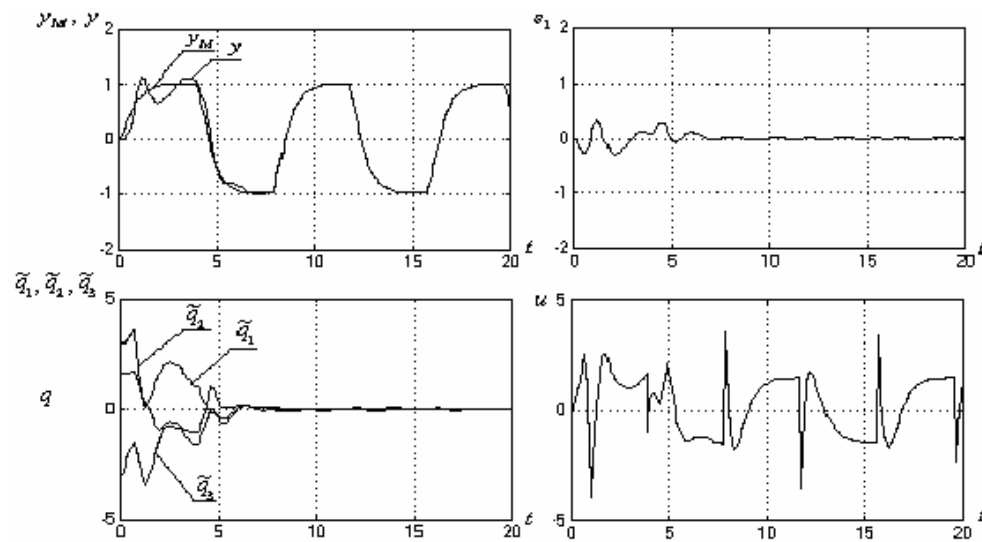


Рис. 4.10. Переходные процессы в адаптивной системе при $g = \text{sign}(\sin 0.8t)$

Как видно из приведенных графиков, асимптотическое слежение за эталонной моделью достигается для сигнала задания $g(t)$ любого вида. Однако для обеспечения сходимости по настраиваемым параметрам необходимо, чтобы сигнал задания $g(t)$ был достаточно богатым. На рис. 4.9 $g(t) = \sin 0.8t$, что не обеспечивает

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено: ¶

параметрической сходимости, так как число гармоник входного сигнала недостаточно для настройки трех параметров (сигнал $g(t)$ содержит только одну гармонику). На рис. 4.10 сигнал задания является прямоугольной волной (а именно, $g(t) = \text{sgn}(\sin 0.8t)$) и, следовательно, он может обеспечить параметрическую сходимость для неограниченного числа настраиваемых параметров.

4.4. Нелинейное робастное управление многомерным объектом

4.4.1. Постановка задачи

Рассмотрим параметрически неопределенный объект управления, подверженный воздействию внешних возмущений

$$\dot{x} = Ax + b(u + \delta), \quad (4.69)$$

$$y = c^T x, \quad (4.70)$$

где x – n -мерный вектор состояния, доступный прямым измерениям, u – сигнал управления, y – регулируемая переменная, δ – неизмеряемое внешнее возмущение, матрица A и векторы b, c имеют вид (4.52). Параметры a_i и $b_0 > 0$ объекта управления считаются неизвестными, а возмущение $\delta(t)$ – ограниченным.

Пусть желаемый характер поведения регулируемой переменной y определяется эталонной моделью (4.53), (4.54).

Рассматриваемая задача состоит в синтезе управления, обеспечивающего в замкнутой системе ограниченность всех сигналов и экспоненциальное стремление ошибки слежения (4.56) к установившемуся значению. При этом желательно иметь возможность обеспечения произвольно малого значения установившейся ошибки слежения (хотя бы при некоторых определенных условиях).

4.4.2. Синтез регулятора

Как было отмечено выше (см. п. 4.1.4), стандартный прием получения нелинейного робастного управления из адаптивного – это исключение интегратора из обратной связи. В рассматриваемом случае алгоритм адаптации для объекта (4.50) (без учета возмущения δ) имеет вид (4.61). Исключим из алгоритма (4.61) операцию интегрирования:

$$\hat{q} = \gamma \omega h^T P e. \quad (4.71)$$

Подставляя (4.71) в (4.59), получаем выражение для нелинейного робастного алгоритма управления

Отформатировано: русский (Россия)

Удалено: ¶
Разрыв строки

Отформатировано: Шрифт: 12 пт

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Удалено: <sp><sp>5.4. Нелинейное робастное управление многомерным объектом¶

Отформатировано: По центру, Уровень 1, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Шрифт: 12 пт

Отформатировано: По центру, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: По центру, Уровень 1, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Шрифт: 12 пт

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Удалено: ¶

Отформатировано: ... [366]

Удалено:

Отформатировано: ... [367]

Удалено:

Отформатировано: ... [368]

Отформатировано: ... [369]

Отформатировано: ... [370]

Удалено: ¶

Отформатировано: ... [371]

Удалено:

Отформатировано: ... [372]

Отформатировано: ... [373]

Отформатировано: ... [374]

Отформатировано: ... [375]

Отформатировано: ... [376]

Удалено: ¶

Отформатировано: ... [377]

Удалено:

Удалено: ¶

Отформатировано: ... [378]

Отформатировано: ... [379]

$$u = -\gamma \|\omega\|^2 h^T P e, \quad (4.72)$$

где положительный коэффициент γ носит название *коэффициента нелинейной обратной связи*, а симметрическая положительно определенная матрица P является решением уравнения (4.62).

4.4.3. Свойства замкнутой системы

Нелинейный робастный регулятор (4.72) обеспечивает следующие свойства замкнутой системы, содержащей объект (4.69), (4.70) и эталонную модель (4.53), (4.54) (доказательство этих свойств приведено в приложении 4):

1) для любых начальных условий, любых ограниченных сигналов задания $g(t)$ и любых ограниченных возмущений $\delta(t)$ – ограниченность всех сигналов и экспоненциальную сходимость ошибки слежения $e = x - x_M$ к предельному установившемуся значению

$$\|e\|^2 \leq \frac{\beta}{2\gamma\lambda_Q} \|q\|^2 + \frac{1}{\lambda_Q^2} \|Ph\|^2 \bar{\delta}^2; \quad (4.73)$$

2) если возмущение отсутствует (т.е. $\delta(t) \equiv 0$), то, дополнительно к пункту (1), предельное установившееся значение ошибки слежения может быть сделано произвольно малым за счет увеличения коэффициента нелинейной обратной связи γ .

Таким образом, нелинейный робастный регулятор (4.72) обеспечивает работоспособность замкнутой системы (в смысле ограниченности всех сигналов) и приемлемые точностные характеристики для параметрически неопределенного объекта, подверженного внешним возмущениям.

Пример 4.2. Рассмотрим задачу робастного управления объектом (4.65) с неизвестными параметрами a_0 , a_1 и $b_0 > 0$. Пусть цель управления состоит в обеспечении ограниченности всех сигналов и экспоненциальной сходимости ошибки слежения регулируемой переменной y за выходом эталонной модели y_M (4.66).

Для синтеза нелинейного робастного регулятора применим формальный прием – исключение интеграторов из цепей обратных связей адаптивного регулятора. Тогда из регулятора (4.67), (4.68) получим

$$u = -\gamma(x_1^2 + x_2^2 + g^2)(8(x_1 - x_{M1}) + 2.6(x_2 - x_{M2})). \quad (4.74)$$

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Шрифт: 12 пт

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: По центру, Уровень 1, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Шрифт: 12 пт

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Удалено:

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт, русский (Россия)

Удалено:

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: русский (Россия)

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Удалено:

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см

Удалено:

Отформатировано: Шрифт: полужирный

Отформатировано: Шрифт: полужирный, не курсив

Удалено:

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Таким образом, нелинейный робастный регулятор, обеспечивающий слежение параметрически неопределенного объекта (4.65) за эталонной моделью (4.66), описывается уравнением (4.74).

Результаты моделирования переходных процессов в замкнутой системе при различных значениях коэффициента обратной связи γ и $g(t) = \text{sgn}(\sin 0.8t)$ приведены на рис. 4.11. При моделировании были использованы следующие значения параметров: $a_0 = 3$, $a_1 = -1$, $\beta = 2$.

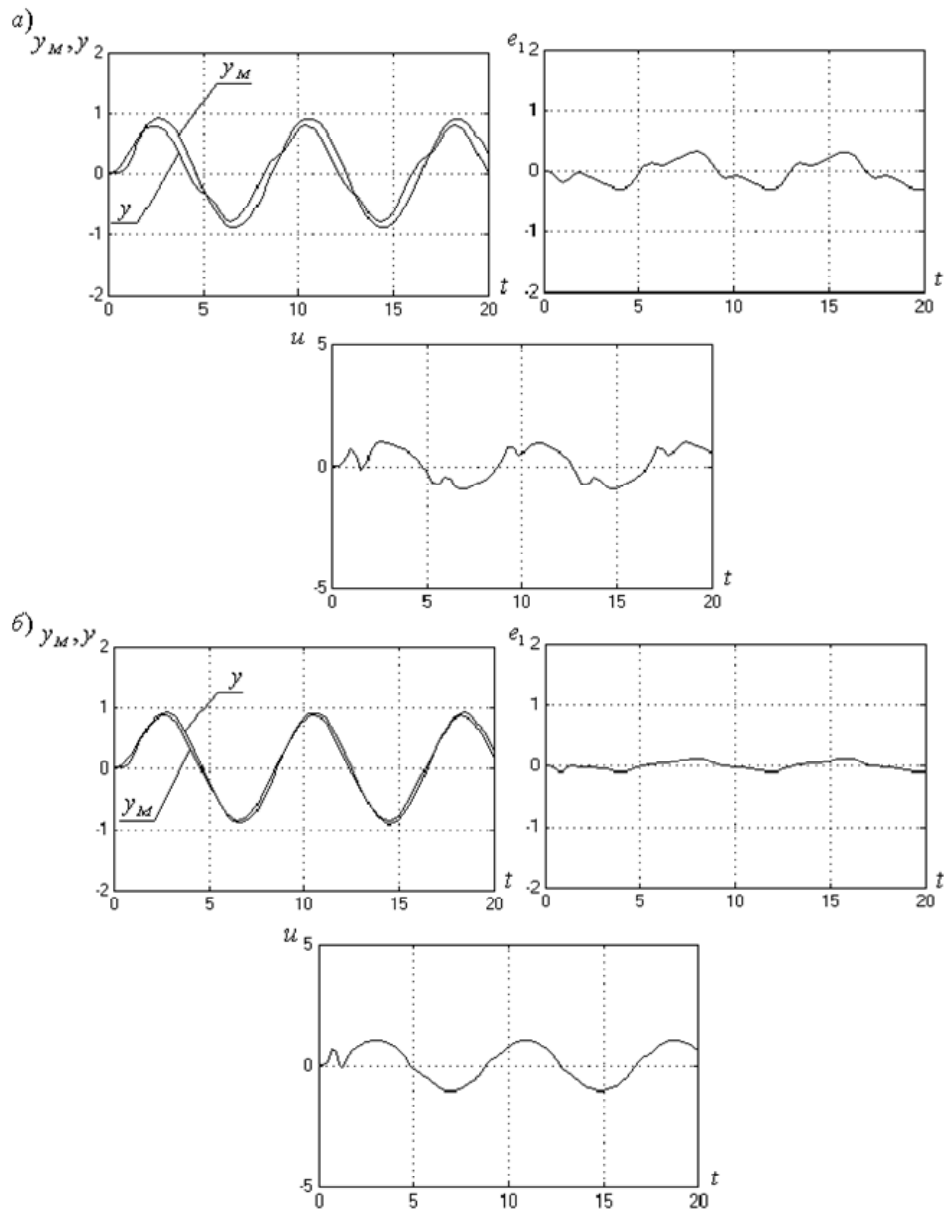


Рис.4.11. Переходные процессы в нелинейной робастной системе:

a) $\gamma = 0.5$; б) $\gamma = 1.5$

Как видно из приведенных графиков, регулятор (4.74) обеспечивает слежение параметрически неопределенного объекта за эталонной моделью с малой установившейся ошибкой, величина которой может быть уменьшена за счет увеличения коэффициента обратной связи γ .

4.5. Адаптивная компенсация возмущений

4.5.1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления

$$\dot{x} = Ax + b(u + \delta), \quad (4.75)$$

где x – n -мерный вектор состояния, доступный прямым измерениям, u – сигнал управления, δ – внешнее ограниченное возмущение. Пусть известна матрица A и известный вектор b образуют полностью управляемую пару (A, b) .

Будем считать, что возмущение δ может быть представлено в виде выхода линейного генератора

$$\dot{w} = \Gamma w, \quad (4.76)$$

$$\delta = d^T w, \quad (4.77)$$

где w – ν -мерный вектор состояния генератора, Γ – $\nu \times \nu$ постоянная матрица, d – $\nu \times 1$ вектор постоянных коэффициентов. Ни само возмущение δ , ни вектор состояния генератора w не являются доступными для измерений.

Рассматриваемая задача управления состоит в асимптотической стабилизации нулевого значения вектора состояния x в условиях действия внешнего возмущения δ .

В классической теории управления данная задача решается в предположении, что параметры генератора (4.76), (4.77) известны (т.е. известны матрица Γ и вектор d). При этом все множество возможных реализаций возмущения $\delta(t)$ определяется только различными начальными условиями $w(0)$. Однако на практике, как правило, приходится сталкиваться с ситуацией, когда заранее известен только достаточно широкий класс возможных возмущений $\delta(t)$, а не их точный вид. С математической точки зрения такая ситуация означает, что генератор (4.76), (4.77) является параметрически неопределенным. Это мотивирует использование методов

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, ниже на 5 пт

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, ниже на 5 пт

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см

Удалено: <sp>

Отформатировано: Шрифт: 12 пт

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: По центру, Уровень 1, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Шрифт: 12 пт

Отформатировано: По центру, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: По центру, Уровень 1, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Шрифт: 10 пт

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Удалено:

Отформатировано: Уровень 1, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано ... [380]

Удалено:

Отформатировано ... [381]

Отформатировано ... [382]

Отформатировано ... [383]

Отформатировано ... [384]

Отформатировано ... [385]

Отформатировано ... [386]

Удалено:

Отформатировано ... [387]

Удалено:

Отформатировано ... [388]

Отформатировано ... [389]

Отформатировано ... [390]

Отформатировано ... [391]

Удалено:

Удалено:

адаптивного управления для компенсации внешнего неточно известного возмущения.

При синтезе управления будем считать выполненными следующие условия:

- параметры матрицы Γ и вектора d являются неизвестными, а размерность генератора q известна;
- пара (d^T, Γ) является полностью наблюдаемой;
- собственные значения матрицы Γ являются различными и лежат на мнимой оси.

Последнее условие гарантирует ограниченность возмущения δ и, как следствие, является необходимым для обеспечения ограниченности сигнала управления u .

4.5.2. Синтез регулятора

В соответствии с методикой синтеза адаптивных систем, изложенной в п. 4.2.1, построим сначала неадаптивное управление в предположении, что параметры генератора (4.76) и (4.77) точно известны. Для этого приведем модель (4.76), (4.77) к некоторой удобной форме.

Выберем произвольную $q \times q$ гурвицеву матрицу G , $q \times 1$ -вектор l , образующий с матрицей G полностью управляемую пару, и введем в рассмотрение линейное преобразование координат

$$\chi = Mw, \quad (4.78)$$

где $q \times q$ матрица M является решением уравнения

$$M\Gamma - GM = ld^T. \quad (4.79)$$

Тогда генератор (4.76), (4.77) в координатах χ принимает вид

$$\dot{\chi} = G\chi + l\delta, \quad (4.80)$$

$$\delta = q^T \chi, \quad (4.81)$$

где q – вектор постоянных коэффициентов.

Действительно, так как спектры матриц Γ и G не пересекаются, пара (d^T, Γ) является полностью наблюдаемой, а пара (G, l) является полностью управляемой, то уравнение (4.79) имеет единственное невырожденное решение. Продифференцируем (4.78) в силу уравнения (4.76):

$$\dot{\chi} = M\Gamma w.$$

С учетом (4.79) можно записать

$$\dot{\chi} = M\Gamma w = GMw + ld^T w = G\chi + l\delta,$$

откуда следует справедливость (4.80). Далее из (4.77) и (4.78) имеем

$$\delta = d^T w = d^T M^{-1} \chi = q^T \chi,$$

где $q^T = d^T M^{-1}$.

Таким образом, доказана справедливость представления (4.80), (4.81). Особо отметим, что в рамках рассматриваемой задачи матрица Γ и вектор d являются неизвестными, поэтому матрица преобразования координат M и вектор q также являются неизвестными. Другими словами, в модели (4.80), (4.81) неопределенность внешнего возмущения δ сведена к неопределенности вектора постоянных параметров q .

Представление (4.80), (4.81) позволяет построить наблюдатель вектора состояния генератора χ . Сформируем оценку в виде

$$\hat{\chi} = \eta + Nx, \quad (4.82)$$

где $q \times n$ -матрица N удовлетворяет равенству

$$Nb = l, \quad (4.83)$$

а q -мерный вектор η является состоянием динамической модели вида

$$\dot{\eta} = G\eta + (GN - NA)x - lu. \quad (4.84)$$

Тогда для любых начальных условий $\chi(0)$, $\hat{\chi}(0)$ и $x(0)$ справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\chi(t) - \hat{\chi}(t)) = 0. \quad (4.85)$$

Действительно, введем в рассмотрение вектор ошибки оценки состояния генератора

$$\sigma = \chi - \hat{\chi} = \chi - \eta - Nx.$$

Продифференцируем последнее выражение в силу уравнений (4.75), (4.80) и (4.84). Получим

$$\dot{\sigma} = G\chi + l\delta - G\eta - GNx + NAx + lu - NAx - Nbu - Nb\delta = G\chi - G\eta - GNx,$$

или окончательно

$$\dot{\sigma} = G\sigma.$$

Так как матрица G является гурвицевой, то последнее уравнение означает, что с течением времени ошибка σ стремится к нулевому

Удалено:
Отформатировано ... [420]
Отформатировано ... [421]
Отформатировано ... [422]
Удалено: ¶
Отформатировано ... [423]
Удалено:
Отформатировано ... [424]
Отформатировано ... [425]
Удалено: θ
Отформатировано ... [426]
Удалено: θ
Отформатировано ... [427]
Отформатировано ... [428]
Удалено:
Отформатировано ... [429]
Отформатировано ... [430]
Отформатировано ... [431]
Отформатировано ... [432]
Удалено:
Отформатировано ... [433]
Отформатировано ... [434]
Удалено:
Отформатировано ... [435]
Отформатировано ... [436]
Отформатировано ... [437]
Отформатировано ... [438]
Удалено:
Отформатировано ... [439]
Отформатировано ... [440]
Удалено:
Отформатировано ... [441]
Отформатировано ... [442]
Удалено:
Отформатировано ... [443]
Удалено:
Отформатировано ... [444]
Отформатировано ... [445]
Удалено:
Отформатировано ... [446]
Удалено:
Отформатировано ... [447]
Отформатировано ... [448]
Отформатировано ... [449]
Отформатировано ... [450]
Отформатировано ... [451]
Отформатировано ... [452]
Отформатировано ... [453]
Удалено:
Отформатировано ... [454]
Отформатировано ... [455]

значению. В свою очередь, это доказывает справедливость равенства (4.85).

Таким образом, с учетом полученных результатов модель объекта управления (4.75) может быть переписана в виде

$$\dot{x} = Ax + b(u + q^T \hat{\chi}), \quad (4.86)$$

где оценка $\hat{\chi}$ формируется наблюдателем (4.82), (4.84).

Анализ выражения (4.86) мотивирует следующий выбор алгоритма адаптивного управления:

$$u = -k^T x - \hat{q}^T \hat{\chi}, \quad (4.87)$$

где n -мерный вектор постоянных коэффициентов k выбран таким образом, что матрица замкнутой системы $F = A - bk^T$ является гурвицевой, а ν -мерный вектор настраиваемых параметров \hat{q} формируется алгоритмом адаптации, который будет синтезирован позже.

Расчет вектора коэффициентов обратных связей k может быть осуществлен, например, методом модального регулятора. Для синтеза алгоритма адаптации получим модель ошибки замкнутой системы, подставив (4.87) в (4.86):

$$\dot{x} = Fx + b\hat{\chi}^T \hat{q}. \quad (4.88)$$

Легко видеть, что модель (4.88) с точностью до обозначений является стандартной динамической моделью ошибки с измеряемым состоянием (см. формулу (4.36)). Поэтому для настройки параметров \hat{q} может быть использован базовый алгоритм адаптации (4.37), который в данном случае принимает вид

$$\dot{\hat{q}} = \gamma \hat{\chi} b^T P x, \quad (4.89)$$

где симметрическая положительно определенная матрица P является решением уравнения

$$F^T P + P F = -Q \quad (4.90)$$

с произвольной симметрической положительно определенной матрицей Q .

Таким образом, регулятор, обеспечивающий адаптивную компенсацию внешнего заранее неизвестного возмущения δ , действующего на объект (4.75), содержит в своей структуре следующие блоки (рис. 4.12): наблюдатель возмущения (4.82) и (4.84),

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см

Удалено:

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено: ¶

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано ... [456]

Удалено: ¶

Отформатировано ... [457]

Удалено:

Удалено: ¶

Отформатировано ... [458]

Отформатировано ... [459]

Удалено:

собственно настраиваемый регулятор (4.87) и алгоритм адаптации (4.89).

