《算法设计与分析》
第3.1讲 分治法

山东师范大学信息科学与工程学院
段会川
2014年9月

目录

分治法—概述

- 在计算机科学中，分治法(Divide and Conquer)是建立在多项分支递归的一种很重要的算法范式。字面上的解释是“分而治之”，就是把一个复杂的问题分成两个或更多的相同或相似的子问题，直到最后子问题可以简单的直接求解，原问题的解即子问题的解的合并。
- 这个技巧是很多高效算法的基础，如排序算法(快速排序、归并排序)、傅立叶变换(快速傅立叶变换)。
- 分治算法通常以数学归纳法来验证。而它的计算成本则多数以解递推关系式来求取。
  - 如果可能，则应用主定理

分治法—三个步骤

1. 分解：
   - 将原问题分解为若干个规模较小、相对独立、与原问题形式相同的子问题。
2. 解决：
   - 若子问题规模较小且易于解决时则直接解出。
   - 否则递归地解决各子问题。
3. 合并：
   - 将各子问题的解合并为原问题的解。

分治法—历史

- 折半搜索算法(二叉搜索，binary search)
  - 将原来问题连续地拆分成大约一半大小的单一子问题的分治算法的构想早已在公元前200年的巴比伦尼亚时代就已经出现。
  - 算法在计算机上的清楚描述出现在1946年约翰 ·莫齐利（John Mauchly）的一篇文章里。
- 辗转相除法—欧几里德算法
  - 它是一个通过将问题转化为单一的更小问题从而快速求解的方法，因而也可看成是一种分治算法。
  - 它也是在2000多年前的公元前发现的。

分治法—历史

- 专门用于计算机之上而且正确地分析的分治算法最早期的例子，则是约翰 冯 诺伊曼于1945年发明的归并排序算法(merge sort)，也称为合并排序算法。
- A. A. Karatsuba基于高斯乘法方法于1960年发明的在$O(n^{\log_2 3})$步骤内将两个n位数相乘的算法是另一个分治算法的经典例子。
  - 它反证了安德列 柯尔莫哥洛夫(安德列 尼古拉耶维奇 柯尔莫哥洛夫，Andrey Nikolaevich Kolmogorov，Андрей Николаевич Колмогоров，1903.4.25—1987.10.20)于1956年认为两个n位数相乘需要$\Omega(n^2)$步骤的猜想。

目录

- 分治法概述
- 冯 诺伊曼
- 高斯乘法
- 乘法分解算法
- **Karatsuba**乘法算法
- 递推式的一般解法—主定理及应用
- 归并排序算法

约翰 冯 诺伊曼

- 出生于匈牙利的美国籍犹太人数学家，现代计算机创始人之一
  - 在计算机科学、经济学、物理学中的量子力学及几乎所有数学领域都作过重大贡献

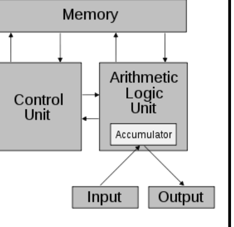
John von Neumann
1903.12.28－1957.2.8

约翰 冯 诺伊曼—计算机之父

- **1945**年**6**月，冯 诺伊曼与戈德斯坦、勃克斯等人，联名发表了一篇长达**101**页纸的报告，即计算机史上著名的“**101**页报告”，是现代计算机科学发展里程碑式的文献。
  - 该报告明确在计算机中用二进制替代十进制运算，并将计算机分成五大组件，这一卓越的思想为电子计算机的逻辑结构设计奠定了基础，已成为计算机设计的基本原则。
  - 由于他在计算机逻辑结构设计上的伟大贡献，他被誉为“计算机之父”。

冯 诺伊曼体系结构—Von Neumann Architecture

- 也称普林斯顿体系结构，是一种将程序指令和数据一起存储的计算机概念结构
  - 现代计算机基本上基于该架构设计，因而也称为存储程序计算机，它是通用图灵机的具体实现
  - **IEEE(Institute of Electrical and Electronics Engineers,** 国际电气与电子工程师学会，读作**I-Triple-E)**以他的名字命名了**IEEE**冯 诺伊曼奖，奖励计算机科学和技术上具有杰出成就的科学家



