DR_CAN 现代控制理论笔记

https://space.bilibili.com/230105574

笔记：王崇卫

说明

致敬DR_CAN博士。

再学习控制理论，打开都有灰尘的笔记，捂脸.....着实为难自己了。

笔记是个人根据视频仿照DR_CAN老师，极慢的方式把笔记使用drawio软件做了一遍。

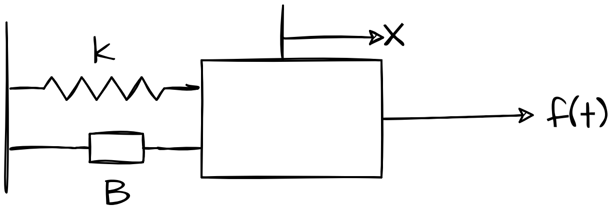
（电子笔记仅供参考翻阅，学习时应当动笔在纸上跟着up主计算）

如有错误，欢迎指出，邮箱1084746243@qq.com

更多内容输出，可以关注公众"王崇卫"，二维码

Advanced 控制理论

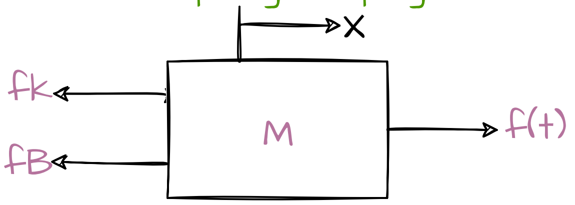
状态-空间表述 State-Space Representation



输入 $u(t)=f(t)$
输出 x

质量-弹簧-阻尼

mass-spring-damping



$f_k = kx$

$f_B = B\dot{x}$

newton's 2nd law $\boxed{F=ma}$

$$m\ddot{x} = f(t) - f_k - f_B \Rightarrow m\ddot{x} + B\dot{x} + kx = f(t)$$

laplace transform

$$ms^2X(s) + BsX(s) + kX(s) = F(s)$$

open: $G(s) = \dfrac{X(s)}{F(s)} = \dfrac{1}{ms^2+Bs+k}$

---

state-space

集合 $\left\{\begin{matrix}\text{输入}\\ \text{输出}\\ \text{状态变量}\end{matrix}\right\}$ 一阶微分方程

$$m\ddot{x} + B\dot{x} + kx = f(t) \Rightarrow$$ 选择合适的状态变量

state:

$$\begin{aligned} Z_1 &= x \\ Z_2 &= \dot{x} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{Z}_1 &= \dot{x} = Z_2 \\ \dot{Z}_2 &= \ddot{x} \\ &= (f(t) - B\dot{x} - kx)\frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{m}u(t) - \frac{B}{m}Z_2 - \frac{k}{m}Z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{Z}_1\\ \dot{Z}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{B}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_1\\ Z_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}[u(t)]$$

系统状态随时间的变化

$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}Z_1\\ Z_2\end{bmatrix} + [0][u(t)]$$

$\Rightarrow$

$$\dot{Z} = AZ + Bu$$

$$y = CZ + Du$$

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{B}{m}\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0] \qquad D = [0]$$

状态空间方程和传递函数的关系

$$\dot{Z} = AZ + Bu$$
$$y = CZ + Du$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + Bs + k}$$

laplace

$$\mathscr{L}\dot{Z} = \mathscr{L}AZ + Bu$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$SZ_{(S)} = AZ_{(S)} + BU_{(S)}$$
$$SZ_{(S)} - AZ_{(S)} = BU_{(S)}$$
$$(SI - A)\,Z_{(S)} = BU_{(S)}$$

同时乘(SI-A)的逆

$$Z_{(S)} = (SI - A)^{-1} BU_{(S)}$$

$$\mathscr{L}y = \mathscr{L}CZ + Du$$
$$Y_{(S)} = CZ_{(S)} + DU_{(S)}$$
$$Y_{(S)} = C(SI - A)^{-1} BU_{(S)} + DU_{(S)}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(SI - A)^{-1}B + D$$

$$(SI - A) = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{B}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & -1 \\ \frac{k}{m} & S + \frac{B}{m} \end{bmatrix}$$

伴随矩阵/行列式

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

$$(SI - A)^{-1} = \frac{(SI - A)^*}{|SI - A|} = \frac{\begin{bmatrix} S + \frac{B}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & S \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{k}{m}}$$

二阶的矩阵的伴随矩阵
主对角线的元素对调
副对角线的元素取相反数

$$C(SI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} S + \frac{B}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & S \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{\begin{bmatrix} S + \frac{B}{m} & 1 \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{k}{m}}$$

$$C(SI - A)^{-1}B = \frac{\begin{bmatrix} S + \frac{B}{m} & 1 \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \frac{0 + \frac{1}{m}}{s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{k}{m}}$$

$$C(SI - A)^{-1}B + D = \frac{0 + \frac{1}{m}}{s^2 + \frac{B}{m}s + \frac{k}{m}} + 0$$

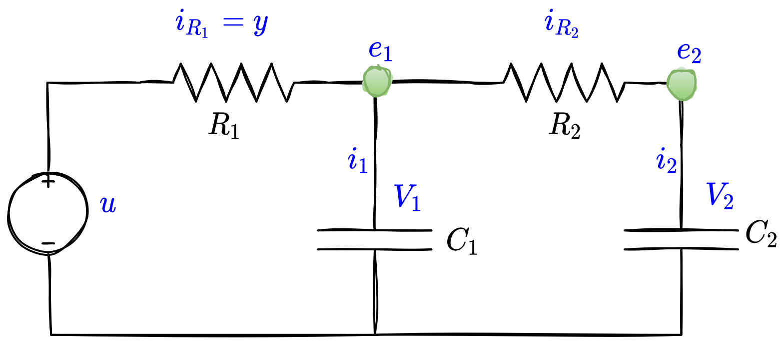
$$G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{ms^2 + Bs + k}$$

分母部分和行列式的关系：

$|SI - A| = 0$ ⇨ s是A的特征值 ms^2+Bs+k=0 ⇨ s是极点

决定系统的稳定系

练习



输入： $\mathbf{u}$

输出： $y=i_{R1}$

状态变量 : V_1, V_2

$$KCL:\sum I=0$$

$$e_1: i_{R_1}=i_1+i_{R_2}$$

$$e_2: i_{R_2}=i_2$$

$$i_{R_1}=\frac{u-V_1}{R_1}$$

$$i_{R_2}=\frac{V_1-V_2}{R_2}$$

$$i_1=C_1\dot{V}_1$$

$$i_2=C_2\dot{V}_2$$

$$e_1:\frac{u-V_1}{R_1}=C_1\dot{V}_1+\frac{V_1-V_2}{R_2} \qquad e_2:\frac{V_1-V_2}{R_2}=C_2\dot{V}_2$$

$$C_1\dot{V}_1=\frac{u-V_1}{R_1}-\frac{V_1-V_2}{R_2} \qquad \dot{V}_2=\frac{V_1-V_2}{C_2R_2}$$

$$\dot{V}_1=\frac{u}{CR_1}-\left(\frac{1}{CR_1}+\frac{1}{CR_2}\right)V_1+\frac{V_2}{CR_2} \qquad \dot{V}_2=\frac{V_1}{C_2R_2}-\frac{V_2}{C_2R_2}$$

$$y=i_{R_1}=\frac{u-V_1}{R_1}=\frac{1}{R_1}u-\frac{1}{R_1}V_1$$

$$\begin{bmatrix}\dot{V}_1\\ \dot{V}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\left(\frac{1}{CR_1}+\frac{1}{CR_2}\right) & \frac{1}{CR_2}\\ \frac{1}{C_2R_2} & -\frac{1}{C_2R_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{CR_1}\\ 0\end{bmatrix}[u]$$

$$y=\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}\end{bmatrix}[u]$$

SUMMARY

State-Space

$$\dot{Z}=AZ+Bu$$

$$y=CZ+Du$$

- 输入
- 输出
- 状态

一阶微分方程

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C(SI-A)^{-1}B+D$$

A的特征值就是G(s)的极点

Phase portrait 相图 相轨迹

分析微分方程　　控制的角度

$$\dot{X}_1 = X_2 - 0.5X_1$$
$$\dot{X}_2 = sin(X_1)$$

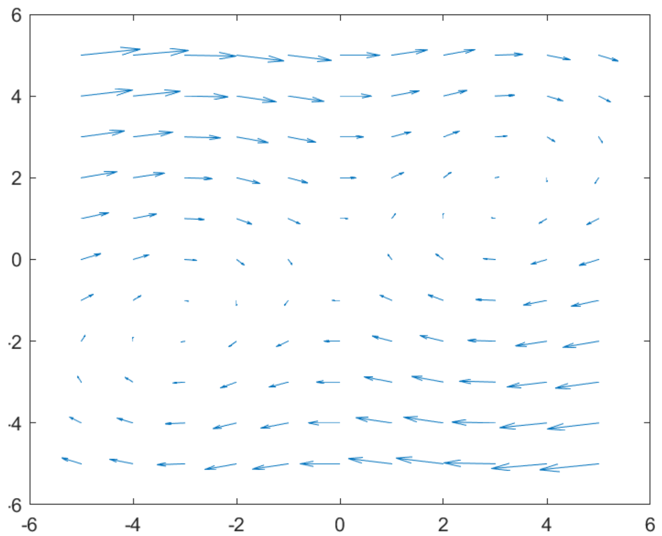
非线性

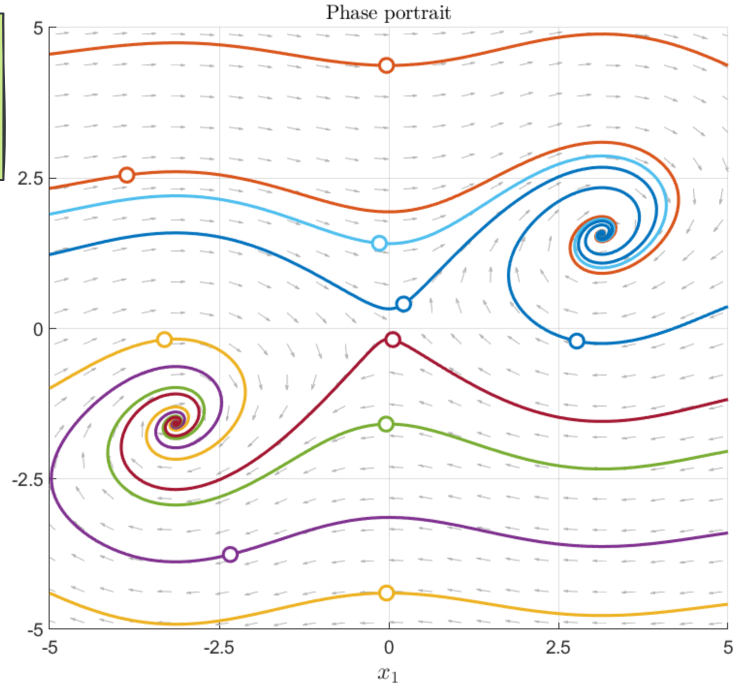
matlab插件

https://github.com/MathWorks-Teaching-Resources/Phase-Plane-and-Slope-Field

matlab绘制相图可以使用
1. streamslice
2. quiver

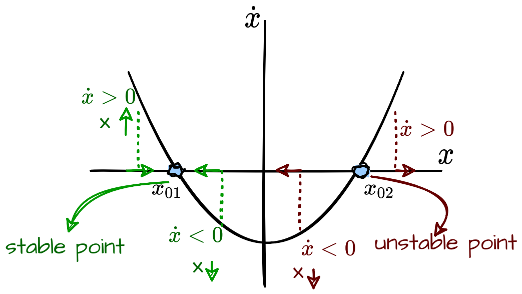
```
[x1,x2]=meshgrid(-5:1:5,-5:1:5);
dx1=x2-0.5*x1;
dx2=sin(x1);
had=quiver(x1,x2,dx1,dx2);
```





