

# Актуализация распределения инвестиций методом динамического программирования

С. А. Баркалов, Т. А. Свиридова, В. Н. Золотарев

Воронежский государственный  
технический университет  
<sup>1</sup>barkalov@vgasu.vrn.ru

А. В. Черненко  
Санкт-Петербургский политехнический  
университет Петра Великого  
andrey@qmd.spbstu.ru

С. П. Федосова

Российский экономический университет  
им. Г.В.Плеханова, Воронежский филиал  
sfedosova@ya.ru

Ф. А. Десятириков

Гимназия им. Н. Г. Басова при Воронежском  
государственном университете  
science2000@yandex.ru

**Аннотация.** Предложены процедуры динамического программирования для решения задачи управления распределением инвестиций в производственные предприятия. Проведен анализ эффективности использования метода динамического программирования при управлении инвестициями в предприятия.

**Ключевые слова:** принятие решений; инвестиции; динамическое программирование; простот выпуска продукции

В различных сферах деятельности требуется рациональный подход при выборе наиболее приемлемых вариантов, принятии решений. Одним из методов оптимизации управления распределением ресурсов является метод динамического программирования. Привлекательность данного метода состоит в простоте и ясности принципа оптимальности, который является основным в методе динамического программирования. Радиус охвата данного принципа очень широк, нельзя составить точный список областей его применения, возможность использования данного принципа в различных сферах не ограничена. Сам метод динамического программирования является средством практического решения задач оптимизации.

Главной сферой применения принципа оптимальности являются многоэтапные процессы, т. е. процессы, протекающие во времени [1]. Это позволило назвать новый метод оптимизации динамическим. Именно динамичность является главным отличием данного метода от линейного и математического программирования, исходная постановка основных задач которых имела статический характер.

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, разработанный для эффективного решения некоторого класса задач математического программирования. Этот класс характеризуется возможностью естественного (а иногда и искусственного) разбиения всей операции на ряд взаимосвязанных этапов. Термин «динамическое» в названии метода возник потому, что этапы предполагаются разделенными во времени. Однако этапами могут быть элементы операции, никак не связан-

ные друг с другом показателем времени. Тем не менее, метод решения подобных многоэтапных задач применяется один и тот же. В некоторых источниках метод также называют многоэтапным программированием.

Применение принципа оптимальности и принципа погружения в многошаговых, дискретных процессах приводят к рекуррентно-функциональным уравнениям относительно оптимального значения критерия качества [2]. Полученные уравнения позволяют последовательно выписать оптимальные управления для исходной задачи. Преимущество в данном случае состоит в том, что задача для всего процесса делится на ряд более простых задач для отдельных этапов процесса [3].

Модели динамического программирования могут применяться при разработке правил управления запасами, устанавливающими момент пополнения запасов и размер пополняющего заказа; при разработке принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию; при распределении инвестиций между новыми направлениями их использования; при составлении календарных планов текущего и капитального ремонта сложного оборудования и его замены; при разработке долгосрочных правил замены выбывающих из эксплуатации основных фондов и т. д.

Обычно, при решении задач с помощью метода динамического программирования используют два подхода.

При первом подходе используется запоминание для решений часто встречающихся подзадач.

Второй подход лучше нисходящего программирования в размере и количестве функций, но иногда бывает нелегко заранее выяснить, решение каких подзадач нам потребуются в дальнейшем [4].

В настоящее время математические методы в инвестировании набирают все большее и большее значение. При принятии решения о вложении денежных средств необхо-

димо учитывать большое количество факторов. Это могут быть факторы как внутренние (организационная структура, инновационный потенциал, финансовое состояние и др.), так и внешние (уровень законодательной базы, развитие финансовой среды, экологическая безопасность и др.) [5]. Одним из методов, позволяющих определить объем и направление инвестиций, является метод динамического программирования.

Сегодня, вопросы, связанные с применением динамического программирования в различных областях экономики и менеджмента, разрабатывались и разрабатываются многими отечественными и зарубежными исследователями, математиками и экономистами [6]. Разработан ряд методов и моделей, предназначенных для предприятий различного характера. Это говорит о том, что этот метод является востребованным и необходимым при принятии решений в различных сферах управленческой деятельности [7].

