

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.Н. Решетникова

АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Учебное пособие

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2016

УДК 681.513

ББК 22.181

Р47

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой прикладной математики

ФПМК НИ ТГУ *К.И. Ливиниц;*

канд. техн. наук, доцент кафедры КСУП ФВС ТУСУР *В.П. Коцубинский*

Решетникова Г.Н.

Р47 Адаптивные системы : учеб. пособие. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2016. – 112 с.

Приводятся алгоритмы синтеза для линейных систем на основе минимизации квадратичных функционалов. Рассматриваются методы оценивания состояния и параметров модели объекта. Проектирование систем адаптивного управления осуществляется путем постепенного добавления и усложнения методов и алгоритмов: от оптимального управления для детерминированных моделей до адаптивных следящих систем для стохастических моделей при неполном измерении с ошибками. Приводятся примеры построения математических моделей и пример проектирования системы адаптивного управления для нестационарной модели судна при изменении курса.

В приложения включены контрольные вопросы, задания для лабораторных работ и индивидуальные задания для моделирования систем адаптивного управления с использованием математических моделей различных технических объектов.

Учебное пособие предназначено для студентов ФПМК направления подготовки 01.03.02 – Прикладная математика и информатика с квалификацией бакалавр. Пособие может быть также полезным магистрантам и аспирантам ФПМК.

© Томский государственный университет, 2016

© Решетникова Г.Н., 2016

Введение

Переживаемый в настоящее время этап информатизации характеризуется расширением внедрения информационно-вычислительных систем, созданием и развитием методов автоматического управления в технике, экономике, медицине, биологии и других видах деятельности. При этом все чаще применяются следящие системы автоматического управления для совмещенного синтеза, как самые приемлемые для реализации на управляющих компьютерах. Синтез управляющих воздействий, который осуществляется в процессе функционирования объекта, называется *совмещенным синтезом*. Его особенностью является то, что в момент формирования управляющих воздействий известны предыдущие состояния объекта и не известны последующие.

Процесс проектирования систем управления всегда предполагает наличие:

- 1) четко сформулированной цели управления;
- 2) априорной информации об объекте управления и о характере действующих на него возмущений.

Объем априорной информации при этом может быть различным и за редким исключением не является исчерпывающим. Однако в данном случае принципиальным является вопрос о достаточности или недостаточности имеющейся априорной информации об объекте для достижения сформулированной цели управления. Все системы управления, построенные с использованием априорной информации, достаточной для достижения поставленной цели, относятся к *неадаптивным* или *традиционным* системам управления, независимо от реализуемого принципа управления, наличия обратной связи, случайности или детерминированности возмущений, используемых вычислительных средств и т.д. Если же объем располагаемой априорной информации о свойствах объекта не может обеспечить достижения сформулированной цели управления, то речь идет об *адаптивных* системах управления.

Адаптивное управление обеспечивает требуемое качество функционирования объекта в условиях изменения параметров модели объекта и изменения характеристик действующих на объект возмущений. Адаптивное управление должно подстраиваться (адаптироваться) к этим изменениям.

В современной теории автоматического управления доминирует концепция совмещенного синтеза следящих систем. Наиболее перспективными методами решения таких задач являются методы, основанные на оптимизации квадратичных критериев, а использование прогнозирующих моделей и скользящего интервала времени позволяет существенно расширить возможности синтеза адаптивных систем.

В настоящем пособии рассматриваются методы синтеза систем управления при решении задач слежения для многомерных стохастических моделей объектов, функционирующих в условиях неполной информации о состоянии объекта и его параметров. При этом проектирование систем управления осуществляется путем постепенного добавления и усложнения используемых методов и алгоритмов: от оптимального управления для детерминированных моделей, до адаптивных следящих систем для стохастических моделей при неполном измерении с ошибками. В связи со сложностью рассматриваемых задач единственным способом их решения является имитационное моделирование.

Автор благодарит Б.Н. Назаренко за помощь в оформлении учебного пособия.

1. Описание систем в пространстве состояний

Описание систем во временной области лежит в основе современной теории управления. *Временная область* – это область, в которой поведение системы рассматривается как функция переменной t (времени). Анализ и синтез систем управления во временной области основан на понятии состояния системы. *Состояние системы* – это совокупность таких переменных, знание которых наряду с входными функциями и уравнениями, описывающими динамику системы, позволяет определить ее будущее состояние и выходную переменную. Для динамической системы ее состояние описывается набором переменных состояния $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, которые имеют следующий смысл: если в момент времени t_0 известны начальные значения $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ и входные сигналы $u_1(t), \dots, u_m(t)$ для $t \geq t_0$, то этой информации достаточно, чтобы определить будущие значения всех переменных состояния и выходных переменных. Таким образом, *переменные состояния описывают поведение систем в будущем, если известны текущее состояние, внешние воздействия и уравнения динамики системы.*

Понятие состояния применимо к анализу не только физических, но также биологических, социальных, экономических систем и т.д.

1.1. Математические модели динамических систем

В общем случае систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая описывает математическую модель управляемого объекта в переменных состояния, можно представить в виде:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.1)$$

Если $x(t)$ и (или) $u(t)$ входят в $f(\cdot)$ нелинейно, то система (1.1) называется *нелинейной*, если систему (1.1) можно представить в виде:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.2)$$

где $\bar{A}(t)$ – матрица динамических свойств модели объекта, размерности $n \times n$, $\bar{B}(t)$ – матрица влияния управляющих воздействий, размерности $n \times m$, то такая система называется *линейной*. Если элементы матрицы $\bar{A}(t)$ и (или) $\bar{B}(t)$ зависят от времени, то система (1.2) является *нестационарной*, если ни один из элементов матриц $\bar{A}(t)$ и $\bar{B}(t)$ не зависит от времени, то система (1.2) является *стационарной*. Если система управления является нелинейной, то достаточно часто ее *линеаризуют* и представляют в виде (1.2)

Заметим, что систему управления в переменных состояния можно представить и в дискретной форме:

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k)), \quad x(0) = x_0. \quad (1.3)$$

Аналогично (1.1) система (1.3) может быть нелинейной и линейной, представимой в виде:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x(0) = x_0. \quad (1.4)$$

Кроме того, системы (1.2), (1.4) могут быть как стационарными, так и нестационарными. В дальнейшем, будем считать, что математическая модель, описывающая поведение управляемого объекта задана в виде (1.2) или (1.4). Линеаризацию системы (1.1) и представление ее в виде (1.2) можно осуществить путем разложения (1.1) в ряд Тейлора по $x(t), u(t)$ для некоторых расчетных значений $x_r(t), u_r(t)$, т.е.

$$\dot{x}(t) = \left(\frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial x(t)} \right)_{x(t)=x_r(t)} x(t) + \left(\frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial u(t)} \right)_{u(t)=u_r(t)} u(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Тогда

$$\bar{A}(t) = \left(\frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial x(t)} \right)_{x(t)=x_r(t)}, \quad \bar{B}(t) = \left(\frac{\partial f(t, x(t), u(t))}{\partial u(t)} \right)_{u(t)=u_r(t)}.$$

Использование линейных систем для описания моделей объектов обусловлено тем, что идеи и методы линейной теории автоматического управления с соответствующими оговорками широко используются и для других моделей объектов управления. Кроме того, математический аппарат матричной алгебры достаточно легко реализуется на ЭВМ.

1.2. Построение математической модели движения ракеты

Пусть ракета движется вертикально в поле тяготения какой-то планеты. На основании законов механики можно записать следующие уравнения движения:

$$m\ddot{x} = F, \quad \dot{m} = -c, \quad (1.5)$$

где m – масса ракеты, x – высота над поверхностью планеты, c – секундный расход массы за счет горения топлива, F – вертикальная составляющая сил, действующих на ракету. Обозначим

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x} = v, \quad x_3 = m,$$

где v – скорость ракеты. Пусть оси Ox_1 и Ox_2 направлены вверх от поверхности планеты. Управление ракетой осуществляется за счет тяги двигателя, что связано с расходом топлива c , т.е. $u = c$.

С учетом введенных обозначений, уравнения (1.5) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{F(x, u)}{x_3}, \\ \dot{x}_3 &= -u. \end{aligned}$$

Функция $F(x, u)$ имеет вид:

$$F(x, u) = -G + P(u) - Q \cdot \text{sign}(v),$$

где $G = mg$ – сила тяжести (g – ускорение свободного падения); $P(u)$ – тяга двигателя, которая с точностью до знака есть извест-

ная функция u ; $sign(v)$ – знаковая функция, равная $+1$, если $v \geq 0$ и -1 , если $v < 0$ (скорость v отрицательна, если ракета опускается); Q – аэродинамическое сопротивление, равное

$$Q = \rho(x_1) \frac{v^2}{2} SC_x.$$

Здесь $\rho(x_1)$ – плотность атмосферы на высоте x_1 ; S – поперечное сечение ракеты; C_x – аэродинамический коэффициент (последние две величины можно считать постоянными).

С учетом введенных обозначений выражение для функции $F(x, u)$ можно переписать в виде:

$$F(x, u) = -g \cdot x_3 + P(u) - \rho(x_1) \frac{x_2^2}{2} S \cdot C_x \cdot sign(x_2).$$

Подставляя это выражение в (1.5), получим математическую модель движения объекта:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{F(x, u)}{x_3} - g + \frac{P(u)}{x_3} - \rho(x_1) \frac{x_2^2}{2x_3} SC_x sign(x_2), \\ \dot{x}_3 &= -u. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Начальные условия для системы (1.6) зависят от постановки задачи управления.

Если решается задача взлета ракеты, то начальные условия будут следующими:

$$x_1(t_0) = 0, \quad x_2(t_0) = 0, \quad x_3(t_0) = m_0,$$

где t_0 – момент взлета, $m_0 = m_p + m_T$, m_p – масса тела ракеты, m_T – начальная масса топлива.

Если решается задача посадки ракеты, то начальные условия будут следующими:

$$x_1(t_0) = h_0, \quad x_2(t_0) = v_0, \quad x_3(t_0) = m_0,$$

где h_0, v_0 – расстояние до планеты и скорость ракеты в момент начала посадки, $m_0 = m_p + m_o$, m_o – остаток топлива в момент начала посадки.

1.3. Построение макроэкономической модели динамики фондов производственного накопления и потребления

Пусть $x_1(t)$ – фонд производственного накопления, $x_2(t)$ – фонд потребления.

Уравнение баланса имеет вид:

$$\dot{x}_1(t) = b_1 \dot{x}_1(t) + b_2 \dot{x}_2(t),$$

где b_1 и b_2 – коэффициенты приростной капиталоемкости фондов накопления и потребления соответственно.

Пусть $L(t) = L_0 e^{\gamma t}$ – динамика изменения численности населения; L_0 – численность населения в начальный момент времени; γ – темп роста населения.

Тогда уравнения, характеризующие фонд потребления на душу населения и изменение душевого фонда потребления, будут соответственно равны:

$$\frac{x_2(t)}{L(t)} = \frac{x_2(t)}{L_0} e^{-\gamma t};$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{x_2(t)}{L_0} \cdot e^{-\gamma t} \right] = (\dot{x}_2(t) - \gamma x_2(t)) \frac{e^{-\gamma t}}{L_0}.$$

Если в качестве управления использовать скорость роста душевого фонда потребления

$$u(t) = \dot{x}_2(t) - \gamma x_2(t),$$

то

$$\dot{x}_2(t) = \gamma x_2(t) + u(t). \quad (1.7)$$

Таким образом, динамическая модель изменения фондов накопления и потребления описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{1}{b_1}x_1(t) + \gamma \frac{b_2}{b_1}x_2(t) - \frac{b_2}{b_1}u(t), \quad x_1(t_0) = x_1^{(0)}, \\ \dot{x}_2(t) &= \gamma x_2(t) + u(t), \quad x_2(t_0) = x_2^{(0)}.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Заметим, что модель (1.7) является линейной по состоянию и управлению.

Если обозначить $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$; $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T$, то система (1.7) в матричной форме запишется следующим образом:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t), \quad x(t_0) = x^{(0)},\tag{1.9}$$

где

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_1} & -\gamma \frac{b_2}{b_1} \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} -\frac{b_2}{b_1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Оптимальное управление на основе минимизации квадратичных функционалов

Синтез систем управления – одна из важнейших технических задач. Целью синтеза является создание системы, которая удовлетворяла бы требуемым показателям качества. Качество системы управления можно охарактеризовать, например, интегральными оценками, и тогда синтез системы управления должен быть основан на минимизации оценки качества. *Системы управления, в которых обеспечивается минимум соответствующей оценки качества, называются оптимальными системами управления.*

2.1. Оптимальное управление при минимизации классического квадратичного функционала

Согласно методу аналитического конструирования Летова-Калмана, оптимальное управление объектом (1.2), минимизирующее квадратичный функционал:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left[x^T(t) C x(t) + u^T(t) D u(t) \right] dt, \quad (2.1)$$

имеет вид:

$$u(t) = -D^{-1} \bar{B}^T(t) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T, \quad (2.2)$$

где функция $V = V(x, t)$ является решением нелинейного уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \bar{A}(\tau) x(\tau) - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \bar{B}(\tau) D^{-1} \bar{B}^T(\tau) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T = -\frac{1}{2} x^T(\tau) C x(\tau), \quad (2.3)$$

при граничном условии

$$V(T) = 0. \quad (2.4)$$

В (2.1) C – неотрицательно определенная, а D – положительно определенная весовые матрицы

Решение задачи (2.3)–(2.4) находится в виде квадратичной формы:

$$V = \frac{1}{2} x^T(t) S(t) x(t), \quad (2.5)$$

где $S(t)$ – симметрическая матрица. Тогда

$$\dot{u}(t) = -D^{-1} \bar{B}^T(t) S(t) x(t), \quad (2.6)$$

а матрица $S(t)$ является решением нелинейного дифференциального уравнения Риккати с переменными коэффициентами:

$$\dot{S}(\tau) = -S(\tau) \bar{A}(\tau) - \bar{A}^T(\tau) S(\tau) + S(\tau) \bar{B}(\tau) D^{-1} \bar{B}^T(\tau) S(\tau) - C \quad (2.7)$$

при граничном условии

$$S(T) = 0. \quad (2.8)$$

Таким образом, при синтезе оптимального управления методом аналитического конструирования Летова-Калмана необходимо для каждого момента $t \in [t_0, T]$ формирования управляющих воздействий решать в обратном времени уравнение (2.7) при условии (2.8). Теория решения матричного уравнения Риккати достаточно хорошо разработана. Однако при практическом применении необходимость решения в обратном времени матричного дифференциального уравнения Риккати делает затруднительным использование этого метода синтеза в процессе функционирования объекта из-за больших затрат времени на получение результата.

В случае стационарной модели (1.2) ($\bar{A}(t) = \bar{A}$, $\bar{B}(t) = \bar{B}$) оптимальное управление, обеспечивающее минимум функционала:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) C x(t) + u^T(t) D u(t)] dt,$$

имеет вид:

$$u(t) = -D^{-1}\bar{B}(t)Sx(t),$$

где S – положительно определенная матрица, удовлетворяющая матричному алгебраическому уравнению Риккати:

$$\bar{A}^T S + S\bar{A} - S\bar{B}H\bar{B}^T S + C = 0.$$

Решение алгебраического уравнения Риккати заменяется определением с заданной точностью установившегося решения дифференциального уравнения Риккати:

$$\dot{S} = \bar{A}^T S + S\bar{A} - S\bar{B}H\bar{B}^T S + C$$

при нулевом начальном условии.

Синтез управляющих воздействий, который осуществляется в реальном времени в процессе функционирования объекта, называется *совмещенным синтезом*. В этом случае большое значение имеет временная задержка, вызванная затратами времени на формирование управляющего сигнала. Время формирования управления методом Летова-Калмана зависит от двух факторов: величины интервала оптимизации $[t_0, T]$ и времени, которое затрачивается на решение уравнения Риккати. Целенаправленное изменение каждой из этих величин приводит к уменьшению вычислительной задержки при формировании управляющего сигнала.

2.2. Оптимальное управление при минимизации функционала обобщенной работы

Термин «критерий обобщенной работы» был введен А.А. Красовским. В этом случае минимизируемый функционал задается в виде:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [x^T(t)Cx(t) + u^T(t)Du(t) + u_{on}^T(t)Du_{on}(t)]dt, \quad (2.9)$$

где u_{on} – оптимальное управление, доставляющее минимум этому функционалу, которое имеет вид:

$$u(t) = u_{on}(t) = -D^{-1} \bar{B}^T(t) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T, \quad (2.10)$$

а $V = V(x, t)$ является решением линейного управления в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \bar{A}(\tau)x(\tau) = -\frac{1}{2} x^T(\tau) C x(\tau) \quad (2.11)$$

при граничном условии

$$V(T) = 0. \quad (2.12)$$

Если искать решение задачи (2.11)–(2.12) в виде квадратичной формы:

$$V = \frac{1}{2} x^T(t) L(t) x(t), \quad (2.13)$$

то

$$u(t) = u_{on}(t) = -D^{-1} \bar{B}^T(t) L(t) x(t), \quad (2.14)$$

где $L(t)$ является решением линейного матричного дифференциального уравнения Ляпунова

$$\begin{aligned} \dot{L}(\tau) &= -L(\tau) \bar{A}(\tau) - \bar{A}^T(\tau) L(\tau) - C, \\ L(T) &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Вычислительные затраты при решении уравнения Ляпунова в силу его линейности значительно сокращаются по сравнению с решением уравнения Риккати. Недостатком этого метода является то, что управление (2.10) является оптимальным при «свободном» движении объекта, т.е. при $u \equiv 0$. При этом понятно, что поведение объекта при нулевом управлении (нулевом положении органов управления), может очень сильно отличаться от реального управ-

ляемого поведения на интервале оптимизации и приводить в область пространства состояний, далекую от реально достигаемой.

Лучшие результаты можно получить при *управлении скоростью перемещения регулирующих органов*, когда модель объекта представляется в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \bar{A}(t)x(t) + B(t)u(t), & x(t_0) &= x_0, \\ \dot{u}(t) &= v(t), & u(t_0) &= u_0,\end{aligned}\quad (2.16)$$

где $u(t)$ – вектор положения органов управления, а $v(t)$ – вектор управления, характеризующий скорость перемещения органов управления.

Минимизируемый функционал обобщенной работы для модели (2.16) запишется в виде:

$$\begin{aligned}J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [x^T(t)Cx(t) + u^T(t)D_2u(t) + \\ + v^T(t)D_1v(t) + v_{on}^T(t)D_1v_{on}(t)]dt,\end{aligned}\quad (2.17)$$

а модель, описывающая «свободное» движение объекта на интервале оптимизации, которую будем называть *прогнозирующей моделью*, есть

$$\begin{aligned}\dot{x}_M(\tau) &= \bar{A}(\tau)x_M(\tau) + \bar{B}(\tau)u_M(\tau), & x_M(t_0) &= x_0, \\ \dot{u}_M(\tau) &= 0, & u_M(t_0) &= u_0,\end{aligned}\quad (2.18)$$

где M – указывает на принадлежность прогнозирующей модели. Здесь C, D_2 – неотрицательно определенные, а D_1 – положительно определенная весовые матрицы.

Тогда

$$v_{on}(t) = -D_1^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial u} \right)^T, \quad (2.19)$$

где функция $V = V(t, x, u)$ удовлетворяет уравнению:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}[x_M^T(\tau)Cx_M(\tau) + u_M^T(\tau)D_2u_M(\tau)], \quad V(T) = 0. \quad (2.20)$$

Заметим, что это уравнение справедливо на траектории движения модели (2.18)

Распишем в (2.20) полную производную функции V :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial V}{\partial x_M} \dot{x}_M(\tau) = -\frac{1}{2}[x_M^T(\tau) C x_M(\tau) + u_M^T(\tau) D_2 u_M(\tau)] \quad (2.21)$$

и обозначим

$$W_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial x_M} \right)^T, \quad W_2 = \left(\frac{\partial V}{\partial u_M} \right)^T, \quad (2.22)$$

n -мерный и m -мерный векторы-столбцы.