Свойства замкнутой системы могут быть сформулированы следующим образом. Для любых начальных условий $x(0)$, $w(0)$ и $\eta(0)$ и произвольного положительного коэффициента γ адаптивный регулятор (4.82), (4.84), (4.87) и (4.89) обеспечивает асимптотическую стабилизацию нулевого значения вектора состояния x объекта управления (4.75), подверженного воздействию внешнего заранее неизвестного возмущения δ , генерируемого моделью (4.76), (4.77).

Пример 4.3. Рассмотрим задачу стабилизации нулевого значения вектора состояния объекта управления

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 5x_2, \quad (4.91)$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 + u + \delta, \quad (4.92)$$

где возмущение δ представляет собой гармоническую функцию с заранее неизвестной амплитудой, частотой и фазой. Очевидно, что в рассматриваемом случае порядок генератора (4.76), (4.77) равен двум (т. е. $q = 2$), а матрица A и вектор b модели (4.75) имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, ниже на 3 пт

Отформатировано: русский (Россия)

Отформатировано: Шрифт: полужирный, не курсив

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 0 см

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, ниже на 3 пт

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

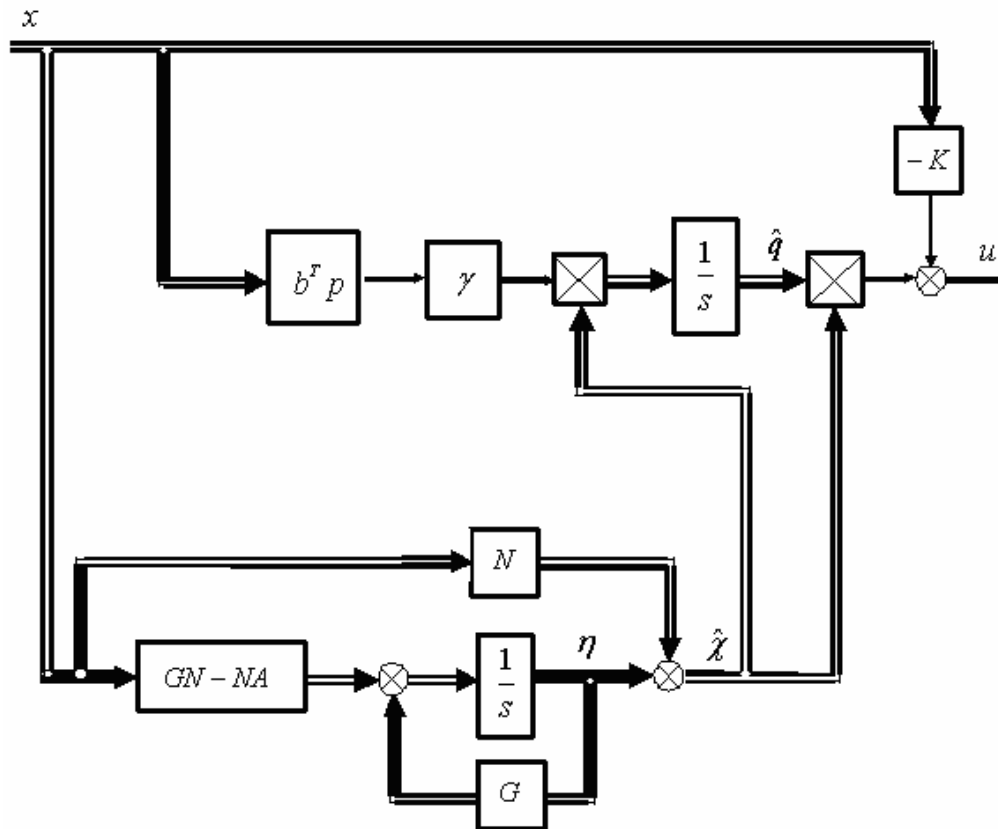


Рис. 4.12. Адаптивный регулятор компенсации возмущений

Выберем желаемые корни замкнутой системы $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$ и с помощью команды **place(A,B,P)** библиотеки Control System Toolbox пакета MatLab рассчитаем вектор коэффициентов обратных связей

$$k^T = [3.2 \quad 9].$$

Тогда модальный регулятор

$$u = -k^T x = -3.2x_1 - 9x_2 \quad (4.93)$$

при отсутствии внешних возмущений (т.е. при $\delta(t) \equiv 0$) будет обеспечивать асимптотическую стабилизацию нулевого значения вектора состояния (рис. 4.13, а). Однако воздействие внешнего возмущения вызывает появление ненулевой установившейся ошибки (рис. 4.13, б).

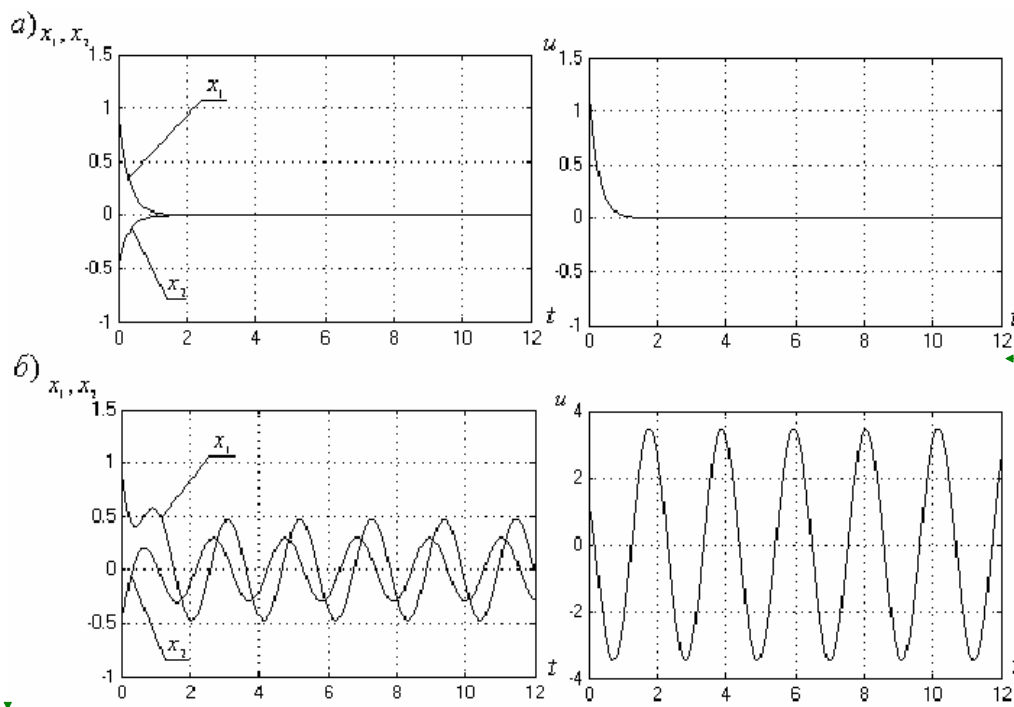


Рис. 4.13. Процессы стабилизации в системе, замкнутой модальным регулятором (5.33): а) $\delta(t)=0$; б) $\delta(t)=2 \sin 3t$

Для синтеза регулятора с адаптивной компенсацией внешнего возмущения выберем

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Решая матричное уравнение (4.90), получим

$$P = \begin{bmatrix} 28.7 & 17.8 \\ 17.8 & 15.7 \end{bmatrix}.$$

Тогда алгоритм адаптивного управления (4.82), (4.84), (4.87) и (4.89) принимает вид

$$\hat{\chi}_1 = \eta_1, \quad \hat{\chi}_2 = \eta_2 + 25x_2, \quad (4.94)$$

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2 + 25x_2, \quad \dot{\eta}_2 = -25\eta_1 - 10\eta_2 - 50x_1 - 325x_2 - 25u, \quad (4.95)$$

$$u = -3.2x_1 - 9x_2 - \hat{q}_1\hat{\chi}_1 - \hat{q}_2\hat{\chi}_2, \quad (4.96)$$

$$\dot{\hat{q}}_1 = \gamma\hat{\chi}_1(17.8x_1 + 15.7x_2), \quad \dot{\hat{q}}_2 = \gamma\hat{\chi}_2(17.8x_1 + 15.7x_2). \quad (4.97)$$

Удалено: <sp>

Отформатировано:
интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: русский
(Россия)

Отформатировано: Шрифт:
6 пт, русский (Россия)

Отформатировано: Отступ:
Первая строка: 1 см,
интервал Перед: 0 пт

Удалено:

Отформатировано: Отступ:
Первая строка: 1 см

Отформатировано: Шрифт:
6 пт

Удалено:

Отформатировано: Шрифт:
6 пт

Удалено:

Отформатировано: Уровень
1, Отступ: Первая строка: 1
см, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Шрифт:
6 пт

Отформатировано: Отступ:
Первая строка: 1 см,
интервал Перед: 0 пт

Удалено:

Отформатировано: Шрифт:
6 пт

Удалено:

Отформатировано: Шрифт:
6 пт

Удалено:

Удалено:

Удалено:

Удалено:

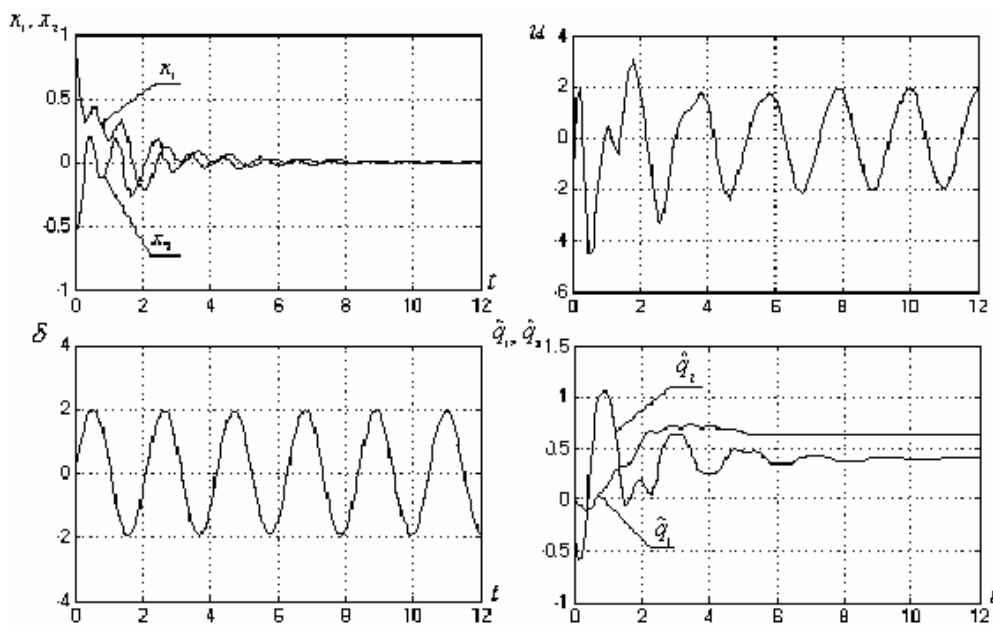


Рис. 4.14. Процессы стабилизации в системе, замкнутой адаптивным регулятором (4.94)–(4.97), при $\delta(t) = 2\sin 3t$, $\gamma = 0.1$, $\eta_1(0) = \eta_2(0) = \hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_2(0) = 0$

Результаты моделирования переходных процессов в адаптивной системе приведены на рис. 4.14 и демонстрируют обеспечение асимптотической стабилизации нулевого значения вектора состояния в условиях воздействия внешнего заранее неизвестного возмущения δ .

Особо отметим, что синтезированный адаптивный регулятор (4.94)–(4.97) будет обеспечивать асимптотическую стабилизацию объекта (4.95) для всех возмущений выделенного класса – т.е. для любых гармонических функций с заранее неизвестной амплитудой, частотой и фазой. Это положение иллюстрируется рис. 4.15, где приведены результаты моделирования замкнутой адаптивной системы, подверженной воздействию различных возмущений выделенного класса:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 2 \quad \text{при} \quad 0 \leq t < 15, \\ \delta(t) &= 1.5\sin 4t \quad \text{при} \quad 15 \leq t < 35, \\ \delta(t) &= 2\sin 2t \quad \text{при} \quad 35 \leq t < 50. \end{aligned}$$

Как видно из графиков, каждый раз при изменении вида возмущающего воздействия и после завершения переходного

Удалено: Результаты моделирования переходных процессов в адаптивной системе приведены на рис. 4.14 и демонстрируют обеспечение асимптотической стабилизации нулевого значения вектора состояния в условиях воздействия внешнего заранее неизвестного возмущения δ .

Отформатировано: По правому краю, интервал Перед: 0 пт

Удалено: <sp>

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт

Отформатировано: интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

Удалено:

Удалено:

Удалено: <sp>

Отформатировано: Шрифт: 6 пт

процесса (после подстройки адаптивного регулятора) в системе устанавливается нулевое значение вектора состояния x .

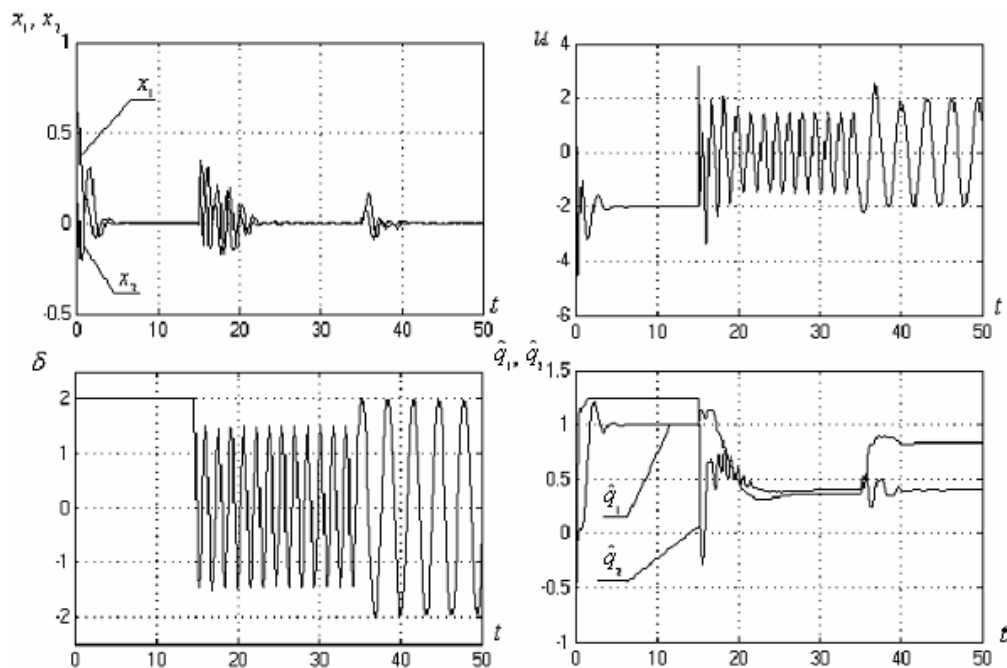


Рис. 4.15. Процессы стабилизации в системе, замкнутой адаптивным регулятором (4.94)–(4.97), при воздействии изменяющегося внешнего возмущения

Отформатировано: По центру, интервал Перед: 0 пт

Отформатировано: По центру, Отступ: Первая строка: 0 см, интервал Перед: 0 пт

Удалено: Как видно из графиков, каждый раз при изменении вида возмущающего воздействия и после завершения переходного процесса (после подстройки адаптивного регулятора) в системе устанавливается нулевое значение вектора состояния x .

Разрыв страницы

Отформатировано: Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Стр. 147: [1] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:12:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 147: [2] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:13:00
русский (Россия)		
Стр. 147: [3] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:13:00
Шрифт: 6 пт, русский (Россия)		
Стр. 147: [4] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:13:00
Отступ: Первая строка: 0 см		
Стр. 147: [5] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:13:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 147: [6] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 147: [7] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:13:00
Шрифт: 6 пт, русский (Россия)		
Стр. 147: [8] Отформатировано	User	28.04.2011 12:38:00
Шрифт: 12 пт		
Стр. 147: [9] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:13:00
По центру, Уровень 1, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 147: [10] Отформатировано	User	28.04.2011 12:38:00
Шрифт: 12 пт		
Стр. 147: [11] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 147: [12] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Уровень 1, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 147: [13] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:13:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 147: [14] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 147: [15] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:14:00
русский (Россия)		
Стр. 148: [16] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: курсив		
Стр. 148: [16] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия), подстрочные		
Стр. 148: [17] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:14:00
русский (Россия)		
Стр. 148: [18] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:14:00
Шрифт: курсив		
Стр. 148: [18] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:14:00
русский (Россия)		
Стр. 148: [18] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:14:00
русский (Россия)		
Стр. 148: [19] Отформатировано	NF	13.11.2009 14:13:00
русский (Россия)		
Стр. 148: [20] Удалено	NF	13.11.2009 14:13:00
Стр. 148: [21] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 148: [22] Отформатировано	User	28.04.2011 12:39:00
Шрифт: 6 пт, русский (Россия)		

Стр. 148: [23] Удалено	NF	13.11.2009 14:16:00
------------------------	----	---------------------

Найдем модель ошибки замкнутой системы. Сначала, подставляя (4.5) в (4.1), получим *модель замкнутого объекта управления*

$$\dot{x} = -\lambda x + \tilde{\theta}x + \lambda g, \quad (4.6)$$

где $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ – *параметрическая ошибка*. Вычитая далее (4.2) из (4.6), получаем искомую *модель ошибки замкнутой системы*

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda \varepsilon + \tilde{\theta}x.$$

Стр. 148: [24] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
--------------------------------	----	---------------------

По центру, интервал Перед: 0 пт

Стр. 148: [25] Отформатировано	NF	13.11.2009 14:12:00
--------------------------------	----	---------------------

английский (США)

Стр. 148: [26] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:15:00
--------------------------------	----	---------------------

По центру

Стр. 148: [27] Отформатировано	NF	13.11.2009 14:14:00
--------------------------------	----	---------------------

русский (Россия)

Стр. 148: [27] Отформатировано	NF	13.11.2009 14:14:00
--------------------------------	----	---------------------

русский (Россия)

Стр. 148: [27] Отформатировано	NF	13.11.2009 14:14:00
--------------------------------	----	---------------------

русский (Россия)

Стр. 148: [28] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
--------------------------------	----	---------------------

Отступ: Первая строка: 1 см

Стр. 148: [29] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:15:00
--------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 6 пт, русский (Россия)

Стр. 148: [30] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
--------------------------------	----	---------------------

Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Стр. 148: [31] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
--------------------------------	----	---------------------

По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Стр. 148: [32] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:09:00
--------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт

Стр. 148: [32] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:15:00
--------------------------------	----	---------------------

русский (Россия)

Стр. 148: [32] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:15:00
--------------------------------	----	---------------------

русский (Россия)

Стр. 148: [33] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:15:00
--------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 6 пт

Стр. 148: [34] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
--------------------------------	----	---------------------

Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Стр. 148: [35] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:15:00
--------------------------------	----	---------------------

интервал Перед: 0 пт

Стр. 148: [36] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:15:00
--------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт

Стр. 148: [37] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:17:00
--------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 6 пт

Стр. 148: [38] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:16:00
--------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт

Стр. 148: [38] Отформатировано	NF	13.11.2009 14:16:00
--------------------------------	----	---------------------

русский (Россия)

Стр. 148: [39] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
--------------------------------	----	---------------------

Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Стр. 148: [40] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:17:00
Шрифт: 6 пт, русский (Россия)		
Стр. 149: [41] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Уровень 1, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 149: [42] Отформатировано	natfed	19.11.2009 22:33:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 149: [43] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 149: [44] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:18:00
Шрифт: 6 пт, русский (Россия)		
Стр. 149: [45] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 149: [46] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 149: [47] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:18:00
Шрифт: 6 пт, русский (Россия)		
Стр. 149: [48] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 149: [49] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:20:00
Шрифт: курсив		
Стр. 149: [50] Отформатировано	User	28.04.2011 12:40:00
Шрифт: 12 пт		
Стр. 149: [51] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:20:00
По центру		
Стр. 149: [52] Отформатировано	User	28.04.2011 12:40:00
Шрифт: 12 пт		
Стр. 149: [53] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По центру, Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 149: [54] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 149: [55] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 149: [56] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:21:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 149: [57] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:20:00
русский (Россия)		
Стр. 149: [58] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:21:00
русский (Россия)		
Стр. 149: [59] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:21:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 149: [60] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 149: [61] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:21:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 149: [62] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 149: [63] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 149: [64] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 150: [65] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:23:00

Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт

Стр. 150: [66] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:24:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [67] Отформатировано	natfed	17.11.2009 21:54:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [68] Отформатировано	natfed	17.11.2009 21:54:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 150: [69] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:24:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [70] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [71] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [71] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [72] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 150: [73] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [74] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 150: [75] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:24:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [76] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [76] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [77] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 150: [78] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:25:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 150: [79] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [79] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [80] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 150: [81] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 150: [82] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:25:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт		
Стр. 150: [83] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [84] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 150: [85] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:25:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт		
Стр. 150: [85] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:25:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [86] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		

Стр. 150: [87] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:25:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 150: [88] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 150: [89] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:26:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт		
Стр. 150: [90] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [91] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 150: [92] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:26:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт		
Стр. 150: [93] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:26:00
Шрифт: 6 пт, английский (США)		
Стр. 150: [94] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:26:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 150: [95] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:21:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 150: [96] Изменение	Unknown	
Код поля изменен		
Стр. 150: [97] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:21:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт		
Стр. 150: [97] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:21:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [98] Изменение	Unknown	
Код поля изменен		
Стр. 150: [99] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:21:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт		
Стр. 150: [99] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:21:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [100] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:21:00
русский (Россия)		
Стр. 150: [101] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:21:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 150: [102] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:27:00
Отступ: Первая строка: 0 см		
Стр. 151: [103] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:21:00
Шрифт: курсив		
Стр. 151: [103] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:21:00
подстрочные		
Стр. 151: [104] Удалено	NF	13.11.2009 14:18:00
Стр. 151: [105] Отформатировано	NF	13.11.2009 14:18:00
Шрифт: 14 пт		
Стр. 151: [105] Отформатировано	NF	13.11.2009 14:18:00
Шрифт: 14 пт		
Стр. 151: [105] Отформатировано	NF	13.11.2009 14:18:00
Шрифт: 14 пт		
Стр. 151: [105] Отформатировано	NF	13.11.2009 14:18:00
Шрифт: 14 пт		
Стр. 151: [105] Отформатировано	NF	13.11.2009 14:18:00

Шрифт: 14 пт

Стр. 151: [106] Удалено	NF	13.11.2009 14:18:00
-------------------------	----	---------------------

Очевидно, что при выборе $\tau(\varepsilon, x) = \gamma \varepsilon x$ после сокращения одинаковых слагаемых получаем

$$V_{\varepsilon, \tilde{\theta}} = -\lambda \varepsilon^2 \leq 0. \quad (4.14)$$

Из последнего неравенства следует устойчивость по Ляпунову состояния равновесия $(\varepsilon, \tilde{\theta}) = (0, 0)$ (в силу теоремы П2.1 из приложения 2) и выполнение равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$$

(в силу теоремы П2.4 из приложения 2), что означает выполнение целевого условия (4.3).