1-D

$$\dot{x} = f(x)$$

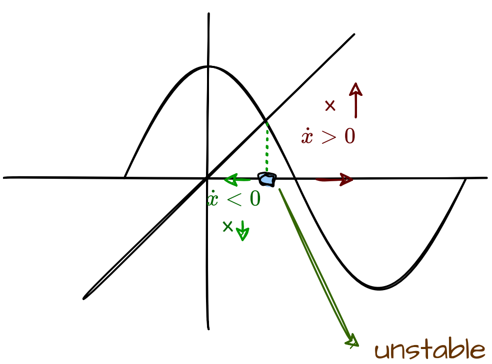


$\dot{x} = 0$　　$x = x_{01}$　$x = x_{02}$　　x是个常数

x_{01}、x_{02}是平衡点　　fixed point　equilibrium point

通过$\dot{x}$符号判断x的变化趋势

$$\dot{x} = x - cosx$$



fixed point　　$\dot{x} = 0$　　$x - cosx = 0$

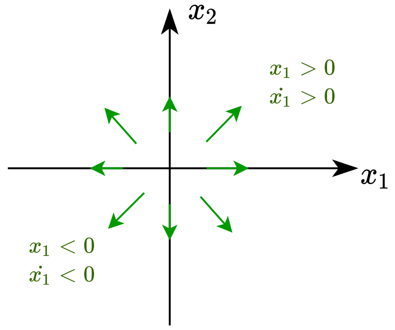
2-D state-space

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad u = 0$$

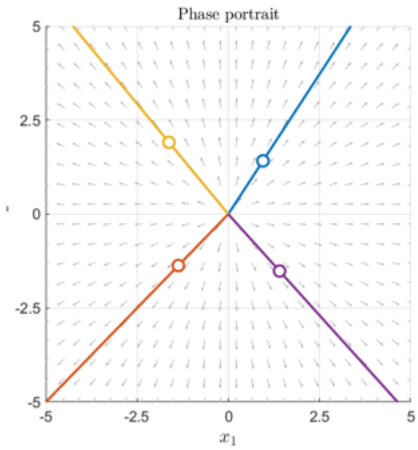
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad 令 b = c = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= a x_1 \\ \dot{x_2} &= d x_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \text{fixed point} \quad \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

case 1: $a = d > 0$

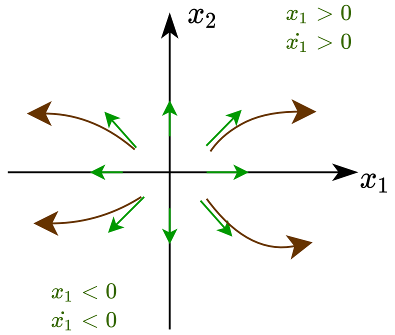


source
unstable



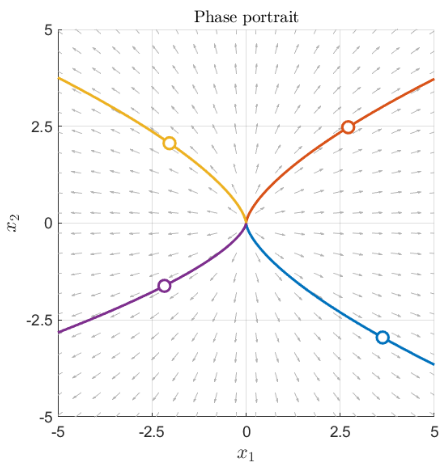
Equations: $x_1'(t) = 2x_1 \qquad x_2'(t) = 2x_2$

case 1: $a > d > 0$



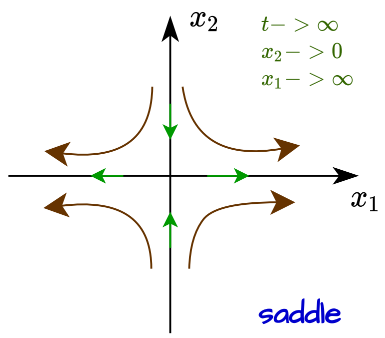
a>d,x1方向发散更快

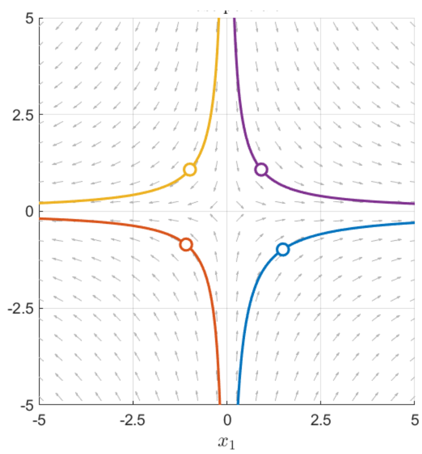
source
unstable



Equations: $x_1'(t) = 3x_1 \qquad x_2'(t) = 2x_2$

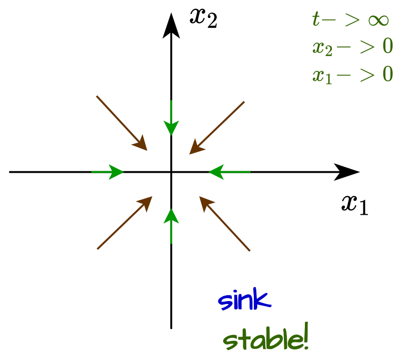
case 2: $a > 0$
$d < 0$

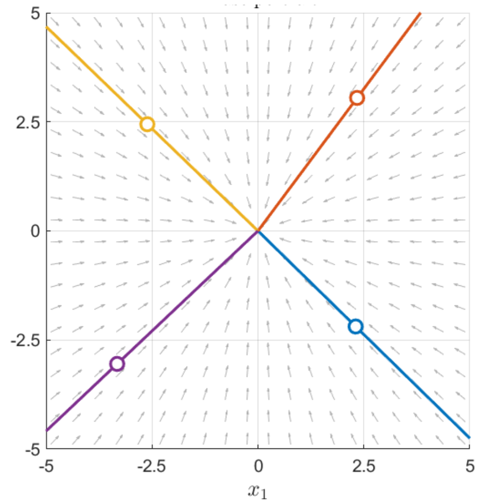




Equations: $x_1'(t) = 2x_1 \qquad x_2'(t) = -2x_2$

case 3: $a < 0$
$d < 0$





Equations: $x_1'(t) = -2x_1$ $\quad x_2'(t) = -2x_2$

---

general form

$\dot{x} = Ax$ 令 $x = Py$
$\dot{y} = \Lambda y$

$P = [v_1 \quad v_2]$

对角矩阵$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

λ_1, λ_2是特征值
v_1, v_2是特征向量

线性变换
对角化
解微分方程

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x$$

注：这一块的推导需要看看线性代数的特征值和特征向量

1.求λ $\quad |\lambda I - A| = 0 \quad \begin{vmatrix} \lambda+3 & -4 \\ 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 - 9 + 8 = 0 \quad \lambda = \pm 1$

2.求v_1, v_2 $\quad [\lambda I - A]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

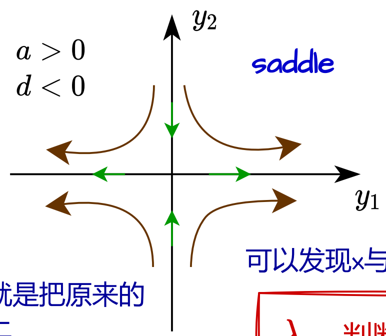
$a > 0, d < 0$的形式

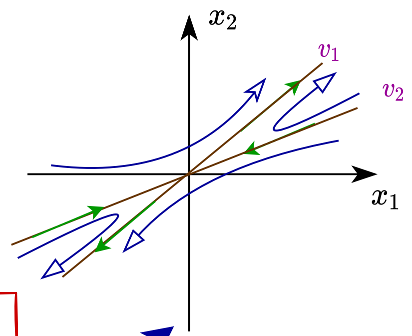
$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} y$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} y$$

x等于一个矩阵乘y，实际上就是把原来的坐标轴变到了这个特征向量上

$a > 0$
$d < 0$





可以发现x与y的性质相同

λ 判断系统的稳定性

在传递函数中

$$G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D$$

$$(SI - A)^{-1} = \frac{(SI - A)^*}{|SI - A|}$$

$|SI - A| = 0$ 传递函数的极点，决定了系统的稳定系

状态空间方程的特征值也将决定系统的稳定性，这两个方法联系在了一起

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} x \qquad a > 0$$

复数

1.求λ $\quad |\lambda I - A| = 0 \quad \begin{vmatrix} \lambda & -a \\ a & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 + a^2 = 0 \quad \boxed{\lambda = \pm ai}$

这里应该是 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

2.求v_1, v_2 $\quad [\lambda I - A] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ ai \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -ai \end{bmatrix}$ no direction

$$\dot{y} = \Lambda y \qquad \dot{y} = \begin{bmatrix} ai & 0 \\ 0 & -ai \end{bmatrix} y \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{ait} \\ y_2 &= C_2 e^{-ait} \end{aligned}$$

$$x = Py \qquad x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ai & -ai \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{ait} \\ C_2 e^{-ait} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{ait} + C_2 e^{-ait} \\ aiC_1 e^{ait} - aiC_2 e^{-ait} \end{bmatrix}$$

欧拉公式 $\quad e^{ait} = cosat + isinat$

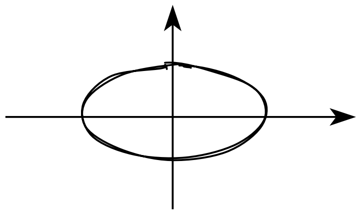
$$x_1 = B_1 cosat + B_2 isinat$$
$$x_2 = B_3 icosat + B_4 sinat$$

DR_CAN 如果线性微分方程的解是由两个项相加而成，这样的话，每一个项单独拿出来，都是微分方程的解。
比如说：dx/dt=2x. 解可以是 x=e^2t+2e^2t. 而这其中 x=e^2t 和 x=2e^2t 也都是解。所以对于这个问题， 这两个项相加，只需要分析他的实部部分。这其实也是线性系统的一个特性。