Тогда на траектории движения модели (2.18) полные производные для W_1 и W_2 будут равны:

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= \frac{\partial W_1}{\partial \tau} + \frac{\partial W_1}{\partial x_M} \dot{x}_M, \\ \dot{W}_2 &= \frac{\partial W_2}{\partial \tau} + \frac{\partial W_2}{\partial x_M} \dot{x}_M. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Если продифференцировать (2.21) последовательно по x_M , u_M и подставить уравнения для модели (2.18) то, с учетом обозначений (2.22) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{W}_1(\tau) &= -\bar{A}^T(\tau)W_1(\tau) - C x_M(\tau), & W_1(T) &= 0, \\ \dot{W}_2(\tau) &= -\bar{B}^T(\tau)W_1(\tau) - D_2 u_M(\tau), & W_2(T) &= 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Решая систему (2.24) в обратном времени, найдем управление в момент t , которое будет равно:

$$v_{on}(t) = -D_1^{-1}W_2(t). \quad (2.25)$$

2.3. Оптимальное управление при минимизации локального квадратичного критерия

Будем формировать управляющие воздействия по текущей информации об объекте. При этом минимизируемый функционал можно представить в виде:

$$J(k) = \frac{1}{2} [x^T(k+1) C x(k+1) + u^T(k) D u(k)], \quad (2.26)$$

где C – неотрицательно определенная, а D – положительно определенная весовые матрицы, k – соответствует дискретному моменту времени t_k , а модель объекта является системой линейных разностных уравнений:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x(0) = x_0. \quad (2.27)$$

Управление $u(k)$ будем определять из условия минимума функционала (2.26), т.е.

$$\frac{\partial J(k)}{\partial u(k)} = 0. \quad (2.28)$$

Запишем функционал (2.26) для модели (2.27) (для простоты записи аргумент k временно опустим)

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} [(Ax + Bu)^T C (Ax + Bu) + u^T D u] = \\ &= \frac{1}{2} [x^T A^T C A x + x^T A^T C B u + u^T B^T C A x + u^T B^T C B u + u^T D u]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись правилами дифференцирования билинейной формы $x^T A y$, т.е.

$$\frac{\partial x^T A y}{\partial x} = y^T A^T, \quad \frac{\partial x^T A y}{\partial y} = x^T A,$$

где x, y – векторы-столбцы, A – матрица соответствующего порядка, получим

$$\frac{\partial J}{\partial u} = x^T A^T C B + u^T B^T C B + u^T D = 0,$$

и

$$(B^T C B + D)u + B^T C A x = 0.$$

Тогда управление, полученное на основе минимума функционала (2.26) имеет вид:

$$u(k) = -\left(B^T(k)CB(k) + D\right)^{-1} B^T(k)CA(k)x(k). \quad (2.29)$$

2.4. Следящие системы управления

Ранее рассматривались задачи формирования управляющих воздействий, когда целью управления являлось приведение системы в нулевое состояние. Существует большой круг задач, где выдвигается требование достижения объектом некоторого *заданного состояния* $x_z(t)$ с последующим удержанием состояния объекта в малой окрестности $x_z(t)$.

Будем считать, что $x_z(t)$ – вектор, компоненты которого заданы в каждый момент времени функционирования системы управления. В этом случае оптимизируемые функционалы (2.1) и (2.17) запишутся с помощью вектора рассогласования $(x(t) - x_z(t))$, а (2.26) – $(x(k+1) - x_z(k))$.

Управление при минимизации классического квадратичного функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [(x(t) - x_z(t))^T C (x(t) - x_z(t)) + u^T(t) D u(t)] dt \quad (2.30)$$

для модели объекта (1.2) запишется в виде:

$$u(t) = -D^{-1} \bar{B}^T(t) S(t) (x(t) - x_z(t)). \quad (2.31)$$

Для функционала обобщенной работы:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [(x(t) - x_z(t))^T C(x(t) - x_z(t)) + u^T(t) D_2 u(t) + v^T(t) D_1 v(t) + v_{on}^T(t) D_1 v_{on}(t)] dt \quad (2.32)$$

для модели объекта (2.16) получим:

$$v(t) = -D_1^{-1} W_2(t) \quad (2.33)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{W}_1(\tau) &= -\bar{A}^T(\tau) W_1(\tau) - C(x(\tau) - x_z(\tau)), & W_1(T) &= 0, \\ \dot{W}_2(\tau) &= -\bar{B}^T(\tau) W_1(\tau) - D_2 u(\tau), & W_2(T) &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

При формировании локально-оптимального управления на основе минимизации функционала

$$J(k) = \frac{1}{2} [(x(k+1) - x_z(k))^T C(x(k+1) - x_z(t_k)) + u^T(k) D u(k)], \quad (2.35)$$

для модели объекта (2.27) получим:

$$u(k) = -(B^T(k) C B(k) + D)^{-1} B^T(k) C [A(k)x(k) - x_z(t_k)]. \quad (2.36)$$

3. Синтез управляющих воздействий на основе минимизации квадратичных функционалов

Развитие цифровых информационно-измерительных комплексов привело к тому, что все чаще управление объектом в процессе его функционирования осуществляется с помощью компьютера.

3.1. Основные понятия цифровых систем управления

Включение компьютера в контур управления неизбежно создаст особые условия его реализации, основными из которых являются: дискретность формируемого управления по времени и запаздывание подачи управляющего воздействия на приводы рулевых органов по отношению к моменту выдачи измерительной системой всей необходимой информации. Такие системы управления оперируют только с цифровой информацией и называются цифровыми системами управления.

Цифровую систему управления непрерывным объектом с замкнутой обратной связью обобщенно можно изобразить схемой на рис. 3.1.

Работа системы управления синхронизируется в ЭВМ таймером реального времени, который определяет момент поступления информации об объекте и момент воздействия управляющего сигнала на объект. При этом состояние объекта измеряется только в дискретные моменты времени.

На входе в систему управления непрерывный вектор состояния $x(t)$ преобразуется в цифровую форму аналого-цифровым преобразователем (АЦП), а на выходе цифровой вектор управляющих воздействий $u(k)$ преобразуется в непрерывный сигнал $u(t)$ цифро-аналоговым преобразователем (ЦАП).

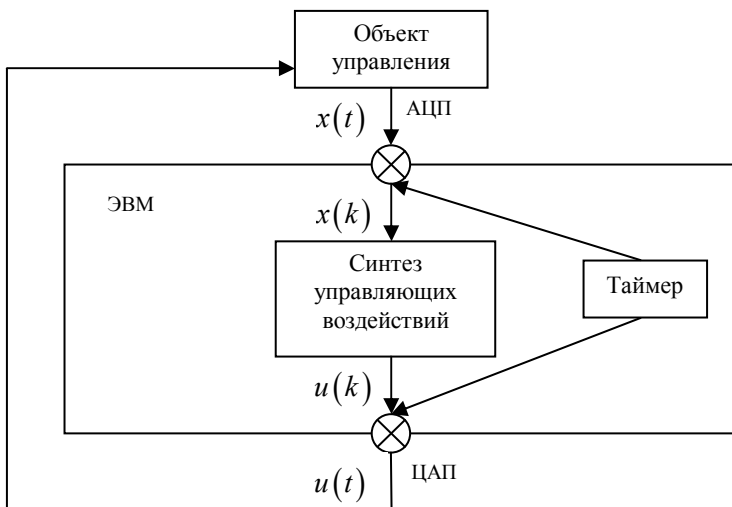


Рис. 3.1. Система управления непрерывным объектом с замкнутой обратной связью

Момент времени, в который происходит преобразование непрерывной информации в дискретную, называется *моментом квантования* управляющего воздействия и обозначается k . Промежуток времени $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ между двумя моментами квантования называется *периодом квантования*.

Квантование – неизбежный процесс в цифровых системах управления. Будем полагать, что для управления исходным непрерывным объектом используется цифровая система, формирующая кусочно-постоянный вектор управления $u(k)$ с моментом и периодом квантования, совпадающим с моментом и периодом поступления в компьютер информации об объекте. При этом непрерывность управляющего сигнала при воздействии на объект достигается путем сохранения его постоянной величины между формированиями. Таким образом, управление принадлежит к классу кусочно-постоянных непрерывных слева функций с фиксированным периодом квантования Δt . Если Δt достаточно мало, то цифровая система управления функционирует почти как непрерывная, так

как потери информации за счет квантования будут незначительными. Но слишком малое время Δt может оказаться недостаточным для формирования управляющего сигнала, так как реализация систем управления в реальных условиях движения объекта характеризуется большой сложностью, при этом формирование управляющих воздействий должно осуществляться за время, пренебрежительно малое в сравнении со скоростью изменения внешней среды и самого объекта.

3.2. Моделирование поведения управляемого объекта

При проведении имитационных экспериментов для определения качества синтезируемого управления необходимо моделировать поведение управляемого объекта. Будем предполагать, что поведение объекта описывается системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.1)$$

Моделирование будем осуществлять в предположении, что шаг дискретизации Δt совпадает с периодом квантования управляющего сигнала, а момент дискретизации k – с моментом приложения управляющих воздействий. Причем управление является кусочно-постоянным на каждом интервале выдачи управляющих воздействий, то есть

$$u(t) = u(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (3.2)$$

Тогда можно ограничиться описанием поведения объекта в моменты квантования и записать дискретный аналог для системы (3.1) в виде:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x(0) = x_0. \quad (3.3)$$

Для простоты будем считать, что матрицы дискретной системы (3.3) имеют вид:

$$A(k) = I_n + \Delta t \bar{A}(t_k), \quad (3.4)$$

$$B(k) = \Delta t \bar{B}(t_k), \quad (3.5)$$

где I_n – единичная матрица порядка n , k – соответствует моменту времени $t_k = t_0 + \Delta t$. В силу линейности системы (3.1) выражения (3.4), (3.5) можно получить при решении (3.1) методом Эйлера.

Если модель объекта задана в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ \dot{u}(t) &= v(t), \quad u(t_0) = u_0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $u(t)$ – вектор положения органов управления, а $v(t)$ – вектор управления, то дискретная система для (3.6) примет вид:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x(0) = x_0, \\ u(k+1) &= u(k) + \Delta t v(k), \quad u(0) = u_0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $A(k)$ и $B(k)$ определяются согласно (3.4) и (3.5).

В общем случае матрицы дискретной системы представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} A(k) &= I_n + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta t^i \bar{A}^i(t_k)}{i!}, \\ B(k) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta t^i \bar{A}^{i-1}(t_k) \bar{B}(t_k)}{(i-1)!}, \end{aligned}$$

где k – соответствует моменту времени $t_k = t_0 + k\Delta t$.

Если в суммах остаются слагаемые, содержащие Δt в первой степени, то это соответствует решению дифференциального уравнения (3.1), (3.6) методом Эйлера, а если Δt в 4-й степени – то методом Рунге–Кутты.

Моделирование поведения объекта в случае нестационарной модели (например, моделирование самолета на взлете) можно осуществлять следующим образом. На траектории движения объ-

екта задаются значения матриц (или элементов этих матриц), характеризующих модель объекта в некоторые моменты времени T_i , $i = \overline{1, N_R}$. Нестационарная модель в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ строится по заданным характеристикам, используя методы приближения данных: интерполирование, сплайн-функции, аппроксимацию по методу наименьших квадратов и т.д.

3.3. Синтез оптимального управления

Рассмотрим совмещенный синтез цифрового управления на основе оптимизации критериев классического квадратичного (2.30) обобщенной работы (2.32) и локального (2.35) при слежении за заданным состоянием $x_z(t)$. При этом, если решается задача стабилизации, то полагаем $x_z(t) \equiv 0$.

Кроме того, будем предполагать, что:

- 1) все временные переменные кратны Δt ;
- 2) моменты и периоды квантования одинаковы для всех координат объекта;
- 3) цифровая система формирует вектор управления с моментом и периодом квантования, которые совпадают с моментом и периодом поступления информации об объекте;
- 4) управления являются кусочно-постоянными функциями на каждом интервале выдачи управляющих воздействий

$$u(t) = u(k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}.$$

Пусть в управляющем компьютере модель объекта представлена в виде:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x(0) = x_0, \quad (3.8)$$

или

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x(0) = x_0, \\ u(k+1) &= u(k) + \Delta t v(k), \quad u(0) = u_0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$A(k) = I_n + \Delta t \bar{A}(t_k), \quad B(k) = \Delta t \bar{B}(t_k). \quad (3.10)$$

Форма представления модели объекта зависит от решаемой задачи управления: управление положением органов управления или управление скоростью отклонения органов управления.

Синтез управляющих воздействий в процессе функционирования объекта накладывает определенные ограничения на его реализацию. Основным ограничением является то, что при формировании управления в момент $t \in [t_0, T]$, известна информация о поведении объекта в предыдущие моменты времени и не известна в последующие.

Синтез управляющих воздействий по классическому квадратичному критерию

Если модель объекта (3.8) является стационарной, то управление, формируемое на k -ом такте (в момент $t_k = t_0 + k\Delta t$) на основе минимизации функционала (2.30) имеет вид:

$$u(k) = -D_d^{-1} B^T S(x(k) - x_z(t_k)), \quad (3.11)$$

где матрица S является решением уравнения Риккати, которое путем замены переменной можно записать в прямом времени:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \bar{A}^T S(t) + S(t) \bar{A} - S(t) \bar{B} D_d^{-1} \bar{B}^T S(t) + C, \\ S(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

При этом можно искать установившееся решение уравнения (3.12) по следующему итерационному алгоритму:

$$\begin{aligned} S(i+1) &= A^T S(i) + S(i) A - S(i) B D_d^{-1} B^T S(i) - S(i) + C_d, \\ S(0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

и, при выполнении условия:

$$\frac{\|S(i+1) - S(i)\|}{\|S(i+1)\|} \leq \varepsilon, \quad (3.14)$$

полагать $S = S(i+1)$. В (3.13)-(3.14) $D_d = \Delta t D$, $C_d = \Delta t C$, ε – заданная точность решения уравнения Риккати.

Заметим, что уравнение (3.13) записано с помощью матриц дискретной системы, которая получена из непрерывной методом Эйлера.

Пример:

Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $t_0 = 0$, $T = 10$, $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,4 & -1,4 \end{pmatrix}$, $\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,3 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Моделирование поведения управляемого объекта осуществляется с помощью разностного уравнения

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0,$$

где $A = I + \Delta t \bar{A}$, $B = \Delta t \bar{B}$, I – единичная матрица второго порядка, дискрет k соответствует моменту времени $t_k = t_0 + k\Delta t$, $\Delta t = 0,1$, $k = \overline{0, N}$, $N = \frac{T - t_0}{\Delta t} = 100$.

Управление определяется из условия минимума квадратичного функционала

$$J(t_0, T) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [x^T(t)Cx(t) + u^T(t)Du(t)] dt$$

и имеет вид:

$$u(k) = -D_d^{-1}B^T Sx(k),$$

где C , D – весовые матрицы функционала, равные

$$C = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,7 \end{pmatrix}, \quad D = 1,$$

S – матрица решения уравнения Риккати с точностью $\varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3}$, которое осуществляется по итерационной формуле:

$$S_{i+1} = A^T S_i + S_i A - S_i B D_d^{-1} B^T S_i - S_i + C_d, \quad S_0 = 0$$

и при выполнении условия

$$\frac{\|S_{i+1} - S_i\|}{\|S_i\|} \leq \varepsilon$$

матрица S полагается равной S_{i+1} . Здесь используются следующие обозначения: $\|\cdot\|$ – первая норма матрицы; $C_d = \Delta t C$, $D_d = \Delta t D$.

Получено следующее значение матрицы S :

$$S = \begin{pmatrix} 2,295 & 0,734 \\ 0,734 & 0,772 \end{pmatrix}.$$

На рис. 3.2 приведены графики переходных процессов $x(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$ и управлений $u(k)$, причем жирная линия изображает управляющие воздействия.

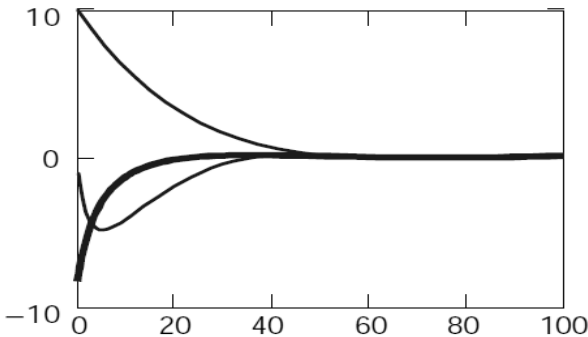


Рис. 3.2. График переходных процессов и управлений

Синтез управляющих воздействий по квадратичному критерию обобщенной работы

Для модели объекта (3.6) функционал обобщенной работы запишем для скользящего интервала оптимизации $[t_k, t_k + l_p \Delta t]$:

$$J(t_k) = \frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_k + l_p \Delta t} [(x(t) - x_z(t_k))^T C(x(t) - x_z(t_k)) + u^T(t) D_2 u(t) + v^T(t) D_1 v(t) + v_{on}^T(t) D_1 v_{on}(t)] dt, \quad (3.15)$$

и будем описывать поведение объекта на интервале оптимизации с помощью стационарной дискретной прогнозирующей модели, характеризующей «свободное» движение объекта ($v(t) = 0$):

$$x_M(j+1) = A(k)x_M(j) + B(k)u(k), \quad x_M(j=k) = x(k), \\ j = k, k+1, \dots, k + l_p - 1. \quad (3.16)$$

Тогда управление будет иметь вид:

$$v(k) = -D_1^{-1} W_2(k), \quad (3.17)$$

где $W_2(k)$ определяется решением в обратном времени системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.34) на интервале оптимизации $[t_k, t_k + l_p \Delta t]$.

Так как решение этой системы зависит от значений состояния прогнозирующей модели на интервале $[t_k, t_k + l_p \Delta t]$, то сначала, решая в прямом времени уравнение (3.16) определяется состояние прогнозирующей модели в конечный момент интервала оптимизации $x_M(k + l_p)$, а затем $W_2(k)$ определяется решением в обратном времени системы разностных уравнений вида:

$$g_M(j-1) = 2g_M(j) - A(k)g_M(j) - B(k)u(k), \\ g_M(k + l_p) = x_M(k + l_p),$$

$$\begin{aligned}
W_1(j-1) &= A^T(k)W_1(j) + \Delta t C(g_M(j) - x_z(t_k)), \\
W_1(k+l_p) &= 0, \\
W_2(j-1) &= W_2(j) + B^T(k)W_1(j) + \Delta t D_2 u(k), \\
W_2(k+l_p) &= 0, \\
j &= k+l_p, k+l_p-1, \dots, k+1,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

где первое уравнение описывает движение прогнозирующей модели (3.16) в обратном времени.

Пример:

Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t), \quad x(t_0) = x_0, \\
\dot{u}(t) &= v(t), \quad u(t_0) = u_0,
\end{aligned}$$

где

$$t_0 = 0, \quad T = 10, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,4 & -1,4 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,3 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_0 = 0.$$

Моделирование поведения управляемого объекта осуществляется с помощью разностных уравнений

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0, \\
u(k+1) &= u(k) + v(k)\Delta t, \quad u(0) = u_0,
\end{aligned}$$

где $A = I + \Delta t \bar{A}$, $B = \Delta t \bar{B}$, I – единичная матрица второго порядка, дискрет k соответствует моменту времени $t_k = t_0 + k\Delta t$, $\Delta t = 0,1$, $k = \overline{0, N}$, $N = \frac{T - t_0}{\Delta t} = 100$.

Управление $v(t)$ определяется из условия минимума функционала обобщенной работы

$$J(t_k) = \frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_k + l_p \Delta t} [x^T(t) C x(t) + u^T(t) D_2 u(t) + v^T(t) D_1 v(t) + v_{on}^T(t) D_1 v_{on}(t)] dt,$$

где $l_p \Delta t = 15 \Delta t$ – длина скользящего интервала оптимизации;
 C, D_1, D_2 – весовые матрицы функционала, равные

$$C = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,7 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 1, \quad D_2 = 1.$$

На рис. 3.3 приведены графики переходных процессов $x(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$ и $u(k)$, причем жирная линия изображает управляющие воздействия.

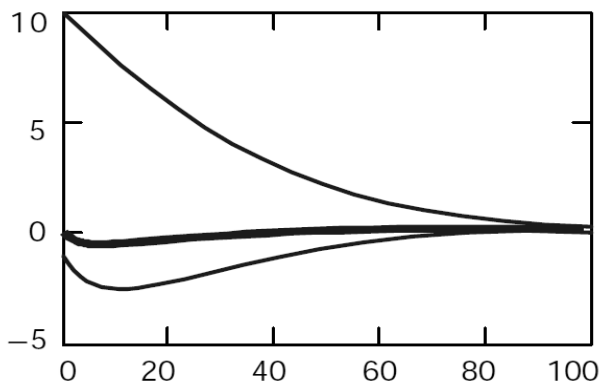


Рис. 3.3. График переходных процессов и управлений

Синтез управляющих воздействий по локальному квадратичному критерию

Для модели объекта (3.8) локальный квадратичный критерий запишется следующим образом:

$$J(k) = \frac{1}{2}[(x(k+1) - x_z(k))^T C(x(k+1) - x_z(t_k)) + u^T(k)Du(k)]. \quad (3.17)$$

Управление, формируемое на основе минимизации этого критерия, имеет вид:

$$u(k) = -(B^T(k)CB(k) + D)^{-1}B^T(k)C[A(k)x(k) - x_z(t_k)]. \quad (3.18)$$

Качество функционирования системы уравнения зависит от весовых матриц рассматриваемых критериев, определение которых осуществляется на этапе предварительного проектирования путем коррекции элементов весовых матриц и анализа получаемых при этом переходных процессов и управлений.

