# Física estadística de las epidemias

## Código del TFG: FS22-13-FSC

Antonio Rivas Blanco

22 de Junio de 2023

Epidemics have had an impact of doubtless importance in recent times, so it is necessary to control the expansion of diseases for a prosperous development of society.
In this paper an introduction about different transmision models will be given. We will focus on the study of the simplest one, the susceptible-infected-susceptible model (SIS). We will talk about the mathematical treatment for solving the model, which we will do by two methods: simulating compatible paths with the model using Gillespie's algorithm and solving numerically Langevin equation. To do this, we will use different algorithms programmed in Python language.
Finally, the simulations will be represented for differents values of the parametres which will allow us to draw conclusions about the system's stochastic behaviour and different control methods.

**Keywords:** stochastic processes; phase transitions; master equation; Gillespie's algorithm; Fokker-Plank equation; Langevin's equation

# Impacto de las epidemias en la sociedad


- ¿A qué impactan las epidemias?

# Impacto de las epidemias en la sociedad


- ¿A qué impactan las epidemias?
- ¿Por qué es necesario el estudio de estas?

# Impacto de las epidemias en la sociedad


- ¿A qué impactan las epidemias?
- ¿Por qué es necesario el estudio de estas?
- ¿Cómo podemos estudiarlas?

# Objetivos

En este Trabajo Fin de Grado se han planteado los siguientes objetivos:

- Estudiar el modelo susceptible-infectado-susceptible (SIS).

# Objetivos

En este Trabajo Fin de Grado se han planteado los siguientes objetivos:

- Estudiar el modelo susceptible-infectado-susceptible (SIS).
- Utilizar métodos Montecarlo, la ecuación de Langevin y el algoritmo de Gillespie para estudiar la evolución del sistema.

# Objetivos

En este Trabajo Fin de Grado se han planteado los siguientes objetivos:

- Estudiar el modelo susceptible-infectado-susceptible (SIS).
- Utilizar métodos Montecarlo, la ecuación de Langevin y el algoritmo de Gillespie para estudiar la evolución del sistema.
- Implementación en Python.

# Objetivos

En este Trabajo Fin de Grado se han planteado los siguientes objetivos:

- Estudiar el modelo susceptible-infectado-susceptible (SIS).
- Utilizar métodos Montecarlo, la ecuación de Langevin y el algoritmo de Gillespie para estudiar la evolución del sistema.
- Implementación en Python.
- Visualizar y analizar los resultados obtenidos para distintos órdenes de población e interacción. En concreto, nos centraremos en el estudio del diagrama de fase.

# Generación de números aleatorios

# Generación de números aleatorios

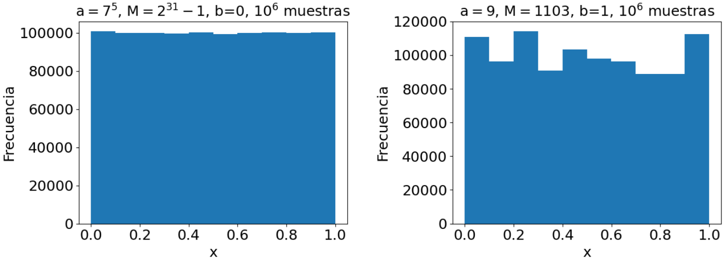
## Generadores de números (pseudo)aleatorios

**Uniformes:** Generador lineal congruencial
**No uniformes:** Método transformada inversa

# Generación de números aleatorios

## Generadores de números (pseudo)aleatorios

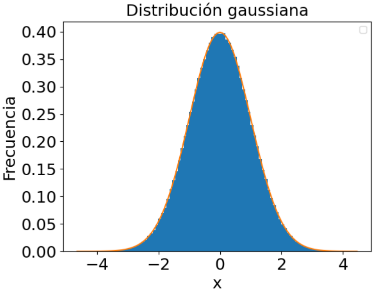
**Uniformes:** Generador lineal congruencial
**No uniformes:** Método transformada inversa



