Минимизация области параметрической неопределенности для ремонтируемой системы

В. В. Федоренко
ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»
fovin_25@mail.ru

А. М. Винограденко
ФГКОУ ВО «Военная академия связи имени маршала С.М. Буденного»
vinogradenkoao@rambler.ru

В. В. Самойленко[1], И. В. Самойленко[2], И. К. Шарипов[3]
ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет»
[1]vvs_stv@mail.ru, [2]stvirishka@mail.ru, [3]sh-ik@mail.ru

Аннотация. **Обоснована эллипсоидальная аппроксимация для области параметрической неопределенности состояния технической системы с учетом погрешностей измерения. Представлена модель аффинного преобразования области неопределенности при ее эволюции в пространстве параметров при ремонте системы. Предложен метод динамического программирования для минимизации области параметрической неопределенности системы с учетом классов точности ремонтных средств.**

Keywords: погрешности измерения; параметрическая неопределенность; аффинные преобразования; динамическое программирование

I. Введение

В настоящее время решение на восстановление неработоспособной технической системы (ТС) принимается по результатам оценки состояния ТС с учетом выделенных для этой цели восстановительных ресурсов и сводится к выбору того или иного метода параметрического синтеза [1]. Однако известные методы параметрического синтеза технических систем [2] предусматривают точное знание либо значений параметров, характеризующих состояние системы, либо вероятностных характеристик дестабилизирующих факторов, приводящим к производственным и эксплуатационным флуктуациям параметров системы [3].

Наряду с традиционным вероятностным подходом к описанию неопределенных (неточно известных величин) в последнее время развивается гарантированный, или минимаксный подход [4]. С точки зрения этого подхода неопределенная величина задается областью ее возможных значений. По сравнению с вероятностным подходом гарантированный подход в ряде случаев обладает определенными преимуществами, так как не требует знания вероятностных характеристик неопределенных факторов, которые редко бывают точно известны на практике.

Проведенный анализ литературы [5] показал, что наиболее часто результаты реальных измерений при наличии погрешностей распределены по нормальному закону. Поэтому целесообразно аппроксимировать эллипсоидом область неопределенности состояния объекта, в которой с заданной вероятностью находятся значения измеряемых выходных параметров. [6].

II. Модель аффинного преобразования области неопределенности

Исходная оценка состояния ТС, подлежащей восстановлению, характеризуется некоторой областью неопределенности $\Theta_н$ в пространстве параметров. Размеры этой области определяются погрешностью проведенных измерений. В общем случае начальный вектор параметров, характеризующих состояние системы $\theta(\omega_0)$, не фиксирован и принадлежит заданному начальному множеству (области неопределенности) в m-мерном пространстве: $\theta(\omega_0) = \Theta_н$.

Области неопределенности выгодно аппроксимировать эллипсоидами $E\left(\theta_z^{(s)}, Q_s\right)$ по ряду причин [7]:

- при линейных преобразованиях эллипсоиды остаются эллипсоидами;
- эллипсоид, как и гауссовская случайная величина, характеризуется вектором центра $\theta_z^{(s)}$ и матрицей рассеивания Q_s размером $m\times m$;
- для выпуклых областей с помощью эллипсоидов можно получить удовлетворительную аппроксимацию;
- минимизация объема результирующего эллипсоида соответствует методу наименьших квадратов или методу максимума правдоподобия в теории вероятностей.

Область неопределенности $\Theta_н$ представляет собой начальное множество возможных значений n-мерного оцениваемого вектора выходных параметров $\overline{Y}$. Данный вектор характеризует техническое состояние системы и может принимать произвольные значения из эллипсоида:

$$\bar{Y} \in E(A,Q) = \{Y | (Q^{-1}(Y-A),(Y-A)) \le 1\} = \Theta_н, \quad (1)$$

где A – n-мерный вектор центра эллипсоида, Q – симметричная положительно определенная матрица размерности $n \times n$ характеризующая погрешность измерения, скобки (,) обозначают скалярное произведение векторов.

Восстановление ТС методом ремонта осуществляется за счет использования дискретно-делимого ресурса, оптимальное распределение которого между подсистемами позволяет повысить эффективность ее функционирования. Векторы параметров системы, характеризующие ее состояние на каждом s–ом шаге восстановления, определены для дискретных объемов выделенного ресурса ω_s, s=0, 1, … . При этом после каждого шага восстановления ресурс уменьшается.

