Определение вероятности выполнения задачи сложной системой при ограниченном объеме опытной информации

В. Н. Арсеньев, , С. Б. Силантьев, А. Д. Хомоненко
Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I
vladar56@ya.ru, khomon@mail.ru

С. Е. Ададуров
Научно-исследовательский институт железнодорожного транспорта
Adadurov.Sergey@vniizht.ru

Аннотация. **Одним из основных показателей эффективности применения сложной системы по назначению является вероятность решения поставленной перед ней задачи. На всех этапах построения сложной системы проводятся теоретические и экспериментальные исследования этой вероятности. Результаты теоретических исследований могут отличаться от фактических. Экспериментальные данные близки к фактическим, но могут быть ограничены по объему. Предложен метод взвешенного учета результатов теоретических и экспериментальных исследований сложной системы. Получены выражения для апостериорного оценивания вероятности решения поставленной перед системой задачи и определения выигрышей в точности оценивания и числе испытаний, получаемых за счет учета априорной информации. Приведен пример применения метода.**

Ключевые слова: сложная система, показатели качества, априорная информация, ограниченные опытные данные, апостериорные оценки, выигрыш в оценивании

I. Введение

Одним из основных показателей эффективности применения сложной системы (СС) по назначению является вероятность решения поставленной перед ней задачи. В процессе построения СС проводятся исследования качества ее функционирования с использованием расчетных методов, модельных экспериментов, натурных испытаний составных частей и опытных образцов системы. Используемую информацию условно можно разделить на априорную и опытную (экспериментальную), полученную по результатам испытаний опытных образцов.

Достоверность априорной информации существенно зависит от адекватности используемых моделей. При этом объем ее может быть достаточно большим. Опытная информация, наоборот, отражает реальные характеристики СС, но в силу известных причин объем ее, как правило, ограничен. Для повышения качества оценивания вероятности успешного решения поставленной перед системой задачи необходимо учитывать всю имеющуюся априорную и опытную информацию.

Вопросам комплексирования информации, полученной из различных источников, посвящен ряд работ [1–5]. Часть из них базируется на теореме гипотез (формуле Байеса). Применение этих методов предполагает знание априорного распределения оценки исследуемого параметра. Не всегда имеется точная информация о виде этого распределения.

В основе второй группы методов лежит идея взвешенного учета априорной и опытной информации об оцениваемом параметре. К сожалению, проблема выбора коэффициентов, определяющих значимость соответствующей информации в результирующих оценках, до настоящего времени полностью не решена.

II. Постановка задачи

Полагается, что испытание опытного образца сложной системы прошло успешно, если была решена поставленная перед ней задача. Вероятность успешного испытания опытного образца равна p.

Испытания проводятся до тех пор, пока не будет получено m успехов. Число этих испытаний характеризуется дискретной случайной величиной.

Тогда закон распределения величины определяется вероятностями того, что число испытаний будет равно x

$$P\left(\hat{\mathrm{X}} = x; p\right) = C_{x-1}^{m-1} p^m \left(1-p\right)^{x-m}, \qquad (1)$$

где: $x = m, m+1, m+2, \ldots$; C_{x-1}^{m-1} – число сочетаний из x–1 по m–1.

Формула (1) описывает распределение Паскаля (отрицательное биномиальное распределение) [6].

Математическое ожидание $M_{\hat{\mathrm{X}}}$ и дисперсия $D_{\hat{\mathrm{X}}}$ необходимого числа испытаний $\hat{\mathrm{X}}$ связаны с вероятностью p известными соотношениями

$$M_{\hat{\mathrm{X}}} = m/p;\ D_{\hat{\mathrm{X}}} = m\left(1-p\right)/p^2. \qquad (2)$$

Пусть проведено $N_о$ серий испытаний. В каждой серии испытания проводились до получения m успешных результатов. В 1-й серии потребовалось провести x_1 независимых испытаний, во 2-й – x_2 и т.д., в $N_о$-й серии – $x_{N_о}$ испытаний.

По результатам доопытных исследований СС получена априорная (расчетная) оценка $p_р$ вероятности того, что испытание будет успешным.

Необходимо найти апостериорную оценку $p_а$ этой вероятности, учитывающую априорную информацию и результаты испытаний опытных образцов.

Для решения данной задачи используется метод приоритета опытной информации (ПОИ) [6, 7].