Другими словами, алгоритм адаптивного управления (рис. 4.2.а)

$$u = -\lambda x - \hat{\theta}x + \lambda g, \quad (4.15)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \varepsilon x, \quad (4.16)$$

обеспечивает асимптотическое слежение за эталонной моделью для параметрически неопределенного объекта (4.1). При этом коэффициент γ определяет скорость настройки параметра $\hat{\theta}$ и носит название *коэффициента адаптации*. В структуре алгоритма адаптации выделяют также *сигнал ошибки слежения* $\varepsilon(t)$ и *регрессор* $x(t)$.

Стр. 153: [107] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:31:00
---------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 6 пт

Стр. 153: [108] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:31:00
---------------------------------	----	---------------------

русский (Россия)

Стр. 153: [109] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
---------------------------------	----	---------------------

Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Стр. 153: [110] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:32:00
---------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 6 пт

Стр. 153: [111] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:32:00
---------------------------------	----	---------------------

русский (Россия)

Стр. 153: [112] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:32:00
---------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 6 пт

Стр. 153: [113] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:32:00
---------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт

Стр. 153: [114] Отформатировано	User	28.04.2011 12:44:00
---------------------------------	------	---------------------

Шрифт: 12 пт

Стр. 153: [115] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
---------------------------------	----	---------------------

Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Стр. 153: [116] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:33:00
---------------------------------	----	---------------------

По центру, Уровень 1, интервал Перед: 0 пт

Стр. 153: [117] Отформатировано	User	28.04.2011 12:44:00
---------------------------------	------	---------------------

Шрифт: 12 пт

Стр. 153: [118] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
---------------------------------	----	---------------------

По центру, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Стр. 153: [119] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
---------------------------------	----	---------------------

Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Стр. 153: [120] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:33:00
---------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 6 пт

Стр. 153: [121] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:33:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 153: [122] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 153: [123] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:33:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 153: [124] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:33:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 153: [125] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Уровень 1, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 153: [126] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:33:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 153: [127] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:33:00
русский (Россия)		
Стр. 153: [128] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:33:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 153: [129] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:34:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 153: [130] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:34:00
Шрифт: 6 пт, русский (Россия)		
Стр. 153: [131] Удалено	NF	17.11.2009 15:34:00

Стр. 153: [132] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 153: [133] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 154: [134] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 154: [135] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 154: [136] Удалено	NF	17.11.2009 15:35:00

Стр. 154: [137] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 154: [138] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:35:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 154: [139] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:35:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 16 пт		
Стр. 154: [140] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 154: [141] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 154: [142] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:35:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 3 пт		
Стр. 154: [143] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 154: [144] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00

Шрифт: 6 пт

Стр. 154: [145] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:35:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 16 пт		
Стр. 154: [146] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 154: [147] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 154: [148] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 154: [149] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 154: [150] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Уровень 1, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 154: [151] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 154: [152] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 154: [153] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 154: [154] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:36:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 16 пт		
Стр. 154: [155] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 154: [156] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 154: [157] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:36:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 3 пт		
Стр. 154: [158] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 154: [159] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 154: [160] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 154: [161] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:36:00
Шрифт: 14 пт, английский (США), ниже на 13 пт		
Стр. 154: [162] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 154: [163] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 154: [164] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:37:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 154: [165] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:36:00
Шрифт: 14 пт, английский (США), ниже на 18 пт		
Стр. 154: [166] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:37:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт		
Стр. 154: [167] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 154: [168] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:23:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 5 пт		
Стр. 154: [169] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:23:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 6 пт		

Пренебрегая в последнем выражении квадратными слагаемыми, получим

$$I\&(\varepsilon) \leq -\frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \frac{\theta^2}{4\gamma} + \frac{\bar{\delta}^2}{2\lambda}.$$

Учитывая далее равенство $\lambda\varepsilon^2/2 = \lambda V$ и рассматривая переменную V в качестве функции времени, можно записать

$$I\&(t) \leq -\lambda V(t) + \frac{\theta^2}{4\gamma} + \frac{\bar{\delta}^2}{2\lambda}. \quad (4.24)$$

Решая дифференциальное уравнение (4.24), получим

$$V(t) \leq \exp(-\lambda t)V(0) + \frac{\theta^2}{4\gamma\lambda} + \frac{\bar{\delta}^2}{2\lambda^2}.$$

Учитывая далее зависимость (4.23) и переходя в последнем выражении к норме ошибки слежения ε , окончательно получаем

$$|\varepsilon(t)| \leq \exp(-\frac{\lambda}{2}t) |\varepsilon(0)| + \Delta, \quad (4.25)$$

где $\Delta = \frac{|\theta|}{\sqrt{2\gamma\lambda}} + \frac{\bar{\delta}}{\lambda}$. Неравенство (4.25) задает экспоненциальную

мажоранту переходного процесса по норме ошибки слежения $\varepsilon(t)$ (см. рис. 4.4).

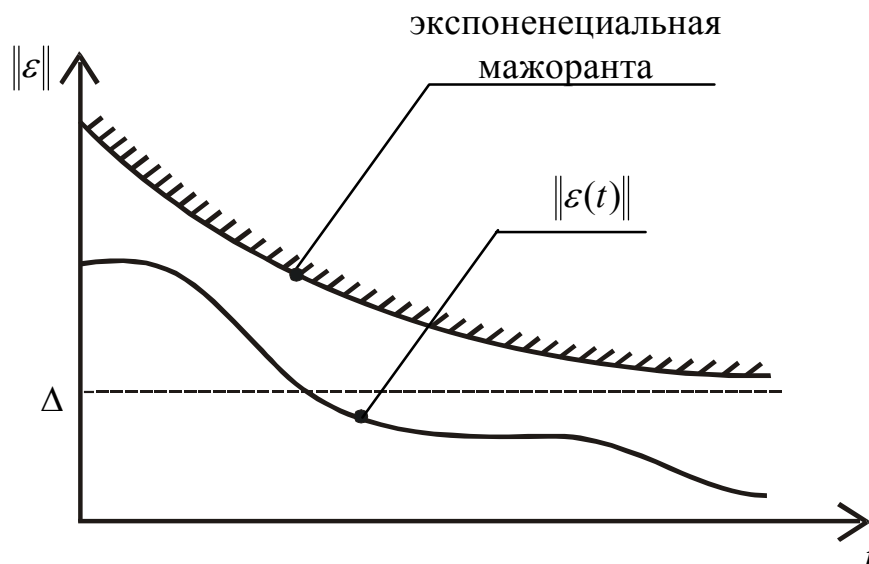


Рис. 5.4. Мажоранта переходного процесса по норме ошибки слежения $\varepsilon(t)$

Стр. 156: [173] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:40:00
По центру, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 156: [174] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:40:00
русский (Россия)		
Стр. 156: [174] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:40:00
русский (Россия)		
Стр. 156: [174] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:40:00
Шрифт: курсив		
Стр. 156: [174] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:40:00
русский (Россия)		
Стр. 156: [175] Удалено	NF	13.11.2009 14:32:00
<p>Основные свойства робастного регулятора (4.21) могут быть сформулированы следующим образом. Для произвольного положительного коэффициента нелинейной обратной связи γ регулятор (4.21) обеспечивает ограниченность всех сигналов и экспоненциальную сходимость ошибки слежения к предельному установившемуся значению Δ. При отсутствии внешних возмущений (т. е. при $\delta(t) \equiv 0$) величина предельного установившегося значения может быть сделана произвольно малой за счет увеличения коэффициента нелинейной обратной связи γ. Во многих практических случаях такие свойства замкнутой системы являются вполне приемлемыми.</p>		
Стр. 156: [176] Удалено	NF	17.11.2009 15:40:00
<p>В завершение параграфа отметим, что сравнение структурных схем алгоритма адаптивного управления (рис. 4.2.а) и нелинейного робастного управления (рис. 4.3.а) позволяет определить простое правило получения нелинейного робастного управления из адаптивного. Для этого достаточно исключить из структуры алгоритма адаптации интегратор, заменив интегральную обратную связь на статическую нелинейную.</p>		
Стр. 156: [177] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По центру, Уровень 1, Отступ: Первая строка: 0 см		
Стр. 156: [178] Отформатировано	User	28.04.2011 12:46:00
Шрифт: 12 пт		
Стр. 156: [179] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По центру, Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 156: [180] Отформатировано	User	28.04.2011 12:47:00
Шрифт: курсив		
Стр. 156: [181] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По центру, Уровень 1, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 156: [182] Отформатировано	User	28.04.2011 12:46:00
Шрифт: 12 пт		
Стр. 156: [183] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По центру, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 156: [184] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 156: [185] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:41:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 156: [186] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:42:00
русский (Россия)		

Стр. 156: [187] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:42:00
русский (Россия)		
Стр. 156: [188] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:42:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 156: [189] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:41:00
Шрифт: курсив		
Стр. 156: [189] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:41:00
русский (Россия)		
Стр. 156: [190] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 156: [191] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 156: [192] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:42:00
русский (Россия)		
Стр. 156: [192] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:42:00
русский (Россия)		
Стр. 156: [193] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:42:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 156: [194] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:41:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 156: [195] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 156: [196] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:42:00
Шрифт: курсив		
Стр. 156: [197] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:42:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 156: [198] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:42:00
русский (Россия)		
Стр. 156: [198] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:42:00
русский (Россия)		
Стр. 156: [199] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:42:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 156: [200] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:42:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 156: [201] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:42:00
Шрифт: курсив		
Стр. 157: [202] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 157: [203] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:45:00
По центру, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 157: [204] Отформатировано	User	28.04.2011 12:47:00
Шрифт: 12 пт		
Стр. 157: [205] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 158: [206] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:48:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 159: [207] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:51:00
русский (Россия)		
Стр. 159: [208] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:51:00
русский (Россия)		
Стр. 159: [209] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:51:00

Шрифт: 6 пт

Стр. 159: [210] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
---------------------------------	----	---------------------

Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Стр. 159: [211] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:51:00
---------------------------------	----	---------------------

интервал Перед: 0 пт

Стр. 159: [212] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:51:00
---------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 6 пт

Стр. 159: [213] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
---------------------------------	----	---------------------

По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Стр. 159: [214] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:52:00
---------------------------------	----	---------------------

русский (Россия)

Стр. 159: [215] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:52:00
---------------------------------	----	---------------------

русский (Россия)

Стр. 159: [216] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:52:00
---------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 6 пт

Стр. 159: [217] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
---------------------------------	----	---------------------

Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Стр. 159: [218] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:52:00
---------------------------------	----	---------------------

интервал Перед: 0 пт

Стр. 159: [219] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:52:00
---------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 6 пт, английский (США)

Стр. 159: [220] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
---------------------------------	----	---------------------

Отступ: Первая строка: 1 см

Стр. 159: [221] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:52:00
---------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 14 пт, ниже на 16 пт

Стр. 160: [222] Удалено	NF	13.11.2009 14:34:00
-------------------------	----	---------------------

Базовый (стандартный) алгоритм адаптации модели (4.36) имеет вид (рис. 4.6.6)

$$\dot{\tilde{\theta}} = \gamma \omega b^T P e, \quad (4.37)$$

где симметрическая положительно определенная матрица P является решением уравнения

$$A^T P + P A = -Q \quad (4.38)$$

с произвольной симметрической положительно определенной матрицей Q . Для доказательства свойств устойчивости замкнутой модели (4.36)–(4.38) используем функцию Ляпунова

$$V(e, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}.$$

Стр. 160: [223] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:52:00
---------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 6 пт

Стр. 160: [224] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
---------------------------------	--------	---------------------

русский (Россия)

Стр. 160: [225] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
---------------------------------	--------	---------------------

Шрифт: 6 пт

Стр. 160: [226] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
---------------------------------	----	---------------------

Отступ: Первая строка: 1 см

Стр. 160: [227] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:53:00
---------------------------------	----	---------------------

Шрифт: 6 пт

Стр. 160: [228] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:53:00
---------------------------------	----	---------------------

русский (Россия)

Стр. 160: [229] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:53:00
русский (Россия)		
Стр. 160: [230] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 160: [231] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:54:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 160: [232] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:54:00
русский (Россия)		
Стр. 160: [233] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:54:00
русский (Россия)		
Стр. 160: [234] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:54:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 160: [235] Отформатировано	NF	17.11.2009 15:54:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 161: [236] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 161: [237] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 164: [238] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Уровень 1, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 164: [239] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:02:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 164: [240] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 164: [241] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 164: [242] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 164: [243] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:02:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 164: [244] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 164: [245] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:02:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 164: [246] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:02:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 164: [247] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 164: [248] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:02:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 164: [249] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:02:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 164: [250] Отформатировано	user	20.11.2009 2:44:00
Шрифт: 14 пт, ниже на 18 пт		
Стр. 164: [251] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:03:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 164: [252] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 164: [253] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:03:00
Шрифт: 6 пт		

Стр. 164: [254] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 164: [255] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 164: [256] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:03:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 164: [257] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 164: [258] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:03:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 164: [259] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:03:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 164: [260] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 164: [261] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:03:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 165: [262] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 165: [263] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:04:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 165: [264] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 165: [265] Отформатировано	User	28.04.2011 12:52:00
Шрифт: 12 пт		
Стр. 165: [266] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:04:00
По центру, Уровень 1, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 165: [267] Отформатировано	User	28.04.2011 12:52:00
Шрифт: 12 пт		
Стр. 165: [268] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 165: [269] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:04:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 165: [270] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 165: [271] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:04:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 165: [272] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 165: [273] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Уровень 1, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 165: [274] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:04:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 165: [275] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 165: [276] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:04:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 165: [277] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Уровень 1, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 165: [278] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:04:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 165: [279] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00

Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт

Стр. 165: [280] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:04:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 165: [281] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:04:00
Шрифт: курсив		
Стр. 165: [282] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 165: [283] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 165: [284] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:05:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 165: [285] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:05:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 165: [286] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:05:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 166: [287] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 166: [288] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:05:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 166: [289] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:17:00
русский (Россия)		
Стр. 166: [290] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:17:00
русский (Россия)		
Стр. 166: [291] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:17:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 166: [292] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:17:00
русский (Россия)		
Стр. 166: [293] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Уровень 1, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 166: [294] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:17:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 166: [295] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 166: [296] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:17:00
русский (Россия)		
Стр. 166: [297] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:17:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 166: [298] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:06:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 166: [299] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:06:00
Шрифт: курсив		
Стр. 166: [300] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:06:00
Шрифт: курсив		
Стр. 166: [301] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:06:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 166: [302] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:06:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 166: [303] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 166: [304] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:07:00
Шрифт: 6 пт		

Стр. 166: [305] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:07:00
русский (Россия)		
Стр. 166: [306] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:07:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 166: [307] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 166: [308] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:07:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 166: [309] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:08:00
русский (Россия)		
Стр. 166: [310] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:08:00
русский (Россия)		
Стр. 166: [311] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:08:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 166: [312] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 166: [313] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 166: [314] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 166: [315] Отформатировано	User	28.04.2011 12:53:00
Шрифт: 12 пт		
Стр. 166: [316] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 166: [317] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:08:00
По центру, Уровень 1, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 166: [318] Отформатировано	User	28.04.2011 12:53:00
Шрифт: 12 пт		
Стр. 166: [319] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 167: [320] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 167: [321] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 167: [322] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:09:00
русский (Россия)		
Стр. 167: [323] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:08:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 167: [324] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 167: [325] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:08:00
русский (Россия)		
Стр. 167: [326] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:09:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 167: [327] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:09:00
русский (Россия)		
Стр. 167: [328] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:09:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 167: [329] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:09:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 167: [330] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:09:00

русский (Россия)

Стр. 167: [331] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:09:00
Шрифт: курсив		
Стр. 167: [332] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 167: [333] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:09:00
Шрифт: полужирный		
Стр. 167: [334] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:09:00
Шрифт: полужирный, не курсив		
Стр. 167: [335] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:09:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 167: [336] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:10:00
русский (Россия)		
Стр. 167: [337] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:10:00
русский (Россия)		
Стр. 167: [338] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:10:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 167: [339] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:10:00
Шрифт: 6 пт, английский (США)		
Стр. 167: [340] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 167: [341] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:10:00
Шрифт: 6 пт, английский (США)		
Стр. 167: [342] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 167: [343] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:10:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 167: [344] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 167: [345] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:10:00
русский (Россия)		
Стр. 167: [346] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:10:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 167: [347] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 168: [348] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 168: [349] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:11:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 168: [350] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:11:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 168: [351] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:29:00
русский (Россия)		
Стр. 168: [352] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:29:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 168: [353] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:11:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 168: [354] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:12:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 168: [355] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:12:00
русский (Россия)		

Стр. 168: [356] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:12:00
русский (Россия)		
Стр. 168: [357] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:12:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 168: [358] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:12:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 168: [359] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:12:00
Шрифт: 6 пт, русский (Россия)		
Стр. 168: [360] Удалено	NF	17.11.2009 16:12:00

Стр. 168: [361] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:12:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 168: [362] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 168: [363] Удалено	NF	17.11.2009 16:13:00

Как видно из приведенных графиков, асимптотическое слежение за эталонной моделью достигается для сигнала задания $g(t)$ любого вида. Однако для обеспечения сходимости по настраиваемым параметрам необходимо, чтобы сигнал задания $g(t)$ был достаточно богатым. На рис. 4.9 $g(t) = \sin 0.8t$, что не обеспечивает параметрической сходимости, так как число гармоник входного сигнала недостаточно для настройки трех параметров (сигнал $g(t)$ содержит только одну гармонику). На рис. 4.10 сигнал задания является прямоугольной волной (а именно $g(t) = \text{sgn}(\sin 0.8t)$) и, следовательно, он может обеспечить параметрическую сходимость для неограниченного числа настраиваемых параметров.