Для выбора весовых матриц C и D локального критерия (3.17) можно воспользоваться методом случайного поиска или назначить их исходя из каких-либо конструктивных соображений с учетом свойств управляемого объекта. Достаточно хорошо работает следующая методика.

Запишем для (3.17) систему вида:

$$x(k+1) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k), \quad x(0) = x_0, \quad (3.19)$$

где \tilde{A}, \tilde{B} – некоторые постоянные матрицы, например, $\tilde{A} = A(0)$, $\tilde{B} = B(0)$, и выбираются весовые матрицы для суммарного критерия:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k+1)C_1x(k+1) + u^T(k)D_1u(k)], \quad (3.20)$$

где C_1, D_1 – заданные неотрицательно и положительно определенные матрицы.

Весовые матрицы C и D локального критерия полагаются равными:

$$C = \tilde{A}^T C \tilde{A} - \tilde{A}^T C \tilde{B} (\tilde{B}^T C \tilde{B} + D_1)^{-1} \tilde{B}^T C \tilde{A} + C_1, \quad (3.21)$$

$$D = D_1. \quad (3.22)$$

Алгебраическое уравнение Риккати (3.21) можно решить по итерационной схеме:

$$C(i+1) = [\tilde{A}^T C(i) \tilde{A} - \tilde{A}^T C(i) \tilde{B} (\tilde{B}^T C(i) \tilde{B} + D)^{-1} \tilde{B}^T C(i) \tilde{A} + C_1 - C(i)] \Delta t + C(i), \quad C(0) = C_1, \quad (3.23)$$

и при выполнении условия:

$$\frac{\|C(i+1) - C(i)\|}{\|C(i+1)\|} \leq \varepsilon \quad (3.24)$$

матрица C полагается равной $C(i+1)$, $D = D_1$.

Пример

Поведение объекта описывается системой разностных уравнений вида:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0.$$

где $k = \overline{0, N}$, $N = 100$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ -0,04 & 0,86 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,13 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Эта разностная система совпадает с системой, полученной при дискретизации с шагом $\Delta t = 0,1$ непрерывной системы из предыдущих примеров.

Управление $u(k)$ определяется из условия минимума локального квадратического функционала

$$J(k) = \frac{1}{2} \left[x^T(k+1) C_1 x(k+1) + u^T(k) D_1 u(k) \right]$$

и имеет вид

$$u(k) = -(B^T C B + D)^{-1} B^T C A x(k),$$

где C_1, D_1 – весовые матрицы функционала, равные

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,7 \end{pmatrix}, D_1 = 1,$$

а матрица C являющаяся решением уравнения Риккати с точностью $\varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3}$, которое осуществляется по итерационной формуле:

$$C(i+1) = [A^T C(i) A - A^T C(i) B (B^T C(i) B + D)^{-1} B^T C(i) A + C_1 - C(i)] \Delta t + C(i), \quad C(0) = C_1,$$

и при выполнении условия

$$\frac{\|C(i+1) - C(i)\|}{\|C(i+1)\|} \leq \varepsilon$$

матрица C полагается равной $C(i+1)$, а $D = D_1$. В результате матрица C получилась равной

$$C = \begin{pmatrix} 23,969 & 7,976 \\ 7,976 & 8,766 \end{pmatrix}.$$

На рис. 3.4 приведены графики переходных процессов $x(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$ и управлений $u(k)$ причем жирная линия изображает управляющие воздействия.

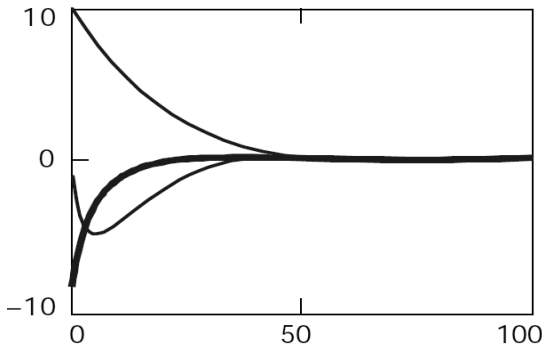


Рис. 3.4. График переходных процессов и управлений

Структурная схема совмещенного синтеза цифрового управления объектом представлена на рис. 3.5.

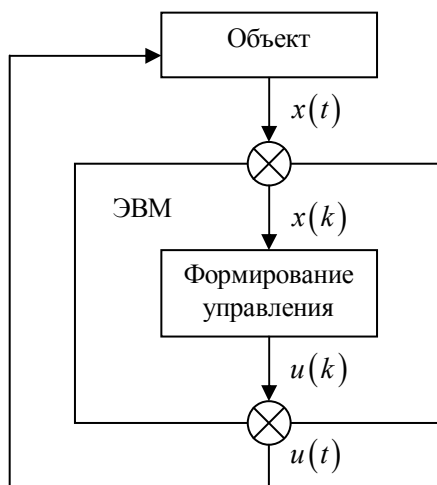


Рис. 3.5. Схема совмещенного синтеза оптимального управления

4. Применение оценивателей в контуре управления

При синтезе управляющих воздействий в реальных условиях информация о состоянии объекта поступает с измерительного комплекса, который достаточно часто содержит неполную информацию об объекте, искаженную ошибками измерений. Кроме того, при описании модели объекта необходимо учитывать влияние внешних возмущений. В связи с этим будем рассматривать алгоритмы синтеза управляющих воздействий, учитывающие условия их реализации.

4.1. Моделирование поведения объекта при наличии внешних возмущений

Будем предполагать, что внешние возмущения являются аддитивными и описываются вектором гауссовских шумов с заданной матрицей влияния $\bar{F}(t)$. Тогда модель объекта можно записать в виде:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)u(t) + \bar{F}(t)q(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (4.1)$$

где $q(t)$ – l_1 -мерный вектор гауссовских шумов с заданными характеристиками:

$$M\{q(t)\} = \bar{q}(t), \\ M\{(q(t) - \bar{q}(t))(q(\tau) - \bar{q}(\tau))^T\} = Q(t)\delta(t - \tau),$$

где $\delta(t - \tau)$ – дельта-функция Дирака, $\bar{F}(t)$ – матрица влияния внешних возмущений размерности $n \times l_1$.

Для моделирования поведения объекта строится разностный аналог уравнения (4.1) с помощью фундаментальных матриц соот-

ветствующей однородной системы и в предположении, что $q(t)$ является кусочно-постоянной функцией

$$q(t) = q(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}.$$

Тогда разностное уравнение, соответствующее (4.1), имеет вид:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + F(k)q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (4.2)$$

где $A(k)$, $B(k)$ и $F(k)$ вычисляются следующим образом:

$$A(k) = I_n + \Delta t \bar{A}(t_k), \quad (4.3)$$

$$B(k) = \Delta t \bar{B}(t_k), \quad (4.4)$$

$$F(k) = \Delta t \bar{F}(t_k). \quad (4.5)$$

В (4.2) $q(k)$ – последовательность гауссовских величин, при этом

$$M\{q(k)\} = \bar{q}(k) = \bar{q}(t_k),$$

$$M\{(q(k) - \bar{q}(k))(q(j) - \bar{q}(j))^T\} = Q(k)\delta_{kj},$$

$$Q(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} M\{(q(t) - \bar{q}(t))(q(\tau) - \bar{q}(\tau))^T\} dt d\tau = Q(t_k) \Delta t.$$

Для того чтобы внешние возмущения $q(t)$ и $q(k)$ имели одни и те же статистические характеристики, матрицу $F(k)$ представим в виде:

$$F(k) = \sqrt{\Delta t} \bar{F}(t_k). \quad (4.6)$$

Если рассматривается задача управления скоростью отклонения органов управления

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)u(t) + \bar{F}(t)q(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ \dot{u}(t) &= v(t), \quad u(t_0) = u_0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

то эквивалентная дискретная система имеет вид:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) + F(k)q(k), \quad x(0) = x_0, \\ u(k+1) &= u(k) + \Delta t v(k), \quad u(0) = u_0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $A(k), B(k), F(k)$ вычисляются согласно (4.3), (4.4), (4.5).

4.2. Описание математической модели измерительного комплекса

Использование компьютеров для формирования управляющих воздействий приводит к тому, что измерения поступают в дискретные моменты времени t_1, t_2, \dots , а управления являются кусочно-постоянными непрерывными слева функциями на каждом интервале выдачи управляющих воздействий, то есть

$$u(t) = u(k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad t_{k+1} - t_k = \Delta t.$$

Будем предполагать, что математическая модель измерительного комплекса имеет вид:

$$y(k) = Hx(k) + r(k), \quad (4.9)$$

где $y(k)$ – l -мерный вектор измерений, H – матрица канала измерений размерности $l \times n$, состоящая из нулей и единиц, нулевые столбцы которой соответствуют неизмеряемым компонентам вектора состояния, $r(k)$ – дискретный гауссовский шум с характеристиками:

$$M\{r(k)\} = 0, \quad M\{r(k)r^T(j)\} = R\delta_{kj}.$$

4.3. Оценивание состояния модели объекта

Так как в реальных условиях управление объектом осуществляется по результатам измерений, а все измерения осуществляются с погрешностью, и, кроме того, в модели объекта могут существо-

вать компоненты вектора состояния, недоступные измерению, то для формирования управляющих воздействий необходимо осуществлять оценивание вектора состояния. Так как информация о модели объекта поступает с измерительного комплекса в дискретные моменты времени, то будем строить оценку $\hat{x}(k)$ вектора состояния $x(k)$ по результатам текущих измерений $y(k)$.

Основные подходы к построению оценок векторов состояния состоят в следующем. Предположим, что для некоторой системы состояние $x(k)$ недоступно непосредственному измерению, а получены последовательные измерения $y(1), y(2), \dots, y(j)$. Обозначим оценку $\hat{x}(k)$, полученную на основе этих измерений, через $\hat{x}(k)$ и определим ее как n -мерную вектор-функцию измерений

$$\hat{x}(k / j) = \phi_k \left\{ y(i), \quad i = \overline{1, j} \right\}.$$

Задача построения оценки для состояния $x(k)$ представляет собой задачу определения функции ϕ_k некоторым рациональным и обоснованным способом.

Если $k > j$, то задача построения оценки называется *задачей предсказания*, если $k = j$, то такая задача называется *задачей фильтрации*, если $k < j$, то получаем *задачу сглаживания* или *интерполяции*.

Рассмотрим функцию ошибки оценки

$$\tilde{x}(k / j) = x(k) - \hat{x}(k / j)$$

и обозначим через $L = L[\tilde{x}(k / j)]$ функцию потерь или штрафов. Эта функция должна обладать следующими свойствами:

- 1) быть скалярной функцией;
- 2) $L(0) = 0$;
- 3) быть неубывающей функцией расстояния от начала координат;
- 4) быть симметричной относительно нуля.

Функция L , обладающая такими свойствами, называется *допустимой функцией потерь*.

Определим критерий качества оценивания как среднее значение функции потерь:

$$J[\tilde{x}(k/j)] = M\{L[\tilde{x}(k/j)]\}.$$

Говорят, что оценка $\hat{x}(k/j)$, минимизирующая $J[\tilde{x}(k/j)]$, является «*наилучшей*» или *оптимальной*. Заметим, что оптимальная оценка минимизирует среднее значение функции потерь, то есть является «*оптимальной в среднем*».

Пусть

$$L[\tilde{x}(k/j)] = \tilde{x}^T(k/j)\tilde{x}(k/j).$$

Соответствующий этой функции потерь критерий качества оценки называется *среднеквадратической ошибкой*, так как $M\{\tilde{x}^T(k/j)\tilde{x}(k/j)\}$ есть среднее значение квадрата евклидовой меры вектора ошибки.

Для построения оценки вектора состояния используются различные подходы. Будем строить рекуррентный алгоритм статистической обработки типа *фильтра Калмана*, осуществляющий оценивание состояния по результатам текущих измерений.

Пусть математические модели объекта и канала измерений имеют вид:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + F(k)q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (4.10)$$

$$y(k+1) = Hx(k+1) + r(k+1), \quad (4.11)$$

где $q(k)$ и $r(k)$ – независимые гауссовские последовательности с характеристиками:

$$\begin{aligned} M\{q(k)\} &= \bar{q}(k), \quad M\{(q(k) - \bar{q}(k))(q(j) - \bar{q}(j))^T\} = Q(k)\delta_{kj}, \\ M\{r(k)\} &= 0, \quad M\{r(k)r^T(j)\} = R\delta_{kj}, \\ M\{q(k)r^T(j)\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Кроме того, предполагается, что априорное распределение вектора x_0 является гауссовским:

$$M\{x_0\} = \bar{x}_0, \quad M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\} = P_{x_0}, \quad (4.13)$$

где P_{x_0} – дисперсионная матрица ошибок оценивания начального состояния.

Обозначим оценку фильтрации, полученную по результатам измерений $y(1), y(2), \dots, y(k)$ через $\hat{x}(k)$. При принятых предположениях задача оптимальной фильтрации может быть сформулирована следующим образом. Располагая последовательностью векторов измерений $y(1), y(2), \dots, y(k)$, моделью которых является система уравнений (4.10), (4.11) требуется определить оценку $\hat{x}(k)$ вектора состояния $x(k)$, удовлетворяющую требованиям несмещенности

$$M\{\hat{x}(k)\} = M\{x(k)\} \quad (4.14)$$

при минимальной дисперсии ошибок оценки.

Обозначим

$$\varepsilon(k) = \hat{x}(k) - x(k) \quad (4.15)$$

ошибку оценки и

$$P(k) = M\{\varepsilon(k)\varepsilon^T(k)\} \quad (4.16)$$

дисперсионную матрицу ошибки оценки.

Тогда критерий оптимальности запишется в виде:

$$J(k) = M\{\varepsilon^T(k)\varepsilon(k)\} = M\{tr(\varepsilon(k)\varepsilon^T(k))\} = tr(P(k)), \quad (4.17)$$

где $tr(\cdot)$ – обозначает след матрицы.

Будем строить оптимальную оценку $\hat{x}(k+1)$ по текущему измерению $y(k+1)$ в виде:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k+1/k) + K(k)[y(k+1) - H\hat{x}(k+1/k)], \quad (4.18)$$

где вектор

$$\hat{x}(k+1/k) = A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k) + F(k)\bar{q}(k), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0 \quad (4.19)$$

является экстраполированной оценкой вектора состояния $x(k+1)$, $K(k)$ – матрица коэффициентов усиления фильтра.

Таким образом, задача построения оптимальной оценки дискретной системы (4.10) сводится к задаче определения такой матрицы $K(k)$, при которой оценка $\hat{x}(k+1)$ удовлетворяет условиям (4.14) при ограничениях (4.10)-(4.11), (4.18)-(4.19) и обеспечивает минимум критерия (4.17).

Заметим, что выражение (4.18) объединяет множество фильтров, различающихся законом изменения матриц коэффициентов усиления, и характеризует рекуррентную форму выработки оценок состояния.

Получим уравнение для вектора ошибки оценки $\varepsilon(k+1)$. Для этого подставим в (4.18) выражение (4.19) и вычтем (4.10) с учетом (4.11). Тогда (в дальнейшем для сокращения записи опустим аргумент k везде, кроме векторов ошибок и дисперсионных матриц):

$$\varepsilon(k+1) = (A - KHA)\varepsilon(k) - (I - KH)F\bar{q} + (KH - I)Fq + Kr \quad (4.20)$$

и дисперсионная матрица ошибки оценки $\varepsilon(k+1)$ будет равна:

$$P(k+1) = (A - KHA)P(k)(A - KHA)^T - (KH - I)FQF^T(KH - I)^T + KRK^T, \quad (4.21)$$

где I – единичная матрица соответствующего порядка.

В соответствии с критерием оптимальности (4.17) матрица усиления фильтра K определяется из условия:

$$\frac{dJ(k)}{dK} = \frac{d \operatorname{tr} P(k+1)}{dK} = 0, \quad (4.22)$$

или

$$\begin{aligned} -2AP(k)A^T H^T + 2KHAP(k)A^T H^T - 2FQF^T H^T + \\ + 2KHFQF^T H^T + 2KR = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Из (4.23), после приведения подобных членов, получается:

$$\begin{aligned} KH(AP(k)A^T + FQF^T)H^T + KR = \\ = (AP(k)A^T + FQF^T)H^T. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Обозначим

$$P(k+1/k) = AP(k)A^T + FQF^T \quad (4.25)$$

– прогноз дисперсионной матрицы на один шаг вперед. Тогда выражение (4.24) с учетом (4.25) примет вид:

$$KHP(k+1/k)H^T + KR = P(k+1/k)H^T \quad (4.26)$$

и для определения матрицы K получим выражение:

$$K = P(k+1/k)H^T (HP(k+1/k)H^T + R)^{-1}. \quad (4.27)$$

Выражение для дисперсионной матрицы $P(k+1)$ можно упростить, если в (4.21) подставить (4.27) и учесть (4.25). Тогда получим

$$P(k+1) = (I - KH)P(k+1/k).$$

Таким образом, построение оценки $\hat{x}(k+1)$ по результатам измерений $y(k+1)$ осуществляется с помощью следующего рекуррентного алгоритма:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \hat{x}(k+1/k) + K(k)[y(k+1) - H\hat{x}(k+1/k)], \\ \hat{x}(k+1/k) &= A(k)\hat{x}(k) + B(k)u(k) + F(k)\bar{q}(k), \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \\ K(k) &= P(k+1/k)H^T [HP(k+1/k)H^T + R]^{-1}, \\ P(k+1/k) &= A(k)P(k)A^T(k) + F(k)QF^T(k), \\ P(k+1) &= [I - K(k)H]P(k+1/k), \\ P(0) &= P_{x_0}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.4. Синтез управляющих воздействий по оценкам состояния

Для критериев оптимальности классического (2.30) и обобщенной работы (2.32) доказаны теоремы разделения, согласно которым для линейного управляемого объекта, математическая модель которого описывается уравнениями типа (4.1) или (4.7), при линейном наблюдении с аддитивным белым гауссовским шумом, минимизация математического ожидания функционалов (2.30) или (2.32) приводит к системе, состоящей из фильтра Калмана (4.28) и алгоритма управления, структура которого совпадает с законом оптимального управления, построенным для детерминированной полностью известной модели объекта.

Таким образом, управление для модели объекта (4.1), синтезируемое на основе минимизации математического ожидания классического квадратичного функционала, будет формироваться по оценкам состояния, то есть вместо значений вектора состояния $x(k)$ в соответствующих формулах будет использоваться его оценка $\hat{x}(k)$. Аналогичная ситуация складывается при формировании управления на основе минимизации математического ожидания функционала обобщенной работы. В этом случае оценка состояния $\hat{x}(k)$ заменит вектор состояния в уравнении прогнозирующей модели, в которой будем использовать постоянные внешние возмущения $\bar{q}(k)$, равные математическому ожиданию шума в модели объекта в начальный момент интервала оптимизации:

$$\begin{aligned} x_M(j+1) &= A(k)x_M(j) + B(k)u(k) + F(k)\bar{q}(k), \\ x_M(j=k) &= \hat{x}(k), \quad j=k, k+1, \dots, k+l_p-1. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Постоянные внешние возмущения $\bar{q}(k)$ должны учитываться и в уравнении, описывающем движение прогнозирующей модели в обратном времени, то есть первое уравнение в системе (3.18) должно иметь вид:

$$\begin{aligned} g_M(j-1) &= 2g_M(j) - A(k)g_M(j) - B(k)u(k) - F(k)\bar{q}(k), \\ g_M(k+l_p) &= x_M(k+l_p), \quad j=k+l_p, k+l_p-1, \dots, k+1. \end{aligned} \quad (4.30)$$

При формировании управления для модели объекта вида:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + F(k)q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (4.31)$$

запишем математическое ожидание для локального критерия оптимизации, то есть

$$J(k) = \frac{1}{2} M \left\{ \left(x(k+1) - x_z(t_k) \right)^T C \left(x(k+1) - x_z(t_k) + u^T(k) Du(k) \right) \right\}. \quad (4.32)$$

Для того, чтобы найти оптимальное управление по критерию (4.32), запишем значение этого критерия, учитывая уравнение для модели объекта (4.31) и свойства операции $tr(\cdot)$ (для сокращения записи аргумент k опустим):

$$\begin{aligned} J(k) = & tr(CFQF^T) + u^T (B^T CB + D)u + \\ & + (Ax + Fq - x_z)^T CBu + u^T B^T C(Ax + Fq - x_z). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Оптимальное управление определим из условия:

$$\frac{dJ(k)}{du} = 2(B^T CB + D)u + 2B^T C(Ax + F\bar{q} - x_z) = 0. \quad (4.34)$$

Тогда получим:

$$u(k) = -(B^T(k)CB(k) + D)^{-1} B^T(k)C[A(k)\hat{x}(k) + F(k)\bar{q}(k) - x_z(t_k)]. \quad (4.35)$$

Примеры

Управление формируется по оценке состояния $\hat{x}(k)$, определяемой с помощью фильтра Калмана. Математическая модель измерительного комплекса имеет вид

$$y(k) = Hx(k) + r(k),$$

где

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица канала измерений, хакарктеризующая в данном случае полное измерение вектора состояния; $r(k)$ – вектор погрешностей,

которые описываются последовательностью гауссовских шумов с нулевым средним и дисперсией

$$R = \begin{pmatrix} 0,32 & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix}.$$

Оценивание вектора состояния фильтром Калмана осуществляется при следующих начальных значениях:

$$\hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1,3 \end{pmatrix}, \quad P_{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}q(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $t_0 = 0$, $T = 10$,

$$x_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,4 & -1,4 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,3 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix},$$

$q(t)$ – вектор внешних возмущений, который является нормальным гауссовским шумом ($\bar{q}(t) = 0$, $Q(t) = I$ – единичная матрица соответствующего порядка).