是个椭圆的公式

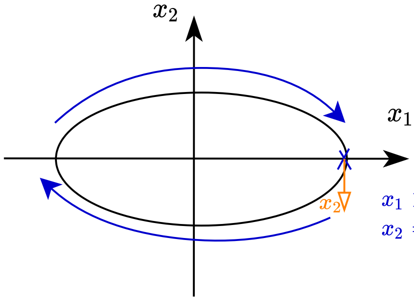
$$x_1 = B_1 cosat$$
$$x_2 = B_4 sinat$$

$$\boxed{(\frac{x_1}{B_1})^2 + (\frac{x_2}{B_4})^2 = I}$$



所以，对于特征值是复数只有虚部的情况是个椭圆 $\boxed{\lambda = \pm ai}$

对于方向



$x_1 > 0$
$x_2 = 0$

$\dot{x}_1 = a x_2$
$\dot{x}_2 = -a x_1$

所以$\dot{x}_2 < 0$

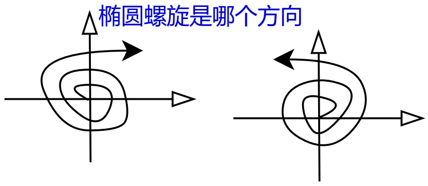
Center

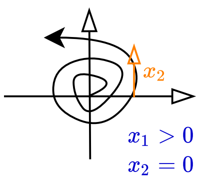
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x \qquad 1.求\lambda \quad |\lambda I - A| = 0 \quad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \qquad \lambda = 1 \pm 2i$$

$\lambda_2 = 1 - 2i$
$\lambda_2 = 1 - 2i$

$$y = \begin{bmatrix} e^{(1+2i)t} \\ e^{(1-2i)t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t e^{2it} \\ e^t e^{-2it} \end{bmatrix}$$

椭圆螺旋是哪个方向

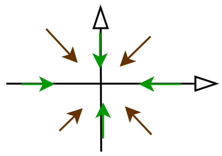
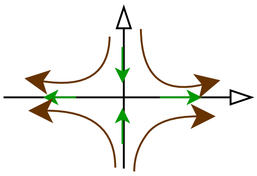
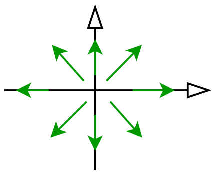
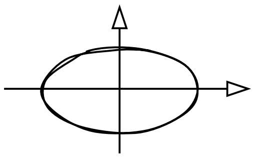
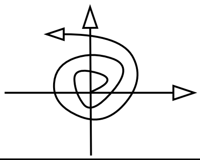
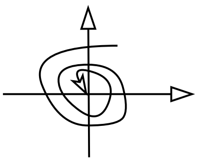




$x_1 > 0$
$x_2 = 0$

$\dot{x}_2 = 2x_1 > 0$

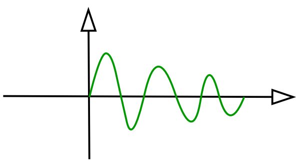
Summary

	λ_1, λ_2		
Real	$\boxed{\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0}$		stable
Real	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$		saddle
Real	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$		unstable
complex $\lambda = a \pm bi$	$a = 0$		center
complex $\lambda = a \pm bi$	$a > 0$		unstable
complex $\lambda = a \pm bi$	$\boxed{a < 0}$		stable

对方向向可以选择
坐标轴上一个点做判断

$\lambda = a \pm bi$

虚部bi, 根据欧拉公式代入了$cost$，$sint$，即引入了振动



稳定

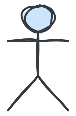
λ_1, λ_2小于0
或者λ的实部小于0

Advanced 控制理论

Phase Portrait 爱情故事

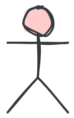
steven strogatz 1988 Romeo & Juliet

使用两个中文名字



男孩 与非

$Y_{(t)}$：与非对梦寒的爱/恨　　　当$Y>0$，爱。当$Y<0$，恨



女孩 梦寒

$M_{(t)}$：梦寒对与非的爱/恨　　　当$M>0$，爱。当$M<0$，恨

CASE 1

$$\dot{Y} = aM$$

$$\dot{M} = -bY$$

$$a, b > 0$$

Fixed Point

$$\begin{bmatrix} Y_f \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

step1:系统描述 System Description

1)与非是个耿直的Boy　　投桃报李+以牙还牙
2)梦寒是个多情Girl　　欲迎还拒+若即若离

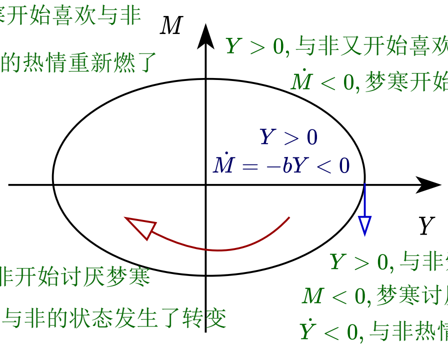
step2：计算

$$\begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \dot{M} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} Y \\ M \end{bmatrix} \quad |\lambda I - A| = 0 \quad \begin{vmatrix} \lambda & -a \\ b & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 + ab = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{ab}i$$ Center!

$M>0$, 梦寒开始喜欢与非
$\dot{Y}>0$, 与非的热情重新燃了

$Y>0$, 与非又开始喜欢梦寒
$\dot{M}<0$, 梦寒开始冷谈



$Y<0$, 与非开始讨厌梦寒
$\dot{M}>0$, 梦寒对与非的状态发生了转变

$Y>0$, 与非爱着梦寒
$M<0$, 梦寒讨厌着与非
$\dot{Y}<0$, 与非热情减少中

step3：分析

1) 无限循环，爱恨交织
2) 深入分析

step4：讨论

1/4相爱
1/2一半火焰，一半海洋
1/4互不顺眼

离别不过是换一种方式的陪伴，
这一刻让我凝望你的眼

CASE 2

$$\dot{Y} = -aY + bM$$

$$\dot{M} = bY - aM$$

$$a, b > 0, F.P.(0,0)$$

step1:描述

1) Y&M是一类人
2)会积极的回应对方（正b）
3) 都很小心，有所保留（负a）

step2：计算

$$A = \begin{bmatrix} -a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \qquad |\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + a & -b \\ -b & \lambda + a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2a\lambda + a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -a \pm b$$

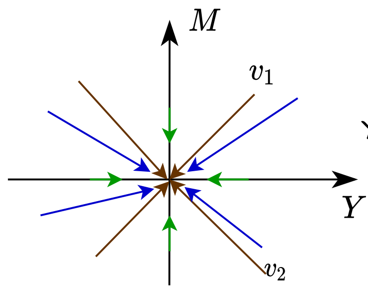
$$\begin{matrix} \lambda_1 = -a + b \\ \lambda_2 = -a - b \end{matrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

step3：分析

CASE 2.1 $|a| > |b|$ **自我意识>对方的感受**

$$\lambda_1 = -a + b < 0$$
$$\lambda_2 = -a - b < 0$$

stable! sink



$t -> \infty$
$M, Y -> 0$

Y&M->路人

十年之后，我们是朋友，还可以问候，
却再也找不到拥抱的理由

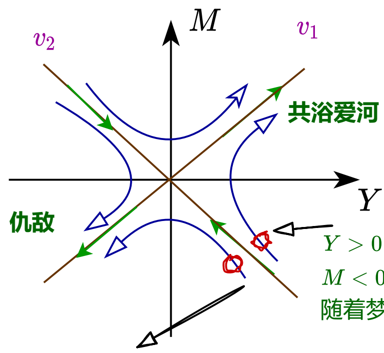
CASE 2.2 $|a| < |b|$ **对于对方>对于自己**

$$\lambda_1 = -a + b > 0$$
$$\lambda_2 = -a - b < 0$$

Saddle

与IC(初始状态)有关

取决于对方的第一印象



$Y > 0$, 与非爱着梦寒
$M < 0$, 梦寒讨厌与非
随着梦寒的升温，最终过上了幸福的生活

$Y > 0$, 与非爱着梦寒
$M < 0$, 梦寒讨厌与非
但是随着梦寒的升温，与非坚持不了，走向了仇人

No!! 等……再……

step4：结论

1) 验证了很多人宁愿做朋友，也不愿打破平衡
2) 如果你不认真的话，赢不了，而认真可能就输了

Summary

1. Phase portrait
2. 分析问题的方法

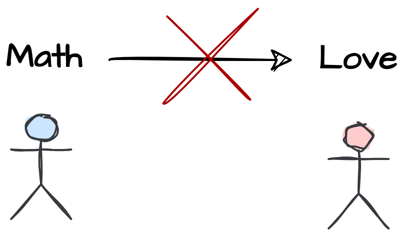
S1 描述
S2 计算
S3 分析
S4 讨论

观察

举例、从某点展开

比较

说明

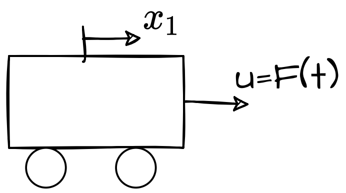


少一点套路，多一点真诚

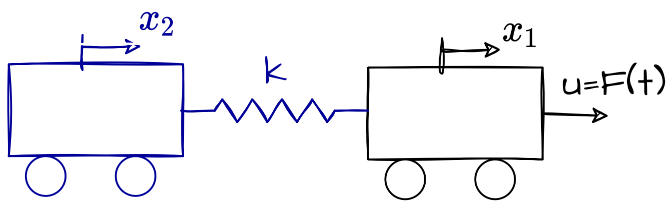
谁画出这天地，又画下我和你
让我们的世界
绚丽多彩！！

Advanced 控制理论

可控性 - Controllability (LTI) 线性时不变



通过u可以控制位移和速度$x_1, \dot{x_1}$



是否只通过u可以控制$x_1, \dot{x_1}, x_2, \dot{x_2}$???

Definition 3.2.1 (*Controllability*) : *The dynamical system is controllable on* $[t_0, t_1]$ *if* $\forall$ *initial.*

and final states $x_0, x_1, \exists u(\cdot)$ *so that* $s(t_1, t_0, x_0, u) = x_1$

It is said to controllable at t_0 *if* $\forall x_0, x_1, \exists t_1 \geq t_0$ *and* $u(\cdot) \in U$ *so that* $s(t_1, t_0, x_0, u) = x_1$.

$$\dot{X} = AX + Bu$$

是否存在一组u，x0->xl

离散型

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

令 $x_0 = 0$

1. $k = 0 \quad x_1 = Ax_0 + Bu_0 = Bu_0$
2. $k = 1 \quad x_2 = Ax_1 + Bu_1 = ABu_0 + Bu_1$
3. $k = 2 \quad x_3 = Ax_2 + Bu_2 = A^2Bu_0 + ABu_1 + Bu_2$

$n. \quad k = n \quad x_n = Ax_{n-1} + Bu_{n-1} = A^{n-1}Bu_0 + \cdots\cdots + ABu_{n-2} + Bu_{n-1}$

$$x_n = \underbrace{[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]}_{Co \in R^{n \times nr}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \cdots \\ u_0 \end{bmatrix}}_{u}$$

经过n步后，$x_0 = 0 \Rightarrow x_n$

$A \in R^{n \times n}$

$B \in R^{n \times r}$

若u有解 Co是满秩的

$$\boxed{Rank(Co) = n}$$

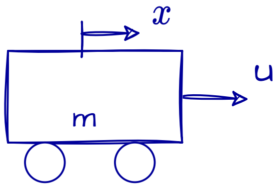
连续系统也一样

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u \Longrightarrow Co=[B\quad AB]=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}$$ 行列式=0