Стр. 168: [364] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:30:00
русский (Россия)		
Стр. 168: [365] Отформатировано	User	28.04.2011 12:53:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 170: [366] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:14:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 170: [367] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:14:00
русский (Россия)		
Стр. 170: [368] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 170: [369] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:14:00
русский (Россия)		
Стр. 170: [370] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:14:00
русский (Россия)		
Стр. 170: [371] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:14:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 170: [372] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 170: [373] Отформатировано	User	28.04.2011 12:55:00
Шрифт: 12 пт		
Стр. 170: [374] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:14:00
По центру, Уровень 1, Отступ: Первая строка: 0 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 170: [375] Отформатировано	User	28.04.2011 12:55:00

Шрифт: 12 пт

Стр. 170: [376] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 170: [377] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:15:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 170: [378] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:15:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 170: [379] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 173: [380] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 173: [381] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:18:00
русский (Россия)		
Стр. 173: [382] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 173: [383] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 173: [384] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 173: [385] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 173: [386] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 173: [387] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:18:00
русский (Россия)		
Стр. 173: [388] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:18:00
русский (Россия)		
Стр. 173: [389] Отформатировано	user	20.11.2009 13:57:00
русский (Россия)		
Стр. 173: [390] Отформатировано	user	20.11.2009 13:57:00
русский (Россия)		
Стр. 173: [391] Отформатировано	user	20.11.2009 13:57:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 174: [392] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 174: [393] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:19:00
По центру, Уровень 1, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 174: [394] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 174: [395] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 174: [396] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:19:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 174: [397] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:19:00
русский (Россия)		
Стр. 174: [397] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:19:00
русский (Россия)		
Стр. 174: [398] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:19:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 174: [399] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:19:00
интервал Перед: 0 пт		

Стр. 174: [400] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:20:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 174: [401] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:20:00
русский (Россия)		
Стр. 174: [402] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:20:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 174: [403] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:19:00
Отступ: Слева: 0 см, Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 174: [404] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 174: [405] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 174: [406] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:20:00
русский (Россия)		
Стр. 174: [407] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:20:00
русский (Россия)		
Стр. 174: [407] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:20:00
русский (Россия)		
Стр. 174: [408] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:20:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 174: [409] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:20:00
Шрифт: курсив		
Стр. 174: [410] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:20:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 174: [411] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см		
Стр. 174: [412] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:20:00
русский (Россия)		
Стр. 174: [413] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:21:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 174: [414] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:17:00
русский (Россия)		
Стр. 174: [415] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:17:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 174: [416] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Уровень 1, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 174: [417] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:17:00
русский (Россия)		
Стр. 174: [418] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:17:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 174: [419] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 175: [420] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:17:00
русский (Россия)		
Стр. 175: [421] Отформатировано	natfed	19.11.2009 17:17:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 175: [422] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:21:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 175: [423] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:21:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 175: [424] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:21:00

Шрифт: 6 пт

Стр. 175: [425] Отформатировано уплотненный на 0,1 пт	NF	17.11.2009 16:22:00
Стр. 175: [425] Отформатировано уплотненный на 0,1 пт	NF	17.11.2009 16:22:00
Стр. 175: [425] Отформатировано уплотненный на 0,1 пт	NF	17.11.2009 16:22:00
Стр. 175: [426] Отформатировано Шрифт: курсив, уплотненный на 0,1 пт	NF	17.11.2009 16:22:00
Стр. 175: [426] Отформатировано уплотненный на 0,1 пт	NF	17.11.2009 16:22:00
Стр. 175: [426] Отформатировано уплотненный на 0,1 пт	NF	17.11.2009 16:22:00
Стр. 175: [426] Отформатировано уплотненный на 0,1 пт	NF	17.11.2009 16:22:00
Стр. 175: [426] Отформатировано уплотненный на 0,1 пт	NF	17.11.2009 16:22:00
Стр. 175: [426] Отформатировано уплотненный на 0,1 пт	NF	17.11.2009 16:22:00
Стр. 175: [426] Отформатировано уплотненный на 0,1 пт	NF	17.11.2009 16:22:00
Стр. 175: [426] Отформатировано русский (Россия), уплотненный на 0,1 пт	NF	17.11.2009 16:22:00
Стр. 175: [427] Отформатировано Шрифт: курсив, уплотненный на 0,1 пт	NF	17.11.2009 16:22:00
Стр. 175: [427] Отформатировано уплотненный на 0,1 пт	NF	17.11.2009 16:22:00
Стр. 175: [428] Отформатировано Шрифт: 6 пт	NF	17.11.2009 16:22:00
Стр. 175: [429] Отформатировано русский (Россия)	NF	17.11.2009 16:23:00
Стр. 175: [429] Отформатировано русский (Россия)	NF	17.11.2009 16:23:00
Стр. 175: [430] Отформатировано Шрифт: 6 пт	NF	17.11.2009 16:23:00
Стр. 175: [431] Отформатировано интервал Перед: 0 пт	NF	17.11.2009 14:51:00
Стр. 175: [432] Отформатировано Шрифт: 6 пт	NF	17.11.2009 16:23:00
Стр. 175: [433] Отформатировано По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт	NF	17.11.2009 14:51:00
Стр. 175: [434] Отформатировано русский (Россия)	NF	17.11.2009 16:23:00
Стр. 175: [435] Отформатировано Шрифт: 6 пт	NF	17.11.2009 16:23:00
Стр. 175: [436] Отформатировано Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт	NF	17.11.2009 14:51:00
Стр. 175: [437] Отформатировано русский (Россия)	NF	17.11.2009 16:23:00

Стр. 175: [438] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:23:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 175: [439] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 175: [439] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 175: [440] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 175: [441] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 175: [442] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 175: [443] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:24:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 175: [444] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 175: [445] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:24:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 175: [446] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:24:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 175: [447] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 175: [448] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:24:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 175: [449] Отформатировано	User	28.04.2011 13:00:00
Отступ: Первая строка: 0 см		
Стр. 175: [450] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:24:00
Шрифт: 6 пт, русский (Россия)		
Стр. 175: [451] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 175: [452] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:24:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 175: [453] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:24:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 175: [454] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
русский (Россия)		
Стр. 175: [455] Отформатировано	natfed	19.11.2009 15:46:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 176: [456] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:27:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 176: [457] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:27:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 176: [458] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:28:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 176: [459] Отформатировано	NF	17.11.2009 16:28:00
интервал Перед: 0 пт		
Стр. 178: [460] Удалено	NF	17.11.2009 17:20:00

Свойства замкнутой системы могут быть сформулированы следующим образом. Для любых начальных условий $x(0)$, $w(0)$ и $\eta(0)$ и произвольного положительного коэффициента γ адаптивный регулятор (4.82), (4.84), (4.87)

и (4.89) обеспечивает асимптотическую стабилизацию нулевого значения вектора состояния x объекта управления (4.75), подверженного воздействию внешнего заранее неизвестного возмущения δ , генерируемого моделью (4.76), (4.77).

Пример 4.3. Рассмотрим задачу стабилизации нулевого значения вектора состояния объекта управления

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 5x_2, \quad (4.91)$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 + u + \delta, \quad (4.92)$$

где возмущение δ представляет собой гармоническую функцию с заранее неизвестной амплитудой, частотой и фазой. Очевидно, что в рассматриваемом случае порядок генератора (4.76), (4.77) равен двум (т. е. $q = 2$), а матрица A и вектор b модели (4.75) имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Стр. 178: [461] Отформатировано	NF	17.11.2009 17:21:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 178: [462] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 178: [463] Отформатировано	NF	17.11.2009 17:21:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 178: [464] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
Уровень 1, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 178: [465] Отформатировано	NF	17.11.2009 17:21:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 178: [466] Отформатировано	NF	17.11.2009 14:51:00
По правому краю, Отступ: Первая строка: 1 см, интервал Перед: 0 пт		
Стр. 178: [467] Отформатировано	NF	17.11.2009 17:21:00
Шрифт: 6 пт		
Стр. 178: [468] Отформатировано	User	28.04.2011 13:01:00
Шрифт: 6 пт		

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены проблемы управления в условиях неопределенности с использованием возможностей неадаптивных и адаптивных алгоритмов в основном применительно к непрерывным объектам. Представляется весьма естественной попытка переноса разработанных методов и алгоритмов управления в условиях неопределенности на класс дискретных объектов.

В этой связи авторы считают необходимым выразить методологический оптимизм, состоящий в том, что переход от непрерывных представлений к дискретным не меняет базовых концепций построения как неадаптивных, так и адаптивных алгоритмов управления, доставляющих управляемым процессам в условиях неопределенности гарантированную стабильность их показателей, или, иначе, робастность. Более того, результаты, полученные в последние годы в теории дискретных систем, развиваемой в рамках матричного формализма метода пространства состояния для случая линейных (локально линейных) представлений, позволяют формально с точностью до преобразования типа "матричная функция от матрицы" трансформировать "непрерывные алгоритмы в дискретные". Однако это возможно при достаточно сильных допущениях.

Основные трудности, затрудняющие эту "трансформацию" алгоритмов, несут в себе чисто дискретные системные факторы – такие, как задержка вывода из ЭВМ вычисленного значения сигнала управления, его цифро-аналогового преобразования, использование в структуре дискретной системы трактов преобразования непрерывных сигналов в дискретные с различными интервалами дискретности и т.д. Возникают и технологические проблемы в расчетной среде. Так конструирование алгоритмов, опирающееся на аппарат функций Ляпунова, приводит к необходимости конструирования первой правой разности этих функций со своей техникой вычислений, спецификой технологий доказательств и тому подобное.

Авторы видят эти проблемы, понимают объем предстоящей работы и надеются со временем познакомить научную общественность, а также студентов, магистрантов, аспирантов и специалистов, погружившихся в проблемную среду теории и практики управления, с разработками методов управления в условиях неопределенности применительно к дискретным объектам.

Векторы и матрицы

П.1.1. Типы матриц

Матрицей A размерности $(m \times n)$ называется таблица элементов a_{ij} , расположенных в m строках и n столбцах.

Транспонированной называется $(n \times m)$ -матрица A^T , полученная из $(m \times n)$ -матрицы A посредством замены строк столбцами. Напомним, что для операции транспонирования справедливо следующее правило раскрытия скобок:

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

В зависимости от соотношения размерностей m и n матрица называется:

- прямоугольной, если $m \neq n$;
- квадратной, если $m = n$;
- вектор-столбцом, если $n = 1$;
- вектор-строкой, если $m = 1$.

Квадратная матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Симметричная $(n \times n)$ -матрица называется положительно определенной, если для любого ненулевого n -мерного вектора x справедливо неравенство $x^T A x > 0$. Напомним, что у симметричной положительно определенной матрицы все собственные значения являются вещественными и положительными.

Матрицей, обратной к $(n \times n)$ -матрице A , называется матрица A^{-1} , удовлетворяющая соотношениям $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Если A и B – квадратные матрицы одинаковой размерности, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Матрица A размерности $(n \times n)$ называется ортогональной, если для нее выполняется соотношение

$$AA^T = A^T A = I,$$

где I – единичная $(n \times n)$ -матрица. Столбцы $A_i (i = \overline{1, n})$ ортогональной матрицы A образуют ортонормированный базис.

Матрицы A и B размерности $(n \times n)$ являются подобными, если существует такая невырожденная $(n \times n)$ -матрица M , что для A и B выполняется матричное равенство

$$MA = BM,$$

при этом матрица M носит название матрицы преобразования подобия. Полученное матричное соотношение имеет следующие эквивалентные представления:

$$A = M^{-1}BM, \quad MAM^{-1} = B, \quad AM^{-1} = M^{-1}B.$$

П.1.2. Векторные и матричные нормы

Определение П.1.2.1. Пусть функция $\varphi(\bullet)$ сопоставляет каждому вектору $x \in R^n$ – линейного вещественного пространства вещественное число $\|x\|$, называемое нормой (размером) этого вектора, если выполняются условия:

- 1) $\varphi(x) = \|x\| > 0$ для $\forall x \neq 0$ и $\varphi(x) = \|x\| = 0$ при $x = 0$;
- 2) $\varphi(\alpha x) = \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
- 3) $\varphi(x + y) = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Универсальной векторной нормой является векторная норма Гельдера, задаваемая выражением

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}; \quad p - \text{целое положительное.}$$

Наиболее употребительными векторными нормами являются нормы при $p = 1, 2$ и ∞ :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| - \text{абсолютная норма вектора;}$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} - \text{квадратичная или евклидова норма вектора;}$$

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max_{i=1, n} |x_i| - \text{бесконечная норма вектора.}$$

Приведенные векторные нормы эквивалентны в том смысле, что для норм $\|x\|_\mu$ и $\|x\|_\nu$ существуют положительные числа β_1 и β_2 такие, что выполняются неравенства

$$\beta_1 \|x\|_\mu \leq \|x\|_\nu \leq \beta_2 \|x\|_\mu.$$

Так, для норм $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ и $\|x\|_\infty$ выполняются оценочные неравенства:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2,$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.$$

Определение П.1.2.2. Пусть функция $\varphi(*)$ сопоставляет каждой $(m \times n)$ -матрице A вещественное число $\|A\|$. Тогда оно называется нормой этой матрицы, если выполняются условия:

- 1) $\varphi(A) = \|A\| > 0$ для $\forall A \neq 0$ и $\varphi(A) = \|A\| = 0$ при $A = 0$;
- 2) $\varphi(\alpha A) = \|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$;
- 3) $\varphi(A + B) = \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Наиболее употребительными матричными нормами являются:

1. евклидова или фробениусова норма

$$\|A\|_E = \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left| (tr A^T A)^{1/2} \right| = \left| (tr A A^T)^{1/2} \right|;$$

2. p -ичные индуцированные нормы $\|A\|_p$, задаваемые в форме

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

p -ичные нормы $\|A\|_p$ используются для значений $p = 1, 2$ и ∞ ;

$$2.1. \|A\|_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{j=1, n} \sum_{i=1}^m |A_{ij}| - \text{столбцовая норма матрицы};$$

$$2.2. \|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_{\max}(A) - \text{спектральная норма матрицы}$$

A , где $\alpha_{\max}(A)$ – максимальное сингулярное число матрицы A ;

$$2.3. \|A\|_{\infty} = \max_{i=1, m} \sum_{j=1}^n |A_{ij}| - \text{строчная форма матрицы } A.$$

Приведенные матричные нормы удовлетворяют оценочным неравенствам:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_2;$$

$$\max_{i,j} |A_{ij}| \leq \|A\|_2 \sqrt{nm} \max_{i,j} |A_{ij}|;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_{\infty};$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_{\infty};$$

$$\|A\|_2 \leq (\|A\|_1 \|A\|_{\infty})^{1/2}.$$

Определение П.1.2.3. Векторные нормы $\|x\|$, $\|y\|$ и матричная норма $\|A\|$ называются согласованными для y , x и A , связанных линейным векторно-матричным соотношением

$$y = Ax,$$

если выполняется неравенство

$$\|y\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

Определение П.1.2.3. Матричные нормы $\|(\cdot)\|$ обладают кольцевым свойством, если для них справедливо неравенство

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Кольцевым свойством обладают все p -ичные (индуцированные) матричные нормы, а также фробениусова (евклидова) норма матриц.

П.1.3. Функции векторного аргумента. Производные по вектору. Градиент

Определение П.1.3.1. Пусть функция $f(x)$ реализует отображение $R^n \rightarrow R$ действительного n -мерного пространства на множество действительных чисел в том смысле, что f ставит n -мерному вектору x в соответствие действительное число $f(x)$, тогда $f(x)$ называется скалярной функцией векторного аргумента.

Определение П.1.3.2. Производной от скалярной функции $f(x)$ от n -мерного векторного аргумента x по этому вектору называется $(1 \times n)$ -матрица-строка $f'_x(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$, связывающая скалярный дифференциал $df(x)$ как главное линейное приращение функции с бесконечно малым n -мерным приращением dx аргумента в силу линейного векторно-матричного соотношения

$$df(x) = f'_x(x)dx,$$

где $f'_x(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ формируется в виде

$$f'_x(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \Lambda \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right].$$

Определение П.1.3.3. Градиентом скалярной функции $f(x)$ n -мерного векторного аргумента в точке x называется n -мерный вектор $grad f(x) = \nabla f(x)$, задаваемый выражением

$$\text{grad}f(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)^T.$$

Содержательно градиент как вектор в точке x задает направление наибольшего роста скалярной функции $f(x)$, при этом, если x принадлежит поверхности $f(x) = C$ постоянного значения функции $f(x)$, равного C , то градиент $\nabla f(x)$ как вектор ортогонален в этой точке отмеченной поверхности.

Определение П.1.3.4. Пусть функция $f(x)$ реализует отображение $R^n \rightarrow R^m$ действительного n -мерного пространства в действительное m -мерное пространство в том смысле, что f ставит n -мерному вектору $x = [x_1 \ x_2 \ \Lambda \ x_n]^T$ в соответствие m -мерный вектор $f(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \Lambda \ f_m(x)]^T$, тогда $f(x)$ называется векторной функцией векторного аргумента.

Определение П.1.3.5. Производной от m -мерной векторной функции $f(x)$ векторного n -мерного аргумента x по этому аргументу называется $(m \times n)$ -матрица $f'_x(x)$, связывающая m -мерный дифференциал $df(x)$ как главное линейное приращение функции с бесконечно малым n -мерным приращением dx аргумента x в силу линейного векторно-матричного соотношения $df(x) = f'_x(x)dx$, где $f'_x(x)$ формируется в следующем виде:

$$f'_x(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \Lambda & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \hline \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \Lambda & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \hline \text{M} & \text{M} & \text{M} & \text{M} \\ \hline \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \Lambda & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{array} \right].$$

Матрица $f'_x(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ приведенного вида именуется матрицей Якоби.

П.1.4. Дифференцирование матриц, их композиций и матричных функций от матриц по скалярному параметру

Определение П.1.4.1. Пусть элементы $(m \times n)$ -матрицы зависят от скалярного параметра q ($q \in R$) так, что она представима в форме

$$A(q) = \text{row}\{ \text{col}(A_{ij}(q)), \ i = \overline{1, n}; \ j = \overline{1, m} \}.$$

Тогда производной

$$A_q(q) \triangleq \frac{\partial A(q)}{\partial q}$$

по скалярному параметру q называется $(m \times n)$ -матрица производных $\frac{dA_{ij}(q)}{dq}$ ее элементов, записываемая в форме

$$A(q) = \text{row} \left\{ \text{col} \left[\frac{\partial A_{ij}(q)}{\partial q} \right]; \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m} \right\}.$$

Определение П.1.4.2. Производная суммы

$$A(q) + B(q) = C(q)$$

двух матриц по скалярному параметру q называется сумма производных этих матриц так, что оказывается справедливой запись

$$C_q(q) = A_q(q) + B_q(q).$$

Определение П.1.4.3. Производной от произведения матриц

$$D(q) = A(q)E(q)$$

по скалярному параметру q называется следующее выражение:

$$D_q(q) = A_q(q)E(q) + A(q)E_q(q).$$

Определение П.1.4.4. Производной от степенной матричной функции $A^K(q)$ от $(n \times n)$ -матрицы $A(q)$ по скалярному параметру q называется матрица, задаваемая следующим выражением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} A^K(q) &= A_q(q)A^{K-1}(q) + A(q)A_q(q)A^{K-2}(q) + K + \\ &+ A^{K-2}(q)A_q(q)A(q) + A^{K-1}(q)A_q(q). \end{aligned}$$

Примечание. Если коммутируемы матрицы $A_q(q)$ и $A^\mu(q)$, где $\mu = \overline{1, K-1}$ так, что оказывается справедливой запись

$$A_q(q)A^\mu(q) = A^\mu(q)A_q(q),$$

то становится справедливым представление

$$\frac{\partial}{\partial q} A^k(q) = kA^{k-1}(q)A_q(q) = kA_q(q)A^{k-1}(q).$$

Утверждение П.1.1. Пусть $A(q)$ – квадратная $(n \times n)$ -матрица такая, что существует обратная ей матрица $A^{-1}(q)$, удовлетворяющая условию

$$A(q)A^{-1}(q) = A^{-1}(q)A(q) = I.$$

Тогда производная от обратной матрицы $A^{-1}(q)$ по скалярному параметру q задается соотношением

$$\frac{\partial}{\partial q}(A^{-1}(q)) = -A^{-1}(q)A_q(q)A^{-1}(q). \quad \square$$

Доказательство утверждения строится на дифференцировании по q матричного равенства

$$A^{-1}(q)A(q) = I,$$

в результате чего получим по свойству производной от произведения матриц

$$\frac{\partial}{\partial q}(A^{-1}(q))A(q) + A^{-1}(q)A_q(q) = 0,$$

откуда следует заявленное в утверждении соотношение. ■

Утверждение П.1.2. Пусть $f(A(q))$ – $(n \times n)$ -матричная функция от $(n \times n)$ -матрицы $A(q)$, элементы которой зависят от скалярного параметра q . Пусть $A(q)$ есть матрица простой структуры так, что она диагонализируема в силу матричного уравнения подобия

$$M(q)\Lambda(q) = A(q)M(q),$$

где $\Lambda(q) = \text{diag}\{\lambda_i(q); i = \overline{1, n}\}$.

Тогда производная $\frac{\partial f(A(q))}{\partial q}$ от матричной функции от матрицы по скалярному параметру может быть вычислена в силу матричного соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(A(q))}{\partial q} &= M_q(q)M^{-1}(q)A(q) - A(q)M_q(q)M^{-1}(q) + \\ &+ M(q)\text{diag}\left\{\frac{\partial f(\lambda_i(q))}{\partial \lambda_i}\lambda_i(q); i = \overline{1, n}\right\}M^{-1}(q). \end{aligned} \quad \square$$

Доказательство утверждения использует свойство матричных функций от матриц сохранять матричное отношение подобия, которое позволяет записать

$$f(A(q)) = M(q)f(\Lambda(q))M^{-1}(q) = M(q)\text{diag}\{f(\lambda_i(q)); i = \overline{1, n}\}M^{-1}(q).$$

Дифференцирование последнего матричного соотношения по q приводит к представлению производной $\frac{\partial f(A(q))}{\partial q}$ заявленным в утверждении выражением. ■

Определения устойчивости и метод функций Ляпунова

П2.1. Определенные функции

Определение П2.1. Скалярная функция $v(x)$ векторного аргумента x называется знакопостоянной положительной, если $v(x) \geq 0$ для всех x и $v(0) = 0$.

Определение П2.2. Скалярная функция $v(x)$ векторного аргумента x называется определено положительной, если $v(x) > 0$ для всех $x \neq 0$ и $v(0) = 0$.

Знакопостоянные отрицательные и определено отрицательные функции определяются аналогично с точностью до замены знаков неравенств на противоположные.

В теории функций Ляпунова используют следующие условные обозначения:

$v(x) \geq 0$ или $v(x) \leq 0$ – для знакопостоянных функций;

$v(x) > 0$ или $v(x) < 0$ – для определенных функций.

Наиболее часто в качестве определено положительных функций используют квадратичные формы вида

$$v(x) = x^T P x, \quad (\text{П2.1})$$

где $P = P^T > 0$ – симметрическая положительно определенная матрица. Напомним, что для квадратичной формы (П2.1) справедлива оценка (неравенство Релея)

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_2 \|x\|^2, \quad (\text{П2.2})$$

где λ_1 и λ_2 – минимальное и максимальное собственные значения матрицы P соответственно.

П2.2. Определения устойчивости

Будем рассматривать нестационарную нелинейную систему вида

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (\text{П2.3})$$

где x – n -мерный вектор состояния. Обозначим через x_0 начальное значение вектора состояния, т.е. значение вектора x в начальный момент времени t_0 . Решение системы (П2.3), полученное при начальных условиях x_0 и t_0 , обозначим через $x(t, x_0, t_0)$.

Замечание П2.1. Более простым является класс *стационарных нелинейных* систем, т.е. систем, правые части дифференциальных уравнений которых не зависят в явном виде от времени t :

$$\dot{x} = f(x). \quad (\text{П2.3.a})$$

Свойства стационарных систем не изменяются с течением времени, и поэтому без потери общности в качестве начального момента времени можно выбрать нулевое значение $t_0 = 0$. При этом начальное значение вектора состояния обозначается $x(0)$.

□

Пусть точка $x = 0$ является *состоянием равновесия* системы (П2.3), т.е. $f(0, t) = 0$ для всех t .