III. Решение задачи

В соответствии с этим методом сначала по выборке $x_i,\ i=\overline{1,N_о}$, составляется функция правдоподобия,

$$\prod_{i=1}^{N_о} P\left(\hat{X}=x_i;\,p\right)=\prod_{i=1}^{N_о} C_{x_i-1}^{m-1}p^m\left(1-p\right)^{x_i-m}, \qquad (3)$$

на основе которой определяется оценка максимального правдоподобия $p_о$ параметра p :

$$p_о = mN_о \Big/ \sum_{i=1}^{N_о} x_i\,. \qquad (4)$$

Тогда функцию правдоподобия (3) можно преобразовать к виду

$$L\left(p_о,p\right)=C_о\,p^{mN_о}\left(1-p\right)^{mN_о\left(1/p_о-1\right)}, \qquad (5)$$

где $C_о=\prod_{i=1}^{N_о} C_{x_i-1}^{m-1}$.

В качестве меры, характеризующей близость априорно полученной информации к опытным данным, используется отношение правдоподобия для проверки статистической гипотезы H: $p=p_р$, которое с учетом (5) вычисляется по формуле

$$\nu^*=\frac{L\left(p_о,p_р\right)}{L\left(p_о,p_о\right)}=\left(\frac{p_р}{p_о}\right)^{mN_о}\left(\frac{1-p_р}{1-p_о}\right)^{mN_о\left(1/p_о-1\right)}. \qquad (6)$$

Очевидно, что $0\le\nu^*\le1$. При значительном отличии априорной информации от опытной $\nu^*\approx0$ и, наоборот, при $p_р\approx p_о$ величина $\nu^*\approx1$.

Поскольку качество оценки $p_о$ зависит от числа испытаний $N_о$, то для коэффициента, определяющего вес априорной информации в апостериорной оценке, предлагается использовать величину

$$N_р=\nu^* N_о\,. \qquad (7)$$

Если предположить, что априорная и опытная информация является однородной (справедлива гипотеза H), то для априорной оценки $p_р$ можно ввести функцию, аналогичную функции правдоподобия (5),

$$L\left(p_р,p\right)=C_р\,p^{mN_р}\left(1-p\right)^{mN_р\left(1/p_р-1\right)}, \qquad (8)$$

где $C_р$=const.

Тогда произведение функций (5) и (8)

$$L(p)=L\left(p_р,p\right)L\left(p_о,p\right)=$$

$$=C_р C_о\,p^{m(N_р+N_о)}\left(1-p\right)^{m\left[N_р\left(1/p_р-1\right)+N_о\left(1/p_о-1\right)\right]} \qquad (9)$$

может рассматриваться как функция правдоподобия для реальной выборки, полученной по результатам $N_о$ серий испытаний системы, и некоторой гипотетической выборки, соответствующей априорной информации, объем которой характеризуется величиной $N_р$.

Апостериорная оценка $p_а$ вероятности p определяется из необходимого условия максимума функции $L(p)$ и имеет вид:

$$p_а=\frac{p_о p_р\left(N_о+N_р\right)}{N_о p_р+N_р p_о}=\frac{p_о p_р\left(1+\nu^*\right)}{p_р+\nu^* p_о}\,. \qquad (10)$$

Отсюда видно, что метод приоритета опытной информации позволяет реализовать взвешенный учет априорной и опытной информации при апостериорном оценивании вероятности p.

IV. Выигрыш в качестве оценивания

Из выражения (9) следует, что апостериорная оценка $p_а$ может рассматриваться как оценка, полученная методом максимального правдоподобия по выборке объемом $N=N_о+\mathrm{E}[N_р]=N_о+\mathrm{E}[\nu^* N_о]$, где $\mathrm{E}[\cdot]$ – функция округления до ближайшего целого числа. Поэтому можно говорить о выигрыше в числе испытаний

$$\delta_{чи}=\mathrm{E}[\nu^* N_о], \qquad (11)$$

получаемом за счет учета априорной информации.

Очевидно, что выигрыш в числе испытаний будет максимальным $\delta_{чи}=N_о$ при $\nu^*=1$. В этом случае полагается, что апостериорная оценка $p_а$ получена по результатам $2N_о$ серий испытаний.

Для определения выигрыша в точности оценивания используется величина

$$\delta_т=\left(\sqrt{D_{p_о}}-\sqrt{D_{p_а}}\right)100\Big/\sqrt{D_{p_о}}\ (\%)\,. \qquad (12)$$

К сожалению, пока не удалось получить формулы для точного вычисления дисперсий оценок (4) и (10). Поэтому предлагается использовать следующий подход.

