

# Ситуационное управление в стохастических системах

С. А. Дубовик<sup>1</sup>, А. А. Кабанов<sup>2</sup>, И. Ю. Липко

Севастопольский государственный университет, Федеральный исследовательский центр

«Информатика и управление» Российской академии наук

<sup>1</sup> duboviksa@gmail.com, <sup>2</sup> kabanovaleksey@gmail.com

**Аннотация.** Рассматриваются системы управления, функционирующие в условиях разнообразных возмущений. Предлагается синтез функционально устойчивой системы осуществить на основе двухуровневой системы, в которой верхний уровень контроля реализуется с помощью асимптотических методов больших уклонений.

**Ключевые слова:** ситуационное управление; большие уклонения; функционал действия; возмущения; система путей

## I. ВВЕДЕНИЕ

При управлении автономными (то есть, маневрирующими на протяжении некоторого времени без вмешательства экипажа, пилота, водителя и т.п., а также без телеметрии) объектами возникает задача синтеза верхнего уровня контроля и подходящей (при необходимости) коррекции процесса [1, 2]. Такая задача в настоящей работе представлена в рамках ситуационного управления [3], для чего используется метод больших уклонений. Изменение ситуации при управлении связано обычно с превышением выходными координатами некоторых заранее определенных уровней, задающих эксплуатационные области в пространстве состояния объекта. В задачах аэродинамики это, например, предкритические значения углов атаки, ограничивающие области почти линейности коэффициентов подъемной силы, в системах контроля мореходности аналогичное значение имеют ограничения на углы крена и дифферента. Контроль за такими процессами, определяющими в большой степени живучесть объекта и его способность к достижению конечной цели, будем связывать здесь с верхним уровнем управления – супервизором, необходимость в котором определяется длительностью автономных режимов функционирования объекта в условиях разнообразных возмущающих движение факторов. Наше рассмотрение опирается на статистический подход и вероятностные модели возмущений.

## II. ЗАДАЧА АЛГОРИТМИЗАЦИИ СУПЕРВИЗОРА КАК ЗАДАЧА СИТУАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Наряду с обычным локальным уровнем рассмотрения, характерным для теории регулирования (непрерывного), управляемый процесс будем предполагать

контролируемым в дискретные моменты времени, используя, как и в [3], следующее соотношение на каждом шаге:

$$S_i; Q_j \xrightarrow{U_k} Q_l,$$

где  $Q$  – текущая, а  $S$  – полная ситуации, так что, если полная ситуация  $S_i$  допускает управление  $U_k$ , то оно используется и текущая ситуация  $Q_j$  трансформируется в новую  $Q_l$ ; при этом, обе ситуации:  $Q_j$  и  $Q_l$ , будем называть допустимыми. Когда оказывается так, что не существует управления  $U_k$  в ситуации  $S_i$ , тогда процесс квалифицируется как неудовлетворительно завершённый. Если вероятность такого фатального события удастся удерживать (посредством управления) близкой к нулю, то систему будем называть функционально устойчивой. В рамках этой схемы далее исследуются способы достижения функциональной устойчивости на основе теории больших уклонений, используемой как для непрерывных, так и для дискретных систем

В данной работе сосредоточим внимание на том конкретном случае, когда все допустимые ситуации неразличимы и означают одно и то же – штатную работу системы:  $Q_i = Q_0$ , а альтернатива этому:  $Q_1$  – неудовлетворительное завершение миссии управления. Будем предполагать также, что управляемая система характеризуется вектором состояния  $x \in R^n$ , а ситуация  $Q_0$  характеризуется принадлежностью выхода  $y = Cx$  некоторой области  $D \subset R^n$ , содержащей состояние равновесия системы  $\chi$ . Для сокращения изложения сосредоточим внимание на описании алгоритма управления, содержательной стороне вопросов и обсуждении результатов.

Заметим, что давно используемый термин «ситуационное управление» с помощью метода больших уклонений оказывается возможным распространить на динамические системы и заменить им не вполне конкретное и порой перегруженное наименование «интеллектуальное управление».