Определение П2.3. Состояние равновесия $x = 0$ системы (П2.3) называется:

1) *устойчивым по Ляпунову* (или просто – *устойчивым*), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon_1 > 0$ существует число $\delta(\varepsilon_1, t_0) > 0$ (зависящее в общем случае от ε_1 и t_0), такое, что из выполнения неравенства $|x_0| < \delta(\varepsilon_1, t_0)$ следует справедливость неравенства

$$|x(t, x_0, t_0)| < \varepsilon_1 \text{ для всех } t > t_0; \quad (\text{П2.4})$$

2) *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и, дополнительно, для любого положительного числа $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ существуют положительные числа $\Delta(t_0)$ и $T(\varepsilon_1, t_0)$, такие, что из выполнения неравенства $|x_0| < \Delta(t_0)$ следует справедливость неравенства

$$\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon_2 \text{ для всех } t > t_0 + T(\varepsilon_2, t_0); \quad (\text{П2.5})$$

3) *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно асимптотически устойчиво и, дополнительно, константы Δ и T не зависят от начального момента времени t_0 ;

4) *экспоненциально устойчивым*, если существует такое положительное число $\Delta > 0$, что из выполнения неравенства $|x_0| < \Delta$ следует справедливость неравенства

$$x(t, x_0, t_0) < \beta \|x_0\| \exp(-\alpha(t - t_0)) \text{ для всех } t > t_0, \quad (\text{П2.6})$$

где α и β – некоторые положительные константы.

Определение П2.4. Состояние равновесия $x = 0$ системы (П2.3) называется *неустойчивым*, если оно не является устойчивым по Ляпунову.

Если неравенства (П2.5) и (П2.6) выполняются при любых начальных значениях x_0 , то соответствующие свойства устойчивости называются *глобальными*. Если система имеет единственное

состояние равновесия с глобальными свойствами устойчивости, то можно говорить об устойчивости самой *системы*.

Обсудим введенные определения. Устойчивость по Ляпунову означает, что для любого сколь угодно малого числа ε_1 всегда найдется множество начальных условий с ненулевым радиусом δ , такое, что любая траектория $x(t, x_0, t_0)$, начавшаяся внутри данного множества, не выйдет за пределы ε_1 -окрестности нулевого состояния равновесия (см. рис. П2.1).

Асимптотическая устойчивость означает, что для фиксированного множества начальных условий $\|x_0\| < \Delta(t_0)$ всегда можно найти конечный интервал времени T , такой, что норма вектора состояния станет меньше любого сколь угодно малого числа ε_2 (см. рис. П2.2). Другими словами, это означает сходимость траекторий к нулевому состоянию равновесия, т.е. выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0, t_0) = 0 .$$

Равномерная асимптотическая устойчивость дополнительно означает, что скорость сходимости не зависит от начального момента времени t_0 .

Наконец, экспоненциальная устойчивость означает, что скорость сходимости не меньше, чем у показательной функции (см. рис. П2.3).

Напомним также, что из более «сильного» типа устойчивости следует справедливость всех более «слабых» типов (в определении П2.2 типы устойчивости даны в порядке возрастания их «силы»). Обратное утверждение несправедливо, за исключением специальных классов динамических систем. Так, для линейных стационарных систем из асимптотической устойчивости следует равномерная асимптотическая устойчивость и экспоненциальная устойчивость. Для линейных нестационарных систем из равномерной асимптотической устойчивости следует экспоненциальная устойчивость. Для нелинейных стационарных систем из асимптотической устойчивости следует равномерная асимптотическая устойчивость (но не следует экспоненциальная).

Пример П2.1. Проиллюстрируем введенные понятия примерами следующих простых систем:

$$\dot{x} = kx , \tag{П2.7}$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{1+t} x , \tag{П2.8}$$

$$\dot{x} = -x^3 , \tag{П2.9}$$

где x – скалярная переменная, k – постоянный коэффициент.

Линейная стационарная система (П2.7) является устойчивой по Ляпунову при $k \leq 0$, асимптотически устойчивой (равномерно асимптотически устойчивой, экспоненциально устойчивой) при $k < 0$ и неустойчивой при $k > 0$. Линейная нестационарная система (П2.8) является асимптотически устойчивой (но не является ни равномерно асимптотически, ни экспоненциально устойчивой), а нелинейная стационарная система (П2.9) является равномерно асимптотически устойчивой (но не является экспоненциально устойчивой). \square

П2.3. Исследование устойчивости с помощью функций Ляпунова

Метод функций Ляпунова основан на использовании скалярных функций, обладающими вместе со своими производными, вычисленными в силу уравнений исследуемой системы, некоторыми специальными свойствами. При этом для определения типа устойчивости не требуется решения дифференциальных уравнений системы. Заключение делается по свойствам функции Ляпунова и ее производной, вычисленной в силу уравнений системы.

В зависимости от условий конкретной задачи, к функциям Ляпунова могут предъявляться различные требования. Наше рассмотрение мы ограничим функциями Ляпунова $V(x)$, являющимися скалярными функциями векторного аргумента x и обладающими следующими свойствами:

свойство 1: определенная положительность, т. е. $V(x) > 0$;

свойство 2: дифференцируемость по x ;

свойство 3: неограниченный рост, т. е. $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \infty$.

Определение П2.5. Производной функции Ляпунова $V(x)$ в силу уравнений системы (П2.3) называется скалярная функция вектора x , вычисленная как производная по времени сложной функции

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, t).$$

Приведем ряд важных теорем метода функций Ляпунова. Отметим, что все приводимые теоремы определяют *глобальные* свойства устойчивости.

Теорема П2.1. Состояние равновесия $x = 0$ системы (П2.3) является устойчивым по Ляпунову, если существует функция Ляпунова $V(x)$, производная которой в силу уравнений системы является знакопостоянной отрицательной, т.е.

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, t) \leq 0.$$

Теорема П2.2. Состояние равновесия $x = 0$ системы (П2.3) является равномерно асимптотически устойчивым, если существует

функция Ляпунова $V(x)$, производная которой в силу уравнений системы является определенно отрицательной, т. е.

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, t) < 0.$$

Теорема П2.3 (Теорема Н.Н. Красовского). Состояние равновесия $x = 0$ системы (П2.3) является экспоненциально устойчивым, если существует функция Ляпунова $V(x)$, удовлетворяющая условиям:

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^2, \quad (\text{П2.10})$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, t) < -c_3 \|x\|^2, \quad (\text{П2.11})$$

$$\left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|, \quad (\text{П2.12})$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – положительные константы.

В ряде приложений (например, в задачах адаптивного управления) большое значение имеет следующая теорема, позволяющая доказать *сходимость по части переменных* у систем, устойчивых по Ляпунову. Чтобы не использовать математические термины, выходящие за рамки программы инженерной подготовки, утверждение теоремы несколько упрощено. Полная формулировка теоремы может быть найдена в литературе.

Теорема П2.4. Если функция $f(x, t)$ является ограниченной для ограниченных x и любых t , и существует функция Ляпунова $V(x)$, производная которой в силу уравнений системы удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, t) \leq -W(x),$$

где $W(x)$ – знакопостоянная положительная функция, то состояние равновесия $x = 0$ системы (П2.3) является устойчивым по Ляпунову и, дополнительно, все решения системы удовлетворяют условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t, x_0, t_0)) = 0.$$

В завершение проведем исследование устойчивости линейной системы

$$\dot{x} = Ax \quad (\text{П2.13})$$

с помощью квадратичной функции Ляпунова

$$V(x) = x^T P x, \quad (\text{П2.14})$$

где симметрическая положительно определенная матрица P является решением матричного уравнения

$$A^T P + P A = -Q \quad (\text{П2.15})$$

с произвольной симметрической положительно определенной матрицей Q . Как известно, если матрица A гурвицева (т. е. все собственные значения имеют отрицательные вещественные части), то для произвольной (симметрической положительно определенной) матрицы Q найдется единственная симметрическая положительно определенная матрица P , являющаяся решением уравнения (П2.5). Вычислим производную функции (П2.14) в силу уравнений (П2.13):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax)^T P x + x^T P^T A x = x^T A P x + x^T P A x = \\ &= x^T (A^T P + P A) x. \end{aligned}$$

Учитывая равенство (П2.15), окончательно получаем

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x < 0,$$

откуда следует равномерная асимптотическая устойчивость состояния равновесия. Покажем, что выбранная функция Ляпунова и ее производная в силу уравнений системы удовлетворяют также условиям теоремы Красовского об экспоненциальной устойчивости. Действительно, в силу неравенства Релея имеем:

$$c_1 \|x\|^2 \leq x^T P x \leq c_2 \|x\|^2$$

и

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x \leq -c_3 \|x\|^2,$$

где c_1 и c_2 – минимальное и максимальное собственные значения матрицы P , соответственно, а c_3 – минимальное собственное значение матрицы Q . Наконец,

$$\left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial x} x^T P x \right\| = \|2Px\| \leq c_4 \|x\|,$$

где $c_4 = 2\|P\|$, а $\|P\|$ – спектральная норма матрицы P .

Сингулярное разложение матриц

Определение П.3.1. Сингулярным разложением вещественнозначной матрицы N размерности $(m \times n)$ называется ее факторизация, задаваемая в виде

$$N = U \Sigma V^T, \quad (\text{П.3.1})$$

где U – ортогональная $(m \times m)$ -матрица, V – ортогональная $(n \times n)$ -матрица, образующие соответственно левый и правый сингулярные базисы и обладающие свойствами

$$UU^T = U^T U = I, \quad VV^T = V^T V = I \quad (\text{П.3.2})$$

Σ – матрица сингулярных чисел α_i , которая принимает вид

$$\Sigma = \text{diag}\{\alpha_i; i = \overline{1, m}\} \text{ при } m = n, \quad (\text{П.3.3})$$

$$\Sigma = \left[\text{diag}\{\alpha_i; i = \overline{1, m}\} \mid 0_{m, n-m} \right] \text{ при } m < n, \quad (\text{П.3.4})$$

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c} \text{diag}\{\alpha_i; i = \overline{1, n}\} \\ \hline 0_{m-n, n} \end{array} \right] \text{ при } m > n. \quad \square \quad (\text{П.3.5})$$

Положим пока $m = n$ и транспонируем матричное выражение (П.3.1), тогда получим

$$N^T = V \Sigma^T U^T \Big|_{n=m} = V \Sigma U^T. \quad (\text{П.3.6})$$

Умножим (П.3.1) на (П.3.6), тогда с использованием свойства (П.3.2) получим цепочку равенств

$$NN^T = U \Sigma V^T V \Sigma U^T = U \Sigma^2 U^T. \quad (\text{П.3.7})$$

Теперь умножим (П.3.6) слева на (П.3.1), получим

$$N^T N = V \Sigma U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^2 V^T. \quad (\text{П.3.8})$$

Умножим матричное уравнение (П.3.7) на матрицу U справа, тогда с учетом (П.3.2) получим матричное соотношение

$$T \Gamma - F T = G P. \quad (\text{П.3.9})$$

Перейдем в (П.5.9) к столбцовой форме записи правых матричных компонентов:

$$NN^T \{ \text{row}(U_i; i = \overline{1, m}) \} = U \{ \text{row}(\Sigma^2)_i; i = \overline{1, m} \},$$

что эквивалентно матрично-векторному представлению

$$NN^T U_i = U(\Sigma^2)_i; i = \overline{1, m}. \quad (\text{П.3.10})$$

Если учесть, что столбец $(\Sigma^2)_i$ имеет вид

$$(\Sigma^2)_i = \begin{bmatrix} 0_{1 \times (i-1)} & \alpha_i^2 & 0_{1 \times (m-i)} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{П.3.11})$$

то с учетом (П.3.11) соотношение (П.3.10) записывается в виде

$$NN^T U_i = \alpha_i^2 U_i; i = \overline{1, m}. \quad (\text{П.3.12})$$

Векторно-матричное соотношение (П.3.12) представляет собой полное решение проблемы собственных значений α_i^2 и собственных векторов U_i матрицы NN^T . В результате получаем, что $\alpha_i^2 (i = \overline{1, m})$ ищутся как решения характеристического уравнения

$$\det(\alpha^2 I - NN^T) = 0, \quad (\text{П.3.13})$$

а матрица U оказывается составленной из собственных векторов U_i матрицы NN^T единичной нормы в форме

$$U = \text{row}\{U_i : \|U_i\| = 1; i = \overline{1, m}\}. \quad (\text{П.3.14})$$

Умножим теперь матричное уравнение (П.3.8) на матрицу V справа, тогда с учетом (П.3.2) получим

$$N^T NV = V\Sigma^2. \quad (\text{П.3.15})$$

По аналогии с (П.3.9)–(П.3.12) получим соотношение (П.3.15) в форме m матрично-векторных выражений

$$N^T NV_i = \alpha_i^2 V_i; i = \overline{1, m}, \quad (\text{П.3.16})$$

которое представляет собой задачу на собственные значения α_i^2 и собственные векторы V_i матрицы NN^T . Последнее позволяет составить характеристическое уравнение

$$\det(\alpha^2 I - N^T N) = 0, \quad (\text{П.3.17})$$

позволяющее вычислить все $\alpha_i^2 (i = \overline{1, m})$, знание которых в силу (П.3.16) позволяет найти собственные векторы V_i единичной нормы матрицы $N^T N$. Матрица V правого сингулярного базиса в итоге по аналогии с (П.3.14) записывается в форме

$$V = \text{row}\{V_i : \|V_i\| = 1; i = \overline{1, m}\}. \quad (\text{П.3.18})$$

Следует заметить, что в случае $m = n$ матрицы NN^T и $N^T N$ обладают одним и тем же спектром собственных значений так, что $\sigma\{NN^T\} = \sigma\{N^T N\} = \{\alpha_i^2; i = \overline{1, m}\}$. Если $m \neq n$, то спектр $\sigma\{N^T N\}$ содержит n собственных значений, а спектр $\sigma\{NN^T\}$ содержит m

собственных значений, причем числа ненулевых элементов этих спектров оказываются равными.

Дадим теперь геометрическую интерпретацию сингулярного разложения матрицы N (П.3.1). Для этой цели умножим (П.3.1) на матрицу V справа и воспользуемся свойствами (П.3.2), тогда получим

$$NV = U\Sigma. \quad (\text{П.3.19})$$

Запишем (П.3.19) по аналогии с (П.3.12) и (П.3.16) в столбцовой форме:

$$NV_i = \alpha_i U_i; i = \overline{1, m}. \quad (\text{П.3.20})$$

Сконструируем теперь на векторно-матричном соотношении (П.3.20) согласованные тройки $\{V_i, \alpha_i, U_i; i = \overline{1, m}\}$, которые несут информацию о том, что в силу (П.3.20) эффект действия оператора с матрицей N на i -й элемент V_i правого сингулярного базиса V состоит в умножении на i -ое сингулярное число α_i i -го элемента U_i левого сингулярного базиса U .

Если теперь с помощью матрицы N в силу линейного векторно-матричного соотношения

$$\chi = N\lambda \quad (\text{П.3.21})$$

отобразить сферу $\|\chi\|=1$, то она отобразится в эллипсоид, положение полуосей которого определяется элементами U_i левого сингулярного базиса U , а длины этих полуосей в силу (П.3.20) будут равны $\alpha_i \|\chi\|$.

В заключение заметим, что в англоязычной литературе сингулярное разложение матриц именуется SVD-разложением (SVD-процедурой). Во всех версиях пакета MATLAB существует функция SVD(N), которая выводит матричные компоненты факторизации (П.3.1).

Доказательство утверждений

Доказательство утверждения 2.5. Строится на двух эквивалентных представлениях матричных условий подобия матриц $N(q)$ и $\Lambda(q)$, одно из которых записано в форме (2.101), а второе – в форме

$$\Lambda(q)M^{-1}(q) = M^{-1}(q)N(q). \quad (\text{П.4.1})$$

Соотношение (2.101) порождает столбцовое соотношение

$$\lambda_i(q)M_i(q) = N(q)M_i(q), i = \overline{1, n}, \quad (\text{П.4.2})$$

а соотношение (П.4.1) порождает строчное соотношение

$$(M^{-1}(q))^i \lambda_i(q) = (M^{-1}(q))^i N(q). \quad (\text{П.4.3})$$

Запишем соотношения (П.4.2) и (П.4.3) в однородной форме:

$$(N(q) - \lambda_i(q)I)M_i(q) = 0; \quad (M^{-1}(q))^i (N(q) - \lambda_i(q)I) = 0. \quad (\text{П.4.4})$$

Продифференцируем соотношение (П.4.2) по q_j в точке $q = q_0$ и разрешим результат дифференцирования относительно функции чувствительности λ_{iqj} , тогда получим:

$$\lambda_{iqj}M_i = N_{qj}M_i + (N - \lambda_i I)M_{iqj}. \quad (\text{П.4.5})$$

Воспользуемся теперь тем, что матричное соотношение $M^{-1}M = I$ может быть записано в эквивалентной строчно-столбцовой форме:

$$(M^{-1})^i M_l = \delta_{il}, \quad (\text{П.4.6})$$

где δ_{il} – символ Кронекера, обладающий свойством $\delta_{il} = 1$ при $i = l$ и $\delta_{il} = 0$ при $i \neq l$. Умножим (П.4.5) слева на строку $(M^{-1})^i$, тогда

$$\lambda_{iqj}(M^{-1})^i M_i = (M^{-1})^i N_{qj}M_i + (M^{-1})^i (N - \lambda_i I)M_{iqj}. \quad (\text{П.4.7})$$

Воспользуемся в (П.4.7) свойствами символа Кронекера, а также вторым соотношением в (П.4) при $q = q_0$, тогда получим:

$$\lambda_{iqj} = (M^{-1})^i N_{qj}M_i = (M^{-1}N_{qj}M)_{ii} \quad \blacksquare$$

Доказательство утверждения 2.7. Для доказательства справедливости представления (2.106) коэффициентов γ_{ik}^j разложения вектора функции чувствительности $\xi_{iqj} = M_{iqj}$ по собственным

векторам M_k $k \neq i$ умножим соотношение (П.4.5) на строку $(M^{-1})^k$ $k \neq i$. Если воспользоваться теперь соотношением (П.4.6) и вторым соотношением в (П.4.4), то получим

$$(M^{-1})^k M_{ij} = \frac{(M^{-1})^k N_{qj} M_k}{\lambda_i - \lambda_k}; \quad k = \overline{1, n}; \quad k \neq i. \quad (\text{П.4.8})$$

Если теперь на строку $(M^{-1})^k$ умножить (2.105), то, используя (П.4.8), переходим к (2.106), а, следовательно, и к (2.107). ■

Доказательство утверждения 2.8 строится на двух эквивалентных записях матричного соотношения (2.95):

$$U(q)\Sigma(q) = N(q)V(q), \quad (\text{П.4.9})$$

$$\Sigma(q)V^T(q) = U^T(q)N(q). \quad (\text{П.4.10})$$

Матричные соотношения (П.4.9) и (П.4.10) порождают эквивалентную им столбцовую и строчную записи:

$$\alpha_i(q)U_i(q) = N(q)V_i(q), \quad (\text{П.4.11})$$

$$\alpha_i(q)(V^T(q))^i = (U^T(q))^i N(q). \quad (\text{П.4.12})$$

Продифференцируем соотношение (П.4.11) и (П.4.12) по компоненту q_j вектора q в точке $q = q_0$, в результате чего получим:

$$\alpha_{ij}U_i + \alpha_i V_{ij} = N_{qj}V_i + N V_{ij}, \quad (\text{П.4.13})$$

$$\alpha_{ij}(V^T)^i + \alpha_i(V^T)^i_{qj} = (U^T)^i_{qj} N + (U^T)^i N_{qj}. \quad (\text{П.4.14})$$

Напомним, что свойство ортогональности сингулярных базисов в $V(q)$ и $U(q)$ для любого q может быть записано в форме

$$(V^T(q))^l V_i(q) = \delta_{li}; \quad (U^T(q))^l U_i(q) = \delta_{li}. \quad (\text{П.4.15})$$

Дифференцирование по q_i в точке $q = q_0$ соотношения (П.4.15) дает

$$(V^T)^l_{qj} V_i + (V^T)^l V_{ij} = 0; \quad (U^T)^l_{qj} U_i + (U^T)^l U_{ij} = 0. \quad (\text{П.4.16})$$

Для случая $l = i$ соотношения (П.4.16) приводят к равенствам

$$(V^T)^i_{qj} V_i + (V^T)^i V_{ij} = 0; \quad (U^T)^i_{qj} U_i + (U^T)^i U_{ij} = 0. \quad (\text{П.4.17})$$

Для вычисления функции чувствительности α_{ij} i -го сингулярного числа $\alpha_i(q)$ к вариации умножим выражения (П.4.13) на $(U^T)^i$ слева, а (П.4.14) на V_i справа, затем учтем соотношения (П.4.12) и (П.4.11), а также (П.4.17), тогда для α_{ij} получим:

$$\alpha_{ij} = (U^T)^i N_{qj} V_i = (U^T N_{qj} V)_{ii} . \quad \blacksquare \quad (\text{П.4.18})$$

Доказательство утверждения 2.10. Для доказательства утверждения введем в рассмотрение агрегированную автономную систему с составным вектором состояния $\tilde{x} = \text{col}\{x, z\}$, для которого в силу (2.137) и (2.138) оказываются справедливыми соотношения:

$$R_x(\tau); \quad \tilde{x}(t) = \text{col}\{x(0), z(0)\}; \quad (\text{П.4.19})$$

$$x(t) = \tilde{C}_x \tilde{x}(t); y(t) = \tilde{C}_y \tilde{x}(t); \quad \Sigma(t) = \tilde{C}_\Sigma \tilde{x}(t); \quad z(t) = \tilde{C}_z \tilde{x}(t), \quad (\text{П.4.20})$$

где

$$\tilde{F} = \left[\begin{array}{c|c} F & GP \\ \hline 0 & \Gamma \end{array} \right]; \quad (\text{П.4.21})$$

$$\tilde{C}_x = [I_{n \times n} \mid 0_{l \times l}]; \tilde{C}_y = [C \mid 0_{m \times l}]; \tilde{C}_\Sigma = [-C \mid P]; \tilde{C}_z = [0_{n \times n} \mid I_{l \times l}]. \quad (\text{П.4.22})$$

Тогда для векторных переменных систем (2.137), (2.138) оказываются справедливыми представления:

$$x(t) = \tilde{C}_x e^{\tilde{F}t} \tilde{x}(0); y(t) = C_x x(t); \quad \Sigma(t) = \tilde{C}_\Sigma e^{\tilde{F}t} \tilde{x}(0). \quad (\text{П.4.23})$$

Ключевым моментом в соотношениях систем (П.4.23) является вычисление матричной функции $e^{\tilde{F}t}$, для чего докажем следующую лемму.

