



《计算复杂性理论》 第7讲 贪心法(2)

山东师范大学信息科学与工程学院
段会川
2014年11月

目录

- 部分背包问题及其贪心算法
- 0-1背包问题及其贪心算法
- TSP问题的贪心算法
- TSP问题的贪心有可能获得最差的解

第7讲 贪心法(2)

2

部分背包问题 可分割背包问题

□ 定义

- 部分背包问题(fractional knapsack problem)又称为连续背包问题(continuous knapsack problem)。
- 给定 n 个重量为 w_1, w_2, \dots, w_n 价值为 v_1, v_2, \dots, v_n 的物品和容量为 W 的背包，在允许物品可以部分地装入背包的情况下，装入哪些物品可以获得最大的价值？

编号	1	2	3	4	5
重量	2	2	6	5	4
价值	6	3	5	4	6

背包容量: 10 王秋芬, P101

第7讲 贪心法(2)

3

部分背包问题的贪心算法

- 将物品按照价值重量比例排序
- 按价值重量比由高到低依次向背包装入物品
- 当遇到不能完全装下的物品时，取其正好装满背包的部分装入背包

i	1	2	3	4	5
w	2	2	6	5	4
v	6	3	5	4	6
v/w	3	1.5	0.83	0.8	1.5

$W = 10$

解: 1, 2, 5

重量: $2+2+4=8$

价值: $6+3+6=15$

i	1	2	5	3	4
w	2	2	4	6	5
v	6	3	6	5	4
v/w	3	1.5	1.5	0.83	0.8

i	1	2	5	3	tot
w^*	2	2	4	2	10
v^*	6	3	6	1.67	16.67

王秋芬, P101

第7讲 贪心法(2)

4

部分背包问题贪心算法—伪代码

- 算法名称: 部分背包问题贪心算法 (FracKnapsackG)
- 输入: 物品 $w[n]$, $v[n]$, 背包容量 W
- 输出: 装入的物品比例 $x[n]$ 和总价值 V
- 1: 计算价值重量比数组 $p[n]$ 并倒序排列
- 2: $x[i]=0, i=1, \dots, n; V=0; j=1$
- 3: while $W>0$
- 4: if $w[j] \leq W$
- 5: $x[j] = 1; V += v[j]; W -= w[j]$
- 6: else
- 7: $x[j] = W/w[j]; V += p[j]*x[j]; W=0$
- 8: break
- 5: end while

第7讲 贪心法(2)

5

0-1背包问题的贪心算法1

- 重量价值比优先的贪心策略
- 将物品按照价值重量比例排序
- 按价值重量比由高到低依次向背包装入物品
- 当遇到不能完全装下的物品时，算法结束
- 算法复杂度为排序的复杂度，即 $O(n \log n)$
- 该贪心算法不能保证获得最优解

i	1	2	3
w	5	20	10
v	50	140	60
v/w	10	7	6

$W = 30$

$X^* = (0, 1, 1)$

$W^* = 20 + 10 = 30$

$V^* = 140 + 60 = 200$

<http://www.radford.edu/~nokie/classes/360/greedy.html>

第7讲 贪心法(2)

6

0-1背包问题的贪心算法2

- ❑ 价值优先的贪心策略
 - 将物品按照价值倒序排列
 - 按价值由高到低依次向背包装入物品
 - 当遇到不能完全装下的物品时，算法结束
- ❑ 算法复杂度为排序的复杂度，即 $O(n \log n)$
- ❑ 该贪心算法不能保证获得最优解

i	1	2	3	4
w	24	10	10	7
v	12	9	9	5

$W = 25$
 $X^* = (0, 1, 1, 0)$
 $W' = 10 + 10 = 20$
 $V' = 9 + 9 = 18$

<http://www.radford.edu/~nokie/classes/360/greedy.html>

第7讲 贪心法(2)

7

0-1背包问题的贪心算法3

- ❑ 重量优先的贪心策略
 - 将物品按照重量排序
 - 按重量由低到高依次向背包装入物品
 - 当遇到不能完全装下的物品时，算法结束
- ❑ 算法复杂度为排序的复杂度，即 $O(n \log n)$
- ❑ 该贪心算法不能保证获得最优解

i	1	2	3	4
w	24	10	10	7
v	12	9	9	5

$W = 25$
 $X^* = (0, 1, 1, 0)$
 $W' = 10 + 10 = 20$
 $V' = 9 + 9 = 18$

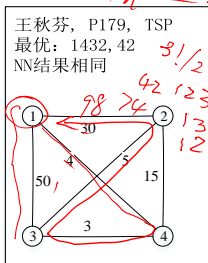
<http://www.radford.edu/~nokie/classes/360/greedy.html>

第7讲 贪心法(2)

8

TSP问题的贪心算法—NN $O(n!)$

- ❑ 最近邻(NN, Nearest Neighbor)优先的贪心策略
 1. 给定图 $G(V, E)$ ，让已经搜索的顶点集合为 S ， S 初始化为出发顶点 $\{s\}$ ，则未搜索的顶点集合为 $V-S$ 。
 2. 从 $V-S$ 中搜索距离 S 中新加入顶点最近的顶点，并将该顶点加入到 S 中。
 3. 重复步骤2，直至不再有顶点可加入。
- ❑ 本算法也可看成是基于Prim算法思想的方法



第7讲 贪心法(2)

