DR_CAN 工程数学基础

https://space.bilibili.com/230105574

笔记：王崇卫

说明

致敬DR_CAN博士。

再学习控制理论，打开都有灰尘的笔记，捂脸....着实为难自己了。

笔记是个人根据视频仿照DR_CAN老师，极慢的方式把笔记使用drawio软件做了一遍。

有需要，可以关注公众号"**王崇卫**"，回复"**控制理论**"，获取。

（电子笔记仅供参考翻阅，学习时应当动笔在纸上跟着up主计算）

如有错误，欢迎指出，邮箱1084746243@qq.com

B站up DR_CAN https://www.bilibili.com/video/BV1fx41137Zm?spm_id_from=333.999.0.0 笔记：王崇卫

数学基础（I） 特征值eigenvalue 与特征向量 eigenvector

在数学上，特别是线性代数中，对于一个给定的**线性变换A**，它的特征向量v经过这个线性变换的作用之后，**得到的新向量仍然与原来的v保持在同一条直线上。但其长度或方向也许会改变**。即

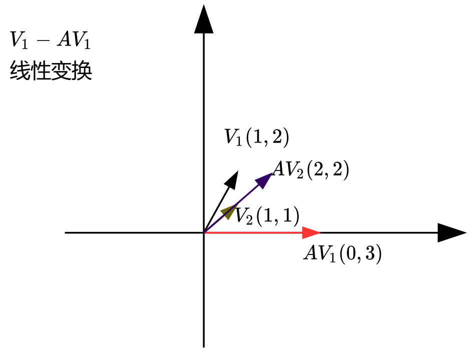
$$Av = \lambda v$$

其中 λ 为标量，即特征向量的长度在该线性变换下缩放的比例，称其特征值。

线性变化

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$AV_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 \\ 4 \times 1 + (-2) \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad AV_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2V_2$$

$\Rightarrow$ AV_2和V_2在一条直线上

$AV_2 = 2\boxed{V_2}$ → 特征向量

→ λ, 特征值

求解特征值和特征向量

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$AV = \lambda V$$

$$AV - \lambda V = 0$$

$$(A - \lambda I)V = 0$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

要有非零解 ⇩

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\boxed{|A - \lambda I| = 0} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-2-\lambda) - 1 \times 4 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

$\Rightarrow$ 特征值

$$\lambda_1 = 2$$
$$\lambda_2 = -3$$

当$\lambda_1 = 2$时

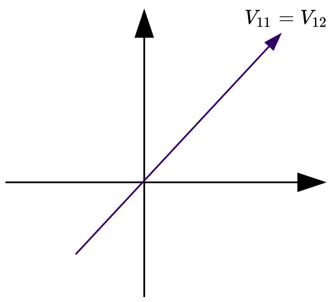
$$\begin{bmatrix} 1-2 & 1 \\ 4 & -2-2 \end{bmatrix} V_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix} = 0$$

$$-V_{11} + V_{12} = 0$$
$$4V_{11} - 4V_{12} = 0$$

$$\boxed{V_{11} = V_{12}}$$

可以任意取一组解,例如 $V_{11} = 1$, $V_{12} = 1$



特征向量

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

同理，当$\lambda_2 = -3$

$$\begin{bmatrix} 1+3 & 1 \\ 4 & -2+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$$\boxed{4V_{21} + V_{22} = 0}$$

可取 $V_{21} = 1$, $V_{22} = -4$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

结果 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ $\boxed{\begin{matrix}\lambda_1=2\\ \lambda_2=-3\end{matrix}}$ $V_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $V_2=\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}$

应用：化对角矩阵，解耦，decouple

设一个过渡矩阵 $P=[V_1 \quad V_2]$ P:coordinate transformation matrix

$$AV_1=\lambda_1 V_1, AV_2=\lambda_2 V_2$$

$$AP=A[V_1 \quad V_2]=A\begin{bmatrix}V_{11} & V_{21}\\ V_{12} & V_{22}\end{bmatrix}=\left[A\begin{bmatrix}V_{11}\\V_{12}\end{bmatrix} \quad A\begin{bmatrix}V_{21}\\V_{22}\end{bmatrix}\right]$$

$$=\left[\lambda_1\begin{bmatrix}V_{11}\\V_{12}\end{bmatrix} \quad \lambda_2\begin{bmatrix}V_{21}\\V_{22}\end{bmatrix}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1 V_{11} & \lambda_2 V_{21}\\ \lambda_1 V_{12} & \lambda_2 V_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}V_{11} & V_{21}\\ V_{12} & V_{22}\end{bmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

对角矩阵

$$AP=P\Lambda$$

$$P^{-1}AP=P^{-1}P\Lambda$$

$$\boxed{P^{-1}AP=\Lambda}$$

微分方程组， state-space

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1+x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt}=4x_1-2x_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}=Ax$$

令$x=Py$

$$\dot{x}=P\dot{y}$$

$$Ax=APy$$

$$P\dot{y}=APy$$

$$P^{-1}P\dot{y}=P^{-1}APy$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

解耦

非常漂亮的公式 $\boxed{\dot{y}=\Lambda y}$

使用特征值和特征向量
的方式来解微分方程组

$$\dot{y}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}y \qquad \begin{matrix}\dot{y}_1=2y_1\\ \dot{y}_2=-3y_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}y_1=C_1e^{2t}\\ y_2=C_2e^{-3t}\end{matrix}$$

C_1, C_2是常数

$$x=Py=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1e^{2t}\\ C_2e^{-3t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}\\ C_1e^{2t}-4C_2e^{-3t}\end{bmatrix}$$

Summary

① $Av=\lambda v$ 在一条直线上

② 特征值、特征向量的求解方法 $|A-\lambda I|=0$ $(A-\lambda I)V=0$

③ $P^{-1}AP=\Lambda$ $P=[V_1, V_2.....]$ $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & ..\end{bmatrix}$

④ $\boxed{\dot{x}=Ax \qquad 令x=Py \qquad \dot{y}=\Lambda y}$

很多的时候，我们并不一定要解出微分方程，而是通过判断特征值的符号以及性质来判断系统的稳定性和表现