Моделирование поведения управляемого объекта осуществляется с помощью разностного уравнения

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Fq(k), \quad x(0) = x_0,$$

где $A = I + \Delta t \bar{A}$, $B = \Delta t \bar{B}$, $F = \sqrt{\Delta t} \bar{F}$, $q(k)$ – последовательность гауссовских шумов с нулевым средним и единичной дисперсией, дискрет k соответствует моменту времени $t_k = t_0 + k\Delta t$, $\Delta t = 0,1$,

$$k = \overline{0, N}, \quad N = \frac{T - t_0}{\Delta t} = 100.$$

Управление определяется из условия минимума математического ожидания квадратичного функционала

$$J(t_0, T) = \frac{1}{2} M \left\{ \int_{t_0}^T [x^T(t) C x(t) + u^T(t) D u(t)] dt \right\}$$

и имеет вид:

$$u(k) = -D_d^{-1} B^T S \hat{x}(k),$$

где C , D – весовые матрицы функционала, $D_d = \Delta t D$, S – решение уравнения Риккати с точностью $\varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3}$,

$$C = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,7 \end{pmatrix}, \quad D = 1, \quad S = \begin{pmatrix} 2,295 & 0,734 \\ 0,734 & 0,772 \end{pmatrix}.$$

На рис. 4.1 приведены графики переходных процессов $x(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$, их оценок $\hat{x}(k) = (\hat{x}_1(k), \hat{x}_2(k))^T$ и управлений $u(k)$, причем жирная линия изображает управляющие воздействия $u(k)$, тонкая – состояния $x(k)$, а пунктирная – оценки состояния $\hat{x}(k)$.

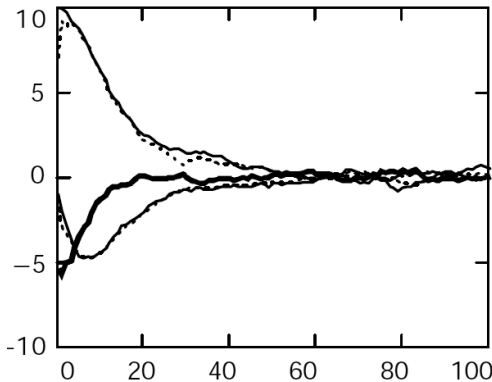


Рис. 4.1. График переходных процессов, их оценок и управления

2. Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}q(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ \dot{u}(t) &= v(t), \quad u(t_0) = u_0,\end{aligned}$$

а моделирование поведения управляемого объекта осуществляется с помощью системы разностных уравнений

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Fq(k), \quad x(0) = x_0, \\ u(k+1) &= u(k) + v(k)\Delta t, \quad u(0) = u_0,\end{aligned}$$

Значения матриц непрерывной и дискретной систем, а также значения Δt и x_0 остались прежними, $u_0 = 0$.

Управление $v(t)$ определяется из условия минимума математического ожидания функционала обобщенной работы

$$J(t_k) = M \left\{ \int_{t_k}^{t_k + l_p \Delta t} [x^T(t)Cx(t) + u^T(t)D_2u(t) + v^T(t)D_1v(t) + v_{on}^T(t)D_1v_{on}(t)]dt \right\},$$

где $l_p \Delta t = 15\Delta t$ – длина скользящего интервала оптимизации; C, D_1, D_2 – весовые матрицы функционала, равные

$$C = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,7 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 1, \quad D_2 = 1.$$

Поведение объекта на интервале оптимизации $[t_k, t_k + l_p \Delta t]$ описывается с помощью прогнозирующей модели

$$x_M(j+1) = Ax_M(j) + Bu(k); \quad x_M(j=k) = \hat{x}(k),$$

где $\hat{x}(k)$ – оценка состояния, которая определяется с помощью фильтра Калмана.

На рис. 4.2 приведены графики переходных процессов $x(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$, их оценок $\hat{x}(k) = (\hat{x}_1(k), \hat{x}_2(k))^T$ и управлений $u(k)$, причем жирная линия изображает управляющие воздействия $u(k)$, тонкая – состояния $x(k)$, а пунктирная – оценки состояния

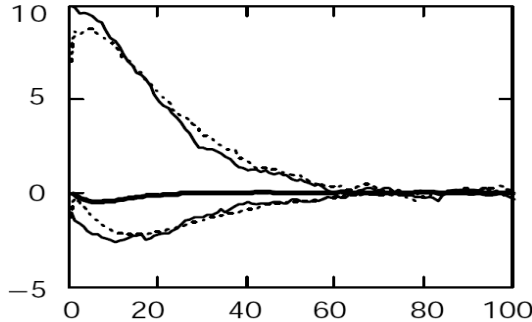


Рис 4.2. График переходных процессов, их оценок и управления

3. Для модели объекта

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Fq(k), \quad x(0) = x_0.$$

управление на основе минимизации математического ожидания локального квадратического функционала

$$J(k) = M \{x^T(k)C_1x(k) + u^T(k)D_1u(k)\}$$

определяется следующим образом

$$u(k) = -(B^T C B + D)^{-1} B^T C A \hat{x}(k),$$

где значения матриц дискретной системы остались прежними; C_1, D_1 – весовые матрицы функционала, а матрица C – решение уравнения Риккати с точностью $\varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3}$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,7 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 1, \quad C = \begin{pmatrix} 23,969 & 7,976 \\ 7,976 & 8,766 \end{pmatrix}, \quad D = 1,$$

оценка состояния $\hat{x}(k)$ определяется с помощью фильтра Калмана.

На рис. 4.3 приведены графики переходных процессов $x(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$, их оценок $\hat{x}(k) = (\hat{x}_1(k), \hat{x}_2(k))^T$ и управлений $u(k)$, причем жирная линия изображает управляющие воздействия $u(k)$, тонкая – состояния $x(k)$, а пунктирная – оценки состояния $\hat{x}(k)$.

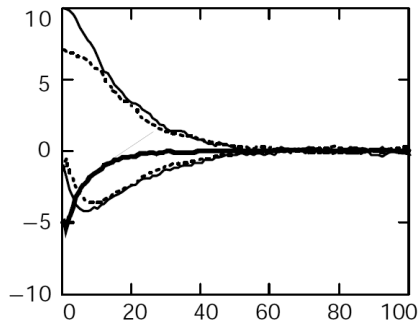


Рис. 4.3. График переходных процессов, их оценок и управления

Структурная схема совмещенного синтеза управляющих воздействий по оценкам состояния приведена на рис. 4.4.

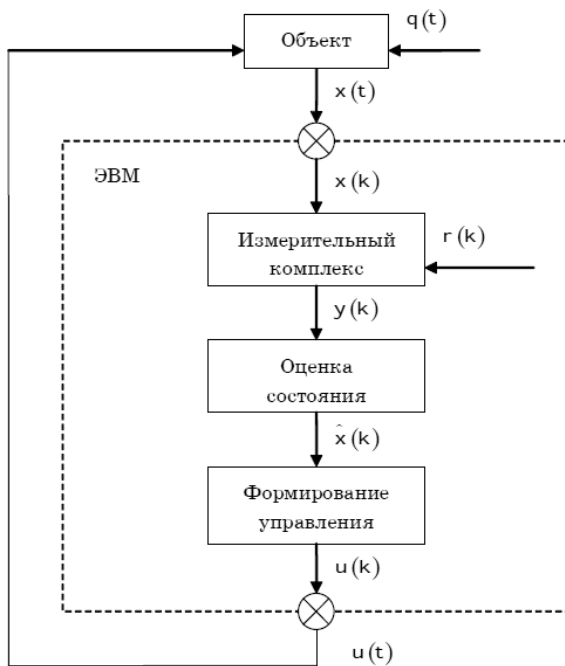


Рис. 4.4. Схема совмещенного синтеза управлений по оценкам состояний

5. Адаптивные следящие системы управления

Существует достаточно много вариантов различных определений адаптивных систем. Но основной смысл при этом остается неизменным. Одним из наиболее известных, является определение Я.З. Цыпкина

Определение. Под адаптивными системами управления будем понимать такие системы, которые, используя информацию о внешних воздействиях, условиях работы и выходных величинах, изменяют структуру или параметры регулятора с целью обеспечения оптимального или заданного функционирования управляемой системы при изменяющихся условиях ее работы.

Достаточно известным является определение, данное В.Н. Буковым

Определение. Адаптивными называются такие системы управления, которые предназначены для функционирования в условиях априорной неопределенности и которые в процессе функционирования автоматически приспосабливаются к непредвиденным изменениям свойств объекта управления и внешней среды.

5.1. Основные понятия адаптивных систем управления

Наиболее существенными являются следующие признаки деления принципов адаптации.

1) По уровню априорной неопределенности:

а) параметрическая адаптация, при которой априорная неопределенность заключается в недостаточном знании параметров (коэффициентов) управляемого объекта;

б) непараметрическая адаптация, при которой априорная неопределенность не связана непосредственно с какими-либо параметрами.

В обоих случаях неопределенность уменьшается на основе последовательных наблюдений входных и выходных данных в процессе управления.

2) По организации процесса адаптации:

а) поисковые, для которых характерны процессы итеративного движения к достижению требуемого качества управления;

б) беспоисковые, основанные на использовании некоторых необходимых (достаточных) условий требуемого качества управления.

У систем поисковой адаптации формируются специальными устройствами детерминированные или случайные пробные сигналы или создаются условия для возбуждения в объекте незатухающих колебаний, используемые как поисковые. Наличие пробных движений является основным недостатком поисковой адаптации, так как они не всегда допустимы по условиям функционирования объекта.

3) По целям организации адаптации:

а) системы со специальными свойствами, в результате функционирования которых управляемый процесс приобретает некоторые обязательные свойства, в число которых могут быть включены устойчивость, чувствительность к каким-либо возмущениям или ошибкам априорной информации, заданное расположение корней характеристического уравнения и т. д.;

б) оптимальные системы, обеспечивающие минимизацию некоторых функционалов, отражающих качество управляемого движения.

Наиболее перспективными для создания цифровых систем управления являются оптимальные беспоисковые системы с параметрической адаптацией, в которых, на основе, полученной в процессе функционирования объекта информации о самом объекте и возмущающих воздействиях, осуществляется автоматическая настройка параметров модели объекта. При этом используется «принцип разделения», согласно которому формирование адаптивного управления состоит из трех этапов:

1) выбор алгоритма управления в предположении, что параметры модели объекта известны точно (оптимальное управление);

2) оценивание неизвестных параметров (идентификация) и состояния (фильтрация) модели объекта;

3) формирование адаптивного управления посредством замены точных значений параметров и состояния на их оценки.

5.2. Оценивание параметров модели объекта

Для синтеза управлений в реальных условиях функционирования объекта необходимо учитывать как влияние внешних возмущений, так и наличие переменных во времени неизвестных параметров.

Пусть для формирования управляющих воздействий используется математическая модель объекта в виде:

$$x(k+1) = A(k, \theta(k))x(k) + B(k, \theta(k))u(k) + F(k)q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (5.1)$$

где $\theta(k)$ – N_θ -мерный вектор переменных во времени неизвестных параметров. При этом предполагается, что элементы матриц A и B линейно зависят от компонент вектора θ и априорное распределение вектора начальных условий $\theta(0)$ является гауссовским:

$$M\{\theta(0)\} = \bar{\theta}_0, \quad M\{(\theta(0) - \bar{\theta}_0)(\theta(0) - \bar{\theta}_0)^T\} = P_{\theta_0}. \quad (5.2)$$

Здесь P_{θ_0} – ковариационная матрица ошибок начальных условий вектора параметров модели объекта.

Алгоритмы оценивания параметров (идентификация) в реальном масштабе времени, используемые в адаптивных системах управления, строятся, как правило, на основе гипотезы квазистационарности характеристик объекта управления, т.е. $\dot{\theta} = 0$. В соответствии с этой гипотезой, оцениваемые параметры или постоянны во времени, или изменяются с незначительной скоростью, пренебрежение которой практически не ухудшает оценок, получаемых на ограниченном временном интервале наблюдения.

Таким образом, можно записать дискретную модель изменения параметров в виде:

$$\theta(k+1) = \theta(k), \quad \theta(0) = \bar{\theta}_0. \quad (5.3)$$

Математическую модель измерительного комплекса

$$y(k+1) = Hx(k+1) + r(k+1) \quad (5.4)$$

можно представить в виде:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= \\ &= HA(k, \theta(k))x(k) + HB(k, \theta(k))u(k) + HF(k)q(k) + r(k+1) = \\ &= H\Phi(x(k), u(k))\theta(k) + Hf(x(k), u(k)) + \tilde{q}(k), \end{aligned}$$

где матрица $\Phi(\cdot)$ размерности $N_\theta \times n$ и вектор-столбец $f(\cdot)$ с n элементами получаются в результате представления системы (5.1) следующим образом:

$$x(k+1) = \Phi(x(k), u(k))\theta(k) + f(x(k), u(k)) + F(k)q(k). \quad (5.5)$$

Пример

Динамическая модель объекта описывается системой

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}q(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} \\ b_{2,0} & b_{2,1} \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

При синтезе управляющих воздействий модель объекта приводится к дискретному виду

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Fq(k), \quad x(0) = x_0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \Delta ta_{0,0} & \Delta ta_{0,1} & \Delta ta_{0,2} \\ \Delta ta_{1,0} & 1 + \Delta ta_{1,1} & \Delta ta_{1,2} \\ \Delta ta_{2,0} & \Delta ta_{2,1} & 1 + \Delta ta_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \Delta tb_{0,0} & \Delta tb_{0,1} \\ \Delta tb_{1,0} & \Delta tb_{1,1} \\ \Delta tb_{2,0} & \Delta tb_{2,1} \end{pmatrix}.$$

Неизвестные параметры матриц \bar{A}, \bar{B} образуют вектор с $N_\theta = 5$ элементами

$$\theta = (a_{0,2}; a_{2,0}; a_{2,2}; b_{0,0}; b_{1,1})^T = (\theta_0; \theta_1; \theta_2; \theta_3; \theta_4)^T.$$

Матрица $\Phi(\cdot)$ размерности 5×3 и вектор-столбец $f(\cdot)$ с 3 элементами получаются из равенства

$$A(\theta)x(k) + B(\theta)u(k) = \Phi(x(k), u(k))\theta + f(x(k), u(k)).$$

$$\begin{pmatrix} x_0 + \Delta t a_{0,0}x_0 + \Delta t a_{0,1}x_1 + \Delta t \theta_0 x_2 + \Delta t \theta_3 u_0 + \Delta t b_{0,1}u_1 \\ \Delta t a_{1,0}x_0 + x_1 + \Delta t a_{1,1}x_1 + \Delta t a_{1,2}x_2 + \Delta t b_{1,0}u_0 + \Delta t \theta_4 u_1 \\ \Delta t \theta_1 x_0 + \Delta t a_{2,1}x_1 + x_2 + \Delta t \theta_2 x_2 + \Delta t b_{2,0}u_0 + \Delta t b_{2,1}u_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta t x_2 & 0 & 0 & \Delta t u_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta t u_1 \\ 0 & \Delta t x_0 & \Delta t x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} x_0 + \Delta t a_{0,0}x_0 + \Delta t a_{0,1}x_1 + \Delta t b_{0,1}u_1 \\ \Delta t a_{1,0}x_0 + x_1 + \Delta t a_{1,1}x_1 + \Delta t a_{1,2}x_2 + \Delta t b_{1,0}u_0 \\ \Delta t a_{2,1}x_1 + x_2 + \Delta t b_{2,0}u_0 + \Delta t b_{2,1}u_1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $f(x(k), u(k))$ также можно вычислить следующим образом:

$$f(x(k), u(k)) = A(\theta)x(k) + B(\theta)u(k) - \Phi(x(k), u(k))\theta.$$

Будем строить оценку вектора параметров $\hat{\theta}(k+1)$ по текущему измерению $y(k+1)$ в виде:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k+1) = & \hat{\theta}(k) + L(k)[y(k+1) - \\ & - H\Phi(x(k), u(k))\hat{\theta}(k) - Hf(x(k), u(k))] \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $L(k)$ – коэффициент усиления фильтра, выражение для которого можно получить аналогично тому, как был получен коэффициент усиления фильтра $K(k)$ для оценки состояния $\hat{x}(k+1)$.

Тогда рекуррентный алгоритм для оценки параметров будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(0) &= \bar{\theta}_0, P_{\theta}(0) = P_{\theta_0}. \\ \hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + L(k)[y(k+1) - H\Phi(x(k), u(k))\hat{\theta}(k) - Hf(x(k), u(k))], \\ L(k) &= P_{\theta}(k)\Phi^T(x(k), u(k))M^{-1}, \\ M(k) &= H\Phi(x(k), u(k))P_{\theta}(k)\Phi^T(x(k), u(k))H^T + HF(k)QF^T(k)H^T + R, \\ P_{\theta}(k+1) &= [I_{N_{\theta}} - L(k)H\Phi(x(k), u(k))]P_{\theta}(k),\end{aligned}\tag{5.7}$$

При постановке задачи идентификации параметров в большинстве случаев подразумевается, что приближение оценок параметров $\hat{\theta}$ к их истинным значениям θ обеспечивает приближение формируемого на основе оценок оптимального управления к искомому оптимальному управлению для реального объекта. Такое предположение подкрепляется *теоремой разделения* для предельной точности оценивания параметров модели объекта. Однако для случая ограниченной точности эта теорема не дает конструктивных рекомендаций по организации совместного оценивания и оптимизации управления. В то же время опыт моделирования процессов адаптивного управления показывает не очень сильную связь между точностью оценок $\hat{\theta}$ и качеством управляемого движения. Поэтому необходимо использовать следующий подход к текущей идентификации, выполняемой при адаптивном управлении: идентификацию параметров осуществлять таким образом, чтобы в первую очередь достигался достаточно высокий уровень качества управления функционирования объекта, и в меньшей степени преследовалась (или даже совсем не принималась во внимание) точность идентификации параметров объекта как таковая.

5.3. Двухэтапный алгоритм оценивания состояния и параметров модели объекта

Пусть для формирования управляющих воздействий используется математическая модель объекта в виде:

$$x(k+1) = A(k, \theta(k))x(k) + B(k, \theta(k))u(k) + F(k)q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (5.8)$$

где $\theta(k)$ – N_θ -мерный вектор переменных во времени неизвестных параметров.

Дискретную модель изменения параметров можно записать в виде:

$$\theta(k+1) = \theta(k), \quad \theta(0) = \bar{\theta}_0. \quad (5.9)$$

При этом предполагается, что априорные распределения векторов начальных условий $\theta(0)$ и x_0 являются гауссовскими:

$$M\{\theta(0)\} = \bar{\theta}_0, \quad M\{(\theta(0) - \bar{\theta}_0)(\theta(0) - \bar{\theta}_0)^T\} = P_{\theta_0},$$

$$M\{x_0\} = \bar{x}_0, \quad M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\} = P_{x_0}.$$

При совмещенном синтезе требуется одновременно оценивать состояние и параметры системы управления. Это можно осуществить с помощью рекуррентного алгоритма статистической обработки типа фильтра Калмана по результатам текущих измерений. При этом оценивается обобщенный вектор, формально объединяющий векторы состояния и параметров. Такой подход сопровождается резким возрастанием трудоемкости вычислений. В связи с тем, что скорости изменения состояния и параметров существенно различаются, появляется возможность их раздельного оценивания.

Измерительный комплекс является общим для состояния и параметров модели объекта. Действительно

$$\begin{aligned} y(k+1) &= Hx(k) + r(k) = \\ &= H\Phi(x(k), u(k))\theta(k) + Hf(x(k), u(k)) + \tilde{q}(k). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Для оценки состояния и параметров модели объекта должны работать два фильтра Калмана при обмене информацией.

Канал измерений в этом случае можно приближенно представить в виде:

$$y(k+1) = H\Phi(\hat{x}(k), u(k))\hat{\theta}(k) + Hf(\hat{x}(k), u(k)) + \tilde{q}(k).$$

Будем строить оценку вектора параметров $\hat{\theta}(k+1)$ по текущему измерению $y(k+1)$ в виде:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + L(k)[y(k+1) - \\ - H\Phi(\hat{x}(k), u(k))\hat{\theta}(k) - Hf(\hat{x}(k), u(k))], \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $L(k)$ – коэффициент усиления фильтра.

