Série Temporelle - De la théorie à la pratique.

ANDRIAMANANA H. Rivo Hery

7 septembre 2019

1 Serie Temporelle - La Théorie

1.1 Auto-Regression (AR)

Definition 1.1 *Un processus* (X_t) *est Auto-Regressif quand sa valeur à l'instant t n'est expliquée que par ses anciennes valeurs* $(X_{t-1},...,X_{t-i})$ *où* $i \in \{2,...,\infty\}$ *et non par d'autres processus.*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + ... + \phi_i X_{t-i} + \epsilon_t \quad ,i \in \{2,...,\infty\}$$

où les ϵ_t *sont des bruits blancs, indépendants et identiquement distribués, notés* $\epsilon_t \to iid(0,\sigma^2)$, $\forall t$.

Definition 1.2 (Ordre d'un AR) *Un processus AR est d'ordre p, noté AR(p), quand sa valeur à l'instant t est expliquée par ses p anciennes valeurs:*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + ... + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

où $\forall t$, $\epsilon_t \to iid(0,\sigma^2)$.

Definition 1.3 (Opérateur de retard) *Pour une série temporelle* $(X_t)_t$, *on définit l'opérateur de retard, noté L, par une application qui à chaque élément* X_t *de la série, associe son observation précédente* X_{t-1}*:*

$$LX_t = X_{t-1} \quad \forall t \geq 1$$

En particulier, $L^i(X_t) = X_{t-i}$.

Definition 1.4 (Polynome caractéristique) *Ayant définit l'opérateur de retard, on peut l'utiliser dans la définition d'un processus AR(p).*
Alors, si $(X_t)_t$ *est un AR(p), alors, on définit le polynome caractéristique* Φ *d'un processus AR(p) de tel sorte que:* $\Phi(L)X_t = \epsilon_t$,

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L^1 + ... + \phi_p L^p$$

Definition 1.5 (Équation caractéristique) *On appelle équation caracteristique d'un processus AR(p), l'équation déduit de* Φ *en remplacant L par x:*

$$(1 - \phi_1 x^1 + ... + \phi_p x^p)$$

1.2 Moyenne Mobile (MA)

Introduction 1.1 *Une moyenne est dite mobile lorsqu'elle est recalculée de façon continue, en utilisant à chaque calcul un sous-ensemble d'éléments dans lequel un nouvel élément remplace le plus ancien ou s'ajoute au sous-ensemble.*

Definition 1.6 *Un processus est une Moyenne Mobile lorsqu'il est de la forme:*

$$X_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + ... + \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t \quad ,i \in \{2,...,\infty\}$$

où $\epsilon_t \to iid(0,\sigma^2)$, $\forall t$.

Definition 1.7 (Ordre d'un MA) *Un processus MA est d'ordre q, noté MA(q), quand sa valeur à l'instant t est expliquée par ses q anciennes valeurs:*

$$X_t = \theta_1 \epsilon_{t-1} + ... + \theta_p \epsilon_{t-q} + \epsilon_t$$

où $\epsilon_t \to iid(0,\sigma^2)$, $\forall t$.

Definition 1.8 (Polynome caractéristique) *Le polynome caractéristique* Θ *d'un processus MA(q) est definit de tel sorte que:* $X_t = \Theta(L)\epsilon_t$,

$$\Theta(L) = 1 + \theta_1 L^1 + ... + \theta_q L^q$$

1.3 Auto-Regression et Moyenne Mobile (ARMA)

Definition 1.9 *Un processus ARMA* $(X_t)_t$ *est comme son nom l'indique, un processus auto-regessif et moyenne mobile. Il a une partie AR(p) et une partie MA(q) et est noté ARMA(p,q) selon la définition:*

$$X_t := \phi_1 X_{t-1} + ... + \phi_p X_{t-p} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + ... + \theta_p \epsilon_{t-q} + \epsilon_t$$

où $\epsilon_t \to iid(0,\sigma^2)$, $\forall t$.

2 Serie Temporelle - La Pratique