约翰 冯 诺伊曼—博弈论与经济学贡献

- 在经济学领域，**1944**年冯 诺伊曼与摩根施特恩合著的巨作《博弈论与经济行为》**(Theory of Games and Economic Behavior)**出版，标志着现代系统博弈理论的的初步形成
  - 他因此被称为“博弈论之父”。
  - 博弈论被认为是**20**世纪经济学最伟大的成果之一
  - **INFORMS(Institute for Operations Research and the Management Sciences,** 运筹学与管理科学学会**)**设立了冯 诺伊曼理论奖，以奖励在运筹学与管理科学领域做出基础性和持续性贡献的科学家

目录

- 分治法概述
- 冯 诺伊曼
- 高斯乘法
- 乘法分解算法
- **Karatsuba**乘法算法
- 递推式的一般解法—主定理及应用
- 归并排序算法

高斯乘法

- 两个复数相乘
  - $(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad + bc)i$
  - 包括4次乘法和两次加法运算
- 高斯乘法
  - $ad + bc = (a+b)(c+d) - ac - bd$
  - 这使两个复数相乘的运算变换为3次乘法和5次加法运算
  - 虽然初看没有多大改进，但由于乘法运算是$O(n^2)$的复杂度，而加法运算是$O(n)$的复杂度，如果迭代进行，复杂度的改进还是很可观的

目录

- 分治法概述
- 冯 诺伊曼
- 高斯乘法
- 乘法分解算法
- Karatsuba乘法算法
- 递推式的一般解法—主定理及应用
- 归并排序算法

乘法的分解算法

- n位的二进制数可以分解为两个$\frac{n}{2}$位的组成部分

$$x = \boxed{x_L}\,\boxed{x_R} = 2^{n/2}x_L + x_R$$
$$y = \boxed{y_L}\,\boxed{y_R} = 2^{n/2}y_L + y_R.$$

- 如：$x = 10110110_2 = 1011_2 \times 2^4 + 0110_2$
  即: $x_L = 1011, x_R = 0110.$
- 经过上述分解，两个数的积可以表达为
  - $xy = x_L y_L 2^n + (x_L y_R + y_L x_R)2^{n/2} + x_R y_R$
  - 由4次乘法和3次加法组成，而乘法可以递归进行下去
  - 注意：乘以2^n和$2^{n/2}$可以用左移操作在线性时间里实现

乘法分解算法—伪代码

- 算法名称：乘法分解算法
- 输入：两个n位的正整数x和y
- 输出：xy
- **1：multiply0(x, y)**
- **2：n ← x,y的位数**
- **3：if n=1: return xy**
- 4：$x_L, x_R = x$的高 $\lceil n/2 \rceil$位和低$\lfloor n/2 \rfloor$位.
- **5：**$y_L, y_R = y$的高 $\lceil n/2 \rceil$位和低$\lfloor n/2 \rfloor$位.
- 6：$P1 = \text{multiply0}(x_L, y_L)$. $P2 = \text{multiply0}(x_L, y_R)$.
- **7：**$P3 = \text{multiply0}(x_R, y_L)$. $P4 = \text{multiply0}(x_R, y_R)$.
- **8：return** $P1 \times 2^n + (P2 + P3) \times 2^{n/2} + P4$

乘法分解算法—复杂度

- 乘法分解算法的一次调用中要执行4次乘法和3次加法，以及2次移位操作
  - 加法和移位操作的复杂度为$O(n)$
  - 乘法需要递归进行
  - 当$n = 1$时，复杂度为$O(1)$，递归结束
  - 算法的总复杂度可以用如下的递推式表示
  - $T(n) = \begin{cases} O(1) & 当n = 1 \\ 4T(n/2) + O(n) & 当n > 1 \end{cases}$
  - 该递推式的解后面将会看到是$T(n) = O(n^2)$