Рекуррентный алгоритм для оценки состояния будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{x}(0) &= \bar{x}_0, P_x(0) = P_{x_0} \\ \hat{x}(k+1) &= \hat{x}(k+1/k) + K(k)[y(k+1) - H\hat{x}(k+1/k)], \\ \hat{x}(k+1/k) &= A(k, \hat{\theta}(k))\hat{x}(k) + B(k, \hat{\theta}(k))u(k) + F(k)\bar{q}(k), \\ K(k) &= P_x(k+1/k)H^T[HP_x(k+1/k)H^T + R]^{-1}, \\ P_x(k+1/k) &= A(k, \hat{\theta}(k))P_x(k)A^T(k, \hat{\theta}(k)) + F(k)QF^T(k), \\ P_x(k+1) &= [I_n - K(k)H]P_x(k+1/k). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Идентификацию параметров будем осуществлять с помощью следующего фильтра Калмана:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(0) &= \bar{\theta}_0, P_\theta(0) = P_{\theta_0}, \\ \hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + L(k)[y(k+1) - H\Phi(\hat{x}(k), u(k))\hat{\theta}(k) - \\ &\quad - Hf(\hat{x}(k), u(k))], \\ L(k) &= P_\theta(k)\Phi^T(\hat{x}(k), u(k))M^{-1}, \\ M(k) &= H\Phi(\hat{x}(k), u(k))P_\theta(k)\Phi^T(\hat{x}(k), u(k))H^T + \\ &\quad + HF(K)QF^T(k)H^T + R, \\ P_\theta(k+1) &= [I_N - L(k)H\Phi(\hat{x}(k), u(k))]P_\theta(k). \end{aligned} \quad (5.13)$$

5.4. Синтез адаптивного управления

При синтезе адаптивного управления необходимо учитывать, что в каждый дискретный момент k формирования управления, в управляющем компьютере матрицы динамических свойств модели объекта и влияния управляющих воздействий зависят от оценок вектора неизвестных параметров $A(k, \hat{\theta}(k))$, $B(k, \hat{\theta}(k))$. При этом для моделирования поведения управляемого объекта используются матрицы $A(k)$, $B(k)$.

Если модель объекта задана в виде:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)u(t) + F(t)q(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

и синтез адаптивного управления в момент t_k осуществляется на основе минимизации математического ожидания классического квадратичного функционала

$$J = \frac{1}{2} M \left\{ \int_{t_0}^T \left[x^T(t) C x(t) + u^T(t) D u(t) \right] dt \right\}, \quad (5.14)$$

то

$$u(k) = -D_d^{-1} B(k, \hat{\theta}(k)) S(\hat{x}(k) - x_z(t_k)), \quad (5.15)$$

где S – решение уравнения Риккати.

Если модель объекта задана в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)u(t) + F(t)q(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ \dot{i}(t) &= v(t), \quad u(t_0) = u_0, \end{aligned}$$

и синтез адаптивного управления в момент t_k осуществляется на основе минимизации математического ожидания квадратичного функционала обобщенной работы

$$\begin{aligned} J(t_k) = M \left\{ \int_{t_k}^{t_k + l_p \Delta t} \left[x^T(t) C x(t) + u^T(t) D_2 u(t) + \right. \right. \\ \left. \left. + v^T(t) D_1 v(t) + v_{on}^T(t) D_1 v_{on}(t) \right] dt \right\}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

то

$$\begin{aligned}
 v(k) &= -D_1^{-1}W_2(k), \quad u(k+1) = u(k) + \Delta t v(k), \\
 g_M(j-1) &= 2g_M(j) - A(k, \hat{\theta}(k))g_M(j) - B(k, \hat{\theta}(k))u(k) - F(k)\bar{q}(k), \\
 g_M(k+l_p) &= x_M(k+l_p), \\
 W_1(j-1) &= A^T(k, \hat{\theta}(k))W_1(j) + \Delta t C(g_M(j) - x_z(t_k)), \quad W_1(k+l_p) = 0, \\
 W_2(j-1) &= W_2(j) + B^T(k, \hat{\theta}(k))W_1(j) + \Delta t D_2 u(k), \\
 W_2(k+l_p) &= 0, \\
 j &= k+l_p, k+l_p-1, \dots, k+1,
 \end{aligned}$$

Уравнение прогнозирующей модели имеет вид:

$$\begin{aligned}
 x_M(j+1) &= A(k, \hat{\theta}(k))x_M(j) + B(k, \hat{\theta}(k))u(k) + F(k)\bar{q}(k), \\
 x_M(j=k) &= \hat{x}(k), \\
 j &= k, k+1, \dots, k+l_p-1.
 \end{aligned}$$

Если модель объекта задана в виде:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)u(t) + F(t)q(t), \\
 x(t_0) &= x_0
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) + F(k)q(k), \\
 x(0) &= x_0
 \end{aligned}$$

и синтез адаптивного управления в момент t_k осуществляется на основе минимизации математического ожидания локального квадратичного функционала

$$J(k) = \frac{1}{2} M \left\{ (x(k+1) - x_z(k))^T C (x(k+1) - x_z(t_k)) + u^T(k) D u(k) \right\}, \quad (5.17)$$

то

$$u(k) = -(B^T(k, \hat{\theta}(k))CB(k, \hat{\theta}(k)) + D)^{-1} B^T(k, \hat{\theta}(k))C \times \\ \times \left[A(k, \hat{\theta}(k))\hat{x}(k) + F(k)\bar{q}(k) - x_z(t_k) \right]$$

Структурная схема синтеза адаптивного управления представлена на рис. 5.1.

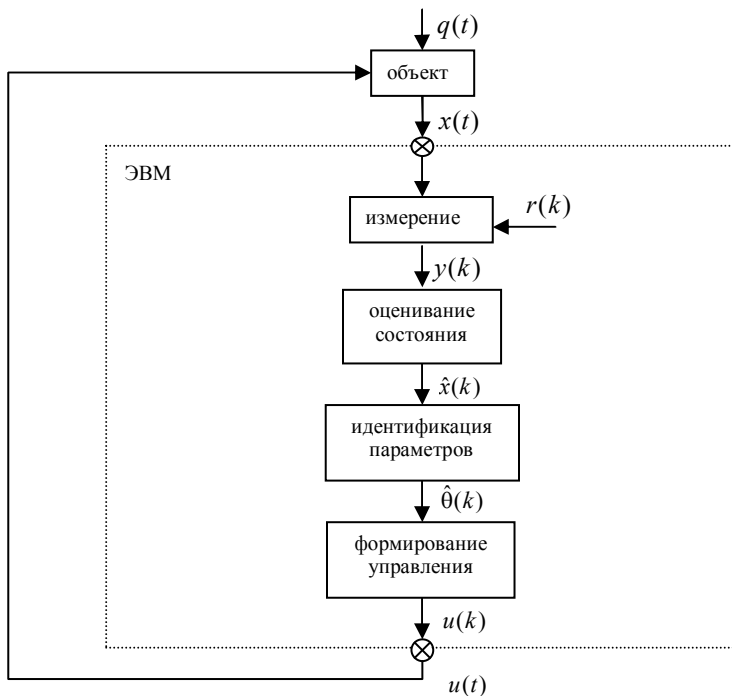


Рис. 5.1. Структурная схема синтеза адаптивного управления

Примеры:

1. В модели объекта

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}q(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

неизвестные параметры модели составляют вектор

$$\begin{aligned} \theta &= (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T = \\ &= (a_{2,1}, a_{2,2}, b_2)^T. \end{aligned}$$

Моделирование осуществляется с помощью дискретной модели

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Fq(k), \quad x(0) = x_0,$$

где $A = I_2 + \Delta t \bar{A}$, $B = \Delta t \bar{B}$, $F = \sqrt{\Delta t} \bar{F}$, $\Delta t = 0,1$ и матрицы A и B линейно зависят от компонент вектора θ следующим образом

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ \Delta t(\theta)_1 & 1 + \Delta t(\theta)_2 \end{pmatrix}, \quad B(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta t(\theta)_3 \end{pmatrix}.$$

Математическая модель измерительного комплекса имеет вид

$$y(k) = Hx(k) + r(k),$$

где H – единичная матрица, что соответствует полному измерению вектора состояния, $r(k)$ – вектор последовательностей гауссовских величин с нулевым средним и дисперсией

$$R = \begin{pmatrix} 0,32 & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix}.$$

Адаптивное управление, формируемое на основе минимизации математического ожидания классического квадратичного функционала

$$J(t_0, T) = \frac{1}{2} M \left\{ \int_{t_0}^T [x^T(t) C x(t) + u^T(t) D u(t)] dt \right\},$$

имеет вид

$$u(k) = -D_d^{-1} B^T (\hat{\theta}(k)) S \hat{x}(k),$$

где $D_d = \Delta t D$, $\hat{x}(k), \hat{\theta}(k)$ – оценки состояния и параметров, определяемые с помощью фильтров Калмана (5.12), (5.13). Матрица $\Phi(\hat{x}(k), u(k))$ и вектор $f(\hat{x}(k), u(k))$ в (5.13) для заданного вектора параметров θ определяются следующим образом:

$$\Phi(\hat{x}(k), u(k)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Delta t(\hat{x}(k))_1 & \Delta t(\hat{x}(k))_2 & \Delta t u(k) \end{pmatrix},$$

$$f = \begin{pmatrix} (\hat{x}(k))_1 + \Delta t(\hat{x}(k))_2 \\ (\hat{x}(k))_2 \end{pmatrix}.$$

Моделирование осуществлялось для модели, где матрицы $\bar{A}, \bar{B}, \bar{F}$ и векторы $x(0), \theta$ имеют вид

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,4 & -1,4 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,3 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix},$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \theta = (-0,4; -1,4; 1,3)^T$$

при следующих априорных данных

$$\hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1,3 \end{pmatrix}, \quad P_{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\theta}(0) = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1,7 \\ 1,5 \end{pmatrix}, \quad P_{\theta_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и

$$C = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,7 \end{pmatrix}, \quad D = 1, \quad S = \begin{pmatrix} 2,295 & 0,734 \\ 0,734 & 0,772 \end{pmatrix}.$$

На рис. 5.2. приведены графики переходных процессов $x(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$, их оценок $\hat{x}(k) = (\hat{x}_1(k), \hat{x}_2(k))^T$ и управлений

$u(k)$, причем жирная линия изображает управляющие воздействия $u(k)$, тонкая – состояния $x(k)$, а пунктирная – оценки состояния $\hat{x}(k)$.

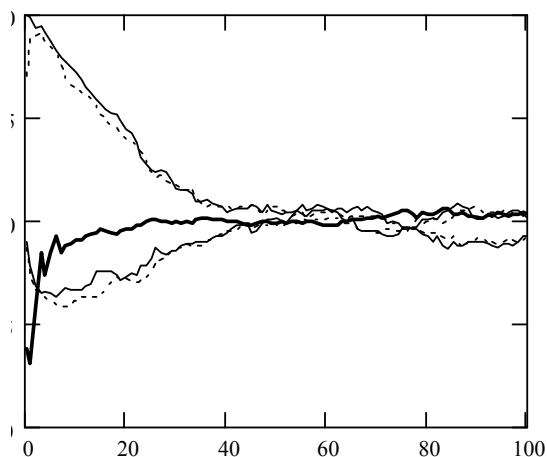


Рис. 5.2. График переходных процессов, их оценок и управления

На рис. 5.3. приведены в порядке следования графики оценок вектора параметров (тонкая линия) и их точных значений (жирная линия).

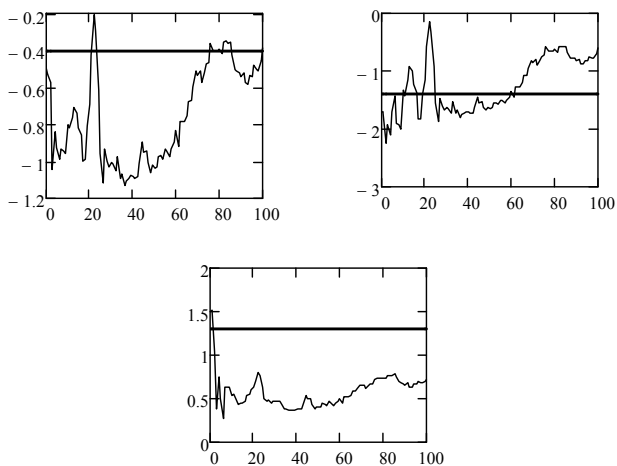


Рис. 5.3. Графики оценок вектора параметров и их точные значения

2. В модели объекта

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}q(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ \dot{u}(t) &= v(t), \quad u(t_0) = u_0,\end{aligned}$$

где

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

неизвестным параметром является $\theta = b_2$.

Моделирование осуществляется с помощью дискретной модели

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Fq(k), \quad x(0) = x_0, \\ u(k+1) &= u(k) + \Delta t v(k), \quad u(0) = u_0\end{aligned}$$

где элементы матрицы B линейно зависят от θ следующим образом:

$$B(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta t \theta \end{pmatrix}.$$

В математической модели измерительного комплекса $H = (1 \ 0)$, что соответствует измерению только первой компоненты вектора состояния, $r(k)$ – последовательность гауссовских величин с нулевым средним и дисперсией $R = 0,32$.

Адаптивное управление, формируемое на основе минимизации математического ожидания функционала обобщенной работы

$$\begin{aligned}J(t_k) &= M \left\{ \int_{t_k}^{t_k + I_p \Delta t} [x^T(t) C x(t) + u^T(t) D_2 u(t) + \right. \\ &\quad \left. + v^T(t) D_1 v(t) + v_{on}^T(t) D_1 v_{on}(t)] dt \right\},\end{aligned}$$

имеет вид

$$v(k) = -D_1^{-1} W_2(k),$$

где $W_2(k)$ является решением в обратном времени системы

$$g_M(j-1) = 2g_M(j) - Ag_M(j) - B(\hat{\theta}(k))u(k), \quad g_M(k+l_p) = x_M(k+l_p);$$

$$W_1(j-1) = A^T W_1(j) + \Delta t C g_M(j), \quad W_1(k+l_p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$W_2(j-1) = W_2(j) - B(\hat{\theta}(k))^T W_1(j) + \Delta t D_2 u(k), \quad W_2(k+l_p) = 0;$$

$$j = k+l_p, k+l_p-1, \dots, k+1,$$

а $x_M(k+l_p)$ в первом уравнении определяется с помощью прогнозирующей модели

$$x_M(j+1) = Ax_M(j) + B(\hat{\theta}(k))u(k), \quad x_M(j=k) = \hat{x}(k),$$

описывающей поведение объекта моделирования на интервале оптимизации $[t_k, t_k + l_p \Delta t]$.

Вектор $\hat{x}(k)$ и значение $\hat{\theta}(k)$ являются оценками состояния и параметра, которые определяются с помощью фильтров Калмана (8.74), (8.75). Матрица $\Phi(\hat{x}(k), u(k))$ и вектор $f(\hat{x}(k), u(k))$ в (8.75) для заданного параметра θ определяются следующим образом:

$$\Phi(\hat{x}(k), u(k)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta t u(k) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} (\hat{x}(k))_1 + \Delta t (\hat{x}(k))_2 \\ \Delta t a_{2,1}(\hat{x}(k))_1 + (\hat{x}(k))_2 + \Delta t a_{2,2}(\hat{x}(k))_2 \end{pmatrix}.$$

Моделирование осуществлялось для модели, где матрицы $\bar{A}, \bar{B}, \bar{F}$, вектор $x(0)$ и параметр θ имеют вид

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,4 & -1,4 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,3 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \theta = 1,3$$

при следующих априорных данных

$$\hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1,3 \end{pmatrix}; \quad P_{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\hat{\theta}(0) = 1,1; \quad P_{\theta_0} = 1;$$

и

$$C = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,7 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 1, \quad D_2 = 1.$$

На рис. 5.4. приведены графики переходных процессов $x(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$, их оценок $\hat{x}(k) = (\hat{x}_1(k), \hat{x}_2(k))^T$ и управлений $u(k)$, причем жирная линия изображает управляющие воздействия $u(k)$, тонкая – состояния $x(k)$, а пунктирная – оценки состояния $\hat{x}(k)$.

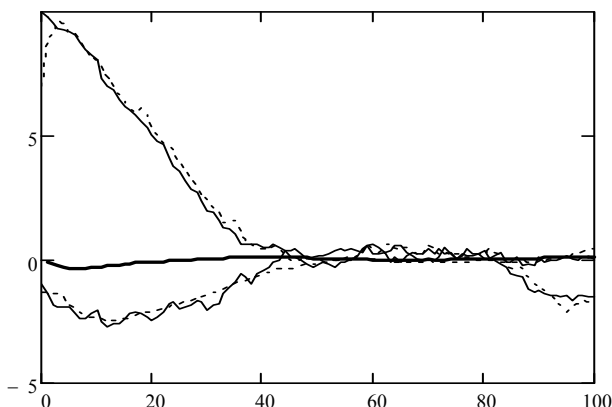


Рис. 5.4. Графики переходных процессов, их оценок и управления

На рис. 5.5. приведен график оценок параметра и его точное значение (жирная линия).

Заметим, что в данном случае параметр θ не доступен оцениванию.

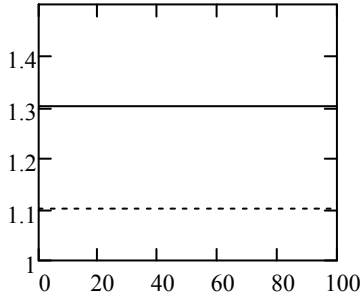


Рис. 5.5. Графики оценки параметра и его точное значение

3. В модели объекта

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Fq(k), \quad x(0) = x_0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0,1a_{2,1} & 1 + 0,1a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1b_2 \end{pmatrix}$$

неизвестные параметры составляют вектор $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T = (a_{2,1}, a_{2,2})^T$ и матрица A линейно зависит от компонент вектора θ следующим образом

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ \Delta t(\theta)_1 & 1 + \Delta t(\theta)_2 \end{pmatrix}.$$

В математической модели измерительного комплекса $H = (0 \ 1)$, т.е. измеряется только вторая компонента вектора состояния, $r(k)$ — последовательность гауссовских величин с нулевым средним и дисперсией $R = 0,35$.

Адаптивное управление, формируемое на основе минимизации математического ожидания локального квадратичного функционала

$$J(k) = \frac{1}{2} M \left\{ x^T(k+1) C_1 x(k) + u^T(k) D_1 u(k) \right\},$$

имеет вид

$$u(k) = -(B^T C B + D)^{-1} B^T C A(\hat{\theta}(k)) \hat{x}(k),$$

где $\hat{x}(k), \hat{\theta}(k)$ – оценки состояния и параметров, определяемые с помощью фильтров Калмана (5.12), (5.13). Матрица $\Phi(\hat{x}(k), u(k))$ и вектор $f(\hat{x}(k), u(k))$ в (5.13) для заданного вектора параметров θ определяются следующим образом:

$$\Phi(\hat{x}(k), u(k)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta t(\hat{x}(k))_1 & \Delta t(\hat{x}(k))_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} (\hat{x}(k))_1 + \Delta t(\hat{x}(k))_2 \\ (\hat{x}(k))_2 + \Delta t b_2 u(k) \end{pmatrix}.$$

Моделирование осуществлялось для модели, где матрицы $\bar{A}, \bar{B}, \bar{F}$ и векторы $x(0), \theta$ имеют вид

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,4 & -1,4 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,3 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix},$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \theta = (-0,4; -1,4)^T$$

при следующих априорных данных

$$\hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1,3 \end{pmatrix}, \quad P_{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\theta}(0) = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1,7 \end{pmatrix}, \quad P_{\theta_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,7 \end{pmatrix}, \quad D = D_1 = 1, \quad C = \begin{pmatrix} 23,969 & 7,976 \\ 7,976 & 8,766 \end{pmatrix}.$$

На рис. 5.6. приведены графики переходных процессов $x(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$, их оценок $\hat{x}(k) = (\hat{x}_1(k), \hat{x}_2(k))^T$ и управлений

$u(k)$, причем жирная линия изображает управляющие воздействия $u(k)$, тонкая – состояния $x(k)$, а пунктирная – оценки состояния $\hat{x}(k)$.

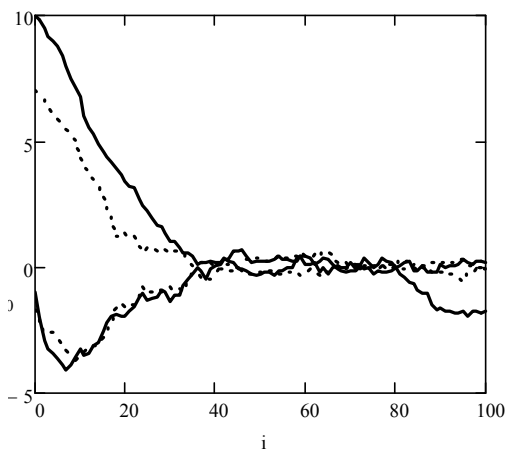


Рис. 5.6. Графики переходных процессов, их оценок и управления

На рис. 5.7. приведены в порядке следования графики оценок вектора параметров и их точных значений (жирная линия).