# Generación de números aleatorios

## Generadores de números (pseudo)aleatorios

**Uniformes:** Generador lineal congruencial
**No uniformes:** Método transformada inversa



# Entorno de programación

# Entorno de programación

## Bibliotecas

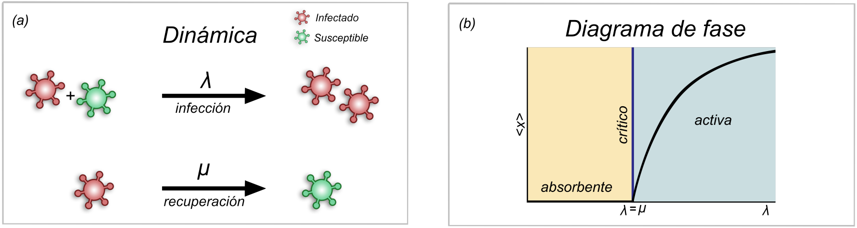
- Numpy
- Matplotlib

https://numpy.org/

https://pypi.org/project/matplotlib/

# Modelo SIS: características

# Modelo SIS: características



# Procesos estocásticos

# Procesos estocásticos

## Ecuación maestra

# Procesos estocásticos

## Ecuación maestra

- Estado del sistema: $\vec{n}(t) = [n_i(t), n_s(t)] \Longrightarrow P(\vec{n}, t|\vec{n}_0, t_0)$.

# Procesos estocásticos

## Ecuación maestra

- Estado del sistema: $\vec{n}(t) = [n_i(t), n_s(t)] \Longrightarrow P(\vec{n}, t|\vec{n}_0, t_0)$.

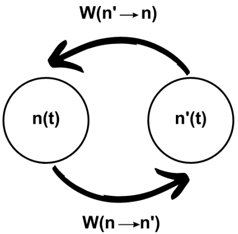
$$\frac{\partial P(\vec{n}, t)}{\partial t} = \sum_{\vec{n}'} \left[ W(\vec{n}' \to \vec{n}) P(\vec{n}', t) - W(\vec{n} \to \vec{n}') P(\vec{n}, t) \right]$$

# Procesos estocásticos

## Ecuación maestra

- Estado del sistema: $\vec{n}(t) = [n_i(t), n_s(t)] \Longrightarrow P(\vec{n}, t|\vec{n}_0, t_0)$.

$$\frac{\partial P(\vec{n}, t)}{\partial t} = \sum_{\vec{n}'} \left[ W(\vec{n}' \rightarrow \vec{n}) P(\vec{n}', t) - W(\vec{n} \rightarrow \vec{n}') P(\vec{n}, t) \right]$$




## Tasas del modelo SIS

$$W_+ \equiv W(n \rightarrow n+1) = \lambda n \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

$$W_- \equiv W(n \rightarrow n-1) = \mu n$$

# Procesos estocásticos

## Algoritmo de Gillespie

- $P(\vec{n}, t|\vec{n}_0, t_0) \rightarrow P(j, \tau|\vec{n}, t)$

# Procesos estocásticos

## Algoritmo de Gillespie

- $P(\vec{n}, t|\vec{n}_0, t_0) \;\rightarrow\; P(j, \tau|\vec{n}, t)$
- ¿Cuándo? $\tau \sim exp(\text{media} = W_0) \qquad \text{con } W_0 = \sum_j W_j$

# Procesos estocásticos

## Algoritmo de Gillespie

- $P(\vec{n}, t|\vec{n}_0, t_0) \; \rightarrow \; P(j, \tau|\vec{n}, t)$
- ¿Cuándo? $\tau \sim exp(\text{media} = W_0)$ con $W_0 = \sum_j W_j$
- ¿Qué? $P(j) = W_j / W_0$

# Procesos estocásticos

## Algoritmo de Gillespie

- $P(\vec{n}, t|\vec{n}_0, t_0) \; \rightarrow \; P(j, \tau|\vec{n}, t)$
- ¿Cuándo? $\tau \sim exp(\text{media} = W_0) \qquad \text{con } W_0 = \sum_j W_j$
- ¿Qué? $P(j) = W_j / W_0$

1. Condiciones iniciales: $t = t_0, \; \vec{n} = \vec{n}_0$.

# Procesos estocásticos

## Algoritmo de Gillespie

- $P(\vec{n}, t|\vec{n}_0, t_0) \ \rightarrow \ P(j, \tau|\vec{n}, t)$
- ¿Cuándo? $\tau \sim exp(\text{media} = W_0)$ con $W_0 = \sum_j W_j$
- ¿Qué? $P(j) = W_j / W_0$

1. Condiciones iniciales: $t = t_0$, $\vec{n} = \vec{n}_0$.
2. $W_j(\vec{n}) \ \rightarrow \ W_0(\vec{n})$

# Procesos estocásticos

## Algoritmo de Gillespie

- $P(\vec{n}, t|\vec{n}_0, t_0) \ \rightarrow \ P(j, \tau|\vec{n}, t)$
- ¿Cuándo? $\tau \sim exp(\text{media} = W_0)$ con $W_0 = \sum_j W_j$
- ¿Qué? $P(j) = W_j/W_0$

1. Condiciones iniciales: $t = t_0$, $\vec{n} = \vec{n}_0$.
2. $W_j(\vec{n}) \ \rightarrow \ W_0(\vec{n})$
3. Calculamos $\tau$ y $j$.