目录

- 分治法概述
- 冯 诺伊曼
- 高斯乘法
- 乘法分解算法
- Karatsuba乘法算法
- 递推式的一般解法—主定理及应用
- 归并排序算法

Karatsuba乘法算法

- **A. A. Karatsuba借助于高斯乘法，于1960年提出了第1个快速乘法算法**
  - 基本思路是将

    $$xy = x_L y_L 2^n + (x_L y_R + y_L x_R) 2^{n/2} + x_R y_R$$

    中的$x_L y_R + y_L x_R$表达为

    $$(x_L + x_R)(y_L + y_R) - x_L y_L - x_R y_R.$$

  - **使乘法运算由4次减为3次，代价是增加了3次加法**

Karatsuba乘法算法—伪代码

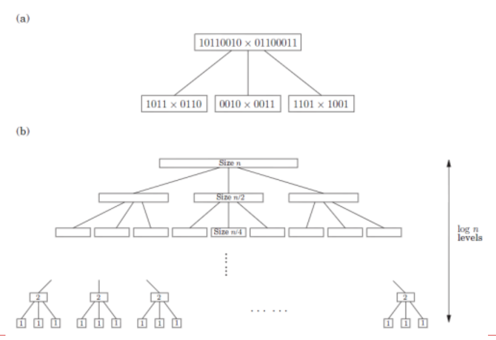
- **算法名称： Karatsuba乘法算法**
- **输入：两个n位的正整数x和y**
- **输出：xy**
- **1：multiplyK(x, y)**
- **2：n ← x,y的位数**
- **3：if n=1: return xy**
- **4：** $x_L, x_R = x$的高 $\lceil n/2 \rceil$位和低$\lfloor n/2 \rfloor$位.
- **5：** $y_L, y_R = y$的高 $\lceil n/2 \rceil$位和低$\lfloor n/2 \rfloor$位.
- **6：** $P1 = \text{multiply}K(x_L, y_L)$. $P2 = \text{multiply}K(x_R, y_R)$.
- **7：** $P3 = \text{multiply0}(x_L + x_R, y_L + y_R)$.
- **8：return** $P1 \times 2^n + (P3 - P1 - P2) \times 2^{n/2} + P2$

Karatsuba乘法算法—复杂度

- **Karatsuba乘法算法的一次调用中要执行3次乘法和6次加法，以及2次移位操作**
  - 加法和移位操作的复杂度为$O(n)$
  - 乘法需要递归进行
  - 当$n = 1$时，复杂度为$O(1)$，递归结束
  - 算法的总复杂度可以用如下的递推式表示
  - $T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{当} n = 1 \\ 3T(n/2) + O(n) & \text{当} n > 1 \end{cases}$
  - 该递推式的解后面将会看到是

    $$T(n) = O\left(n^{\log_2 3}\right) \approx O(n^{1.59})$$

Karatsuba乘法算法—复杂度的递归树表示



Karatsuba乘法算法—复杂度的递归树求解

- **Karatsuba乘法算法的递归调用过程可以用一棵递归树表示**
  - 其实，所有的分治算法都可以用递归树表示
  - 递归树的高度为$\lceil \log n \rceil$-1
  - 在深度为$k = 0$(即根)的层上，有1个规模为n的(子)问题
  - 在深度为$k = 1$的层上，有$3 = 3^1$个规模为$\frac{n}{2} = \frac{n}{2^1}$的子问题
  - 在深度为$k = 2$的层上，有$9 = 3^2$个规模为$\frac{n}{4} = \frac{n}{2^2}$的子问题
  - 在深度为k的层上，有3^k个规模为$\frac{n}{2^k}$的子问题
  - 树的最大深度为$\lceil \log n \rceil - 1$