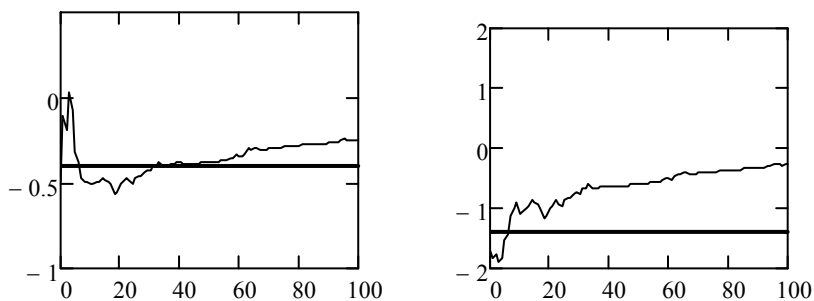


Рис. 5.7. Графики оценок вектора параметров и их точные значения

6. Ограничения по управлению и состоянию

При синтезе управлений на величину управляющего воздействия обычно накладываются ограничения. Достаточно часто эти ограничения накладываются в форме неравенств:

$$U_{1_{\max_i}} \leq u_i(k) \leq U_{2_{\max_i}} \quad i = \overline{1, m}, \quad (6.1)$$

где $U_{1_{\max_i}}, U_{2_{\max_i}}$ – заданные величины (например, для автопилота в самолете $U_{1_{\max_i}}, U_{2_{\max_i}}$ определены по условию безопасности полета).

Тогда, учитывая ограничения, будем полагать:

$$\bar{u}_i(k) = \begin{cases} U_{1_{\max_i}}, & u_i(k) < U_{1_{\max_i}}, \\ u_i(k), & U_{1_{\max_i}} \leq u_i(k) \leq U_{2_{\max_i}}, \\ U_{2_{\max_i}}, & u_i(k) > U_{2_{\max_i}}. \end{cases} \quad (6.2)$$

Ограничения, задаваемые для вектора состояния, чаще всего, определяют качество функционирования управляемого объекта. Если все компоненты вектора состояния удовлетворяют заданным ограничениям, то это говорит о том, что управление обеспечивает хорошее качество функционирования объекта.

7. Пример синтеза адаптивного управления для нестационарной модели судна при изменении курса

Математическая модель движения судна “Compas Island”^{*} задана в виде

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + \bar{B}(t)u(t) + \bar{F}(t)q(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где компоненты векторов состояния

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T = (\beta, \omega, v, \psi)^T$$

и управления

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t))^T$$

модели объекта имеют следующий смысл:

β – отклонение угла дрейфа (рад),

ω – отклонение угловой скорости дрейфа (рад/с),

v – отклонение скорости движения (м/с),

ψ – отклонение угла курса (рад),

u_1 – отклонение угла перекладки руля,

u_2 – отклонение режима работы главного двигателя.

Внешние возмущения в модели объекта описываются вектором $q(t)$, компоненты которого являются независимыми нормальными гауссовскими величинами с матрицей влияния $\bar{F}(t)$.

Модель объекта является нестационарной и для ее построения заданы матрицы, характеризующие модель, для трех моментов времени:

при $\tau_1 = 10c$:

$$\bar{A}(\tau_1) = \begin{pmatrix} -0,007 & 0,444 & 0 & 0 \\ 0,0142 & -0,167 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0353 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}(\tau_1) = \begin{pmatrix} 0,0158 & 0 \\ 0,0084 & 0 \\ 0 & 0,1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{F}(\tau_1) = \begin{pmatrix} 0,1 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0,17 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \cdot 10^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

при $\tau_2 = 25c$

$$\bar{A}(\tau_2) = \begin{pmatrix} -0,007 & 0,444 & 0 & 0 \\ 0,0185 & -0,192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,040 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}(\tau_2) = \begin{pmatrix} 0,0184 & 0 \\ 0,0108 & 0 \\ 0 & 0,087 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{F}(\tau_2) = \begin{pmatrix} 0,1 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0,18 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0,101 \cdot 10^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

при $\tau_3 = 60c$

$$\bar{A}(\tau_3) = \begin{pmatrix} -0,007 & 0,444 & 0 & 0 \\ 0,0244 & -0,220 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,046 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}(\tau_3) = \begin{pmatrix} 0,021 & 0 \\ 0,0146 & 0 \\ 0 & 0,076 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{F}(\tau_3) = \begin{pmatrix} 0,1 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0,103 \cdot 10^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для построения матриц $\bar{A}(t), \bar{B}(t), \bar{F}(t)$ используется многочлен Лагранжа второй степени

$$L_2(t, \tau, z) = \sum_{i=1}^3 z_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{t - \tau_j}{\tau_i - \tau_j},$$

где t – момент времени, в который вычисляется значение многочлена Лагранжа, $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ – вектор моментов времени, в которых известны характеристики модели, $z = (z_1, z_2, z_3)$ – вектор значений величин, изменяющихся во времени.

Для задания модели объекта в произвольный момент t строятся векторы из элементов матриц непрерывной модели, зависящих от времени:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{2,1} &= (\bar{a}_{2,1}(\tau_1), \bar{a}_{2,1}(\tau_2), \bar{a}_{2,1}(\tau_3)) = (0,0142; 0,0185; 0,0244), \\ \bar{A}_{2,2} &= (\bar{a}_{2,2}(\tau_1), \bar{a}_{2,2}(\tau_2), \bar{a}_{2,2}(\tau_3)) = (-0,167; -0,192; -0,220), \\ \bar{A}_{3,3} &= (\bar{a}_{3,3}(\tau_1), \bar{a}_{3,3}(\tau_2), \bar{a}_{3,3}(\tau_3)) = (-0,0353; -0,040; -0,046), \\ \bar{B}_{1,1} &= (\bar{b}_{1,1}(\tau_1), \bar{b}_{1,1}(\tau_2), \bar{b}_{1,1}(\tau_3)) = (0,0158; 0,0184; 0,021), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{B}_{2,1} &= (\bar{b}_{2,1}(\tau_1), \bar{b}_{2,1}(\tau_2), \bar{b}_{2,1}(\tau_3)) = (0,0084; 0,0108; 0,0146), \\
\bar{B}_{3,2} &= (\bar{b}_{3,2}(\tau_1), \bar{b}_{3,2}(\tau_2), \bar{b}_{3,2}(\tau_3)) = (0,1; 0,087; 0,076), \\
\bar{F}_{2,2} &= (\bar{f}_{2,2}(\tau_1), \bar{f}_{2,2}(\tau_2), \bar{f}_{2,2}(\tau_3)) = (0,17 \cdot 10^{-3}; 0,18 \cdot 10^{-3}; 0,20 \cdot 10^{-3}), \\
\bar{F}_{3,3} &= (\bar{f}_{3,3}(\tau_1), \bar{f}_{3,3}(\tau_2), \bar{f}_{3,3}(\tau_3)) = (0,1 \cdot 10^{-1}; 0,101 \cdot 10^{-1}; 0,103 \cdot 10^{-1}).
\end{aligned}$$

Тогда в момент t матрицы, характеризующие модель, определяются следующим образом:

$$\bar{A}(t) = \begin{pmatrix} -0,007 & 0,444 & 0 & 0 \\ L_2(t, \tau, \bar{A}_{2,1}) & L_2(t, \tau, \bar{A}_{2,2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2(t, \tau, \bar{A}_{3,3}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{B}(t) = \begin{pmatrix} L_2(t, \tau, \bar{B}_{1,1}) & 0 \\ L_2(t, \tau, \bar{B}_{2,1}) & 0 \\ 0 & L_2(t, \tau, \bar{B}_{3,2}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{F}(t) = \begin{pmatrix} 0,1 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & L_2(t, \tau, \bar{F}_{2,2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2(t, \tau, \bar{F}_{3,3}) \end{pmatrix}.$$

При формировании управляющих воздействий используется дискретная модель, полученная методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0,1$,

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + F(k)q(k), \quad x(0) = x_0,$$

где

$$A(k) = I + \Delta t \bar{A}(t_k), \quad B(k) = \Delta t \bar{B}(t_k), \quad F(k) = \sqrt{\Delta t} \bar{F}(t_k),$$

$k = \overline{0, N}$ соответствует моменту времени $t_k = t_0 + k\Delta t \in [t_0, T]$,
 $t_0 = 0$, $T = 60c$, $N = \frac{T - t_0}{\Delta t} = 600$.

Математическая модель измерительного комплекса задана в виде

$$y(k) = Hx(k) + r(k),$$

где матрица H является единичной, что соответствует полному измерению вектора состояния. Ошибки измерений описываются вектором $r(k)$ дискретных гауссовских шумов с характеристиками

$$M\{r(k)\} = 0, \quad M\{(r(k)r^T(j))\} = R\delta_{kj},$$

где

$$R = \text{diag}\{0,4 \cdot 10^{-4}; 0,25 \cdot 10^{-4}; 0,01; 0,15 \cdot 10^{-2}\}.$$

Матрицы $A(k)$ и $B(k)$ в модели объекта имеют неизвестные параметры, которые образуют вектор $\theta(k) = (a_{1,2}(k), a_{4,2}(k), b_{3,2}(k))^T$.

Оценивание состояния и идентификация параметров осуществляются с помощью двух фильтров Калмана для следующих априорных данных:

$$\hat{x}_0 = (0; 0; 0; 0; 15)^T, \quad P_{x_0} = \text{diag}\{1; 1; 1; 1\},$$

$$\hat{\theta}_0 = (0,055; 0,08; 0,012)^T, \quad P_{\theta_0} = \text{diag}\{1; 1; 1\}.$$

Матрица $\Phi(\hat{x}(k), u(k))$ и вектор $f(\hat{x}(k), u(k))$ в фильтре Калмана для идентификации параметров имеют вид

$$\Phi(\hat{x}(k), u(k)) = \begin{pmatrix} \hat{x}_2(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2(k) \\ 0 & \hat{x}_2(k) & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(\hat{x}(k), u(k)) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(k)\hat{x}_1(k) + b_{1,1}(k)u_1(k) \\ a_{2,1}(k)\hat{x}_1(k) + a_{2,2}(k)\hat{x}_2(k) + b_{2,1}(k)u_1(k) \\ a_{3,3}(k)\hat{x}_3(k) \\ \hat{x}_4(k) \end{pmatrix}.$$

Синтез управлений, осуществляется на основе минимизации математического ожидания локального квадратичного функционала на интервале моделирования $[0; 60s]$ для следующих весовых матриц

$$C_1 = \text{diag}\{0,8 \cdot 10^{-4}; 0,1 \cdot 10^{-1}; 0,4 \cdot 10^{-1}; 0,6537 \cdot 10^5\}; \quad D_1 = \text{diag}\{1; 1\}.$$

Управляющие воздействия формируются следующим образом:

$$u(k) = -(B^T(k, \hat{\theta}(k))CB(k, \hat{\theta}(k)) + D)^{-1} B^T(k, \hat{\theta}(k))C(A(k, \hat{\theta}(k))\hat{x}(k) - x_z(k)),$$

где $D = D_1$, матрица C является установившимся решением с точностью $\varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3}$ уравнения Риккати, которая имеет следующие значения

$$C = \begin{pmatrix} 3,252 & 206,427 & 0 & 155,703 \\ 206,427 & 2,896 \cdot 10^4 & 0 & 3,563 \cdot 10^4 \\ 0 & 0 & 0,938 & 0 \\ 155,703 & 3,563 \cdot 10^4 & 0 & 7,665 \cdot 10^4 \end{pmatrix}.$$

Решается задача перевода судна на другой курс: при начальном состоянии $x_0 = (0; 0; 0; 0,35)^T$ требуется отследить траекторию заданного состояния $x_z(t)$, для построения которой в моменты τ_1, τ_2, τ_3 заданы следующие векторы:

$$x_z(\tau_1) = (0; 0; 0; 0)^T,$$

$$x_z(\tau_2) = (0; 0; 0; -0,1)^T,$$

$$x_z(\tau_3) = (0; 0; 0; -0,5)^T.$$

Тогда вектор заданного состояния $x_z(t)$ определяется с помощью многочлена Лагранжа $L_2(t, \tau, \psi_z)$ следующим образом:

$$x_z(t) = (0; 0; 0; L_2(t, \tau, \psi_z))^T,$$

где

$$\psi_z = (\psi_z(\tau_1) = 0; \psi_z(\tau_2) = -0,1; \psi_z(\tau_3) = -0,5)^T.$$

На рис. 6.1 точками указаны значения курса в моменты $\tau_i, i = \overline{1,3}$, а сплошной линией – значения для курса, полученные с помощью многочлена Лагранжа

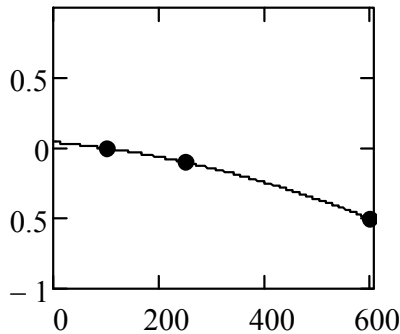


Рис. 6.1. Траектория, за которой осуществляется слежение

На величину управляющих воздействий наложены следующие ограничения:

$$|u_1| \leq 0,61, \quad |u_2| \leq 0,01.$$

Качество функционирования системы управления определяется следующим образом: управляющие воздействия должны быть такими, чтобы, начиная с некоторого момента времени, компоненты вектора состояния удовлетворяли следующим ограничениям

$$|\beta| \leq 0,26 \text{ рад}; \quad |\omega| \leq 0,174 \cdot 10^{-1} \text{ рад} / \text{с};$$

$$|\upsilon| \leq 0,5 \text{ м} / \text{с}; \quad |\psi - \psi_z| \leq 0,53 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

На рис. 6.2 приведены графики переходных процессов

$$x(k) = (x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k))^T,$$

оценок

$$\hat{x}(k) = (\hat{x}_1(k), \hat{x}_2(k), \hat{x}_3(k), \hat{x}_4(k))^T$$

и управлений $u(k) = (u_1(k), u_2(k))^T$, причем жирная сплошная линия изображает управляющие воздействия $u(k)$, жирная пунктирная – заданное состояние курса, тонкая сплошная – состояния $x(k)$, а тонкая пунктирная – оценки состояния $\hat{x}(k)$.

На рис. 6.3 приведены в порядке следования графики точных значений параметров, и соответствующих оценок $\hat{\theta}(k) = (\hat{\theta}_1(k), \hat{\theta}_2(k), \hat{\theta}_3(k))^T$, причем жирной линией изображены точные значения параметров, а тонкой – их оценки.

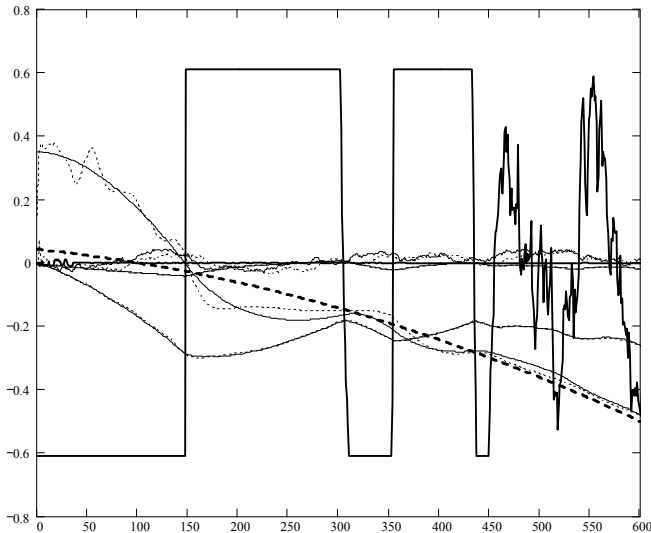


Рис. 6.2. Векторы состояния, оценки состояния и управления

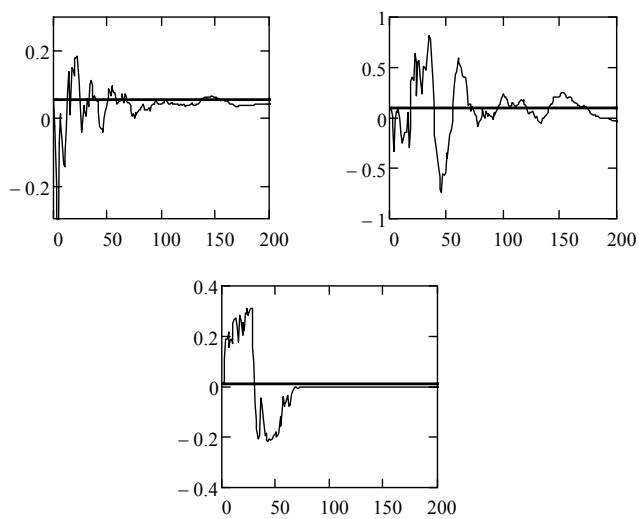


Рис. 6.3. Точные значения параметров и их оценки

Литература

1. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы : учеб. пособие для вузов. М. : Высшая школа, 1989. 264 с.
2. Браммер Л., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. М. : Наука, 1972. 200 с.
3. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М. : Наука, 1987. 232 с.
4. Решетникова Г.Н. Моделирование систем: учеб. пособие. 2-е изд., перераб и доп. Томск : Томск. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2007. 441 с. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000343580>
5. Решетникова Г.Н. Адаптивное управление поставками и рекламой Алгоритмы. Модели. Ограничения. Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2012. 152 с. ISBN: 978-3-659-29616-1
6. Решетникова Г.Н., Смагин В.И. Адаптивное управление по локальным и квазилокальным критериям : учебно-методическое пособие. Томск : Изд-во ТГУ, 1993. 28 с.
7. Смагин В.И. Оптимальное и адаптивное управление : учебно-методическое пособие. Томск : Изд-во ТГУ, 2010. 32 с.
8. Смагин В.И., Параев Ю.И. Синтез следящих систем управления по квадратичным критериям. Томск : Изд-во ТГУ, 1996. 171 с.
9. Соболев Г.В. Управляемость корабля и автоматизация судовождения. Л. : Судовождение, 1976. 477 с.
10. Срагович В.Г. Адаптивное управление. М. : Наука, 1981. 384 с.
11. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах. М. : Наука, 1990. 296 с.
12. Цыкунов А.М. Адаптивное и робастное управление динамическими объектами по выходу. М. : Физматлит, 2009. 268 с.

Контрольные вопросы

1. Описание модели объекта в пространстве состояний.
2. Дайте определение совмещенного синтеза.
3. Какое движение объекта называется свободным.
4. Приведите примеры стационарных и нестационарных моделей объектов.
5. Приведите примеры линейных и нелинейных моделей объектов.
6. Приведите примеры детерминированных и стохастических моделей объектов.
7. Общая схема синтеза цифрового управления.
8. Построение линейной дискретной стохастической модели объекта.
9. Оптимальное управление при минимизации классического квадратичного функционала.
10. Оптимальное управление при минимизации локального критерия.
11. Оптимальное управление при минимизации критерия обобщенной работы.
12. Опишите математическую модель измерительного комплекса.
13. Отличие задач предсказания, оценивания и сглаживания.
14. В каком виде строится оценка состояния.
15. Запишите условие несмещенности для оценки состояния.
16. Запишите условие, которому должна удовлетворять матрица усиления фильтра при оценивании состояния.
17. Выведите уравнения для построения оценки состояния по результатам текущих измерений.
18. Синтез управляющих воздействий по оценкам состояния для локального критерия.
19. Синтез управляющих воздействий по оценкам состояния для классического квадратичного критерия и критерия обобщенной работы.
20. Основные понятия и определения адаптивных систем.

21. Основные принципы адаптации.
22. Теорема разделения для линейной модели объекта при гауссовых шумах в модели и канале измерений.
23. Приведите дискретную модель изменения параметров.
24. В каком виде строится оценка параметров.
25. Запишите условие, которому должна удовлетворять матрица усиления фильтра при оценивании параметров.
26. Приведите уравнения для построения оценки параметров по результатам текущих измерений.
27. Двухэтапный алгоритм оценивания состояния и параметров.
28. Общая схема синтеза адаптивного управления.
29. Синтез адаптивного управления по классическому квадратичному и локальному критерию.
30. Синтез адаптивного управления по критерию обобщенной работы.
31. Учет ограничений по управлению и состоянию.

Задания для лабораторных работ

Лабораторная работа № 1

Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $t_0 = 0$, $T = 10$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{pmatrix}.$$

1. Для моделирования построить дискретную систему методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0,1$.
2. Выполнить синтез управляющих воздействий на основе минимизации классического квадратичного функционала при

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix}, \quad D = 1, \quad \varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3}.$$

Представить графики переходных процессов и управлений.
Варианты исходных данных приведены в таблице 1.