Рассматривается случайная величина $y_о$, обратная оценке $p_о$, $y_о=1/p_о=\sum_{i=1}^{N_о} x_i \Big/ mN_о$, $y_о\in[1,\infty)$. Ее характеристическая функция имеет вид:

$$g_{y_о}(t)=p^{mN_о}\left[e^{-jt/mN_о}-(1-p)\right]^{-mN_о}.$$

На основе этой функции можно получить выражения для определения вероятностных моментов величины $y_о$ любого порядка. В частности, ее математическое ожидание и дисперсия определяются по формулам

$$M_{y_о}=1/p;\quad D_{y_о}=(1-p)/mN_о p^2.$$

Соответствующие оценки этих параметров, полученные по результатам испытаний опытных образцов, имеют вид

$$\widetilde{M}_{y_о}=1/p_о;\quad \widetilde{D}_{y_о}=(1-p_о)/mN_о p_о^2.$$

Можно показать, что функция плотности распределения случайной величины $y_о$ достаточно хорошо аппроксимируется распределением Пирсона 3 типа [5]:

$$\varphi_{y_о}(y_о)=\frac{1}{\beta_о\Gamma(\rho_о)}\left(\frac{y_о-1}{\beta_о}\right)^{\rho_о-1}e^{-\frac{y_о-1}{\beta_о}},$$

где $\beta_о=\widetilde{D}_{y_о}\big/(\widetilde{M}_{y_о}-1)$, $\rho_о=(\widetilde{M}_{y_о}-1)^2\big/\widetilde{D}_{y_о}$.

На ее основе получаются приближенные значения математического ожидания и дисперсии опытной оценки $p_о$ вероятности того, что СС достигнет цели при одном испытании:

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{M}_{p_о}&\approx\int_1^\infty\frac{1}{y_о}\varphi_{y_о}(y_о)dy_о;\\ \widetilde{D}_{p_о}&\approx\int_1^\infty\frac{1}{y_о^2}\varphi_{y_о}(y_о)dy_о-\widetilde{M}^2_{p_о}.\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Выражение (10) для апостериорной оценки $p_а$ вероятности p можно представить в виде:

$$p_а=m\left(N_о+N_р\right)\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{N_о}x_i+\sum_{i=1}^{N_р}x_{\Gamma i}\right),$$

где $\sum_{i=1}^{N_р}x_{\Gamma i}=mN_р\big/p_р$.

Путем, аналогичным описанному выше, определяются приближенные значения математического ожидания и дисперсии апостериорной оценки $p_а$:

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{M}_{p_а}&\approx\int_1^\infty\frac{1}{y_а}\varphi_{y_а}(y_а)\,dy_а;\\ \widetilde{D}_{p_а}&\approx\int_1^\infty\frac{1}{y_а^2}\varphi_{y_а}(y_а)\,dy_а-M^2_{p_а},\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

где $\varphi_{y_а}(y_а)=\frac{1}{\beta_а\Gamma(\rho_а)}\left(\frac{y_а-1}{\beta_а}\right)^{\rho_а-1}e^{-\frac{y_а-1}{\beta_а}}$; $\beta_а=1/mNp_а$; $\rho_а=(1-p_а)mN$.

Тогда выигрыш в точности оценивания (12) получается по приближенной формуле:

$$\delta_Т=\left(\sqrt{\widetilde{D}_{p_о}}-\sqrt{\widetilde{D}_{p_а}}\right)100\Big/\sqrt{\widetilde{D}_{p_о}}\ (\%).\qquad(15)$$

V. Пример

Рассматривается комплекс защиты сложной системы от дестабилизирующего воздействия определенного типа. Вероятность того, что комплекс пропустит однократное дестабилизирующее воздействие на систему, равна p. При поступлении воздействия на систему три (m=3) и более раз она становится неработоспособной.

Расчетным путем получена априорная оценка $p_р$=0.15 вероятности пропуска комплексом защиты однократного дестабилизирующего воздействия на систему.

Для получения достоверной информации о надежности СС с комплексом защиты проведено $N_о$=8 циклов дорогостоящих экспериментов. В каждом цикле дестабилизирующее воздействие на систему повторялось до тех пор, пока система не становилась неработоспособной. В 1-м цикле дестабилизирующее воздействие подавалось 9 раз, во 2-м –11, в 3-м –19, в 4-м –18, в 5-м –12, в 6-м –17, в 7-м –10, в 8-м –21.

Требуется определить:

1. Апостериорную оценку $p_а$ вероятности пропуска комплексом защиты однократного дестабилизирующего воздействия на систему.

2. Максимально допустимое число повторений воздействия на систему $Х_{0.8}$, при котором она будет оставаться работоспособной с вероятностью не менее чем 0.8.

Согласно формуле (10) для получения апостериорной оценки вероятности пропуска комплексом защиты однократного дестабилизирующего воздействия необходимы опытная оценка $p_о$ этой вероятности и отношение правдоподобия ν^*. Оценка $p_о$ получается по результатам экспериментальных исследований системы:

$$p_о=\frac{3\cdot 8}{9+11+19+18+12+17+10+21}\approx 0.21\cdot$$

Величина отношения правдоподобия рассчитывается по формуле (6): $\nu^*\approx 0.28$.