$R(Co)=1$ ⟹ 不可控！！

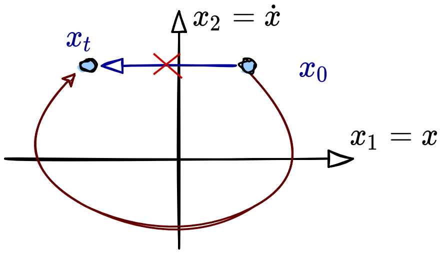
$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u \Longrightarrow Co=[B\quad AB]=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$R(Co)=2$ ⟹ 可控！！

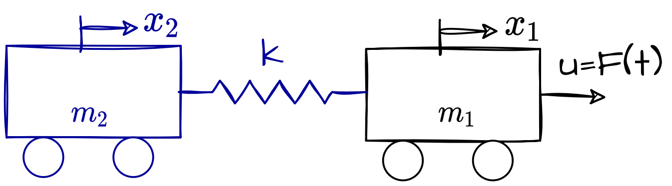


$m=1$

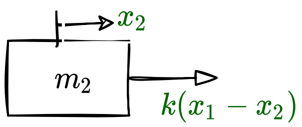
$$u=m\ddot{x},\quad x_1=x,\quad x_2=\dot{x} \Longrightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

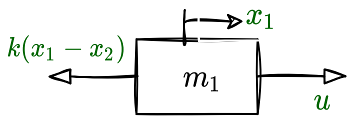


可控性的表现：
点对点？ ✓
轨迹？ ✗



受力分析





$$m_2\ddot{x}_2=k(x_1-x_2)$$

$$m_1\ddot{x}_1=u-k(x_1-x_2)$$

$$\xrightarrow[k=100]{m_1=m_2=1}\quad \begin{aligned}\ddot{x}_2&=100x_1-100x_2\\ \ddot{x}_1&=u-100x_1+100x_2\end{aligned}$$

令：$Z_1=x_1, Z_2=\dot{Z}_1, Z_3=x_2, Z_4=\dot{Z}_3$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\\Z_3\\Z_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-100&0&100&0\\0&0&0&1\\100&0&-100&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\\Z_3\\Z_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

```
matlab
>> A=[0 1 0 0; -100 0 100 0; 0 0 0 1; 100 0 -100 0]
>> B=[0; 1; 0; 0;]
>> Co=ctrb(A,B)
>> rank(Co)
ans =
   4
```

可控！！

Matlab Co = ctrb(A,B)

$$Co=[B\quad AB\quad \cdots\quad A^{n-1}B]$$

Summary

$$Co=[B\quad AB\quad A^2B\quad \cdots\quad A^{n-1}B]$$

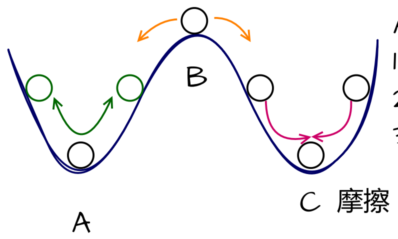
可控 ⟹ Rank(Co)=n

→ 点->点 $x_0\longrightarrow x_t$ 轨迹不一定

可控指理论可控，现实系统需要考虑物理约束

Advanced 控制理论

稳定性 - stability (Lyapunov)



A和C的区别是有摩擦
1) A点，球的偏离会一直摆下去
2) B点偏离稳定点后，将远离
3) C点，有摩擦，偏离后最终回到C点

不严谨的说：稳定系统

离开平衡点后的反应随时间衰减，或者至少不增加

A、C $\longrightarrow$ 稳定
B $\longrightarrow$ 不稳定

严谨的数学定义 $\epsilon-\delta$

$\forall: for\ All$: 对于任意给定

$\exists: at\ least\ one$: 存在一个

$\|\cdot\|$: $norm$，范数

Euclidean norm
欧几里得范数

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}$$

Defintion : Stability in the sense of Lyapunov 李雅普诺夫稳定性

The origin (equilibrium point at the origin) is $\boxed{\text{stable in the sense of Lyapunov}}$ or simply stable if

$$\forall t_0,\ \forall\epsilon>0,\ \exists\delta(t_0,\epsilon): \underline{\|x(t_0)\|<\delta(t_0,\epsilon)} \Rightarrow \forall t\ge t_0\ \ \|x(t_0)\|<\epsilon$$

Defintion : Assymptotic Stability 渐进稳定性

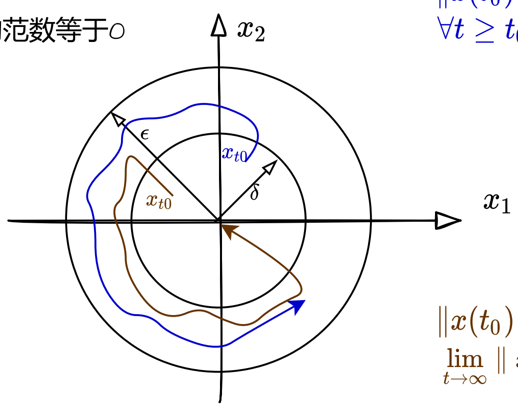
the origin is an $\boxed{\text{asympotically stable}}$ equilibrium point if it is stable and in addition:

$$\exists\delta(t_0)>0:\quad \|x(t_0)\|<\delta(t_0) \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$$

这两个的区别在于
1) 一个有界
2) 一个随着时间的进行，xt的范数等于0

2-D

$$\dot{x}=f(x_1,x_2)$$



$\|x(t_0)\|<\delta(t_0,\epsilon)$
$\forall t\ge t_0\ \ \|x(t_0)\|<\epsilon$
最开始在小圆内随着时间的增加，它会一直在大圆以内

$\|x(t_0)\|<\delta(t_0,\epsilon)$
$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$
最开始在小圆内随着时间的增加，时间趋向无穷，它会回到平衡点

线性时不变系统 LTI 参考 Phase Portait

$\dot{x}=Ax$ 判断**A矩阵**的特征值

Stability	$\lambda=a+bi$	
Stable Lyapunov	所有的特征值只有"**非正**"的实部	$a\le 0$
Stable Assymptotic	所有的特征值只有"**负**"的实部	$a<0$
Unstable	所有的特征值只要有一个"**正**"的实部	$a>0$

Nonlinear System "非线性系统"

第一方法是求解微分方程的方法
第二方法不需要求微分方程，就可以判断系统稳定性

直接方法 Direct method

第二方法 2nd Method

$\dot{x} = f(x)$　　x=0是平衡点

如果我们能找到李雅普诺夫函数V,满足

PSD　positive semi definite　半正定除0外，都是大于等于0的

NSD negative　半负定

$(i) V_{(0)} = 0$

$(ii) V_{(x)} \geq 0$　in D-{0} 除了0的所有定义域之内

$(iii) \dot{V}_{(x)} \leq 0$　in D-{0}

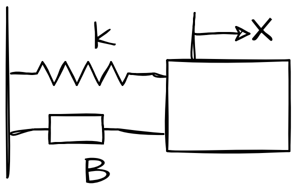
$\Rightarrow$ $x = 0 \ \ stable$

如果$(i) V_{(0)} = 0$

$(ii) V_{(x)} > 0$　in D-{0} 除了0的所有定义域之内　　PD 正定

$(iii) \dot{V}_{(x)} < 0$　in D-{0}　　ND 负定

$\Rightarrow$ $x = 0 \ \ Assymptotic \ \ Stable$



LTI　　$m\ddot{x} + B\dot{x} + kx = 0$

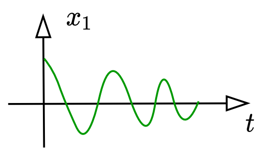
$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{B}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

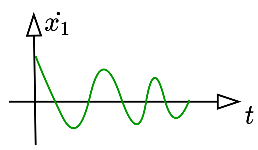
$Fixed: Z_1 = Z_2 = 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 + (-\frac{B}{m}) < 0$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = |A| = \frac{K}{m} > 0$

$\Rightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ $\Rightarrow$ Stable





Nonlinear

李雅普诺夫第二方法

假设弹簧$f_k = kx^3$

$\boxed{\text{Guess a V is ART!!}}$

$m\ddot{x} + B\dot{x} + kx^3 = 0$

设$V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{4} kx^4$

$V_{(0)} = 0$

$V_{(x)} > 0$　in D-{0} 即$x, \dot{x} \neq 0$　　$V: PD$

$\dot{V} = m\dot{x}\ddot{x} + kx^3\dot{x}$

$= m\dot{x}(-\frac{kx^3}{m} - \frac{B\dot{x}}{m}) + kx^3\dot{x}$

$= -kx^3\dot{x} - B\dot{x}^2 + kx^3\dot{x}$

$= -B\dot{x}^2$　　$\dot{V} < 0, ND$

$\Rightarrow$ Assymptotic Stable

Advanced 控制理论

Linear Controller Design 线性控制器设计

Open Loop 开环 $\dot{x} = Ax$ A的特征值λ_i决定系统表现，稳定性

"u" input Closed Loop 闭环

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \text{令} u = -kx$$

$$\dot{x} = Ax - Bkx$$

$$\dot{x} = (A - Bk)x$$

A_{cl}：闭环状态空间矩阵　　选取k的值，确定λ_1, λ_2

E.X

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

① Open loop $|\lambda I - A| = 0$ $\begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \boxed{\lambda_2 = 3 > 0} \Rightarrow$ 不稳定

② Close loop $u = -kx = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -k_1 & 3 - k_2 \end{bmatrix}}_{A_{cl}} x$$

③ Find k1,k2

$$|\lambda I - A_{cl}| = 0 \qquad \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ k_1 & \lambda - 3 + k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (k_2 - 3)\lambda + 2k_1 = 0$$

令$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ $\quad (\lambda + 1)^2 = 0$, $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ $\Rightarrow$ $= \lambda^2 + 2\lambda + 1$

$\Rightarrow$ $2k_1 = 1$, $k_2 - 3 = 2$ $\quad k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = 5$ $\quad \boxed{u = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$

$\lambda????$

- 为虚数则一定有共轭 $\lambda = a + bi$
- 为虚数 -> 引入振动
- 决定收敛速度 $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots$
- 考虑u

同样令$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ $\quad k_1 = 2$, $k_2 = 7$ $\quad u = \begin{bmatrix} -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$(\lambda + 2)^2 = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

可以看到，输入会大得多

如何选取λ还涉及

optimal control

引入 Cost Function

linear Quadratic regulator

L Q R

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \qquad Min\,(J)$$

更加看重收敛速度，在Q上面做文章。更加看重输入的值的话，就在R上面做文章

E.X

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u \qquad u=-\begin{bmatrix}-k_1&-k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-k_1&-k_2\\-k_1&-k_2\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}2-k_1&-k_2\\1-k_1&1-k_2\end{bmatrix}x$$

$$|\lambda I-A_{cl}|=0 \qquad \lambda^2+(-3+k_1+k_2)\lambda+2-k_1-k_2=0$$

令$\lambda_1=\lambda_2=-1$ $\qquad =\lambda^2+2\lambda+1$

$$-3+k_1+k_2=2 \qquad k_1+k_2=5$$
$$2-k_1-k_2=1 \quad\Rightarrow\quad k_1+k_2=1$$