Лабораторная работа № 2

Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t), \quad x(t_0) = x_0$$

$$\dot{u}(t) = v(t), \quad u(t_0) = u_0,$$

где $t_0 = 0$, $T = 10$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{pmatrix}, \quad u_0 = 0.$$

1. Для моделирования построить дискретную систему методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0,1$.

2. Выполнить синтез управляющих воздействий на основе минимизации квадратичного функционала обобщенной работы при $l_p = 15$ и

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix}, D_1 = 1, D_2 = 1.$$

Представить графики переходных процессов и значений $u(k)$.
Варианты исходных данных приведены в таблице 1.

Лабораторная работа № 3

Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), x(0) = x_0,$$

где $t_0 = 0, T = 10$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ a_{2,1}\Delta t & 1 + \Delta t a_{2,2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2\Delta t \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{pmatrix}, \Delta t = 0,1.$$

Выполнить синтез управляющих воздействий на основе минимизации локального квадратичного функционала при

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix}, D = 1, \varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3}.$$

Представить графики переходных процессов и управлений.
Варианты исходных данных приведены в таблице 1.

Лабораторная работа № 4

Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}q(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $t_0 = 0$, $T = 10$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{pmatrix},$$

$q(t)$ – вектор гауссовских шумов с нулевым средним и единичной дисперсией.

1. Для моделирования построить дискретную систему методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0,1$.

2. Выполнить синтез управляющих воздействий на основе минимизации математического ожидания классического квадратичного функционала по оценкам состояния, где

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix}, \quad D = 1, \quad \varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3}, \quad \hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,7x_{1_0} \\ 1,3x_{2_0} \end{pmatrix}, \quad P_{x_0} = \text{diag}(1;1).$$

Для моделирования использовать следующие значения, характеризующие полноту измерений вектора состояния:

$$1) \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0,32 & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad H = (1 \ 0), \quad R = (0,32);$$

$$3) \quad H = (0 \ 1), \quad R = (0,35).$$

Представить графики векторов состояний, оценок состояний и управлений.

Варианты исходных данных приведены в таблице 1.

Лабораторная работа № 5

Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}q(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\dot{u}(t) = v(t), \quad u(t_0) = u_0,$$

где $t_0 = 0$, $T = 10$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{pmatrix}, \quad u_0 = 0,$$

$q(t)$ – вектор гауссовских шумов с нулевым средним и единичной дисперсией.

1. Для моделирования построить дискретную систему методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0,1$.

2. Выполнить синтез управляющих воздействий на основе минимизации математического ожидания квадратичного функционала обобщенной работы по оценкам состояния, где

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix}, \quad D_1 = 1, \quad D_2 = 1, \quad l_p = 15, \quad \hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,7x_{1_0} \\ 1,3x_{2_0} \end{pmatrix}, \quad P_{x_0} = \text{diag}(1;1).$$

Для моделирования использовать следующие значения, характеризующие полноту измерений вектора состояния:

$$1) \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0,32 & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = (0,32);$$

$$3) \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = (0,35).$$

Представить графики векторов состояний, оценок состояний и управлений.

Варианты исходных данных приведены в таблице 1.

Лабораторная работа № 6

Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}q(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $t_0 = 0$, $T = 10$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{pmatrix},$$

$q(t)$ – вектор гауссовских шумов с нулевым средним и единичной дисперсией.

1. Для моделирования построить дискретную систему методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0,1$.

2. Выполнить синтез управляющих воздействий на основе минимизации математического ожидания классического локального функционала по оценкам состояния при полном измерении, где

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix}, \quad D = 1, \quad \varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3}, \quad \hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,7x_{1_0} \\ 1,3x_{2_0} \end{pmatrix}, \quad P_{x_0} = \text{diag}(1;1).$$

Для моделирования использовать следующие значения, характеризующие полноту измерений вектора состояния:

$$1) \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0,32 & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad H = (1 \ 0), \quad R = (0,32);$$

$$3) \quad H = (0 \ 1), \quad R = (0,35).$$

Представить графики векторов состояний, оценок состояний и управлений.

Варианты исходных данных приведены в таблице П.2.1.

Лабораторная работа № 7

Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}q(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $t_0 = 0, T = 10$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{pmatrix},$$

$q(t)$ – вектор гауссовских шумов с нулевым средним и единичной дисперсией.

Для формирования управляющих воздействий используется система

$$x(k+1) = A(\hat{\theta})x(k) + B(\hat{\theta})u(k) + Fq(k), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $\hat{\theta}(k)$ – вектор оценок неизвестных параметров модели объекта, $A(\hat{\theta}(k)), B(\hat{\theta}(k))$ – матрицы дискретной системы, полученные методом Эйлера при $\Delta t = 0,1$, в которых вместо неизвестных параметров стоят их оценки.

Выполнить синтез адаптивного управления на основе минимизации математического ожидания классического квадратичного функционала, где

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix}, \quad D = 1, \quad \varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0,32 & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix}.$$

Варианты исходных данных для модели объекта приведены в таблице 1. Варианты значений $\hat{\theta}(0)$ и P_{θ_0} приведены в таблице 2.

Представить графики векторов состояний и управлений. На отдельных графиках представить точные значения неизвестных параметров и их оценки.

Лабораторная работа № 8

Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}q(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ \dot{u}(t) &= v(t), \quad u(t_0) = u_0,\end{aligned}$$

где $t_0 = 0$, $T = 10$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{pmatrix}, \quad u_0 = 0,$$

$q(t)$ – вектор гауссовских шумов с нулевым средним и единичной дисперсией.

Для формирования управляющих воздействий используется система

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(\hat{\theta})x(k) + B(\hat{\theta})u(k) + Fq(k), \quad x(0) = x_0, \\ u(k+1) &= u(k) + \Delta t v(k), \quad u(0) = u_0,\end{aligned}$$

где $\hat{\theta}(k)$ – вектор оценок неизвестных параметров модели объекта, $A(\hat{\theta}(k)), B(\hat{\theta}(k))$ – матрицы дискретной системы, полученные методом Эйлера при $\Delta t = 0,1$, в которых вместо неизвестных параметров стоят их оценки.

Выполнить синтез адаптивного управления на основе минимизации математического ожидания квадратичного функционала обобщенной работы, где $l_p = 15$,

$$C = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,7 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 1, \quad D_2 = 1, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0,32 & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix}.$$

Варианты исходных данных для модели объекта приведены в таблице 1. Варианты значений $\hat{\theta}(0)$ и P_{θ_0} приведены в таблице 2.

Представить графики векторов состояний и управлений. На отдельных графиках представить точные значения неизвестных параметров и их оценки.

Лабораторная работа № 9

Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}q(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $t_0 = 0, T = 10$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{pmatrix},$$

$q(t)$ – вектор гауссовских шумов с нулевым средним и единичной дисперсией.

Для формирования управляющих воздействий используется система

$$x(k+1) = A(\hat{\theta})x(k) + B(\hat{\theta})u(k) + Fq(k), \quad x(0) = x_0,$$

где $\hat{\theta}(k)$ – вектор оценок неизвестных параметров модели объекта, $A(\hat{\theta}(k)), B(\hat{\theta}(k))$ – матрицы дискретной системы, полученные методом Эйлера при $\Delta t = 0,1$, в которых вместо неизвестных параметров стоят их оценки.

Выполнить синтез управляющих воздействий на основе минимизации математического ожидания локального квадратичного функционала, где

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix}, \quad D = 1, \quad \varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0,32 & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix}.$$

Варианты исходных данных для модели объекта приведены в таблице 1. Варианты значений $\hat{\theta}(0)$ и P_{θ_0} приведены в таблице 2.

Представить графики векторов состояний и управлений. На отдельных графиках представить точные значения неизвестных параметров и их оценки.

Лабораторная работа № 10

Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}q(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $t_0 = 0$, $T = 10$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{pmatrix},$$

$q(t)$ – вектор гауссовских шумов с нулевым средним и единичной дисперсией.

1. Для моделирования построить дискретную систему методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0,1$.

2. Выполнить синтез адаптивного управления на основе минимизации математического ожидания классического квадратичного функционала, где

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix}, \quad D = 1, \quad \varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0,32 & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,7x_{1_0} \\ 0,3x_{2_0} \end{pmatrix}, \quad P_{x_0} = \text{diag}\{1;1\}.$$

Варианты исходных данных для модели объекта приведены в таблице 1. Варианты значений $\hat{\theta}(0)$ и P_{θ_0} приведены в таблице 2.

Представить графики векторов состояний, оценок состояний и управлений. На отдельных графиках представить точные значения неизвестных параметров и их оценки.

Лабораторная работа № 11

Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}q(t), \quad x(t_0) = x_0$$

$$\dot{u}(t) = v(t), \quad u(t_0) = u_0,$$

где $t_0 = 0$, $T = 10$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{pmatrix}, \quad u_0 = 0,$$

$q(t)$ – вектор гауссовских шумов с нулевым средним и единичной дисперсией.

1. Для моделирования построить дискретную систему методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0,1$.

2. Выполнить синтез адаптивного управления на основе минимизации математического ожидания квадратичного функционала обобщенной работы, где $l_p = 15$,

$$C = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,7 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 1, \quad D_2 = 1,$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0,32 & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,7x_{1_0} \\ 0,3x_{2_0} \end{pmatrix}, \quad P_{x_0} = \text{diag}\{1;1\}.$$

Варианты исходных данных для модели объекта приведены в таблице 1. Варианты значений $\hat{\theta}(0)$ и P_{θ_0} приведены в таблице 2.

Представить графики векторов состояний, оценок состояний и управлений. На отдельных графиках представить точные значения неизвестных параметров и их оценки.

Лабораторная работа № 12

Поведение объекта на интервале $[t_0, T]$ описывается системой

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + \bar{F}q(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $t_0 = 0$, $T = 10$,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} 0,51 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \end{pmatrix},$$

$q(t)$ – вектор гауссовских шумов с нулевым средним и единичной дисперсией.

1. Для моделирования построить дискретную систему методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0,1$.

2. Выполнить синтез управляющих воздействий на основе минимизации математического ожидания локального квадратичного функционала, где

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 \\ 0 & c_{2,2} \end{pmatrix}, \quad D = 1, \quad \varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3}.$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0,32 & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,7x_{1_0} \\ 0,3x_{2_0} \end{pmatrix}, \quad P_{x_0} = \text{diag}\{1; 1\}.$$

Варианты исходных данных для модели объекта приведены в таблице 1. Варианты значений $\hat{\theta}(0)$ и P_{θ_0} приведены в таблице 2.

Представить графики векторов состояний, оценок состояний и управлений. На отдельных графиках представить точные значения неизвестных параметров и их оценки.

Т а б л и ц а 1

Варианты исходных данных к лабораторным работам № 1–12

№	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	b_2	$c_{1,1}$	$c_{2,2}$	x_{1_0}	x_{2_0}
1	-7,1	-0,8	1,5	1,3	2,3	-10	0,2
2	-4,1	-0,3	2,2	4,8	0,3	12,3	1,2
3	-2,8	-0,6	2,1	1,7	0,2	10,5	0,5
4	1,5	-1,8	-2,5	8,5	1,4	-25,5	1
5	-3,7	-0,9	1,5	15	3	-15	4
6	-4,1	-1,1	-1	2,3	1	-11	12
7	-3,2	-0,8	1,1	5	2	15,3	2,1
8	1,2	-0,7	1,1	10	1	10	-3,1
9	1,1	-0,6	2,1	4,5	1	-10,5	0,9
10	1,4	-1,7	3,2	3,8	2	12,8	3,2
11	0,7	-0,6	1,5	4,1	1,4	-10	1,1
12	-0,8	-2,2	-1,4	3,5	1,2	10,7	3
13	0,5	-0,9	-1,9	3,3	1,1	25	4
14	0,9	-3,2	2,1	5,6	2	20	-2
15	1	-0,7	2,2	4,3	2,1	15,6	7
16	1,3	-1,2	1,4	4,7	0,2	-13	0,8
17	0,85	-2,7	2,1	7,6	2,6	-25	1,1
18	1,5	-0,8	1,7	8,5	1,5	15,8	0,7
19	1,15	-0,9	2,2	3,9	2,3	-1	10
20	-0,7	-1,3	-0,6	5,3	1,4	12,7	-3,4
21	-0,4	-1,8	1,3	4,3	1,7	-20,1	-3,5
22	-0,7	-2,1	1,3	1,3	1,2	-13,8	3,1
23	0,92	-3,2	1,9	6,4	1,8	18,6	4,6
24	-0,4	-1,4	1,2	4,9	1,9	-24	5
25	-0,6	-2,1	1	4,1	2,3	17,5	2,1
26	4,1	-2,1	-2,2	10,1	1	11	13
27	-2,8	-0,8	-2,4	1,1	0,5	10	-3,1
28	-2,6	-2,5	-1,1	1,5	1	-19	-5,1
29	-4,6	-2,5	-1,5	1,5	0,5	19	-6,1
30	1,7	-1,5	-1,2	12,5	2,5	25	-16,1

Варианты исходных данных к лабораторным работам № 7–12

№	$\hat{\theta}(0)$	P_{θ_0}
1	$\hat{\theta}(0) = (0, 7a_{2,1}; 1, 3a_{2,2}; 1, 3b_2)^T$	$P_{\theta_0} = \text{diag}\{1; 1; 1\}$
2	$\hat{\theta}(0) = (0, 7a_{2,1}; 1, 3a_{2,2})^T$	$P_{\theta_0} = \text{diag}\{1; 1\}$
3	$\hat{\theta}(0) = (0, 7a_{2,1}; 1, 3b_2)^T$	$P_{\theta_0} = \text{diag}\{1; 1\}$
4	$\hat{\theta}(0) = (1, 3a_{2,2}; 1, 3b_2)^T$	$P_{\theta_0} = \text{diag}\{1; 1\}$
5	$\hat{\theta}(0) = (0, 7a_{2,1})$	$P_{\theta_0} = 1$
6	$\hat{\theta}(0) = (1, 3a_{2,2})$	$P_{\theta_0} = 1$
7	$\hat{\theta}(0) = (1, 3b_2)$	$P_{\theta_0} = 1$

**Индивидуальные задания для синтеза
адаптивных систем управления
различными техническими объектами**

**1. Моделирование системы адаптивного управления
боковым движением самолета [1]**

Линеаризованная модель бокового движения самолета относительно установившегося горизонтального полета может быть записана в виде системы линейных обыкновенных дифференциальных стохастических уравнений, где компоненты векторов состояния $x(t) = (\omega_x, \omega_y, \beta, \gamma)^T$ и управления $u(t) = (\delta_e, \delta_n)^T$ имеют следующий смысл:

- ω_x – отклонение угловой скорости крена (рад/с),
- ω_y – отклонение угловой скорости рыскания (рад/с),
- β – отклонение угла скольжения (рад),
- γ – отклонение угла крена (рад),
- δ_e – возмущение угла отклонения элеронов (рад),
- δ_n – возмущение угла отклонения руля направления (рад).

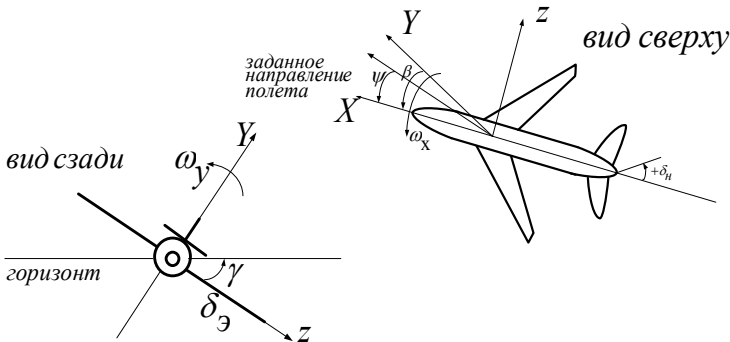


Рис. ПЗ.1. Характеристики бокового движения самолета

Внешние возмущения в модели объекта описываются вектором $q(t)$, компоненты которого являются независимыми нормальными гауссовскими величинами с матрицей влияния $\bar{F}(t)$.

Матрицы $\bar{A}, \bar{B}, \bar{F}$ принимают следующие значения:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1,89 & 0,39 & -5,55 \\ 0 & -0,034 & -2,99 & 2,43 \\ 0,035 & -0,0011 & -0,99 & -0,21 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,76 & -1,6 \\ -0,95 & -0,032 \\ 0,03 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 0,1 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0,35 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

вектор начального состояния $x_0 = (0,0035; 0,005; 0; 0)^T$, $t_0 = 0$. Для моделирования используется метод Эйлера с шагом $\Delta t = 0,1$. Время моделирования $T = 40$ с.

Математическая модель измерительного комплекса имеет вид

$$y(k) = Hx(k) + r(k),$$

где $H = I$ – матрица канала измерений (I – единичная матрица соответствующей размерности), $r(k)$ – погрешности измерений, которые описываются вектором дискретных гауссовских величин с характеристиками:

$$M\{r(k)\} = 0, \quad M\{r(k)r(j)^T\} = R\delta_{k,j}$$

$$R = \text{diag}\{0,4 \cdot 10^{-5}; 0,3 \cdot 10^{-5}; 0,2 \cdot 10^{-5}; 0,1 \cdot 10^{-5}\}.$$

Управляющие воздействия формируются по оценкам векторов состояния $\hat{x}(k)$, которые получены при использовании фильтра Калмана для следующих начальных значений:

$$\hat{x}(0) = (0,4 \cdot 10^{-2}; 0,2 \cdot 10^{-2}; 0,2 \cdot 10^{-3}; 0,1 \cdot 10^{-3})^T, \quad P_{x_0} = I_4,$$

где I_4 – единичная матрица соответствующего порядка.

Целью управления является удержания системы в окрестности нулевого состояния. При управлении слежение осуществляется за вектором $x_z = (0; 0; 0; 0)^T$.

На максимальные отклонения компонент вектора управления наложены следующие ограничения:

$$|\delta_n| \leq 0,22 \text{ рад}, \quad |\delta_e| \leq 0,22 \text{ рад}.$$

Качество функционирования системы управления должно удовлетворять заданным требованиям, т.е. для компонент вектора состояния выполняться следующие ограничения:

$$|\gamma| \leq 0,53 \cdot 10^{-2} \text{ рад}; \quad |\omega_x| \leq 0,61 \cdot 10^{-2} \text{ рад}; \\ |\omega_y| \leq 0,61 \cdot 10^{-2} \text{ рад}; \quad |\beta| \leq 0,53 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

При построении оценок векторов неизвестных параметров $\hat{\theta}(k)$ считать, что начальные значения компонент вектора $\hat{\theta}(0)$ находятся в пределах 30% отклонения от соответствующего точного значения, а $P_{\theta_0} = I$, где I – единичная матрица, порядок которой равен числу компонент вектора θ .

1.1. Реализовать синтез адаптивного управления на основе минимизации математического ожидания классического квадратичного функционала. Ориентировочные значения весовых матриц равны:

$$C = \text{diag}\{3; 2; 2; 3\}; \quad D = \text{diag}\{1; 1\}.$$

Вектор неизвестных параметров θ содержит следующие элементы матриц \bar{A}, \bar{B} : $\theta = (a_{1,2}; a_{2,4}; a_{3,4}; b_{2,1}; b_{3,1})^T$.

Представить графики переходных процессов $x(k)$, их оценок $\hat{x}(k)$ и $u(k)$. На отдельных графиках представить точные значения параметров и их оценки.

1.2. Реализовать синтез адаптивного управления на основе минимизации математического ожидания квадратичного функционала обобщенной работы при $lp = 5$. Ориентировочные значения весовых матриц равны:

$$C = \text{diag}\{3; 2; 2; 3\}; D_1 = \text{diag}\{1; 1\}, D_2 = \text{diag}\{1; 1\}.$$

Вектор неизвестных параметров θ содержит следующие элементы матриц \bar{A}, \bar{B} : $\theta = (a_{3,2}; a_{4,1}; a_{4,4}; b_{3,2})^T$.

Представить графики переходных процессов $x(k)$, их оценок $\hat{x}(k)$ и $u(k)$. На отдельных графиках представить точные значения параметров и их оценки.

1.3. Реализовать синтез адаптивного управления на основе минимизации математического ожидания локального функционала. Ориентировочные значения весовых матриц равны:

$$C_1 = \text{diag}\{3; 2; 2; 3\}; D = \text{diag}\{1; 1\}.$$

Вектор неизвестных параметров θ содержит следующие элементы матриц \bar{A}, \bar{B} : $\theta = (a_{2,2}; a_{3,3}; a_{4,3}; b_{2,2})^T$.

Представить графики переходных процессов $x(k)$, их оценок $\hat{x}(k)$ и $u(k)$. На отдельных графиках представить точные значения параметров и их оценки.