Лемма 1П.4. Пусть скалярный ряд

$$f(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + K + a_p \alpha^p + K \quad (\text{П.4.24})$$

порождает матричный ряд

$$f(\tilde{F}) = a_0 I + a_1 \tilde{F} + a_2 \tilde{F}^2 + K + a_p \tilde{F}^p + K, \quad (\text{П.4.25})$$

где матрица \tilde{F} имеет вид (П.4.21), причем его матричные компоненты связаны уравнением Сильвестра (2.139):

$$T\Gamma - FT = GP, \quad (\text{П.4.26})$$

тогда для $f(\tilde{F})$ можно записать

$$f(\tilde{F}) = \left[\begin{array}{c|c} f(F) & Tf(\Gamma) - f(F)T \\ \hline 0 & f(\Gamma) \end{array} \right]. \quad (\text{П.4.27})$$

Доказательство леммы использует представление матрицы (П.4.21) на основе (П.4.26) в форме

$$\tilde{F} = \left[\begin{array}{c|c} F & T\Gamma - FT \\ \hline 0 & \Gamma \end{array} \right] \quad (\text{П.4.28})$$

для целей конструирования степенных представлений этой матрицы, что приводит их к виду

$$\begin{aligned}\tilde{F}^2 &= \left[\begin{array}{c|c} F & T\Gamma - FT \\ \hline 0 & \Gamma \end{array} \right]^2 = \left[\begin{array}{c|c} F^2 & FT\Gamma - F^2T + T\Gamma^2 - FT\Gamma \\ \hline 0 & \Gamma^2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} F^2 & T\Gamma^2 - AF^2T \\ \hline 0 & \Gamma^2 \end{array} \right], \\ \tilde{F}^3 &= \tilde{F}^2\tilde{F} = \left[\begin{array}{c|c} F^3 & F^2T\Gamma - F^3T + T\Gamma^3 - F^2T\Gamma \\ \hline 0 & \Gamma^3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} F^3 & T\Gamma^3 - F^3T \\ \hline 0 & \Gamma^3 \end{array} \right],\end{aligned}$$

и

$$\tilde{F}^p = \tilde{F}^{p-1}\tilde{F} = \left[\begin{array}{c|c} F^p & T\Gamma^p - F^pT \\ \hline 0 & \Gamma^p \end{array} \right]. \quad (\text{П.4.29})$$

Подстановка полученных степеней \tilde{F}^p матрицы \tilde{F} в ряд (П.4.25) и последующая группировка блоковых клеток матрицы $f(\tilde{F})$ приводит к (П.4.27).

□

Применим положения леммы к матричной экспоненте $e^{\tilde{F}t}$, тогда получим

$$e^{\tilde{F}t} = \left[\begin{array}{c|c} e^{Ft} & Te^{\Gamma t} - e^{Ft}\Gamma \\ \hline 0 & e^{\Gamma t} \end{array} \right]. \quad (\text{П.4.30})$$

Если теперь (П.4.30) подставить в (П.4.23), а также учесть представление (П.6.22) матриц \mathcal{C}_x^0 , \mathcal{C}_Σ^0 , \mathcal{C}_z^0 , то получим систему соотношений (2.140)–(2.142). ■

Доказательство утверждения 2.11. По определению (2.21), для матрицы $S_x(j\omega)$ спектральной плотности стохастической составляющей вектора состояния $x(t)$ можно записать:

$$S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\Delta} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{П.4.31})$$

Если в (П.4.31) подставить выражение для корреляционной матрицы $R_x(\tau)$ с учетом знака τ , то получим:

$$\begin{aligned}S_x(j\omega) &= \int_{-\infty}^0 e^{-F\tau} D_x e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{F\tau} D_x e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-(F+j\omega I)\tau} D_x d\tau + \int_0^{\infty} e^{(F-j\omega I)\tau} D_x d\tau = \\ &= \left\{ -(F+j\omega I)(F-j\omega I)^{-1} \right\} D_x\end{aligned} \quad (\text{П.4.32})$$

Умножим выражение в фигурных скобках (П.4.32) справа на единичную матрицу, записанную в форме

$$I = (F + j\omega I)(F - j\omega I)(F^2 + \omega^2 I)^{-1}, \quad (\text{П.4.32.1})$$

тогда получим с учетом коммутативности первых двух членов

$$S_x(j\omega) = -2F(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x. \quad (\text{П.4.33})$$

Для матрицы спектральных плотностей $S_y(j\omega)$ стохастической составляющей выхода системы (2.137) получим

$$S_y(j\omega) = CS_x(j\omega)C^T = -2CF(A^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x C^T. \quad \blacksquare (\text{П.4.34})$$

Доказательство утверждения 2.12. Запишем линейную алгебраическую задачу (ЛАЗ) (2.126) с учетом представления матричного и векторных компонентов:

$$\kappa + \Delta\kappa = (N + \Delta N)(\chi + \Delta\chi). \quad (\text{П.4.35})$$

Перейдем на основе (П.4.35) и (2.161) к представлению ЛАЗ в вариациях, для чего вычтем из левых и правых частей (П.4.35) соответственно левую и правую части (2.126). В результате получим матричное уравнение в вариациях (2.162). Если в (2.162) осуществить переход к согласованным векторным и матричным нормам, то получим неравенство

$$\|\Delta\kappa\| \leq \|N\| \cdot \|\Delta\chi\| + \|\Delta N\| \cdot \|\chi\| + \|\Delta N\| \cdot \|\Delta\chi\|. \quad (\text{П.4.36})$$

Правая часть равенства (П.6.36) представляет собой мажоритарную оценку (оценку сверху) нормы $\|\Delta\kappa\|$ абсолютной погрешности (вариации) $\Delta\kappa$ решения ЛАЗ (2.161). Сконструируем теперь оценку относительной погрешности $\delta\kappa$ (2.163) как функцию относительных погрешностей δ_N и δ_χ (2.163) компонентов N и χ задачи. С этой целью в предположении невырожденности матрицы N запишем исходную ЛАЗ (2.161) в инверсной форме:

$$\chi = N^{-1}\kappa, \quad (\text{П.4.37})$$

откуда в согласованных нормах получим

$$\|\chi\| \leq \|N^{-1}\| \cdot \|\kappa\|. \quad (\text{П.4.38})$$

Разрешим неравенство (П.4.38) относительно $\|\kappa\|$ – нормы вектора κ , тогда получим:

$$\frac{\|\Delta\kappa\|}{\|\kappa\|} \leq \frac{1}{\|N^{-1}\|} \|\chi\|. \quad (\text{П.4.39})$$

Разделим левую и правую части неравенства (П.4.36) соответственно на левую и правую части неравенства (П.4.39), тогда получим неравенство:

$$\frac{\|\Delta \kappa\|}{\|\kappa\|} \leq \|N\| \cdot \|N^{-1}\| \left\{ \frac{\|\Delta \chi\|}{\|\chi\|} + \frac{\|\Delta N\|}{\|N\|} + \frac{\|\Delta N\|}{\|N\|} \cdot \frac{\|\Delta \chi\|}{\|\chi\|} \right\}. \quad (\text{П.4.40})$$

Если в неравенстве (П.4.40) учесть (2.163) и (2.165), то получим неравенство (2.164) ■

Доказательство утверждения 2.13. Для доказательства воспользуемся возмущенной версией матричного условия подобия (2.173), которая принимает вид

$$(M + \Delta M)(\Lambda + \Delta \Lambda) = (F + \Delta F)(M + \Delta M). \quad (\text{П.4.41})$$

Если ограничиться вариацией (погрешностью) ΔF , позволяющей допустить справедливость малости членов $\Delta M \Delta \Lambda$ и $\Delta F \Delta M$, то матричное уравнение (П.4.41) с учетом (2.173) приводит к матричному линейному уравнению относительно вариации компонентов, записываемому в виде

$$M \Delta \Lambda + \Delta M \Lambda = \Delta F M + F \Delta M. \quad (\text{П.4.42})$$

Перейдем в (П.4.42) к столбцовой форме записи, тогда получим:

$$M(\Delta \Lambda)_i + \Delta M \Lambda_i = \Delta F M_i + F(\Delta M)_i; i = \overline{1, n}. \quad (\text{П.4.43})$$

В силу структуры столбцов $\Lambda_i = [0_{i-1}^T, \lambda_i, 0_{n-i}^T]^T$ и $\Delta \Lambda_i = [0_{i-1}^T, \Delta \lambda_i, 0_{n-i}^T]^T$ векторно-матричное уравнение (П.4.43) принимает вид

$$\Delta \lambda_i M_i = \Delta F M_i + (F - \lambda_i I)(\Delta M_i); i = \overline{1, n}. \quad (\text{П.4.44})$$

Для разрешения уравнения (П.4.44) относительно вариации $\Delta \lambda_i$ собственного значения λ_i матрицы F воспользуемся представлением матричного условия подобия (2.173) в эквивалентной форме:

$$\Lambda M^{-1} = M^{-1} F. \quad (\text{П.4.45})$$

Строчная форма представления (П.4.45):

$$\Lambda^i M^{-1} = (M^{-1})^i F, \quad (\text{П.4.46})$$

где (Λ^i, M^i) – i -я строка матрицы (Λ, M) . В силу структуры строки $\Lambda^i = [0_{i-1}^T, \lambda_i, 0_{n-i}^T]$ матричное соотношение (П.4.46) приобретает строчное векторно-матричное представление:

$$(M^{-1})^i (F - \lambda_i I_i) = 0. \quad (\text{П.4.47})$$

Учтем теперь, что матричное соотношение $M^{-1} M = I$ имеет эквивалентное строчно-столбцовое представление

$$(M^{-1})^j M_i = \delta_{ji}, \quad (\text{П.4.48})$$

где δ_{ji} – символ Кронекера [2.14, 2.29]. Умножим матричное уравнение (П.4.44), разрешенное относительно вариации $\Delta\lambda_i$, на i -ю строку M^i матрицы M слева. Тогда с учетом (П.4.47) и (П.4.48) для $\Delta\lambda_i$ получим

$$\Delta\lambda_i = (M - 1)^i \Delta F M_i = (M^i \Delta F M)_{ii}. \quad (\text{П.4.49})$$

Сконструируем вектор $\Delta\lambda$, составленный из вариаций $\Delta\lambda_i (i = \overline{1, n})$, тогда с учетом (П.4.49) получим представление этого вектора

$$\Delta\lambda = \text{col}\{\Delta\lambda_i; i = \overline{1, n}\} = \text{col}\{(M^{-1} \Delta F M)_{ii}; i = \overline{1, n}\}. \quad (\text{П.4.50})$$

Переход в (П.4.50) к согласованным нормам позволяет построить цепочку из равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} \|\Delta\lambda\| &= \|\text{col}\{(M^{-1} \Delta F M)_{ii}; i = \overline{1, n}\}\| = \|\text{diag}\{(M^{-1} \Delta F M)_{ii}; i = \overline{1, n}\}\| \leq \\ &\leq \|M^{-1} \Delta F M\| \leq \|M^{-1}\| \cdot \|\Delta F\| \cdot \|M\| = C\{M\} \|\Delta F\|. \end{aligned} \quad \blacksquare \quad (\text{П.4.51})$$

Доказательство утверждения 2.14. Пусть D_j – собственный вектор матрицы A , тогда оказывается справедливой цепочка равенств:

$$AD_j = \lambda_j D_j, \quad (\text{П.4.52})$$

$$A^2 D_j = AAD_j = \lambda_j AD_j = \lambda_j^2 D_j, \quad (\text{П.4.53})$$

и

$$A^{n-1} D_j = A^{n-2} AD_j = \lambda_j A^{n-2} D_j = K = \lambda_j^{n-1} D_j. \quad (\text{П.4.54})$$

Если теперь с использованием (П.4.52)–(П.4.54), а также (2.190) сформировать матрицу управляемости сепаратного канала управления (2.185), то получим

$$W_{\chi lj} = [C^l D_j \mid \lambda_j C^l D_j \mid \lambda_j^2 C^l D_j \mid K \mid \lambda_j^{n-1} C^l D_j] = \text{row}\{(W_{\chi lj})_i = 0; i = \overline{1, n}\} \quad \blacksquare \quad (\text{П.4.55})$$

Доказательство утверждения 2.15. Доказательство утверждения опирается на свойство матричной функции $f(A)$ от квадратной матрицы A сохранять геометрический спектр матрицы так, что выполняются равенства

$$A\xi_j = \lambda_j \xi_j, f(A)\xi_i = f(\lambda_j)\xi_j. \quad (\text{П.4.56})$$

Применим (П.4.56) к (2.191), в котором собственным вектором ξ_j матрицы является столбец D_j , а функцией от матрицы $f(A)$ является

резольвента $(sI - A)^{-1}$. Таким образом, в силу (П4.56), а также условий утверждения 2.15 становится справедливой запись

$$(sI - A)^{-1} D_j = (s - \lambda_j)^{-1} D_j. \quad (\text{П.4.57})$$

Подстановка (П.4.57) в (2.191) приводит к цепочке соотношений:

$$\Phi_{\chi l j}(s) = C^l (sI - A)^{-1} D_j = C^l (s - \lambda_j)^{-1} D_j = (s - \lambda_j)^{-1} C^l D_j = (s - \lambda_j)^{-1} \cdot 0 = 0 \quad \blacksquare \quad (\text{П.4.58})$$

Доказательство утверждения 2.16. Пусть C^l – левый собственный вектор матрицы A , соответствующий ее собственному значению λ_l , тогда выполняется система равенств:

$$C^l A = \lambda_l C^l, \quad (\text{П.4.59})$$

$$C^l A^2 = C^l A A = \lambda_l C^l A = \lambda_l^2 C^l, \quad (\text{П.4.60})$$

и

$$C^l A^{n-1} = C^l A A^{n-2} = \lambda_l C^l A^{n-2} = \dots = \lambda_l^{n-1} C^l. \quad (\text{П.4.61})$$

Если теперь с использованием (П.4.59) – (П.4.61), а также (2.190) сформировать матрицу управляемости "вход-выход" $W_{\chi l j}$ (2.185), то получим

$$W_{\chi l j} = [C^l D_j \mid \lambda_l C^l D_j \mid \lambda_l^2 C^l D_j \mid \dots \mid \lambda_l^{n-1} C^l D_j] = \text{row} \{ (W_{\chi l j})_i = 0; i = \overline{1, n} \} \quad \blacksquare \quad (\text{П.4.62})$$

Доказательство утверждения 2.1.4. Свободное движение $x(t) = x(t, x(0), g(t) \equiv 0) = x(t, x(0))$ системы (2.137) задается выражением

$$x(t, x(0)) = e^{Ft} x(0). \quad (\text{П.4.63})$$

Если в (П.4.63) осуществить переход к евклидовым векторным нормам и согласованным с ними матричным нормам, то на основании свойств SVD-разложения матричной экспоненты получим цепочку равенств и неравенств

$$\|x(t, x(0))\| = \|e^{Ft} x(0)\| = \alpha_M \{e^{Ft}\} \|x(0)\| = \|e^{Ft}\| \|x(0)\|. \quad (\text{П.4.64})$$

Воспользуемся свойством матричной функции от матрицы $f(F)$ сохранять отношение матричного подобия $M\Lambda = FM$, где $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_i; i = \overline{1, n} \}$, записываемого в одной из форм

$$Mf(\Lambda) = f(F)M, \quad f(F) = Mf(\Lambda)M^{-1}. \quad (\text{П.4.65})$$

Тогда в силу (П.4.64) оказывается справедливым равенство

$$e^{Ft} = M e^{\Lambda t} M^{-1} = M \text{diag} \{ e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n} \} M^{-1}. \quad (\text{П.4.66})$$

Подстановка (П.4.66) в (П.4.64) для $x(t, x(0))$ дает

$$\begin{aligned}\|x(t, x(0))\| &= \|Me^{\Lambda t} M^{-1} x(0)\| \leq \|M\| \cdot \|e^{\Lambda t}\| \cdot \|M^{-1}\| \cdot \|x(0)\| = \\ &= C\{M\} \|e^{\Lambda t}\| \cdot \|x(0)\| = \beta_M e^{-\lambda_M t} \cdot \|x(0)\|,\end{aligned}\quad (\text{П.4.67})$$

где $\beta_M = C\{M\}$; $\lambda_M = \min_i \{|\operatorname{Re} \lambda_i|\}$. ■

Доказательство утверждения 3.1. Зададим модальную модель с матрицами (Γ, H) в форме автономной системы

$$\dot{z}(t) = \Gamma z(t); \quad z(0); \quad \eta(t) = H z(t), \quad (\text{П.4.68})$$

а непрерывный ОУ с тройкой матриц (A, B, C) – в форме (2.39)

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t); \quad x(0); \quad y(t) = C x(t). \quad (\text{П.4.69})$$

Потребуем, чтобы управление $u(t)$ обеспечивало при выполнении условия $x(0) = M z(0)$ подобие процессов по вектору $x(t)$ состояния ОУ процессам по вектору $z(t)$ состояния ММ, записываемое в форме

$$x(t) = M z(t), \quad \forall t, \quad (\text{П.4.70})$$

где $M - (n \times n)$ – неособая матрица подобия так, что существует M^{-1} .

Дифференцирование (П.4.70) по t дает равенство

$$\dot{x}(t) = M \dot{z}(t). \quad (\text{П.4.71})$$

Подстановка в (П.4.71) выражений (П.4.68) и (П.4.69) приводит с использованием (П.4.70) к выражению

$$B u(t) = (M \Gamma - A M) z(t), \quad (\text{П.4.72})$$

которое может быть разрешено относительно управления $u(t)$ в функции $z(t)$ состояния ММ:

$$u(t) = (B^T B)^{-1} B^T (M \Gamma - A M) z(t). \quad (\text{П.4.73})$$

Таким образом, (П.4.73) является решением задачи модального управления, обеспечивающего выполнение векторного подобия (П.4.70) в форме прямого программного управления программным задатчиком желаемых траекторий в ОУ (П.4.69), порождаемых множеством начальных состояний $x(0)$. Программным задатчиком является ММ (П.4.68) с начальным состоянием $z(0) = M^{-1} x(0)$ с прямой связью по вектору состояния $z(t)$ с матрицей связей

$$K_z = (B^T B)^{-1} B^T (M \Gamma - A M). \quad (\text{П.4.74})$$

Если пара матриц (Γ, H) полностью наблюдаема, то прямая связь по вектору $z(t)$ состояния ММ может быть заменена на прямую связь по вектору $\eta(t)$ выхода ММ, для чего на матрицу M подобия необходимо наложить ограничение в форме матричного соотношения, являющегося уравнением Сильвестра

$$M\Gamma - AM = -BH. \quad (\text{П.4.75})$$

Подстановка (П.4.75) в закон (П.4.72) дает его реализацию в форме

$$u(t) = -(B^T B)^{-1} B^T BHz(t) = -Hz(t). \quad (\text{П.4.76})$$

Подставим теперь задачу поиска модального управления в форме отрицательной обратной связи по вектору состояния $x(t)$ ОУ (2.3а), (П.4.69) с матрицей связей K так, что она записывается в форме

$$u(t) = -Kx(t). \quad (\text{П.4.77})$$

Нетрудно видеть, что, если в (П.4.76) подставить (П.4.70), то получим матричное соотношение

$$H = KM, \quad (\text{П.4.78})$$

из которого следует (3.1). Подставим (П.4.78) в уравнение Сильвестра (3.2), (П.4.75), тогда с учетом (3.3) получаем матричное условие подобия матриц Γ и F в форме (3.4).

Теперь докажем корректность требования непересекаемости алгебраических векторов $\sigma\{A\} \cap \sigma\{\Gamma\} = \emptyset$ собственных значений матрицы A и Γ . Для этих целей предположим, что матрица Γ задана в диагональной форме:

$$\Gamma = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}, \quad (\text{П.4.79})$$

так что матричное уравнение Сильвестра (3.2), (П.4.75) примет вид

$$M\Lambda - AM = -BH. \quad (\text{П.4.80})$$

Решим это уравнение, для чего запишем его в столбцовой форме:

$$M\Lambda_i - AM_i = -BH_i; \quad i = \overline{1, n}. \quad (\text{П.4.81})$$

Для случая матрицы $\Gamma = \Lambda$ простой структуры столбец Λ_i имеет вид

$$\Lambda_i = [0_{i-1}^T \mid \lambda_i 0_{n-i}^T]^T, \quad (\text{П.4.82})$$

подстановка которого в (П.4.81) дает представление последнего в форме

$$(\lambda_i I - A)M_i = -BH_i, \quad (\text{П.4.83})$$

откуда для матрицы M получим

$$M = \text{row}\{M_i = -(\lambda_i I - A)^{-1} B H_i; i = \overline{1, n}\}. \quad (\text{П.4.84})$$

Таким образом, только в случае выполнения условия $\sigma\{\Gamma\}I \cap \sigma\{A\} = \emptyset$ матричные блоки $(\lambda_i I - A); i = \overline{1, n}$ оказываются обратимыми, а, следовательно, существует решение матричного уравнения Сильвестра (3.2), (П.4.75).