????求不出来

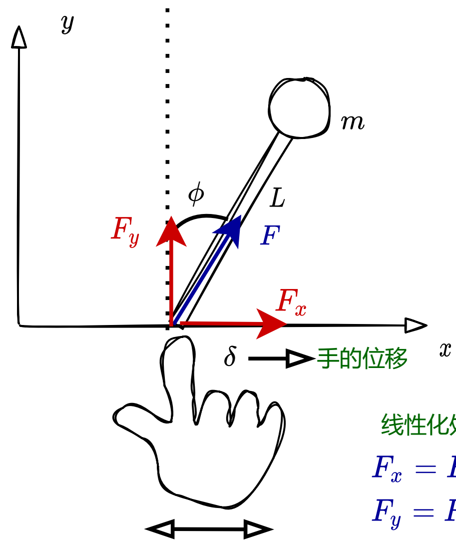
回忆：可控性

$$Co=\begin{bmatrix}B&AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix} \qquad Rank(Co)=1\neq 2$$

不可控

APP，用手指去平衡杆的游戏

- 质量为m的小球，为了简略忽略杆的质量
- 手指可以左右移动的，目标是平衡这个杆



Goal: $\phi=0$

小球x方向的位移

$$x=L\sin(\phi)+\delta$$
$$x=L\phi+\delta$$

线性化处理

$\phi\to 0 \quad \sin(\phi)=\phi$

x方向的力

$$Fx=m\ddot{x}$$
$$F\phi=mL\ddot{\phi}+m\ddot{\delta} \quad ①$$

线性化处理

$$F_x=F\sin(\phi)=F\phi$$
$$F_y=F\cos(\phi)=F$$

y方向的力

$$F_y=mg$$
$$F=mg \quad ②$$

①② $\Rightarrow$ $mg\phi=mL\ddot{\phi}+m\ddot{\delta}$

$$\boxed{\ddot{\phi}-\frac{g}{L}+\frac{1}{L}\ddot{\delta}=0}$$

①state space

$$x_1=\phi \qquad \dot{x_1}=\dot{\phi}=x_2$$

$$x_2=\dot{\phi} \qquad \dot{x_2}=\ddot{\phi}=\frac{g}{L}\phi-\frac{1}{L}\ddot{\delta}$$
$$=\frac{g}{L}x_1-u$$

令$u=\frac{1}{L}\ddot{\delta}$ 输入是手控制的加速度，单位化下

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\\dot{x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\\frac{g}{L}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}u$$

②open loop

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\\frac{g}{L}&0\end{bmatrix} \qquad |\lambda I-A|=0 \qquad \begin{vmatrix}\lambda&-1\\-\frac{g}{L}&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\frac{g}{L}=0 \Rightarrow \lambda=\pm\sqrt{\frac{g}{L}}$$

有正数
不稳定

③controllable?

$$Co = [\,B \quad AB\,] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Rank(Co) = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{可控}$$

④ let

$$u = -[\,-k_1 \quad -k_2\,] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \text{使得} \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} [\,-k_1 \quad -k_2\,]\, x$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} + k_1 & k_2 \end{bmatrix}}_{A_{cl}} x \qquad |\lambda I - A_{cl}| = 0 \qquad \lambda^2 - k_2\lambda - \frac{g}{L} - k_1 = 0$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\Rightarrow \quad k_1 = -1 - \frac{g}{L}, \quad k_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad u = -[\,-1 - \tfrac{g}{L} \quad -2\,] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$u = [\,1 + \tfrac{g}{L} \quad 2\,] \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

Advanced 控制理论

L Q R 控制器

linear Quadratic regulator $\boxed{\text{线性二次型调节器}}$

Open Loop $\dot{x} = Ax$ → state Matrix

Closed Loop $\dot{x} = Ax + Bu$ $u = -kx = [-k_1 \quad -k_2 \quad \cdots] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \end{bmatrix}$

$\dot{x} = (A - Bk)x$ → A_{cl} ：闭环状态空间矩阵

$\boxed{\dot{x} = A_{cl}x}$ 选择$k(k_1, k_2, \cdots)$ $\xrightarrow{\text{改变}}$ A_{cl}的特征值 $\xrightarrow{\text{控制}}$ 系统的表现

如何确定特征值 λ_i??
什么样的特征值才是最好的?

引入 Cost Function（目标函数，能量函数，代价函数）

选择时间段

$$min\, J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru)\, dt$$

正的 $ax_1^2 + bx_2^2 + bx_3^2 + \cdots$

$Penalty: x \neq 0$时的惩罚

代表了整个输入对cost func的影响
R越大u对于J的影响越大

使J小, u越小越好

$$Q = \begin{bmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & c & \\ & & & \cdots \end{bmatrix}$$

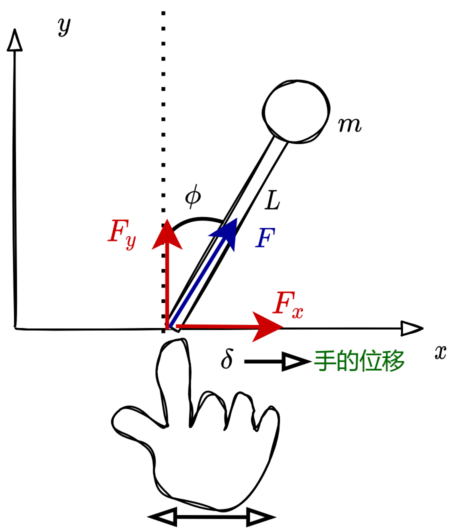
同时满足系统稳定性的时候，还要找到costfunc的最小值

$$\boxed{minJ = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru)\, dt}$$

$$\begin{bmatrix} 100 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \cdots \end{bmatrix}$$

当$x_1 \neq 0$时, $J \uparrow$
x_1对J有较大影响 使J小, 令x_1快速收敛

例子



Dynamic:

$$\ddot{\phi} = \frac{g}{L}\phi - \frac{1}{L}\ddot{\delta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \phi \\ x_2 &= \dot{\phi} \\ u &= \frac{1}{L}\ddot{\delta} \end{aligned}}$$

$$\dot{x_1} = x_2 = \dot{\phi}$$

$$\dot{x_2} = \ddot{x_1} = \ddot{\phi} = \frac{g}{L}x_1 - u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

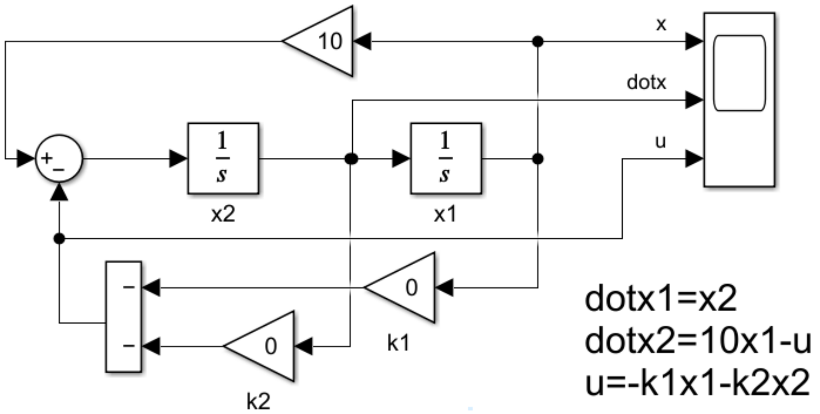
令$L=1\ g=10$

$$\dot{x_1}=x_2 \qquad \begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 10 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}u$$
$$\dot{x_2}=10x_1-u$$

$$u=-kx=-\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=-k_1x_1-k_2x_2$$

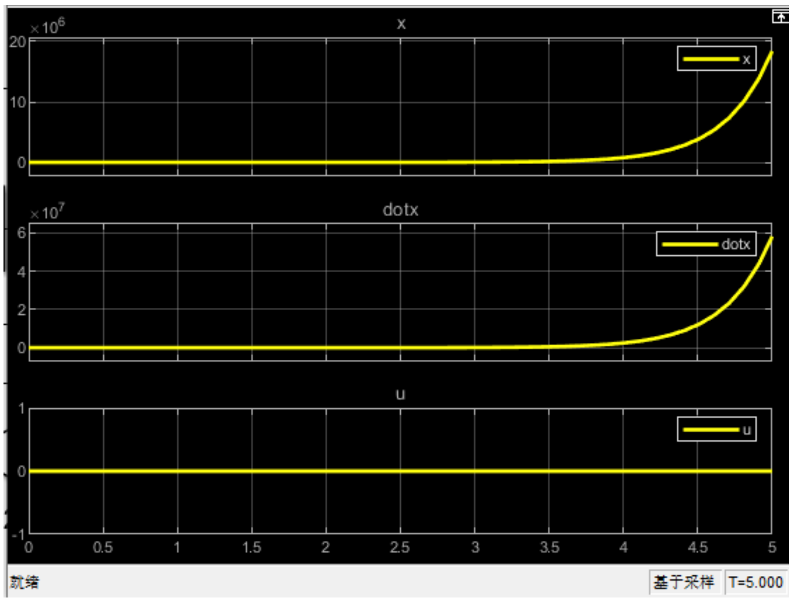
simlink搭建：

开环



给初始位移 5(双击x积分模块设置)

