形式语言与自动机 大作业 2

综合练习

1951112　林日中

第 1 题

设

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right\}$$

Σ 包括所有高度为 2 的 0 和 1 的列，Σ 上的字符串给出两行 0 和 1. 把每一行看作一个二进制数，令

$$E = \left\{ \omega \in \Sigma^* \middle| \omega \text{ 的下一行是上一行的反转} \right\}$$

例如

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \in E, \text{while} \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \notin E$$

证明 E 不是正则的.

证明. 假设这个语言 E 是正则的. 那么由正则语言的泵引理，存在一常数 $p > 0$，对于语言 E 中每个满足 $|w| \geq p$ 的字符串 w，存在一组 x, y, z 使得 $w = xyz$ 且有 $|xy| \leq p, |z| \geq 1$，并且有 $\forall k \geq 0, xy^k z \in E$.

考察串 $w = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]^p \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]^p, |w| = 2p \geq p$，其中 $1^p 0^p = (0^p 1^p)^R$. 按照泵引理，对串 w 生成一组分解 x, y, z. 由于 $|xy| \leq p$，那么必有泵 $y \in \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]^+$.

那么，由语言 E 是正则的，有 $w' = xy^2 z = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]^{p+1} \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]^p$，显然有 $0^{p+1} 1^p \neq (1^{p+1} 0^p)^R$，即 $w' \notin E$.

因此，语言 E 中存在不满足正则语言的泵引理的串，这与它是正则语言的假设矛盾. 故这个语言 E 不是正则的.

第 2 题

证明语言 $F = \{a^i b^j | \exists k \in \mathbb{Z}_+, i = kj\}$ 不是上下文无关的.

证明. 假设语言 F 是上下文无关的. 那么由上下文无关语言的泵引理，存在一常数 $p_0 > 0$，对于语言 F 中每个满足 $|z| \geq p_0$ 的字符串 z，存在一组 u, v, w, x, y 使得 $z = uvwxy$ 且有 $|vwx| \leq p_0, vx \neq \varepsilon$ 且 $\forall i \geq 0, uv^iwx^iy \in F$.

考察串 $a^{p^2}b^p, p > p_0$，对应地有 $k = p$. 对于串 vwx，有 $|vwx| \leq p_0 < p$ 且 $vwx \in a^+, b^+$ or a^+b^+.

当 $vwx \in a^+$ 时,对于串 $uv^0wx^0y = a^{p^2-|vx|}b^p, 0 < |vx| \leq |vwx| < p$,有 $p^2 - p < p^2 - |vx| < p^2$. 显然，因为区间 $(p-1, p)$ 内不可能有整数，故 $p^2 - |vx|$ 不可能被 p 整除. 故此时，有 $uv^0wx^0y \notin F$.

当 $vwx \in b^+$ 时，有 $uv^iwx^iy = a^{p^2}b^{p+i\times|vx|}$. 因为 $\forall i > p^2, p + i \times |vx| > p^2$，故有 $uv^iwx^iy \notin F, i > p^2$.

当 $v \in a^+b^+$ 或 $x \in a^+b^+$ 时，uv^iwx^iy 中 a 与 b 的顺序被打乱，此时有 $uv^iwx^iy \notin F$.

当 $v \in a^+$ 且 $x \in b^+$ 时，对于串 $uv^iwx^iy = a^{p^2+i\times|v|}b^{p+i\times|x|}, |v|, |x| > 0$，有

$$f(i) = \frac{|a|}{|b|} = \frac{p^2 + i \times |v|}{p + i \times |x|}$$

对于 $f(i)$ 的一阶导数 $f'(i)$，因为 $|vwx| \leq p$，有

$$f'(i) = \frac{p \times |v| - p^2}{(p + |x| \times i)^2} < 0$$

故函数 $f(i) \in \left(\frac{|v|}{|x|}, f(0)\right]$，且为单调递减函数，其中

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{p^2 + i \times |v|}{p + i \times |x|} = \frac{|v|}{|x|}$$

然而，在区间 $\left(\frac{|v|}{|x|}, p\right]$ 内，只有少于 $f(0) = p$ 个整数，且 $f(i)$ 单调递减；即只对有限的 i 的取值而言，$f(i)$ 是整数. 那么，我们总能找到使 $f(i)$ 不为整数的 i 的取值，此时有 $uv^iwx^iy \notin F$.

综上所述，语言 $F = \{a^ib^j | \exists k \in \mathbb{Z}_+, i = kj\}$ 不是上下文无关的.

第 3 题

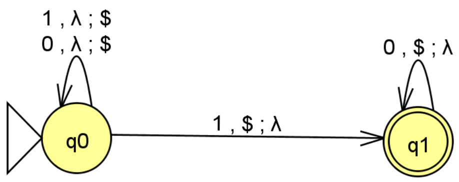
设 $\Sigma = \{0,1\}$，B 为后一半中至少包含一个 1 的串的集合. 换句话说，$B = \{uv | u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^*1\Sigma^*, |u| \geq |v|\}$.

a. 设计一个能识别语言 B 的 PDA；

b. 设计一个能产生语言 B 的 CFG.

解答.

a. 能识别语言 B 的 PDA 如下图所示.



b. 构建能产生语言 B 的 CFG $C = (V, \Sigma, R, S)$，其中

$$V = \{A, B\}, \Sigma = \{0, 1\}, S = A$$

R 是由以下产生式组成的集合：

$$A \to 0A0 \mid 0B1 \mid 1A0 \mid 1B1$$

$$B \to 0B0 \mid 0B1 \mid 1B0 \mid 1B1 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$$

在这个语法中，我们构建字符串的方式是总在两边各加一个 0 或一个 1，所以我们在跟踪我们字符串的中间点. 如果我们在推导的某个地方得到了 B 变量，我们就可以终止了. 如果我们在字符串的后半部分加上一个 1，我们就能在推导的某个地方得到 B 变量. 然后我们可以继续构建我们的字符串，最终选择 0、1 或 ε 作为我们的中间符号.