## III. УПРАВЛЕНИЕ И КОНТРОЛЬ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Грубые оценки асимптотических методов больших уклонений позволяют интерпретировать задачу управления как задачу оценки характеристик

---

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01220)

управляемости системы применительно к действующим возмущениям. Такими характеристиками управляемости по каждому возмущению оказываются известные в асимптотической теории функционалы действия [4]. Этим самым создается нетривиальная предметная область, содержащая не только состояние равновесия и его окрестность – возникают и другие аналогичные многообразия (А-профили), связанные с критическими состояниями задачи.

Пусть необходимо выбрать  $r$ -вектор управления  $U = U(t)$  объектом, движения которого описываются слабо возмущенным дифференциальным уравнением для  $n$ -вектора состояния  $x = x(t)$ :

$$\dot{x} = \alpha(x, U) + \varepsilon \sigma(x) \dot{w}, x(0) = x_0 \in E, \quad (1)$$

где  $\varepsilon > 0$  – малый параметр,  $\dot{w}$  –  $k$ -вектор возмущений типа «белого шума»,  $\alpha, \sigma$  – гладкие матричные функции, причем относительно  $\sigma$  предположим, как и в [4], что выполнено условие:

(РН):  $\sigma$  – равномерно невырождена в  $E$ , где  $E$  – эксплуатационная область:  $E \subset R^n$ .

Управления  $U(t)$  в (1) формируются в виде обратных связей

$$U = K x$$

так, чтобы обеспечить состояние устойчивого равновесия  $\chi$  (аттрактор) невозмущенной системы, которая получается из (1) при  $\varepsilon = 0$ :

$$\dot{x} = \alpha(x, U), x(0) = x_0,$$

с областью притяжения  $O_\chi \supset E$ . Далее будем считать, что  $\chi = 0$ , и невозмущенная система может быть линеаризована в нуле:

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 U, \quad (2)$$

где матрицы  $A_0, B_0$  (составляющие управляемую пару) есть матрицы частных производных  $\alpha(x, U)$  по аргументам (соответственно) в нуле, а качество стабилизирующего управления определяется замкнутой системой

$$\dot{x} = A x, A = A_0 + B_0 K$$

с гурвицевой матрицей  $A$ .

В результате такого замыкания в (1) получим систему:

$$\dot{\tilde{x}} = a(\tilde{x}) + \varepsilon \sigma(\tilde{x}) \dot{w}, \tilde{x}(0) = x_0 \in E. \quad (3)$$

Как и в дискретном случае, вместе с уравнением (3) рассмотрим детерминированную систему путей [2]:

$$\dot{\phi} = a(\phi) + \sigma(\phi) v, \phi(0) = x_0 \in E. \quad (4)$$

В соответствии с [4] и [2], обозначая  $v_t = \sigma^{-1}(\phi_t)(\dot{\phi}_t - a(\phi_t))$ , запишем нормированный функционал действия (ФД):

$$S_{t_0 t_f}(\phi, v) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} v^T v \delta \tau, \quad (5)$$

принимая конечные значения для абсолютно непрерывных функций на  $[t_0, t_f]$ . Введем область  $D$ , такую что  $E \subset D \subset O_\chi$  – это некоторая промежуточная ситуация между штатным ходом процесса ( $x \in E$ ) и полной потерей устойчивости ( $x \in R^n/O_\chi$ ).

Запишем условие принадлежности пути  $\phi$  множеству  $F = F(D)$  (реализующему событие  $\partial_D$ , вероятность которого оценивается) из семейства функций, непрерывных на отрезке:

$$F = \{\phi \in C_{[t_0 t_f]}(R^n) : \phi_{t_f} \in R^n \setminus D\}.$$

Для множества  $F = F(D)$  и системы (3) справедливо равенство [4]:

$$\min_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 P\{\tilde{x}_t \in R^n\} = -\min_{\phi \in F} S_{t_0 t_f}(\phi, v), \quad (6)$$

где функционал  $S_{t_0 t_f} = S_{t_0 t_f}(\phi, v)$  определен в соответствии с (5) на решениях управляемой системы (4), для которой запишем еще граничное условие выхода в критическое состояние (КС):

$$\phi(t_f) \in \Delta \subset \partial_D. \quad (7)$$

Например, границей области  $D$  может быть плоскость в  $R^n$  ( $C$  – матрица полного ранга):

$$\partial_D: C x(t_f) - y = 0. \quad (8)$$

Задачу оптимального управления (4), (5), (7) будем именовать задачей Лагранжа-Понтрягина (ЛП), а ее решения (экстремали ФД) – профилями КС.