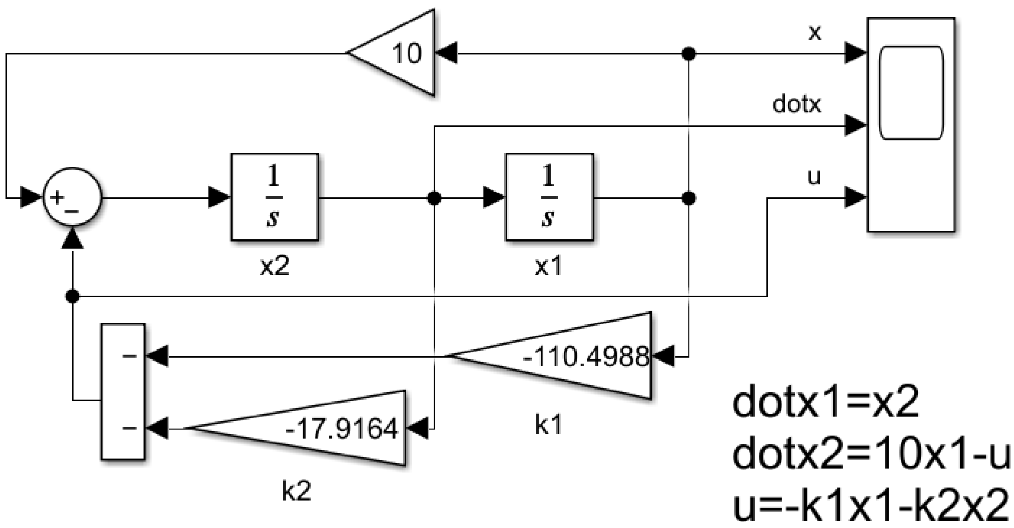
不稳定的

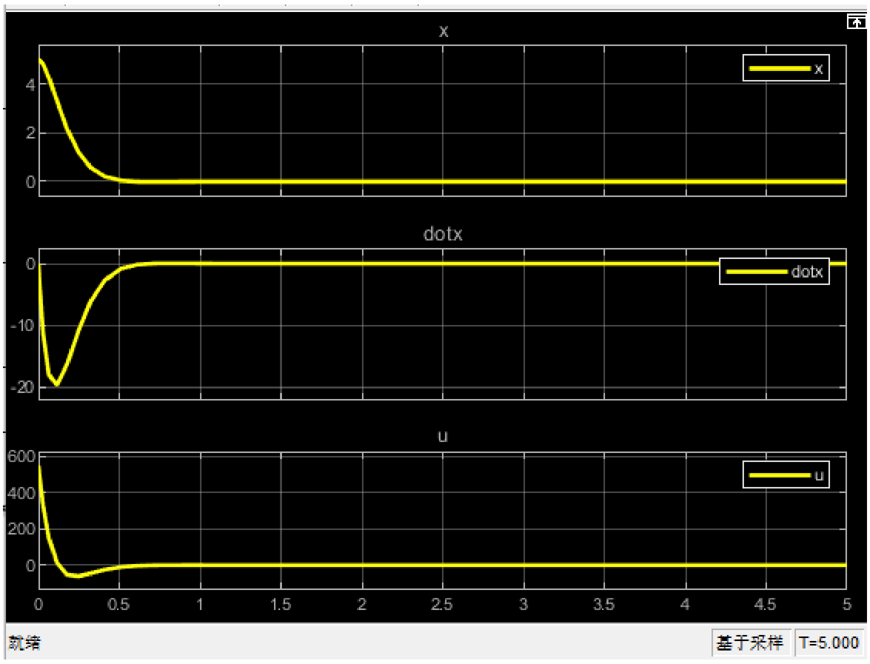


matlab使用lqr函数计算k值

希望x快速收敛，不关心速度
不关心输入大小

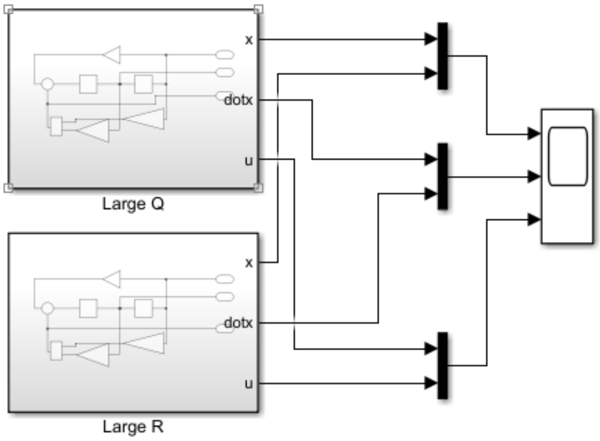
```
>> A=[0 1; 10 0];
>> B=[0;-1];
>> Q=[100 0; 0 1];
>> R=.01;
>> K=lqr(A,B,Q,R)
K =
 -110.4988  -17.9164
```



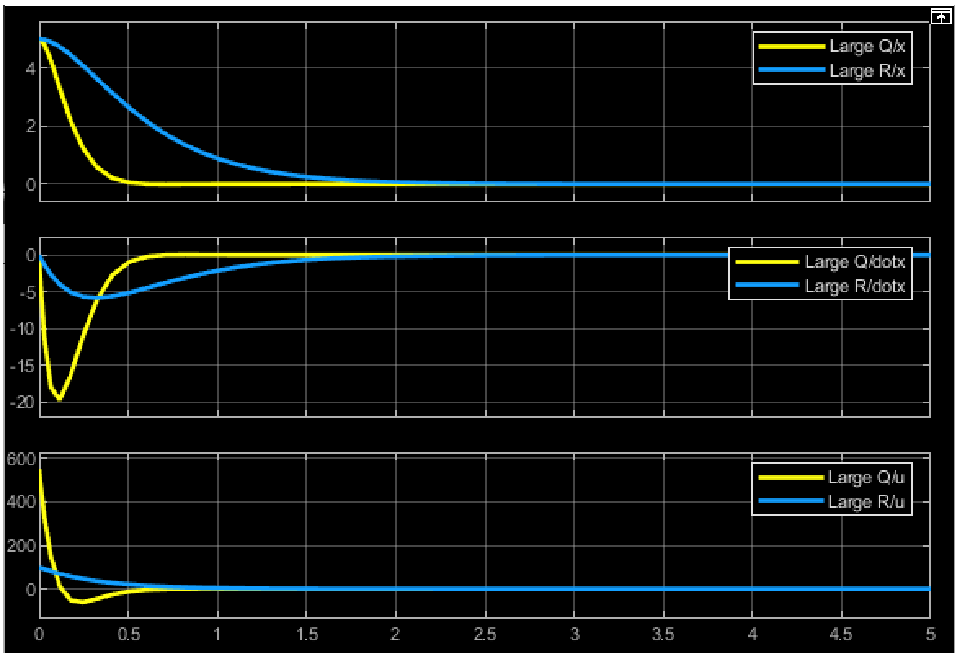


不关心x的收敛
关心输入

```
>> Q=[1 0; 0 1];
>> R=100;
>> K=lqr(A,B,Q,R)
K =
  -20.0005   -6.3254
```



生成Subsystem做比较

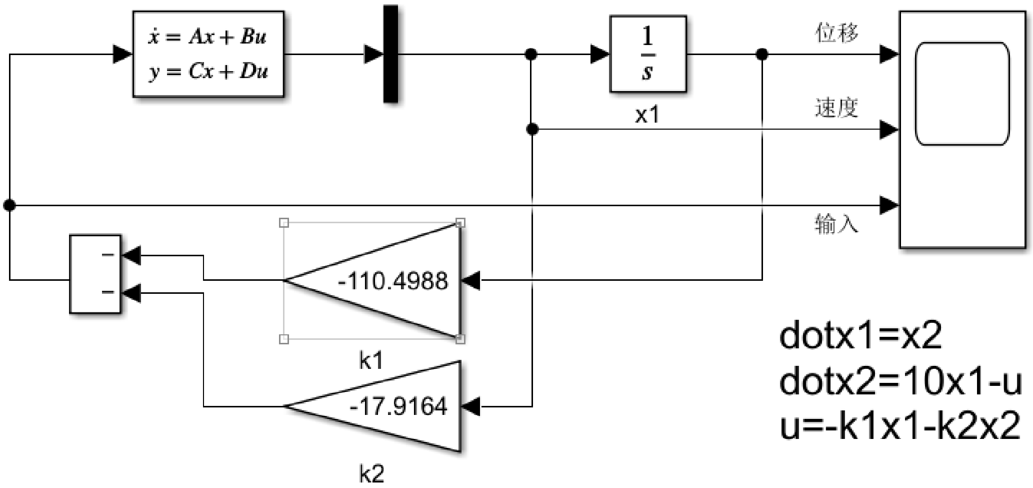


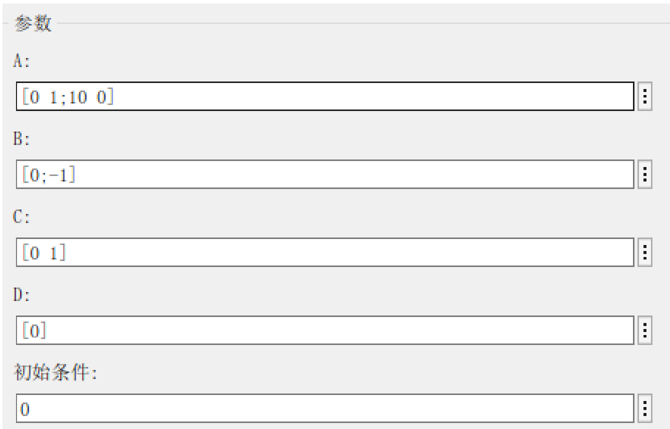
明显看到，黄线的收敛速度快过蓝线
比较输入，蓝色平和的多

选取不同Q和R矩阵能得到系统不同的表现
侧重点不同
- 对于黄线来说，快速收敛
- 对于蓝线，看重能耗问题

另外：

也可以使用matlab的State-Space

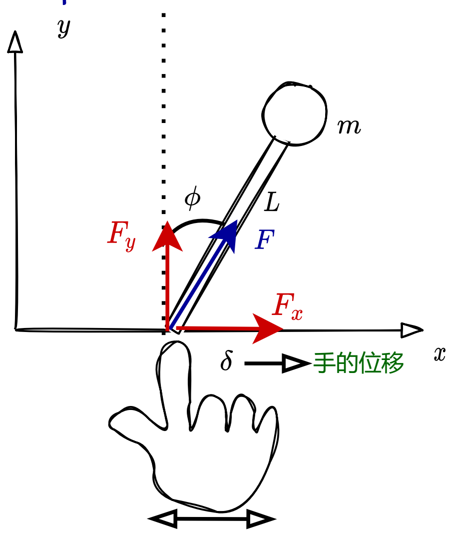




Advanced 控制理论

Linear Controller Design Follow a desired path

Motivation:



Dynamic: $\ddot{\phi} = \frac{g}{L}\phi - \frac{1}{L}\ddot{\delta}$

$$x_1 = \phi$$

$$x_2 = \dot{\phi}$$

$$u = \frac{1}{L}\ddot{\delta}$$

states space $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$

$$u = -kx = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

负反馈的形式，选取k1,k2,使得x1，x2趋向0 $x_1, x_2 \to 0, t \to \infty$

为什么是趋向于0?

open loop $x_{1f}?$ $x_{2f}?$ $\dot{x}_1 = 0$ $\dot{x}_2 = 0$ $\Rightarrow$ $x_{2f} = 0$ $x_{1f} = 0$ fixed point 平衡点

如果希望小球停在$\phi = 5^\circ$ 时，怎么办?