Рассмотрим метод динамического программирования при определении объема инвестиций в различные предприятия на конкретном примере [8].

Задача: Методом динамического программирования решить задачу распределения инвестиций между предприятиями. 40 млн. руб. необходимо распределить между четырьмя предприятиями так, чтобы получить максимальный прирост выпуска продукции. Доходности от вложений  $g_i(x_i)$  заданы табл. 1, а вложения кратны 8 млн. руб. (табл. 1).

ТАБЛИЦА I Доходность от вложений

$g_i(x_i)$ $x_i$	$g_1(x_1)$	$g_2(x_2)$	$g_3(x_3)$	$g_4(x_4)$
0	0	0	0	0
8	45	28	35	27
16	57	66	67	73
24	120	122	120	125
32	150	146	144	177

Эту задачу можно записать в математической форме

$$g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3) + g_4(x_4) \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 40$$

$$x = \{0; 8; 16; 24; 32; 40\}, i = \overline{1,5}.$$

где  $x_i$  – количество средств, выделяемых каждому предприятию;  $g_i(x_i)$  – ожидаемый прирост продукции от выделенных средств (млн. руб.).

Поставлена задача инвестиций в первое предприятие.

Возможные значения переменной состояния:

$$P = \{0; 8; 16; 24; 32; 40\}.$$

$$f_1(P) = g_1(x_1).$$

$$f_1(0) = 0, \quad f_1(8) = 45, \quad f_1(16) = 57, \quad f_1(24) = 120, \\ f_1(32) = 150, \quad f_1(40) = 180.$$

II. Выделенную сумму 40 млн. руб. распределим между первым и вторым предприятиями.

$$f_2(P_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq P_2} \{g_2(x_2) + f_1(P_2 - x_2)\};$$

$$f_2(0) = \max_{x_2=0} \{g_2(0) + f_1(0-0)\} = 0 \text{ при } x_2 = 0;$$

$$f_2(8) = \max_{x_2=\{0; 8\}} \{g_2(0) + f_1(8-0); g_2(8) + f_1(8-0)\} = \\ = \max \{0 + 45; 28 + 0\} = \max \{45; 28\} = 45$$

при  $x_2 = 0$ ;

$$f_2(16) = \max_{x_2=\{0; 8; 16\}} \left\{ \begin{array}{l} g_2(0) + f_1(16-0); g_2(8) + f_1(16-8); \\ g_2(16) + f_1(0) \end{array} \right\} = \\ = \max \{0 + 57; 28 + 45; 66 + 0\} \\ \max \{57; 73; 66\} = 73 \text{ при } x_2 = 8;$$

$$f_2(24) = \max_{x_2=\{0; 8; 16; 24\}} \{g_2(0) + f_1(24); g_2(8) + f_1(24-8); f_1(0)\} = \\ = \max \{0 + 120; 28 + 57; 66 + 45; 122 + 0\} = \\ = \max \{120; 85; 111; 122\} = 122 \text{ при } x_2 = 24;$$

$$f_2(32) = \max_{x_2=\{0; 8; 16; 24; 32\}} \{g_2(0) + f_1(32); g_2(8) + f_1(32-8); \\ g_2(16) + f_1(32-16); g_2(24) + f_1(32-24); \\ g_2(32) + f_1(0)\} = \\ = \max \{0 + 150; 28 + 120; 66 + 57; 122 + 45; 146 + 0\} = \\ = \max \{150; 148; 123; 167; 146\} = 167 \text{ при } x_2 = 24;$$

$$f_2(40) = \max_{x_2=\{0; 8; 16; 24; 32; 40\}} \{g_2(0) + f_1(40); g_2(8) + f_1(40-8); \\ g_2(16) + f_1(40-16); g_2(24) + f_1(40-24); \\ g_2(32) + f_1(40-32); g_2(40) + f_1(0)\} = \\ = \max \{0 + 180; 28 + 150; 66 + 120; 122 + 57; 146 + 45; 175 + 0\} \\ = \max \{180; 178; 186; 179; 191; 175\} = 191 \text{ при } x_2 = 32.$$