При реализации части восстановительного ресурса $\Delta\omega_1 = \omega_0 - \omega_1$ вектор параметров на первом шаге восстановления объекта определяется выражением:

$$Y(\omega_1) = C_1 Y(\omega_0) + \Delta A_1, \quad (2)$$

где ΔA_1 – m-мерный вектор сдвига; C_1 – неособенная матрица размерности $m \times m$, определяющая изменение ориентации и масштаба области неопределенности состояния системы на очередном шаге относительно исходного эллипсоида.

Из формулы (2) находим выражение для исходного вектора состояний $Y(\omega_0) = C_1^{-1}(Y(\omega_1) - \Delta A_1)$, которое подставим в неравенство (1) и проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} &\left(Q_0^{-1}\left(C_1^{-1}(Y(\omega_1) - \Delta A_1) - A_0\right),\ \left(C_1^{-1}(Y(\omega_1) - \Delta A_1) - A_0\right)\right) = \quad (3)\\ &= \left(\left(C_1^T\right)^{-1} Q_0^{-1} C_1^{-1}(Y(\omega_1) - C_1 A_0 - \Delta A_1),\ (Y(\omega_1) - C_1 A_0 - \Delta A_1)\right) = \\ &= \left(\left(C_1 Q_0 C_1^T\right)^{-1}(Y(\omega_1) - (C_1 A_0 + \Delta A_1)),\ (Y(\omega_1) - (C_1 A_0 + \Delta A_1))\right) \le 1 \end{aligned}$$

Здесь индекс «T» обозначает транспонирование матрицы C_1. Из выражения (3) следует, что вектор $Y(\omega_1)$ принадлежит эллипсоиду с центром в точке $A_1 = C_1 A_0 + \Delta A_1$ и с матрицей $C_1 Q_0 C_1^T$, т. е.

$$\begin{gathered} Y(\omega_1) = C_1 Y(\omega_0) + \Delta A_1 \in E\left(C_1 A_0 + \Delta A_1, C_1 Q_0 C_1^{-1}\right), \\ Y(\omega_0) \in E(A_0, Q_0), \quad (4) \end{gathered}$$

а, следовательно, процесс восстановления представляет собой аффинное преобразование эллипсоидов в пространстве параметров, при этом любой эллипсоид преобразуется снова в эллипсоид [8].

Используя функции множеств соотношения (4) можно записать в виде равенства множеств

$$C_1 E(A_0, Q_0) + \Delta A_1 = E\left(C_1 A_0 + \Delta A_1, C_1 Q_0 C_1^T\right). \quad (5)$$

Если матрица $C_1 Q_0 C_1^T = D$, где D – диагональная матрица, то главные оси полученного эллипсоида будут параллельны осям координат (параметров объекта).

В общем случае на s-ом шаге восстановления ТС вектор выходных параметров $Y(\omega_S)$ принадлежит эллипсоиду с центром в точке $A_S = C_S A_{S-1} + \Delta A_S$ и с матрицей $C_S Q_{S-1} C_S^T$, т. е.

$$Y(\omega_S) = C_S Y(\omega_{S-1}) + \Delta A_S \in E\left(C_S A_{S-1} + \Delta A_S,\ C_S Q_{S-1} C_S^{-1}\right), \quad (6)$$

где $Y(\omega_{S-1}) \in E(C_{S-1} A_{S-2} + \Delta A_{S-1},\ Q_{S-1})$;

$Q_{S-1} = C_{S-1} Q_{S-2} C_{S-1}^T$.

III. Постановка задачи минимизации области параметрической неопределенности для ремонтируемой системы

Применительно к рассматриваемой задаче вектор сдвига ΔA_S отражает перемещение центра области неопределенности в пространстве параметров при выделении определенного количества элементов ресурса $\Delta\omega_S = \omega_{S-1} - \omega_S$. Используемые элементы ресурса имеют ряд специфических особенностей, которые обусловлены технологией их производства и проявляются в разбросе значений параметров относительно их номиналов. Следовательно, на s–м шаге восстановления системы реальные размеры области неопределенности с центром в точке A_S определяются не столько числом ω_S^* и номиналами x_j используемых элементов ресурса, сколько допусками на значения их параметров Δx_j.