Karatsuba乘法算法—复杂度的递归树求解

- **Karatsuba乘法算法复杂度的递归树求解**
  - 对于深度为k的层上的1个规模为$\frac{n}{2^k}$的子问题，抛去乘法运算(即递归)后的运算是加法和移位，它们合起来的复杂度为$O\left(\frac{n}{2^k}\right)$
  - 因而，深度为k的层上的全部的3^k个规模为$\frac{n}{2^k}$的子问题的复杂度为$3^k \times O\left(\frac{n}{2^k}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^k \times O(n)$
  - 整个问题的复杂度为

    $$T(n) = \sum_{k=0}^{\lceil \log n \rceil - 1} \left(\frac{3}{2}\right)^k \times O(n)$$

Karatsuba乘法算法—复杂度的递归树求解

- Karatsuba乘法算法复杂度的递归树求解
  - 等比数列前n项和的求和公式$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$
  - 因而，$T(n) = \sum_{k=0}^{\lceil \log n \rceil - 1} \left(\frac{3}{2}\right)^k \times O(n)$
  - 即，$T(n) = 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lceil \log n \rceil} - 1\right) \times O(n) = O\left(n\left(\frac{3}{2}\right)^{\log n}\right)$
    $= O\left(n\frac{3^{\log n}}{2^{\log n}}\right) = O(3^{\log n})$.
  - 令$a^{\log_b c} = z$，则$\log_b z = \log_b c \cdot \log_b a$
    $z = b^{\log_b c \cdot \log_b a} = \left(b^{\log_b c}\right)^{\log_b a} = c^{\log_b a}$.
  - 因此，$T(n) = O(n^{\log 3}) \approx O(n^{1.59})$

目录

递推式的通解—主定理

- 主定理(master theorem)
  - 如果对于常数$a > 0, b > 1, d \geq 0$, 有
    $T(n) = aT(\lceil n/b \rceil) + O(n^d)$
  - 则有：$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & 当 d > \log_b a \\ O(n^d \log n) & 当 d = \log_b a \\ O(n^{\log_b a}) & 当 d < \log_b a \end{cases}$
- 当分治法每次将问题分解为a个规模为n/b的子问题，而将各子问题的解合并的时间复杂度为$O(n^d)$时，该分治法的运算时间的递推式便是
  - $T(n) = aT(\lceil n/b \rceil) + O(n^d)$
  - 因而可以套用主定理求解

乘法分解算法复杂度的主定理解

- 乘法分解算法复杂度的递推式
  - $T(n) = \begin{cases} O(1) & 当 n = 1 \\ 4T(n/2) + O(n) & 当 n > 1 \end{cases}$
  - 显然，$a = 4, b = 2, d = 1$
  - 此时有，$d = 1 < \log_b a = 2$
  - 因而，$T(n) = O(n^{\log_b a}) = O(n^2)$

Karatsuba乘法算法复杂度的主定理解

- Karatsuba乘法算法复杂度的递推式
  - $T(n) = \begin{cases} O(1) & 当 n = 1 \\ 3T(n/2) + O(n) & 当 n > 1 \end{cases}$
  - 显然，$a = 3, b = 2, d = 1$
  - 此时有，$d = 1 < \log_b a = \log_2 3$
  - 因而，$T(n) = O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log 3}) \approx O(n^{1.59})$

二分搜索算法(binary search, 折半查找)

- 算法名称：二分搜索算法(BinarySearch)
- 输入：元素由低到高排序的数组a和待搜索的数据x
- 输出：x在a中的位置，-1表示未找到
- 1：BinarySearch(a, low, high, x)
- 2：if low>high: return -1
- 3：mid = ⌊(low+high)/2⌋
- 4：if x=a[mid] then return mid
- 5：if x<a[mid] then BinarySearch(a, low, mid-1, x)
- 6：else BinarySearch(a, mid+1, high, x)