III. Выделенную сумму 40 млн. руб. распределим между первым, вторым и третьим предприятиями.

$$f_3(P_3) = \max_{0 \leq x_3 \leq P_3} \{g_3(x_3) + f_2(P_3 - x_3)\}$$

$$f_3(0) = \max_{x_3=0} \{g_3(0) + f_2(0-0)\} = 0 \text{ при } x_3 = 0;$$

$$f_3(8) = \max_{x_3=\{0; 8\}} \{g_3(0) + f_2(8-0); g_3(8) + f_2(8-0)\} = \\ = \max \{0 + 28; 35 + 0\} = \max \{28; 35\} = 35$$

при  $x_3 = 8$ ;

$$f_3(16) = \max_{x_3=\{0;8;16\}} \{g_3(0) + f_2(16-0); g_3(8) + f_2(16-8); g_3(16) + f_2(0)\} \\ = \max \{0 + 66; 35 + 28; 67 + 0\} = \\ = \max \{66; 63; 67\} = 67 \text{ при } x_3 = 16;$$

$$f_3(24) = \max_{x_3=\{0;8;16;24\}} \{g_3(0) + f_2(24); g_3(8) + f_2(24-8); g_3(16) + \\ f_2(24-16); g_3(24) + f_2(0)\} \\ = \max \{0 + 122; 35 + 66; 67 + 28; 120 + 0\} = 122 \text{ при } x_3 = 0;$$

$$f_3(32) = \max_{x_3=\{0;8;16;24;32\}} \{g_3(0) + f_2(32); g_3(8) + f_2(32-8); \\ g_3(16) + f_2(32-16); g_3(24) + f_2(32-24); \\ g_3(32) + f_2(0)\} = \\ = \max \{0 + 146; 35 + 122; 67 + 66; 120 + 28; 144 + 0\} = \\ = \max \{146; 157; 133; 148; 144\} = 157$$

при  $x_3 = 8$ ;

$$f_3(40) = \max_{x_3=\{0;8;16;24;32;40\}} \{g_3(0) + f_2(40); g_3(8) + f_2(40-8); \\ g_3(16) + f_2(40-16); g_3(24) + f_2(40-24); \\ g_3(32) + f_2(40-32); g_3(40) + f_2(0)\} = \\ = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 175; 35 + 146; 67 + 122; 120 + 66; 144 + 28; \\ 180 + 0 \end{array} \right\} = \\ = \max \{175; 181; 189; 186; 172; 180\} = 189 \text{ при } x_3 = 16.$$

IV. Выделенную сумму 40 млн. руб. распределим между всеми предприятиями.

$$f_4(P_4) = \max_{0 \leq x_4 \leq 40} \{g_4(x_4) + f_3(P_4 - x_4)\} \\ f_4(40) = \max_{x_4=\{0;8;16;24;32;40\}} \{g_4(0) + f_3(40); g_4(8) + f_3(40-8); \\ g_4(16) + f_3(40-16); g_4(24) + f_3(40-24); \\ g_4(32) + f_3(40-32); g_4(40) + f_3(0)\} = \\ = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 180; 27 + 144; 73 + 120; 125 + 67; 177 + 35; \\ 178 + 0 \end{array} \right\} = \\ = \max \{180; 171; 193; 192; 212; 178\} = 212 \text{ при } x_4 = 32.$$

Итак, получен максимальный ожидаемый прирост выпуска продукции равный 212 млн. руб.

Дальше требуется определить, при каких вариантах вложений получен требуемый результат. С этой целью необходимо пройти от четвертого этапа к первому и проследить, как получено максимальное значение целевой функции. На четвертом этапе получен максимально возможный вариант при  $x_4 = 32$ . Фиксируем это значение переменных.

$212 = 177 + 35$ , где  $35 = f_3(8)$ . Этот результат получен на третьем этапе при  $x_3 = 8$ .

Замечаем, что  $f_3(8) = 35 + 0$ , где  $0 = f_2(8)$ . Этот результат получен при  $x_2 = 0$ .

Аналогично получаем  $x_1 = 0$ .