По ФД определяется квазипотенциал [4] системы (3) (или (4)) – функция точки  $x$  и состояния равновесия  $\chi$ :

$$V(\chi, x) = \min S_{t_0 t_f}(\phi) : \phi \in C_{t_0 t_f}(R^n), \phi_{t_0} = \chi, \phi_{t_f} = x. \quad (9)$$

Соответствующую экстремаль  $\tilde{\phi}$ , удовлетворяющую (4) и ведущую из состояния устойчивого равновесия (аттрактора)  $\chi$ , будем называть предельным или А-профилем состояния  $x$ .

#### IV. ПРОФИЛИ КС ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Решение задачи ЛП (4), (5), (7) в линейном случае и для критической границы в виде плоскости (8), определяется следующими уравнениями для прямых и сопряженных переменных, а также для оптимального управления:

$$\dot{\phi}_t = A \phi_t + \sigma v_t, C \phi(t_f) = y, \quad (10)$$

$$\dot{\psi}_t = -A^T \psi_t, \psi(t_f) = \psi_f, \quad (11)$$

$$v_t = \sigma^T \psi_t. \quad (12)$$

Меры по стабилизации состояния равновесия, конечно, приводят к тому, что большие отклонения реализуются действительно редко (и тем более обоснованным становится появление малого параметра в (1) и в (3)). С другой стороны, это позволяет при анализе профилей перейти от конечных промежутков  $[t, t_f]$  к неограниченному, при  $t \rightarrow -\infty$ . Такой переход тесно связан с понятиями аттрактора и квазипотенциала системы путей [4]. Требуя в (10):

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = \chi = 0,$$

получаем эквивалентное условие:

$$x_f - D\psi_f = 0 \quad (13)$$

## V. АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ, А-ПРОФИЛИ КС

Предположение гурвицевости матрицы  $A$  эквивалентно (при условии РН) существованию единственного положительно определенного решения  $D$  уравнения Ляпунова:

$$\sigma \sigma^T = -A D - D A^T.$$

В соответствии с принципом Лагранжа, получим в результате решения задачи ЛП (10–13) выражение для А-профиля:

$$\tilde{\varphi}(t) = D e^{A^T(t_f-t)} C^T (C D C^T)^{-1} y. \quad (14)$$

## VI. АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ, ПРОФИЛИ КС И ОЦЕНКИ ИХ СХОДИМОСТИ К А-ПРОФИЛЯМ

Оказывается, что соседние экстремали, то есть профили, не удовлетворяющие условию (13), экспоненциально близки к А-профилю. В связи с этим, алгоритмы диагностики следует основывать, прежде всего, на контроле А-профилей. Действительно, если

$$x_f - D\psi_f = \gamma_f \neq 0, \psi_f = \tilde{\psi}_f + \Delta\psi_f,$$

тогда, получая используя грамиан управляемости

$$J(t) = \int_{t_f}^t e^{A(t-\tau)} \sigma \sigma^T e^{A^T(t_f-\tau)} d\tau, J_0 = J(t_0) \quad (15)$$

$$\Delta\psi_f = J_0^{-1}(x_0 - \tilde{\varphi}_0),$$

где невырожденность грамиана следует из управляемости.

Теперь, с учётом равенства

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t) + J(t)\Delta\psi_f,$$

где  $\Delta\psi_f = -D^{-1}\gamma_f$ ; равенство (15) позволяет вычислить профиль, исходящий из точки  $(t_0, x_0)$ :

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t) + J(t)J_0^{-1}(x_0 - \tilde{\varphi}_0). \quad (16)$$