设 $x_{1d} = 5^\circ$ $\phi = x_1$

desired value 引入error $e = x_{1d} - x_1$ 目标: $e \to 0, t \to \infty$

随时间变化 $\dot{e} = \dot{x}_{1d} - \dot{x}_1 = -\dot{x}_1 = -x_2$

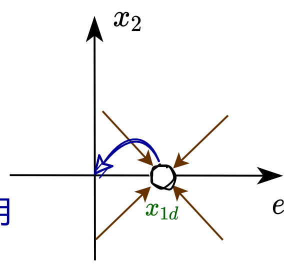
常数=0

$$\dot{x}_2 = \frac{g}{L}x_1 - u = \frac{g}{L}(x_{1d} - e) - u$$

$x_{1d} - e$

新的state space $\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g}{L}x_{1d} \end{bmatrix}$

开环平衡点: $\dot{e} = 0$ $\dot{x}_2 = 0$ $\Rightarrow$ $x_2 f = 0$ $e_f = x_{1d}$ 这里不是我们想要的



控制器u：两个作用
①稳定系统
②调整平衡点

令 $u = -kx = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{g}{L}x_{1d}$

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \left(-\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{g}{L}x_{1d}\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g}{L}x_{1d} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{g}{L} + k_1 & k_2 \end{bmatrix}}_{A_{cl}} \begin{bmatrix} e \\ x_2 \end{bmatrix}$$

平衡点 $\dot{e} = 0$ $\dot{x}_2 = 0$

设计k_1, k_2. 令$Re[eig(A_{cl})] < 0$

$$|\lambda I - A_{cl}| = 0 \qquad \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \frac{g}{L} - k_1 & \lambda - k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - k_2\lambda - \frac{g}{L} - k_1 = 0$$

令$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

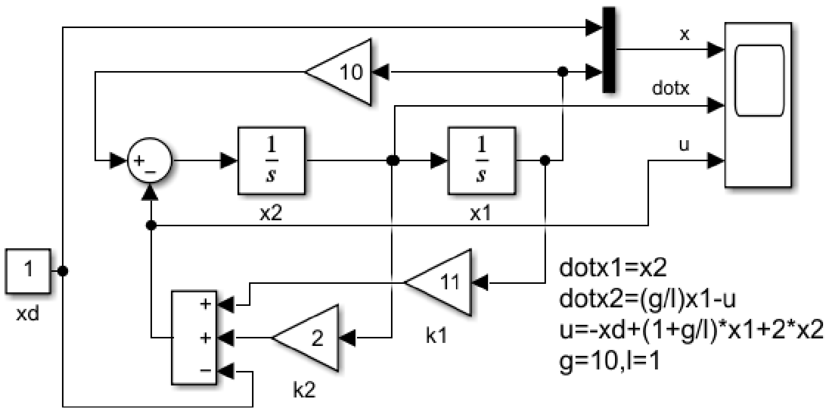
$$(\lambda + 1)^2 = 0$$
$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$k_1 = 1 + \frac{g}{L}$$
$$k_2 = -2$$

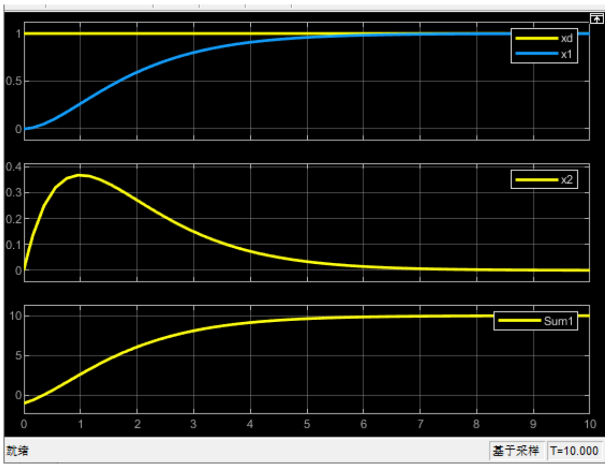
$$u = -\begin{bmatrix} 1 + \frac{g}{L} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{g}{L} x_{1d}$$

将$e = x_{1d} - x_1$代入

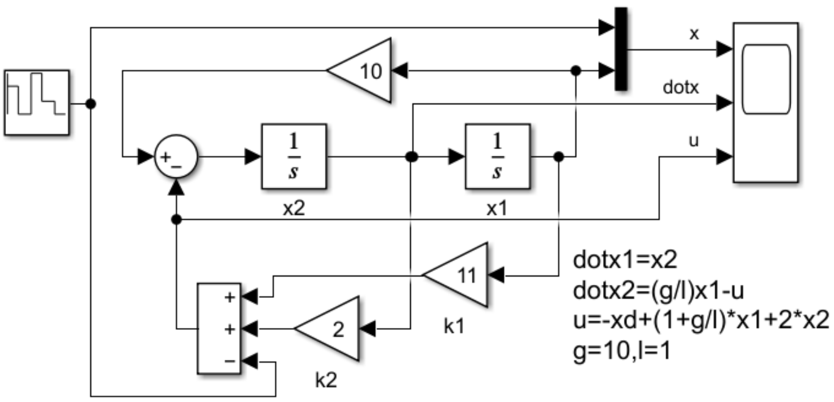
$$u = -x_d + (1 + \frac{g}{L})x_1 + 2x_2$$

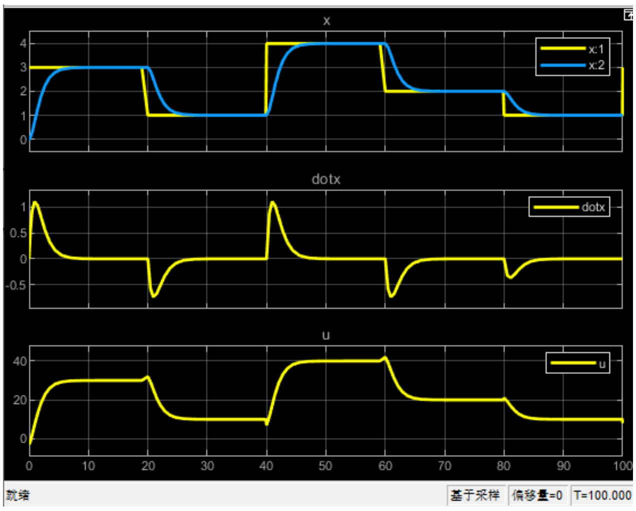
matlab simulink





跟随





Advanced 控制理论

状态观测器设计 Linear Observer Design

Motivation

控制器的设计

State Feedback

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \text{令}u = -kx$$

x：可测

状态

如果x不可测，怎么办？？

Observer
观测器

根据系统的输入和输出来估计系统的状态

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ①$$
$$y = Cx + Du \quad ②$$

Luenberger Observer

设$\hat{x}$为估计值，$\hat{y}$为估计的输出

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y-\hat{y}) \quad ③ \\ \hat{y} &= C\hat{x} + Du \quad ④ \end{aligned}}$$

Find "L"

代④入③ $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + Ly - L(C\hat{x} + Du)$

$$\boxed{\dot{\hat{x}} = (A-LC)\hat{x} + (B-LD)u + Ly \quad ⑤}$$

观测器，
有系统的输入输出，状态估计

①-⑤ $\dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A-LC)\hat{x} - (B-LD)u - Ly$

代入② $\dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A-LC)\hat{x} - (B-LD)u - LCx - LDu$

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A-LC)x - (A-LC)\hat{x} = (A-LC)(x-\hat{x})$$

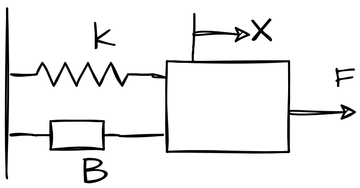
令$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = \dot{e}_x$ error:误差，是估计值与实际值间的误差

目标$e_x \to 0$ $\Longrightarrow$ $A-LC$的特征值 < 0!!!!

$$\boxed{\dot{e}_x = (A-LC)e_x}$$

实际上 建立新的反馈系统，使得 $e_x = x - \hat{x} \to 0$

例子



$Z_1 = x$ 位置 可测

$Z_2 = \dot{x}$ 速度 不可测 观测

$y = Z_1$ 位置 可测

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{B}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

令m=1,　B=0.5,　K=1

$$\begin{bmatrix}\dot{Z}_1\\ \dot{Z}_2\end{bmatrix}=\overset{A}{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}Z_1\\ Z_2\end{bmatrix}+\overset{B}{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}u$$

$$y=\overset{C}{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}Z_1\\ Z_2\end{bmatrix}\qquad D=0$$

$$\text{令}L=\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}\qquad A-LC=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{A-LC=\begin{bmatrix}-l_1 & 1\\ -1-l_2 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}}\qquad \text{求特征值}\quad |\lambda I-(A-LC)|=0$$

这里的计算有错，+写成-了
计算的特征值依然是<0，
观测器依然是收敛的

后面会有说明

$$\lambda^2+(l_1-\frac{1}{2})\lambda+1+\frac{1}{2}l_1+l_2=0$$
$$=\lambda^2+2\lambda+1$$

设$\lambda_1=\lambda_2=-1<0$

$$(\lambda+1)^2=0$$
$$\lambda^2+2\lambda+1=0$$

$$\begin{aligned}l_1-\frac{1}{2}&=2\\ 1+\frac{1}{2}l_1+l_2&=1\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}l_1&=2.5\\ l_2&=-1.25\end{aligned}\qquad L=\begin{bmatrix}2.5\\ -1.25\end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{Z}}=(A-LC)\hat{Z}+(B-LD)u+Ly$$

$$\boxed{\dot{\hat{Z}}=\begin{bmatrix}-2.5 & 1\\ 0.25 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\hat{Z}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}2.5\\ -1.25\end{bmatrix}y}$$

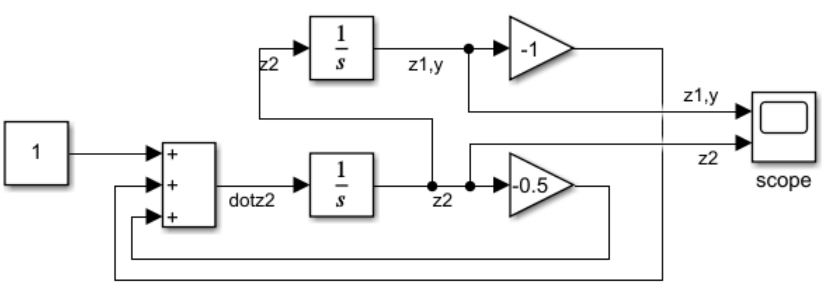
---

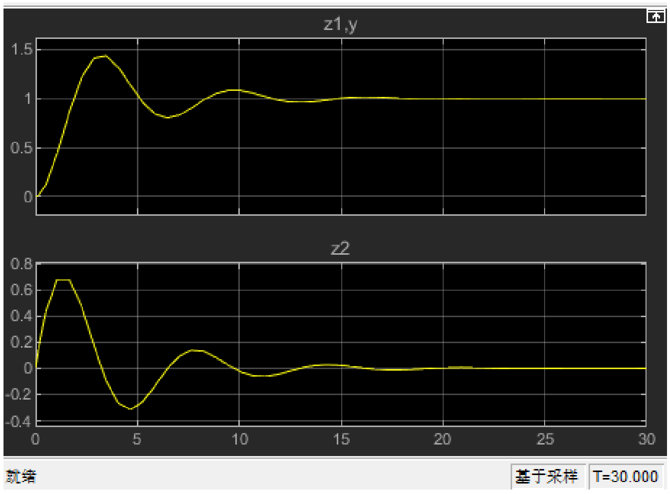
simulink 仿真

开环系统仿真

令m=1,　B=0.5,　K=1

$$\begin{bmatrix}\dot{Z}_1\\ \dot{Z}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_1\\ Z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_1\\ Z_2\end{bmatrix}$$