Представим матрицу учета изменения размеров области неопределенности в виде:

$$C_k = |1 + \Delta y_k| = |1 + Z_k \cdot \delta_k|. \quad (7)$$

Выражение (7) учитывает классы точности элементов δ_j, результаты аффинного преобразования эллипсоидов (5)–(6), при котором $C_s Y(\omega_{s-1}) + \Delta A_s = Y(\omega_s)$, а также условие $\Delta y_i = \sum_{j=1}^{m} Z_j \cdot \delta_j$, где Z_j - коэффициенты для определения степень влияния разброса значений параметров (относительно их номиналов δ_i) на изменение значения выходного параметра Y_j,

Легко заметить, что с каждым шагом восстановления системы возрастает объем эллипсоидальной области неопределенности, определяемый выражением [9]:

$$V_{D_S} = \pi^{n/2}\left[\Gamma(n/2+1)\right]^{-1}\left[\det\left(C_S Q_{S-1} C_S^T\right)\right]^{1/2}, \quad (8)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Задача оптимизации параметрической надежности восстанавливаемой системы состоит в подборе классов точности элементов ресурса, которые обеспечивают минимально возможный объем области неопределенности на последнем шаге восстановления при выбранных номиналах и ограниченной стоимости ремонтных средств [10]. Задачу построения эллипсоида наименьшего объема можно сформулировать как экстремальную задачу построения таких матриц рассеивания $Q_s = C_s Q_{s-1} C_s^T$, для которых

$$\det(Q_s) = \det\left(C_s C_{s-1} .. C_1 Q_0 C_1^T C_2^T .. C_s^T\right) \to \min_{\{C_s\}}. \quad (9)$$

В записи (9) использован тот факт, что объем эллипсоида (8) пропорционален $(\det Q_s)^{1/2}$. С учетом выражения (9) целевая функция параметрического синтеза ремонтируемой системы приобретает вид:

$$\det\left[Q_0\prod_{k=1}^{S}C_kC_k^T\right]\to\min_{\{C_k\}}. \qquad (10)$$

Очевидно, что ограничением при решении оптимизационной задачи является стоимость ремонтных средств, не позволяющая безгранично повышать класс точности используемых элементов: $\sum_{s=1}^{n}R_s\left(\delta_s^*\right)\le R_\Sigma$.

Учитывая мультипликативность целевой функции (10) и линейность ограничений решение указанной задачи возможно с использованием метода динамического программирования [11].

IV. Пример решения задачи выбора класса точности ремонтных средств методом динамического программирования

Пусть техническое состояние ремонтируемой системы определяется тремя параметрами (n=3), значение каждого из которых находится за пределами установленных допусков. Для восстановления системы требуется заменить три элемента, определяющих значение каждого из параметров системы, т.е. эволюция технического состояния системы в процессе восстановления состоит из трех последовательных шагов: $s=1,2,3$.

Для каждого s-го элемента при одном и том же номинальном значении установлены три класса точности δ_j. При этом выбор класса точности элемента определяется как его стоимостью R_s, так и влиянием на размеры области неопределенности $\Theta_S^{(\delta_j)}$ (доверительный интервал оцениваемого параметра), что представлено в табл. I. Требуется найти классы точности ремонтных средств δ_j^*, $j=\overline{1,3}$, которые обеспечивают минимальное увеличение области неопределенности состояния системы при условии, что суммарная стоимость элементов не превысит заданной величины $R_\Sigma=1200$ единиц.

ТАБЛИЦА I Исходные данные о ремонтных средствах

Класс точности δ_j	Характеристики ремонтных средств					
	$\Theta_1(\delta_1)$	$R_1(\delta_1)$	$\Theta_2(\delta_2)$	$R_2(\delta_2)$	$\Theta_3(\delta_3)$	$R_3(\delta_3)$
±20%	1,973	100	1,936	200	1,875	300
±10%	1,91	200	1,84	400	1,75	600
±5%	1,7	300	1,6	600	1,5	900

Задача формулируется следующим образом: выбрать для каждого из заказываемых элементов, используемых в процессе восстановления работоспособности системы, такие классы точности δ_j ($j=\overline{1,3}$), для которых выполняется требование

$$\det\left[Q_0\prod_{j=1}^{3}C_j\left(\delta_j\right)C_j^T\left(\delta_j\right)\right]\to\min_{\{\delta_j\}} \qquad (11)$$

при ограничении

$$\sum_{s=1}^{3}R_s\left(\delta_s^*\right)\le R_\Sigma. \qquad (12)$$

Решим задачу (11)–(12) методом динамического программирования. Под состоянием объекта L на каждом шаге в решаемой задаче будем понимать финансовый ресурс, оставшийся к этому шагу нераспределенными и подлежащий распределению между некоторым шагом восстановления или группой шагов восстановления, для которых на предыдущем шаге уже было найдено условное оптимальное распределение.