Сравнивая по значениям ФД конечные и предельные профили, для чего обозначим:  $S_{0f} = S_{t_0 t_f}(\varphi, v)$  и  $\tilde{S}_{0f} = S_{t_0 t_f}(\tilde{\varphi}, v)$ , из (15), (16) имеем выражение для  $\tilde{S}_{0f}$  при дополнительном условии  $\psi_f = \tilde{\psi}_f$ , то есть при  $\Delta\psi_f = 0$ :

$$S_{0f} = -\frac{1}{2} \psi_f^T I_0 \psi_f,$$

где

$$I_0 = e^{A(t_f-t_0)} J(t_0),$$

откуда получаем:

$$S_{0f} = -\frac{1}{2} \psi_f^T e^{A(t_f-t_0)} J(t_0) \psi_f.$$

## VII. РЕЗУЛЬТАТЫ

### A. Профиль КС осциллятора

Рассмотрим осциллятор с собственной частотой  $\omega_0^2 = 0.5$  и с коэффициентом затухания  $h = 0.025$  с условием (8) на первую координату, где  $y = 10$ ,  $C = (1 \ 0)$ . Здесь (рис. 1) кривые изображают первые координаты профиля и А-профиля (14). Начальные значения координат профиля ( $x_{10} = 2.50$ ,  $x_{20} = 0$ ) «работают» на достижение КС, то есть в фазе с А-профилем, поэтому затраты (значения ФД) даже снижаются:  $S_{0f} = 2.482$  по сравнению с  $\tilde{S}_{0f} = 2.498$ . Начальные условия:  $x_{10} = 0$ ,  $x_{20} = 2.0$  и, согласно А-профилю, они направлены против достижения КС; имеем:  $S_{0f} = 2.525$ . Другая кривая на рисунках изображает первую координату А-профиля:  $V_f = V(0, x_f) = 2.50$ .

На рис. 2 представлена кривая для логарифма вероятности ( $\varepsilon = 1$ ) в функции времени, соответствующая А-профилю.

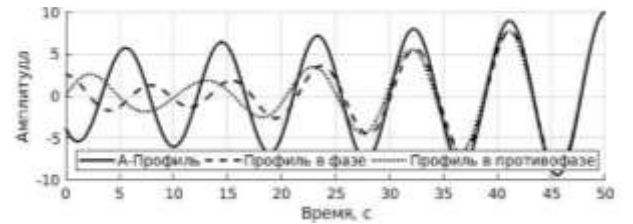


Рис. 1. А-Профиль в сравнении с профилями, исходящими из точек с заданными условиями (последние 50 секунд)

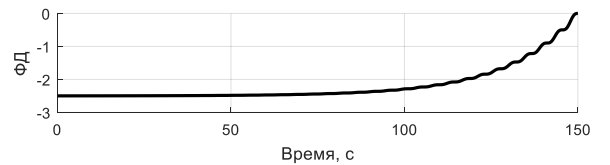


Рис. 2. Кривая для логарифма вероятности  $\ln P_{t t_f}$

### В. Профиль КС маневренного летательного аппарата

Рассмотрим систему контроля угла атаки маневренного летательного аппарата. В качестве математической модели используем пример 3 из [6] линеаризованной системы десятого порядка, описывающей пространственное движение в режиме горизонтального полета с постоянной скоростью и в неспокойной атмосфере. Соответственно назначению системы в уравнении (8) имеем  $y = \alpha_K$  – критическое значение угла атаки. В рассматриваемом случае  $\alpha_K = 0.06$  (рад), с учетом балансирующего значения. На рис. 3 представлен выход  $X(t) \in R^6$  уравнения путей в режиме А-профиля, то есть, решение задачи ЛП для указанного уравнения полета десятого порядка. Компоненты выхода  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)^T$  соответственно нумерации: углы атаки и тангажа (рад), вертикальное смещение (м), углы крена, скольжения и рыскания (рад).

Интересно отметить, за счет чего ветровые возмущения оптимальным образом (с точки зрения противодействия) выводят аппарат на критические значения угла атаки: сравнивая осциллограммы для тангажа ( $X_2 = \vartheta$ ) и крена ( $X_4 = \varphi$ ), видим, что в начальной трети процесса существенно интенсивнее поперечные колебания, где меньше моменты инерции, что и приводит к «экономной» расклатке, которая затем передается в продольную компоненту движения.

### С. Антикризисное управление осциллятором

В данном примере рассмотрим антикризисное управление осциллятором из примера А (рис. 4).