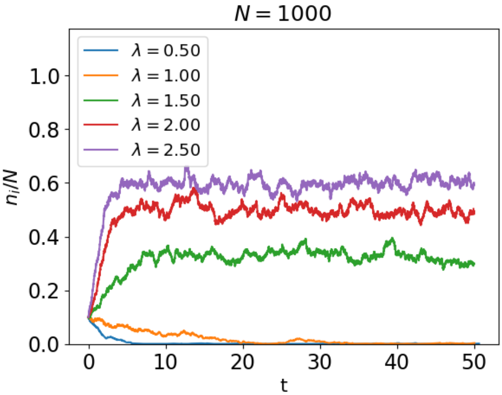
# Procesos estocásticos

## Algoritmo de Gillespie

- $P(\vec{n}, t | \vec{n}_0, t_0) \;\rightarrow\; P(j, \tau | \vec{n}, t)$
- ¿Cuándo? $\tau \sim exp(\text{media} = W_0)$ con $W_0 = \sum_j W_j$
- ¿Qué? $P(j) = W_j / W_0$

1. Condiciones iniciales: $t = t_0$, $\vec{n} = \vec{n}_0$.
2. $W_j(\vec{n}) \;\rightarrow\; W_0(\vec{n})$
3. Calculamos $\tau$ y $j$.
4. Actualizamos el sistema y repetimos desde el paso 2.

# Procesos estocásticos



# Procesos estocásticos

## Ecuación de Fokker-Planck

Nueva variable: $x = n_i/N$

# Procesos estocásticos

## Ecuación de Fokker-Planck

$$\partial_t \tilde{P}(x,t) = -\partial_x[\overbrace{(\lambda x(1-x) - \mu x)}^{A(x)}\tilde{P}(x,t)] + \frac{1}{2}\partial_x^2[\underbrace{\frac{1}{N}(\lambda x(1-x) + \mu x)}_{B(x)}\tilde{P}(x,t)] + \mathcal{O}(N^{-2}) + \dots$$

# Procesos estocásticos

## Ecuación de Fokker-Planck

$$\partial_t \tilde{P}(x,t) = -\partial_x[\overbrace{(\lambda x(1-x) - \mu x)}^{A(x)} \tilde{P}(x,t)] + \frac{1}{2}\partial_x^2[\underbrace{\frac{1}{N}(\lambda x(1-x) + \mu x)}_{B(x)} \tilde{P}(x,t)] + \mathcal{O}(N^{-2}) + \dots$$

$$\partial_t P(x,t) = -\partial_x [A(x)P(x)] + \frac{1}{2}\partial_x^2 [B(x)P(x)]$$

# Procesos estocásticos

## Ecuación de Fokker-Planck

$$\partial_t \tilde{P}(x,t) = -\partial_x [\overbrace{(\lambda x(1-x) - \mu x)}^{A(x)} \tilde{P}(x,t)] + \frac{1}{2}\partial_x^2 [\underbrace{\frac{1}{N}(\lambda x(1-x) + \mu x)}_{B(x)} \tilde{P}(x,t)] + \mathcal{O}(N^{-2}) + \dots$$

$$\partial_t P(x,t) = -\partial_x [A(x)P(x)] + \frac{1}{2}\partial_x^2 [B(x)P(x)]$$

$$\dot{x} = A(x) + \sqrt{B(x)}\,\xi(t)$$

# Procesos estocásticos

## Ecuación de Langevin

Para nuestro sistema queda:

$$\dot{x} = \lambda x(1-x) - \mu x + \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\lambda x(1-x) + \mu x}\,\xi(t)$$

# Procesos estocásticos

## Ecuación de Langevin

Para nuestro sistema queda:

$$\dot{x} = \lambda x(1-x) - \mu x + \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\lambda x(1-x) + \mu x}\,\xi(t)$$

Si tomamos $N \to \infty$, el estado estacionario será:

# Procesos estocásticos

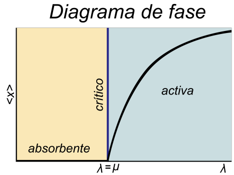
## Ecuación de Langevin

Para nuestro sistema queda:

$$\dot{x} = \lambda x(1-x) - \mu x + \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\lambda x(1-x) + \mu x}\,\xi(t)$$

Si tomamos $N \to \infty$, el estado estacionario será:

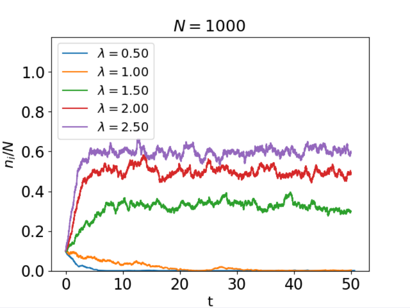
$$x^{est} = \begin{cases} 0 & si \lambda < \mu \\ 1 - \frac{\mu}{\lambda} & si \lambda \geq \mu \end{cases}$$



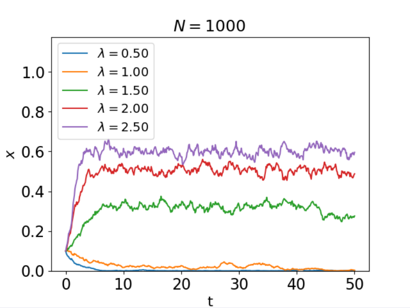
# Resultados

# Resultados

## Series temporales



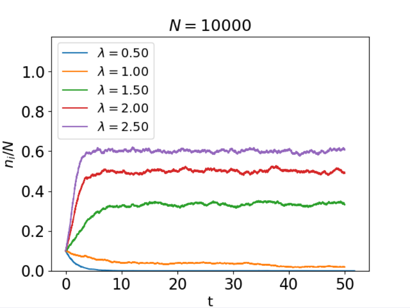

(a) Gillespie



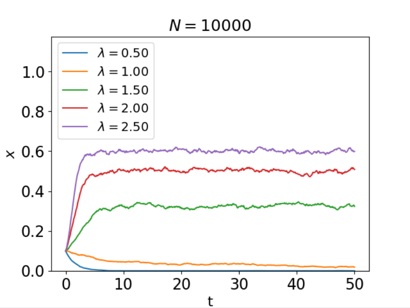

(b) Langevin

# Resultados

## Series temporales



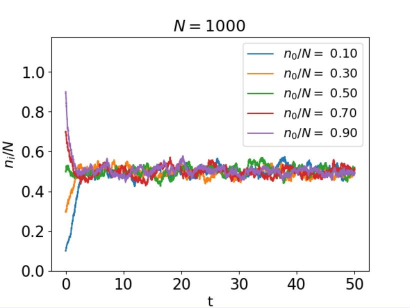

(a) Gillespie



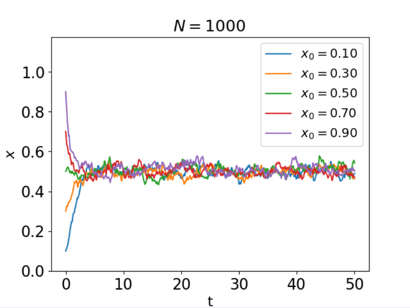

(b) Langevin

# Resultados

## Condiciones iniciales



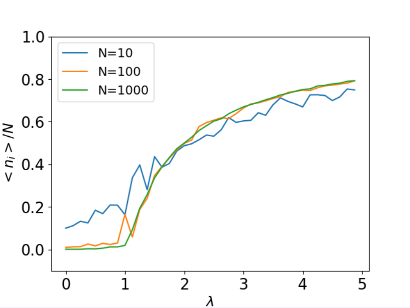

(a) Gillespie



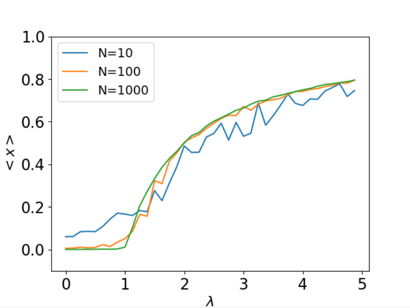

(b) Langevin

# Resultados

## Diagrama de fase



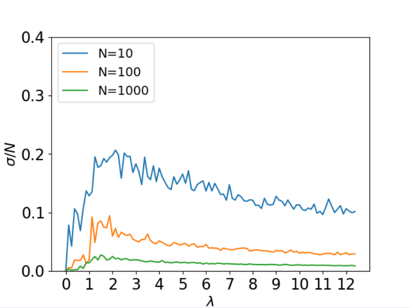

(a) Gillespie



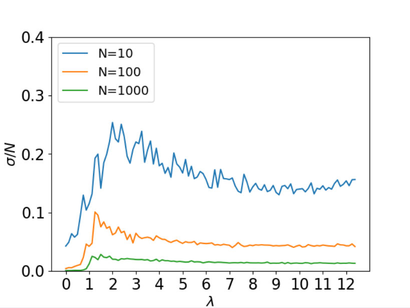

(b) Langevin

# Resultados

## Desviación estándar




(a) Gillespie




(b) Langevin

# Conclusions

- A brief introduction to stochastic processes has been conducted.

# Conclusions

- A brief introduction to stochastic processes has been conducted.
- We can use physics in other branches of knowledge.

# Conclusions

- A brief introduction to stochastic processes has been conducted.
- We can use physics in other branches of knowledge.
- The use of mathematical models has allowed us to characterize the behaviour of epidemics.

# Conclusions

- A brief introduction to stochastic processes has been conducted.
- We can use physics in other branches of knowledge.
- The use of mathematical models has allowed us to characterize the behaviour of epidemics.
- Programming is essential.