И, наконец, покажем справедливость требования управляемости пары (A, B) . Для этих целей воспользуемся разложением Фаддеева–Леверье матрицы $(\lambda_i I - A)^{-1}$ в (П.4.84), которое имеет вид

$$(\lambda_i I - A)^{-1} = \frac{1}{d_n(\lambda_i)} \times \\ \times [d_{n-1}(\lambda_i)I + d_{n-2}(\lambda_i)A + d_{n-3}(\lambda_i)A^2 + K + d_0(\lambda_i)A^{n-1}] \quad (\text{П.4.85})$$

где

$$\left. \begin{aligned} d_n(\lambda_i) &= \det(\lambda I - A) = \lambda_i^n + a_1 \lambda_i^{n-1} + a_2 \lambda_i^{n-2} + K + a_{n-1} \lambda_i + a_n; \\ d_{n-1}(\lambda_i) &= \lambda_i^{n-1} + a_1 \lambda_i^{n-2} + K + a_{n-2} \lambda_i + a_{n-1}; \\ d_{n-2}(\lambda_i) &= \lambda_i^{n-2} + a_1 \lambda_i^{n-3} + K + a_{n-3} \lambda_i + a_{n-2}; \\ M \\ d_1(\lambda_i) &= \lambda_i + a_1; \\ d_0(\lambda_i) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.4.86})$$

Введем обозначения

$$\bar{d}_j(\lambda_i) = \frac{d_j(\lambda_i)}{d_n(\lambda_i)}; j = \overline{0, n-1}. \quad (\text{П.4.87})$$

Используя (П.4.85) и (П.4.87), выражение (П.4.84) можно представить в форме

$$(\lambda_i I - A)^{-1} = [I | A | A^2 | K | A^{n-1}] \text{col}\{\bar{d}_j(\lambda_i); j = \overline{n-1, 0}\}. \quad (\text{П.4.88})$$

Тогда матрица M , записанная в форме (П.4.84), получает представление

$$M = -[B | AB | K | A^{n-1}B] \text{row}\{\text{col}[\bar{d}_j(\lambda_i)H_i; j = \overline{n-1, 0}]; i = \overline{1, n}\}. \quad (\text{П.4.89})$$

Из (П.4.89) следует, что $\exists M^{-1}$, если $\text{rang}[B | AB | K | A^{n-1}B] = n$, то есть пара (A, B) управляема. ■

Доказательство утверждения 3.3. Зададим желаемую структуру мод $\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ и желаемую структуру собственных векторов

$\{\xi_i; i = \overline{1, n}\}$. Сконструируем на λ_i матрицу состояния ММ, заданную в диагональной форме

$$\Gamma = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}. \quad (\text{П.4.90})$$

Сконструируем матрицу M преобразования подобия в форме

$$M = \text{row}\{M_i = \xi_i; i = \overline{1, n}\}. \quad (\text{П.4.91})$$

Подставим (П.4.90) и (П.4.91) в уравнение Сильвестра (3.2). Решим полученное уравнение относительно матрицы H , при этом, если матрица B удовлетворяет условию (3.7), то для H можно записать

$$H = B^{-1}(AM - M\Lambda). \quad (\text{П.4.92})$$

Подстановка (П.4.92) в (3.1) приводит к (3.8). ■

Доказательство утверждения 3.4. Доказательство утверждения строится на представлении матричного уравнения Сильвестра (3.2) в форме

$$\begin{bmatrix} \overline{M} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\Lambda} & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda} \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} \overline{M} & \tilde{M} \end{bmatrix} = -B \begin{bmatrix} \overline{H} & \tilde{H} \end{bmatrix}, \quad (\text{П.4.93})$$

которое декомпозируется на два матричных уравнения Сильвестра:

$$\overline{M}\overline{\Lambda} - A\overline{M} = -B\overline{H}, \quad \tilde{M}\tilde{\Lambda} - A\tilde{M} = -B\tilde{H}. \quad (\text{П.4.94})$$

Первое из этих уравнений при заданных \overline{M} и $\overline{\Lambda}$ решается относительно матрицы \overline{H} с учетом того, что $\text{rang} B = r < n$ в форме

$$\overline{H} = (B^T B)^{-1}(\overline{M}\overline{\Lambda} - A\overline{M}). \quad (\text{П.4.95})$$

Второе уравнение Сильвестра (П.4.94) при заданных $(\tilde{\Lambda}, \tilde{H})$, решается относительно матрицы \tilde{M} . Композиция матриц $\begin{bmatrix} \overline{H} & \tilde{H} \end{bmatrix}$ где \overline{H} имеет вид (П.4.95), и матриц $\begin{bmatrix} \overline{M} & \tilde{M} \end{bmatrix}$ подставленных в (3.1), дают (3.9). ■

Доказательство утверждения 3.6. Доказательство утверждения опирается на использование неравенства (3.22) и представление матрицы F в форме

$$F = M\Lambda M^{-1}. \quad (\text{П.4.94})$$

Если в (П.4.94) осуществить переход к матричным нормам, то получим неравенство

$$\|F\| \leq \|M\| \cdot \|\Lambda\| \cdot \|M^{-1}\| = C\{M\}\|\Lambda\|,$$

разрешив которое относительно $\|\Lambda\|$, получим:

$$\|\Lambda\| \geq C^{-1}\{M\}\|F\|. \quad (\text{П.4.95})$$

Учтем то обстоятельство, что все матричные нормы диагональной матрицы $\|\Lambda\| = \left\| \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\} \right\|$ совпадают с бесконечной нормой $\|\lambda\|_\infty = \left\| \text{col}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\} \right\|$ вектора λ из собственных значений матрицы F так, что (П.4.95) можно записать:

$$\|\lambda\|_\infty = \|\Lambda\| \geq C^{-1}\{M\}\|F\|. \quad (\text{П.4.96})$$

Если теперь левую часть (3.22) поделить на левую часть (П.4.96), а правую часть (3.22) – на правую часть (П.4.96), то получим:

$$\frac{\|\Delta\Lambda\|}{\|\lambda\|} = \delta_\lambda \leq C^2\{M\} \frac{\|\Delta F\|}{\|F\|} = C^2\{M\}\delta_F. \quad \blacksquare (\text{П.4.97})$$

Доказательство утверждения 3.7. Доказательство утверждения основано на использовании (3.24), (П.4.97), а также равенства $\Delta F = \Delta A$, что в итоге позволяет записать неравенство

$$\delta_\lambda \leq C^2\{M\} \frac{\|\Delta F\|}{\|F\|}. \quad (\text{П.4.98})$$

Если теперь матричное соотношение (П.4.94) разрешить относительно матрицы Λ в форме

$$\Lambda = M^{-1}FM, \quad (\text{П.4.99})$$

затем в (П.6.99) перейти к матричным нормам, то получим неравенство

$$\|\Lambda\| \leq \|M^{-1}\| \cdot \|F\| \cdot \|M\| = C\{M\}\|F\|. \quad (\text{П.4.100})$$

Неравенство (П.4.99) может быть записано в форме

$$\|F\| \geq C^{-1}\{M\}\|\Lambda\|. \quad (\text{П.4.101})$$

Нетрудно видеть, что неравенства (П.4.98) и (П.4.101) позволяют построить цепочку неравенств:

$$\delta_\lambda \leq C^2\{M\} \frac{\|\Delta A\|}{\|F\|} \leq C^3\{M\} \frac{\|\Delta A\|}{\|\Lambda\|}. \quad (\text{П.4.102})$$

Если в (П.4.102) ограничиться крайними слева и справа элементами неравенства, то получим (3.26). \blacksquare

Элементы интервальных вычислений

Определение П.5.1. Пусть числа $\underline{\rho}$, $\bar{\rho}$ такие, что $\underline{\rho}, \bar{\rho} \in R$ и при этом $\underline{\rho} \leq \bar{\rho}$, задают вещественное число ρ в параметризованной относительным параметром $q \in [0, 1]$ форме

$$\rho = \underline{\rho}(1 - q) + \bar{\rho}q, \quad ((\text{П.5.1}))$$

Тогда вещественное интервальное число $[\rho]$ образуется экстремальными реализациями этого числа

$$\underline{\rho} = \min_q \{\rho(q); q \in [0, 1]\}, \quad \bar{\rho} = \max_q \{\rho(q); q \in [0, 1]\} \quad (\text{П.5.2})$$

так, что оно может быть записано в форме

$$[\rho] = [\underline{\rho}, \bar{\rho}]. \quad \square \quad (\text{П.5.3})$$

Определение П.5.2. Интервальным комплексным числом $[\gamma = \rho + j\delta]$ называется комплексное число, у которого интервальными являются вещественная и мнимая части так, что становится справедливым представление

$$[\gamma = \rho + j\delta] = [\rho] + j[\delta], \quad (\text{П.5.4})$$

где $[\rho] = [\underline{\rho}, \bar{\rho}]; [\delta] = [\underline{\delta}, \bar{\delta}]$. \square

Ниже, в основном, рассматриваются вещественные интервальные числа.

Определение П.5.3. Интервальным вектором $[x]$ размерности n называется вектор с интервальными компонентами $[x_i] = [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ так, что становится справедливой запись

$$[x] = \text{col}\{[x_i]; i = \overline{1, n}\} \quad \square \quad (\text{П.5.5})$$

Определение П.5.4. Интервальной $(n \times m)$ -матрицей $[A]$ называется матрица, составленная из интервальных скалярных компонентов

$$[A_{ij}] = [\underline{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}], [A] = \text{row}\{\text{col}([A_{ij}]; i = \overline{1, n}); j = \overline{1, m}\} \quad (\text{П.5.6})$$

при этом оказывается справедливым представление

$$[A] = [\underline{A}, \bar{A}], \quad (\text{П.5.7})$$

где

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \text{row}\{\text{col}(\underline{A}_{ij}; i = \overline{1, n}), j = \overline{1, m}\}, \\ \overline{A} &= \text{row}\{\text{col}(\overline{A}_{ij}; i = \overline{1, n}), j = \overline{1, m}\} \end{aligned} \quad \square \quad (\text{П.5.8})$$

Определение П.5.5. Произведением

$$[a] \cdot [b] = [c] \quad (\text{П.5.9})$$

интервальных чисел $[a] = [\underline{a}, \overline{a}]$ и $[b] = [\underline{b}, \overline{b}]$ называется интервальное число $[c] = [\underline{c}, \overline{c}]$, граничные значения которого \underline{c} и \overline{c} вычисляются в силу соотношений

$$\underline{c} = \min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, \quad (\text{П.5.10})$$

$$\overline{c} = \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}. \quad \square \quad (\text{П.5.11})$$

Определение П.5.6. Суммой

$$[a] + [b] = [d] \quad (\text{П.5.12})$$

интервальных чисел $[a] = [\underline{a}, \overline{a}]$ и $[b] = [\underline{b}, \overline{b}]$ называется интервальное число $[d] = [\underline{d}, \overline{d}]$, граничные значения которого \underline{d} и \overline{d} вычисляются с помощью соотношений

$$\underline{d} = \min\{\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \overline{b}, \overline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}\} = \underline{a} + \underline{b}, \quad \square \quad (\text{П.5.13})$$

$$\overline{d} = \max\{\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \overline{b}, \overline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}\} = \overline{a} + \overline{b}.$$

Определение П.5.7. Частным от деления

$$\frac{[a]}{[b]} = [f] \quad (\text{П.5.14})$$

интервальных чисел $[a] = [\underline{a}, \overline{a}]$ и $[b] = [\underline{b}, \overline{b}]$ называется интервальное число $[f] = [\underline{f}, \overline{f}]$, граничные значения которого \underline{f} и \overline{f} вычисляются в силу выражений

$$\underline{f} = \min\left\{\frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\overline{b}}, \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right\}, \quad \square \quad (\text{П.5.15})$$

$$\overline{f} = \max\left\{\frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\overline{b}}, \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right\}.$$

Определение П.5.8. Разностью

$$[a] - [b] = [h] \quad (\text{П.5.16})$$

интервальных чисел $[a] = [\underline{a}, \overline{a}]$ и $[b] = [\underline{b}, \overline{b}]$ называется интервальное число $[h] = [\underline{h}, \overline{h}]$, граничные значения которого \underline{h} и \overline{h} определяются с помощью выражений

$$\begin{aligned} \underline{h} &= \min\{\underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}\}; \\ \bar{h} &= \max\{\underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}\}. \end{aligned} \quad \square \quad (\text{П.5.17})$$

Определение П.5.9. Фиксированное число g имеет интервальное представление $[g] = [\underline{g}, \bar{g}]$, которое характеризуется выполнением равенства

$$\underline{g} \equiv \bar{g}. \quad \square \quad (\text{П.5.18})$$

Утверждение П.5.1. Частное от деления интервального числа $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$ на самое себя является интервальное число $[1_a] = [\underline{1}_a, \bar{1}_a]$

$$\frac{[a]}{[a]} = [1_a], \quad (\text{П.5.19})$$

граничные значения которого $\underline{1}_a$ и $\bar{1}_a$ в силу (П.5.15) вычисляются с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \underline{1}_a &= \min\left\{\frac{\underline{a}}{\bar{a}}, \frac{\underline{a}}{\underline{a}}, \frac{\bar{a}}{\underline{a}}, \frac{\bar{a}}{\bar{a}}\right\}, \\ \bar{1}_a &= \max\left\{\frac{\underline{a}}{\bar{a}}, \frac{\underline{a}}{\underline{a}}, \frac{\bar{a}}{\underline{a}}, \frac{\bar{a}}{\bar{a}}\right\}. \end{aligned} \quad \blacksquare \quad (\text{П.5.20})$$

Утверждение П.5.2. Разностью интервальных чисел $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$ и $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$

$$[a] - [a] = [0_a] \quad (\text{П.5.21})$$

является интервальное число $[0_a] = [\underline{0}_a, \bar{0}_a]$, граничные значения которого $\underline{0}_a$ и $\bar{0}_a$ в силу (П.5.17) задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \underline{0}_a &= \min\{\underline{a} - \underline{a}, \underline{a} - \bar{a}, \bar{a} - \underline{a}, \bar{a} - \underline{a}\}, \\ \bar{0}_a &= \max\{\underline{a} - \underline{a}, \underline{a} - \bar{a}, \bar{a} - \underline{a}, \bar{a} - \underline{a}\}. \end{aligned} \quad \blacksquare \quad (\text{П.5.22})$$

Определение П.5.10. Медианой $mid[a]$ интервального числа $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$ называется фиксированное число a_0 , задаваемое соотношением

$$mid[a] = a_0 = 0.5(\bar{a} + \underline{a}). \quad \square \quad (\text{П.5.23})$$

Определение П.5.11. Интервальным компонентом $wid[a]$ интервального числа $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$ называется интервальное число $[\Delta a] = [\underline{\Delta a}, \bar{\Delta a}]$, граничные значения которого $\underline{\Delta a}$ и $\bar{\Delta a}$ задаются с помощью соотношений

$$\underline{\Delta a} = \underline{a} - a_0, \quad \overline{\Delta a} = \overline{a} - a_0. \quad (\text{П.5.24})$$

так, что $\text{wid}[a] = [\Delta a] = [\underline{\Delta a} = \underline{a} - a_0, \overline{\Delta a} = \overline{a} - a_0]$. \square

Утверждение П.5.3. Интервальное число $[a] = [\underline{a}, \overline{a}]$ в силу (П.5.23), (П.5.24), а также (П.5.13) и (П.5.18) представимо аддитивной композицией

$$[a] = a_0 + [\Delta a], \quad (\text{П.5.25})$$

где $a_0 = \text{mid}[a]$, $[\Delta a] = \text{wid}[a]$. \blacksquare

Определение П.5.12. Медианой $\text{mid}[a]$ интервальной $(n \times m)$ – матрицы $[A] = [\underline{A}, \overline{A}]$ называется матрица A_0 с фиксированными скалярными компонентами A_{0ij}

$$A_0 = \text{row}\{\text{col}(A_{0ij}; i = \overline{1, n}), j = \overline{1, m}\}, \quad (\text{П.5.26})$$

где элементы A_{0ij} матрицы A_0 задаются соотношением

$$A_{0ij} = \text{mid}\{[A_{ij}] = [\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}]\} = 0.5(\underline{A}_{ij} + \overline{A}_{ij}). \quad \square \quad (\text{П.5.27})$$

Определение П.5.13. Интервальным матричным компонентом $\text{wid}[A]$ интервальной матрицы $[A] = [\underline{A}, \overline{A}]$ называется интервальная матрица $[\Delta A] = [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}]$, граничные реализации которой $\underline{\Delta A}$ и $\overline{\Delta A}$ задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \underline{\Delta A} &= \underline{A} - A_0 = \text{col}\{\text{row}(\underline{\Delta A}_{ij} = \underline{A}_{ij} - A_{0ij}; i = \overline{1, n}), j = \overline{1, m}\}, \\ \overline{\Delta A} &= \overline{A} - A_0 = \text{col}\{\text{row}(\overline{\Delta A}_{ij} = \overline{A}_{ij} - A_{0ij}; i = \overline{1, n}), j = \overline{1, m}\}. \end{aligned} \quad (\text{П.5.28})$$

так, что $\text{wid}[A] = [\Delta A] = [\underline{\Delta A} = \underline{A} - A_0, \overline{\Delta A} = \overline{A} - A_0]$. \square

Утверждение П.5.4. Интервальная $(n \times m)$ – матрица $[A] = [\underline{A}, \overline{A}]$ в силу (П.5.26), (П.5.28), а также (П.5.27) и (П.5.8) представима в аддитивной форме

$$[A] = A_0 + [\Delta A], \quad (\text{П.5.29})$$

где $A_0 = \text{mid}[A]$, $[\Delta A] = \text{wid}[A]$. \blacksquare

Определение П.5.14. Произведением интервальных $(n \times m)$ – матрицы $[A] = [\underline{A}, \overline{A}]$ и $(m \times k)$ – матрицы $[B] = [\underline{B}, \overline{B}]$

$$[A] \times [B] = [C] \quad (\text{П.5.30})$$

называется интервальная $(n \times k)$ – матрица $[C] = [\underline{C}, \overline{C}]$ с интервальными скалярными элементами $[C_{il}] = [\underline{C}_{il}, \overline{C}_{il}]$, вычисляемыми в силу соотношений

$$[C_{il}] = \sum_{j=1}^m [A_{ij}] \cdot [B_{jl}], \quad i = \overline{1, n}, l = \overline{1, k}, \quad (\text{П.5.31})$$

где произведение $[A_{ij}] \cdot [B_{jl}]$ интервальных чисел определяется в соответствии с (П.5.9)–(П.5.11), а суммирование этих произведений осуществляется в соответствии с (П.5.12), (П.5.13).

Определение П.5.15. Угловой реализацией $(A_c)_\nu$ $(n \times m)$ -интервальной матрицы $[A] = [\underline{A}, \overline{A}] = A_0 + [\Delta A]$, получаемой в результате ν -й выборки $\nu = \overline{1, 2^{nm}}$ из множества мощности, равной (nm) пар $\{\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}\}, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$ граничных значений интервальных скалярных компонентов $[A_{ij}]$ матрицы $[A]$, называется матрица

$$(A_c)_\nu = \text{row}\{\text{col}((A_{cij})_\nu \in \{\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}\}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m})\} \quad (\text{П.5.32})$$

с фиксированными на этой реализации компонентами. \square

Утверждение П.5.5. Пусть $[\Delta A] = [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}]$ – интервальный матричный компонент матрицы $[A]$ в силу факторизации в форме (П.5.29), тогда интервальные компоненты $[\Delta A_{ij}] = [\underline{\Delta A}_{ij}, \overline{\Delta A}_{ij}]$, $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$, обладают тем свойством, что

$$|\underline{\Delta A}_{ij}| = |\overline{\Delta A}_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}, \quad (\text{П.5.33})$$

которое выполняется в силу (П.5.27), (П.5.28). \blacksquare

Утверждение П.5.6. Угловые реализации $(\Delta A_c)_\nu$ и $(\Delta A_c)_\mu$ $(n \times m)$ -интервальной матрицы $[\Delta A] = [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}]$ с граничными компонентами $\underline{\Delta A}$ и $\overline{\Delta A}$ (П.5.28), полученные в результате ν -й и μ -й выборок $\nu, \mu = \overline{1, 2^{nm}}$ в силу (П.5.32) и свойства (П.5.33), обладают равными матричными нормами так, что выполняется равенство

$$\|(\Delta A_c)_\nu\| = \|(\Delta A_c)_\mu\|; \quad \nu, \mu = \overline{1, 2^{nm}} \quad \blacksquare \quad (\text{П.5.34})$$

Определение П.5.16. Интервальным полиномом $[D(z)]$ степени n называется полином, коэффициенты которого являются интервальными числами так, что он принимает вид

$$[D(z)] = [a_0]z^n + [a_1]z^{n-1} + [a_2]z^{n-2} + \dots + [a_{n-1}]z + [a_n] \quad (\text{П.5.35})$$

где $[a_i] = [\underline{a}_i, \overline{a}_i]; i = \overline{0, n}$. \square

Определение П.5.17. Интервальным характеристическим полиномом (ИХП) $[D(\lambda)]$ интервальной $(n \times n)$ -матрицы $[A] = [\underline{A}, \overline{A}]$ называется интервальный полином степени n , получаемый в силу

определения характеристического полинома произвольной $(n \times n)$ -квадратной матрицы

$$\det(\lambda I - [A]) = [a_0]\lambda^n + [a_1]\lambda^{n-1} + [a_2]\lambda^{n-2} + \dots + [a_{n-1}]\lambda + [a_n] \quad (\text{П.5.36})$$

так, что

$$[D(\lambda)] = \det(\lambda I - [A]). \quad \square$$

Приведем несколько способов вычисления коэффициентов ИХП интервальной $(n \times n)$ -матрицы $[A]$.