9

TSP问题的贪心算法—NN伪代码

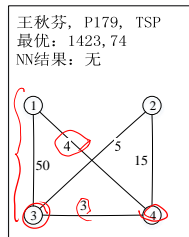
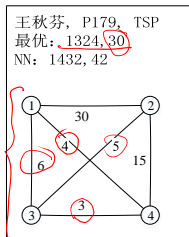
- ❑ 1: $S = \{s\}$, $u = s$; $L = 0$
- ❑ 2: while $V-S$ is not empty
- ❑ 3: $x = \infty$, $v = \text{nil}$
- ❑ 4: for each (u, w) in E and v in $V-S$
- ❑ 5: if $d(u, w) < x$ then
- ❑ 6: $v = w$
- ❑ 7: if $v = \text{nil}$ then stop
- ❑ 8: else $L += d(u, v)$; $S += \{v\}$
- ❑ 算法复杂度: 检查所有的边, 即 $O(|E|)$

第7讲 贪心法(2)

10

TSP问题的贪心算法—NN

- ❑ NN可能找不到最优。
- ❑ 在完全图的情况下一定可以找到回路，但一般图甚至还可能找不到回路。



第7讲 贪心法(2)

11

TSP问题的贪心算法—Kruskal思想1

- ❑ 对图 $G(V, E)$ 的所有边按权值排序
- ❑ 依次取最小边长的边放入 F 集合(结果边的集合)，但要满足下面两个条件
 - 新加入的边不会导致 F 集中边对应的顶点的度超过2
 - 新加入的边不会产生环，除非它是第 $|V|$ 条边
- ❑ 算法在无向完全图上可以正确执行，其它图不能保证获得一条路径
- ❑ 此算法的复杂度为: $O(N^2 \log N)$

8.4.1 A Greedy Algorithm for TSP

Johnson, David S., and Lyle A. McGeoch. "The traveling salesman problem: A case study in local optimization." Local search in combinatorial optimization 1 (1997): 215-310.

Haque, Albert, Jay Shah, Faisal Ejaz, and Jia Xing Xu. "An Empirical Evaluation of Approximation Algorithms for the Metric Traveling Salesman Problem." 2013.

第7讲 贪心法(2)

12

TSP问题的贪心算法—Kruskal思想2

- 对图 $G(V, E)$ 的所有边按权值排序
- 依次取最小边长的边放入 F 集合(结果边的集合)
- 检查新加入边的两个顶点在 F 集合决定的图中的度, 如果出现度为2的顶点, 则从 E 集合中删除与该顶点有关的边
- 算法在无向完全图上可以正确执行, 其它图不能保证获得一条路径

Sándor Zoltán Németh, Heuristic Optimisation, Lecture 5: Greedy algorithms.
Divide and conquer, P12, <http://web.mat.bham.ac.uk/S.Z.Nemeth>

第7讲 贪心法(2)

13

TSP问题的贪心算法—Kruskal思想2

1. 对边 E 按边上的权建立优先队列 Q
2. $F = \{\}$, $S = \{\}$ // F, S -结果边和顶点的线性表集合
3. while Q is not empty
4. $e_{ij} = \text{ExtractMin}(Q)$
5. $F = F \cup \{e_{ij}\}$
6. $S = S \cup \{i, j\}$, 计算 i, j 的度 $d(i), d(j)$
7. if $d(i)=2$ then
8. for each i 相关的边 f_{ik}
9. Delete(Q, f_{ik})
10. if $d(j)=2$ then
11. for each j 相关的边 f_{jk}
12. Delete(Q, f_{jk})
13. end while

第7讲 贪心法(2)

14

TSP问题的贪心算法—Kruskal思想2

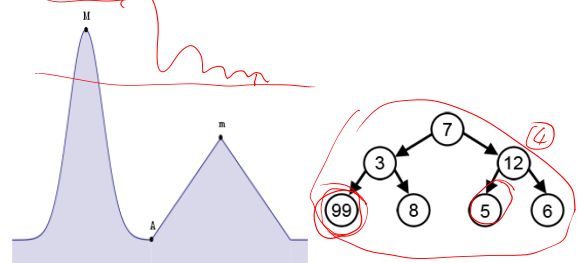
- 算法复杂度
 - 设顶点数 $N = |V|$, 则边的数量为 $|E| = \frac{1}{2}N(N-1) = O(N^2)$
 - 算法建立二叉堆优先队列的复杂度为 $O(N^2)$
 - ExtractMin(Q)要执行 N 次, 因而复杂度为 $O(N \log N)$
 - 两个Delete操作共执行 $|E| - N = O(N^2)$ 次, 因而复杂度为 $O(N^2 \log N)$
 - 综上所述, 算法复杂度为 $O(N^2 \log N)$

第7讲 贪心法(2)

15

贪心算法可能会获得最差的结果

- 对非最优子结构问题施行贪心算法, 有可能会得到较差甚至最差的结果



第7讲 贪心法(2)

16

TSP问题的贪心算法可能会获得最长的路径

- Gutin, Gregory, Anders Yeo, and Alexey Zverovich.
"Traveling salesman should not be greedy: domination analysis of greedy-type heuristics for the TSP."
Discrete Applied Mathematics 117.1 (2002): 81-86.



第7讲 贪心法(2)

17

目录

- 部分背包问题及其贪心算法
- 0-1背包问题及其贪心算法
- TSP问题的贪心算法
- TSP问题的贪心算法有可能获得最差的解

第7讲 贪心法(2)

18