Подстановка величин $p_р$, $p_о$ и ν^* в (10) дает апостериорную оценку вероятности пропуска комплексом защиты однократного дестабилизирующего воздействия на систему, учитывающую результаты априорных и экспериментальных исследований системы, $p_а\approx 0.19$.

Максимально допустимое число воздействий на систему $Х_{0.8}$, при котором она будет оставаться работоспособной с вероятностью не менее чем 0.8, зависит от вероятности пропуска комплексом защиты однократного дестабилизирующего воздействия.

Вероятность того, что система останется работоспособной при повторении воздействия на нее $X_{0.8}$ раз, может быть определена по формуле $\sum_{i=0}^{2} C^{i}_{X_{0.8}} p^{i}(1-p)^{X_{0.8}-i}$. Тогда из условия $\sum_{i=0}^{2} C^{i}_{X_{0.8}} p^{i}(1-p)^{X_{0.8}-i} \geq 0.8$ можно найти максимальное число воздействий на систему, при котором она будет оставаться работоспособной с вероятностью не менее чем 0.8.

Так, при расчетной оценке $p_{\text{р}}=0.15$ можно полагать, что система будет оставаться работоспособной при повторении дестабилизирующего воздействия на нее не более 9 раз.

При опытной оценке $p_{\text{о}} \approx 0.21$ этой вероятности число повторений дестабилизирующего воздействия на систему не должно превышать 7. Если вероятность защиты СС от однократного дестабилизирующего воздействия равна апостериорной оценке $p_{\text{а}} \approx 0.19$, то для сохранения работоспособного состояния системы с вероятностью не менее чем 0.8 число повторений воздействия на нее должно быть не больше 8.

Априорно заданная оценка вероятности пропуска комплексом защиты однократного дестабилизирующего воздействия на систему является заниженной и допускает девятикратное воздействие на СС дестабилизирующего фактора. Опытная оценка этой вероятности, наоборот, является завышенной. При этом число воздействий на систему не должно быть больше семи. Взвешенный учет априорной и опытной информации позволил получить апостериорную оценку вероятности того, что комплекс защиты пропустит однократное дестабилизирующее воздействие на систему. Соответствующее ей число повторений воздействия дестабилизирующего фактора на систему не должно превышать восьми.

Выигрыш в числе экспериментов в соответствии с формулой (11) $\delta_{\text{чи}}=E[\nu^{*} N_{\text{о}}]=2$. Следовательно, можно полагать, что апостериорная оценка $p_{\text{а}}$ получена по результатам $N=N_{\text{о}}+\delta_{\text{чи}}=10$ циклов экспериментов. При этом дисперсия апостериорной оценки $\tilde{D}_{p_{\text{а}}} \approx 0.0011$ меньше дисперсии оценки, полученной по результатам экспериментальных исследований системы, $\tilde{D}_{p_{\text{о}}} \approx 0.0015$, а выигрыш в точности оценивания $\delta_{\text{т}} \approx 17\%$.

VI. Заключение

Закон распределения Паскаля имеет широкое применение при решении различных практических задач. Он используется, например, при исследовании долговечности системы, имеющей определенное число резервных (автоматически подключающихся) элементов. Отрицательное биномиальное распределение имеет приложение к статистике несчастных случаев и заболеваний, к задачам, связанным с количеством особей данного вида в выборках из биологических популяций, применяется в задачах оптимального резервирования элементов, в теории стрельбы и в ряде других приложений. Предложенный подход может быть полезным при ограниченных экспериментальных данных.

Список литературы

[1] Пугачев В.Н. Комбинированные методы определения вероятностных характеристик // М.: Сов. Радио. 1973. 256 с.

[2] Арсеньев В.Н., Силантьев С.Б., Ядренкин А.А. Использование априорной информации для коррекции модели потока событий в сложной системе // Изв. ВУЗов. Приборостроение. 2017. Т.60, № 5. С. 391–397.

[3] Jie M., Honlin Z., Wenbo X., Jin L. Reliability Testing Methods for Critical Information System based on State Random. 2011 International Conference on Information Communication and Management. IPCSIT vol.16. 2011 © (2011) IACSIT Press, Singapore. pp. 28–32.

[4] Cai K.-Y., Caob. P., Dongc. Z., Liu. K. Mathematical modeling of software reliability testing with imperfect debugging. Computers and Mathematics with Applications. 2010. vol. 59. No. 10. pp. 3245–3285.

[5] Королюк В.С. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк и др. // М.: Наука. 1985. 640 с.

[6] Арсеньев В.Н. Оценивание характеристик систем управления по ограниченному числу натурных испытаний // М.: Рестарт, 2013. 126 с.

[7] Arseniev, V.N., Adadurov, S.E., Gerasimenko, P.V., Degtyarev, V.G. Correction of models of disturbing perturbances at research of complex system properties. 2017. Proceedings of 2017 20th IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements, SCM. 2017.