Способ 1. Способ основан на обобщенной теореме Ф. Виета. Пусть спектр собственных значений интервальной матрицы $[A]$

$$\sigma\{[A]\} = \{[\lambda_i] = [\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i] : \det(\lambda I - [A]) = 0; i = \overline{1, n}\} \quad (\text{П.5.37})$$

известен, тогда ИХП (П.5.36) представим в форме

$$[D(\lambda)] = [a_0]\lambda^n + [a_1]\lambda^{n-1} + \dots + [a_{n-1}]\lambda + [a_n] = \prod_{i=1}^n (\lambda - [\lambda_i]), \quad (\text{П.5.38})$$

где $[a_0] = [1, 1] = 1$.

Обобщенная теорема Виета устанавливает связь собственных значений $[\lambda_i]$ с коэффициентами $[a_i]; i = \overline{1, n}$ в форме

$$[a_1] = -\sum_{i=1}^n \lambda_i = -tR[A]; \quad (\text{П.5.39})$$

$$[a_2] = \sum_{\substack{i1=1 \\ i2=2 \\ i1 < i2}}^n [\lambda_{i1}] \cdot [\lambda_{i2}]; \quad (\text{П.5.40})$$

$$[a_3] = -\sum_{\substack{i1=1 \\ i2=2 \\ i3=3 \\ i1 < i2 < i3}}^n [\lambda_{i1}] \cdot [\lambda_{i2}] \cdot [\lambda_{i3}]; \quad (\text{П.5.41})$$

и

$$[a_{n-1}] = (-1)^{n-1} \sum_{\substack{i1=1 \\ i2=2 \\ \vdots \\ i(n-1)=n-1 \\ i1 < i2 < \dots < i(n-1)}}^n [\lambda_{i1}] \cdot [\lambda_{i2}] \cdot \dots \cdot [\lambda_{i(n-1)}]; \quad (\text{П.5.42})$$

$$[a_n] = (-1)^n \prod_{i=1}^n [\lambda_i]. \quad \square \quad (\text{П.5.43})$$

Способ 2. Способ Г. Крамера главных миноров.

$$[a_1] = -tR[A] = -\left[\sum_{i=1}^n A_{ii}, \sum_{i=1}^n \bar{A}_{ii} \right]; \quad (\text{П.5.44})$$

$$[a_k] = (-1)^k \sum_{i=1}^k [M_{ii}], \quad (\text{П.5.45})$$

где $[M_{ii}]$ – алгебраическое дополнение (ii) -го элемента $[A_{ii}]$ матрицы $[A]$;

$$[a_n] = (-1)^n \det[A]. \quad \square \quad (\text{П.5.46})$$

Способ 3. Способ У.Ж.Ж. Леверье.

$$[a_k] = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [a_{i-1}] \text{tr}[A^{k-i+1}]; k = \overline{1, n}; \quad (\text{П.5.47})$$

$$[a_0] = 1. \quad \square$$

Способ 4. Способ Д.К. Фаддеева:

$$[a_k] = -\frac{1}{k} \text{tr}\{[A][H_{k-1}]\}; k = \overline{1, n}, \quad (\text{П.5.48})$$

где

$$[H_k] = [A][H_{k-1}] + [a_k]I; [H_0] = I. \quad \square \quad (\text{П.5.49})$$

Свойство строгой положительной вещественности

Рассмотрим передаточную функцию вида

$$H(s) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \Lambda + b_o}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \Lambda + a_0}. \quad (\text{П6.1})$$

Критерий строгой положительной вещественности: передаточная функция $H(s)$ является строго положительно вещественной (СПВ-функцией) только в том случае, если

(У1) она не имеет полюсов в области $\text{Re}[s] \geq 0$;

(У2) $\text{Re}[H(j\omega)] > 0$ для всех $-\infty < \omega < \infty$;

(У3) $\lim \omega^2 \text{Re}[H(j\omega)] > 0$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Для пояснения приведенного критерия рассмотрим передаточную функцию апериодического звена первого порядка

$$H_A(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad (\text{П6.2})$$

где $k > 0$ – коэффициент усиления, а $T > 0$ – постоянная времени. Покажем, что передаточная функция (П6.2) удовлетворяет условиям (У1)–(У2). Действительно, единственный полюс функции (П6.2) $s = -1/T$ лежит вне области $\text{Re}[s] > 0$. Как известно, частотный годограф апериодического звена первого порядка полностью лежит в четвертом квадранте комплексной плоскости, что гарантирует выполнение условия (У2) (см. рис. П6.1). Наконец, рассмотрим частотную передаточную функцию звена:

$$H_A(j\omega) = \frac{k}{jT\omega + 1} = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Тогда

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \left(\frac{k}{T^2\omega^2 + 1} \right) = \frac{k}{T^2} > 0,$$

что означает выполнение условия (У3).

Таким образом, можно сделать вывод, что СПВ-функции обладают почти такими же частотными свойствами, что и звено первого порядка. Так, их частотные годографы лежат в правой полуплоскости (следовательно, фазовый сдвиг, вносимый динамическим звеном с такой передаточной функцией, не превышает 90°). Кроме того, скорость убывания вещественной части частотной передаточной функции при $\omega \rightarrow \infty$ не быстрее, чем у $1/\omega^2$. Из

сделанного вывода видно, что класс строго положительно вещественных передаточных функций является достаточно узким, и далеко не все линейные модели реальных объектов будут удовлетворять условиям (У1)–(У2).

Отметим следующие свойства строго положительно вещественных передаточных функций:

1) если $H(s) = A(s)/B(s)$ является СПВ-функцией, то оба многочлена $A(s)$ и $B(s)$ гурвицевы, а их степени отличаются не больше, чем на единицу;

2) если $H(s)$ является СПВ-функцией, то $1/H(s)$ – также СПВ-функция;

3) если $H_1(s)$ и $H_2(s)$ – СПВ-функции, то $\alpha H_1(s) + \beta H_2(s)$ – также СПВ-функция для любых положительных α и β ;

4) если $H_1(s)$ и $H_2(s)$ являются передаточными функциями прямой и отрицательной обратной связи, то передаточная функция замкнутой системы $H(s) = H_1(s)/(1 + H_1(s)H_2(s))$ также является СПВ-функцией.

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Свойства многомерных адаптивных систем управления

Для исследования свойств адаптивной системы, состоящей из объекта (4.50), (4.51), эталонной модели (4.53), (4.54), настраиваемого регулятора (4.59) и алгоритма адаптации (4.61), используем функцию Ляпунова

$$V(e, q) = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{\beta}{2\gamma} q^T q. \quad (\text{П7.1})$$

Неизвестный положительный параметр β может быть включен в выражение для функции Ляпунова, так как в теоремах об устойчивости используется только факт существования функции Ляпунова, но не требуется точного вычисления ее значений.

Производная функции (П7.1) в силу уравнений модели ошибки

$$\dot{e} = A_M e + \beta h \omega^T q, \quad (\text{П7.2})$$

$$\dot{q} = -\gamma \omega h^T P e \quad (\text{П7.3})$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \dot{e}^T P e + \frac{1}{2} e^T P \dot{e} + \frac{\beta}{\gamma} q^T \dot{q} = \\ &= -e^T (A_M^T P + P A_M) e + \beta q^T \omega h^T P e - \beta q^T \omega h^T P e = -e^T Q e \leq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство означает устойчивость по Ляпунову нулевого состояния равновесия модели ошибки (П7.2), (П7.3) (теорема П2.1 из приложения 2) и справедливость предела (4.63) (теорема П2.4 из приложения 2).

Для исследования свойств нелинейной робастной системы, состоящей из объекта (4.50), (4.51), эталонной модели (4.53), (4.54) и нелинейного регулятора (4.72), используем функцию Ляпунова

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T P e. \quad (\text{П7.4})$$

Подставляя управление (4.72) в уравнение (4.57) и добавляя внешнее возмущение δ , получаем модель ошибки замкнутой системы нелинейного робастного управления

$$\dot{e} = A_M e + \beta h (\omega^T q - \gamma |\omega|^2 h^T P e + \delta). \quad (\text{П7.5})$$

Вычисляя производную функции (П7.4) в силу уравнения (П7.5), получаем

$$\dot{V} = -e^T Q e + \beta q^T \omega h^T P e - \gamma |\omega|^2 |h^T P e|^2 + e^T P h \delta.$$

Переходя к нормам и выделяя в правой части неравенства полный квадрат разности, получим:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\lambda_Q |e|^2 + \beta |q| \|\omega\| |h^T P e| - \gamma |\omega|^2 |h^T P e|^2 + |e| \|Ph\| \bar{\delta} = \\
&= -\frac{1}{2} \lambda_Q |e|^2 - \left(\gamma |\omega|^2 |h^T P e|^2 - \beta |q| \|\omega\| |h^T P e| + \frac{\beta}{4\gamma} |q|^2 \right) + \frac{\beta}{4\gamma} |q|^2 - \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} \lambda_Q |e|^2 - |e| \|Ph\| \bar{\delta} + \frac{1}{2\lambda_Q} |Ph|^2 \bar{\delta}^2 \right) + \frac{1}{2\lambda_Q} |Ph|^2 \bar{\delta}^2 = \\
&= -\frac{1}{2} \lambda_Q |e|^2 - \left(\sqrt{\gamma} |\omega| |h^T P e| - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} |q| \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda_Q}{2}} |e| - \frac{1}{\sqrt{2\lambda_Q}} |Ph| \bar{\delta} \right)^2 + \\
&\quad + \frac{\beta}{4\gamma} |q|^2 + \frac{1}{2\lambda_Q} |Ph|^2 \bar{\delta}^2,
\end{aligned}$$

где λ_Q – минимальное собственное значение матрицы Q , а $\bar{\delta}$ – верхняя оценка ограниченного возмущения δ (т.е. $|\delta(t)| \leq \bar{\delta}$ для всех $t \geq 0$). Усиливая неравенство, пренебрежем квадратными членами. Окончательно получим

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \lambda_Q |e|^2 + \frac{\beta}{4\gamma} |q|^2 + \frac{1}{2\lambda_Q} |Ph|^2 \bar{\delta}^2 \quad (\text{П7.6})$$

или

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda_Q}{\lambda_P} V + \frac{\beta}{4\gamma} |q|^2 + \frac{1}{2\lambda_Q} |Ph|^2 \bar{\delta}^2 \quad (\text{П7.7})$$

(переход от выражения (П7.6) к формуле (П7.7) осуществлен с использованием неравенства Релея). Из (П7.6) видно, что при нарушении неравенства (4.73) производная функции Ляпунова становится отрицательной. Это доказывает сходимость ошибки слежения к предельному установившемуся множеству (4.73). Проинтегрировав неравенство (П7.7), получим, что скорость сходимости к предельному множеству является экспоненциальной (решение аналогичной задачи приведено в п. 5.1.4). Наконец, обнулив в выражении (4.73) величину $\bar{\delta}$, убеждаемся, что предельное значение установившейся ошибки может быть сделано произвольно малым за счет увеличения коэффициента нелинейной обратной связи γ .

ПРИЛОЖЕНИЕ 8.

Расчетное задание по курсу «Интеллектуальное управление в условиях неопределенности»

Для непрерывного объекта управления, заданного в виде передаточной функции (ПФ) «вход-выход (ВВ)» НОУ

$$\Phi(s, q) = \frac{b_0(1+q_1)s + b_1(1+q_2)}{(a_0(1+q_3)s + a_1(1+q_4))(a_2(1+q_5)s^2 + a_3(1+q_6)s + a_4(1+q_7))},$$

где $q_{10} = q_{20} = q_{30} = q_{40} = q_{50} = q_{60} = q_{70} = 0$ – номинальные значения параметров q_{j0} , $j = \overline{1,7}$:

1. Построить МТЧ **непрерывного ОУ**

$$\dot{x}(t, q) = A(q)x(t, q) + B(q)u(t); y(t, q) = C(q)x(t, q) + D(q)u(t, q)$$

в требуемом базисе; произвести ранжирование параметров q_j по потенциальной чувствительности к ним выхода ОУ с использованием матрицы управляемости агрегированной системы.

2. Перейти к дискретному описанию ОУ

$$x(k+1, q) = \bar{A}(q)x(k, q) + \bar{B}(q)u(k); y(k, q) = \bar{C}(q)x(k, q) + \bar{D}(q)u(k)$$

указанным в задании методом. Построить МТЧ **дискретного ОУ** к вариации интервала дискретности.

3. Синтезировать закон управления (ЗУ) вида $u(t) = k_g g(t) - kx(t)$, который должен обеспечивать **системе**

$$\dot{x}(t, q) = F(q)x(t, q) + G(q)g(t); y(t, q) = C(q)x(t, q) + D(q)u(t, q)$$

$$F(q) = A(q) - B(q)K, G(q) = B(q)K_g,$$

образованной объединением НОУ и ЗУ равенство входа $g(t)$ и выхода $y(t)$ в неподвижном состоянии при номинальных значениях параметров с помощью:

- матрицы k_g прямой связи по входу $g(t)$;
- матрицы k обратной связи по состоянию $x(t)$

распределение мод Баттерворта с характеристической частотой ω_0 .

Построить МТЧ спроектированной системы по каждому из параметров и для значения $|\Delta q_j| = 0.3$; выделить доминирующие параметры по степени их влияния на величину σ перерегулирования и длительность t_n переходного процесса;

4. Построить матрицу функций модальной чувствительности и выделить неблагоприятное сочетание вариаций параметров;

5. Получить ВМО НОУ с интервальными параметрами

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + [B]u(t); y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

$$[A] = A_0 + [\Delta A], [B] = B_0 + [\Delta B],$$

с использованием **интервальной арифметики** на основе интервальной реализации параметров q_j , записываемых в форме $[q_j] = [\underline{q_j}, \overline{q_j}]$ при заданных граничных (угловых) значениях.

6. Синтезировать закон медианного модального управления, базовый алгоритм которого дополняется контролем нормы $\|F_0\|$ медианной составляющей интервальной матрицы $[F]$ спроектированной системы с последующим вычислением оценки $\delta_I F$, вычислить матрицы k_g и k .

Закон управления (ЗУ) вида $u(t) = k_g g(t) - kx(t)$ должен доставлять системе

$$\dot{x}(t) = [F]x(t) + [G]g(t); y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$[F] = [A] - [B]K = F_0 + [\Delta F], [G] = [B]K_g = G_0 + [\Delta G],$$

образованной объединением НОУ и ЗУ равенство входа $g(t)$ и выхода $y(t)$ в неподвижном состоянии при номинальных значениях параметров с помощью:

- матрицы k_g прямой связи по входу $g(t)$;

- матрицы k обратной связи по состоянию $x(t)$

распределение мод Баттерворта с характеристической частотой ω_0 , которая гарантирует достижение значение оценки относительной интервальности матрицы состояния системы

$\delta_I F = \frac{\|\Delta F\|}{\|F_0\|}$ не больше заданной $\delta_{IR} F$. Исследовать свойство

робастности ЗС, полученной в п.6, с помощью метода В.Л. Харитонов.

ПРИМЕЧАНИЕ. При формировании интервального ВМО ВСВ НОУ следует стремиться к тому, чтобы интервальной была бы **только матрица состояния** НОУ.

7. Оценить алгебраическую реализуемость неадаптивного или адаптивного управления, обеспечивающего параметрическую инвариантность выхода системы, и синтезировать его (по выбору). Величина параметрической неопределенности ОУ характеризуется величиной, указанной в табл. П8.1.

Таблица П.8.1

Варианты	А	Б	В	Г
Исходные данные				
1.1. Значения параметров ПФ	$b_0 = 3;$ $b_1 = 0.4;$ $a_0 = 2;$ $a_1 = 0.6;$ $a_2 = 0;$ $a_3 = 6;$ $a_4 = 10$	$b_0 = 0;$ $b_1 = 0.67;$ $a_0 = 0;$ $a_1 = 1;$ $a_2 = 16;$ $a_3 = 3;$ $a_4 = 10$	$b_0 = 0;$ $b_1 = 2;$ $a_0 = 5;$ $a_1 = 1;$ $a_2 = 0;$ $a_3 = 2.5;$ $a_4 = 25$	$b_0 = 1;$ $b_1 = 0.25;$ $a_0 = 0;$ $a_1 = 1;$ $a_2 = 4;$ $a_3 = 3;$ $a_4 = 1$
1.2. Базис описания НОУ	канонический управляемый	канонический наблюдаемый	физический	произвольный
2.1. Интервал дискретности	$\Delta t = 0.05c$	$\Delta t = 0.03c$	$\Delta t = 0.02c$	$\Delta t = 0.07c$
2.2. Метод перехода к ДОУ	заменой производной отношением конечных малых	с помощью интегральной модели ВСВ НОУ	заменой производной отношением конечных малых	произвольный
3. Характеристическая частота	$\omega_0 = 3c^{-1}$	$\omega_0 = 5c^{-1}$	$\omega_0 = 10c^{-1}$	$\omega_0 = 15c^{-1}$
5. Граничные (угловые) значения параметра q_j	$\underline{q_j} = -0.2$ $\overline{q_j} = 0.2$	$\underline{q_j} = -0.3$ $\overline{q_j} = 0.3$	$\underline{q_j} = -0.4$ $\overline{q_j} = 0.4$	$\underline{q_j} = -0.5$ $\overline{q_j} = 0.5$
6. Относительная интервальность матрицы состояния системы	$\delta_{IR} F = 0.02$	$\delta_{IR} F = 0.03$	$\delta_{IR} F = 0.04$	$\delta_{IR} F = 0.05$
7. Величина параметрической неопределенности	$\underline{q_j} = -0.2$ $\overline{q_j} = 0.2$	$\underline{q_j} = -0.3$ $\overline{q_j} = 0.3$	$\underline{q_j} = -0.4$ $\overline{q_j} = 0.4$	$\underline{q_j} = -0.5$ $\overline{q_j} = 0.5$

Таблица П.8.2

№ варианта	НОМЕРА ПУНКТОВ ЗАДАНИЯ							
	1.1	1.2	2.1	2.2	3	5	6	7
1	А	А	А	А	А	А	А	А
2	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б	Б
3	В	В	В	В	В	В	В	В
4	Г	Г	Г	Г	Г	Г	Г	Г
5	Б	Б	А	А	А	А	А	А
6	А	А	Б	Б	А	А	А	А
7	А	А	А	А	Б	Б	А	А
8	А	А	А	А	А	А	Б	Б
9	В	В	А	А	А	А	А	А
10	А	А	В	В	А	А	А	А
11	А	А	А	А	В	В	А	А
12	А	А	А	А	А	А	В	В
13	Г	Г	А	А	А	А	А	А
14	А	А	Г	Г	А	А	А	А
15	А	А	А	А	Г	Г	А	А
16	А	А	А	А	А	А	Г	Г
17	Б	Б	Б	А	А	А	А	А
18	А	А	Б	Б	Б	А	А	А
19	А	А	А	А	Б	Б	Б	А
20	А	А	А	А	А	Б	Б	Б
21	В	В	В	А	А	А	А	А
22	А	В	В	В	А	А	А	А
23	А	А	В	В	В	А	А	А
24	А	А	А	В	В	В	А	А
25	А	А	А	А	А	В	В	В
26	Г	Г	Г	А	А	А	А	А
27	А	Г	Г	Г	А	А	А	А
28	А	А	Г	Г	Г	А	А	А
29	А	А	А	Г	Г	Г	А	А
30	А	А	А	А	Г	Г	Г	А
31	А	А	А	А	А	Г	Г	Г
32	Б	Б	Б	Б	А	А	А	А
33	А	А	Б	Б	Б	А	А	А
34	А	А	Б	Б	Б	Б	А	А
35	А	А	А	А	Б	Б	Б	Б
36	В	В	В	В	А	А	А	А
37	А	А	В	В	В	А	А	А
38	А	А	В	В	В	В	А	А
39	А	А	А	В	В	В	В	А
40	А	А	А	А	В	В	В	В

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1973.
2. Дударенко Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Теоретические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: Учебное пособие/ Под ред. А.В.Ушакова – СПб: СПбГУИТМО, 2009.
3. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. – СПб: Наука, 2003.
4. Никифоров В.О., Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. – СПб: СПбГИТМО(ТУ), 2002.
5. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб: Наука, 2000.
6. Слита О.В., Ушаков А.В. Обеспечение инвариантности выхода непрерывной системы относительно экзогенных сигнальных и эндогенных параметрических возмущений: алгебраический подход// Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 4. С. 24-32.
7. Ушаков А.В. Обобщенное модальное управление.// Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т.43. № 3. С.8–16.
8. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах. – М.: Наука, 1990.
9. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В.В. Григорьев, В.Н. Дроздов, В.В. Лаврентьев, А.В.Ушаков. – Л.: Машиностроение, Ленингр.отд-ние, 1983.
10. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. – М.: Наука, 1981.
11. Ушаков А.В. Условия нулевой параметрической чувствительности в задаче слежения. // Автоматика и телемеханика. 1981. № 9. С.30–37.
12. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Диф. уравн. 1978. Т.14. № 11. С. 2086–2088.
13. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование/ Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
14. Томович Р., Вукобратович М. Общая теория чувствительности. – М.: Сов. радио, 1972.
15. *Eslami M. Theory of Sensitivity in Dynamic Systems: An Introduction. Berlin: Springer-Verlag, 1994.*