第 4 题

证明语言 $L \subseteq \{0\}^*$ 是上下文无关的当且仅当 L 是正则的.

证明. **先证充分性.** 要证充分性，只需证所有正则语言都是上下文无关的. 由乔姆斯基层次结构（Chomsky's Hierarchy），每个高型的语言都是低型的，故每一个正则语言都是上下文相关的. 那么，若 L 是正则的，那么 L 是上下文相关的. 充分性得证.

再证必要性. 已知语言 $L \subseteq 0^*$ 是上下文无关的. 由上下文无关语言的泵引理，存在泵长度 p. 令 $L = L_1 \cup L_2$，其中 L_1 是由 L 中长度小于 p 的串的集合，L_2 是由 L 中长度大于等于 p 的串的集合. 同样地，由泵引理，易得 L_1 是有限集，故 L_1 是正则语言，从而只需证 L_2 也是正则语言.

参照泵引理，任取 $z = uvwxy = 0^{|uwy|+|vx|} \in L_2, |vx| \leq p$. 那么有

$$uv^kwx^ky = 0^{|uwy|+k\cdot|vx|} = 0^{r+\hat{k}q}, q = |vx|, 0 \leq r < q, \hat{k} = \left\lfloor k + \frac{|uwy|}{q} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{|uwy|}{q} \right\rfloor$$

接下来，我们构造一组 p 个集合 $M_q = \{0^{r+kq} | 0 \le r < q, k \in \mathbb{N}^*\}, 1 \le q \le p$，并取 $L_{2q} = L \cap M_q$，也即去除 k 取较小值时可能不在 L 中的元素. 我们可以断言

$$L_2 = \bigcup_{q=1}^{p} L_{2q}$$

原因有二：

第一，由 L_{2q} 的定义有 $L_2 = \bigcup_{q=1}^{p} L_{2q} \subseteq L_2$；

第二，假设 $\exists z \in L_2 \cap \bigcup_{q=1}^{p} L_{2q} \subseteq L_2$，参照泵引理做划分，有 $z = uvwxy$，那么有

$$uv^k wx^k y = 0^{(|uwy| \bmod |vx|) + \left(k + \left\lfloor \frac{|uwy|}{q} \right\rfloor\right) \cdot |vx|} \in L_2, |vx| \notin \{1,2,\cdots,p\}$$

这与 $|vx| \le p$ 矛盾.

由于 L_{2q} 与正则表达式 $(0|1|2|\cdots|q-1) + q^*$ 表示的语言相差有限个串（因为 0^{r+kq} 中的余数 r 只有有限个取值，即上述正则表达式只有有限次并运算），那么 L 是有限个正则语言的并，故 L 为正则语言.

综上所述，语言 $L \subseteq \{0\}^*$ 是上下文无关的当且仅当 L 是正则的.

第 5 题

二维图灵机具有通常的有穷控制，带却是在所有方向上都是无穷的二维单元网格. 和往常一样，输入放在网格的一行上，带头在输入的左端，控制处于初始状态. 同样和往常一样，以进入终结状态方式来接受. 证明：二维图灵机与普通图灵机接受的语言是一样的.

证明. 为了证明具有双重无限磁带的图灵机（即题中提到的二维图灵机） D 等同于普通图灵机 M 之间的等价性，有必要说明以下两点：

- 任何能被 M 识别的语言 L，也能被 D 识别.
- 任何能被 D 识别的语言 L，也能被 M 识别.

这可以通过“模拟”来说明，即模拟 D 像 M 一样工作，反之亦然.

(i) 用 D 模拟 M.

a) 在 D 的左手边做标记.

b) 防止 D 把它的头移到标记的左边.

这样一来，D 就模拟了 M.

(ii) 用 M 模拟 D.

为了用一个普通图灵机 M 来模拟具有双重无限磁带的图灵机 D,可以用一个 2 个带子的图灵机来模拟它（由 Hopcroft 课本 8.4.2 小节的定理 8.9，有 2 个带子的图灵机与普通图灵机等价）.

因此，我们用 2 个带子的图灵机 M_1 模拟具有双重无限磁带的图灵机 D.

M_1 的第一条带子上写有输入字符串，第二条带子是空白的.

现在,在输入字符串的起始单元,将具有双重无限磁带的图灵机 D 的带子切成两部分.

- 第一部分包含输入字符串和其右边的所有空白.
- 第二部分包含输入字符串的左边出现在第二个磁带上，顺序相反.

这样一来，M 就模拟了 D.

综合 (i) 和 (ii),有 D 等价于 M,即具有双重无限磁带的图灵机等同于普通图灵机. 也即二维图灵机与普通图灵机接受的语言是一样的.

第 6 题

课程教学质量评估：

a. 请对你个人的学习效果进行评价（分成优、良、中、及格、不及格五个档次），简要说明理由；

b. 请对本课程的教学方式、教学内容、教学安排等教学环节进行简要评价，提出宝贵的意见和建议；

c. 个人作品展示，包括与本课程直接相关的思考探索、定理证明、软件作品等. 如涉及较多文件，请压缩后提交.

解答.

a.

b.

由于疫情的影响，课程的绝大部分只能在线上进行，教学形式被限制，缺乏师生之间的眼神交流、面对面即时问答等直接的互动，但课程组织得很好，课程内容丰富，课程评价体系完善，我对课程的感觉很好，在课程期间收获很多.

我的建议是：老师可以再多介绍一些计算理论相关的知识，还可以稍微降低课后作业的强度和难度.

c.