# Conclusions

- A brief introduction to stochastic processes has been conducted.
- We can use physics in other branches of knowledge.
- The use of mathematical models has allowed us to characterize the behaviour of epidemics.
- Programming is essential.
- We have examined the different phases of epidemics in our model and the effect of changing various parameters.

# Conclusions

- A brief introduction to stochastic processes has been conducted.
- We can use physics in other branches of knowledge.
- The use of mathematical models has allowed us to characterize the behaviour of epidemics.
- Programming is essential.
- We have examined the different phases of epidemics in our model and the effect of changing various parameters.
- Gillespie or Langevin?

# Bibliografía


1. Gerardo Chowell et al. "Mathematical models to characterize early epidemic growth: A review". En: *Physics of life reviews 18* (2016), págs. 66-97.
2. Romualdo Pastor-Satorras et al. "Epidemic processes in complex networks". En: *Reviews of modern physics* 87.3 (2015), pág. 925.
3. Daniel T Gillespie. "Stochastic simulation of chemical kinetics". En: *Annu. Rev. Phys. Chem.* 58 (2007), págs. 35-55.
4. Alan J McKane. *Stochastic Processes.* 2009.
5. Raúl Toral y Pere Colet. *Stochastic numerical methods: an introduction for students and scientists.* John Wiley & Sons, 2014.

# Física estadística de las epidemias

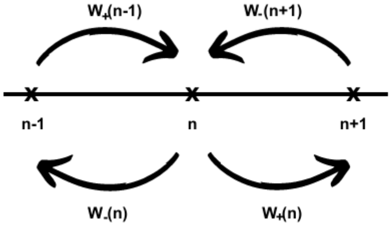
## Código del TFG: FS22-13-FSC

Antonio Rivas Blanco

22 de Junio de 2023

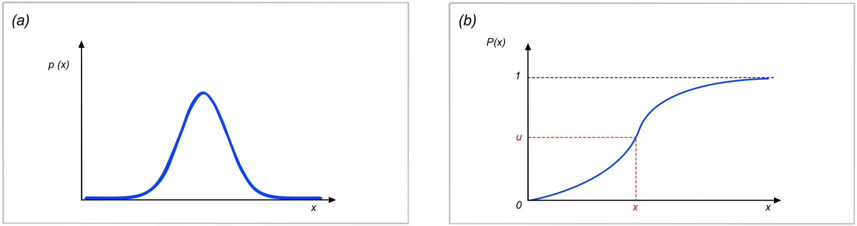
## Ecuación maestra del modelo SIS

$$\partial_t P(n,t) = W_+(n-1)P(n-1,t) + W_-(n+1)P(n+1,t) - \\ - W_-(n)P(n,t) - W_+(n)P(n,t)$$



## Resolución de la ecuación de Langevin

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \overbrace{\Delta t\, A(x(t))}^{\text{Euler}} + \underbrace{\sqrt{B(x(t))}\mathcal{G}(0, \sqrt{\Delta t})}_{\text{Itô}}$$


(a)
p (x)
x
(b)
P(x)
1
u
0
x
x