二分搜索算法—复杂度分析

- 最好情况复杂度
  - 在第1次调用用时，中间的元素就是要找的元素
  - 因而，复杂度为$O(1)$
- 最坏情况复杂度
  - 当low=high时才找到，或没有找到
  - $T(n) = T(n/2) + O(1)$
  - 运用主定理
    - $a = 1, b = 2, d = 0 = \log_b a = 0$
    - 因而，$T(n) = O(n^d \log n) = O(\log n)$

x^n的计算算法

- 算法名称：x^n的计算算法(power)
- 输入：x, n
- 输出：x^n
- 1：power(x, n)
- 2：if n=1 then return x
- 3：p = power(x, n/2)
- 4：p = p*p
- 5：if n is odd then p = p*x

x^n计算算法—复杂度分析

- 显然，x^n计算算法与二分搜索算法相似
  - $T(n) = T(n/2) + O(2)$
  - 运用主定理
    - $a = 1, b = 2, d = 0 = \log_b a = 0$
    - 因而，$T(n) = O(n^d \log n) = O(\log n)$

目录

归并排序(merge sort, 合并排序)—描述

- 归并排序由冯 诺伊曼于1945年提出，是一个典型的分治算法
  - 分解：将排序数组分解为两个等大的子数组
  - 解决：无
  - 合并：将两个已经有序的数组合并为一个有序的数组
    - 大小分别为m和n的有序数组可以在线性时间$O(m+n)$内合并

归并排序—算法伪代码

- 算法名称：归并排序(MergeSort)
- 输入：n个元素的数组a
- 输出：排序的a
- 1： MergeSort(a, low, high, b)
- 2：if high-low<=1 then return
- 3：mid = (low+high)/2
- 4：MergeSort(a, low, mid, b)
- 5：MergeSort(a, mid+1, high, b)
- 6：Merge(a, low, mid, high, b)
- 7：copy(b, low, high, a)

P59

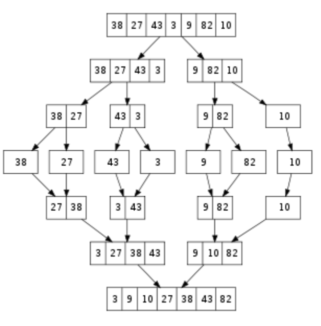
归并排序—归并算法描述

1. 申请空间，使其大小为两个已经排序序列之和，该空间用来存放合并后的序列
2. 设定两个指针，最初位置分别为两个已经排序序列的起始位置
3. 比较两个指针所指向的元素，选择相对小的元素放入到合并空间，并移动指针到下一位置
4. 重复步骤3直到某一指针到达序列尾
5. 将另一序列剩下的所有元素直接复制到合并序列末尾

归并排序—归并算法伪代码

- 算法名称：合并两个有序数组(Merge)
- 输入：数组a，low到mid及mid+1到high间已排序
- 输出：数组a，从low到high是排序的
- 1：i0 = low, i1 = high
- 2：for j = low to high
- 3：   if i0 < mid and (i1 >= high or A[i0] <= A[i1]))
- 4：   B[j] = A[i0]
- 5：   i0 = i0 + 1
- 6：   else
- 7：   B[j] = A[i1]
- 8：   i1 = i1 + 1
- 9：   end if

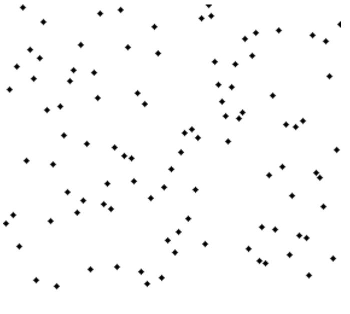
归并排序—示例



归并排序—演示

6 5 3 1 8 7 2 4

归并排序—演示



归并排序—复杂度分析

- 显然归并排序计算复杂度的递推式为
  - $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
  - 运用主定理
    $a = 2, b = 2, d = 1 = \log_b a = 1.$
    因而，$T(n) = O(n^d \text{log}n) = O(n\text{log}n)$
  - 归并排序的合并阶段需要一个规模为n的数组，因而空间复杂度为$O(n)$
  - 归并排序是基于比较的排序算法中的一个最优算法，因为可以证明基于比较的排序算法最少需要$\Omega(n\text{log}n)$的复杂度