В случае использования процедуры обратной прогонки на первом шаге первого этапа определяется условный оптимальный выигрыш

$$f_S\left(L_S\right)=\min_{L_S\le R_\Sigma}\left[\det\left\{C_S^2\left(\delta_S\right)\right\}\right],\quad 0\le L_S\le R_\Sigma; \qquad (13)$$

на втором шаге – условный оптимальный выигрыш

$$f_{S-1}\left(L_{S-1}\right)=\min_{R_{S-1}\le L_s}\left[\det\left\{C_{S-1}^2\left(\delta_{S-1}\right)\right\}f_S\left(L_s-R_{S-1}\right)\right]; \qquad (14)$$

на S-м шаге – выигрыш

$$f_1\left(L_1\right)=\min_{R_1\le L_1}\left[\det\left\{C_1^2\left(\delta_1\right)\right\}f_2\left(L_1-R_1\right)\right]. \qquad (15)$$

Результаты расчетов представлены в табл. II–IV.

В табл. II представлены результаты расчета значений $f_3\left(L_3\right)=\min_{\delta_3=\pm5,10,20\%}\left[\det\left\{C_3^2\left(\delta_3\right)\right\}\right]$ на первом шаге оптимизации.

ТАБЛИЦА II Результаты расчета на первом шаге оптимизации

Ресурс L_3	Значения функции $\det\{C_3^2(\delta_3)\}$			Условные оптимумы	
	$\delta_3=\pm20\%$	$\delta_3=\pm10\%$	$\delta_3=\pm5\%$		
	Θ_3^2=1,875 R_3=300	Θ_3^2=1,75 R_3=600	Θ_3^2=1,5 R_3=900	$f_3(L_3)$	δ_3^*
300	1,875	-	-	1,875	±20%
400	1,875	-	-	1,875	±20%
500	1,875	-	-	1,875	±20%
600	1,875	1,75	-	1,75	±10%
700	1,875	1,75	-	1,75	±10%
800	1,875	1,75	-	1,75	±10%
900	1,875	1,75	1,5	1,5	±5%

В табл. III представлены результаты расчета значений $f_2\left(L_2\right)=\min_{\delta_2=\pm5,10,20\%}\left[\det\left\{C_2^2\left(\delta_2\right)\right\}f_3\left(L_2-R_2\right)\right]$ на втором шаге.

ТАБЛИЦА III Результаты расчета на втором шаге оптимизации

Ресурс L_2	Значения функции $\det\{C_2^2(\delta_2)\cdot f_3(L_3)\}$			Условные оптимумы	
	$\delta_2=\pm20\%$	$\delta_2=\pm10\%$	$\delta_2=\pm5\%$		
	Θ_2^2=1,936 R_2=200	Θ_2^2=1,84 R_2=400	Θ_2^2=1,6 R_2=600	$f_2(L_2)$	δ_2^*
500	3,63	-	-	3,63	±20%
600	3,63	-	-	3,63	±20%
700	3,63	3,45	-	3,45	±10%
800	3.388	3,45	-	3,45	±10%
900	3.388	3,45	3	3	±5%
1000	3.388	3,22	3	3	±5%
1100	2,904	3,22	3	3	±20%

В табл. IV представлены результаты расчета значений на третьем шаге оптимизации $f_1(L_1) = \min_{\delta_1=\pm5,10,20\%} \left[\det\left\{ C_1^2(\delta_1) \right\} f_2(L_1 - R_1) \right]$.

ТАБЛИЦА IV РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ТРЕТЬЕМ ШАГЕ ОПТИМИЗАЦИИ

Ресурс $L_1=R_\Sigma$	**Значения функции $\det\{C_1^2(\delta_1)\cdot f_2(L_2)\}$**			**Безусловные оптимумы**	
	$\delta_1=\pm20\%$	***$\delta_1=\pm10\%$***	***$\delta_1=\pm5\%$***	***$f_1(L_1)$***	***δ_1^****
	Θ_1^2=1,973 R_1=100	Θ_1^2=1,91 R_1=200	Θ_1^2=1,7 R_1=300		
1200	11,3	10,944	8,67	8,67	±5%

Этап 2. Оптимальные классы точности элементов δ_i имеют вид $\overline{\delta^*} = \{\pm5\%, \pm5\%, \pm20\%\}$, при этом значение функции (10) $\min\det[\cdot] = 8{,}67$.

Для сравнения, если выбирать одинаковые классы точности для всех элементов (например, $\delta = \pm10\%$), то при тех же затратах в 1200 ед. значение функции (10) будет гораздо выше ($\det[\cdot] = 11{,}75$), большие размеры области параметрической неопределенности ремонтируемой системы, снижающие ее надежность.