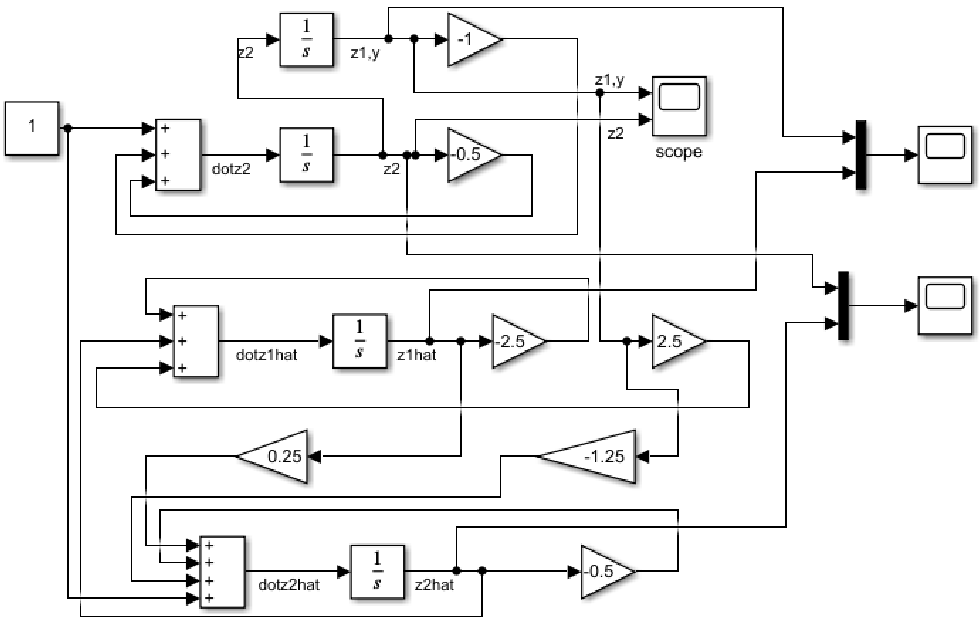


加入观测器仿真

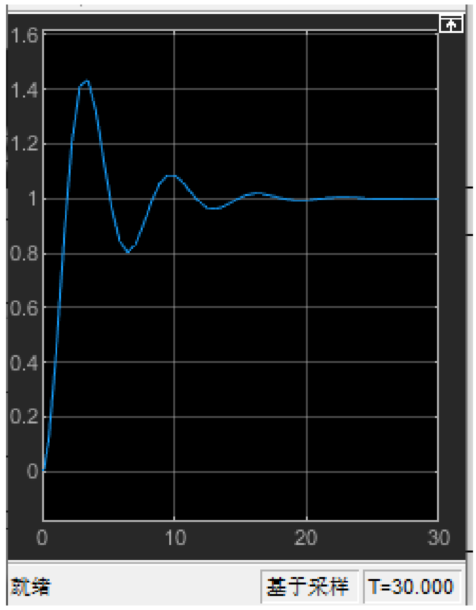
观测器

$$\dot{\hat{Z}}=\begin{bmatrix}-2.5 & 1\\ 0.25 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\hat{Z}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}2.5\\ -1.25\end{bmatrix}y$$

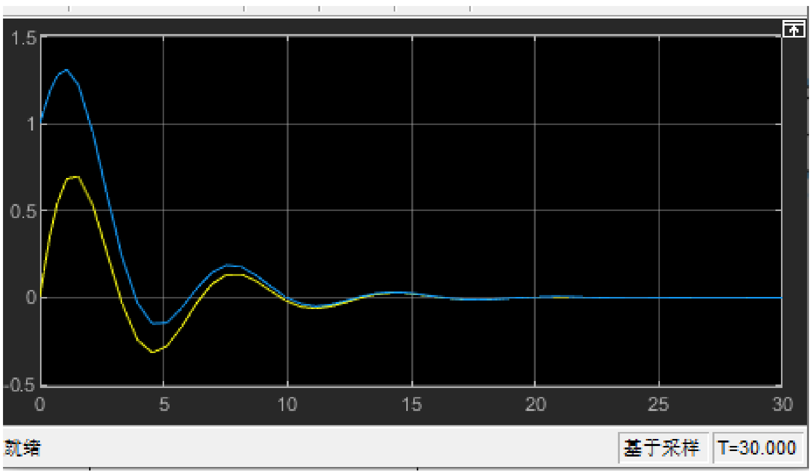
乱七八糟的连线后



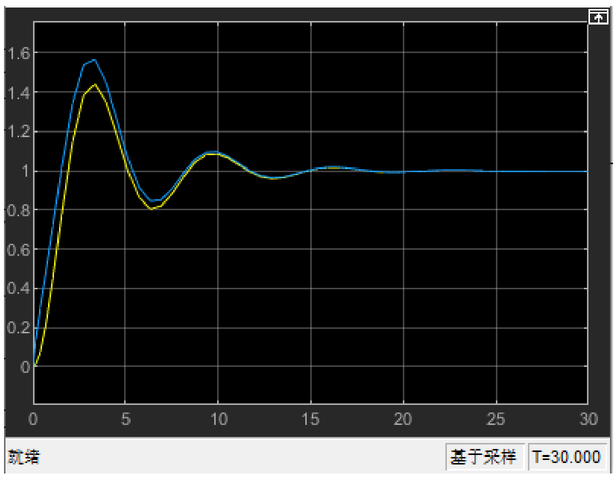
收敛速度很快，观察和实际重合



z2一个的初始值的波形，观察收敛



zl的波形



Advanced 控制理论

矩阵特征值的一个性质，一个错误说起

上个视频中，计算特征值的一个计算错误

选取合适的特征值

$$A - LC = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -1 - l_2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$|\lambda I - (A - LC)| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \frac{g}{L} - k_1 & \lambda - k_2 \end{vmatrix} = (\lambda + l_1)(\lambda + \frac{1}{2}) = \lambda^2 + (l_1 + \frac{1}{2})\lambda + 1 + \frac{1}{2} l_1 + l_2 = 0$$

上个视频计算错误，+写成了-

$$\boxed{\begin{aligned} l_1 &= 2.5 \\ l_2 &= -1.25 \end{aligned} \quad \text{错误}}$$

用了错误的值，在仿真的时候，还是得出了相对正确的结果

这个错误的值，依然保证了A-LC这个矩阵的特征值还是负的，保证了状态观测器收敛的

$$A - LC = \begin{bmatrix} -2.5 & 1 \\ 0.25 & -0.5 \end{bmatrix}$$

很快可以判断 $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

矩阵的一个特性

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = tr(A)$$

$$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n = |A|$$

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad |\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

一元二次方程的一般形式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |A|$$

$$A - LC = \begin{bmatrix} -2.5 & 1 \\ 0.25 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2.5 - 0.5 = -3$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1.25 - 0.25 = 1$$

λ_1, λ_2同号，必定都小于零

二阶矩阵的一个快速判断的技巧

Advanced 控制理论

Observability 可观测性　　　Separation Principle 分离原理

回忆　　Observer 观测器　　$\dot{x} = Ax + Bu$

当x不可测的时候，设$\hat{x}$为估计值

令　$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$　①

$\hat{y} = C\hat{x} + Du$　②

$e_x = x - \hat{x}$　③

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

①，②，③合并 $\Rightarrow$ $\dot{e}_x = (A - LC)e_x$

目标$e_x \to 0$ $\Rightarrow$ $Re[eig(A - LC)] < 0$　特征值实部小于0

是否所有的系统都是可以观测的？

定义：如果一个系统可观测　$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$　$Rank(O) = n$　满秩的矩阵

$\boxed{\text{推导可参考可控性}}$

e.g.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$Rank(O) = 1$ $\Rightarrow$ 不可观测！！

观测器+控制器

$\dot{x} = Ax + Bu$　　系统：可控+可观测

$y = Cx + Du$　　×不可测量

STEP 1 观测器 $\hat{x}$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \qquad e_x = x - \hat{x}$$

$$\dot{e}_x = (A - LC)e_x \qquad ①$$

观测出来的预估值后，设计反馈系统

STEP 2 控制器

设$u = -k\hat{x}$

$$\dot{x} = Ax - Bk\hat{x} = Ax - Bk(x - e) = (A - Bk)x + Bke \qquad ②$$

由①&②

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - LC & 0 \\ Bk & A - Bk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

M

$e_x \to 0$估计值趋近实际值

$x \to$ 系统稳定

Re[Eig(M)]<0 渐进稳定

对于一个三角矩阵,M的特征值就是A-LC和A-Bk的特征值

$$|\lambda I - M| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda - (A - LC) & 0 \\ Bk & \lambda - (A - Bk) \end{vmatrix} = 0$$

$$[\lambda I - (A - LC)][\lambda I - (A - Bk)] = 0 \quad \Rightarrow$$

Re[Eig(A-LC)]<0 Re[Eig(A-Bk)]<0

分离原理控制器和观测器分开了

Separation Principle

我们希望 Observer faster than Controller!!

Advanced 控制理论

现代控制理论串讲

State-Space Rep

state $\dot{x} = Ax + Bu$ input

output $y = Cx + Du$

状态空间方程->拉普拉斯变换

$\dot{x} = Ax + Bu$

$$SX_{(S)} = AX_{(S)} + BU_{(S)}$$

$$(SI - A)\, X_{(S)} = BU_{(S)}$$

$$X_{(S)} = (SI - A)^{-1} BU_{(S)}$$

$y = Cx + Du$

$$Y_{(S)} = CX_{(S)} + DU_{(S)}$$

$$Y_{(S)} = C(SI - A)^{-1} BU_{(S)} + DU_{(S)}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(SI - A)^{-1} B + D$$

OpenLoop

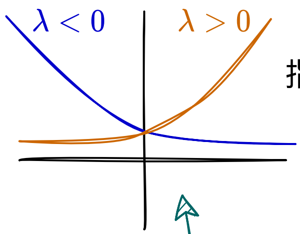
$\dot{x} = Ax$

特征值λ

它将决定系统的稳定性，和系统的表现

λ判断系统的表现的原因：

$$x_1 = C_{11} e^{\lambda_1 t} + C_{12} e^{\lambda_2 t} + \cdots$$
$$x_2 = C_{21} e^{\lambda_1 t} + C_{22} e^{\lambda_2 t} + \cdots$$



指数函数的图像

根据这个就可以判断系统的稳定性

$Re(\lambda_i) < 0$ $\quad t \to \infty, x_i \to 0$

$Re(\lambda_i) > 0$ $\quad t \to \infty, x_i \to \infty$

$I_m \neq 0$ $\quad e^{(a+bi)t} = e^{at} \cdot e^{ibt}$ $\quad$ 欧拉公式：$e^{it} = \cos t + i \sin t$

振动

CloseLoop

引入反馈系统 $\quad u = -kx$

$$\dot{x} = Ax - Bkx$$
$$\dot{x} = (A - Bk)x$$

A_{cl}：闭环系统矩阵

只需要让这个矩阵的特征值小于0，通过设计不同的k来控制这个矩阵的特征值

LQR

这个x有的时候是不可测的 $\Rightarrow$ 观测器

$$x - \hat{x} = e_x$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + Du$$

$$\dot{e}_x = (A - LC)e_x$$

我们使得$A - LC$的特征值 < 0!!!!

$t \to \infty, e \to 0$

观测器&控制器

$$\dot{e}_x = (A - LC)e_x$$

$$\dot{x} = (A - Bk)\hat{x}$$

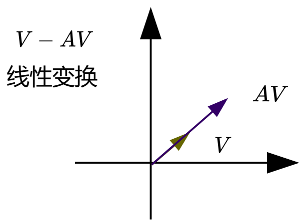
整个重点，在如何设计使得$\lambda < 0$

如何求一个特征值

$$AV = \lambda V$$

$$(A - \lambda I)V = 0$$

$$|A - \lambda I| = 0$$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(SI - A)^{-1}B + D$$

$$(SI - A)^{-1} = \frac{(SI - A)^*}{|SI - A|}$$

$|SI - A| = 0 \Rightarrow$ s是A的特征值也是极点

在传递函数中求极点，就相当于在矩阵中求特征值