# Série Temporelle - De la théorie à la pratique.

ANDRIAMANANA H. Rivo Hery

19 septembre 2019

## 1 Serie Temporelle - La Théorie

### 1.1 Auto-Regression (AR)

**Definition 1.1.** *Un processus $(X_t)$ est Auto-Regressif quand sa valeur à l'instant t n'est expliquée que par ses anciennes valeurs $(X_{t-1},...,X_{t-i})$, où $i \in \{2,...,\infty\}$ et non par d'autres processus.*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + ... + \phi_i X_{t-i} + \epsilon_t, \quad i \in \{2,...,\infty\},$$

*où les $\epsilon_t$ sont des bruits blancs, indépendants et identiquement distribués, notés $\epsilon_t \to iid(0,\sigma^2)$, $\forall t$.*

**Definition 1.2** (Ordre d'un AR)**.** *Un processus AR est d'ordre p, noté AR(p), quand sa valeur à l'instant t est expliquée par ses p anciennes valeurs:*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + ... + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t,$$

*où $\epsilon_t \to iid(0,\sigma^2)$, $\forall t$.*

**Definition 1.3** (Opérateur de retard)**.** *Pour une série temporelle $(X_t)_t$, on définit l'opérateur de retard, noté L, par une application qui à chaque élément $X_t$ de la série, associe son observation précédente $X_{t-1}$:*

$$LX_t = X_{t-1}, \quad \forall t > 1.$$

*En particulier, $L^i(X_t) = X_{t-i}$.*

**Definition 1.4** (Opérateur de différenciation)**.** *Pour une série temporelle $(X_t)_t$, on définit l'opérateur de différenciation, noté $\nabla$, par une application qui à chaque élément $X_t$ de la série, associe la différence $X_t - X_{t-1}$:*

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}, \quad \forall t > 1.$$

**Definition 1.5** (Polynome caractéristique)**.** *Ayant définit l'opérateur de retard, on peut l'utiliser dans la définition d'un processus AR(p).*
*Ainsi, si $(X_t)_t$ est un AR(p), alors, on définit le polynome caractéristique $\Phi$ d'un processus AR(p) de tel sorte que: $\Phi(L)X_t = \epsilon_t$,*

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L^1 + ... + \phi_p L^p.$$

**Definition 1.6** (Équation caractéristique)**.** *On appelle équation caracteristique d'un processus AR(p), l'équation déduit de* $\Phi$ *en remplacant L par x:*

$$(1 - \phi_1 x^1 + ... + \phi_p x^p).$$

## 1.2 Moyenne Mobile (MA)

**Introduction 1.1.** *Une moyenne est dite mobile lorsqu'elle est recalculée de façon continue, en utilisant à chaque calcul un sous-ensemble d'éléments dans lequel un nouvel élément remplace le plus ancien ou s'ajoute au sous-ensemble.*
**Definition 1.7.** *Un processus est une Moyenne Mobile lorsqu'il est de la forme:*

$$X_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + ... + \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t, \quad i \in \{2,...,\infty\},$$

*où* $\epsilon_t \to iid(0,\sigma^2)$, $\forall t$.
**Definition 1.8** (Ordre d'un MA)**.** *Un processus MA est d'ordre q, noté MA(q), quand sa valeur à l'instant t est expliquée par ses q anciennes valeurs:*

$$X_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + ... + \theta_p \epsilon_{t-q} + \epsilon_t,$$

*où* $\epsilon_t \to iid(0,\sigma^2)$, $\forall t$.
**Definition 1.9** (Polynome caractéristique)**.** *Le polynome caractéristique* $\Theta$ *d'un processus MA(q) est definit de tel sorte que:* $X_t = \Theta(L)\epsilon_t$,

$$\Theta(L) = 1 + \theta_1 L^1 + ... + \theta_q L^q.$$

## 1.3 Auto-Regression et Moyenne Mobile (ARMA)

**Definition 1.10.** *Un processus ARMA* $(X_t)_t$ *est comme son nom l'indique, un processus auto-regessif et moyenne mobile. Il a une partie AR(p) et une partie MA(q) et est noté ARMA(p,q) selon la définition:*

$$X_t := \phi_1 X_{t-1} + ... + \phi_p X_{t-p} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + ... + \theta_p \epsilon_{t-q} + \epsilon_t,$$

*où* $\epsilon_t \to iid(0,\sigma^2)$, $\forall t$.
**Definition 1.11** (Stationnarité faible)**.** *Un processus* $(X_t)_t$ *est faiblement stationnaire si:* $\forall t$, $\forall h < t$;

- $E(X_t) = \mu$, *l'esperence est constante au cours du temps.*
- $Var(X_t) = \sigma^2 < \infty$, *la variance est constante et non infinie.*
- $Cov(X_t, X_{t-h}) = \gamma(h)$, *l'auto-corrélation entre* $X_t$ *et* $X_{t-h}$ *reste constante et ne dépend que de h.*

**Definition 1.12** (Stationnarité forte)**.** *Un processus* $(X_t)_t$ *est fortement stationnaire si:* $\forall t$, $\forall h$; $(X_1, X_2, ..., X_t)$ *et* $(X_{1+h}, X_{2+h}, ..., X_{t+h})$ *ont même lois en probabilité.*
**Definition 1.13** (Auto-Corrélation (ACF))**.** *La fonction d'auto-corrélation est définie par:*

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]}{\sigma^2}.$$

## 2 Serie Temporelle - La Pratique

**Introduction 2.1.** *En analyse théorique, l'étude d'une série temporelle commence par sa forme théorique. Par exemple, l'étude d'un processus ARMA(p,q)* $(X_t)_t$ *débute par sa forme:*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + ... + \phi_p X_{t-p} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + ... + \theta_p \epsilon_{t-q} + \epsilon_t,$$

*où les* $\phi_i$ *et* $\theta_j$ *sont sont des constantes données* $\forall i < p$, $\forall j < q$.

*Par contre, l'analyse pratique d'une série temporelle débute par un tableau de données, et grâce à ces données, on essaie d'estimer les paramètres du processus, et de déterminer les propriétés des résidus.*

**A savoir** (p-value)**.** *En test statistique, le p-value est une critère d'acceptation de l'hypothèse nulle* $(H_0)$*:*

- *si* $p > 0.10$*, aucune signification,* $(H_0)$ *acceptee*
- *si* $p \leq 0.10$*, asymptotiquement significative,* $(H_0)$ *acceptee*
- *si* $p \leq 0.05$*, significative,* $(H_0)$ *rejetee*
- *si* $p \leq 0.01$*, tres significative,* $(H_0)$ *rejetee.*

**A savoir** (Teste de Dickey-Fuller Augmenté - ADF)**.** *Le test ADF est un test de racine unitaire:*
$(H_0)$ : *Le processus admet une racine unitaire (non stationnaire)*
$(H_1)$ : *Le processus est stationnaire.*
*Package: library('tseries')*
*Utilisation: adf.test(...)*