V. ВЫВОДЫ

Техническое состояние контролируемой системы определяется n-мерным вектором выходных параметров по результатам их измерений. Наличие погрешностей измерения вносит некоторую неопределенность в результаты контроля системы. Если погрешности измерений подчинены гауссовскому закону распределения, то для представления области неопределенности в пространстве параметров используется эллипсоидальная аппроксимация.

Техническая система считается неработоспособной, если область неопределенности не принадлежит области допусков на параметры. Для восстановления работоспособности системы необходимо проведение регулировочных или ремонтных работ (замена блоков, модулей, элементов). В последнем случае задача восстановления работоспособности системы решается за счет использования дискретно-делимого ресурса.

В задаче ремонта системы конечной целью является приведение области неопределенности, полученной при оценке технического состояния, в область установленных допусков за счет оптимального распределения ограниченного восстановительного ресурса.

Используя аналитическое описание процесса перемещения области неопределенности в пространстве параметров получена математическая модель эволюции технического состояния технической системы в процессе ее восстановления. При этом за счет наличия технологического разброса параметров ремонтных средств (запасных элементов) и погрешностей контрольных измерений на каждом шаге эволюции область неопределенности будет увеличиваться, что снижает параметрическую надежность системы.

Поэтому задача оптимизации восстанавливаемой системы состоит в подборе классов точности ремонтных средств, которые обеспечивают минимально возможный объем области неопределенности на последнем шаге восстановления при выбранных номиналах и ограниченной стоимости элементов ресурса.

С учетом моделей эволюции в пространстве параметров эллипсоидальной области неопределенности (2)-(6) и формулы для объема эллипсоида (8) постановка задачи оптимизации ремонта системы состоит из целевой функции (10) и ограничительной функции для стоимости ремонтных средств $\sum_{s=1}^{n} R_s(\delta_s^*) \le R_\Sigma$.

Учитывая характер целевой функции (10) и линейность ограничений задача решается методом динамического программирования. Под состоянием объекта L на каждом шаге в решаемой задаче понимается объем финансов, который остался к этому шагу нераспределенными. Ресурс L подлежит распределению между некоторым шагом восстановления или группой шагов восстановления, для которых на предыдущем шаге уже было найдено условное оптимальное распределение.

Пример пошагового решения оптимизационной задачи методом динамического программирования, в соответствии с выражениями (13)–(15), свидетельствует о возможности получения меньшей области параметрической неопределенности восстанавливаемой системы по сравнению с традиционным методом использования ремонтных средств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Abramov O.V, Dimitrov B.N. Reliability design in gradual failures: a functional-parametric approach // *Reliability: Theory&Application*. 2017. Vol.12. No.4 (47), pp. 39-48.

[2] Abramov O.V. Choosing Optimal Values of Tuning Parameters for Technical Devises and Systems. *Automation and Remote Control*. 2016. Vol.77. No 4, pp. 594-603.

[3] Borgonovo E. A new uncertainty importance measure. *Reliability Engineering & System Safety*. 2007, vol. 6 (92), pp. 771-784.

[4] Abramov O., Nazarov D. Condition-based maintenance by minimax criteria. *Applied Mathematics in Engineering and Reliability*: Proceedings of the 1st International Conference on Applied Mathematics in Engineering and Reliability, 2016, pp. 91-94.

[5] Fridman A.E. The Quality of Measurements: A Metrological Reference. - Springer Science+Business Media, 2011. 212 p.

[6] Polyak B.T., Nazin S.A., Durieu C., Walter E. Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty. *Automatica*, 2004, No 40 (7), pp. 1171-1179. DOI: 10.1016/j.automatica.2004.02.014.

[7] Chernousko F. L. State Estimation for Dynamic Systems. Boca Raton: CRC Press, 1994. 304 p.

[8] Lluís Ros, Assumpta Sabater, Federico Thomas. An ellipsoidal calculus based on propagation and fusion. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics–part b: cybernetics*, 2002, vol. 32, no. 4, pp. 430-442.

[9] Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics. Wiley, 2011. 1280 p.

[10] Федоренко В.В. Оптимизация восстановления технической системы управления в условиях неопределенности ее состояния. *Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте*, 2001, № 4, с. 56-58. (Харьков, Украина).

[11] Sniedovich M. Dynamic Programming: Foundations and Principles. CRC Press Taylor & Francis Group, 2011. 624 p.