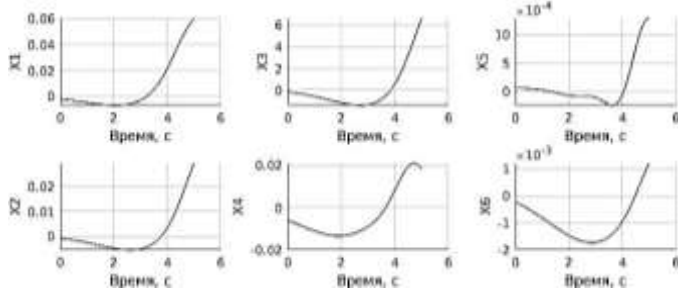


Рис. 3. Профиль маневренного летательного аппарата

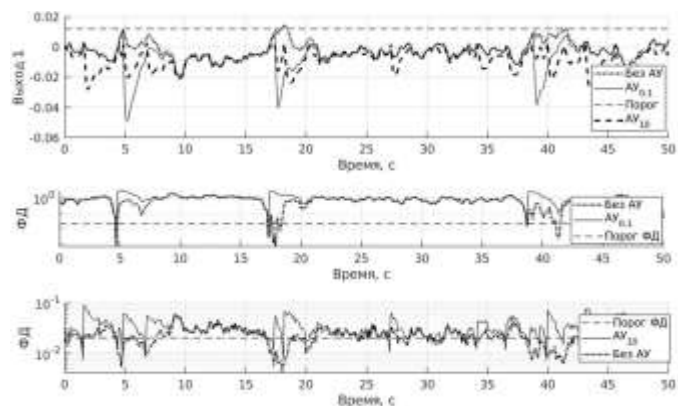


Рис. 4. Антикризисное управление

Допустим, он совершает колебания под воздействием внешних возмущений, описываемых белым шумом, согласно (3). Пусть КС будет являться превышением порога равного 0.1198. Нам необходимо, во-первых, чтобы осциллятор не превышал этого уровня, а во-вторых, чтобы значение ФД стало больше (соответственно вероятность события меньше). Порог срабатывания антикризисного управления (АУ) при ФД меньше 0.02.

АУ получается из решения задачи ЛП (10)–(12) с учётом (15) при начальной точке равной текущему состоянию осциллятора, а конечной точки нулю. На рис. 4 можно сравнить АУ при  $t_f = 0.1$  и  $t_f = 1$  (соответственно  $AC_{0.1}$  и  $AC_{1.0}$ ).

### VIII. АЛГОРИТМ СУПЕРВИЗОРА ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Ограничимся изложением схемы возможного алгоритма. Поскольку в стабилизированной системе КС представляют собой редкие события, в схеме ситуационного управления, представленной в п.1, «почти всегда» в качестве  $U_k$  действует локальное управление, осуществляющее стабилизацию объекта на траектории. Метод больших уклонений (пп. 2–5) показывает, что такая ситуация отвечает типичному поведению возмущения, когда шум не «действует» оптимальным (как оказывается, в смысле ФД (5)) образом. Назначение супервизора – отслеживать те редкие события, когда действие шума заставляют объект двигаться вдоль А-профилей (или близко к ним). В связи с этим – **вывод по алгоритму супервизора**: его основой должны быть А-профили всех возможных КС и пороговые значения  $P$  для вероятностей  $P_{t t_f}$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные примеры показывают, что оптимальное действие возмущения соответствует вхождению в резонанс с динамикой объекта, поэтому корректирующее действие супервизора в такой ситуации должно быть направлено на максимально оперативную рассинхронизацию указанного процесса в смысле анализируемого КС: это может быть достаточно мощный импульс управления  $u$ , максимизирующий  $S_{t_f}$  при подходящем ограничении на  $\Delta\psi_f$  (и на  $u$ ).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. 488 с.
- [2] Дубовик С.А. Функционально устойчивые системы управления: асимптотические методы синтеза / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов. Москва: ИНФРА-М, 2019. 248 с.
- [3] Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика. М.: Наука, 1986. 288 с.
- [4] Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
- [5] Дубовик С.А. Асимптотическая семантизация данных в системах управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. 20(8): С. 461–471. DOI:10.17587/mau.20.461-471.
- [6] Дубовик С.А. Использование квазипотенциалов для контроля больших уклонений управляемых процессов // Мехатроника, автоматизация, управление. Т.17, №5, 2016. С. 301–307.