Таким образом, инвестиции целесообразно выделять третьему и четвертому предприятиям в количестве соответственно 8 и 32 млн. руб. Оптимальный прирост в этом случае составит 212 млн. руб.

Рассмотрев метод динамического программирования на конкретном примере, можно сделать вывод о том, что решение задач об инвестировании финансовых ресурсов в различные предприятия с помощью этого метода является весьма удобным и эффективным.

Динамическое программирование представляет процесс управления в виде алгоритма, или шагов, в рамках временного промежутка позволяющих достичь определенной цели. Следуя этому, процесс управления можно рассмотреть, как динамическую последовательность и представить в виде последовательности шагов во времени. Это позволяет определить алгоритм будущих действий. Поскольку вариантов возможной последовательности шагов множество, то необходимо из них выбрать оптимальный по какому-либо критерию в соответствии с поставленной целью.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Desyatirikova E. N., Belousov V. E., Fedosova S. P., Ievleva A. A., "DSS design for risk management of projects", in Proc. of 2017 International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies", IT and QM and IS 2017, St. Petersburg, Russian Federation; 24-30 September 2017, Publisher: IEEE, pp.492-495 DOI: 10.1109/ITMQIS.2017.8085869.
- [2] Desyatirikova E. N., Kuripta O.V., Stroganova Y. S., Abrosimov I. P., "Quality management in IT service management based on statistical aggregation and decomposition approach", in Proc. of 2017 International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies", IT and QM and IS 2017, St. Petersburg, Russian Federation; 24-30 September 2017, Publisher: IEEE, pp.500-505 DOI: 10.1109/ITMQIS.2017.8085871.
- [3] Volkova, V.N., Loginova, A.V., Shirokova, S.V., Kozlovskaya, E.A. Development of the innovative IT-project and managing project human resources (Conference Paper) // Proceedings of the 19th International Conference on Soft Computing and Measurements, SCM 2016, Saint Petersburg Electrotechnical University (SPbETU) "LETI", Saint Petersburg, Russian Federation; 25-27 May 2016; Editor Shaposhnikov S. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2016. Article # 7519816, PP. 470-473 (ISBN: 978-146738919-8, DOI: 10.1109/SCM.2016.7519816).
- [4] Chernenkaya L. V., Desyatirikova E. N., Belousov V. E., Chepelev S. A., Sergeeva S. I., Slinkova N. V., "Optimal planning of distributed control systems with active elements", in Proc. of 2017 IEEE 2nd

- International Conference on Control in Technical Systems, CTS 2017; St. Petersburg; Russian Federation; 25-27 October 2017, Publisher: IEEE, pp.39-42 DOI: 10.1109/CTSUS.2017.8109482
- [5] Volkova, V.N., Loginova, A.V., Shirokova, S.V., Iakovleva, E.A. Models for the study of the priorities of innovative companies (Conference Paper) // Proceedings of the 19th International Conference on Soft Computing and Measurements, SCM 2016; Saint Petersburg Electrotechnical University (SPbETU) "LETI", Saint Petersburg; Russian Federation; 25-27 May 2016; Editor Shaposhnikov S. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2016. Article # 7519831. PP. 515-517 (DOI: 10.1109/SCM.2016.7519831)
- [6] Volkova, V.N., Vasiliev, A.Y., Efremov, A.A., Loginova, A.V. Information technologies to support decision-making in the engineering and control (Conference Paper) // Proceedings of 2017 20th IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements, SCM 2017; St. Petersburg; Russian Federation; 24-26 May 2017; Editor Shaposhnikov S. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2017. Article # 7970704. PP. 727-730. (ISBN: 978-153861810-3, DOI: 10.1109 /SCM.2017.7970704).
- [7] Баркалов, С.А., Свиридова, Т.А. Инвестиционный менеджмент: Учебное пособие/С.А. Баркалов С.А., Т.А. Свиридова – СПб.: ИЦ «Интермедия», 2017. – 240 с.
- [8] Свиридова Т.А. Актуализация кластерного анализа как многомерного метода классификации в социально-экономической сфере //В сборнике Проблемы современных экономических, правовых и естественных наук в России Сборник статей 6 международно научной-практической конференции (том 2). Ганновер-Воронеж, 2017. С. 223-226.