2. Моделирование системы адаптивного управления продольным движением самолета [2]

Линеаризованная модель продольного движения самолета относительно установившегося горизонтального полета может быть записана в виде системы линейных дифференциальных стохастических уравнений:

ческих уравнений, где компоненты векторов состояния $x(t) = (v; \theta; \omega_z; V)^T$ и управления $u(t) = (\delta_T, \delta_v)^T$ имеют следующий смысл:

v – отклонение угла тангажа (рад),

θ – отклонение угла наклона траектории к горизонту (рад),

ω_z – отклонение угловой скорости (рад/с),

V – отклонение скорости полета (м/с).

δ_T – величина, характеризующая тягу двигателя,

δ_v – угол отклонения руля высоты (рад).

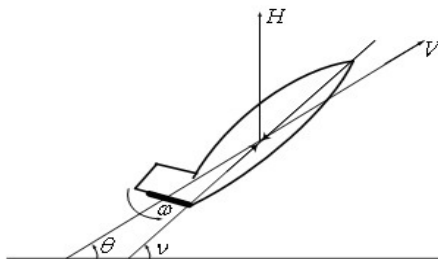


Рис. П3.2. Характеристики продольного движения самолета

Для высоты полета 5000м со скоростью, соответствующей числу Маха $M=0,46$, матрицы \bar{A} и \bar{B} соответственно равны:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,62 & -0,62 & 0 & 0,07 \\ -3,876 & 3,876 & -1,34 & -0,127 \\ -0,25 & 0,08 & 0 & -0,01 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,11 \\ 0 & -7,478 \\ 6,9 & 0 \end{bmatrix}$$

матрица влияния шумов в модели объекта имеет вид:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 0,00015 & 0,00141 \\ 0,004 & 0,035 \\ 0,037 & 0,00316 \\ 0,002 & 0,00141 \end{pmatrix},$$

вектор начального состояния $x_0 = (0,02;0,02;0,01;0,3)^T$. Для моделирования используется метод Эйлера с шагом $\Delta t = 0,1$. Время моделирования $T = 40$ с. Точность решения уравнения Риккати $\varepsilon = 0,1$.

Математическая модель измерительного комплекса имеет вид:

$$y(k) = Hx(k) + r(k),$$

где $H = I$ – матрица канала измерений (I – единичная матрица соответствующей размерности), $r(k)$ – погрешности измерений, которые описываются вектором дискретных гауссовских величин с характеристиками:

$$M\{r(k)\} = 0, \quad M\{r(k)r(j)^T\} = R\delta_{k,j}$$

$$R = \text{diag}\{0,3 \cdot 10^{-5}; 0,8 \cdot 10^{-6}; 0,8 \cdot 10^{-6}; 0,7396\}.$$

Управляющие воздействия формируются по оценкам векторов состояния $\hat{x}(k)$, которые получены при использовании фильтра Калмана для следующих начальных значений:

$$\hat{x}(0) = (0,02;0,019;0,012;0,33), \quad P_{x_0} = I_4,$$

где I_4 – единичная матрица соответствующего порядка.

Целью управления является удержания системы в окрестности нулевого состояния. При управлении слежение осуществляется за $x_z = (0;0;0;0)^T$.

На максимальные отклонения компонент вектора управления наложены следующие ограничения:

$$|\delta_T| \leq 0,1, \quad |\delta_v| \leq 0,1.$$

Качество функционирования системы управления должно удовлетворять заданным требованиям, т.е. для компонент вектора состояния выполняться следующие ограничения:

$$|\upsilon| \leq 0,316 \text{ рад}, \quad |\theta| \leq 0,0316 \text{ рад}, \\ |\omega_z| \leq 0,158 \text{ рад / с}, \quad |\dot{\upsilon}| \leq 3,16 \text{ м / с}.$$

При построении оценок векторов неизвестных параметров $\hat{\theta}(k)$ считать, что начальные значения компонент вектора $\hat{\theta}(0)$ находятся в пределах 30% отклонения от соответствующего точного значения, а $P_{\theta_0} = I$, где I – единичная матрица, порядок которой равен числу компонент вектора θ .

2.1. Реализовать синтез управляющих воздействий на основе минимизации математического ожидания классического квадратичного функционала. Ориентировочные значения весовых матриц равны:

$$C = \text{diag}\{0,1; 0,1; 0,4; 0,1 \cdot 10^{-8}\}, \quad D = \text{diag}\{1;1\}.$$

Вектор неизвестных параметров содержит следующие элементы матриц \bar{A}, \bar{B} : $\theta = (a_{1,3}; a_{2,1}; a_{3,2}; b_{2,1}; b_{4,1})^T$.

Представить графики переходных процессов $x(k)$, их оценок $\hat{x}(k)$ и $u(k)$. На отдельных графиках представить точные значения параметров и их оценки.

2.2. Реализовать синтез управляющих воздействий на основе минимизации математического ожидания квадратичного функционала обобщенной работы при $lp = 5$. Ориентировочные значения весовых матриц равны:

$$C = \text{diag}\{0,1; 0,1; 0,4; 0,1 \cdot 10^{-8}\}, \quad D_1 = \text{diag}\{1;1\}, \quad D_2 = \text{diag}\{1;1\}.$$

Вектор неизвестных параметров содержит следующие элементы матриц \bar{A}, \bar{B} : $\theta = (a_{2,2}; a_{3,1}; a_{3,2}; a_{3,3}; b_{4,1})^T$.

Представить графики переходных процессов $x(k)$, их оценок $\hat{x}(k)$ и $u(k)$. На отдельных графиках представить точные значения параметров и их оценки.

2.3. Реализовать синтез управляющих воздействий на основе минимизации математического ожидания локального квадратич-

ного функционала. Ориентировочные значения весовых матриц равны:

$$C = \text{diag}\{0,1; 0,1; 0,4; 0,1 \cdot 10^{-8}\}, \quad D = \text{diag}\{1;1\}.$$

Вектор неизвестных параметров содержит следующие элементы матриц \bar{A}, \bar{B} : $\theta = (a_{2,4}; a_{3,1}; a_{3,4}; a_{4,1}; b_{3,2})^T$.

Представить графики переходных процессов $x(k)$, их оценок $\hat{x}(k)$ и $u(k)$. На отдельных графиках представить точные значения параметров и их оценки.

3. Моделирование системы адаптивного управления движением судна при изменении курса [3]

Линеаризованная модель движения судна при изменении курса может быть записана в виде системы линейных обыкновенных дифференциальных стохастических уравнений, где компоненты векторов состояния $x(t) = (\beta, \omega, v, \psi)^T$ и управления $u(t) = (u_1(t) = \delta, u_2(t))^T$ имеют следующий смысл:

β – отклонение угла дрейфа (рад),

ω – отклонение угловой скорости дрейфа (рад/с),

v – отклонение скорости движения (м/с),

ψ – отклонение угла курса (рад),

$u_1 = \delta$ – отклонение угла перекладки руля (рад),

u_2 – отклонение режима работы главного двигателя.

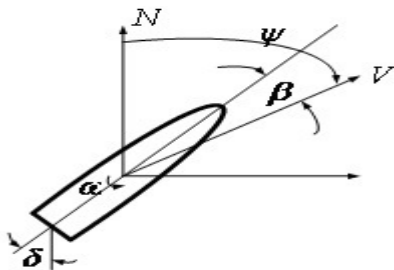


Рис. ПЗ.3. Характеристики движения судна

Внешние возмущения в модели объекта описываются вектором $q(t)$, компоненты которого являются независимыми нормальными гауссовскими величинами с матрицей влияния $\bar{F}(t)$.

Для скорости движения 10 м/с матрицы \bar{A}, \bar{B} принимают следующие значения:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -0,007 & 0,4436 & 0 & 0 \\ 0,0142 & -0,167 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0356 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0,0161 & 0 \\ 0,0085 & 0 \\ 0 & 0,97 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

матрица влияния шумов в модели объекта имеет вид:

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 0,001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00017 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

вектор начального состояния $x(t_0) = (0; 0; 0; 0,25)^T$, $t_0 = 0$.

Для моделирования используется метод Эйлера с шагом $\Delta t = 0,1$. Время моделирования $T = 80$ с.

Математическая модель измерительного комплекса имеет вид:

$$y(k) = Hx(k) + r(k),$$

где $H = I$ – матрица канала измерений (I – единичная матрица соответствующей размерности), $r(k)$ – погрешности измерений, которые описываются вектором дискретных гауссовских величин с характеристиками:

$$M\{r(k)\} = 0, \quad M\{r(k)r(j)^T\} = R\delta_{k,j}$$

$$R = \text{diag}\{0,4 \cdot 10^{-4}; 0,25 \cdot 10^{-4}; 0,1 \cdot 10^{-1}; 0,15 \cdot 10^{-2}\}.$$

Управляющие воздействия формируются по оценкам векторов состояния $\hat{x}(k)$, которые получены при использовании фильтра Калмана для следующих начальных значений:

$$\hat{x}(0) = (0; 0; 0; 0,15), \quad P_{x_0} = I,$$

где I – единичная матрица соответствующей размерности.

Целью управления является переход судна на курс $\psi_z = -0,2$, т.е. достижение объектом к окончанию времени моделирования заданного состояния $x_z = (0; 0; 0; -0,2)^T$.

На максимальные отклонения компонент вектора управления наложены следующие ограничения:

$$|\delta| \leq 0,61(\text{рад}); \quad |u_2| \leq 0,01.$$

Качество функционирования системы управления должно удовлетворять заданным требованиям, т.е. для компонент вектора состояния выполняться следующие ограничения:

$$\begin{aligned} |\beta| &\leq 0,26 \text{ рад}; \quad |\omega| \leq 0,174 \cdot 10^{-1} \text{ рад} / \text{с}; \\ |v| &\leq 0,5 \text{ м} / \text{с}; \quad |\psi - \psi_z| \leq 0,87 \cdot 10^{-1} \text{ рад}. \end{aligned}$$

При построении оценок векторов неизвестных параметров $\hat{\theta}(k)$ считать, что начальные значения компонент вектора $\hat{\theta}(0)$ находятся в пределах 30% отклонения от соответствующего точного значения, а $P_{\theta_0} = I$, где I – единичная матрица, порядок которой равен числу компонент вектора θ .

3.1. Реализовать синтез управляющих воздействий осуществляется на основе минимизации математического ожидания классического квадратичного функционала. Ориентировочные значения весовых матриц равны:

$$C = \text{diag} \{0,1 \cdot 10^{-3}; 0,1 \cdot 10^{-1}; 0,4 \cdot 10^{-2}; 0,27 \cdot 10^5\}; \quad D = \text{diag} \{1; 1\}.$$

Неизвестными считаются следующие элементы матриц \bar{A}, \bar{B} :
 $\theta = (a_{2,1}; a_{3,3}; a_{4,2}; b_{1,2}; b_{3,2})^T$.

Представить графики переходных процессов $x(k)$, их оценок $\hat{x}(k)$ и $u(k)$. На отдельных графиках представить точные значения параметров и их оценки.

3.2. Реализовать синтез управляющих воздействий осуществляется на основе минимизации математического ожидания квадратичного функционала обобщенной работы при $lp = 5$. Ориентировочные значения весовых матриц равны:

$$C = \text{diag} \{0,1 \cdot 10^{-3}; 0,1 \cdot 10^{-1}; 0,4 \cdot 10^{-2}; 0,27 \cdot 10^5\};$$

$$D_1 = \text{diag} \{1; 1\}, \quad D_2 = \text{diag} \{1; 1\}$$

Неизвестными считаются следующие элементы матриц \bar{A}, \bar{B} :
 $\theta = (a_{3,3}; a_{4,2}; b_{1,1}; b_{1,2}; b_{3,2})^T$.

Представить графики переходных процессов $x(k)$, их оценок $\hat{x}(k)$ и $u(k)$. На отдельных графиках представить точные значения параметров и их оценки.

3.3. Реализовать синтез управляющих воздействий осуществляется на основе минимизации математического ожидания локального квадратичного функционала. Ориентировочные значения весовых матриц равны:

$$C = \text{diag} \{0,1 \cdot 10^{-3}; 0,1 \cdot 10^{-1}; 0,4 \cdot 10^{-2}; 0,27 \cdot 10^5\}; \quad D = \text{diag} \{1; 1\}.$$

Неизвестными считаются следующие элементы матриц \bar{A}, \bar{B} :
 $\theta = (a_{1,2}; a_{2,1}; b_{1,1}; b_{1,2})^T$.

Представить графики переходных процессов $x(k)$, их оценок $\hat{x}(k)$ и $u(k)$. На отдельных графиках представить точные значения параметров и их оценки.

4. Моделирование адаптивной системы управления смесительным баком [4]

Линеаризованная модель смесительного бака может быть записана в виде системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, где компоненты векторов состояния

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$$

и управления

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t))^T$$

имеют следующий смысл:

$x_1(t)$ – отклонение расхода жидкости ($\text{м}^3/\text{с}$),

$x_2(t)$ – отклонение выходной концентрации ($\text{кмоль}/\text{м}^3$),

$x_3(t), x_4(t)$ – переменные, моделирующие флуктуации линеаризованной модели (гауссовские коррелированные возмущения),

$u_1(t)$ – отклонение расхода первого входного потока ($\text{м}^3/\text{с}$),

$u_2(t)$ – отклонение расхода второго входного потока ($\text{м}^3/\text{с}$).

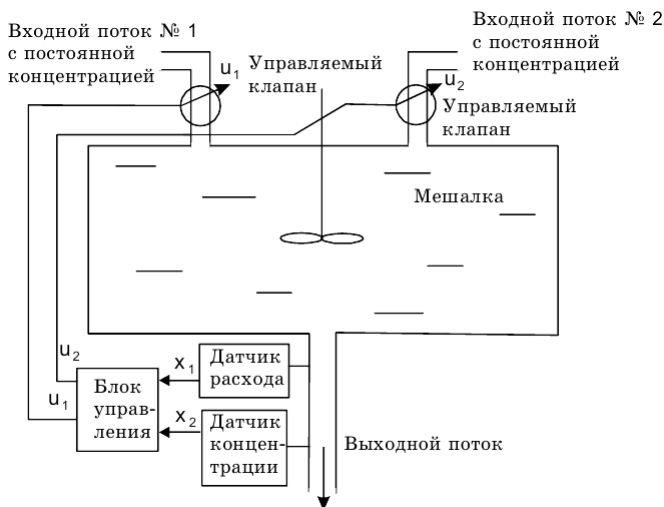


Рис. ПЗ.4. Характеристики смесительного бака

Внешние возмущения в модели объекта описываются вектором $q(t)$, компоненты которого являются независимыми нормальными гауссовскими величинами с матрицей влияния $\bar{F}(t)$.

Матрицы $\bar{A}, \bar{B}, \bar{F}$ принимают следующие значения:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -0,01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,02 & 0,01 & 0,005 \\ 0 & 0 & -0,025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,02 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0,25 & 0,75 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,35 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0,55 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix},$$

вектор начального состояния $x_0 = (0,02; 0; 0; 0)^T$, $t_0 = 0$.

Для моделирования используется метод Эйлера с шагом $\Delta t = 0,1$. Время моделирования $T = 40$ с.

Математическая модель измерительного комплекса имеет вид:

$$y(k) = Hx(k) + r(k),$$

где H – матрица вида:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$r(k)$ – погрешности измерений, которые описываются вектором дискретных гауссовских величин с характеристиками:

$$M\{r(k)\} = 0, \quad M\{r(k)r(j)^T\} = R\delta_{k,j}$$

$$R = \text{diag}\{10^{-6}; 10^{-6}\}.$$

Управляющие воздействия формируются по оценкам векторов состояния $\hat{x}(k)$, которые получены при использовании фильтра Калмана для следующих начальных значений:

$$\hat{x}(0) = (0,015; 0; 0; 0), \quad P_{x_0} = I_4,$$

где I_4 – единичная матрица соответствующего порядка.

Целью управления является удержания системы в окрестности нулевого состояния. При управлении слежение осуществляется за $x_z = (0,04; 0; 0; 0)^T$.

На максимальные отклонения компонент вектора управления наложены следующие ограничения:

$$0 \leq u_1(k) \leq 1,74, \quad 0 \leq u_2(k) \leq 0,58.$$

Качество функционирования системы управления должно удовлетворять заданным требованиям, т.е. для компонент вектора состояния выполняться следующие ограничения:

$$|x_1 - x_{z1}| \leq 0,04 \text{ м}^3 / \text{с}; \quad |x_2 - x_{z2}| \leq 0,1 \text{ кмоль} / \text{с}.$$

При построении оценок векторов неизвестных параметров $\hat{\theta}(k)$ считать, что начальные значения компонент вектора $\hat{\theta}(0)$ находятся в пределах 30% отклонения от соответствующего точного значения, а $P_{\theta_0} = I$, где I – единичная матрица, порядок которой равен числу компонент вектора θ .

4.1. Реализовать синтез адаптивного управления на основе минимизации математического ожидания классического квадратичного функционала. Ориентировочные значения весовых матриц равны:

$$C = \text{diag}\{5,15; 0,006205; 0; 0\}; \quad D = \text{diag}\{0,35; 3\}.$$

Вектор неизвестных параметров содержит следующие элементы матриц \bar{A} , \bar{B} : $\theta = (a_{2,3}; a_{4,4})^T$.

Представить графики переходных процессов $x(k)$, их оценок $\hat{x}(k)$ и $u(k)$. На отдельных графиках представить точные значения параметров и их оценки.

4.2. Реализовать синтез адаптивного управления на основе минимизации математического ожидания квадратичного функционала обобщенной работы при $lp = 5$. Ориентировочные значения весовых матриц равны:

$$C = \text{diag}\{5, 15; 0, 006205; 0; 0\};$$

$$D_1 = \text{diag}\{0, 35; 3\}, D_2 = \text{diag}\{0, 35; 3\}.$$

Вектор неизвестных параметров содержит следующие элементы матриц \bar{A}, \bar{B} : $\theta = (b_{2,1}; b_{2,2})^T$.

Представить графики переходных процессов $x(k)$, их оценок $\hat{x}(k)$ и $u(k)$. На отдельных графиках представить точные значения параметров и их оценки.

4.3. Реализовать синтез адаптивного управления на основе минимизации математического ожидания локального квадратичного функционала. Ориентировочные значения весовых матриц равны:

$$C = \text{diag}\{5, 15; 0, 006205; 0; 0\}; D = \text{diag}\{0, 35; 3\}.$$

Вектор неизвестных параметров содержит следующие элементы матриц \bar{A}, \bar{B} : $\theta = (a_{2,4}; b_{1,2})^T$.

Представить графики переходных процессов $x(k)$, их оценок $\hat{x}(k)$ и $u(k)$. На отдельных графиках представить точные значения параметров и их оценки.

Литература для приложения 3

1. Rooney R.H., Shapiro E.Y. The use modal control to minimize errors in the analytical reconstruction of flight control sensor signals // Proc. IEEE Nat, Aerospace and Electron. Conf. NAECN 1982. Dayton, Ohio, 1982. New York, 1982. № 4.
2. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М. : Наука, 1973. 558 с.
3. Соболев Г.В. Управляемость корабля и автоматизация судовождения. – Л. : Судовождение, 1976. 477 с.
4. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М. : Мир, 1977. 650 с.

Оглавление

Введение	3
1. Описание систем в пространстве состояний	5
1.1. Математические модели динамических систем	5
1.2. Построение математической модели движения ракеты	7
1.3 Построение макроэкономической модели динамики фондов производственного накопления и потребления	9
2. Оптимальное управление на основе минимизации квадратичных функционалов	11
2.1. Оптимальное управление при минимизации классического квадратичного функционала	11
2.2. Оптимальное управление при минимизации функционала обобщенной работы	13
2.3. Оптимальное управление при минимизации локального квадратичного критерия	17
2.4. Следящие системы управления	18
3. Синтез управляющих воздействий на основе минимизации квадратичных функционалов	20
3.1. Основные понятия цифровых систем управления	20
3.2. Моделирование поведения управляемого объекта	22
3.3. Синтез оптимального управления	24
4. Применение оценщиков в контуре управления	35
4.1. Моделирование поведения объекта при наличии внешних возмущений	35
4.2. Описание математической модели измерительного комплекса	37
4.3. Оценивание состояния модели объекта	37
4.4. Синтез управляющих воздействий по оценкам состояния	43
5. Адаптивные следящие системы управления	50
5.1. Основные понятия адаптивных систем управления	50
5.2. Оценивание параметров модели объекта	52

5.3. Двухэтапный алгоритм оценивания состояния и параметров модели объекта	56
5.4. Синтез адаптивного управления	58
6. Ограничения по управлению и состоянию	70
7. Пример синтеза адаптивного управления для нестационарной модели судна при изменении курса	71
Литература.....	80
Приложение 1. Контрольные вопросы.....	81
Приложение 2. Задания для лабораторных работ.....	83
Приложение 3. Индивидуальные задания для синтеза адаптивных систем управления различными техническими объектами...	96

Издание подготовлено в авторской редакции

Отпечатано на участке цифровой печати
Издательского Дома Томского государственного университета

Заказ № 1777 от «14» апреля 2016 г. Тираж 30 экз.